СОВРЕМЕННЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ

И. И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО

ГЕОМЕТРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ И ТЕОРИЯ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

ФМ

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи математических наук»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

И. И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО

ГЕОМЕТРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ И ТЕОРИЯ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

АННОТАЦИЯ

Настоящая монография посвящена теории автоморфных функций многих комплексных переменных. Это первая изданная у нас в Союзе книга, посвященная этой теме (если не считать перевода книги Зигеля «Автоморфные функции нескольких комплексных переменных»). В книге подробно рассматриваются так называемые классические области и области Зигеля.

Книга рассчитана на научных работников и аспирантов, занимающихся теорией функций комплексного переменного, а также на студентов, специализирующихся в этой области.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория автоморфных функций одного комплексного переменного была создана в конце XIX и начале XX веков Клейном, Пуанкаре, Кебе и др. Тогда же начала развиваться теория автоморфных функций многих комплексных переменных. Следует, однако, заметить, что только после работ К. Зигеля [1—9] теория автоморфных функций многих комплексных переменных превратилась в самостоятельную дисциплину.

Фундаментальную роль в теории автоморфных функций, по-видимому, призваны сыграть методы теории представлений групп Ли, в особенности, теории бесконечномерных представлений.

Обзор применений теории представлений к теории автоморфных функций см. в статье И. М. Гельфанда и И. И. Пятецкого-Шапиро [1].

В настоящей книге непосредственно не применяются методы теории представлений. Тем не менее связь с теорией представлений можно проследить во многих местах.

Перейдем к изложению содержания книги. В теории автоморфных функций одного комплексного переменного фундаментальную роль играет теорема об алгебраических соотношениях. Эта теорема утверждает, что поле автоморфных относительно данной дискретной группы функций является полем алгебраических функций одного неизвестного. Иными словами, среди автоморфных относительно данной дискретной группы Γ функций существуют такие две функции f_0 и f_1, связанные алгебраическим соотношением, что любая автоморфная функция представляет собой рациональную функцию от них. Отметим, что для автоморфных функций одного комплексного переменного без труда описывается класс дискретных групп, для которых справедлива указанная теорема. Само доказательство теоремы также очень просто.

Аналогичная теорема для автоморфных функций от n комплексных переменных формулируется следующим образом.

Совокупность всех автоморфных относительно данной дискретной группы Γ функций является полем алгебраических функций n неизвестных. Иными словами, среди всех автоморфных относительно данной группы Γ функций существуют такие функции $f_0(z), \ldots, f_n(z)$, связанные алгебраическим соотношением $A(f_0, \ldots, f_n) = 0$, что любая автоморфная функция является рациональной функцией от них.

Одной из наиболее важных задач теории автоморфных функций многих комплексных переменных является задача отыскания общих условий, обеспечивающих справедливость теоремы об алгебраических соотношениях.

Зигель [1] доказал, что эта теорема имеет место, если область существования автоморфных функций $\mathscr{D}$ ограничена и фактор-пространство $\mathscr{D}/\Gamma$ компактно. В случае некомпактного фактор-пространства доказательство теоремы значительно сложней. До настоящей работы были известны лишь частные примеры дискретных групп, для которых была установлена справедливость этой теоремы. В частности, Зигель [3] доказал справедливость этой теоремы для введенной им модулярной группы.

В главе III описан общий класс дискретных групп в классических областях*), названных нормальными дискретными группами, для которых справедлива теорема об алгебраических соотношениях.

Описание этого класса дискретных групп и само доказательство теоремы об алгебраических соотношениях основаны на детальном изучении геометрии классических областей.

Хорошо известно, что граница области в многомерном комплексном пространстве с точки зрения комплексной структуры вообще говоря не однородна, т. е. расслаивается на аналитические кусочки различных размерностей. Простейший пример — область $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$. Граница этой области, очевидно, состоит из точек $|z_1| \leqslant 1$, $|z_2| \leqslant 1$,

---

*) Ограниченная область в n-мерном комплексном пространстве называется классической, если полная группа ее взаимно однозначных аналитических отображений (аналитических автоморфизмов) является классической группой Ли и транзитивна на ней. Полная классификация классических областей принадлежит Э. Картану [3].

$(1-|z_1|)(1-|z_2|)=0$. Совокупность точек границы вида $(1, z_2)$, $|z_2|<1$, представляет собой аналитический кусочек границы. Кроме этого, в границе есть еще аналитические кусочки, состоящие из одной точки; типичным примером их является точка $(1, 1)$.

В главе II для всех классических областей описаны все максимальные аналитические кусочки их границы. Они названы компонентами границы. Доказывается, что каждая компонента границы может быть аналитически отображена на некоторую классическую область в пространстве меньшего числа измерений. Отметим, что строение границы классической области тесно связано со структурой множества всех унитарных представлений группы ее аналитических автоморфизмов. С точки зрения теории компонент границы становятся понятными многие результаты из теории представлений (М. Граев [1]).

Следующая задача состоит в изучении геометрии классической области вблизи данной компоненты. Для этой цели используются отображения классической области на некоторые неограниченные области, играющие для нее такую же роль, какую обычная верхняя полуплоскость играет для единичного круга. Разъясним это более подробно. Обычная реализация классических областей является реализацией типа «единичный круг», т. е. существует такая точка, что все аналитические отображения области, оставляющие эту точку на месте, являются линейными преобразованиями.

Хорошо известно, что в случае одного комплексного переменного обычная верхняя полуплоскость обладает следующим свойством. Для каждой точки z_0 границы круга $|z|<1$ существует аналитическое отображение круга на верхнюю полуплоскость, при котором все преобразования, оставляющие на месте точку z_0, переходят в линейные преобразования верхней полуплоскости.

Нами устанавливается полный аналог этой теоремы. Именно, в главе II показано следующее:

Пусть $\mathscr{D}$ — классическая область, $\mathscr{F}$ — компонента ее границы, z_0 — некоторая точка компоненты. Существует такое аналитическое отображение области $\mathscr{D}$ на некоторую неограниченную область S, что все преобразования области $\mathscr{D}$, оставляющие на месте точку z_0, переходят в линейные преобразования области S, а все преобразования области $\mathscr{D}$, переводящие в себя компоненту $\mathcal{F}$, переходят в так называемые **квазилинейные** преобразования области S. (Определение квазилинейных преобразований см. в § 3 гл. I.)

Естественно, что таких неограниченных областей существует столько же, каково число транзитивных частей*) границы области. Эти аналоги обычной верхней полуплоскости названы нами **областями Зигеля** в честь К. Зигеля, впервые использовавшего для одного частного случая аналогичное отображение.

В главе I дано общее конструктивное описание областей Зигеля. Это представляет интерес не только для задач теории автоморфных функций, но и для других разделов теории функций многих комплексных переменных. В частности, с помощью этих областей впервые удалось построить пример ограниченной однородной**) несимметрической***) области в аффинном комплексном пространстве и тем самым решить проблему, поставленную Э. Картаном в 1935 году.

В 1935 г. Э. Картан нашел все ограниченные однородные области в комплексном пространстве размерности 2 и 3. Оказалось, что все они являются симметрическими. Уже в четырехмерном комплексном пространстве ему не удалось описать все ограниченные однородные области. Однако Э. Картан сумел найти все ограниченные симметрические области. В связи с этим он поставил вопрос: существуют ли ограниченные однородные несимметрические области?

А. Борель [1] и Ж. Кошуль [1] доказали, что всякая ограниченная однородная область, в которой транзитивно действует полупростая группа Ли, симметрическая. Их результат был усилен Хано, который доказал, что если в некоторой ограниченной области транзитивно действует унимодулярная группа Ли, то эта область симметрическая.

---

*) Имеется в виду транзитивность относительно полной группы аналитических автоморфизмов области $\mathcal{D}$.

) Область называется **аналитически однородной, если для любой пары ее точек существует взаимно однозначное аналитическое отображение на себя, переводящее одну из этих точек в другую.

***) Область называется **симметрической**, если для любой ее точки существует аналитическое взаимно однозначное отображение на себя φ со следующими свойствами: 1) $\varphi(z) = z$ только при $z = z_0$, 2) φ^2 — тождественное отображение.

Как показал Э. Картан [3], всякая симметрическая область однородна.

Первый пример ограниченной однородной несимметрической области был построен автором настоящей книги (И. И. Пятецкий-Шапиро [8]). Оказалось, что несимметрические области существуют для всех размерностей, начиная с четырех. Уже после оформления настоящей книги автору удалось получить полную классификацию ограниченных однородных областей, в которых просто транзитивно действует некоторая разрешимая группа Ли. По-видимому, это последнее ограничение несущественно; указанные результаты содержат классификацию всех ограниченных однородных областей.

Отметим, что к рассматриваемому классу областей принадлежит любая аффинно однородная область в комплексном пространстве, аналитически эквивалентная некоторой ограниченной области и гомеоморфная евклидовому пространству. Оказалось, что существует конечное число аналитически неэквивалентных областей указанного типа для размерности, не превосходящей шести. Неэквивалентные области указанного типа для размерности, равной семи, зависят уже от параметра, т. е. их континуум. С ростом размерности число параметров, от которых зависят неэквивалентные области, быстро растет. Основную роль в этих рассмотрениях играет алгебраическое изучение одного класса алгебр Ли (см. § 19 настоящей книги) и теория областей Зигеля третьего рода (см. § 3 и 20 настоящей книги).

Свое доказательство теоремы об алгебраических соотношениях Зигель основывал на разложении модулярных функций в ряды Фурье. Аналогичное положение имеет место и в общем случае с той только разницей, что в рассматриваемых в общей ситуации рядах Фурье коэффициенты не константы, а якобиевы функции. Такие ряды мы называем рядами Фурье — Якоби.

По-видимому, ряды Фурье — Якоби представляют собой весьма сильный аппарат в теории автоморфных функций. Излагаемое в главе III доказательство теоремы об алгебраических соотношениях основано, помимо теории этих рядов, на теории аналитических нормальных пространств. В нем существенно использованы общая теорема Реммерта [1] о строении поля мероморфных функций на любом компактном аналитическом нормальном пространстве и общая теорема А. Картана [1] о расширении аналитических нормальных пространств.

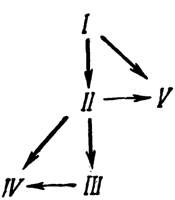
В главе IV дано другое доказательство теоремы об алгебраических соотношениях, которое основано только на теории рядов Фурье — Якоби и не использует теорию аналитических нормальных пространств. Это интересно тем, что показывает важность рядов Фурье — Якоби и областей Зигеля для теории автоморфных функций. Однако путь главы III, по-видимому, предпочтительней, поскольку одновременно вводятся интересные общие понятия, например, пространство M (см. § 9 гл. III).

Нам кажется, что аппарат рядов Фурье — Якоби и областей Зигеля может представить интерес для теоретико-числовых применений.

Для чтения настоящей книги достаточно знания линейной алгебры и теории функций комплексного переменного в объеме университетского курса и теории функций многих комплексных переменных в объеме книги Зигеля [1].

В заключение автор выражает благодарность А. О. Гельфонду, которому принадлежит инициатива написания настоящей книги.

Схема зависимости глав



Жирные стрелки означают зависимость основного текста, тонкие стрелки означают отдельные ссылки.

ГЛАВА I

ОБЛАСТИ ЗИГЕЛЯ

В настоящей главе изучаются некоторые неограниченные области в аффинном комплексном пространстве, являющиеся аналогами верхней полуплоскости в случае одного переменного*). Эти области названы нами областями Зигеля. Как будет доказано в следующей главе, любая классическая область может быть отображена на некоторую область Зигеля.

В настоящей главе рассматриваются общие свойства областей Зигеля, дается конструктивное определение, выясняются достаточные условия того, чтобы область Зигеля была аналитически однородна.

В § 1 рассматриваются наиболее простые области Зигеля, названные нами областями Зигеля 1-го рода, в § 2 — области Зигеля 2-го рода и в § 3 — области Зигеля 3-го рода.

Заметим, что области Зигеля 1-го рода можно рассматривать как частный случай областей Зигеля 2-го рода, а области Зигеля 2-го рода — как частные случаи областей Зигеля 3-го рода.

В § 4 описан класс комплексных многообразий, по своим свойствам аналогичных ограниченным областям.

В книге мы будем пользоваться следующими обозначениями:

A' — матрица, транспонированная к A;

$\bar{A}$ — матрица, все элементы которой заменены на комплексно-сопряженные;

$A^* = \bar{A}'$;

$\det A$ — определитель матрицы A;

---

*) Смысл этого объяснялся во Введении.

E_r — единичная матрица порядка r; если порядок можно не указывать, то мы пишем просто E;

$A > 0$, где A — эрмитова матрица, означает положительность собственных значений матрицы A;

C^n — комплексное n-мерное аффинное пространство.

§ 1. Области Зигеля 1-го рода

В настоящем параграфе дается определение областей Зигеля 1-го рода, показывается, что всякая область Зигеля 1-го рода S может быть отображена на некоторую ограниченную область, и выясняется вид аналитических автоморфизмов, оставляющих на месте «бесконечно удаленную точку» S.

Пусть V — открытый выпуклый конус в n-мерном вещественном пространстве*), пересечение которого с любой прямой либо отрезок, либо полупрямая.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие конусы.

Определение. Совокупность S точек вида $z = x + iy$ ($y \in V$, x — любое, $z \in C^n$) условимся называть **областью Зигеля 1-го рода**.

Покажем, что любая область Зигеля 1-го рода S аналитически эквивалентна ограниченной области.

Пользуясь тем, что конус V не содержит целой прямой, можно показать существование системы координат, в которой V лежит внутри октанта $y_1 > 0, \ldots, y_n > 0$. Следовательно, S содержится в области $\operatorname{Im} z_1 > 0, \ldots, \operatorname{Im} z_1 > 0$, аналитически эквивалентной произведению n кругов.

Часть границы S, состоящую из точек вида $z = x$, условимся называть **остовом**.

Рассмотрим совокупность E всех аналитических в $\overline{S}$**) функций, достигающих в $\overline{S}$ своего максимума. Легко показать, что для всякой функции $\varphi(z) \in E$ существует точка остова,

---

*) Множество точек n-мерного вещественного пространства называется **конусом**, если оно вместе с любой точкой содержит всю полупрямую, соединяющую ее с началом координат.

**) $\overline{S}$ означает замыкание области S в естественной топологии аффинного пространства.

в которой достигается максимум ее модуля. С другой стороны, для каждой точки остова существует функция $\varphi(z) \in E$, модуль которой в этой точке достигает своего максимума. Действительно, для точки $z^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ искомой является функция

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z_1 - x_1^0 + i) \ldots (z_n - x_n^0 + i)}. \tag{1}$$

Из сказанного вытекает, что остов области S переходит в себя при автоморфизмах S, аналитических в $\bar{S}$.

Теорема 1. *Любой аналитический автоморфизм области S, непрерывный в $\bar{S}$, имеет вид*

$$z \to Az + b, \tag{2}$$

где A — аффинное преобразование конуса V на себя, b — действительный вектор.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится лемма Чеботарева (Левин [1], стр. 299), согласно которой функция $g(\lambda)$, аналитическая в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, непрерывная в $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ и принимающая на вещественной оси вещественные значения, является линейной функцией.

Без ограничения общности можно считать, что S содержится в области $\operatorname{Im} z_1 > 0, \ldots, \operatorname{Im} z_n > 0$.

Пусть $z \to \varphi(z) = (\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z))$ — аналитический автоморфизм S, непрерывный в $\bar{S}$.

Вспомогательная функция $g(\lambda) = \varphi_k(x_0 + \lambda y_0)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, где $z_0 = x_0 + iy_0 \in S$, удовлетворяет условиям леммы Чеботарева и, следовательно, является линейной функцией. Таким образом, $z \to \varphi(z)$ — линейное преобразование в n-мерном комплексном пространстве и поэтому может быть представлено в виде $\varphi(z) = Az + b$, где A — некоторая комплексная матрица, а b — комплексный вектор. Остов области S переходит в себя при отображении $z \to \varphi(z)$, поэтому A и b вещественны. Разделяя действительную и мнимую части, мы получим

$$\varphi(z) = Ax + b + iAy,$$

т. е. если $y \in V$, то $Ay \in V$. Обратное преобразование $z \to \varphi^{-1}(z)$ имеет вид

$$z \to A^{-1}z - A^{-1}b.$$

Следовательно, из $y \in V$ вытекает, что $A^{-1}y \in V$. Мы показали, что A — матрица аффинного преобразования конуса V на себя. Доказательство теоремы закончено.

Известно, что в любой ограниченной области существует инвариантный относительно ее аналитических автоморфизмов объем (см. § 4). Укажем формулу для элемента инвариантного объема в области S. Положим

$$dv = \lambda(x, y)\, dx\, dy, \tag{3}$$

где $dx = dx_1 \ldots dx_n$, $dy = dy_1 \ldots dy_n$. Поскольку область S допускает преобразования вида $z \to z + b$, где b — любой вещественный вектор, коэффициент λ не должен зависеть от x. Следовательно,

$$dv = \lambda(y)\, dx\, dy. \tag{4}$$

Далее, если $y \to Ay$ — аффинное преобразование конуса V, то $z \to Az$ — преобразование S, и значит,

$$\lambda(Ay)(\det A)^2 = \lambda(y). \tag{5}$$

Если конус V линейно однороден, т. е. для любой пары точек y_1, $y_2 \in V$ существует аффинное преобразование V на себя, переводящее y_1 в y_2, то область S аналитически однородна. Такие области S представляют наибольший интерес. Отметим, что в них $\lambda(y)$ однозначно определяется из (5).

Если V_1 — однородный конус в n_1-мерном вещественном пространстве, а V_2 — однородный конус в n_2-мерном вещественном пространстве, то совокупность точек (y_1, y_2), $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$, образует однородный конус в $n_1 + n_2$-мерном вещественном пространстве. Конусы, которые нельзя получить таким способом, называются *неприводимыми*.

Ниже приводятся примеры неприводимых однородных конусов и соответствующих им областей Зигеля.

1. Рассмотрим эрмитовы матрицы $Y = (y_{ks})$ порядка p. Каждой матрице Y можно сопоставить точку в p^2-мерном действительном пространстве с координатами

$$y_{11}, \ldots, y_{pp}, \operatorname{Re} y_{21}, \operatorname{Im} y_{21}, \ldots, \operatorname{Re} y_{p,p-1}, \operatorname{Im} y_{p,p-1}.$$

Совокупность точек, соответствующих положительно определенным эрмитовым матрицам, очевидно, образует конус.

Аффинные преобразования этого конуса имеют вид

$$Y \to A^* Y A,$$

где A — любая невырожденная комплексная матрица порядка p.

Соответствующую область Зигеля удобно описать как совокупность комплексных квадратных матриц $Z = X + iY$ порядка p таких, что X — любая эрмитова, а Y — положительно определенная эрмитова матрица. Эта область симметрическая (см. сноску на стр. 10). Инволюция в точке $Z = iE$ имеет вид $Z \to -Z^{-1}$.

Как будет показано в следующей главе, эта область аналитически эквивалентна области первого типа с $p = q$ (по классификации Э. Картана [3] симметрических областей; см. также Зигель [1]).

2. Рассмотрим эрмитовы матрицы Y порядка $2p$, для которых

$$YJ = J\bar{Y}, \quad J = \begin{Vmatrix} j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & j \end{Vmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Положим $Y = (y_{ks})$, $k, s = 1, \dots, p$, где y_{ks} — матрицы второго порядка. Соотношение (6) означает, что

$$y_{ks}^* = y_{sk}, \quad y_{ks} j = j \bar{y}_{ks}.$$

Следовательно,

$$y_{kk} = \begin{pmatrix} u_{kk} & 0 \\ 0 & u_{kk} \end{pmatrix}, \quad y_{ks} = \begin{pmatrix} u_{ks} & v_{ks} \\ -\bar{v}_{ks} & \bar{u}_{ks} \end{pmatrix} \quad (k < s),$$

$$u_{ks} = a_{ks} + ib_{ks}, \qquad v_{ks} = c_{ks} + id_{ks},$$

где u_{kk}, a_{ks}, b_{ks}, c_{ks}, d_{ks} — действительные числа, которые можно принять за координаты. Такие матрицы Y образуют $p(2p-1)$-мерное действительное пространство.

Совокупность точек этого пространства, соответствующих положительно определенным эрмитовым матрицам, очевидно, образует конус. Аффинные преобразования этого конуса имеют вид

$$Y \to A^* Y A,$$

где A — любая невырожденная комплексная матрица порядка $2p$, удовлетворяющая условию $AJ = J\overline{A}$. Можно показать, что полученный конус состоит из всех положительно определенных кватернионных матриц.

Соответствующую область Зигеля можно описать как совокупность всех квадратных комплексных матриц $Z = X + iY$ порядка $2p$, где

$$XJ = J\overline{X}, \quad X^* = X, \quad YJ = J\overline{Y}, \quad Y^* = Y \quad \text{и} \quad Y > 0.$$

Иными словами, $ZJ = JZ'$ и матрица $i^{-1}(Z - Z^*)$ положительно определена. Полученная область симметрическая. Инволюция в точке $Z = iE$ имеет вид $Z \to -Z^{-1}$. Эта область аналитически эквивалентна области 2-го типа с четным p по классификации Картана.

3. Рассмотрим все вещественные симметрические матрицы $Y = (y_{ks})$ порядка p. Каждой матрице Y можно сопоставить точку в $\frac{1}{2}p(p+1)$-мерном действительном пространстве с координатами

$$y_{11}, \ldots, y_{pp}, \quad y_{21}, \ldots, y_{p,p-1}.$$

Совокупность точек, соответствующих положительно определенным симметрическим матрицам, образует конус. Аффинные преобразования этого конуса имеют вид

$$Y \to A'YA,$$

где A — любая невырожденная вещественная матрица порядка p.

Соответствующую область Зигеля можно описать как совокупность симметрических комплексных матриц $Z = X + iY$ порядка p, где X — любая вещественная симметрическая матрица, а Y — вещественная симметрическая положительно определенная матрица. Эта область также симметрическая. Как и выше, инволюция в точке iE имеет вид $Z \to -Z^{-1}$. Эта область аналитически эквивалентна области 3-го типа по классификации Э. Картана; в литературе ее часто называют «обобщенной верхней полуплоскостью Зигеля».

4. Рассмотрим n-мерное действительное пространство, точки которого обозначим через $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Конус задается неравенством

$$y_1 y_2 - y_3^2 - \ldots - y_n^2 > 0, \quad y_1 > 0.$$

Аффинные преобразования этого конуса имеют вид

$$y \to Ay, \quad A'HA = \lambda H, \quad H = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & -E \end{vmatrix},$$

где λ — любое положительное число.

Соответствующая область Зигеля состоит из всех точек n-мерного комплексного пространства вида $z = x + iy$, где x — любое, а y принадлежит конусу; она симметрична. Инволюция в точке $z = (i, i, 0, \ldots, 0)$ имеет вид

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \to \left(\frac{-z_2}{\lambda(z)}, \frac{-z_1}{\lambda(z)}, \frac{z_3}{\lambda(z)}, \ldots, \frac{z_n}{\lambda(z)}\right),$$
$$\lambda(z) = z_1 z_2 - z_3^2 - \ldots - z_n^2.$$

Как будет показано в следующей главе, эта область аналитически эквивалентна области четвертого типа по классификации Картана.

Отметим, что для всех описанных выше однородных конусов соответствующие области Зигеля оказались симметрическими областями.

Классификацией всех аффинно однородных конусов занимался Э. Винберг [1].

Приведем краткое изложение его результатов.

Условимся конус V называть *самосопряженным*, если в объемлющем пространстве существует положительно определенная квадратичная форма $H(x, y)$ такая, что 1) при всех $x, y \in V$ $H(x, y) > 0$, 2) для любого $x \bar{\in} \overline{V}$ существует такой $y \in V$, что $H(x, y) < 0$ ($\overline{V}$ означает замыкание конуса V).

Легко видеть, что самосопряженный конус всегда выпуклый и не содержит целой прямой.

Э. Винберг полностью нашел все самосопряженные аффинно однородные конусы. Оказалось, что, кроме перечисленных выше, существует только один неприводимый конус в 27-мерном пространстве. Этот конус можно реализовать с помощью эрмитовых матриц третьего порядка над числами Кэли.

Далее, Э. Винберг построил примеры аффинно однородных, несамосопряженных, выпуклых и не содержащих целой прямой конусов.

Простейший из них — это совокупность всех симметрических положительно определенных матриц $Y = (y_{ks})$ порядка 3 таких, что $y_{31} = y_{13} = 0$.

§ 2. Области Зигеля 2-го рода

В настоящем параграфе дано определение областей Зигеля 2-го рода, и для этих областей рассмотрены вопросы, аналогичные рассмотренным в § 1 для областей Зигеля 1-го рода.

Простейшим примером области Зигеля 2-го рода является следующая область:

$$\operatorname{Im} z - |u|^2 > 0, \tag{1}$$

где z, u — числовые комплексные переменные.

К этой области естественно приводит следующая задача: отобразить шар

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$$

на некоторую область S так, чтобы все преобразования шара, оставляющие заданную точку границы на месте, стали бы линейными преобразованиями для S.

Непосредственными выкладками, которые мы опускаем, легко показать, что область (1) действительно решает эту задачу. В дальнейшем (гл. II) будет доказана общая теорема, из которой наше утверждение вытекает в качестве частного случая.

Прежде чем давать общее определение областей Зигеля 2-го рода, мы введем понятие V-эрмитовых вектор-функций, которые являются обобщением эрмитовых положительно определенных форм.

Пусть V — выпуклый конус в n-мерном действительном пространстве C^n, не содержащий целой прямой, $F(u, v)$ — функция от пары векторов u и $v \in C^m$ (вообще говоря, $m \neq n$), значение которой принадлежит C^n.

Вектор-функция $F(u, v)$ называется V-эрмитовой, если

1) $F(u, v) = \overline{F(v, u)}$;

2) $F(\lambda u_1 + \mu u_2, v) = \lambda E(u_1, v) + \mu F(u_2, v)$,

где λ и μ — любые комплексные числа;

3) $F(u, u) \in \overline{V}$ ($\overline{V}$ — замыкание V);

4) $F(u, u) = 0$ только при $u = 0$.

Определение. Областью Зигеля 2-го рода условимся называть совокупность S всех точек $(z, u) \in C^{n+m}$, для которых
$$\operatorname{Im} z - F(u, u) \in V. \tag{2}$$

Вот пример области Зигеля 2-го рода в C^{m+1}:
$$\operatorname{Im} z - |u_1|^2 - \ldots - |u_m|^2 > 0, \tag{3}$$
где $z, u_1, \ldots, u_m$ — числовые комплексные переменные.

Покажем, что эта область аналитически эквивалентна шару
$$|z_1|^2 + \ldots + |z_{m+1}|^2 < 1.$$
Положим
$$z_1 = \frac{z - i}{z + i}, \quad z_2 = \frac{u_1 \sqrt{2}}{z + i}, \; \ldots, \; z_{m+1} = \frac{u_m \sqrt{2}}{z + i}.$$

Легко видеть, что
$$1 - \sum_{k=1}^{m+1} |z_k|^2 = \frac{2}{|z + i|^2} (\operatorname{Im} z - |u_1|^2 - \ldots - |u_m|^2),$$
откуда сразу следует наше утверждение.

В § 1 мы отметили, что всякая область Зигеля 1-го рода содержится в такой, которую можно отобразить на произведение n кругов. Здесь мы установим, что любая область Зигеля 2-го рода содержится в такой, которая отображается на произведение n шаров.

Без ограничения общности можно предполагать, что V содержится в конусе $y_1 > 0, \ldots, y_n > 0$. Тогда каждая компонента $F_k(u, u)$, $k = 1, \ldots, n$ будет неотрицательно определенной эрмитовой формой от m переменных $u_1, \ldots, u_m$. Представим каждую из форм $F_k(u, u)$ в виде суммы квадратов линейных форм
$$F_k(u, u) = |L_{k1}|^2 + \ldots + |L_{ks_k}|^2. \tag{4}$$

Мы построим сейчас такую вектор-функцию $\tilde{F}(n, n)$, что

1) область S содержится в области $\tilde{S}$, заданной неравенствами

$$\operatorname{Im} z_k - \tilde{F}_k(u, u) > 0, \quad k = 1, \ldots, n;$$

2) область $\tilde{S}$ аналитически эквивалентна произведению n шаров.

Положим $\tilde{F}_1(u, u) = F_1(u, u)$. Для определения $\tilde{F}_2(u, u)$ мы поступим следующим образом. Вычеркнем из линейных форм $L_{21}, \ldots, L_{2s_2}$ те, которые линейно выражаются через $L_{11}, \ldots, L_{1s_1}$. Положим $\tilde{F}_2(u, u) = \sum\limits_s{}' |L_{2s}|^2$, где штрих означает, что суммирование распространено только на невычеркнутые формы. Вычеркнем далее из форм $L_{31}, \ldots, L_{3s_3}$ те, которые линейно выражаются через формы L_{ks} $(1 \leqslant k \leqslant 2)$. Положим $\tilde{F}_3(u, u) = \sum\limits_s{}' |L_{3s}|^2$, где, как и выше, штрих означает, что суммирование идет только по невычеркнутым формам. Аналогично определяются $\tilde{F}_4(u, u)$ и т. д. Ясно, что $S \subset \tilde{S}$.

Остается показать, что область $\tilde{S}$ аналитически эквивалентна произведению n шаров. Из пункта 4) определения $F(u, v)$ вытекает, что уравнения $L_{ks} = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n, \ 1 \leqslant s \leqslant s_k)$ имеют единственное решение $u = 0$. Следовательно, число невычеркнутых линейных форм равно m. По построению, они линейно независимы. Примем их за новые переменные $u'_1, \ldots, u'_m$. В переменных $z_1, \ldots, z_n, u'_1, \ldots, u'_m$ уравнения, определяющие $\tilde{S}$, имеют вид

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{Im} z_1 - |u'_1|^2 - \ldots - |u'_{m_1}|^2 > 0, \\
\operatorname{Im} z_2 - |u'_{m_1+1}|^2 - \ldots - |u'_{m_2}|^2 > 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\operatorname{Im} z_n - |u'_{m_{n-1}+1}|^2 - \ldots - |u'_m|^2 > 0,
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ — некоторые целые числа.

Для завершения доказательства достаточно учесть, что каждое из полученных неравенств определяет область Зигеля 2-го рода, аналитически эквивалентную шару (см. (3)).

Мы показали, что любая область Зигеля 2-го рода аналитически эквивалентна ограниченной области в C^{n+m}.

Часть границы области S, состоящая из точек (z, u), для которых $\operatorname{Im} z = F(u, u)$, называется остовом. Можно показать, что всякая аналитическая в $\bar{S}$ функция, модуль которой достигает в $\bar{S}$ своего максимума, имеет хотя бы одну точку максимума модуля на остове. С другой стороны, легко построить пример функции, модуль которой достигает максимума в наперед заданной точке остова. Таким образом, как и для областей, рассмотренных в § 1, остов инвариантен относительно аналитических автоморфизмов области S, непрерывных в $\bar{S}$. Более того, при любом аналитическом автоморфизме S точка остова может перейти либо опять в точку остова, либо в бесконечность. Отметим, что в отличие от областей Зигеля 1-го рода вещественная размерность остова больше комплексной размерности всей области.

Аналогом параллельных переносов для областей Зигеля 2-го рода являются следующие преобразования:

$$\left.\begin{aligned} z &\to z + a + 2iF(u, b) + iF(b, b), \\ u &\to u + b, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где a — любой n-мерный действительный вектор, а b — любой m-мерный комплексный вектор. Такие преобразования мы иногда также будем называть «параллельными переносами». Их совокупность образует нильпотентную группу 2 класса*). Легко проверить, что при этих преобразованиях сохраняется $\operatorname{Im} z - F(n, n)$. Произвольная точка (z, u) области S преобразованием (6) может быть переведена в точку $(iy, 0)$, где $y = \operatorname{Im} z - F(u, u)$.

Вообще говоря, преобразования (6) не исчерпывают всех линейных преобразований, которые описываются следующей теоремой.

Теорема 1. *Любое линейное преобразование области Зигеля 2-го рода имеет вид*

$$\left.\begin{aligned} z &\to Az + a + 2iF(Bu, b) + iF(b, b), \\ u &\to Bu + b, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

*) Группа G называется нильпотентной группой 2 класса, если ее коммутант, т. е. группа, порожденная элементами вида $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ $(g_1, g_2 \in G)$, коммутативна.

где a — любой вещественный n-мерный вектор, b — любой m-мерный комплексный вектор, A — линейное преобразование конуса V на себя, B — комплексное линейное преобразование, причем $AF(u, v) = F(Bu, Bv)$ для любых комплексных u и v.

Доказательство. Пусть

$$z \to R_1 z + R_2 u + r, \quad u \to Q_1 z + Q_2 u + q \tag{8}$$

— аффинное преобразование S на себя. Воспользуемся инвариантностью остова при преобразовании (8). Точка (0, 0), очевидно, принадлежит остову. Образ ее (r, q) также есть точка остова, и значит, $\operatorname{Im} r = F(q, q)$. Умножив преобразование (8) на подходящее преобразование вида (6), мы получим новое преобразование, для которого $q = 0$, $r = 0$:

$$z \to R_1' z + R_2' u, \quad u \to Q_1' z + Q_2' u. \tag{9}$$

Точка остова вида $(x, 0)$ (x вещественно) переходит в точку $(R_1' x, Q_1' x)$. Следовательно, для любого x

$$(\operatorname{Im} R_1')\, x = F(Q_1' x, Q_1' x).$$

Левая часть этого равенства линейна по x, а правая — второй степени по x; это возможно только если $\operatorname{Im} R_1' = 0$, $Q_1' = 0$. Точка (iy, u), $y = F(u, u)$, переходит в точку $(iR_1 y + R_2' u, Q_2' u)$, откуда

$$R_1' y + \operatorname{Im} R_2' u = F(Q_2' u, Q_2' u). \tag{10}$$

Заменяя в полученном соотношении u на $e^{i\varphi} u$, мы получаем, что $\operatorname{Im} e^{i\varphi} R_2' u$ не зависит от φ. Следовательно, $R_2' u = 0$, и ввиду произвольности u также $R_2' = 0$. Подставляя в (10) выражение y через u, получаем $R_1' F(u, u) = F(Q_2' u, Q_2' u)$. Мы показали, что (9), а следовательно, и (8) имеет вид (7). Теорема доказана.

Обозначим через Ω совокупность всех линейных преобразований A конуса V, продолжающихся до линейных преобразований всей области S, т. е. таких, что при некотором комплексном линейном преобразовании B

$$AF(u, u) = F(Bu, Bv). \tag{11}$$

Легко проверить, что если Ω действует на V транзитивно, то соответствующая область S аналитически однородна.

Приведем пример однородной области.

Область S однозначно описывается заданием конуса V и V-эрмитовой вектор-функции $F(U, V)$.

Пусть V — конус эрмитовых положительно определенных матриц Y порядка p. Пространство, в котором будет определена вектор-функция F, удобно реализовать как пространство всех комплексных прямоугольных матриц U типа $p \times s$. Размерность этого пространства, очевидно, равна ps. Функцию $F(U, V)$ определим формулой

$$F(U, V) = UV^*. \tag{12}$$

Эта функция является квадратной матрицей порядка p, причем $F(U, U) \in \overline{V}$.

Группа Ω в этом случае состоит из всех аффинных преобразований конуса V. Действительно, рассмотрим аффинные преобразования нашего пространства вида $U \to BU$, где B — невырожденная квадратная матрица порядка p. Мы имеем

$$F(BU, BV) = BU(BV)^* = BUV^*B^* = BF(U, V)B^*. \tag{13}$$

Остается вспомнить указанный в § 1 вид всех линейных преобразований конуса V.

Покажем, что наша область симметрическая. Действительно, преобразование

$$(Z, U) \to (-Z^{-1}, -iZ^{-1}U) \tag{14}$$

является инволюцией с единственной неподвижной точкой $(iE, 0)$.

Укажем теперь вид элемента dv инвариантного объема. Положим

$$dv = \lambda(x, y, u_1, u_2)\, dx\, dy\, du_1\, du_2, \tag{15}$$

где

$$dx = dx_1 \ldots dx_n, \quad dy = dy_1 \ldots dy_n, \quad u_1 = \operatorname{Re} u,$$

$u_2 = \operatorname{Im} u$, а du_1 и du_2 означают соответствующие произведения дифференциалов координат.

Из существования у S автоморфизмов вида (6) следует, очевидно, что

$$\lambda = \lambda(y - F(U, U)). \tag{16}$$

Далее, если

$$z \to Az, \quad u \to Bu$$

есть аналитический автоморфизм S, то

$$\lambda(Ay)(\det A)^2(\det B)^2 = \lambda(y). \tag{17}$$

В случае аффинной однородности области S из (17) однозначно с точностью до числового множителя определяется $\lambda(y)$.

§ 3. Области Зигеля 3-го рода

В настоящем параграфе дано определение и изучены некоторые свойства областей Зигеля 3-го рода. Причина появления этих областей состоит в следующем. Граница области в n-мерном комплексном пространстве, как известно, неоднородна, т. е. содержит аналитические «кусочки» различных размерностей.

В теории автоморфных функций от нескольких комплексных переменных важно рассматривать предельный переход, при котором точка внутри области приближается к точке границы, принадлежащей некоторому аналитическому «кусочку». При изучении такого предельного перехода очень удобно использовать области Зигеля 3-го рода.

Применения областей Зигеля 3-го рода к теории ограниченных однородных областей будут даны в главе V.

Перейдем к определению областей Зигеля 3-го рода.

Предварительно остановимся на некоторых простейших понятиях из линейной алгебры. Рассмотрим скалярную (т. е. принимающую числовые значения) форму $L(u, v)$ от пары векторов $u, v \in C^m$. Назовем форму $L(u, v)$ **полуэрмитовой**, если ее можно представить в виде суммы $L_0(u, v) + L_1(u, v)$, где $L_0(u, v)$ — эрмитова форма, а $L_1(u, v)$ — симметрическая билинейная форма. Легко проверить, что полуэрмитова форма $L(u, v)$ обладает следующими свойствами:

1) форма $L(u, v)$ комплексно линейна по первому аргументу и вещественно линейна по второму;

2) разность $L(u, v) - L(v, u)$ чисто мнимая.

Верно и обратное, а именно, форма со свойствами 1) и 2) полуэрмитова, т. е. является суммой эрмитовой и симметрической билинейной форм. Действительно, из 1) следует, что $L(u, v)$ можно представить в виде

$$L(u, v) = \sum_{k, r=1}^{m} a_{kr} u_k v_r + \sum_{k, r=1}^{m} b_{kr} u_k \overline{v}_r,$$

отсюда

$$L(u, v) - L(v, u) = \sum_{k, r=1}^{m} (a_{kr} - a_{rk}) u_k v_r + \\ + \sum_{k, r=1}^{m} b_{kr} u_k \overline{v}_r - \sum_{k, r=1}^{m} b_{kr} v_k \overline{u}_r.$$

Полагая все переменные, за исключением u_k и v_r, равными нулю, получим, что выражение

$$(a_{kr} - a_{rk}) u_k v_r + b_{kr} u_k \overline{v}_r - b_{rk} v_r \overline{u}_k$$

— чисто мнимое число. Легко проверить, что из этого соотношения следует

$$a_{kr} = a_{rk} \quad \text{и} \quad b_{kr} = \overline{b}_{rk}.$$

Наше утверждение доказано.

Легко проверить, что представление в виде суммы эрмитовой и симметрической форм единственно.

В дальнейшем нам понадобятся векторные полуэрмитовы формы, которые определяются следующим образом: *векторная форма* называется *полуэрмитовой*, если каждая ее компонента является полуэрмитовой формой.

Условимся в дальнейшем форму $L(u, v)$ называть *невырожденной*, если из равенства $L(u, v_0) = 0$ при всех u следует, что $v_0 = 0$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ ограниченную область в пространстве C^k, точки которого условимся обозначать буквой t. Пусть каждому $t \in \mathcal{D}$ соответствует невырожденная полуэрмитова форма $L_t(u, v)$ на C^m со значениями в C^n. V — конус в n-мерном вещественном пространстве, рассматривавшийся в § 1.

Определение. Совокупность точек $w = (z, u, t)$ пространства $C^N (N = m + n + k)$, для которых

$$\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(u, u) \in V, \quad t \in D, \tag{1}$$

образует некоторую область S. Эта область называется **областью Зигеля 3-го рода**, если она аналитически эквивалентна некоторой ограниченной области.

Приведем простейший нетривиальный пример такой области.

Пусть $n = m = k = 1$; $\mathcal{D}$ — единичный круг $|t| < 1$ в комплексной плоскости; V — полупрямая $y > 0$. Положим

$$L_t(u, v) = (1 - |t|^2)^{-1} u\bar{v} + \bar{t}(1 - |t|^2)^{-1} uv. \tag{2}$$

Область (1) с этой $L_t(u, v)$, как будет показано в § 7, аналитически эквивалентна некоторой классической области III типа (см. § 7 и Зигель [1]).

Очевидно, любая область Зигеля S допускает преобразования следующего вида:

$$z \to z + a, \quad u \to u, \quad t \to t,$$

где a — произвольный вещественный вектор.

Пусть $c(t)$ — аналитическая в $\mathcal{D}$ вектор-функция со значениями в C^m.

Условимся говорить, что вектор-функция $c(t)$ **согласована с формой** $L_t(u, v)$, если $L_t(u, c(t))$ при любом u является аналитической функцией от $t \in \mathcal{D}$.

Совокупность всех согласованных с данной формой $L_t(u, v)$ вектор-функций представляет собой, как легко видеть, линейное пространство над полем вещественных чисел.

Пример. Пусть $c(t) = c - t\bar{c}$, где c — некоторое комплексное число. Тогда

$$L_t(u, c(t)) = u\bar{c}. \tag{3}$$

Этот пример показывает, что если $c(t)$ согласована с формой $L_t(u, v)$, то $c_1(t) = ic(t)$, вообще говоря, уже не согласована.

Роль согласованных вектор-функций видна из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $c(t)$ — некоторая, не обязательно аналитическая, вектор-функция на $\mathcal{D}$ со значениями в C^m. Преобразование*

$$\left.\begin{aligned} &z \to z + a + 2iL_t(u, c(t)) + iL_t(c(t), c(t)), \\ &u \to u + c(t), \\ &t \to t, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где a — произвольный вещественный n-мерный вектор, является взаимно однозначным отображением области S на себя. Оно аналитическое тогда и только тогда, когда $c(t)$ и $L_t(u, c(t))$ при любом u — аналитические функции от $t \in \mathscr{D}$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что преобразование вида (4) сохраняет разность $\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(u, u)$ и, значит, переводит S в себя. Взаимная однозначность вытекает из того, что преобразование (4) имеет обратное, которое можно получить, если в (4) заменить $c(t)$ на $-c(t)$. Перейдем к доказательству второй части теоремы. Непосредственно легко проверить, что если (4) аналитическое отображение, то $c(t)$ и $L_t(u, c(t))$ при любом u аналитичны как функции от $t \in \mathscr{D}$.

Покажем обратное, т. е., что если $c(t)$ и $L_t(u, c(t))$ при любом u аналитичны как функции от t, то отображение (4) аналитическое. Достаточно проверить аналитичность $L_t(c(t), c(t))$. Заметим, что $L_{t_2}(c_1(t_1), c_2(t_2))$, где c_1 и c_2 фиксированные векторы, является аналитической функцией от t_1 при фиксированном t_2 и аналогично от t_2 при фиксированном t_1. Следовательно, по теореме Гартогса функция $L_{t_2}(c_1(t_1), c_2(t_2))$ аналитична от t_1 и t_2 (см. Фукс [1]). Полагая $t_1 = t_2$, мы видим, что $L_t(c_1(t), c_2(t))$ является аналитической функцией от t. Теорема доказана.

Преобразования вида (4) мы в дальнейшем будем называть «параллельными переносами». Совокупность таких преобразований образует группу, которая будет обозначаться буквой Δ. Как и для областей Зигеля 2-го рода, группа Δ является нильпотентной группой 2-го класса. Ее можно рассматривать как совокупность пар (c, a), где a — n-мерный вещественный вектор, c — μ-мерный вещественный вектор (μ — размерность пространства всех согласованных с данной формой $L_t(u, v)$ вектор-функций).

Заметим, что форма

$$Q(c_1, c_2) = i\,[L_t(c_1(t), c_2(t)) - L_t(c_2(t), c_1(t))] \tag{5}$$

при любых фиксированных $c_1(t)$ и $c_2(t)$ аналитична по t и принимает только вещественные значения. Следовательно, она не зависит от t. Закон композиции в группе Δ, как легко проверить, определяется формулой

$$(c_1, a_1) \times (c_2, a_2) = (c_1 + c_2,\ a_1 + a_2 + Q(c_1, c_2)). \tag{6}$$

При изучении областей Зигеля 1-го и 2-го рода важную роль играет группа их линейных преобразований. Для областей Зигеля 3-го рода аналогичную роль играют квазилинейные преобразования.

Определение. Взаимно однозначное преобразование области Зигеля S вида

$$\left.\begin{aligned} z &\to A(t)\,z + a(u,\, t),\\ u &\to B(t)\,u + b(t),\\ t &\to g(t), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — аналитические в $\mathcal{D}$ матричные функции, $a(u,\, t)$, $b(t)$ — аналитические в $\mathcal{D}$ вектор-функции, $t \to g(t)$ — аналитический автоморфизм области $\mathcal{D}$, называется квазилинейным преобразованием.

При изучении квазилинейных преобразований области S нам понадобятся следующие общие свойства аналитических автоморфизмов ограниченных областей:

А) Аналитический автоморфизм ограниченной области с неподвижной точкой однозначно определяется своей якобиевой матрицей в этой точке.

В) Последовательность аналитических автоморфизмов ограниченной области компактна, если существует хотя бы одна точка, последовательность образов которой компактна в этой области.

Доказательство этих свойств см. в книге Б. А. Фукса [1].

Обозначим через φ_λ следующий аналитический автоморфизм области S:

$$z \to \lambda^2 z, \quad u \to \lambda u, \quad t \to t, \tag{8}$$

где λ — произвольное вещественное число.

Существование семейства автоморфизмов φ_λ характерно для областей Зигеля.

Отметим следующие свойства квазилинейных преобразований:

1) Для всякого квазилинейного преобразования вида (7) матрица $A(t)$ не зависит от t. Линейное преобразование $y \to Ay$ является взаимно однозначным преобразованием конуса V на себя.

Действительно, точка $(z,\, 0,\, t) \in S$ переходит при преобразовании (7) в точку $(A(t)\,z + a(0,\, t),\, b(t),\, g(t))$. Условие принадлежности полученной точки области S записывается следующим образом:

$$\operatorname{Im}(A(t)z + a(0, t)) - \operatorname{Re} L_t(b(t), b(t)) \in V \tag{9}$$

при любом $t \in \mathscr{D}$.

Первоначальная точка $(z, 0, t)$ принадлежит S тогда и только тогда, когда $y = \operatorname{Im} z \in V$. Следовательно, вместе с точкой $(z, 0, t)$ точка $(\lambda z, 0, t)$, где λ — произвольное положительное вещественное число, принадлежит S.

Заменяя в (9) z на λz и переходя к пределу при $\lambda \to \infty$, мы получаем, что при любом $t \in \mathscr{D}$

$$\operatorname{Im}(A(t)z) \in \overline{V}, \quad \text{если } \operatorname{Im} z \in V \tag{10}$$

($\overline{V}$ — замыкание конуса V). Отсюда очевидным образом следует, что $A(t)$ — вещественная матрица при любом t. Как известно, аналитическая функция, принимающая только вещественные значения, константа. Следовательно, $A(t)$ не зависит от t.

Для завершения доказательства остается рассмотреть обратное преобразование.

2) Каждая компонента вектора $a(u, t)$ представляет собой полином от u не выше второй степени, коэффициенты которого могут зависеть от t.

Пусть ψ — квазилинейное преобразование вида (7). Рассмотрим семейство автоморфизмов $\psi_\lambda = \varphi_\lambda^{-1}\psi\varphi_\lambda$. Легко проверить, что ψ_λ имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} z &\to Az + \lambda^{-2}a(\lambda u, t), \\ u &\to B(t)u + \lambda^{-1}b(t), \\ t &\to g(t). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Применяя автоморфизм ψ_λ к точке $(z, 0, t)$, легко убедиться, что последовательность аналитических автоморфизмов ψ_λ компактна при $\lambda \to \infty$. Из явной записи (11) автоморфизмов ψ_λ видно, что последовательность их может быть компактна только тогда, когда $a(u, t)$ — полином от u не выше второй степени.

3) Вместе с преобразованием (7):

$$\begin{aligned} z &\to Az + a(u, t), \\ u &\to B(t)u + b(t), \\ t &\to g(t) \end{aligned}$$

преобразование вида

$$\left.\begin{aligned} z &\to Az + a_2(u,\ t), \\ u &\to B(t)\,u, \\ t &\to g(t) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

($a_2(u,\ t)$ — совокупность членов второй степени в $a(u,\ t)$) является аналитическим автоморфизмом области S.

Действительно, мы показали, что последовательность автоморфизмов (11) компактна при $\lambda \to \infty$. С другой стороны, из явного вида (11) этих автоморфизмов ясно, что они сходятся при $\lambda \to \infty$ к отображению (12).

4) Пусть $t_0 \in \mathscr{D}$. Если $\operatorname{Re} a(0,\ t_0) = 0$ и $b(t_0) = 0$, то $a(u,\ t)$ содержит только члены второй степени по u.

Покажем прежде всего, что $\operatorname{Im} a(0,\ t_0) = 0$.

Точка $(z,\ 0,\ t_0)$ принадлежит S тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} z \in V$. Следовательно, если $y \in V$, то $y + \operatorname{Im} a(0,\ t_0) \in V$, откуда $\operatorname{Im} a(0,\ t_0) \in \bar{V}$. Рассматривая обратное преобразование, легко показать, что $-\operatorname{Im} a(0,\ t_0) \in \bar{V}$. Следовательно, $a(0,\ t_0) = 0$. В этом случае последовательность автоморфизмов (11) будет компактна при $\lambda \to 0$. Действительно, последовательность образов точки вида $(z,\ 0,\ t_0)$ компактна. Компактность последовательности автоморфизмов вида (11) при $\lambda \to 0$ возможна лишь тогда, когда $a(u,\ t)$ не содержит членов нулевой и первой степени по u.

Пусть $c(t)$ — аналитическая в $\mathscr{D}$ вектор-функция, согласованная с формой $L_t(u,\ v)$.

Из свойства 4) следует, что если $c(t_0) = 0$, то $c(t) = 0$ при всех $t \in \mathscr{D}$.

Для доказательства рассмотрим преобразование вида (4), где $c(t)$ данная и $a = 0$.

Из 4) следует, что такое преобразование тривиально и, значит, $c(t) \equiv 0$.

Из доказанного вытекает, что размерность μ пространства согласованных с $L_t(u,\ v)$ и аналитических в $\mathscr{D}$ вектор-функций $c(t)$ не превосходит $2m$. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что $\mu = 2m$. На протяжении всей книги мы будем рассматривать только такие области Зигеля 3-го рода.

5) Квазилинейное преобразование, для которого $A = E$, $B(t) \equiv E$, $g(t) \equiv t$, является «параллельным переносом» в области S, т. е. принадлежит группе Δ.

Очевидно, достаточно показать, что если квазилинейное преобразование вида

$$z \to z + a(u, t), \quad u \to u + b(t), \quad t \to t \tag{13}$$

обладает следующим свойством: при некотором $t_0 \in \mathcal{D}$ $\operatorname{Re} a(0, t_0) = 0$, $b(t_0) = 0$, то оно является тождественным преобразованием.

Заметим, что из 4) следует: $a(0, t_0) = 0$. Следовательно, точка $(z, 0, t_0)$ неподвижна для нашего квазилинейного преобразования. Далее, из 4) ясно, что якобиева матрица преобразования (13) в точке вида $(z, 0, t_0)$ такова же, как якобиева матрица тождественного преобразования. Следовательно, (13) — тождественное преобразование области S, т. е. $a(u, t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 0$.

Из доказанного сразу следует, что группа Δ есть нормальный делитель в группе всех квазилинейных преобразований области S.

6) Преобразование вида

$$\left.\begin{aligned} &z \to Az + a_2(u, t), \\ &u \to B(t)\, u, \\ &t \to t, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $a_2(u, t)$ — однородная форма второй степени по u, тогда и только тогда является аналитическим автоморфизмом области S, когда

$$L_t(B(t)\, u,\ B(t)\, v) = AL_t(u, v) \tag{15}$$

при всех u, $v \in C^m$, $t \in \mathcal{D}$ и при

$$a_2(u, t) \equiv 0. \tag{16}$$

Трансформируя преобразование вида (4) с помощью (14) и пользуясь тем, что полученное преобразование согласно 5) обязано опять иметь вид (4), мы получим соотношение (15). Непосредственно видно, что если выполняется (15), то преобразование

$$z \to Az, \quad u \to B(t)\, u, \quad t \to t \tag{17}$$

есть аналитический автоморфизм области S.

Далее, композиция преобразования (14) и обратного к (17) есть автоморфизм, принадлежащий к группе Δ. Отсюда сразу получается, что $a_2(u, t) \equiv 0$.

В заключение приведем некоторые достаточные условия для аналитической однородности области Зигеля S.

Обозначим через Ω совокупность всех линейных преобразований $y \to Ay$ конуса V на себя, для каждого из которых существует такая аналитическая в $\mathcal{D}$ матричная функция $B(t)$, что

$$L_t(B(t)u, \quad B(t)v) = AL_t(u, v) \tag{18}$$

при всех $u, v \in C^m$, $t \in \mathcal{D}$.

Обозначим далее через G совокупность всех аналитических автоморфизмов области $\mathcal{D}$, для каждого из которых существуют:

а) аналитическая в $\mathcal{D}$ матричная функция $B(t)$ и

б) симметрическая билинейная векторная форма $K_t(u, v)$ от пары векторов $u, v \in C^m$ со значениям в C^n, аналитически зависящая от $t \in \mathcal{D}$, причем $K_t(u, u) + L_{g(t)}(B(t)u, B(t)v) - L_t(u, u)$ чисто мнимо при всех $u \in C^m$, $t \in \mathcal{D}$.

Имеет место следующая

Теорема 2. *Если группа Ω транзитивна в конусе V, а группа G транзитивна в области $\mathcal{D}$, то область S аналитически однородна.*

Доказательство. Непосредственно легко проверяется, что преобразования вида

$$z \to Az, \quad u \to B(t)u, \quad t \to t, \tag{19}$$

$$z \to z - iK_t(u, u), \quad u \to B(t)u, \quad t \to g(t) \tag{20}$$

являются аналитическими автоморфизмами области S.

Пусть теперь $w_1 = (z_1, u_1, t_1)$ и $w_2 = (z_2, u_2, t_2)$ — две произвольные точки S. Докажем, что существует аналитический автоморфизм нашей области S, переводящий одну из этих точек в другую.

Сначала заметим, что с помощью автоморфизма вида (20) мы можем точку $w_2 = (z_2, u_2, t_2)$ перевести в точку $w_3 = (z_3, u_3, t_1)$, а с помощью автоморфизма вида (19) мы можем перевести w_3 в точку $w_4 = (z_4, u_4, t_1)$ такую, что

$$\operatorname{Im} z_4 - \operatorname{Re} L_{t_1}(u_4, u_4) = \operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Re} L_t(u_2, u_2).$$

Наконец, точку w_4 можно перевести в w_1 с помощью некоторого «параллельного переноса», т. е. автоморфизма вида (4). Теорема доказана.

Найдем вид элемента dv инвариантного объема. Положим

$$dv = \lambda(z, u, t)\, dx\, dy\, du_1\, du_2\, dt_1\, dt_2, \tag{21}$$

где

$$u_1 = \operatorname{Re} u, \quad u_2 = \operatorname{Im} u, \quad t_1 = \operatorname{Re} t, \quad t_2 = \operatorname{Im} t,$$
$$dx = dx_1 \ldots dx_n, \quad dy = dy_1 \ldots dy_n.$$

Из существования «параллельных переносов» вытекает

$$\lambda(z, u, t) = \lambda(\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(u, u), t). \tag{22}$$

Если

$$z \to Az, \quad u \to B(t)\, u, \quad t \to t$$

— аналитический автоморфизм области S, то

$$\lambda(Ay, t)(\det A)^2 |\det B(t)|^2 = \lambda(y, t), \tag{23}$$

а если

$$z \to z - iK_t(u, u), \quad u \to B(t)\, u, \quad t \to g(t) \tag{24}$$

— аналитический автоморфизм нашей области S, то

$$\lambda(y, g(t)) |\det B(t)|^2 |j_g(t)|^2 = \lambda(y, t), \tag{25}$$

где $j_g(t)$ означает якобиан преобразования $t \to g(t)$. В случае, когда выполняются условия теоремы 1, из (23) и (25) однозначно определяется $\lambda(y, t)$.

§ 4. Многообразия Кобаяси

В настоящем параграфе мы введем некоторый класс комплексных многообразий, обладающих характерными чертами ограниченных областей в C^n. Эти многообразия названы нами многообразиями Кобаяси, которому принадлежит важная работа (Кобаяси [1]) по геометрии ограниченных областей в C^n. В этой работе Кобаяси выяснил, с какими свойствами комплексных многообразий связано существование на них положительно определенной метрики Бергмана.

Пусть M — некоторое n-мерное комплексное многообразие. Обозначим через H совокупность всех n-мерных аналитических дифференциальных форм f таких, что *)

$$\int_M f \wedge \bar{f} < \infty. \tag{1}$$

*) Знак $\wedge$ означает внешнее произведение форм (см., например, Ж. де Рам «Дифференцируемые многообразия»).

Пространство H представляет собой сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = i^{n^2} \int\limits_M f_1 \wedge \overline{f_2}. \qquad (2)$$

Многообразие M называется многообразием Кобаяси, если:

1) Существует форма $\omega \in H$, отличная от нуля во всех точках M;

2) для любой точки $z_0 \in M$ и любого направления l существует такая форма $f = f^* dz_1 \ldots dz_n \in H$, что $f^*(z_0) = 0$, $\frac{\partial f^*}{\partial l} \neq 0$.

Основным свойством многообразий Кобаяси, сближающих их с ограниченными областями в C^n, является существование на них положительно определенной метрики Бергмана.

Перейдем к построению этой метрики. Пусть ω — форма, указанная в 1). Каждой аналитической форме $f \in H$ поставим в соответствие аналитическую функцию $h(z)$, которая определяется из соотношения

$$f = h\omega.$$

Совокупность полученных таким образом функций образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(h_1, h_2) = i^{n^2} \int\limits_M h_1 \overline{h}_2 \omega \wedge \overline{\omega}. \qquad (3)$$

Обозначим это пространство опять через H. Пусть $h_0(z)$, $h_1(z)$, ... — некоторый ортонормальный базис в этом пространстве. Положим

$$K(z, w) = \sum_{k=0}^{n} h_k(z) \overline{h}_k(\overline{w}); \qquad (4)$$

$K(z, w)$ представляет собой аналитическую функцию на $M \times \overline{M}$, где $\overline{M}$ — многообразие, комплексно-сопряженное с M. Нетрудно показать, что функция $K(z, w)$ не зависит от выбора ортонормальной системы, т. е. определяется самим многообразием. Она называется керн-функцией Бергмана.

Бергман заметил, что, исходя из этой функции, можно построить инвариантную метрику. Положим

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha d\bar{z}^\beta, \tag{5}$$

где $z^1, \ldots, z^n$ — некоторая локальная система координат.

Легко доказать, что форма ds^2 не зависит от выбора координатной системы и является инвариантом при аналитических отображениях M на себя. Покажем, что она положительно определена.

Пусть z_0 — произвольная точка M и $z^1, \ldots, z^n$ — некоторая локальная система координат в этой точке. Выберем такой ортонормальный базис в H, что

$$h_0(z_0) \neq 0, \quad h_k(z_0) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$ds^2|_{z=z_0} = \frac{1}{K(z_0, \bar{z}_0)} \sum_{k=1}^{\infty} dh_k \, d\bar{h}_k.$$

Из определения многообразий Кобаяси следует, что форма ds^2 положительно определена.

Отметим, наконец, что

$$i^{n^2} K(z, \bar{z}) \, \omega \wedge \bar{\omega} \tag{6}$$

представляет собой элемент объема, инвариантного относительно аналитических отображений M на себя. Пользуясь этим, легко найти вид метрики Бергмана в областях Зигеля.

П р и м е р. Пусть H_0 — область в 4-мерном комплексном пространстве с координатами z_1, z_2, z_3, u, заданная неравенствами

$$\operatorname{Im} z_1 - |u|^2 > 0, \quad (\operatorname{Im} z_1 - |u|^2) \operatorname{Im} z_2 - (\operatorname{Im} z_3)^2 > 0.$$

Заметим вначале, что инвариантный объем dv в H_0 имеет вид (§ 2)

$$dv = \lambda(y_1 - |u|^2, \ y_2, \ y_3) \, dx \, dy \, du_1 \, du_2, \tag{7}$$

где $dx = dx_1\,dx_2\,dx_3$, $dy = dy_1\,dy_2\,dy_3$, $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$. Область H_0 допускает следующие аналитические автоморфизмы:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &\to a_1^2 z_1 + 2a_1 a_2 z_2 + a_2^2 z_3, \\ z_2 &\to a_1 a_3 z_2 + a_2 a_3 z_3, \\ z_3 &\to a_3^2 z_3, \\ u &\to a_1 u, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные вещественные числа с единственным ограничением $a_1 a_3 \neq 0$. Отсюда и из соотношения (17) § 2 мы находим

$$\lambda = (y_1 - |u|^2)^{-1}\left((y_1 - |u|^2)\, y_3 - y_2^2\right)^{-3}.$$

Теперь легко найти явный вид метрики Бергмана. Пользуясь им и леммой 1 § 18 о виде инволюции, можно доказать, что область H_0 несимметрическая. Однородность H_0 вытекает из существования у нее преобразований вида (8).

Область H_0 — простейшая несимметрическая однородная ограниченная (точнее, аналитически эквивалентная ограниченной) область.

ГЛАВА II
ГЕОМЕТРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

В настоящей главе изучаются классические области, т. е. ограниченные комплексные симметрические области, полная группа аналитических автоморфизмов которых является классической полупростой группой Ли. В § 5 сформулированы две основные теоремы геометрии классических областей. Там же показано, как доказательство этих теорем для приводимых областей свести к доказательству их в случае неприводимых областей.

Как известно (Э. Картан [3]), неприводимые классические области бывают четырех типов. В § 6 дано доказательство основных теорем для областей первого типа, в § 7 — для областей второго и третьего типов, а в § 8 — для областей четвертого типа.

Введем некоторые обозначения.

На протяжении главы II мы будем часто иметь дело с матрицами, разбитыми на блоки. Например, запись

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} m_1 & \quad m_2 \end{array} & \end{array}$$

означает, что матрицы A_{11} и A_{12} состоят из n_1 строк, а матрицы A_{21} и A_{22} из n_2 строк, соответственно, матрицы A_{11} и A_{21} из m_1 столбцов, а матрицы A_{12} и A_{22} из m_2 столбцов.

Запись $A = A^{(p, q)}$ означает, что матрица A состоит из p строк и q столбцов;

$A > 0$, где A — эрмитова матрица, означает положительность всех собственных значений матрицы A;

$A \geqslant 0$ означает неотрицательность собственных значений матрицы A;

$A > B$, где A и B эрмитовы, означает, что $A - B > 0$. Выражение «матрица A типа $m \times n$» означает, что A состоит из m строк и n столбцов.

§ 5. Формулировка основных теорем. Сведение доказательства этих теорем для любых областей к случаю неприводимых областей

Ниже мы будем предполагать, что рассматриваемые классические области реализованы так, как это описано, например, в книге Зигеля [1] стр. 120. Эту реализацию мы будем называть канонической реализацией типа «единичный круг» или просто канонической реализацией. Введенное ниже понятие компоненты формально зависит от вложения в C^n. На самом же деле, ему можно придать инвариантную, т. е. не зависящую от выбора вложения форму. Ниже будет вкратце указано, как это сделать.

Определение 1. Пусть A — некоторое множество в C^n. Оно называется аналитическим, если в окрестности каждой своей точки оно может быть задано как множество общих нулей конечного числа функций, аналитических в окрестности этой точки *).

Определение 2. Аналитическое множество называется регулярным, если в окрестности каждой своей точки в подходящей системе координат оно может быть задано как множество общих нулей конечного числа линейных функций.

Сформулируем теперь основное в настоящей главе понятие компоненты границы области. Формально мы определим его для произвольных областей, но пользоваться им будем только для канонических реализаций классических областей.

Определение 3. Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая область, F — ее граница. Аналитическое множество $\mathscr{F} \subset F$ называется компонентой границы, если любая аналитическая кривая **) $\varphi(t)$, $|t| < \varepsilon$, принадлежащая целиком F и пересекающаяся с $\mathscr{F}$, целиком содержится в $\mathscr{F}$.

Условимся называть регулярной компоненту, которая является регулярным аналитическим множеством.

---

*) Это определение несколько отлично от общепринятого, которое мы приведем в § 10.

**) Аналитической кривой называется аналитическая вектор-функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, заданная в некотором круге $|t| < \varepsilon$ обычной комплексной плоскости.

Отметим, что из определения совсем не очевидно, что всякая точка границы содержится в некоторой компоненте границы.

Очевидно лишь, по крайней мере для случая регулярных компонент, что всякая точка границы содержится не более чем в одной компоненте.

Пример. Пусть $\mathcal{D}$ — полицилиндр, т. е. область, заданная неравенствами:

$$|z_1| < 1, \ \dots, \ |z_n| < 1.$$

Граница F состоит, очевидно, из точек C^n, для которых

$$|z_1| \leqslant 1, \ \dots, \ |z_n| \leqslant 1,$$

причем хотя бы в одном неравенстве имеет место знак равенства.

Множество $\mathcal{F}_\nu$ точек вида

$$(1, \dots, 1, z_{\nu+1}, \dots, z_n), \quad |z_{\nu+1}| < 1, \ \dots, \ |z_n| < 1 \qquad (1)$$

представляет собой, как мы сейчас покажем, компоненту границы. Очевидно, что $\mathcal{F}_\nu$ — регулярное аналитическое множество и $\mathcal{F}_\nu \subset F$. Покажем, что любая аналитическая кривая в F, пересекающаяся с $\mathcal{F}_\nu$, целиком содержится в $\mathcal{F}_\nu$.

Действительно, пусть $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $|t| < \varepsilon$, — аналитическая кривая, лежащая в F, и пусть $\varphi(0) \in \mathcal{F}_\nu$. Принадлежность кривой $\varphi(t)$ границе $\mathcal{F}$ области $\mathcal{D}$ означает, что $|\varphi_1(t)| \leqslant 1, \dots, |\varphi_n(t)| \leqslant 1$ для всех t, $|t| < \varepsilon$. Из того, что $\varphi(0) \in \mathcal{F}_\nu$, следует

$$\varphi_1(0) = 1, \ \dots, \ \varphi_\nu(0) = 1, \quad |\varphi_{\nu+1}(0)| < 1, \ \dots, \ |\varphi_n(0)| < 1$$

и, значит, согласно принципу максимума для аналитических функций,

$$\varphi_1(t) \equiv 1, \ \dots, \ \varphi_\nu(t) \equiv 1 \quad |\varphi_{\nu+1}(t)| < 1, \ \dots, \ |\varphi_n(t)| < 1$$
$$\text{при} \quad |t| < \varepsilon.$$

Таким образом, кривая $\varphi(t)$ целиком содержится в $\mathcal{F}_\nu$.

Нетрудно проверить, что любая компонента границы F аналитически эквивалентна компоненте $\mathcal{F}_\nu$ с некоторым ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n$.

Первая основная теорема. *Пусть $\mathscr{D}$ — классическая область. Тогда*

1) *любая точка границы содержится в некоторой регулярной компоненте;*

2) ***всякая компонента аналитически эквивалентна некоторой классической области в пространстве меньшего числа измерений;***

3) ***если область $\mathscr{D}$ представляет собой произведение неприводимых областей $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_k$, то любая компонента $\mathscr{F}$ равна произведению компонент $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k$ соответствующих областей*** *).

Предположим, что утверждения теоремы верны для неприводимых классических областей, и покажем, что они верны для всех классических областей. Для этого нам, очевидно, достаточно доказать следующее.

Пусть $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \times \ldots \times \mathscr{D}_k$, где $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_k$ — неприводимые области. Покажем, что любая компонента $\mathscr{F}$ представляется произведением $\mathscr{F}_1 \times \ldots \times \mathscr{F}_k$, где $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k$ — компоненты, быть может «несобственные», областей $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_k$.

Действительно, пусть $\mathscr{F}$ — некоторая компонента границы области $\mathscr{D}$. Рассмотрим проекцию $\mathscr{D}$ на область $\mathscr{D}_{i_0}$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant k)$. Компоненте $\mathscr{F}$ при этом, очевидно, соответствует некоторое аналитическое подмножество $\mathscr{F}_{i_0}$ границы области $\mathscr{D}_{i_0}$ или сама область $\mathscr{D}_{i_0}$. Легко проверяется, что $\mathscr{F}_{i_0}$ представляет собой либо компоненту границы области $\mathscr{D}_{i_0}$, либо всю область $\mathscr{D}_{i_0}$. Произведение $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_1 \times \ldots \times \mathscr{F}_k$ есть аналитическое подмножество границы области $\mathscr{D}$. Легко видеть, что $\mathscr{F} \subset \tilde{\mathscr{F}}$. Если бы $\mathscr{F}$ и $\tilde{\mathscr{F}}$ не совпадали, то нетрудно было бы построить аналитическую кривую, принадлежащую F, пересекающуюся с $\mathscr{F}$ и не содержащуюся целиком в $\mathscr{F}$. Отсюда следует, что $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$. Пункты 1) и 2) теоремы вытекают из пункта 3). Доказательство справедливости утверждения теоремы для неприводимых классических областей см. в § 6, 7, 8.

---

*) Множество всех внутренних точек области $\mathscr{D}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ мы рассматриваем как «несобственную» компоненту границы этой области.

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая классическая область. Как будет доказано в дальнейшем, ее граница F состоит из конечного числа ν частей, транзитивных относительно полной группы аналитических автоморфизмов области $\mathscr{D}$. Очевидно, что точки каждой такой части содержатся в аналитически эквивалентных компонентах. Следовательно, существует ровно ν типичных (аналитически не эквивалентных между собой) компонент границы области $\mathscr{D}$.

Следующая теорема описывает структуру области вблизи границы.

Вторая основная теорема. *Для каждой классической области $\mathscr{D}$ существует ν областей Зигеля* (мы их в дальнейшем будем называть каноническими), *базами которых служат типичные компоненты границы области $\mathscr{D}$. Для любой точки границы z_0 существует аналитическое отображение области $\mathscr{D}$ на одну из этих ν областей, причем аналитические автоморфизмы области $\mathscr{D}$, переводящие в себя компоненту $\mathscr{F}$ $(z_0 \in \mathscr{F})$, переходят в квазилинейные преобразования этой области, а аналитические автоморфизмы области $\mathscr{D}$, оставляющие на месте точку z_0, переходят в линейные преобразования этой области.*

Доказательство этой теоремы см. в § 6. Указанные канонические области Зигеля будут построены в § 6, 7 и 8 отдельно для каждого типа неприводимых классических областей. Для области, которая является произведением неприводимых областей, эти канонические реализации можно получить как произведения соответствующих реализаций неприводимых областей.

Дадим теперь инвариантное, т. е. не зависящее от способа вложения $\mathscr{D}$ в комплексное аффинное пространство, определение компоненты.

Как известно, для всякой классической области $\mathscr{D}$ существует двойственное комплексное компактное симметрическое многообразие D *), в которое $\mathscr{D}$ вкладывается в виде некоторой области, причем аналитические автоморфизмы $\mathscr{D}$ являются аналитическими автоморфизмами D. Совокупность F точек $D \setminus \mathscr{D}$, предельных для $\mathscr{D}$, называется, как обычно, границей области $\mathscr{D}$.

*) См. § 6, стр. 61.

Как будет показано в § 6, 7, 8, введенная таким способом граница совпадает с границей (в обычном понимании этого слова) для канонической реализации $\mathscr{D}$ в аффинном комплексном пространстве. Итак, существует единственное вложение области $\mathscr{D}$ в C^n. Компонента, определенная с помощью этого вложения, инвариантна.

Укажем другой способ определения компонент при помощи «расстояния» между точками границы (И. И. Пятецкий-Шапиро [11]) *).

Область $\mathscr{D}$ является симметрическим римановым пространством, поэтому в ней имеется инвариантное относительно аналитических автоморфизмов риманово расстояние. Обозначим расстояние между точками $z \in \mathscr{D}$ и $w \in \mathscr{D}$ через $\rho(z, w)$. Покажем, что можно ввести «расстояние» между точками границы области $\mathscr{D}$.

Пусть a и b — две точки границы F; A и B — любые их окрестности в D. Положим

$$\left.\begin{aligned} \rho_{A, B} &= \inf_{\substack{z \in A \cap D \\ w \in B \cap D}} \rho(z, w), \\ \rho(a, b) &= \sup_{A, B} \rho_{A, B}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь верхняя грань чисел $\rho_{A, B}$ берется по всем возможным парам окрестностей A, B.

Величину $\rho(a, b)$ $(a, b \in F)$ назовем **расстоянием** между точками a, b границы F области $\mathscr{D}$.

Для нас наиболее важно изучение тех кусочков границы, на которых расстояние $\rho(a, b)$ конечно. Замечательно, что они совпадают с компонентами в указанном ранее смысле.

Определение 4. Совокупность точек $\mathscr{F} \subset F$, находящихся на конечном расстоянии от фиксированной точки из F, назовем **компонентой**.

Рассмотрим в качестве примера простейшую область — полицилиндр, т. е. совокупность $\mathscr{D}$ всех точек n-мерного комплексного пространства, для которых $|z_1| < 1, \ldots$ $\ldots, |z_n| < 1$.

---

*) Идея введения «расстояния» между точками границы возникла в результате обсуждения этих вопросов с Ф. И. Карпелевичем (см. Ф. И. Карпелевич [1]).

Как мы уже видели, типичными компонентами границы полицилиндра являются множества $\mathcal{T}_\nu$ точек следующего вида:

$$(1, \ldots, 1, z_{\nu+1}, \ldots, z_n), \quad |z_{\nu+1}| < 1, \ldots, |z_n| < 1.$$

Покажем, что эти множества являются компонентами в смысле нового определения. Расстояние $\rho(z, w)$ между двумя точками $z, w \in D$, как известно, равно

$$\rho(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \ln^2 \frac{1+\rho_k}{1-\rho_k}}, \quad \text{где} \quad \rho_k = \left| \frac{z_k - w_k}{1 - z_k \bar{w}_k} \right|. \tag{3}$$

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — две точки границы области $\mathcal{D}$. Покажем, что расстояние между ними конечно тогда и только тогда, когда из $|a_{k_0}| = 1$ следует, что $b_{k_0} = a_{k_0}$ и что если это условие выполняется при всех k, то расстояние $\rho(a, b)$ вычисляется по формуле

$$\rho(a, b) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \ln^2 \frac{1+\rho'_k}{1-\rho'_k}}, \tag{4}$$

где

$$\rho'_k = \begin{cases} \left| \dfrac{a_k - b_k}{1 - a_k \bar{b}_k} \right|, & \text{если} \quad |a_k| < 1, \\ 0, & \text{если} \quad |a_k| = 1. \end{cases}$$

Действительно, если $\rho(a, b) < \infty$, то существуют две последовательности точек из $\mathcal{D}$

$$z^{(m)} = \left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right),$$
$$w^{(m)} = \left(w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}\right),$$

сходящиеся в топологии аффинного комплексного пространства соответственно к a и b, причем $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(z^{(m)}, w^{(m)}) < \infty$. Из (3) вытекает, что тогда $\lim\limits_{m \to \infty} \sup \rho\left(z_k^{(m)}, w_k^{(m)}\right) < \infty$ при любом k, и следовательно, либо $|a_k| < 1$, $|b_k| < 1$, либо $a_k = b_k$ *).

---

*) Легко проверить, что если $\lim \left| \dfrac{z_k^{(m)} - w_k^{(m)}}{1 - z_k^{(m)} \bar{w}_k^{(m)}} \right| < 1$, то либо $|a_k| < 1$, $|b_k| < 1$, либо $a_k = b_k$.

Обратно, если выполняется либо $|a_k| < 1$, $|b_k| < 1$, либо $a_k = b_k$, то, как легко видеть, существуют две последовательности $z_k^{(m)}$ и $w_k^{(m)}$ точек круга $|z_k| < 1$, сходящиеся в топологии аффинного комплексного пространства к a_k и b_k, причем $\rho\left(z_k^{(m)}, w_k^{(m)}\right) = \rho\left(a_k, b_k\right)$.

Положим

$$z^{(m)} = \left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right) \quad \text{и} \quad w^{(m)} = \left(w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}\right).$$

Тогда, согласно (3),

$$\rho^2(a, b) \leqslant \lim \rho^2\left(z^{(m)}, w^{(m)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \rho^2\left(z_k^{(m)}, w_k^{(m)}\right) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \rho^2(a_k, b_k). \tag{5}$$

С другой стороны, пусть $z^{(m)} = \left(z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}\right)$ и $w^{(m)} = \left(w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}\right)$ — две последовательности точек, сходящиеся в смысле топологии аффинного комплексного пространства, соответственно, к $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$; тогда

$$\liminf_{m \to \infty} \rho^2\left(z^{(m)}, w^{(m)}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \liminf_{m \to \infty} \rho^2\left(z_k^{(m)}, w_k^{(m)}\right) \geqslant \\ \geqslant \sum_{k=1}^{n} \rho^2(a_k, b_k). \tag{6}$$

Из (5) и (6), очевидно, вытекает (4). Наше утверждение доказано.

Пусть опять $\mathscr{D}$ — произвольная классическая область. Обозначим через $z(s)$ некоторую геодезическую. В § 6, 7, 8 будет показано, что в топологии аффинного комплексного пространства существует предел $z(s)$ при $s \to +\infty$, принадлежащий F.

Пусть $z \in \mathscr{D}$ и $a \in F$. Условимся говорить, что точки z и a можно соединить геодезической, если существует такая геодезическая $z(s)$, что $z(0) = z$ и $z(+\infty) = \lim\limits_{s \to +\infty} z(s) = a$. Вообще говоря, две произвольные точки $z \in \mathscr{D}$ и $a \in F$ нельзя соединить геодезической, как это вытекает из теоремы 1.

Отметим, что любые две внутренние точки $\mathscr{D}$ можно всегда соединить единственной геодезической.

Теорема 1. *Пусть $z \in \mathscr{D}$. В любой компоненте $\mathscr{F}$ содержится в точности одна точка a, которую можно соединить с z геодезической. Совокупность $\mathscr{D}_a$ точек области $\mathscr{D}$, которые можно соединить геодезическими с данной точкой $a \in \mathscr{F}$, аналитически эквивалентна некоторой области Зигеля 2-го рода.*

Раньше (И. И. Пятецкий-Шапиро [11]) эта теорема заменяла в приложениях к теории автоморфных функций более сильную вторую основную теорему.

Пусть $\mathscr{F}$ — некоторая компонента границы.

Обозначим через $\mathscr{D}_a$ совокупность всех точек области $\mathscr{D}$, соединимых геодезическими с точкой $a \in \mathscr{F}$.

Из теоремы 1 вытекает, что область $\mathscr{D}$ «расслаивается» на части $\mathscr{D}_a$, $a \in \mathscr{F}$. Это расслоение не является аналитическим расслоением в обычном смысле слова ввиду того, что оно не имеет локально структуру прямого произведения. Как будет показано в § 6, 7, 8, это расслоение совпадает с естественно имеющимся расслоением в соответствующей канонической реализации $\mathscr{D}$ в виде области Зигеля.

В дальнейшем мы будем использовать следующую терминологию:

Компонента, состоящая из одной точки, называется нульмерной.

Компонента $\mathscr{F}$ неприводимой классической области называется компонентой первого рода, если соответствующие слои $\mathscr{D}_a$ являются областями Зигеля 1-го рода.

Компонента $\mathscr{F}$ неприводимой классической области называется компонентой второго рода, если соответствующие слои $\mathscr{D}_a$ представляют собой области Зигеля 2-го рода.

В § 6, 7 и 8 будут перечислены все компоненты и соответствующие им слои $\mathscr{D}_a$ для классических областей. Из этого перечисления станет ясно, что компоненты первого рода для неприводимых областей всегда нульмерны. Обратное утверждение не справедливо. Например, у шара $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$ все компоненты нульмерны, но являются компонентами второго рода.

В § 6, 7 и 8 будет показано, что $\mathscr{D}_a$ аналитически эквивалентна некоторой ограничённой однородной (вообще говоря, несимметрической) области. Так впервые было обнаружено существование несимметрических ограниченных однородных областей.

Для приводимых областей мы будем пользоваться следующей терминологией.

Пусть

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \times \ldots \times \mathscr{D}_p, \tag{7}$$

где $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_p$ — неприводимые области. Компонента

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \times \ldots \times \mathscr{F}_p \tag{8}$$

называется компонентой первого рода, если каждый сомножитель $\mathscr{F}_k (1 \leqslant k \leqslant p)$ является либо компонентой первого рода, либо «несобственной» компонентой, т. е. совпадает с $\mathscr{D}_k$.

Аналогично определяются компоненты (8) второго рода для областей типа (7). Остальные компоненты вида (8) называются компонентами третьего рода.

С каждой компонентой $\mathscr{F}$ можно связать следующие замечательные подгруппы группы G всех аналитических автоморфизмов области $\mathscr{D}$:

$G_1(\mathscr{F})$ — совокупность всех преобразований из G, переводящих $\mathscr{F}$ в себя;

$G_2(\mathscr{F})$ — совокупность всех преобразований из G, оставляющих на месте каждую точку $\mathscr{F}$;

$G_3(\mathscr{F})$ — совокупность всех преобразований g из G, оставляющих на месте каждую точку $\mathscr{F}$ в смысле римановой геометрии в области $\mathscr{D}$. Это значит, что для любой геодезической $z(s)$ такой, что $\lim\limits_{s \to +\infty} z(s) = a \in F$, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{s \to +\infty} \rho(z(s), gz(s)) = 0.$$

Через $G_4(\mathscr{F})$ условимся обозначать максимальный коммутативный нормальный делитель в группе $G_3(\mathscr{F})$.

Через $G_5(\mathscr{F})$ условимся обозначать централизатор группы $G_4(\mathscr{F})$ в группе $G_1(\mathscr{F})$.

Очевидно, что $G_{\nu+1}(\mathscr{F}) (1 \leqslant \nu \leqslant 3)$ — нормальный делитель в группе $G_\nu(\mathscr{F})$.

В следующих параграфах будет показано, что группа $G_3(\mathscr{F})$ совпадает с группой Δ «параллельных переносов», соответствующей канонической реализации области $\mathscr{D}$ в виде области Зигеля.

§ 6. Классические области первого типа

Классические области первого типа описываются следующим образом (Зигель [1]).

Пусть $p \geqslant q > 0$ — целые числа. Будем рассматривать прямоугольные матрицы Z типа $p \times q$ как точки pq-мерного комплексного пространства. Интересующая нас область $\mathscr{D}$ состоит из матриц Z, для которых

$$E_q - Z^*Z > 0,$$

где через E_q обозначена единичная матрица порядка q.

Группа G аффинных преобразований $m = p + q$-мерного комплексного пространства, сохраняющих эрмитову форму с p минусами и q плюсами, является группой аналитических автоморфизмов рассматриваемой области. Точнее говоря, каждой квадратной матрице M порядка $m = p + q$, удовлетворяющей условию

$$M^*HM = H, \quad H = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix}, \tag{1}$$

соответствует аналитический автоморфизм области *)

$$Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Граница F области $\mathscr{D}$ состоит, очевидно, из всех Z таких, что

$$E_q - Z^*Z \geqslant 0, \quad \det(E_q - Z^*Z) = 0. \tag{3}$$

Мы начнем с перечисления всех компонент границы области $\mathscr{D}$.

Предварительно докажем следующую лемму.

---

*) Можно показать, что все аналитические автоморфизмы имеют вид (2), если $p \neq q$. Если же $p = q$, то добавляется еще автоморфизм $Z \to Z'$ (Клинген [1]).

Лемма 1. *Пусть* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — *аналитические в круге* $|t| < \varepsilon$ *функции*:

$$M = \sup_{|t| < \varepsilon} (|\varphi_1(t)|^2 + \ldots + |\varphi_n(t)|^2).$$

Тогда

$$|\varphi_1(0)|^2 + \ldots + |\varphi_n(0)|^2 \leqslant M, \tag{4}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда все функции $\varphi_k(t)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *константы.*

Доказательство. Из интегральной формулы Коши вытекают следующие равенства:

$$\varphi_k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_k(\rho e^{i\theta})\, d\theta, \quad k = 1, \ldots, n; \quad \rho < \varepsilon,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(0)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant M.$$

Если здесь стоят знаки равенства, то

$$|\varphi_k(0)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_k(\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

и следовательно, $\varphi_k(t) = \mathrm{const}$, $k = 1, \ldots, n$. Лемма доказана.

Следующая теорема содержит описание всех компонент области $\mathfrak{D}$.

Теорема 1. *Совокупность точек из* F *вида*

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} & \begin{matrix} r \\ p-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & q-r \end{matrix} & \end{array}, \quad Z^*Z < E_{q-r}, \quad 1 \leqslant r \leqslant q, \tag{6}$$

образует компоненту $\mathcal{F}_r$, *которая аналитически эквивалентна классической области первого типа с параметрами* $p-r$, $q-r$. *Любая компонента границы некоторым аналитическим автоморфизмом области* $\mathfrak{D}$ *может быть переведена в компоненту* $\mathcal{F}_r$, $1 \leqslant r \leqslant q$. *Всякая точка* F *принадлежит некоторой компоненте.*

Доказательство. Непосредственно легко проверяется, что $\mathcal{F}_r$ представляет собой регулярное аналитическое подмножество точек границы F области $\mathcal{D}$. Поэтому для доказательства того, что $\mathcal{F}_r$ — компонента, достаточно доказать, что любая аналитическая кривая, принадлежащая F и пересекающаяся с $\mathcal{F}_r$, целиком содержится в $\mathcal{F}_r$.

Пусть $Z=Z(t)$, $|t|<\varepsilon$, — некоторая аналитическая кривая, $Z(0)\in\mathcal{F}_r$, $Z(t)\in F$ при всех t, $|t|<\varepsilon$.

Представим Z в виде

$$\begin{array}{cl} Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} r \\ p-r \end{array}. \\ \quad\;\; \begin{array}{cc} r & q-r \end{array} & \end{array}$$

Включение $Z\in F$ означает, что $E_q-Z^*Z\geqslant 0$, откуда, в частности,

$$E_r-Z_{11}^*Z_{11}-Z_{21}^*Z_{21}\geqslant 0. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что если $Z(t)\in F$, то

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}|z_{ij}(t)|^2\leqslant r, \quad |t|<\varepsilon.$$

Далее, $Z(0)\in\mathcal{F}_r$ означает, что

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{r}|z_{ij}(0)|^2=r.$$

Следовательно, согласно доказанной выше лемме, $z_{ij}(t)$ $(1\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant i\leqslant p)$ — константы, и значит, $Z_{11}(t)\equiv E_r$, $Z_{21}(t)\equiv 0$. Чтобы показать, что $Z_{12}(t)\equiv 0$, достаточно заметить эквивалентность неравенств $E_q-Z^*Z\geqslant 0$ и $E_p-ZZ^*\geqslant 0$ (Зигель [1], стр. 135).

Применяя те же рассуждения, что и выше, с помощью неравенства $E_p-ZZ^*\geqslant 0$ легко показать, что $Z_{12}(t)\equiv 0$. Остается показать, что $Z_{22}^*(t)Z_{22}(t)<E_{q-r}$ при всех t, $|t|<\varepsilon$.

Из того, что $Z(t)\in F$, следует неравенство $Z_{22}^*(t)Z_{22}(t)\leqslant$ $\leqslant E_{q-r}$. Мы должны показать, что $\det\left(E_{q-r}-Z_{22}^*(t)Z_{22}(t)\right)\neq 0$ при всех t, $|t|<\varepsilon$. Если это не так, то существует такое t_0, $|t_0|<\varepsilon$, что

$$E_{q-r}-Z_{22}^*(t_0)Z_{22}(t_0)\geqslant 0, \quad \det\left(E_{q-r}-Z_{22}^*(t_0)Z_{22}(t_0)\right)=0.$$

Тогда существует такой вектор-столбец ξ_0, что

$$\xi_0^* (E_{q-r} - Z_{22}^* (t_0) Z_{22} (t_0)) \xi_0 = 0.$$

Положим $\xi(t) = Z(t) \xi_0$. Ясно, что

$$\xi^* (t) \xi (t) \leqslant \xi_0^* \xi_0 \tag{8}$$

при всех t, $|t| < \varepsilon$, и

$$\xi^* (0) \xi (0) < \xi_0^* \xi_0. \tag{9}$$

Из доказанной выше леммы вытекает, что если в (8) имеет место равенство хотя бы в одной точке, то вектор-функция $\xi(t)$ константа. Получаем противоречие с (9), которое показывает, что

$$Z_{22}^* (t) Z_{22} (t) < E_{q-r}.$$

Таким образом, $\mathcal{F}_r$ представляет собой компоненту границы.

Отображение $\mathcal{F}_r$ на классическую область осуществляется очевидным образом

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \to Z. \tag{10}$$

Докажем, что любая компонента аналитическим автоморфизмом области может быть переведена в компоненту $\mathcal{F}_r$, $1 \leqslant r \leqslant q$.

Пусть $Z_0 \in F$. Как известно, существуют такие унитарные матрицы U_1 и U_2, что

$$U_1 Z_0 U_2 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & x_{q-r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Точка (11) принадлежит, очевидно, компоненте $\mathcal{F}_r$, и значит, первоначальная точка принадлежит компоненте $\varphi(\mathcal{F}_r)$, где φ — аналитическое отображение $\mathcal{D}$ на себя

$$Z \to U_1^{-1} Z U_2^{-1}.$$

Мы показали, таким образом, что любую компоненту можно перевести в компоненту $\mathcal{F}_r$ с помощью аналитического преобразования области $\mathcal{D}$, оставляющего на месте некоторую наперед заданную внутреннюю точку. Одновременно показано, что всякая точка границы содержится в некоторой компоненте.

Итак, первая основная теорема (§ 5) для областей первого типа полностью доказана.

Приведем критерий принадлежности двух точек Z_1 и Z_2 одной компоненте. Положим

$$W_{12} = E_q - Z_1^* Z_2. \tag{12}$$

Легко проверить, что при аналитическом автоморфизме $Z \to \tilde{Z}$ области $\mathfrak{D}$ матрица W_{12} преобразуется по следующему закону:

$$W_{12} \to \tilde{W}_{12} = Q^*(Z_1) W_{12} Q(Z_2), \tag{13}$$

где $Q(Z)$ — невырожденная квадратная матрица порядка q, зависящая от Z и от аналитического автоморфизма $Z \to \tilde{Z}$. Обозначим через $r(Z_1, Z_2)$ ранг матрицы W_{12}. Из (13) ясно, что $r(Z_1, Z_2)$ является инвариантом пары точек Z_1 и Z_2 при аналитических автоморфизмах области $\mathfrak{D}$.

Следующая лемма содержит критерий в терминах $r(Z_1, Z_2)$ принадлежности точек Z_1 и Z_2 одной компоненте.

Лемма 2. *Две точки Z_1, $Z_2 \in F$ принадлежат одной компоненте тогда и только тогда, когда*

$$r(Z_1, Z_1) = r(Z_1, Z_2) = r(Z_2, Z_2). \tag{14}$$

Доказательство. Необходимость. Легко проверить, что всякая точка F аналитическим автоморфизмом области $\mathfrak{D}$ может быть переведена в точку вида

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} r \\ p-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & q-r \end{array} & \end{array}, \quad 1 \leqslant r \leqslant q. \tag{15}$$

Пусть Z_1 и Z_2 принадлежат одной компоненте. Без ограничения общности можно предполагать, что Z_1 имеет вид (15). Тогда Z_2 должно иметь вид

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \quad Z^*Z < E_{q-r}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что в этом случае

$$W_{11}=W_{12}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{q-r}\end{pmatrix}; \quad W_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{q-r}-Z^*Z\end{pmatrix}.$$

Отсюда, очевидно, следует, что (14) выполняется.

Достаточность. Пусть для Z_1, $Z_2 \in F$ выполняется (14). Опять без ограничения общности можно предположить, что Z_1 является точкой вида (15). Представим Z_2 в виде

$$Z_2=\begin{array}{c c} \begin{pmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_{22}\end{pmatrix} & \begin{matrix} r \\ p-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ \ r & \quad q-r \end{matrix} & \end{array}.$$

Из соотношения $r(Z_1, Z_1)=r(Z_1, Z_2)$ вытекает, что ранги матриц

$$W_{11}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{q-r}\end{pmatrix}, \quad W_{12}=\begin{pmatrix}E_r-Z_{11} & -Z_{12}\\ 0 & E_{q-r}\end{pmatrix}$$

равны и, значит, $Z_{11}=E_r$. Далее, из $Z_2 \in F$ следует:

$$E_q-Z^*Z=\begin{pmatrix}-Z_{21}^*Z_{21} & -Z_{12}-Z_{21}^*Z_{22}\\ -Z_{12}^*-Z_{22}^*Z_{21} & E_{q-r}-Z_{12}^*Z_{12}-Z_{22}^*Z_{22}\end{pmatrix} \geqslant 0,$$

откуда $Z_{21}=0$, $Z_{12}=0$, $E_{q-r}-Z_{22}^*Z_{22} \geqslant 0$.

Из соотношения $r(Z_1, Z_1)=r(Z_2, Z_2)$ следует, что ранги матриц

$$W_{11}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{q-r}\end{pmatrix}, \quad W_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{q-r}-Z_{22}^*Z_{22}\end{pmatrix}$$

равны, и значит, $E_{q-r} > Z_{22}^*Z_{22}$. Лемма полностью доказана.

Перейдем теперь к доказательству второй основной теоремы. Мы должны построить канонические реализации области $\mathscr{D}$ в виде областей Зигеля.

Согласно сформулированной в § 5 теореме, таких реализаций должно быть столько, сколько типичных компонент (в нашем случае q).

Опишем сначала компактное комплексное симметрическое многообразие D, стоящее в таком же отношении к $\mathscr{D}$, в каком сфера Римана стоит к единичному кругу. Многообразие D называется **двойственным** многообразием для многообразия $\mathscr{D}$.

Обозначим через Ω совокупность всех комплексных прямоугольных матриц U максимального ранга типа $m \times q$, $m = p + q$.

Если $U \in \Omega$, то $UR \in \Omega$, где R — квадратная невырожденная матрица порядка q. Условимся матрицы U и UR называть *эквивалентными*.

Совокупность всех эквивалентных между собой матриц образует *класс*. Множество классов допускает естественную комплексную структуру. Нетрудно проверить, что оно представляет собой компактное симметрическое многообразие D.

Покажем, что $\mathcal{D}$ можно реализовать в виде области на D. Пусть H — эрмитова матрица, определенная соотношением (1). Рассмотрим совокупность Ω_H матриц U, для которых

$$U^*HU > 0. \tag{16}$$

Легко проверить, что если $U \in \Omega_H$, то $UR \in \Omega_H$, где R — любая невырожденная квадратная матрица порядка q. Таким образом, всякий класс эквивалентных между собой матриц либо целиком содержится в Ω_H, либо не пересекается с Ω_H. Совокупность классов, принадлежащих Ω_H, очевидно, является областью в D. Положим

$$U = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \\ q & \end{array}. \tag{17}$$

Условие (16) можно переписать в виде

$$U^*HU = -U_1^*U_1 + U_2^*U_2 > 0. \tag{18}$$

Следовательно, если $U \in \Omega_H$, то матрица U_2 невырождена. Поэтому в каждом классе, содержащемся в Ω_H, можно выбрать единственного представителя вида

$$\begin{pmatrix} Z \\ E_q \end{pmatrix}.$$

Условие (16) означает, что $E_q - Z^*Z > 0$.

Мы показали, что $\mathcal{D}$ можно реализовать в виде области на D. Заметим, что классы, принадлежащие границе F области $\mathcal{D}$, состоят из таких U, для которых определитель матрицы U^*HU равен нулю и $U^*HU \geqslant 0$. Иными словами,

F состоит из Z, удовлетворяющих следующим условиям: 1) определитель матрицы $E_q - Z^*Z$ равен нулю и 2) $E_q - Z^*Z \geqslant 0$.

Перейдем к описанию канонических реализаций в виде областей Зигеля. Общий способ получения канонических реализаций состоит в следующем.

Пусть H — произвольная эрмитова матрица порядка m с p положительными и q отрицательными собственными значениями. Обозначим через Ω_H класс таких прямоугольных матриц U типа $m \times q$, что $U^*HU > 0$. Матрицы U и UR, где R — квадратная невырожденная матрица порядка q, условимся относить к одному классу.

Покажем, что совокупность D_H классов, принадлежащих Ω_H, является областью в D (двойственном многообразии), аналитически эквивалентной нашей области $\mathcal{D}$.

Действительно, существует такая невырожденная матрица M порядка m, что

$$M^*HM = H_0.$$

Здесь H_0 обозначает определенную в (1) эрмитову матрицу.

Отображение

$$U \to M^{-1}U$$

переводит Ω_H в Ω_{H_0}. Оно индуцирует аналитический автоморфизм D, переводящий D_H в D_{H_0}.

Для реализации D_H в аффинном комплексном пространстве достаточно указать способ сопоставления каждому классу матриц $U \in \Omega_H$ точки аффинного комплексного пространства.

Аналитические автоморфизмы D_H описываются следующим образом. Пусть G — совокупность всех квадратных матриц A порядка m таких, что $A^*HA = H$. Каждой матрице A сопоставим аналитический автоморфизм $U \to AU$ многообразия Ω. Легко видеть, что ему соответствует аналитический автоморфизм в D, переводящий D_H в себя. Граница D_H в D, очевидно, состоит из таких классов матриц U, что

$$1)\ \det(U^*HU) = 0, \quad 2)\ U^*HU \geqslant 0.$$

Введенный выше (см. лемму 2) инвариант пары точек $r(Z_1, Z_2)$ совпадает с рангом матрицы $U_1^*HU_2$. Действительно, во-первых, ранг матрицы $U_1^*HU_2$ не зависит от выбора матриц U_1 и U_2, а зависит только от тех классов, в которых они находятся; далее, ясно, что при подходящем выборе U_1 и U_2 имеет место равенство

$$W_{12} = U_1^*HU_2.$$

Окончательный вывод можно сформулировать в виде следующей леммы, дополняющей лемму 2.

Лемма 3. *Обозначим через $r(U_1, U_2)$ ранг матрицы $U_1^*HU_2$. Матрицы U_1 и U_2 при отображении $\Omega \to D$ переходят в точки одной компоненты границы области D_H тогда и только тогда, когда*

$$r(U_1, U_1) = r(U_1, U_2) = r(U_2, U_2). \qquad (19)$$

Опишем каноническую реализацию S_q, соответствующую нульмерной компоненте границы области $\mathfrak{D}$.

Рассмотрим матрицу H вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & iE_q \\ 0 & -E_{p_1} & 0 \\ -iE_q & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = p - q.$$

Как легко проверить, p собственных значений этой матрицы равны -1, а остальные q равны 1.

Разобьем U на клетки следующим образом:

$$U = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} q \\ p_1 \\ q \end{array}.$$

Условие (16) можно записать в виде

$$W = U^*HU = i(U_1^*U_3 - U_3^*U_1) - U_2^*U_2 > 0. \qquad (20)$$

Покажем, что если $U \in \Omega_H$, то матрица U_3 невырождена. Действительно, в противном случае существует такой не равный нулю вектор b, что $U_3b = 0$. Тогда $b^*U_3^* = 0$ и, следовательно,

$$b^*Wb = i(b^*U_1^*U_3b - b^*U_3U_1b) - b^*U_2^*U_2b = -b^*U_2^*U_2b \leqslant 0.$$

Мы пришли к противоречию и тем самым показали, что для $U \in \Omega_H$ матрица U_3 невырождена. Из этого вытекает, что в каждом классе эквивалентных между собой матриц $U \in \Omega_H$ содержится единственная матрица вида

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ E \end{pmatrix}.$$

Подставляя в (20) матрицу U такого вида, мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{i}(U_1 - U_1^*) - U_2^* U_2 > 0. \tag{21}$$

Это неравенство определяет в pq-мерном комплексном пространстве (координаты которого — элементы матриц U_k, $k = 1, 2$) некоторую неограниченную область. Построенная область суть область Зигеля 2-го рода, описанная в § 2 гл. 1.

Мы должны теперь показать, что преобразования, сохраняющие «бесконечно удаленную» нульмерную компоненту, линейны. Из леммы 3 следует, что принадлежность матрицы U некоторой нульмерной компоненте записывается следующим образом:

$$U^* H U = i(U_1^* U_3 - U_3^* U_1) - U_2^* U_2 = 0.$$

Пользуясь этим, легко проверить, что класс матриц U, в котором содержится матрица вида

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

при отображении $\Omega \to D$ переходит в нульмерную компоненту. Естественно считать ее «бесконечно удаленной». Найдем автоморфизмы области, оставляющие на месте точку (22). Матрицы A, соответствующие таким автоморфизмам, удовлетворяют условию

$$A \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} R, \quad A^* H A = H, \tag{23}$$

где R — некоторая квадратная невырожденная матрица порядка q, зависящая, вообще говоря, от A.

Разобьем A на клетки:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} q \\ p_1 \\ q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} q & p_1 & q \end{array} & \end{array}.$$

Запишем (23) в явном виде

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} R, \tag{24}$$

откуда $A_{21} = 0$, $A_{31} = 0$.

Далее, из $A^*HA = H$ легко получить, что $A_{32} = 0$. Преобразование с такой матрицей A линейно. Действительно,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}U_1 + A_{12}U_2 + A_{13} \\ A_{22}U_2 + A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}U_1A_{33}^{-1} + A_{12}U_2A_{33}^{-1} + A_{13}A_{33}^{-1} \\ A_{22}U_2A_{33}^{-1} + A_{23}A_{33}^{-1} \\ E \end{pmatrix} A_{33}. \tag{25}$$

Легко проверить (см. § 2 гл. 1), что преобразования вида (25) образуют полную группу аффинных преобразований области Зигеля (21).

Перейдем теперь к описанию остальных канонических реализаций. Рассмотрим матрицу H вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iE_r \\ 0 & -E_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{q_1} & 0 \\ -iE_r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = p - r, \quad q_1 = q - r. \tag{26}$$

Легко видеть, что p собственных значений матрицы H равны -1, а остальные q равны $+1$.

Разобьем U на клетки следующим образом:

$$U=\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \\ U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ p_1 \\ q_1 \\ r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & q_1 \end{array} & \end{array}.$$

Условие (16) записывается так:

$$\left.\begin{aligned} &W=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}>0, \\ &\text{где} \\ &W_{11}=\frac{1}{i}(U_{41}^*U_{11}-U_{11}^*U_{41})+U_{31}^*U_{31}-U_{21}^*U_{21}, \\ &W_{12}=W_{21}^*=\frac{1}{i}(U_{41}^*U_{12}-U_{11}^*U_{42})+U_{31}^*U_{32}-U_{21}^*U_{22}, \\ &W_{22}=\frac{1}{i}(U_{42}^*U_{12}-U_{12}^*U_{42})+U_{32}^*U_{32}-U_{22}^*U_{22}. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Покажем, что если $U\in\Omega_H$, то матрица

$$\begin{pmatrix} U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{pmatrix} \quad (28)$$

невырождена. Допустим, что для некоторой U, удовлетворяющей (27), это не верно. Умножим такую U на невырожденную квадратную матрицу Q так, чтобы для $\tilde{U}=UQ$ последний столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}_{31} & \tilde{U}_{32} \\ \tilde{U}_{41} & \tilde{U}_{42} \end{pmatrix}$$

состоял из нулей. Обозначим через e q_1-мерный вектор, все координаты которого, кроме последней, равны нулю, а последняя координата отлична от нуля. Легко видеть, что $\tilde{U}_{32}e=0$, $\tilde{U}_{42}e=0$. Поэтому

$$e^*W_{22}e=-e^*U_{22}^*U_{22}e\leqslant 0.$$

Мы получили противоречие. Таким образом, матрица (28) всегда невырожденная. Следовательно, U, удовлетворяющее (27), можно нормировать так, чтобы *)

$$\begin{pmatrix} U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_{q_1} \\ E_r & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Формулы (27) запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} > 0, \\ &W_{11} = \frac{1}{i}(U_{11} - U_{11}^*) - U_{21}^* U_{21}, \\ &W_{12} = W_{21}^* = \frac{1}{i} U_{12} - U_{21}^* U_{22}, \\ &W_{22} = E_{q_1} - U_{22}^* U_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Неравенства (30) определяют в pq-мерном комплексном пространстве (координаты которого — элементы матриц U_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$) неограниченную область S_r, $r = q - q_1$.

Покажем, что S_r является областью Зигеля 3-го рода, причем базой ее служит компонента $\mathcal{F}_r$.

Вначале мы докажем, что

$$W = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ q_1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & q_1 \end{array} & \end{array} > 0 \tag{31}$$

тогда и только тогда, когда

$$W_{11} > W_{12} W_{22}^{-1} W_{21}, \qquad W_{22} > 0. \tag{32}$$

Действительно, из (31) следует, что

$$Q^* W Q > 0$$

при любой невырожденной матрице Q. Положим, в частности,

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -W_{22}^{-1} W_{21} & E \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ q_1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & q_1 \end{array} & \end{array}.$$

*) Нормировка — это выбор в каждом классе эквивалентных матриц U из Ω_H единственного представителя.

Тогда

$$Q^*WQ = \begin{pmatrix} W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{21} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} > 0. \tag{33}$$

Ясно, что неравенства (31) и (33), а следовательно, (32) и (33) эквивалентны.

Пользуясь этим, мы можем соотношения (30) записать так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{i}(U_{11} - U_{11}^*) - U_{21}^*U_{21} - \\ &\qquad - (iU_{12} + U_{21}^*U_{22}) W_{22}^{-1} (iU_{12} + U_{21}^*U_{22})^* > 0, \\ &\qquad W_{22} = E_{q_1} - U_{22}^*U_{22} > 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

После раскрытия скобок первое из них имеет вид

$$\frac{1}{i}(U_{11} - U_{11}^*) - U_{21}^*U_{21} - U_{21}^*U_{22}W_{21}^{-1}U_{22}^*U_{21} - U_{12}W_{22}^{-1}U_{12}^* - \\ - iU_{12}W_{22}^{-1}U_{22}^*U_{21} + iU_{21}^*U_{22}W_{22}^{-1}U_{12}^* > 0. \tag{35}$$

Чтобы ясней стало совпадение полученной области с областью Зигеля 3-го рода, мы введем новые характерные для областей Зигеля обозначения.

Положим

$$t = U_{22}, \quad z = 2U_{11}, \quad u = (U_{12}, U_{21}), \quad v = (V_{12}, V_{21}).$$

Из (30) следует, как и следовало ожидать, что t может меняться в классической области первого типа с параметрами p_1, q_1. Определим в пространстве z оператор взятия вещественной части

$$\operatorname{Re} z = U_{11} + U_{11}^*. \tag{36}$$

В качестве конуса V возьмем конус всех эрмитовых положительно определенных матриц порядка r.

Положим, наконец,

$$L_t(u, v) = V_{21}^*U_{21} + U_{12}W_{22}^{-1}V_{12}^* + V_{21}^*U_{22}W_{22}^{-1}U_{22}^*U_{21} + \\ + \frac{i}{2}(U_{12}W_{22}^{-1}V_{21} + V_{12}W_{22}^{-1}U_{22}^*U_{21}). \tag{37}$$

Непосредственно проверяется, что наша область есть область Зигеля, соответствующая конусу V и функции $L_t(u,v)$.

Легко показать, что имеет место следующее тождество:

$$(E_{p_1} - U_{22}U_{22}^*)^{-1} = E_{q_1} + U_{22}W_{22}^{-1}U_{22}^*.$$

Пользуясь этим, $L_t(u, v)$ можно представить в виде

$$L_t(u, v) = V_{21}^*(E_{p_1} - U_{22}U_{22}^*)^{-1}U_{21} + U_{12}W_{22}^{-1}V_{12}^* + \\ + \frac{i}{2}\left(U_{12}W_{22}^{-1}U_{22}^*V_{21} + V_{12}W_{22}^{-1}U_{22}^*U_{21}\right).$$

Граница F этой области состоит из таких матриц U, для которых

$$\det U^*HU = 0, \qquad U^*HU \geqslant 0. \tag{38}$$

Рассмотрим матрицы $U \in F$ следующего вида:

$$U = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc} E_r & 0 \\ 0 & Z \\ 0 & E_{q_1} \\ 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} r \\ p_1 \\ q_1 \\ r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & \quad q_1 \end{array} \end{array}, \qquad Z^*Z < E. \tag{39}$$

Легко проверить, что в классе эквивалентных между собой матриц может содержаться не более одной матрицы вида (39). Далее, если U и $\tilde{U}$ определяются из (39), то

$$W = U^*H\tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{q_1} - Z^*\tilde{Z} \end{pmatrix},$$

откуда видно (см. лемму 3), что U образует компоненту, аналитически эквивалентную компоненте $\mathcal{F}_r$. Эту компоненту естественно рассматривать как «бесконечно удаленную».

Покажем, что аналитические автоморфизмы нашей области, переводящие в себя компоненту (39), представляют собой квазилинейные преобразования (определение см. в § 3 гл. 1), а аналитические автоморфизмы, оставляющие на месте точку

$$\left\| \begin{array}{cc} E_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E_{q_1} \\ 0 & 0 \end{array} \right\|, \tag{40}$$

представляют собой линейные преобразования.

В самом деле, пусть A — матрица, соответствующая аналитическому автоморфизму, оставляющему на месте компоненту (39). Тогда для любого U вида (39) существуют $\tilde{U}$ того же вида и невырожденная квадратная матрица B порядка q, для которых

$$AU = \tilde{U}B. \tag{41}$$

Разобьем A и B на клетки следующим образом:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} & \begin{matrix} r \\ p_1 \\ q_1 \\ r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & \;\; p_1 & \;\; q_1 & \;\; r \end{matrix} & \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & \begin{matrix} r \\ q_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & \;\; q_1 \end{matrix} & \end{array}.$$

Формула (41) может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}Z + A_{13} \\ A_{21} & A_{22}Z + A_{23} \\ A_{31} & A_{32}Z + A_{33} \\ A_{41} & A_{42}Z + A_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ \tilde{Z}B_{21} & \tilde{Z}B_{22} \\ B_{21} & B_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$A_{41} = 0, \qquad A_{42} = 0, \qquad A_{43} = 0,$$
$$A_{31} = B_{21}, \quad A_{21} = \tilde{Z}B_{21} = \tilde{Z}A_{31}.$$

В силу произвольности $\tilde{Z}$ получаем

$$A_{21} = 0, \quad A_{31} = 0.$$

Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \qquad A^*HA = H. \tag{42}$$

Легко проверить, что каждому A вида (42) соответствует следующее преобразование компоненты:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & Z \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & Z \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем

$$Z = (A_{22}Z + A_{23})(A_{32}Z + A_{33})^{-1}. \tag{43}$$

Из (43) сразу вытекает, что матрица A вида (42) соответствует аналитическому автоморфизму области, оставляющему на месте точку (40), тогда и только тогда, когда

$$A_{23} = 0, \qquad A_{32} = 0. \tag{44}$$

Покажем обратное, а именно, что всякому аналитическому автоморфизму нашей области, оставляющему на месте точку (40), соответствует матрица A вида (42) с дополнительными условиями (44). Для этого достаточно доказать, что аналитический автоморфизм нашей области, оставляющий на месте точку (40), оставляет на месте всю «бесконечно удаленную» компоненту. Последнее сразу вытекает из того, что 1) при аналитическом автоморфизме компонента обязана переходить в компоненту и 2) всякая точка границы, согласно первой основной теореме, содержится в единственной компоненте.

Покажем, что аналитические автоморфизмы в нашей области, оставляющие на месте точку (40), являются линейными преобразованиями. Совокупность всех матриц A вида (42) с дополнительными условиями (44) порождается своими двумя подгруппами. Первая из них состоит из матриц A вида

$$\begin{pmatrix} E & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & E & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & E & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{45}$$

причем

$$A_{24} = iA_{12}^*, \quad A_{34}^* = iA_{13}, \quad i\left(A_{14}^* - A_{14}\right) = A_{24}^*A_{24} - A_{34}^*A_{34}. \tag{46}$$

Вторая из этих подгрупп состоит из матриц A вида

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

причем

$$A_{11}A_{44}^* = E, \qquad A_{22}^*A_{22} = E, \qquad A_{33}^*A_{33} = E. \tag{48}$$

Каждой матрице A вида (45) соответствует, как легко проверить, следующее преобразование нашей области:

$$\left.\begin{aligned} &U_{11}\to U_{11}+A_{12}U_{21}+A_{14}-U_{12}A_{34}-A_{12}U_{22}A_{34}-A_{13}A_{34},\\ &U_{21}\to U_{21}+A_{24}-U_{22}A_{34},\\ &U_{12}\to U_{12}+A_{12}U_{22}+A_{13},\\ &U_{22}\to U_{22}.\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

С помощью (46) можно проверить, что полученные преобразования являются «параллельными переносами» в смысле § 3 главы I. Каждой матрице вида (47) соответствует следующее преобразование нашей области:

$$\left.\begin{aligned} &U_{11}\to A_{11}U_{11}A_{11}^*,\\ &U_{12}\to A_{11}U_{12}A_{33}^*,\\ &U_{21}\to A_{22}U_{21}A_{11}^*,\\ &U_{22}\to A_{22}U_{22}A_{33}^*.\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Из (49) и (50) следует, что каждой матрице A вида (42), удовлетворяющей дополнительному условию (44), соответствует линейное преобразование нашей области.

Каждой матрице вида (42) соответствует квазилинейное преобразование нашей области. Нетрудно видеть, что для этого достаточно показать, что матрице A вида

$$A=\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0\\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & E\end{pmatrix} \quad (51)$$

соответствует квазилинейное преобразование нашей области.

Непосредственные вычисления показывают, что матрице A вида (51) соответствует следующее преобразование нашей области:

$$\left.\begin{aligned} &U_{11}\to U_{11}-U_{12}(A_{32}U_{22}+A_{33})^{-1}A_{32}U_{21},\\ &U_{12}\to U_{12}(A_{32}U_{22}+A_{33})^{-1},\\ &U_{21}\to (A_{23}U_{22}+A_{22})^{-1}U_{21},\\ &U_{22}\to (A_{22}U_{22}+A_{23})(A_{32}U_{22}+A_{33})^{-1}.\end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Таким образом, каждое преобразование области S, переводящее в себя «бесконечно удаленную» компоненту границы, является квазилинейным преобразованием.

Доказательство второй основной теоремы для классических областей первого типа.

Пусть D — классическая область первого типа с параметрами p и q, $p \geqslant q$. Как мы уже видели, существует ровно q типичных компонент границы. Нами построено как раз столько же областей Зигеля, базами которых являются типичные компоненты границы. Докажем, что для любой точки границы области $\mathscr{D}$ существует аналитическое отображение $\mathscr{D}$ на одну из построенных нами областей Зигеля, удовлетворяющее требованиям теоремы.

Пусть данная точка принадлежит компоненте, аналитически эквивалентной компоненте $\mathscr{F}_r$. Очевидно, что существует отображение $\mathscr{D}$ на S_r, при котором данная точка переходит в точку вида (40). Как было показано, преобразования, оставляющие эту точку на месте, являются линейными преобразованиями области S_r, а преобразования, оставляющие компоненту этой точки на месте, являются квазилинейными преобразованиями области S_r.

Вторая основная теорема для областей первого типа полностью доказана.

В главах III, IV, посвященных теории автоморфных функций, нам понадобится критерий «сходимости» последовательности точек к точке бесконечно удаленной компоненты.

Введем общее определение «сходимости».

Пусть S — некоторая область Зигеля с базой $\mathscr{F}$. Точки S обозначим, как обычно, через $w=(z, u, t)$, а точки $\mathscr{F}$ через t. Пусть V и $L_t(u, v)$ имеют тот же смысл, что и в § 3 гл. I.

Определение 1. Пусть Q — некоторая область в $\mathscr{F}$, r — вектор из V. Цилиндрической областью $S(Q, r)$ в области S называется совокупность всех $w=(z, u, t)$, для которых

$$\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(u, u) - z \in V, \quad t_0 \in Q. \tag{53}$$

Определение 2. Пусть $w_1, w_2, \ldots$ — последовательность точек из S. Условимся говорить, что

$$\lim_{\nu \to \infty} w_\nu = t_0, \quad t \in \mathscr{F}, \tag{54}$$

если для любой цилиндрической области $S(Q, r)$ (где $t_0 \in Q$) существует такое ν_0, что при $\nu > \nu_0$

$$w_\nu \in S(Q, r). \tag{55}$$

Пусть $U_1 \in \Omega_H$, $U_2 \in \overline{\Omega}_H$, положим

$$\left. \begin{aligned} B(U_1, U_2) &= U_2^* H U_1 (U_1^* H U_1)^{-1} U_1^* H U_2, \\ W(U_1, U_2) &= U_2^* H U_2. \end{aligned} \right\} \tag{56}$$

Нетрудно видеть, что 1) матрица $B(U_1, U_2)$ не зависит от U_1, а зависит лишь от класса, к которому принадлежит U_1; 2) при замене матрицы U_2 на другую матрицу того же класса матрицы $B(U_1, U_2)$ и $W(U_1, U_2)$ преобразуются одинаково:

$$B \to R^* B R, \quad W \to R^* W R, \tag{57}$$

где R — невырожденная квадратная матрица, зависящая от U_2 и от заданного аналитического автоморфизма; 3) пара матриц $B(U_1, U_2)$ и $W(U_1, U_2)$ является совокупным инвариантом (относительно аналитических автоморфизмов области D_H) соответствующей пары точек из $\overline{D}_H$, т. е. при аналитическом автоморфизме они преобразуются по формуле (57).

Следующая лемма дает критерий сходимости к некоторой точке «бесконечно удаленной» компоненты.

Лемма 4. *Пусть U_0 — некоторая матрица, переходящая при отображении $\Omega \to D$ в точку «бесконечно удаленной» компоненты. Последовательность точек нашей области тогда и только тогда сходится к заданной точке компоненты, когда*

$$\lim_{n \to \infty} B(U_n, U_0) = W(U_0, U_0), \tag{58}$$

где $U_n \in \Omega$ — произвольные прообразы заданной последовательности точек.

Доказательство. Очевидно, без ограничения общности можно положить

$$U_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_n = \begin{pmatrix} U_{11}^{(n)} & 0 \\ 0 & U_{22}^{(n)} \\ 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$B(U_n, U_0) = \begin{pmatrix} i\left(U_{11}^{(n)} - U_{11}^{*(n)}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(E - U_{22}^{*(n)} U_{22}^{(n)}\right)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$W(U_0, U_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Из определения «сходимости» ясно, что последовательность U_n сходится тогда и только тогда, когда $\left(U_{11}^{(n)} - U_{11}^{*(n)}\right)^{-1} \to 0$, $U_{22}^{(n)} \to 0$, что эквивалентно (58). Отсюда вытекает утверждение леммы 4.

Приведем без доказательства формулы для риманова расстояния и для геодезических.

Мы будем предполагать, что область $\mathscr{D}$ реализована так, как описано в начале этого параграфа. Можно показать, что риманова метрика, инвариантная относительно аналитических автоморфизмов, задается формулой (Клинген [1])

$$ds^2 = \sigma\left((E_q - Z^*Z)^{-1} dZ^* (E_p - ZZ^*)^{-1} dZ\right);$$

$\sigma(A)$ обозначает след матрицы A. Расстояние между точками Z_1 и Z_2 выражается следующим образом:

$$\rho^2(Z_1, Z_2) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{q} \ln^2 \frac{1 + r_k^{\frac{1}{2}}}{1 - r_k^{1/2}}, \quad r_k = \frac{\lambda_l - 1}{\lambda_k},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ — собственные значения матрицы

$$R(Z_1, Z_2) = \\ = (E_q - Z_1^* Z_1)^{-1} (E_q - Z_1^* Z_2)(E_q - Z_2^* Z_2)^{-1} (E_q - Z_2^* Z_1).$$

Любая геодезическая в $\mathscr{D}$ аналитически эквивалентна геодезической вида (Хуа Ло Кен [1])

$$Z(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{th} \alpha_1 s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \operatorname{th} \alpha_2 s & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \operatorname{th} \alpha_q s \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

где $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_2^2 = 1$, s — длина дуги. Пользуясь (3), легко проверить, что для любой геодезической $Z(s)$ при $s \to +\infty$ существует предел, являющийся точкой F.

Пусть $Z_1 \in \mathscr{D}$ и $Z_2 \in F$. Условимся говорить, что точки Z_1 и Z_2 можно соединить геодезической, если существует такая геодезическая $Z(s)$, что $Z(0) = Z_1$ и $\lim\limits_{s \to +\infty} Z(s) = Z_2$. Произвольные точки Z_1 и Z_2, вообще говоря, нельзя соединить геодезической. Однако всякую точку $Z_1 \in \mathscr{D}$ можно соединить геодезической с любой компонентой, что вытекает из следующей леммы.

Лемма 5. *Точки $Z_1 \in \mathscr{D}$, $Z_2 \in F$ можно соединить геодезической тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы*

$$R_{12} = W_{12}^{-1} W_{11} W_{21}^{-1} W_{22} \tag{60}$$

(W_{ij} определено в (12)) равны нулю или единице. В частности, пусть $Z_1 \in \mathscr{D}$ и $\mathscr{F}$ — любая компонента. Существует единственная точка $Z_2 \in \mathscr{F}$, которую можно соединить геодезической с Z_1.

Доказательство. Пусть точки $Z_1 \in \mathscr{D}$ и $Z_2 \in F$ можно соединить геодезической $Z(s)$, $Z(0) = Z_1$. Без ограничения общности *) можно принять, что $Z_1 = 0$, а $Z(s)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} P(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{th} \alpha_1 s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \operatorname{th} \alpha_2 s & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \operatorname{th} \alpha_r s \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r > 0.$$

Легко проверить, что

$$R(Z_1, Z(s)) = \begin{pmatrix} E - p^2(s) & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

и значит,

$$R(Z_1, Z_2) = \lim_{s \to +\infty} R(Z_1, Z_2(s)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Мы доказали, что если точки Z_1 и Z_2 можно соединить геодезическими, то собственные значения матрицы R_2 равны

*) Собственные значения матрицы R, как это вытекает из (13), являются инвариантами при аналитических автоморфизмах области $\mathscr{D}$.

нулю или единице. Покажем обратное, т. е. что равенства нулю или единице собственных значений матрицы R_{12} достаточно для соединимости точек геодезическими. Без ограничения общности можно считать:

$$Z_1=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix},\quad Z_2=\begin{pmatrix}x_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & x_2 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & x_r\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},\quad x_k\geqslant 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что собственные значения матрицы R равны $1-x_1^2, \ldots, 1-x_r^2$, т. е. x_k равны нулю или единице. Пользуясь (59), нетрудно проверить, что существует нужная геодезическая.

Остается доказать второе утверждение леммы 5.

Без ограничения общности можно принять, что $Z_1=0$ и $\mathcal{F}$ имеет вид, указанный в (10). С помощью доказанного критерия нетрудно проверить, что $Z\in\mathcal{F}$ тогда и только тогда можно соединить с $Z_1=0$ геодезической, когда

$$Z=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}_Z(Z\in\mathcal{F})$ совокупность точек области $\mathcal{D}$, которые можно соединить с данной точкой $Z\in\mathcal{F}$. Из леммы 5 вытекает, что $\mathcal{D}$ «расслаивается» на слои $\mathcal{D}_Z$. Нетрудно проверить, что это расслоение совпадает с расслоением, естественно имеющимся в области Зигеля (34). Иными словами, слой состоит из точек области (34) с фиксированной U_{22}.

Из (52) ясно, что все слои аналитически эквивалентны между собой. Поэтому достаточно описать слой $\mathcal{D}_0$, соответствующий какому-нибудь одному значению U_{22}. Для простоты положим $U_{22}=0$. Из (34) вытекает, что $\mathcal{D}_0$ задается неравенствами

$$\frac{1}{i}\left(U_{11}-U_{11}^*\right)-U_{21}^*U_{21}-U_{12}U_{12}^*>0.$$

Отсюда ясно, что $\mathcal{D}_0$ представляет собой область Зигеля 2-го рода.

Группа $G_3(\mathcal{F})$ (см. § 5) *совпадает с группой «параллельных переносов»* Δ *области* S.

Пусть $Z(s)$ $(-\infty < s < +\infty)$ — геодезическая, входящая в компоненту $\mathcal{F}$. Как известно, $Z(s) = g(s) Z_0$, где $g(s)$ $(-\infty < s < +\infty)$ — некоторая однопараметрическая подгруппа аналитических автоморфизмов области $\mathcal{D}$. Пусть $a = Z(+\infty) \in \mathcal{F}$. Очевидно, что $g(s) a = a$ и, значит, $g(s) \in G_1(\mathcal{F})$. Покажем, что $g(s) \in G_2(\mathcal{F})$. Рассмотрим гомоморфизм $G_1(\mathcal{F})$ на $G'(\mathcal{F}) = G_1(\mathcal{F})/G_2(\mathcal{F})$. Он переводит $g(s)$ в компактную группу $g'(s)$, поскольку $g(s)$ $(-\infty < < s < +\infty)$ оставляет на месте точку a. Собственные значения матрицы $g(s)$ в представлении (42) вещественны. Следовательно, $g'(s) \equiv E$.

Пусть, далее, $g \in G_3(\mathcal{F})$, тогда для любой геодезической $Z(s)$, $(Z(+\infty) \in \mathcal{F})$

$$\lim \rho(Z(s), \quad g(Z(s))) = 0.$$

Полагая $Z(s) = g(s)(Z_0)$, мы имеем

$$\lim_{s \to +\infty} \rho(g(s) Z_0, \quad g(g(s) Z_0)) = 0,$$

откуда

$$\lim_{s \to +\infty} g^{-1}(s) g(g(s)) = E.$$

Непосредственными вычислениями нетрудно показать, что совокупность матриц, выделенных последним требованием, совпадает с совокупностью матриц A вида (45). Из (45) и (49) вытекает доказываемое утверждение.

§ 7. Классические области второго и третьего типов

В настоящем параграфе результаты § 6 для областей первого типа переносятся на классические области второго и третьего типов. Как известно, области второго типа описываются следующим образом.

Пусть $p > 0$. Будем рассматривать квадратные кососимметрические матрицы Z порядка p как точки $\frac{p(p-1)}{2}$-мерного комплексного пространства. Совокупность Z таких, что

$$Z^* Z < E_p, \quad Z' = -Z, \tag{1}$$

образует ограниченную область $\mathcal{D}$. Аналитические автоморфизмы области $\mathcal{D}$ описываются следующим образом. Рассмотрим совокупность G всех квадратных матриц M порядка $m=2p$, удовлетворяющих условиям

$$M^*HM=H, \quad M'KM=K, \tag{2}$$

где

$$H=\begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}, \quad K=\begin{pmatrix} 0 & E_p \\ E_p & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Каждой квадратной матрице M

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

соответствует аналитический автоморфизм области $\mathcal{D}$

$$Z \to (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

Граница F этой области состоит, очевидно, из всех Z, для которых

$$\det(E-Z^*Z)=0, \quad E-Z^*Z \geqslant 0. \tag{4}$$

Мы начнем с перечисления всех компонент границы области $\mathcal{D}$.

Теорема 1. *Совокупность точек границы F вида*

$$\left.\begin{array}{ll} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2r \\ p-2r \end{array} \\ \begin{array}{cc} 2r & p-2r \end{array} & \end{array}, & Z^*Z < E_{p-2r}, \quad Z'=-Z, \\ & J_r=\begin{pmatrix} 0 & E_r \\ -E_r & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \tag{5}$$

образует компоненту $\mathcal{F}_r$, аналитически эквивалентную классической области второго типа с параметром $p_1=$ $=p-2r$. Любая компонента границы некоторым аналитическим автоморфизмом области $\mathcal{D}$ может быть переведена в компоненту $\mathcal{F}_r\left(1 \leqslant r \leqslant \frac{p}{2}\right)$. Всякая точка F принадлежит некоторой компоненте.

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы в § 6.

Как и в § 6, положим

$$W_{12}=E_p-Z_1^*Z_2. \tag{6}$$

Легко проверяется, что ранг $r(Z_1, Z_2)$ матрицы W_{12} является инвариантом пары точек Z_1, Z_2 при аналитических автоморфизмах области $\mathcal{D}$.

Сформулируем критерий принадлежности двух точек одной компоненте.

Лемма 1. *Две точки Z_1, $Z_2 \in F$ принадлежат одной компоненте тогда и только тогда, когда*

$$r(Z_1, Z_1) = r(Z_1, Z_2) = r(Z_2, Z_2). \tag{7}$$

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству соответствующей леммы 2 в § 6.

Перейдем к описанию канонических реализаций области $\mathcal{D}$ типа верхней полуплоскости. Обозначим через Ω совокупность всех комплексных прямоугольных матриц U максимального ранга типа $2p \times p$ и таких, что $U'KU = 0$, где K — невырожденная симметрическая матрица.

Если $U \in \Omega$, то $UR \in \Omega$, где R — любая квадратная невырожденная матрица порядка p. Условимся матрицы U и UR называть **эквивалентными**. Совокупность всех эквивалентных между собой матриц образует **класс**. Множество классов является компактным комплексным симметрическим многообразием D.

Многообразия D, двойственные области $\mathcal{D}$ (определение см. в § 6) и соответствующие различным K, аналитически эквивалентны между собой. Поэтому K можно выбрать каким угодно. Мы предположим сейчас, что K имеет вид (3).

Пусть H — эрмитова матрица, определенная в (3). Рассмотрим совокупность Ω_H матриц $U \in \Omega$, для которых

$$U^*HU > 0. \tag{8}$$

Легко проверить, что всякий класс эквивалентных между собой матриц либо целиком содержится в Ω_H, либо не пересекается с Ω_H. Совокупность классов, принадлежащих Ω_H, является областью в D. Положим

$$U = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ p \end{matrix} \\ p \end{array}, \tag{9}$$

Аналогично тому, как это делалось в § 6, легко показать, что и $\mathcal{D}$ можно реализовать в виде области на $\mathcal{D}$.

Нетрудно видеть, что граница F области $\mathcal{D}$ состоит из $U \in \Omega$, для которых определитель матрицы U^*HU равен нулю и $U^*HU \geqslant 0$. Иными словами, F состоит из Z, удовлетворяющих следующим условиям: 1) определитель матрицы $E_p - Z^*Z$ равен нулю, 2) $E_p - Z^*Z \geqslant 0$, 3) $Z' = -Z$.

Дадим общий способ получения канонических реализаций. Пусть H — эрмитова матрица порядка $2p$ с p положительными собственными значениями и p отрицательными, а K — невырожденная симметрическая матрица порядка $2p$, причем

$$HK^{-1}\overline{HK}^{-1} = -E. \tag{10}$$

Рассмотрим совокупность Ω_H матриц U типа $2p \times p$, для которых

$$H^*HU > 0, \quad U'KU = 0. \tag{11}$$

Матрицы U и UR, где R — квадратная невырожденная матрица порядка p, условимся относить к одному классу Ω_H.

Совокупность D_H классов, принадлежащих Ω_H, является областью в D (см. Клинген [1]), аналитически эквивалентной нашей области $\mathscr{D}$.

Аналитические автоморфизмы этой области описываются следующим образом. Пусть G — совокупность всех квадратных матриц A порядка $2p$ таких, что $A^*HA = H$, $A'KA = K$. Каждому $A \in G$ сопоставим аналитический автоморфизм $U \to AU$ в Ω. Легко видеть, что ему соответствует аналитический автоморфизм в множестве классов.

Граница области $\mathscr{D}$ состоит из таких классов, что

$$U'KU = 0, \quad U^*HU \geqslant 0, \quad \det(U^*HU) = 0.$$

Сначала опишем реализацию $S_{\left[\frac{p}{2}\right]}$, соответствующую нульмерным компонентам границы области $\mathscr{D}$. Рассмотрим отдельно два случая в зависимости от четности p.

Случай I. p четно. Положим

$$\left.\begin{aligned} &H = \begin{pmatrix} 0 & iE_p \\ -iE_p & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}, \\ &J = \begin{pmatrix} 0 & E_s \\ -E_s & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } s = \frac{p}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Легко проверить, что при таком выборе H и K выполняется (10). Разобьем U на клетки следующим образом:

$$U = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \\ p \end{matrix} \\ p \end{array}.$$

Условия (11) означают, что

$$\frac{1}{i}(U_2^*U_1 - U_1^*U_2) > 0, \quad U_1'JU_2 = U_2'JU_1. \tag{13}$$

Как легко проверить, U_2 невырождена и, следовательно, в каждом классе есть единственный представитель вида

$$\begin{pmatrix} Z \\ E \end{pmatrix}.$$

Из условия (13) следует

$$\frac{1}{i}(Z - Z^*) > 0,$$
$$JZ = Z'J,$$

т. е. $S_{\frac{p}{2}}$ является областью Зигеля 1-го рода.

Случай II. p нечетно: $p = 2s + 1$. Положим

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iE_{2s} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iE_{2s} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -J_s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Разобьем U на клетки:

$$U = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \\ U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2s \\ 1 \\ 1 \\ 2s \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad 2s & \quad 1 \end{array} & \end{array}.$$

Легко показать (см. аналогичное место в § 6), что матрица

$$\begin{pmatrix} U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{pmatrix}$$

невырождена. Следовательно, мы можем нормировать U условиями

$$U_{31} = 0, \quad U_{42} = 0, \quad U_{32} = 1, \quad U_{41} = E_{2s}.$$

Соотношения (11) означают, что

$$U'_{11}J = JU_{11}, \quad U_{22} = 0, \quad U'_{21} = JU_{12},$$
$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} > 0,$$
$$W_{11} = \frac{1}{i}(U_{11} - U^*_{11}) - U^*_{21}U_{21},$$
$$W_{12} = W^*_{21} = -iU_{12},$$
$$W_{22} = 1.$$

Мы пришли к следующей области в $\frac{p(p-1)}{2}$-мерном комплексном пространстве (координаты его суть элементы матрицы U_{12} и независимые элементы матрицы U_{11}):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{i}(U_{11} - U^*_{11}) - U_{12}U^*_{12} - J\overline{U}_{12}U'J > 0, \\ U'_{11}J = JU_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Таким образом, область $S_{\left[\frac{p}{2}\right]}$ в этом случае является областью Зигеля 2-го рода.

Перейдем к описанию остальных реализаций.

В дальнейшем мы не будем делать разницы между четным и нечетным p.

Положим

$$H = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & iE_{2s} \\ 0 & -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ -iE_{2s} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad K = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & J_r \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ 0 & E_r & 0 & 0 \\ -J_s & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{16}$$

где

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & E_s \\ -E_s & 0 \end{pmatrix}, \quad p = 2s + r.$$

Разобьем U на клетки так же, как и в § 6:

$$U = \begin{array}{cc} \begin{Vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \\ U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 2s \\ r \\ r \\ 2s \end{matrix} \\ \begin{matrix} \;\; 2s \quad & \quad r \;\; \end{matrix} & \end{array},$$

как и там, показывается, что если U удовлетворяет условиям (11), то матрица $\begin{pmatrix} U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{pmatrix}$ невырождена и, следовательно, в каждом классе $U \in \Omega_H$ есть единственный представитель, для которого $U_{31}=0$, $U_{32}=E_r$, $U_{41}=E_{2s}$, $U_{42}=0$. Соотношения (11) означают, что

$$\left.\begin{aligned} & U'_{11}J_s = J_sU_{11}, \quad U'_{22} = -U_{22}, \quad U'_{21} = JU_{12}, \\ & W_{11} = \frac{1}{i}(U_{11} - U^*_{11}) - U^*_{21}U_{21}, \\ & W_{12} = W^*_{21} = \frac{1}{i}U_{12} - U^*_{21}U_{22}, \\ & W_{22} = E - U^*_{22}U_{22}, \\ & W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Неравенства (17) определяют в $\frac{p(p-1)}{2}$-мерном комплексном пространстве (координаты которого — независимые элементы матриц U_{11}, U_{22}, U_{12}) неограниченную область S.

Аналогично тому, как это было сделано в § 6, мы можем неравенства, задающие область, записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{1}{i}(U_{11} - U^*_{11}) - U^*_{21}\overline{W}^{-1}_{22}U_{21} - U_{12}W^{-1}_{22}U^*_{12} - \\ & \qquad - iU_{12}W^{-1}_{22}U^*_{22}U_{21} + iU^*_{21}U_{22}W^{-1}_{22}U^*_{12} > 0, \\ & \qquad E - U^*_{22}U_{22} > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Чтобы яснее стало совпадение полученной области с некоторой областью Зигеля 3-го рода, введем новые обозначения, характерные для областей Зигеля. Положим

$$t = U_{22}, \quad z = 2U_{11}, \quad u = U_{12}, \quad v = V_{12}.$$

Из (18) следует, что t принадлежит классической области II типа с параметром $r = p - 2s$.

Пусть конус V состоит из всех эрмитовых положительно определенных матриц Y порядка $2s$ таких, что $YJ_s = J_s\overline{Y}$. Положим

$$\begin{aligned} L_t(u, v) = {} & U_{12}W^{-1}_{22}V^*_{12} + J\overline{V}_{12}\overline{W}^{-1}_{22}U_{12}J' + \\ & + \frac{1}{2i}\left(U_{12}W^{-1}_{22}U^*_{22}V_{12}J' + V_{12}W^{-1}_{22}U^*_{22}U_{12}J'\right). \end{aligned} \qquad (19)$$

Нетрудно убедиться в том, что наша область есть область Зигеля, соответствующая конусу V и форме $L_t(u, v)$.

Граница F этой области состоит из таких матриц U, для которых

$$\det U^*HU = 0, \quad U^*HU \geqslant 0 \tag{20}$$

(сравните с формулой (38) § 6).

Рассмотрим матрицы $U \in F$ следующего вида:

$$U = \begin{pmatrix} E_{2s} & 0 \\ 0 & Z \\ 0 & E_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z' = -Z, \; Z^*Z < E_r. \tag{21}$$

Легко установить следующие результаты, аналогичные соответствующим результатам § 6:

В классе эквивалентных между собой матриц может содержаться не более одной матрицы вида (21).

Матрицы U образуют компоненту, аналитически эквивалентную компоненте $\mathcal{F}_r$, которую естественно рассматривать как «бесконечно удаленную».

Аналитические автоморфизмы нашей области, переводящие в себя компоненту (21), представляют собой квазилинейные преобразования (определение см. в § 3 гл. I), а аналитические автоморфизмы, оставляющие на месте точку

$$\begin{pmatrix} E_{2s} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

представляют собой линейные преобразования.

Для доказательства последнего утверждения прежде всего устанавливается тот факт, что матрицы A, соответствующие аналитическим автоморфизмам области S, которые переводят в себя «бесконечно удаленную» компоненту, имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

причем

$$A^*HA = H, \quad A'KA = K; \tag{24}$$

H и K определены в (16).

Как и в § 6, показывается, что преобразования, соответствующие таким матрицам, являются квазилинейными преобразованиями нашей области. Матрицы A, соответствующие аналитическим автоморфизмам, оставляющим на месте точку (22), выделяются дополнительными условиями

$$A_{23} = 0, \quad A_{32} = 0. \tag{25}$$

Таким матрицам соответствуют линейные преобразования нашей области (см. § 6).

Доказательства второй основной теоремы и леммы 4 § 6 для классических областей II типа проводятся совершенно аналогично тому, как это делалось выше.

Приведем без доказательства формулы для риманова расстояния и для геодезических (Клинген [1]).

Мы будем предполагать, что область $\mathscr{D}$ реализована так, как это описано в начале параграфа. Можно показать, что риманова метрика, инвариантная относительно аналитических автоморфизмов, задается формулой

$$ds^2 = \sigma\left((E_p - Z^*Z)^{-1}\, dZ^*\, (E_p - ZZ^*)^{-1}\, dZ\right); \tag{26}$$

$\sigma(A)$ означает след матрицы A.

Расстояние между точками Z_1 и Z_2 выражается следующим образом:

$$\rho^2(Z_1, Z_2) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{p} \ln^2 \frac{1+\sqrt{r_k}}{1-\sqrt{r_k}}, \quad r_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k}, \tag{27}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — собственные значения матрицы

$$R(Z_1, Z_2) = (E_p - Z_1^*Z_1)^{-1}(E_p - Z_1^*Z_2)(E_p - Z_2^*Z_2)^{-1}(E_p - Z_2^*Z_1).$$

Любая геодезическая в $\mathscr{D}$ аналитически эквивалентна геодезической вида

$$Z(s) = \begin{pmatrix} \operatorname{th} \alpha_1 s \cdot j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{th} \alpha_2 s \cdot j & \ldots & 0 & \\ 0 & 0 & \ldots & \operatorname{th} \alpha_r s \cdot j & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$r = \left[\frac{p}{2}\right], \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

последняя строчка добавляется, если p нечетно, $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_r^2 = 1$, s — длина дуги.

Мы пропускаем формулировку и доказательство леммы 5, так как они совершенно аналогичны данным в § 6.

Слой $\mathcal{D}_0$, соответствующий $U_{22} = 0$, задается неравенством

$$\frac{1}{i}\left(U_{11} - U_{11}^*\right) - U_{12}U_{12}^* - J\overline{U}_{12}U_{12}'J' > 0. \qquad (28)$$

Как и следовало ожидать, он представляет собой область Зигеля 2-го рода.

Перейдем к исследованию классических областей III типа. Эти области описываются следующим образом. Пусть $p > 0$. Будем рассматривать квадратные симметрические матрицы Z порядка p как точки $\frac{p(p+1)}{2}$-мерного комплексного пространства. Совокупность Z таких, что

$$Z^*Z < E_p, \qquad (29)$$

образует ограниченную область $\mathcal{D}$.

Аналитические автоморфизмы области $\mathcal{D}$ описываются следующим образом. Пусть G — совокупность всех квадратных матриц A порядка $2p$ таких, что

$$A^*HA = H, \quad A'JA = J, \qquad (30)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Каждой квадратной матрице A соответствует аналитический автоморфизм области $\mathcal{D}$

$$Z \to (A_{11}Z + A_{12})(A_{21}Z + A_{22})^{-1}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Формулы для линейного элемента метрики, инвариантной относительно аналитических автоморфизмов области $\mathcal{D}$, и для расстояния между точками Z_1 и Z_2 аналогичны формулам § 6 (стр. 69).

Любая геодезическая в $\mathcal{D}$ аналитически эквивалентна геодезической вида

$$Z(s)=\begin{vmatrix} \operatorname{th}\alpha_1 s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \operatorname{th}\alpha_2 s & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \operatorname{th}\alpha_p s \end{vmatrix}, \tag{33}$$

где $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_p^2=1$, s — длина дуги.

Пусть Ω обозначает совокупность всех комплексных прямоугольных матриц U максимального ранга типа $2p\times p$ и таких, что $U'JU=0$, где J определено в (30).

Если $U\in\Omega$, то $UR\in\Omega$, где R — квадратная невырожденная матрица порядка p. Условимся матрицы U и UR называть эквивалентными. Совокупность всех эквивалентных между собой матриц образует класс. Множество классов является компактным комплексным симметрическим многообразием D.

Покажем, что $\mathcal{D}$ можно реализовать в виде области на D. Пусть H — эрмитова матрица, определенная в (30). Рассмотрим совокупность Ω_H матриц $U\in\Omega$, для которых

$$U^*HU>0. \tag{34}$$

Легко проверить, что всякий класс эквивалентных между собой матриц либо целиком содержится в Ω_H, либо не пересекается с Ω_H. Совокупность классов, принадлежащих Ω_H, является областью в D. Положим

$$U=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} p \\ p \end{matrix}. \tag{35}$$

Как и в § 6, можно показать, что $\mathcal{D}$ реализуется в виде области на D.

Граница F области $\mathcal{D}$ состоит из $U\in\Omega$, для которых определитель матрицы U^*HU равен нулю и $U^*HU\geqslant 0$. Иными словами, F состоит из Z, удовлетворяющих следующим условиям:

1) определитель матрицы E_p-Z^*Z равен нулю,
2) $E_p-Z^*Z\geqslant 0$,
3) $Z'=Z$.

Доказательство основных теорем для областей III типа проводится совершенно аналогично доказательству для случая областей I и II типа. Поэтому мы ограничимся описанием необходимых изменений в формулировках и формулах.

Лемма 1. *Совокупность точек границы F вида*

$$\left.\begin{aligned}&\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & Z\end{pmatrix}; \quad Z = Z^{(p-r,\ p-r)},\\ &Z' = Z, \quad Z^*Z < E_{p-r}\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

образует компоненту, которую мы обозначим через $\mathcal{F}_r (1 \leqslant r \leqslant p)$. Любая компонента границы аналитически эквивалентна компоненте $\mathcal{F}_r$. Всякая точка F содержится в некоторой компоненте.

Лемма 2. *Две точки $Z_1, Z_2 \in F$ принадлежат одной компоненте тогда и только тогда, когда*

$$r(Z_1, Z_1) = r(Z_1, Z_2) = r(Z_2, Z_2), \tag{37}$$

где $r(Z_i, Z_j)$ означает ранг матрицы $W_{ij} = E_p - Z_i^* Z_j$.

Перейдем теперь к описанию канонических реализаций областей третьего типа.

Общий способ получения таких реализаций состоит в следующем. Пусть H — эрмитова матрица порядка $2p$ с p положительными собственными значениями и p отрицательными, а J — невырожденная несимметрическая матрица порядка $2p$, причем

$$HJ^{-1}\overline{HJ^{-1}} = E. \tag{38}$$

Рассмотрим совокупность Ω_H матриц U типа $2p \times p$, для которых

$$U^*HU > 0, \quad U'JU = 0. \tag{39}$$

Матрицы U и UR, где R — квадратная невырожденная матрица порядка p, условимся относить к одному классу.

Совокупность классов, принадлежащих Ω_H, является областью в D (см. Клинген [1]), аналитически эквивалентной нашей области $\mathcal{D}$.

Аналитические автоморфизмы этой области описываются следующим образом. Пусть G — совокупность всех квадратных матриц A порядка $2p$ таких, что

$$A^*HA = H, \quad A'JA = J.$$

Каждому $A \in G$ сопоставим аналитический автоморфизм $U \to AU$ в Ω_H. Легко видеть, что ему соответствует аналитический автоморфизм в множестве классов.

Граница области $\mathcal{D}$ состоит из таких классов, что выполняются условия

$$U'JU = 0, \quad U^*HU \geqslant 0, \quad \det U^*HU = 0.$$

Можно показать, что две точки границы U_1 и U_2 переводятся одна в другую с помощью аналитического автоморфизма области $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда ранги матриц $W_1 = U_1^* HU_1$ и $W_2 = U_2^* HU_2$ совпадают. Отсюда можно вывести, что граница распадается на p транзитивных частей. Таким образом, существует ровно p канонических реализаций. Вначале опишем реализацию S_p, соответствующую нульмерным компонентам границы области $\mathcal{D}$.

Положим

$$H = \begin{pmatrix} 0 & iE_p \\ -iE_p & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Легко проверить, что (38) выполняется при таком выборе H и J. Разобьем U на клетки следующим образом:

$$U = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p \\ p \end{array} \\ p & \end{array}.$$

Условия (39) означают, что

$$\frac{1}{i}(U_2^* U_1 - U_1^* U_2) > 0, \quad U_1' U_2 = U_2' U_1. \tag{41}$$

Легко проверить, что U_2 невырождена и, следовательно в каждом классе есть единственный представитель вида

$$\begin{pmatrix} Z \\ E \end{pmatrix}.$$

Из условий (41) следует тогда, что

$$\frac{1}{i}(Z - Z^*) > 0, \quad Z' = Z, \tag{42}$$

т. е. S является областью Зигеля 1-го рода.

Эта область была введена Зигелем, в связи с чем в литературе ее часто называют обобщенной верхней полуплоскостью Зигеля степени p.

Перейдем к описанию остальных реализаций. Положим

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iE_s \\ 0 & -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ -iE_s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E_s \\ 0 & 0 & E_r & 0 \\ 0 & -E_r & 0 & 0 \\ -E_s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Легко проверить выполнение условия (38).

U разобьем на клетки так же, как и в § 6, т. е.

$$U=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \\ U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{pmatrix} & \begin{matrix} s \\ r \\ r \\ s \end{matrix} \\ \begin{matrix} s & \quad r \end{matrix} & \end{array}. \quad (44)$$

Как и в § 6, показывается, что если U удовлетворяет (39), то матрица $\begin{pmatrix} U_{31} & U_{32} \\ U_{41} & U_{42} \end{pmatrix}$ невырождена и, следовательно, в каждом классе $U \in \Omega_H$ есть единственный представитель, для которого $U_{31}=0$, $U_{32}=E_r$, $U_{41}=E_s$, $U_{42}=0$. Из соотношения (39) получаем

$$\left.\begin{aligned} & U'_{11}=U_{11}, \quad U'_{22}=U_{22}, \quad U'_{21}=U_{12}, \\ & W=\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} > 0, \\ \text{где} \\ & W_{11}=\frac{1}{i}\left(U_{11}-U^*_{11}\right)-U^*_{21}U_{21}, \\ & W_{12}=W^*_{21}=\frac{1}{i}U_{12}-U^*_{21}U_{22}, \\ & W_{22}=E-U^*_{22}U_{22}. \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Неравенства (45) определяют в $\frac{p(p+1)}{2}$-мерном комплексном пространстве (координаты которого — независимые элементы матриц U_{11}, U_{12}, U_{22}) неограниченную область S.

«Бесконечно удаленная» компонента состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & Z \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z' = Z, \quad Z^*Z < E. \tag{46}$$

Перейдем к описанию групп $G_k(\mathcal{F})$, $k = 1, 2, 3$. Так же как в § 6, можно показать, что группа $G_1(\mathcal{F})$ состоит из всех преобразований с матрицами A следующего вида:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} s \\ 2r, \\ s \end{matrix} \\ \begin{matrix} s & \quad 2r & \quad s \end{matrix} \end{array} \tag{47}$$

$$A^* HA = H, \quad A' JA = J,$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

где H и J определены из (43).

Каждому преобразованию с такой матрицей A соответствует следующий автоморфизм компоненты:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & Z \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \tilde{Z} \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Z} = (B_1 Z + B_2)(B_3 Z + B_4)^{-1},$$

откуда вытекает, что матрица A из $G_1(\mathcal{F})$ принадлежит $G_2(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда

$$A_{22} = E_{2r}.$$

Далее, можно показать, что слой $\mathcal{D}_0$, соответствующий $U_{22} = 0$, представляет собой следующую область:

$$\frac{1}{i}(U_{11} - U_{11}^*) - U_{12} U_{12}^* - \overline{U}_{12} U_{12}' > 0,$$

т. е. некоторую область Зигеля 2-го рода.

§ 8. Классические области четвертого типа

Группа G аналитических автоморфизмов областей четвертого типа описывается следующим образом. Пусть $p>0$, $m=p+2$ и H — вещественная симметрическая матрица порядка m, p собственных значений которой отрицательны, а 2 положительны.

Группа G состоит из всех вещественных матриц A, сохраняющих H, т. е.

$$A'HA=H. \tag{1}$$

Опишем вначале двойственное многообразие D. Рассмотрим совокупность Ω точек t m-мерного комплексного пространства, удовлетворяющих уравнению

$$t'Ht=0, \quad t\neq 0. \tag{2}$$

Условимся точки t и $\alpha t\,(\alpha\neq 0)$ считать эквивалентными. Эквивалентные точки объединим в один класс. Множество классов является компактным комплексным симметрическим многообразием D. Очевидно, D есть поверхность второго порядка в проективном комплексном пространстве. Совокупность таких t, что

$$t^*Ht>0, \tag{3}$$

образует область Ω_H в Ω. Множество классов, принадлежащих Ω_H, распадается на две связные, аналитически эквивалентные между собой компоненты, каждую из которых можно принять за классическую область IV типа. Реализацию этой области типа «единичный круг» можно получить следующим образом. Пусть

$$H=\begin{pmatrix}-E_p & 0\\ 0 & E_2\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Совокупность точек $t=(t_1, \ldots, t_m)$ m-мерного комплексного пространства, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} t'Ht&=-t_1^2-\ldots-t_p^2+t_{p+1}^2+t_{p+2}^2=0,\\ t^*Ht&=-|t_1|^2-\ldots-|t_p|^2+|t_{p+1}|^2+|t_{p+2}|^2>0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

состоит из двух связных компонент, каждая из которых содержит точки с определенным знаком мнимой части $\dfrac{t_{p+1}}{t_{p+2}}$.

Очевидно, что преобразования нашей группы либо сохраняют знак мнимой части $\frac{t_{p+1}}{t_{p+2}}$ для всех точек рассматриваемого множества, либо для всех точек изменяют его на противоположный. Таким образом, линейные преобразования, сохраняющие знак мнимой части $\frac{t_{p+1}}{t_{p+2}}$, составляют подгруппу индекса два. Рассмотрим теперь эту подгруппу и множество точек, определяемое условиями:

$$t'Ht = 0, \quad t^*Ht > 0, \quad \operatorname{Im}\frac{t_{p+1}}{t_{p+2}} > 0. \tag{6}$$

Переходя к неоднородным координатам, мы переведем это множество в ограниченную область в p-мерном комплексном пространстве. Разделив первое соотношение из (6) на $(t_{p+1} + it_{p+2})^2$, получим

$$\left(\frac{t_1}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{t_p}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right)^2 = \frac{t_{p+1} - it_{p+2}}{t_{p+1} + it_{p+2}}. \tag{7}$$

Деля второе соотношение в (6) на $|t_{p+1} + it_{p+2}|^2$ и замечая, что

$$\frac{|t_{p+1}|^2 + |t_{p+2}|^2}{|t_{p+1} + it_{p+2}|^2} = \frac{|t_{p+1} - it_{p+2}|^2}{2|t_{p+1} + it_{p+2}|^2} + \frac{1}{2},$$

получаем

$$\left|\frac{t_1}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{t_p}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right|^2 < \frac{1}{2}\left(1 + \left|\frac{t_{p+1} - it_{p+2}}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right|^2\right). \tag{8}$$

Третье условие (6) означает, что

$$\left|\frac{t_{p+1} - it_{p+2}}{t_{p+1} + it_{p+2}}\right| < 1. \tag{9}$$

Значит, если мы положим

$$z_1 = \frac{t_1 + it_2}{t_{p+1} + it_{p+2}}, \quad z_2 = \frac{t_1 - it_2}{t_{p+1} + it_{p+2}},$$
$$z_k = \frac{t_k}{t_{p+1} + it_{p+2}}, \quad k = 3, \ldots, p, \tag{10}$$

то множество, определенное в (6), перейдет в ограниченную область

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_3|^2+\ldots+2|z_p|^2< \\ <1+|z_1z_2+z_3^2+\ldots+z_p^2|,$$

$$|z_1z_2+z_3^2+\ldots+z_p^2|^2<1,$$

а наша группа линейных преобразований перейдет в $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$-параметрическую группу дробно-линейных преобразований этой области. Граница F этой области, очевидно, состоит из таких z, что

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_3|^2+\ldots+2|z_p|^2= \\ =1+|z_1z_2+z_3^2+\ldots+z_p^2|\leqslant 2. \qquad (11)$$

Лемма 1. *Граница F области $\mathscr{D}$ содержит компоненты следующих двух типов*:

1) $\mathscr{F}_1: z=(1, v, 0, \ldots, 0),\quad |v|<1$,
2) $\mathscr{F}_2: z=(1, 1, 0, \ldots, 0)$.

Любая компонента границы аналитически эквивалентна компоненте одного из указанных выше двух типов.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы в § 6.

Описание канонических реализаций. В соответствии с общими соображениями число таких реализаций равно числу типичных компонент, т. е. двум.

Мы опишем вначале реализацию S_2, соответствующую нульмерным компонентам границы.

Пусть матрица H имеет вид

$$H=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&K&0\\1&0&0\end{pmatrix}&\begin{matrix}1\\p,\\1\end{matrix}\\ \begin{matrix}1&p&1\end{matrix}&\end{array}\qquad K=\begin{pmatrix}-1&0&\ldots&0\\0&-1&\ldots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&\ldots&-1&0\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Уравнения (2) и (3) в однородных переменных t, выделяющие нашу область при таком H, записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} -|t_1|^2 - \ldots - |t_p|^2 + |t_{p+1}|^2 + 2\operatorname{Re}\bar{t}_1 t_{p+2} > 0, \\ -t_1^2 - \ldots - t_p^2 + t_{p+1}^2 + 2t_1 t_{p+2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Можно считать, что $t_1 \neq 0$; в противном случае мы имели бы соотношения

$$|t_{p+1}|^2 > |t_2|^2 + \ldots + |t_p|^2,$$
$$t_{p+1}^2 = t_2^2 + \ldots + t_p^2,$$

очевидно, противоречащие друг другу. Положим

$$z_k = \frac{t_k}{t_1}, \quad k = 2, \ldots, p, \quad z_1 = \frac{t_{p+2}}{t_1}.$$

Если в системе (13) разделить первое равенство на $|t_1|^2$, второе — на t_1^2 и подставить t_{p+2} из второго в первое, то получим

$$|z_1|^2 - \operatorname{Re} z_1^2 - \left(\left(|z_2|^2 - \operatorname{Re} z_2^2\right) + \ldots + \left(|z_p|^2 - \operatorname{Re} z_p^2\right)\right) > 0.$$

Иными словами,

$$y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_p^2 > 0, \qquad (14)$$

где $y_k = \operatorname{Im} z_k$, $k = 1, \ldots, p$.

Область (14) состоит из двух связных аналитически эквивалентных между собой кусков, в одном $y_1 > 0$, а в другом $y_1 < 0$. Область S_2 совпадает с одним из них.

Ясно, что S_2 является областью Зигеля 1-го рода.

Группа аналитических автоморфизмов области S_2, оставляющих бесконечно удаленную точку на месте, описывается следующим образом.

В однородных координатах бесконечно удаленная точка t_∞ записывается так:

$$t_1 = \alpha, \quad t_2 = \ldots = t_{p+2} = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Аналитические автоморфизмы нашей области задаются вещественными матрицами A порядка $p+2$, удовлетворяющими (1).

Разобьем каждую матрицу A на клетки:

$$A=\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right) & \begin{array}{c} 1 \\ p \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 1 & \;\; p & \;\; 1 \end{array} & \end{array}.$$

Условие $At_\infty = \lambda t_\infty$ означает, что $A_{21}=0$, $A_{31}=0$. Из (1) получаем

$$A_{32}=0,\quad A_{11}A_{33}=1,\quad A'_{22}KA_{22}=K,$$
$$A'_{22}KA_{23}+A'_{12}A_{33}=0,\quad 2A_{13}A_{33}+A'_{23}KA_{23}=0.$$

Легко показать, что эта группа изоморфна группе линейных преобразований области S_2

$$z \to Lz+h, \tag{15}$$

где L — линейное преобразование конуса (14) на себя, а h — произвольный вещественный вектор.

Перейдем к описанию реализации S_2. Положим

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & E_2 \\ 0 & -E_q & 0 \\ E_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad q=p-2. \tag{16}$$

Соотношения (2) и (3) при таком выборе H имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} 2\operatorname{Re}(\bar t_1 t_{p+1}+\bar t_2 t_{p+2})-|t_3|^2-\ldots-|t_p|^2>0, \\ 2(t_1t_{p+1}+t_2t_{p+2})-t_3^2-\ldots-t_p^2=0. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Легко показать, что t_1 и t_2 отличны от нуля и что $\operatorname{Im}\frac{t_2}{t_1}\neq 0$. Следовательно, область (17) состоит из двух связных компонент, отличающихся знаком мнимой части $\frac{t_2}{t_1}$.

Рассмотрим ту ее часть, в которой

$$\operatorname{Im}\frac{t_2}{t_1}>0. \tag{18}$$

Бесконечно удаленная компонента состоит из точек вида

$$t_3=t_4=\ldots=t_{p+2}=0,\quad \operatorname{Im}\frac{t_2}{t_1}>0. \tag{19}$$

Опишем группу $G_1(\mathcal{F})$. Положим

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ q \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \quad\quad 2 & q & 2 \end{array} & \end{array}.$$

Если $A \in G_1(\mathcal{F})$, то множество (19) переходит в себя, и значит

$$A_{21} = 0, \quad A_{31} = 0.$$

Далее, из (1) получаем

$$A_{32} = 0, \quad A'_{11}A_{33} = E_2, \quad A'_{22}A_{22} = E_q,$$

$$A'_{12}A_{33} - A'_{22}A_{23} = 0, \quad A'_{13}A_{33} + A'_{33}A_{13} - A'_{23}A_{23} = 0.$$

Без труда можно показать, что группа $G_2(\mathcal{F})$ состоит из таких $A \in G_1(\mathcal{F})$, для которых

$$A_{11} = \lambda E_2,$$

λ — вещественное число.

Можно проверить, что область S_1 задается следующим неравенством:

$$(1 - |v^2|)\operatorname{Im} z - |u_1|^2 - \ldots - |u_2|^2 - \\ - \operatorname{Re}(u_1^2 + \ldots + u_2^2)\bar{v} > 0, \qquad (20)$$

где $v, z, u_1, \ldots, u_a$ — комплексные переменные.

Теперь окончание доказательства второй основной теоремы для областей IV типа проводится аналогично доказательству этой теоремы для областей I типа.

Приведем в заключение формулы для расстояния и для геодезических. Положим

$$a(z, v) = (z_1 - v_1)(z_2 - v_2) + \sum_{k=3}^{p} (z_k - v_k)^2,$$

$$b(z, v) = 1 + (\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_3^2 + \ldots + \bar{z}_p^2)(v_1v_2 + v_3^2 + \ldots + v_p^2) - \\ - \bar{z}_1v_1 - \bar{z}_2v_2 - 2\bar{z}_3v_3 - \ldots - 2\bar{z}_pv_p,$$

где $z, v \in \overline{\mathcal{D}}$. Пусть g — произвольный аналитический автоморфизм области $\mathcal{D}$. Непосредственные выкладки показывают, что имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} a(g(z),\ g(v)) &= \mu(g,\ z)\, a(z,\ v)\, \mu(g,\ v), \\ b(g(z),\ g(v)) &= \overline{\mu(g,\ z)}\, b(z,\ v)\, \mu(g,\ v). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Составим из $a(z,\ v)$ и $b(z,\ v)$ следующие инварианты:

$$R_2 = \left| \frac{a(z,\ v)}{b(z,\ v)} \right|, \quad R_1 = \frac{-b(z,\ z)\, b(v,\ v) + |a(z,\ v)|^2}{|b(z,\ v)|^2} + 1. \tag{22}$$

При помощи этих инвариантов расстояние между точками z и v выражается следующим образом:

$$\rho^2(z,\ v) = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+\sqrt{\lambda_1}}{1-\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+\sqrt{\lambda_2}}{1-\sqrt{\lambda_2}}, \tag{23}$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\lambda^2 - R_1\lambda + R_2 = 0. \tag{24}$$

Можно убедиться, что любая геодезическая в $\mathscr{D}$ аналитически эквивалентна геодезической вида

$$z_1 = \operatorname{th} \alpha_1 s,\ z_2 = \operatorname{th} \alpha_2 s,\ z_3 = \ldots = z_p = 0,\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant 0. \tag{25}$$

Лемма 2. *Пусть $z \in \mathscr{D}$, $v \in F$. Точки z и v можно соединить геодезической тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

1) $|a(z,\ v)| = |b(z,\ v)|$,

2) $a(z,\ v) = 0$.

В частности, пусть $z \in \mathscr{D}$, $\mathscr{F}$ — произвольная компонента границы. Существует единственная точка $v \in \mathscr{F}$, которую можно соединить геодезической с z.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $z = (0, \ldots, 0)$. Любая геодезическая, выходящая из точки $z = (0, \ldots, 0)$, аналитически эквивалентна геодезической вида

$$z_1 = \operatorname{th} \alpha_1 s, \quad z_2 = \operatorname{th} \alpha_2 s, \quad z_3 = \ldots = z_p = 0,$$
$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \quad s \text{ — длина дуги.}$$

Легко видеть, что

$$a(z,\ z(s)) = \operatorname{th} \alpha_1 s \operatorname{th} \alpha_2 s, \quad b(z,\ z(s)) = 1.$$

Переходим к пределу при $s \to +\infty$, тогда

$$|a(z,\ z(\infty))| = |b(z,\ z(\infty))|, \text{ если } \alpha_2 > 0$$

или

$$a(z,\ z(\infty)) = 0, \text{ если } \alpha_2 = 0.$$

В одну сторону утверждение теоремы доказано. Покажем обратное, т. е. если выполняются условия 1) и 2) леммы 2, то точки z и v соединимы геодезической. Примем без ограничения общности, что

$$z = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \quad v = (v_1,\ v_2,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

v_1, v_2 — вещественны, $|v_1| \leqslant 1$, $|v_2| \leqslant 1$, $(1 - |v_1|) \times \times (1 - |v_2|) = 0$.

Тогда условие 1) леммы означает, что $|v_1 v_2| = 1$, т. е. $|v_1| = |v_2| = 1$; условие 2) означает, что $|v_1 v_2| = 0$, т. е. либо $|v_1| = 0$, либо $|v_2| = 0$.

Тривиально проверяется, что в каждом из этих случаев можно провести геодезическую, соединяющую точки z и v.

Второе утверждение леммы легко вытекает из первого (см. § 6 настоящей главы).

ГЛАВА III

НОРМАЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Предметом настоящей главы является описание некоторого класса дискретных групп аналитических автоморфизмов классических областей, для которых справедлива теорема об алгебраических соотношениях. Эти группы названы нами нормальными дискретными группами. К. Зигель [1] доказал справедливость этой теоремы для всех таких дискретных групп аналитических автоморфизмов ограниченной области $\mathscr{D}$, для которых фактор-пространство $\mathscr{D}/\Gamma$ компактно. Для нормальных дискретных групп фактор-пространство $\mathscr{D}/\Gamma$, вообще говоря, не компактно.

По-видимому, хотя это и не доказано, для справедливости теоремы об алгебраических соотношениях необходимо, чтобы рассматриваемая дискретная группа была нормальна.

Отметим, что даже в случае одного комплексного переменного теорема об алгебраических соотношениях справедлива не для произвольных дискретных групп. Класс дискретных групп дробно-линейных преобразований единичного круга, для которых справедлива эта теорема, совпадает с тем классом, который описан в настоящей главе.

Перейдем к обзору содержания настоящей главы по параграфам.

В § 9 дано определение нормальных дискретных групп. Это определение формулируется следующим образом. Вначале мы строим расширение фактор-пространства $\mathscr{D}/\Gamma$. В расширенном пространстве M вводится топология. Условие нормальности состоит в том, что M в этой топологии сепарабельно и компактно.

В § 10 определяется аналитическая структура в пространстве M. Оказывается, что пространство M, вообще говоря, не является комплексным многообразием. Можно лишь доказать, что оно представляет собой аналитическое нормальное пространство. Доказательство этого факта основано на одной теореме А. Картана, формулировка которой приведена в § 10. Выполнение условий теоремы в нашем случае устанавливается при помощи лемм, доказанных в § 11 и 12. Теорема об алгебраических соотношениях автоматически следует из того, что M — компактное аналитическое пространство (см. Реммерт [1]).

В § 13 общая конструкция расширения проведена для так называемой модулярной группы Зигеля и некоторых аналогичных групп. Полученное после расширения пространство совпадает с тем, которое было построено Сатаке (см. Сатаке [1] и А. Картан [2]).

§ 9. Конструкция расширения фактор-пространства $\mathcal{D}/\Gamma$

Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая классическая область, Γ — дискретная группа ее аналитических автоморфизмов. В настоящем параграфе описана конструкция расширения фактор-пространства $\mathcal{D}/\Gamma$, заключающаяся в следующем. Вначале вводится вспомогательное пространство $\mathfrak{M}$, состоящее из области $\mathcal{D}$ и некоторого множества компонент границы этой области, называемых Γ-рациональными компонентами. В нем естественным образом действует группа Γ. Пространство M определяется как фактор-пространство $\mathfrak{M}/\Gamma$.

Прежде чем излагать эту конструкцию в общем виде, проведем ее в простейшем случае: $\mathcal{D}$ — обычная верхняя полуплоскость (т. е. множество точек вида $z = x + iy$, $y > 0$), Γ — обычная модулярная группа.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство, полученное присоединением к $\mathcal{D}$ всех рациональных точек вещественной оси и точки ∞. Пространство M представляет собой фактор-пространство $\mathfrak{M}/\Gamma$. Чтобы ввести топологию в пространстве M, достаточно, очевидно, ввести ее в пространстве $\mathfrak{M}$. Зададим топологию в $\mathfrak{M}$ базисом окрестностей. Окрестности точки $z_0 \in \mathcal{D}$ определяются обычным образом. Окрестность точки ∞ состоит из точек области $\mathcal{D}$ вида $y = \operatorname{Im} z > c > 0$ и, разумеется, самой точки ∞.

Окрестность точки $z = r$ (r — рациональное число) состоит из точек области $\mathcal{D}$, лежащих внутри некоторой окружности, касающейся вещественной оси в точке $z = r$, и самой точки r.

Очевидно, построенное таким образом пространство M гомеоморфно двумерной сфере. Весьма важно для переноса этой схемы на общий случай дать правильное определение аналогов рациональных точек в указанном выше примере. С этой целью заметим, что рациональные точки — это параболические точки для модулярной группы.

Напомним определение параболических точек. Совокупность всех дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости, оставляющих на месте заданную точку границы z_0, описывается следующим образом. Отобразим точку z_0 в ∞. Преобразования, сохраняющие бесконечно удаленную точку на месте, имеют вид

$$z \to \lambda z + \beta, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, β — произвольное вещественное число.

Совокупность преобразований вида (1) с $\lambda = 1$ образует параболическую подгруппу Δ группы всех преобразований, оставляющих на месте точку ∞.

Пусть z_0 — некоторая точка границы; условимся через $\Delta(z\ )$ обозначать параболическую подгруппу, соответствующую точке z_0. Точку z_0 границы области $\mathcal{D}$ будем называть **параболической** точкой для группы Γ, если пересечение группы Γ с группой $\Delta(z_0)$ содержит хотя бы один отличный от единичного элемент.

Введем обозначения. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторая компонента границы области $\mathcal{D}$. Положим

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_k(\mathcal{F}) = G_k(\mathcal{F}) \cap \Gamma, \quad k = 1, \ldots, 5, \\ &G'(\mathcal{F}) = G_1(\mathcal{F})/G_2(\mathcal{F}), \quad \Gamma'(\mathcal{F}) = \Gamma_1(\mathcal{F})/\Gamma_2(\mathcal{F}), \\ &G''(\mathcal{F}) = G_1(\mathcal{F})/G_5(\mathcal{F}), \quad \Gamma''(\mathcal{F}) = \Gamma_1(\mathcal{F})/\Gamma_5(\mathcal{F}). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Следующее определение Γ-рациональной компоненты можно рассматривать как естественное обобщение определения параболической точки в случае одного переменного.

Определение. Компонента $\mathcal{F}$ границы области $\mathcal{D}$ называется **Γ-рациональной**, если

1) фактор-пространство $G_3(\mathcal{F})/\Gamma_3(\mathcal{F})$ компактно,
2) $\Gamma'(\mathcal{F})$ — дискретная подгруппа группы $G'(\mathcal{F})$.

Из леммы 2 § 14 следует, что если компонента $\mathscr{F}$ является Г-рациональной, то фактор-пространства $G_4(\mathscr{F})/\Gamma_4(\mathscr{F})$ и $G_{34}(\mathscr{F})/\Gamma_{34}(\mathscr{F})$ компактны (здесь $G_{34}(\mathscr{F}) = G_3(\mathscr{F})/G_4(\mathscr{F})$ и аналогично $\Gamma_{34}(\mathscr{F}) = \Gamma_3(\mathscr{F})/\Gamma_4(\mathscr{F})$). Отсюда очень просто вытекает следующее предложение:

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{F}$ — некоторая Г-рациональная компонента. Тогда группа $\Gamma''(\mathscr{F})$ является дискретной подгруппой группы $G''(\mathscr{F})$.*

Доказательство. Заметим, что каждому элементу группы $G_1(\mathscr{F})$ можно сопоставить автоморфизм в абелевой группе $G_4(\mathscr{F})$. Действительно, каждому $g \in G_1(\mathscr{F})$, поскольку $G_4(\mathscr{F})$ — нормальный делитель в $G_1(\mathscr{F})$, соответствует следующий автоморфизм группы:

$$h \to g^{-1}hg. \tag{3}$$

Пользуясь матричной реализацией группы $G_1(\mathscr{F})$, легко проверить, что ядро отображения группы $G_1(\mathscr{F})$ в группу автоморфизмов группы $G_4(\mathscr{F})$ совпадает с группой $G_5(\mathscr{F})$. Группа $G_4(\mathscr{F})$, как нетрудно видеть, представляет собой векторное пространство над полем вещественных чисел. Следовательно, $G''(\mathscr{F})$ является подгруппой группы линейных преобразований соответствующего векторного пространства.

Преобразования, принадлежащие группе $\Gamma''(\mathscr{F})$ в некотором базисе, а именно в базисе решетки $\Gamma_4(\mathscr{F})$, записываются целочисленными матрицами. Следовательно, группа $\Gamma''(\mathscr{F})$ — дискретная подгруппа соответствующей полной группы линейных преобразований, и тем более дискретная подгруппа группы $G''(\mathscr{F})$. Лемма доказана.

Перейдем к построению пространства M. Вначале введем вспомогательное пространство $\mathfrak{M}$.

Пространство $\mathfrak{M}$ для данной группы Г представляет собой теоретико-множественную сумму области $\mathscr{D}$ *) и всех Г-рациональных компонент. В $\mathfrak{M}$ естественным образом действует группа Г. Согласно указанному выше рецепту, мы определим M как фактор-пространство $\mathfrak{M}/\Gamma$.

Для описания пространства M, в частности, для описания топологии в нем **), удобно применять ориентированные

*) Отметим, что $\mathscr{D}$ можно рассматривать как «несобственную» Г-рациональную компоненту.

**) Топологию в пространстве $\mathfrak{M}$ мы вводить не будем, а сразу введем ее в пространстве M.

графы, т. е. системы точек на плоскости, соединенных направленными отрезками.

Граф пространства M строится следующим образом. Сопоставим каждому классу Γ-эквивалентных (т. е. эквивалентных относительно Γ) компонент, принадлежащих $\mathfrak{M}$, точку на плоскости. Условимся точки A_1 к A_2 соединять отрезком со стрелочкой, направленной от A_1 к A_2, в следующем случае: если для любой компоненты $\mathscr{F}_1$, соответствующей точке A_1, среди рациональных относительно $\Gamma'(\mathscr{F}_1)$ компонент содержится компонента $\mathscr{F}_2$, соответствующая точке A_2. Полученная совокупность точек и направленных отрезков называется **графом пространства** M.

Мы будем предполагать в дальнейшем выполнение следующей гипотезы.

Сепарабельность. *В каждой точке графа пространства M сходится лишь конечное число направленных отрезков.* Эта гипотеза эквивалентна сепарабельности пространства M в его естественной топологии.

Топологии в $\mathfrak{M}$, приводящие к одинаковой топологии в M, могут быть весьма различными, поэтому их рассмотрение нецелесообразно.

Перейдем теперь к описанию топологии в пространстве M. Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, ... — полная система неэквивалентных между собой компонент $\mathscr{F} \in \mathfrak{M}$. Положим $M_k = \mathscr{F}_k/\Gamma'(\mathscr{F}_k)$. Пространство $M = \mathfrak{M}/\Gamma$ является, очевидно, теоретико-множественной суммой M_k

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots,$$

где $M_0 = \mathscr{D}/\Gamma$.

Пусть $z_0 \in M_{j_0} = \mathscr{F}_{j_0}/\Gamma'(\mathscr{F}_{j_0})$. Рассмотрим полную систему неэквивалентных относительно Γ компонент из $\mathfrak{M}$, на границе каждой из которых лежит $\mathscr{F}_{j_0}$. Согласно нашему предположению, число их конечно. Обозначим их через $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_m$.

Пусть $Q_1, \ldots, Q_m$ — какие-нибудь цилиндрические множества соответственно в компонентах $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_m$ с основаниями $V_1, \ldots, V_m$, лежащими в $\mathscr{F}_{j_0}$. Мы предполагаем, конечно, что $z_0 \in V_k$, $k = 1, \ldots, m$. Положим $\tilde{U} = Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_m$, где Q_0 — некоторое открытое множество в $\mathscr{F}_{j_0}$, содержащее точку z_0. Окрестность U точки z_0 определяется как образ $\tilde{U}$ при естественном отображении $\mathfrak{M}$ на

$M = \mathfrak{M}/\Gamma$. Очевидно, что для каждой точки пространства M есть счетная база окрестностей.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{F}_1$ — $\Gamma'(\mathcal{F}_2)$-*рациональная компонента и* V — *компактное подмножество* $\mathcal{F}_1$. *Всегда существует такое цилиндрическое множество* Q *в* $\mathcal{F}_2$ *с основанием* $V \subset \mathcal{F}_1$, *что если* $z \in Q$ *и* $\gamma z \in Q$, *где* $\gamma \in \Gamma'(\mathcal{F}_2)$, *то* $\gamma \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно принять, что $\mathcal{F}_2 = \mathcal{D}$. Обозначим $\mathcal{F}_1$ через $\mathcal{F}$. Воспользуемся канонической реализацией области $\mathcal{D}$, соответствующей компоненте $\mathcal{F}$.

Для простоты будем считать, что $\mathcal{D}$ — неприводимая область. Как мы знаем, аналитические преобразования $\mathcal{D}$ задаются матрицами, которые естественно рассматривать как клеточные матрицы третьего порядка (см. гл. II).

Можно непосредственно показать, что если z, $gz \in Q$, где g — некоторый аналитический автоморфизм, а Q — достаточно малая цилиндрическая область с основанием V, то у соответствующей матрицы левый нижний элемент g_{31} тоже мал. Если бы он не был равен нулю, то выбрав элемент $\delta \in \Gamma_4(\mathcal{F})$, мы построили бы сходящуюся последовательность различных элементов группы Γ

$$g_1 = g^{-1}\delta_0 g, \quad g_2 = g_1^{-1}\delta_0 g_1, \ \ldots \tag{4}$$

Поскольку группа Γ дискретна, в ней не может существовать такого элемента g. Следовательно, при достаточно малой цилиндрической области Q из вложения z, $\gamma z \in Q$, где $\gamma \in \Gamma$, вытекает обращение в нуль левого нижнего элемента γ_{31} в матрице γ. В этом случае элементы γ_{21} и γ_{32} матрицы γ также должны быть малы при достаточной малости Q. Они равны нулю, ибо иначе мы построили бы сходящуюся последовательность элементов группы Γ вида (4) с некоторым δ, являющимся элементом общего положения в $\Gamma_3(\mathcal{F})$.

В случае любой области $\mathcal{D}$ рассуждение проводится аналогично.

Теперь мы можем показать, что M является сепарабельным хаусдорфовым пространством. Как мы указывали выше, M имеет счетный базис в каждой точке. Кроме того, очевидно, что каждое M_j содержит счетное всюду плотное множество точек. Следовательно, множество $M = \sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k$ сепарабельно.

Покажем, что M хаусдорфово. Пусть $z_1, z_2 \in M$. У этих точек существуют непересекающиеся окрестности U_1 и U_2. Действительно, пусть $z_1 \in M_{j_1}$ и $z_2 \in M_{j_2}$. Если $j_1 = j_2$, то наше утверждение сразу следует из доказанной выше леммы и дискретности $\Gamma'(\mathscr{F}_{j_1})$.

Пусть теперь $M_{j_1} \neq M_{j_2}$. Покажем вначале, что существует окрестность U точки z_2, не содержащая точку z_1.

Пусть $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_m$ — полная система неэквивалентных компонент, на границе которых лежит $\mathscr{F}_j$. Обозначим через Q достаточно малое цилиндрическое множество в $\mathscr{D}$ с основанием $V \in \mathscr{F}_{j_2}$, причем $z_2 \in V$. Согласно доказанной выше лемме, мы можем считать, что если z, $\gamma z \in Q$, то $\gamma z_2 = z_2$. Следовательно, все точки из Q, эквивалентные точке z_1, имеют вид γz_0, где $\gamma z_2 = z_2$, а z_0 — некоторая фиксированная точка из Q_0. Отсюда ясно, что, уменьшая Q_0, мы можем добиться того, чтобы оно не содержало точек, эквивалентных точке z_1. Аналогично можно выбрать цилиндрические множества $Q_1, \ldots, Q_m$ в компонентах $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_m$, не содержащие точек, эквивалентных точке z_1. Образ множества $\tilde{U} = Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_m$ при естественном отображении $\mathfrak{M} \to M$ представляет собой искомую окрестность.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $\mathfrak{M}$ хаусдорфово. Сформулируем теперь основное для настоящей главы определение.

Определение. **Нормальными дискретными группами** аналитических автоморфизмов классических областей условимся называть дискретные группы, для которых пространство M *сепарабельно* и *компактно*.

Легко доказываются следующие свойства нормальных групп:

1) *Граф пространства M состоит из конечного числа точек.* Действительно, в противном случае существует бесконечное число Γ-неэквивалентных рациональных компонент. Возьмем в каждой из них по точке, занумеруем их произвольным образом и рассмотрим полученную последовательность. Ясно, что у этой последовательности нет предельных точек. Это противоречит компактности пространства M.

2) *Объем фундаментальной области $M_0 = \mathscr{D}/\Gamma$ конечен.*

Действительно, из компактности M вытекает, что фундаментальная область содержится в конечном числе цилиндрических областей. Нетрудно проверить, что если T — цилиндрическая область с основанием в некоторой Г-рациональной компоненте $\mathcal{F}$, то фактор-пространство $T/\Gamma_3(\mathcal{F})$ имеет конечный объем. Отсюда и вытекает наше утверждение.

Если $\mathcal{D}$ — круг $|z| < 1$, то К. Зигелем [7] доказано, что справедливо обратное предложение, т. е. если фундаментальная область $M_0 = \mathcal{D}/\Gamma$ имеет конечную площадь по Лобачевскому, то соответствующее пространство M компактно.

Весьма вероятно, что аналогичная теорема справедлива в общем случае, но доказать это, по-видимому, очень трудно.

В заключение приведем несколько иное определение нормальных дискретных групп.

Пусть $\mathcal{D}$ — классическая область, и Γ — дискретная группа ее аналитических автоморфизмов. Предположим, что из любой последовательности точек $\mathcal{D}$ можно выделить подпоследовательность $z_1, z_2, \ldots$, для которой существует некоторая последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \in \Gamma$, причем либо $\gamma_k z_k \to z_0 \in \mathcal{D}$, либо существует Г-рациональная компонента $\mathcal{F}$ и такая точка $z_0 \in \mathcal{F}$, что для любой цилиндрической области Q с основанием $W \subset \mathcal{F}$ ($z_0 \in W$) существует такое m, что $\gamma_k z_k \in Q$ при всех $k \geqslant m$. В этом случае условимся говорить, что для группы Γ имеет место свойство A.

Легко показать, что если для группы Γ выполняется свойство A, то у нее есть лишь конечное число неэквивалентных Г-рациональных компонент.

Нетрудно видеть, что группа Γ нормальна тогда и только тогда, когда для нее и для всех групп $\Gamma'(\mathcal{F})$ имеет место свойство A. В § 13 мы будем пользоваться этим предложением.

§ 10. Аналитические нормальные пространства

В настоящем параграфе вводится аналитическая структура в пространстве M (см. § 9). В случае одного комплексного переменного можно доказать, что M является комплексным многообразием. В общем случае это уже не так. Однако, как будет доказано ниже, M представляет собой аналитическое нормальное пространство. Аналитические нормальные пространства представляют собой довольно широкий класс комплексных многообразий с особенностями, в то же время они обладают еще многими хорошими свойствами, например, на них переносится известная теорема об алгебраических соотношениях для мероморфных функций на компактном комплексном многообразии (Реммерт [1]).

Мы приведем сейчас определение аналитических нормальных пространств, разработанное в трудах Бенке, Штейна, А. Картана. Вначале дадим принадлежащее Серру понятие кольцованного пространства (А. Картан [3]).

Топологическое хаусдорфово пространство X, в каждой точке x которого определено подкольцо A_x кольца всех ростков непрерывных комплекснозначных функций в этой точке, называется *кольцованным пространством*. Через A обозначается набор колец A_x.

Для таких пространств естественным образом могут быть определены гомоморфизмы и изоморфизмы.

Пусть U — область в комплексном пространстве C^N.

Аналитическим подмножеством в U называется замкнутое подмножество $V \subset U$, которое в достаточно малой окрестности любой своей точки представляет собой множество общих нулей некоторого конечного числа аналитических в этой окрестности функций.

Отметим, что каждое аналитическое множество представляет собой кольцованное пространство, если в качестве A_x взять совокупность функций, индуцированных функциями, аналитическими в некоторой окрестности точки x.

Кольцованное пространство называется *аналитическим пространством*, если для каждой его точки существует окрестность, изоморфная как кольцованное пространство некоторому аналитическому подмножеству в C^N.

Кольцованное пространство называется *нормальным*, если каждое локальное кольцо A_x представляет собой целозамкнутую область целостности.

Напомним, что *областью целостности* называется всякое коммутативное кольцо без делителей нуля. Область целостности O называется *целозамкнутой*, если всякое решение уравнения

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n \in O$, принадлежащее полю отношений области целостности O, принадлежит ей самой. Например, кольцо целых чисел является целозамкнутой областью целостности.

Точка $x \in X$ называется *регулярной*, если у нее существует окрестность, изоморфная области в C^N.

Мы покажем, что в определенном в § 9 пространстве M можно ввести структуру аналитического нормального пространства так, что на каждом $M_j = \mathcal{F}_j/\Gamma'(\mathcal{F}_j)$, где $\mathcal{F}_j$ — некоторая Г-рациональная компонента, она будет совпадать с имеющейся там естественной аналитической структурой.

При доказательстве этого утверждения мы будем пользоваться теоремой А. Картана о продолжении аналитических нормальных пространств (А. Картан [1]).

Пусть X — локально компактное пространство. V — открытое всюду плотное множество в X и $W = X \setminus V$. Предположим, что на V определена структура аналитического нормального пространства размерности m.

А. Картан ставит вопрос: *существует ли на X структура аналитического нормального пространства со следующими свойствами*:

α) *на V она индуцирует заданную выше структуру*;

β) *W — аналитическое подпространство X размерности, меньшей m.*

Как замечает А. Картан, *если такая структура возможна, то она единственна.*

Действительно, пусть $x \in X$. Кольцо A_x ростков непрерывных комплекснозначных функций в точке x определяется однозначно следующим условием: функция f принадлежит A_x тогда и только тогда, когда она непрерывна в некоторой окрестности U точки x и в каждой точке $y \in U \cap V$ принадлежит B_y (B_y — кольцо ростков аналитических функций в точке y).

Как показал А. Картан, выполнение следующих трех условий достаточно для существования искомой структуры:

1) *любая точка $x_0 \in W$ имеет фундаментальную систему окрестностей, пересечение которых с V связно*;

2) *всякая точка $x_0 \in W$ имеет окрестность U, в которой функции, непрерывные в U и аналитические в каждой точке из $V \cap U$, разделяют* *) *все точки $V \cap U$*;

3) *естественно возникающая на W структура A колец ростков непрерывных функций индуцирует на W структуру*

*) Говорят, что функция $f(z)$ разделяет точки z_1 и z_2, если $f(z_1) \neq f(z_2)$.

аналитического нормального пространства размерности, меньшей m.

В качестве примера применения теоремы А. Картана докажем следующее утверждение, которое будет использовано в дальнейшем:

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторое комплексное многообразие, Γ — дискретная группа его аналитических автоморфизмов. В фактор-пространстве $\mathscr{D}/\Gamma$ всегда можно ввести структуру аналитического нормального пространства.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если группа Γ не содержит нетривиальных преобразований с неподвижными точками, то естественное отображение $\mathscr{D} \to \mathscr{D}/\Gamma$ локально взаимно однозначно и, значит, определяет на $\mathscr{D}/\Gamma$ структуру комплексного многообразия.

Перейдем теперь к доказательству нашего утверждения. Обозначим через $\mathscr{D}_0$ совокупность всех точек $\mathscr{D}$, не являющихся неподвижными точками для элементов группы Γ. Положим теперь $X = \mathscr{D}/\Gamma$ и $V = \mathscr{D}_0/\Gamma$. Ясно, что $\mathscr{D}_0$, а значит и V, являются комплексными многообразиями. Покажем, что для X и V выполняются условия теоремы А. Картана.

Пусть $x_0 \in W = X \setminus V$. Обозначим через y_0 какой-нибудь прообраз этой точки в $\mathscr{D}$. Нетрудно видеть, что любая фундаментальная система окрестностей точки y_0 при естественном отображении $\mathscr{D} \to \mathscr{D}/\Gamma$ переходит в фундаментальную систему окрестностей точки x_0. Отсюда сразу следует выполнение условия 1) теоремы А. Картана.

Чтобы показать выполнение условия 2), достаточно найти для любой точки $y_0 \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_0$ такую ее окрестность U, в которой аналитические и Γ-инвариантные *) функции разделяли бы все Γ-неэквивалентные **) точки.

Обозначим через Γ_0 совокупность всех $\gamma \in \Gamma$ таких, что $\gamma(y_0) = y_0$. Выберем окретность U точки y_0 столь малой, чтобы из непустоты $U \cap \gamma(U)$ вытекало $\gamma \in \Gamma_0$. Далее, мы можем считать, что окрестность U Γ_0-инвариантна. Пусть y_1, $y_2 \in U$. Если $y_1 \neq \gamma y_2$ при любом $\gamma \in \Gamma_0$, то существует такая аналитическая в U функция $f(z)$, что

$$f(\gamma y_1) = 0 \quad \text{и} \quad f(\gamma y_2) = 1$$

---

*) Функции, для которых имеет место функциональное уравнение $f(z) = f(\gamma z)$ при всех $\gamma \in \Gamma$, называются Γ-инвариантными.

**) Две точки z_1 и z_2 называются Γ-эквивалентными, если при некотором $\gamma \in \Gamma$ имеет место соотношение $z_2 = \gamma z_1$.

при всех $\gamma \in \Gamma_0$. Функция $\varphi(z) = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma_0} f(\gamma z)$ Γ-инвариантна и разделяет точки y_1 и y_2. Мы показали, что условие 2) также выполняется.

Заметим теперь, что в достаточно малой окрестности U точки y_0 можно выбрать систему координат, в которой все преобразования из Γ_0 линейны.

Совокупность неподвижных точек для Γ_0 в этой системе координат будет линейным подпространством и, значит, подмногообразием многообразия $\mathscr{D}$. Отображение $\mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_0$ на W локально взаимно однозначно, следовательно, индуцированная на W структура есть структура комплексного многообразия. Таким образом, условие 3) также выполняется. Наше утверждение доказано.

Мы покажем сейчас, что построенное в предыдущем параграфе пространство несет на себе структуру аналитического нормального пространства. Для этого применим теорему А. Картана в случае $X = M$, $V = M_0$.

Проверка условия 1). Пусть $x_0 \in \mathscr{F}_{j_0}$. Рассмотрим последовательность цилиндрических областей Q_n с основаниями $B_n \in \mathscr{F}_{j_0}$, $x_0 \in B_n$. Предположим, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = 0, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = 0.$$

Тогда, как нетрудно видеть, существует фундаментальная система окрестностей U_n точки x_0 такая, что $U_n \cap M_0$ — образ Q_n при естественном отображении $\mathscr{D} \to \mathscr{D}/\Gamma$. Каждая цилиндрическая область Q_n связна. Следовательно, $U_n \cap M_0$, как непрерывный образ Q_n, также связно.

Проверка условия 2). Пусть опять $x_0 \in \mathscr{F}_{j_0}$. Из леммы 2 § 9 вытекает существование такой цилиндрической области Q с основанием $B \subset \mathscr{F}_{j_0}$, $x_0 \in B$, что если $z \in Q$ и $\gamma z \in Q$, где $\gamma \in \Gamma$, то $\gamma x_0 = x_0$. Обозначим через U такую окрестность точки x_0, что $U \cap M_0$ есть образ Q при естественном отображении $\mathscr{D} \to \mathscr{D}/\Gamma$.

Каждая непрерывная в U и аналитическая в $M_0 \cap U$ функция индуцирует в Q некоторую Γ_0-инвариантную аналитическую функцию (Γ_0 — совокупность таких $\gamma \in \Gamma$, что $\gamma(x_0) = x_0$) Отобразим область D на некоторую область Зигеля S так. чтобы все преобразования, оставляющие точку x_0 на месте, стали бы линейными преобразованиями; а все преобразования, переводящие $\mathcal{F}_{j_0}$ в себя, стали бы квазилинейными.

Заметим, что якобиан любого преобразования $\gamma_0 \in \Gamma_0$ в области S равен 1. Следовательно, понятия Γ_0-инвариантной функции и Γ_0-автоморфной формы совпадают (см. определение в § 11).

Из непрерывности функции в U вытекает, что индуцированная ею функция в Q «аналитична в бесконечности» в смысле § 12. Из леммы 1 § 12 очевидным образом следует обратное утверждение, а именно, любая аналитическая в Q, Γ_0-инвариантная функция, которая «аналитична в бесконечности», индуцируется некоторой непрерывной в U и аналитичной в $U \cap M_0$ функцией.

Из леммы 4 § 12 вытекает, что любые две Γ_0-неэквивалентные точки области Q можно разделить аналитическими в Q Γ_0-инвариантными и «аналитическими в бесконечности» функциями.

Проверка условия 3). Покажем теперь, что естественно возникающая на W структура колец ростков непрерывных функций индуцирует на W структуру аналитического нормального пространства размерности, меньшей, чем m. Прежде всего, из леммы 1 § 12 получаем, что индуцированная на W кольцевая структура совпадает на каждом M_j с имеющейся там естественной аналитической структурой. Покажем теперь, что структура, определенная на W, представляет собой структуру аналитического нормального пространства.

Обозначим через W_0 совокупность всех M_j таких, что на границе соответствующей компоненты $\mathcal{F}_j$ не содержится никаких других компонент $\mathcal{F}$ из S. Обозначим через W_1 совокупность всех M_j таких, что на границе соответствующих компонент $\mathcal{F}_j$ могут содержаться только такие компоненты $\mathcal{F}$, что соответствующее пространство $M = \mathcal{F}/\Gamma'(\mathcal{F})$ принадлежит W_0. Аналогично индуктивным образом мы определим W_1, W_2 и т. д. Ясно, что существует такое k, что $W_k = W$. Мы покажем сейчас индукцией по j, что W_j является аналитическим нормальным пространством размерности, равной максимальной размерности входящих в него M_l. Для $j = 0$ это очевидно, поскольку W_0 представляет собой объединение не более чем счетного числа замкнутых и не пересекающихся множеств M_i, причем индуцированная на каждом M_i структура совпадает с уже имеющейся там структурой аналитического нормального пространства.

Пусть мы уже доказали, что W_j несет на себе структуру аналичического нормального пространства; покажем, что на W_{j+1} также имеется структура аналитического нормального пространства. W_{j+1} представляет собой объединение не более чем счетного числа замкнутых непересекающихся множеств. Очевидно, достаточно доказать наше утверждение для любого из этих замкнутых подмножеств. Для доказательства мы опять применяем теорему Картана. По тем же причинам, что и выше, условия 1) и 2) этой теоремы выполняются. Условие (3) выполняется в силу предположения индукции.

Сформулируем для нормальных дискретных групп определение автоморфной функции.

Пусть $f(z)$ некоторая мероморфная в $\mathscr{D}$ и Γ-инвариантная функция. Ее можно рассматривать как мероморфную функцию на M_0. Если ее можно продолжить как мероморфную функцию на все M, то это продолжение, очевидно, единственно.

Определение. Γ-инвариантная мероморфная в $\mathscr{D}$ функция называется **автоморфной**, если соответствующая ей функция на M_0 продолжима мероморфным образом на все M.

Справедлива следующая важная теорема, называемая обычно теоремой об алгебраических соотношениях:

Теорема 1. *Поле автоморфных относительно данной дискретной группы* Γ *функций изоморфно полю алгебраических функций от n неизвестных, где n — комплексная размерность области* $\mathscr{D}$.

Доказательство. Согласно теореме Реммерта (Реммерт [1]), поле мероморфных функций на компактном аналитическом нормальном пространстве изоморфно полю алгебраических функций от r неизвестных, где r не превосходит комплексной размерности пространства, т. е. n. Остается показать, что $r = n$. С помощью рядов Пуанкаре можно доказать (см. лемму 2 § 11), что существует n аналитически независимых мероморфных функций.

Отметим в заключение следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{D}$ *— классическая область, являющаяся произведением неприводимых областей, размерность каждой из которых больше* 1; Γ *— нормальная дискретная* *группа. Любая Γ-инвариантная мероморфная в $\mathscr{D}$ функция является автоморфной функцией, т. е. аналитически продолжима на все M.*

Доказательство сразу следует из того, что в условиях теоремы комплексная размерность $M \setminus M_0$ по крайней мере на две единицы меньше, чем размерность M, следовательно, любая мероморфная в M_0 функция мероморфно продолжима на все M.

§ 11. Ряды Пуанкаре

В настоящем параграфе изучаются ряды Пуанкаре. С помощью результатов настоящего и следующего параграфов будет установлена лемма 4, из которой вытекает выполнение одного из условий теоремы А. Картана.

Вначале дадим определение автоморфных форм.

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая область, Γ — дискретная группа аналитических автоморфизмов этой области.

Определение 1 *). Аналитическая в $\mathscr{D}$ функция $f(z)$ называется Γ-автоморфной формой веса m, если она удовлетворяет функциональному уравнению:

$$f(\gamma(z))\, j_\gamma^m(z) = f(z) \quad \text{при всех} \quad \gamma \in \Gamma, \tag{1}$$

где $j_\gamma(z)$ означает якобиан преобразования $z \to \gamma(z)$.

Заметим, что при аналитическом отображении $z \to z_1 = \varphi(z)$ области $\mathscr{D}$ на некоторую область $\mathscr{D}_1$ Γ-автоморфные формы преобразуются следующим образом:

$$f(z) \to f\left(\varphi^{-1}(z_1)\right) j_{\varphi^{-1}}^m(z_1). \tag{2}$$

В случае, когда область $\mathscr{D}$ ограничена, существует очень удобный метод конструкции Γ-автоморфных форм с помощью предложенных А. Пуанкаре рядов.

Пусть Γ — произвольная дискретная группа аналитических автоморфизмов ограниченной области $\mathscr{D}$.

Ряд

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} | j_\gamma(z) |^2 \tag{3}$$

*) Это определение несколько расходится с обычной терминологией. Правильней автоморфными формами называть решения функционального уравнения (1), на которые (см., например, § 16) наложены еще дополнительные гипотезы о поведении вблизи некоторых граничных точек. В § 11 и 12 мы все же будем пользоваться этим определением.

равномерно сходится в любой компактной подобласти области $\mathscr{D}$ (Зигель [1], стр. 103).

Следовательно, ряд

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} h(\gamma(z))\, j_\gamma^m(z), \quad m \geqslant 2, \tag{4}$$

где $h(z)$ — ограниченная аналитическая в $\mathscr{D}$ функция, представляет собой аналитическую в $\mathscr{D}$ функцию. Легко проверить, что для него выполняется уравнение (1), и значит, он представляет собой автоморфную форму веса m. Для изучения рядов Пуанкаре полезно предварительно изложить построение некоторой специальной фундаментальной области.

Определение 2. Под *фундаментальной областью* мы будем понимать замкнутое множество, ограниченное конечным или счетным числом вещественно аналитических многообразий, причем для каждой точки области $\mathscr{D}$ должна существовать хотя бы одна точка фундаментальной области, Г-эквивалентная ей, и любые две внутренние точки фундаментальной области должны быть Г-неэквивалентны друг другу.

Обозначим через F совокупность точек $\mathscr{D}$, для которых $|j_\gamma(z)| \leqslant 1$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Мы покажем, что если в Γ нет нетривиальных отображений с якобианом, по модулю тождественно равным 1, то F является фундаментальной областью в указанном выше смысле. Действительно, очевидно, что F замкнуто. Обозначим через F_0 совокупность точек $z \in F$, для которых $|j_\gamma(z)| < 1$ при всех γ, за исключением $\gamma = \varepsilon$. Очевидно, F_0 представляет собой открытое множество. Точки, принадлежащие F, но не принадлежащие F_0, очевидно, содержатся в какой-нибудь из счетного числа гиперповерхностей $|j_\gamma(z)| = 1$. Для каждой точки $z_0 \in D$ существует эквивалентная ей точка $z' \in F$. Действительно, ввиду сходимости ряда (3) среди чисел $j_\gamma(z_0)$, $\gamma \in \Gamma$, существует наибольшее по модулю. Обозначим его через $j_{\gamma_0}(z_0)$. Положим $z' = \gamma_0 z$. Тогда

$$|j_\gamma(z')| = |j_\gamma(\gamma_0(z_0))| = \left| \frac{j_{\gamma\gamma_0}(z_0)}{j_\gamma(z)} \right| \leqslant 1, \tag{5}$$

и значит, $z' \in F$.

Пусть $z_1 \in F_0$ и $z_2 = \gamma(z_1) \in F_0$, тогда

$$j_{\gamma^{-1}}(z_2)\, j_\gamma(z_1) = j_{\gamma^{-1}}(\gamma(z_1))\, j_\gamma(z_1) = j_\varepsilon(z_1) = 1.$$

Этого не может быть (см. определение F_0). Следовательно, среди точек F_0 нет Γ-эквивалентных.

Установим одно полезное для дальнейшего свойство построенной нами фундаментальной области. Покажем, что любое замкнутое множество $D_0 \subset D$ можно покрыть конечным числом образов F.

Действительно, если $z_0 \in D_0$ и $z_1 = \gamma_1 z_0 \in F$, то

$$j_{\gamma_1}(z_0) = j_\gamma(\gamma_1^{-1} z_1) = \frac{1}{|j_{\gamma^{-1}}(z_1)|} \geqslant 1. \tag{6}$$

Ввиду равномерной сходимости ряда (3) в D_0, может быть лишь конечное число различных γ, для которых справедливо последнее неравенство.

Рассмотрим теперь случай, когда существуют нетривиальные отображения $\gamma \in \Gamma$ с якобианом, тождественно равным единице. Из (3) ясно, что таких отображений существует лишь конечное число. Ясно также, что они образуют группу, которую обозначим через Γ_0. F определяется так же, как и выше. F_0 определяется как совокупность всех z, для которых $|j_\gamma(z)| < 1$ при всех $\gamma \in \Gamma$, за исключением $\gamma \in \Gamma_0$.

Как и выше, устанавливается, что любая точка $\mathscr{D}$ эквивалентна некоторой точке из F и что если две точки z_1 и z_2 из F_0 эквивалентны между собой, то $z_2 = \gamma_0 z_1$, где $\gamma_0 \in \Gamma_0$.

Следующая лемма устанавливает возможность разделения при помощи рядов Пуанкаре Γ-неэквивалентных точек $\mathscr{D}$.

Лемма 1. *Для любых двух точек z_1 и z_2, неэквивалентных относительно Γ, существуют такие ряды Пуанкаре $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ одного веса, что*

$$\varphi_1(z_1)\varphi_2(z_2) - \varphi_1(z_2)\varphi_2(z_1) \neq 0. \tag{7}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что z_1 и z_2 принадлежат F. Заметим, что при $m \to \infty$

$$\varphi_1(z_j) = \sum_{|j_\gamma(z_j)|=1} h(\gamma z_j) j_{\gamma_j}^m(z_j) + o(1). \tag{8}$$

Выберем $h_i(z)$, $i = 1, 2$, так, чтобы выполнялись условия:

$$h_1(z_1)h_2(z_2) - h_1(z_2)h_2(z_1) \neq 0, \tag{9}$$

$$h_i(\gamma z_j) = 0, \quad \text{если} \quad |j_\gamma(z_j)| = 1, \ \gamma z_j \neq z_j. \tag{10}$$

Условия (9) и (10) совместны, поскольку точки z_1 и z_2 неэквивалентны. Обозначим через s_j число таких γ, что

$\gamma z_j = z_j$. Очевидно, что γ, имеющие общую неподвижную точку, образуют группу. Следовательно, согласно теореме Лагранжа, из $\gamma z_j = z_j$ вытекает, что $\gamma^{s_j} = \varepsilon$ и, значит,

$$(j_\gamma(z_j))^{s_j} = j_{\gamma^{s_j}}(z_j) = 1.$$

Пусть $m = m_0 s_1 s_2$, $m_0 \to \infty$; тогда

$$\varphi_l(z_j) = s_j h_l(z_j) + o(1); \tag{11}$$

из (9) и (11) утверждение леммы вытекает тривиально.

Заметим, что аналогичным способом можно доказать несколько более общее предположение, а именно: пусть $z_1, \ldots, z_p$ — некоторая система попарно неэквивалентных точек. Тогда существуют такие ряды Пуанкаре $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ одного веса, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(z_1) & \ldots & \varphi_p(z_1) \\ \varphi_1(z_2) & \ldots & \varphi_p(z_2) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_1(z_p) & \ldots & \varphi_p(z_p) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

Очевидно, из (12) вытекает существование ряда Пуанкаре достаточно большого веса, принимающего в точках $z_1, \ldots, z_p$ любые наперед заданные значения.

Лемма 2. *Пусть $z_0 \in F$ не является неподвижной точкой ни для одного из преобразований группы* Γ, *за исключением тождественного. Тогда существуют ряды Пуанкаре $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, для которых*

$$\begin{vmatrix} \varphi_0 & \ldots & \varphi_n \\ \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial z_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial z_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial z_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}_{=z_0} \neq 0.$$

Доказательство. Будем, как и выше, искать их в виде

$$\varphi_l(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_l(\gamma z)\, j_\gamma^m(z). \tag{13}$$

При достаточно больших m поведение функций $\varphi_l(z)$ зависит только от тех членов ряда (13), для которых $|j_\gamma(z_0)| = 1$. Положим

$$\Phi_l(z) = \sum_{|j_\gamma(z_0)|=1} h_l(\gamma z)\, j_\gamma^m(z).$$

Очевидно, достаточно выбрать $h_l(z)$ так, чтобы

$$\left|\begin{matrix} \Phi_0 & \ldots & \Phi_n \\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z_1} & \ldots & \dfrac{\partial\Phi_n}{\partial z_1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z_n} & \ldots & \dfrac{\partial\Phi_n}{\partial z_n} \end{matrix}\right|_{z=z_0} \neq 0.$$

Последнее нетрудно сделать, пользуясь тем, что точки γz_0 различны при различных γ. Отметим, что без предположения о том, что z_0 не является неподвижной точкой ни для одного из преобразований, наше утверждение неверно. Действительно, пусть точка z_0 является неподвижной точкой для некоторых преобразований из Γ. Эти преобразования образуют конечную группу K. Разложим ряд Пуанкаре $\varphi(z)$ в степенной ряд с центром в точке z. Для простоты выкладок будем считать, что z_0 — начало координат. Согласно известной теореме А. Картана (см. Б. А. Фукс [1], стр. 31), можно считать, что $\gamma \in K$ являются линейными и даже унитарными преобразованиями. Таким образом,

$$\varphi(\gamma z) = \varepsilon\varphi(z),$$

где ε — корень из 1 и $\gamma \in K$. Следовательно, либо φ, либо какая-нибудь из ее частных производных равна 0.

При помощи рассуждений, аналогичных изложенным выше, легко получается следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть z_0 не является неподвижной точкой ни для одного из преобразований группы Γ, кроме тождественного. Тогда для всех достаточно больших m, для некоторого $\alpha > 0$ и для любой последовательности $a_{k_1 \ldots k_n}$ $(s = k_1 + \ldots + k_n \leqslant \alpha m)$ комплексных чисел существует такой ряд Пуанкаре $\varphi(z)$, что*

$$\left.\frac{\partial^s \varphi}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}\right|_{z=z_0} = a_{k_1 \ldots k_n}. \tag{14}$$

Эта лемма обобщается на случай, когда z_0 — неподвижная точка. Именно, можно доказать, что единственные ограничения на возможный выбор $a_{k_1 \dots k_n}$ суть следствия функциональных уравнений для автоморфной формы для таких γ, которые оставляют на месте точку z_0.

В дальнейшем важно уметь оценивать ряды Пуанкаре вблизи границы области.

Условимся в следующих обозначениях:

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая ограниченная область; $z \to w = \varphi(z)$ — взаимно однозначное аналитическое отображение $\mathscr{D}$ на некоторую область $\mathscr{D}'$, Γ — дискретная группа аналитических автоморфизмов области $\mathscr{D}$; $\Gamma' = \varphi\Gamma\varphi^{-1}$ — соответствующая группа автоморфизмов области D'. Отметим, что область D' может быть неограничена.

Подмножество $T \subset \mathscr{D}'$ условимся называть п р а в и л ь н ы м, если существуют такие ε и N, что в любом полицилиндре $C(w_0, \varepsilon)$ *), где $w_0 \in T$, имеется не более N Γ'-эквивалентных **) между собой точек.

Л е м м а 4. *Пусть $f_0(z)$ — некоторый ряд Пуанкаре. Функция $f(w) = f_0(\varphi^{-1}(w))\, j^m_{\varphi^{-1}}(w)$ ограничена на любом правильном подмножестве области $\mathscr{D}'$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что функция

$$k(w) = \sum_{\gamma \in \Gamma} |j_\gamma(\varphi^{-1}(w))|^2 \, |j_{\varphi^{-1}}(w)|^2$$

ограничена на любом правильном подмножестве.

Действительно, из (4) сразу следует неравенство

$$|f(w)| \leqslant c\,(k(w))^{\frac{m}{2}},$$

где c — максимум модуля функции $h(z)$.

Пусть T—правильное подмножество области $\mathscr{D}'$. Докажем, что функция $k(w)$ ограничена на T. Из общих свойств аналитических функций легко вывести неравенство

$$|f(w_0)|^2 \leqslant \lambda^{-1} \int\limits_{C(w_0,\, r)} |f(w)|^2\, d\sigma, \quad \lambda = \int\limits_{C(w_0,\, r)} d\sigma,$$

*) $C(w_0, \varepsilon)$ — это множество точек w аффинного комплексного пространства таких, что модуль любой координаты разности $w - w_0$ не превосходит ε.

**) Предполагается, что $C(w_0, \varepsilon) \subset \mathscr{D}'$ при любом $w_0 \in T$.

где $d\sigma$ — элемент евклидова объема аффинного комплексного пространства.

Применим это неравенство, полагая $f(w) = j_\gamma(\varphi^{-1}(w)) \times \times j_{\varphi^{-1}}(w)$, $w_0 \in T$, $r = \varepsilon$, где ε — то же, что и в определении T

$$|j_\gamma(\varphi^{-1}(w_0)) j_{\varphi^{-1}}(w_0)|^2 \leqslant \lambda^{-1} \int\limits_{C(w_0, r)} |j_\gamma(\varphi^{-1}(w)) j_{\varphi^{-1}}(w)|^2 d\sigma.$$

Далее, мы имеем

$$j_\gamma(\varphi^{-1}(w)) j_{\varphi^{-1}}(w) = j_{\gamma\varphi^{-1}}(w) = j_{\varphi^{-1}\gamma'}(w) = \\ = j_{\varphi^{-1}}(\gamma'(w)) j_{\gamma'}(w).$$

Следовательно,

$$k(w_0) \leqslant \lambda^{-1} \sum_{\gamma'} \int\limits_{C(w_0, \varepsilon)} |j_{\varphi^{-1}}(\gamma'(w)) j_{\gamma'}(w)|^2 d\sigma.$$

Сделав в каждом из интегралов замену переменного $v = \gamma'(w)$, мы получим

$$k(w_0) \leqslant \lambda^{-1} \sum_{\gamma'} \int |j_{\varphi^{-1}}(v)|^2 d\sigma \leqslant \lambda^{-1} N \int\limits_{\mathscr{D}'} |j_{\varphi^{-1}}(v)|^2 d\sigma.$$

Действительно, ввиду правильности множества T каждая точка $w \in \mathscr{D}$ содержится не более, чем в N областях типа $\gamma'(C(w_0, \varepsilon))$.

Последний интеграл, очевидно, равен евклидову объему области $\mathscr{D}$ и, значит, так как $\mathscr{D}$ ограничена, конечен. Лемма доказана.

§ 12. Некоторые леммы

Настоящий параграф содержит некоторые леммы, с помощью которых проверяются условия теоремы А. Картана (см. § 10).

Пусть $\mathscr{D}$ — классическая область, Γ — дискретная группа ее аналитических автоморфизмов, $\mathscr{F}$ — некоторая Γ-рациональная компонента. Отобразим $\mathscr{D}$ на область Зигеля с базой $\mathscr{F}$.

В § 9 показано, что строение фундаментальной области для группы Γ «вблизи» $\mathscr{F}$ определяется подгруппой группы Γ, состоящей из квазилинейных преобразований.

В настоящем параграфе мы займемся изучением автоморфных форм относительно дискретных групп квазилинейных преобразований областей Зигеля.

Пусть S — некоторая область Зигеля с базой $\mathcal{F}$, Γ — некоторая дискретная группа квазилинейных преобразований области S, Δ — группа «параллельных переносов» области S и пусть Γ_Δ обозначает пересечение $\Gamma \cap \Delta$.

Для приложений нам нужны только такие дискретные группы Γ, что фактор-пространство Δ/Γ_Δ компактно. В дальнейшем мы будем считать выполненным это условие.

Напомним, как определяются цилиндрические области.

Определение 1. Пусть Q — некоторая область в $\mathcal{D}$, r — вектор из V. Цилиндрической областью $S(Q, r)$ в области S называется совокупность всех $w=(z, u, t)$, для которых

$$\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(u, u) - r \in V,$$
$$t \in Q.$$

Наиболее важными из автоморфных форм являются так называемые «аналитические в бесконечности» автоморфные формы.

Определение 2. Γ-автоморфная форма называется «аналитической в бесконечности», если она ограничена в любой цилиндрической подобласти области S.

В дальнейшем будет показано, что для весьма общего класса групп Γ любая автоморфная форма «аналитична в бесконечности». Следующие определения позволяют уточнить смысл «аналитичности в бесконечности».

Определение 3. Пусть $w_1, w_2, \ldots$ — последовательность точек из S. Условимся говорить, что

$$\lim_{\nu\to\infty} w_\nu = t_0, \quad \text{где } t_0 \in \mathcal{D},$$

если для любой цилиндрической области $S(Q, r)$ $(t_0 \in Q)$ существует такое ν_0, что при $\nu > \nu_0$ точка w_ν принадлежит $S(Q, r)$.

Определение 4. Пусть $f(w)$ — некоторая функция в S. Условимся говорить, что $\lim\limits_{w\to t_0} f(w) = A$, если для любой последовательности $w_\nu \in S$ такой, что $\lim\limits_{\nu\to\infty} w_\nu = t_0$, существует предел $f(w_\nu)$ при $\nu \to \infty$ и он равен A.

Лемма 1. *Для любой «аналитической в бесконечности» Γ-автоморфной формы $f(w)$ веса μ существует предел*

$$\lim_{w \to t} f(w) = \psi(t).$$

Предельная функция $\psi(t)$ аналитична в $\mathcal{T}$.

Доказательство. Обозначим через Δ_0 подгруппу Δ, состоящую из преобразований вида

$$\left.\begin{aligned} z &\to z + a, \\ u &\to u, \\ t &\to t, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a — произвольный вещественный вектор.

Положим $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Delta_0$. Ясно, что Γ_0 — коммутативная группа с таким числом образующих, какова размерность группы Δ_0, т. е. Γ_0 — решетка в Δ_0.

Пусть функция $f(z, u, t)$ является Γ-автоморфной формой веса μ. Из инвариантности f относительно преобразований группы Γ_0 вытекает возможность разложения f в ряд Фурье следующего вида:

$$f(z, u, t) = \sum_{\rho} \psi_\rho(u, t)\, e^{2\pi i (\rho, z)}, \quad (\rho, z) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k z_k, \tag{2}$$

где ρ пробегает решетку, взаимную к решетке Γ_0, т. е. состоящую из всех таких векторов ρ, что (ρ, a) — целое число при любом $a \in \Gamma_0$.

Ясно, что каждая из функций $\psi_\rho(u, t)$ аналитична в области $C^m \times \mathcal{T}$.

Обозначим через V' взаимный конус. (Взаимным конусом называется совокупность таких ρ, что $(\rho, y) > 0$ для всех $y \in V$.)

Покажем, что если Γ-автоморфная форма $f(w)$ ограничена в любой цилиндрической области, то $\psi_\rho(n, t) \equiv 0$ при $\rho \,\bar{\in}\, \overline{V}'$ ($\overline{V}'$ — замыкание конуса V').

Воспользуемся равенством Парсеваля

$$\frac{1}{\operatorname{mes} L} \int_L |f(x + iy, u, t)|^2 dx = \sum_{\rho} |\psi_\rho(u, t)|^2 e^{-4\pi (\rho, y)}, \tag{3}$$

где L — основной параллелепипед*) решетки Γ_0.

*) Основной параллелепипед — это параллелепипед, построенный на образующих решетки Γ_0.

Если $\psi_\rho(u_0, t_0) \neq 0$, то для всех достаточно больших y

$$e^{-4\pi(\rho, y)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} L\,|\psi_\rho(u_0, t_0)|^2} \int\limits_L |f(x+iy, u_0, t_0)|^2\,dx \leqslant C, \quad (4)$$

где C — некоторая константа *).

Из неравенства (4) сразу следует, что

$$(\rho, y) > C_1, \quad \text{если } y - r \in V, \quad (5)$$

C_1 — некоторая константа.

Заменяя в (5) y на λy, где λ — вещественное число, и устремляя λ к ∞, мы получим из (5) неравенство

$$(\rho, y) \geqslant 0,$$

верное уже для любого $y \in V$; из него следует, что $\rho \in \overline{V}'$.

Покажем теперь, что функция $\psi_0(u, t)$ не зависит от u. Действительно, фактор-пространство $\Delta/\Gamma \cap \Delta$ компактно, и значит, функция $\psi_0(u, t)$ имеет $2m$ периодов по u, где m — комплексная размерность u. Отсюда с помощью теоремы Лиувилля заключаем, что $\psi_0(u, t)$ не зависит от u.

Пусть теперь $w_\nu = (z_\nu, u_\nu, t_\nu)$ — последовательность точек S, сходящаяся к точке $t_0 \in \mathscr{D}$.

Мы покажем сейчас, что предел $f(w)$ при $w \to t_0$ существует и равен $\psi_0(t_0)$.

Без ограничения общности можно предположить, что u_ν ограничены, $t_\nu \in Q$, где Q — фиксированная окрестность точки t_0.

Ряд Фурье аналитической функции сходится абсолютно, следовательно,

$$\sum_\rho |\psi_\rho(u, t)|\, e^{-2\pi(\rho, y)} < \infty. \quad (6)$$

Из общих свойств аналитических функций ясно, что ряд (6) сходится равномерно по совокупности u, t, когда $t \in Q$, а u ограничено.

Ясно, что если $w_\nu = (z_\nu, u_\nu, t_\nu) \to t$, то $y_\nu \to \infty$, и значит,

$$|f(w_\nu) - \psi_0(t_\nu)| \leqslant \sum_\rho |\psi_\rho(u_\nu, t_\nu)|\, e^{-2\pi(\rho, y_\nu)} \to 0$$

---

*) Это значит, что существует такой вектор $r \in V$, что если $y - r \in V$, то неравенство (4) выполняется.

при $\nu \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{w \to t} f(w) = \psi_0(t).$$

Лемма доказана.

Нам понадобится в дальнейшем критерий «аналитичности в бесконечности».

Лемма 2. *Γ-автоморфная форма $f(w)$ «аналитична в бесконечности» тогда и только тогда, когда для ряда* (2) *коэффициенты Фурье $\psi_\rho(u, t) \equiv 0$ при $\rho \bar{\in} \overline{V}'$.*

Доказательство. Необходимость условий леммы следует из доказательства леммы 1. Доказательство достаточности проводится следующим образом.

Пусть $S(Q, r)$ — некоторая цилиндрическая область в S. Рассмотрим подмножество в $S(Q, r)$, состоящее из точек вида

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(u, u) - r \in V, \\ &|u| < K_0, \quad t \in Q, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где K_0 — некоторая константа *).

Любая точка из $S(Q, r)$ Γ_Δ-эквивалентна некоторой точке вида (7), если K_0 достаточно велико. Поэтому надо доказать, что $f(w)$ ограничена в области (7).

Заметим, что ряд Фурье аналитической функции сходится абсолютно, и следовательно,

$$\sum_\rho |\psi_\rho(u, t)| e^{-2\pi(\rho, y)} < \infty$$

для любой точки $w = (z, u, t) \in S$. Поскольку на любом компактном подмножестве области S сходимость равномерна, мы имеем

$$\sum_\rho |\psi_\rho(u, t)| e^{-2\pi(\rho, r + \operatorname{Re} L_t(u, u))} < K_1$$

при любых $t \in Q$, $|u| < K_0$.

Далее, для любой точки вида (7) мы имеем

$$\begin{aligned} &\left|\sum_\rho \psi_\rho(u, t) e^{2\pi i(\rho, z)}\right| \leqslant \\ &\quad \leqslant \sum |\psi_\rho(u, t)| e^{-2\pi(\rho, y - \operatorname{Re} L_t(u, u) - r) - 2\pi(\rho, r + L_t(u, u))} \leqslant \\ &\quad \leqslant \sum |\psi_\rho(u, t)| e^{-2\pi(\rho, r + L_t(u, u))}. \end{aligned}$$

---

*) Имеется в виду, что модуль любой координаты не превосходит K_0.

Мы воспользовались тем, что $\rho \in \overline{V'}$, следовательно,

$$(\rho,\ y - \operatorname{Re} L_t(u,\ u) - r) \geqslant 0.$$

Наша задача состоит в доказательстве возможности разделения неэквивалентных точек с помощью «аналитических в бесконечности» автоморфных форм достаточно большого веса. В предыдущем параграфе мы показали, что с помощью автоморфных форм, представимых в виде рядов Пуанкаре, можно разделить любые две неэквивалентные точки. Ниже будет установлено, что автоморфные формы, представимые в виде рядов Пуанкаре, «аналитичны в бесконечности». Точнее, мы установим следующее. Пусть S — область Зигеля и Γ — некоторая дискретная группа ее квазилинейных отображений на себя. Отобразим S на некоторую ограниченную область $\mathscr{D}$. Мы покажем, что функции в S, соответствующие рядам Пуанкаре в $\mathscr{D}$, представляют собой «аналитические в бесконечности» автоморфные формы.

Предварительно заметим следующее. Обозначим через G_1 фактор-группу группы G (состоящей из всех квазилинейных отображений) по подгруппе Δ параллельных переносов. Через Γ_1 обозначим фактор-группу $\Gamma/\Gamma \cap \Delta$. Мы будем предполагать, что группа Γ_1 является дискретной подгруппой группы G_1. Это, например, имеет место, если централизатор группы Δ в группе G состоит из одного единичного элемента. Последнее условие выполняется для всех областей Зигеля, являющихся каноническими реализациями неприводимых классических областей.

Пусть

$$z \to Az + a(u,\ t), \quad u \to B(t)\,u + b(t), \quad t \to g(t) \tag{8}$$

— некоторое квазилинейное преобразование области S. Сопоставим ему следующее преобразование в пространстве y, u, t:

$$y \to Ay, \quad u \to B(t)\,u, \quad t \to g(t). \tag{9}$$

Это преобразование будем называть *главной частью* преобразования (8). Очевидно, между главными частями и классами смежности группы G по подгруппе Δ существует взаимно однозначное соответствие (см. § 3).

Следующая лемма содержит примеры правильных подмножеств области S, которые будут использованы в дальнейшем (определение правильных подмножеств см. в § 11).

Лемма 3. *Пусть* $w_1 = (iy_1, u_1, t_1)$, *причем точка* (y_1, u_1, t_1) *не является неподвижной точкой для главной части ни одного преобразования из* Γ. *Множество* T *точек вида* $(x + i\lambda y_1, u_1, t_1)$, *где* $\lambda \geqslant 1$, $|x| \leqslant c$, c — *произвольная константа, является правильным подмножеством.*

Доказательство. Выберем ε так, чтобы $C(w_0, \varepsilon)$ принадлежало S при любом $w \in T$.

Обозначим через $R(w_0)$ множество всех квазилинейных отображений $w \to \psi(w)$ области S на себя, для каждого из которых существует такое $w \in C(w_0, \varepsilon)$, что $\psi(w) \in C(w_0, \varepsilon)$.

Пусть R — объединение всех $R(w_0)$.

Мы покажем вначале, что образ R при естественном гомоморфизме $G \to G_1$ представляет собой компактное множество. Пусть $\psi \in R(w_0)$, где $w_0 = (x_0 + i\lambda_0 y_1, u_1, t_1)$. Обозначим через δ_λ следующий аналитический автоморфизм области S:

$$z \to \lambda z, \quad u \to \sqrt{\lambda} u, \quad t \to t.$$

Отображение $\delta_{\lambda_0}\psi\delta_{\lambda_0}^{-1}$ переводит некоторую точку из множества

$$\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} y_1| < \lambda_0^{-1}\varepsilon, \quad \left| u - \lambda_0^{-\frac{1}{2}} u_1 \right| < \lambda_0^{-\frac{1}{2}} \varepsilon, \quad |t - t_1| < \varepsilon \tag{10}$$

в некоторую точку того же множества.

При достаточно малом ε множество (10) принадлежит S.

Непосредственно проверяется, что множество всех квазилинейных преобразований, переводящих при естественном гомоморфизме $G \to G_1$ какие-нибудь точки вида (10) в точку того же вида, переходит в компактное множество.

Заметим, что δ_λ принадлежит центру группы G_1, значит, ψ и $\delta_\lambda\psi\delta_\lambda^{-1}$ переходят при гомоморфизме $G \to G_1$ в один и тот же элемент группы G_1 (см. § 3 гл. 1).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы. Пусть $w_0 \in T$. Мы должны показать, что в множестве $\Gamma(w_0) = \Gamma \cap R(w_0)$ содержится не более N элементов, где N — некоторая константа, не зависящая от выбора $w_0 \in T$.

Заметим, что при отображении $G \to G_1$ элементы из $\Gamma(w_0)$ могут переходить лишь в конечное число различных элементов, ибо Γ_1 — дискретная подгруппа группы G_1.

Более того, при достаточно малом ε множество $\Gamma(w_0)$ состоит из элементов, переходящих в единичный элемент группы G_1.

Покажем, что при достаточно малом ε в $\Gamma(w_0)$ содержится только единичный элемент. Действительно, пусть преобразование

$$z \to z + a + 2iL_t(u,\ c(t)) + iL_t(c(t),\ c(t)),$$
$$u \to u + c(t), \quad t \to t$$

принадлежит $\Gamma(w_0)$. Тогда $|c(t_1)| < 2\varepsilon$, откуда в силу произвольной малости ε следует, что $c = 0$. Далее, $|a| < 2\varepsilon$, т. е. $a = 0$.

Таким образом, мы показали, что T — правильное множество. Теперь мы можем доказать следующую основную лемму.

Лемма 4. *Пусть Γ — дискретная группа квазилинейных отображений области S. Обозначим через w_1 и w_2 две Γ-неэквивалентные точки области S. С помощью «аналитических в бесконечности» автоморфных форм достаточно большого веса можно разделить точки w_1 и w_2.*

Доказательство. Ввиду леммы 1 § 11 достаточно показать, что функция, соответствующая ряду Пуанкаре, будет «аналитична в бесконечности», т. е. ограничена в любой цилиндрической подобласти. Из леммы 3 вытекает, что функция $f(w)$ ограничена на множестве точек w вида

$$z = x + i\lambda y_0,$$
$$u = u_0,$$
$$t = t_0,$$

где $|x| < c$, c — произвольная константа, y_0, u_0, t_0 фиксированы, $\lambda > 1$, причем (y_0, u_0, t_0) не есть неподвижная точка для главной части какого-либо преобразования. Отсюда с помощью рассуждения, примененного при доказательстве леммы 1 настоящего параграфа, следует, что коэффициенты Фурье $\psi_\rho(u, t)$ разложения функции $f(w)$ в ряд вида (2) равны нулю, если $\rho \bar{\in} \overline{V'}$ для почти всех u_0, t_0. Остается заметить, что функция $\psi_\rho(u_0, t_0)$ аналитична по совокупности u, t, следовательно, из обращения в нуль на всюду плотном множестве вытекает ее обращение в нуль всюду.

С помощью леммы 2 заключаем, что функция $f(w)$ ограничена в любой цилиндрической области. Доказательство леммы закончено.

§ 13. Модулярная группа Зигеля

В настоящем параграфе общая конструкция § 9 применяется к модулярной группе Зигеля и некоторым близким к ней группам.

Задачей расширения фактор-пространства $\mathcal{D}/\Gamma$ в случае, когда Γ — модулярная группа Зигеля, занимался И. Сатаке (И. Сатаке [1] и А. Картан [2]). Построенное им пространство совпадает с тем, которое получается, если исходить из общей конструкции § 9.

Обозначим через H_p совокупность всех комплексных симметрических матриц $Z = X + iY$ порядка p таких, что $Y > 0$. Очевидно, H является областью в $n = \frac{p(p+1)}{2}$-мерном комплексном пространстве. Известно (см. § 7), что H_p есть классическая область третьего типа. Группа аналитических автоморфизмов этой области изоморфна вещественной симплектической группе ранга p. Напомним, что в явном виде соответствие между матрицами из вещественной симплектической группы и аналитическими автоморфизмами H_p осуществляется следующим образом.

Обозначим через J матрицу следующего вида:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

E — единичная матрица порядка p.

Сопоставим каждой вещественной матрице A порядка $2p$, удовлетворяющей условию

$$A'JA = J, \tag{2}$$

следующий аналитический автоморфизм области H_p:

$$Z \to (A_{11}Z + A_{12})(A_{21}Z + A_{22})^{-1}, \tag{3}$$

где A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} — квадратные матрицы порядка p, из которых следующим образом составлена матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Определим модулярную группу Зигеля Γ_p как группу преобразований, соответствующих целочисленным матрицам A.

Обычно одновременно с модулярной группой рассматриваются также следующие группы.

Пусть V — некоторая рациональная невырожденная матрица порядка $2p$. Через $\Gamma_p(V)$ обозначим совокупность всех матриц A, удовлетворяющих (2), и таких, что матрица $U = V^{-1}AV$ — целочисленная. Ясно, что если $A \in \Gamma_p(V)$, то

$$U'RU = R, \quad U = V^{-1}AV, \tag{4}$$

где $R = V'JV$.

Следовательно, группу $\Gamma_p(V)$ можно рассматривать как совокупность всех целочисленных матриц, сохраняющих некоторую рациональную кососимметрическую невырожденную форму.

Легко проверить и обратное, т. е. что если R — матрица некоторой рациональной невырожденной кососимметрической формы, то группа всех целочисленных матриц, удовлетворяющих (4), сопряжена с группой типа $\Gamma_p(V)$.

Отметим, что $\Gamma_p(E)$, где E — единичная матрица, есть модулярная группа Зигеля Γ_p.

Напомним, что две подгруппы Γ_1 и Γ_2 некоторой группы называются соизмеримыми, если индекс их пересечения $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ в каждой из них конечен.

Пусть V_1 и V_2 — две произвольные рациональные матрицы. Покажем, что группы $\Gamma_p(V_1)$ и $\Gamma_p(V_2)$ между собой соизмеримы.

Заметим вначале, что $\Gamma_p(V) = \Gamma_p(\rho V)$ при любом рациональном ρ. Поэтому без ограничения общности можно считать, что V_1 и V_2 — целочисленные матрицы.

Положим $v_1 = \det V_1$ и $v_2 = \det V_2$.

Рассмотрим совокупность Γ_0 целочисленных матриц A, удовлетворяющих (2), для которых выполняется сравнение:

$$A \equiv E_{2p} \pmod{v}, \quad v = v_1 v_2; \tag{5}$$

здесь E_{2p} — единичная матрица порядка $2p$.

Покажем, что $\Gamma_0 \subset \Gamma_p\ (V_i)$, $i=1, 2$. Действительно, если $A \in \Gamma_0$, то

$$V_i^{-1}AV_i = V_i^{-1}(A-E_{2p})V_i + E_{2p} = vV_i^{-1}\frac{1}{v}(A-E_{2p})V_i + E_{2p}.$$

Остается заметить, что матрицы vV_i^{-1} и $\frac{1}{v}(A-E_{2p})$ целочисленны.

Покажем теперь, что Γ_0 является подгруппой конечного индекса в $\Gamma_p(V_i)$, $i=1, 2$. Для этого рассмотрим совокупность целочисленных матриц U, удовлетворяющих соотношению

$$U'R_iU = R_i, \quad \text{где } R_i = V_i'JV_i, \tag{6}$$

и сравнению

$$U \equiv E_{2p} \pmod{vv_i} \tag{7}$$

(i в (6) и (7) одно и то же, оно равно либо 1, либо 2). Очевидно, матрицы, удовлетворяющие (6) и (7), образуют подгруппу конечного индекса в группе матриц, удовлетворяющих (6). Далее нетрудно проверить, что если U удовлетворяет (6) и (7), то $A = VUV^{-1} \in \Gamma_0$. Отсюда вытекает наше утверждение.

Ниже будет показано, что модулярная группа Γ_p является нормальной дискретной группой. Из следующей леммы вытекает, что тогда все группы $\Gamma_p(V)$ также будут нормальными дискретными группами.

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{D}$ — классическая область, Γ — нормальная дискретная группа аналитических автоморфизмов области $\mathscr{D}$. Любая соизмеримая с ней дискретная группа $\tilde{\Gamma}$ также будет нормальной.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, разобрать два случая:

а) $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ и б) $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$. Прежде всего заметим, что если некоторая компонента $\mathscr{F}$ Γ-рациональна, то она будет также $\tilde{\Gamma}$-рациональной компонентой и наоборот. Действительно, если $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$, то $\tilde{\Gamma}_k(\mathscr{F}) \subset \Gamma_k(\mathscr{F})$ и индекс $\tilde{\Gamma}_k(\mathscr{F})$ в $\Gamma_k(\mathscr{F})$ не превосходит индекса $\tilde{\Gamma}$ в Γ. Аналогичные утверждения справедливы для групп $\Gamma'(\mathscr{F})$ и $\Gamma''(\mathscr{F})$.

Совершенно очевидно, что если для группы Γ имеет место свойство A (см. § 9), то оно также имеет место для $\tilde{\Gamma}$, и наоборот. Доказательство закончено.

Опишем все Γ-рациональные компоненты. Наиболее удобно это сделать, исходя из геометрической интерпретации симплектической группы как группы аффинных преобразований, сохраняющих некоторую невырожденную кососимметрическую форму.

Обозначим через R^{2p} совокупность векторов-столбцов порядка $2p$ с вещественными элементами, через Q^{2p} — совокупность векторов-столбцов с рациональными элементами и через Z^{2p} — совокупность целочисленных векторов-столбцов. Очевидно, имеют место естественные вложения:

$$Z^{2p} \to Q^{2p} \to R^{2p}.$$

Мы будем предполагать в дальнейшем, что Z^{2p} вложено в Q^{2p}, которое, в свою очередь, вложено в R^{2p}.

Пусть в пространстве R^{2p} задано невырожденное кососимметрическое скалярное произведение, т. е. билинейная форма (x, y), обладающая следующими свойствами: 1) $(x, y) = -(y, x)$, 2) если $(x_0, y) = 0$ при всех $y \in R^{2p}$, то $x_0 = 0$. Это скалярное произведение называется **рациональным**, если (x, y) — рациональное число при всех $x, y \in Q^{2p}$.

Условимся подпространство X пространства R^{2p} называть **изотропным**, если $(x, y) = 0$ при всех $x \in X$ и $y \in X$.

Подпространство X пространства R^{2p} условимся называть **рациональным**, если размерность пространства $X_Q = X \cap Q$ над полем рациональных чисел совпадает с размерностью пространства X над полем вещественных чисел.

Аффинное преобразование $x \to Ax$ пространства R^{2p} условимся называть **симплектическим**, если имеет место равенство

$$(Ax, Ay) = (x, y). \tag{8}$$

Аффинное преобразование $x \to Ax$ пространства R^{2p} условимся называть **рациональным**, если оно переводит Q^{2p} в себя.

Аффинное преобразование $x \to Ax$ пространства R^{2p} условимся называть **целочисленным**, если оно переводит Z^{2p} в себя.

Пространство R^{2p} допускает следующий базис:

$$e_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad e_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Vmatrix}, \ldots;$$

его мы будем называть о с н о в н ы м б а з и с о м.

Ясно, что рациональные и целочисленные преобразования в основном базисе записываются рациональными или целочисленными матрицами.

Обозначим через Γ совокупность всех целочисленных симплектических преобразований пространства R^{2p}, в котором определено рациональное кососимметрическое скалярное произведение.

Без труда проверяется, что полученная нами группа есть группа типа $\Gamma_p(V)$ и что любая группа $\Gamma_p(V)$ может быть получена таким образом.

Ниже будет показано, что между Γ-рациональными компонентами для группы Γ и рациональными изотропными подпространствами пространства R^{2p} существует взаимно однозначное соответствие, и будет установлен способ осуществления этого соответствия.

Мы покажем вначале, что между изотропными подпространствами пространства R^{2p} и компонентами границы области Hp существует взаимно однозначное соответствие. Чтобы установить это соответствие, поступим следующим образом.

Обозначим через G совокупность всех симплектических преобразований пространства R^{2p}. Покажем, что каждому элементу группы G соответствует аналитический автоморфизм области H_p. В пространстве R^{2p} выберем базис, в котором матрица Грамма скалярного произведения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}.$$

Такие базисы условимся называть к а н о н и ч е с к и м и. Сопоставим каждому симплектическому преобразованию пространства R^{2p} матрицу этого преобразования в раз навсегда фиксированном каноническом базисе. Каждой матрице сопоставим по формуле (3) аналитический автоморфизм области H_p. Таким образом, мы установим взаимно однозначное соответствие между симплектическими преобразованиями пространства R_{2p} и аналитическими автоморфизмами области H_p. Мы покажем сейчас, что совокупность $G(X)$ симплектических преобразований, переводящих в себя изотропное подпространство X пространства R^{2p}, совпадает с некоторой группой $G_1(\mathcal{F})$. Тем самым будет показано, что между компонентами и изотропными подпространствами существует взаимно однозначное соответствие.

Пусть $e_1, \ldots, e_\nu$ — базис некоторого изотропного подпространства X пространства R^{2p}. Дополним его векторами $e_{\nu+1}, \ldots, e_{2p}$ до базиса всего R^{2p} так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &(e_s, e_{2p+t-\nu}) = \delta_{st}, \quad 1 \leqslant s \leqslant \nu; \quad \nu - 2p + 1 \leqslant t \leqslant \nu, \\ &(e_{\nu+s}, e_{p+t}) = \delta_{st}, \quad 1 \leqslant s \leqslant p - \nu; \quad 1 \leqslant t \leqslant p. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Следовательно, матрица Грамма R скалярного произведения имеет в этом базисе вид

$$R = \begin{array}{c} \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} \\ \begin{matrix} \nu & p-\nu & p-\nu & \nu \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} \nu \\ p-\nu \\ p-\nu \\ \nu \\ \end{matrix} . \tag{10}$$

Матрицы A из $G(X)$, как легко проверить, должны иметь в этом базисе вид

$$A = \begin{array}{c} \left\{\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{matrix}\right\} \\ \begin{matrix} \nu & p-\nu & p-\nu & \nu \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} \nu \\ p-\nu \\ p-\nu \\ \nu \\ \end{matrix} , \tag{11}$$

причем $A'RA' = R'$. Очевидно, группа $G(X)$ совпадает с группой аналитических автоморфизмов области H_p, оставляющих на месте некоторую компоненту $\mathcal{F}$ (в гл. II мы ее обозначили через $G_1(\mathcal{F})$).

Обозначим через X_1 аннулятор пространства X, т. е. совокупность всех векторов $x_1 \in R^{2p}$ таких, что $(x, x_1) = 0$ при всех $x \in X$. Легко проверить, что преобразования из $G(X)$ переводят пространство X в себя. Действительно, если $A \in G(X)$, $x_1 \in X_1$, $x \in X$, то

$$(Ax_1, x) = (x_1, A^{-1}x) = 0.$$

В базисе (9) пространство X_1, очевидно, порождается векторами e_k, $k = 1, \ldots, 2p - \nu$.

Если скалярное произведение, определенное в пространстве R^{2p}, рассматривать на X_1, то оно будет вырождено, т. е. его матрица Грамма будет равна нулю.

Обозначим через Y фактор-пространство X_1/X. Легко видеть, что скалярное произведение X_1 индуцирует некоторое скалярное произведение в пространстве Y. Действительно, если $x_1 \equiv x_1' \pmod X$ и $x_2 \equiv x_2' \pmod X$, то

$$(x_1, x_2) = (x_1', x_2'),$$

поскольку $(x, y) = 0$ при любых $x \in X$, $y \in X_1$. Матрица Грамма R_1 этого скалярного произведения в базисе, состоящем из образов векторов e_k, $\nu + 1 \leqslant k \leqslant 2p - \nu$, имеет вид

$$R_1 = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} p-\nu \\ p-\nu \end{array} . \\ \begin{array}{cc} p-\nu & p-\nu \end{array} & \end{array}$$

Гомоморфизм группы $G(X)$ в группу симплектических преобразований пространства Y имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ясно, что он совпадает с гомоморфизмом группы $G_1(\mathcal{F})$ в группу аналитических автоморфизмов компоненты $\mathcal{F}$.

Отметим еще, что гомоморфизм группы $G(X)$ в группу аффинных преобразований пространства X совпадает с гомоморфизмом в группу аффинных преобразований конуса: $G_1(\mathcal{F}) \to G''(\mathcal{F})$.

Рассмотрим подгруппу группы $G(X)$, состоящую из всех преобразований, оставляющих на месте каждый вектор из X и из фактор-пространства $Y = X_1/X$. Непосредственно легко видеть, что эта подгруппа совпадает с группой $\Delta(\mathscr{F})$ (см. § 7).

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между компонентами и изотропными подпространствами пространства R^{2p}. Это соответствие зависит от выбора канонического базиса. Мы будем в дальнейшем предполагать, что канонический базис, задающий соответствие, состоит из рациональных, т. е. принадлежащих Q^{2p}, векторов пространства R^{2p}.

Покажем, что в этом случае рациональному изотропному подпространству соответствует Г-рациональная компонента и наоборот.

Пусть X — некоторое рациональное изотропное подпространство. Обозначим через $e_1, \ldots, e_\nu$ некоторый его рациональный базис. Дополним его до рационального базиса всего пространства так, чтобы выполнялись соотношения (9).

Группа $\Delta(\mathscr{F})$ состоит из преобразований, которые в этом базисе записываются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} E & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & E & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & E & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$A'_{12} + A_{34} = 0, \quad A'_{13} - A_{24} = 0, \quad A'_{14} - A_{14} + A'_{24}A_{34} - A'_{34}A_{24} = 0.$$

Нетрудно видеть, что матрица A некоторого симплектического преобразования принадлежит группе Г тогда и только тогда, когда матрица $V^{-1}AV$ целочисленная. (V — матрица перехода от основного базиса к выбранному нами базису.) Положим $V = \rho V_1$, где V_1 — целочисленная матрица. Очевидно, если матрица A — целочисленна и имеет место сравнение

$$A \equiv E \pmod{v_1}, \tag{14}$$

где v_1 — детерминант V_1, то $A \in \Gamma$. Действительно, из (11) следует, что $A = E + v_1 B$, где B — целочисленная матрица, и значит, $V^{-1}AV = V_1^{-1}AV_1 = E + v_1V_1^{-1}BV_1$. Остается учесть, что матрица $v_1V_1^{-1}$ — целочисленная.

Существование достаточно большого множества матриц $A \in \Delta(\mathcal{F})$, для которых имеет место сравнение (14), непосредственно очевидно.

Покажем обратное, а именно, что изотропное пространство, соответствующее Г-рациональной компоненте $\mathcal{F}$, является рациональным подпространством. Запишем матрицы A, принадлежащие подгруппе *) $\Delta_0(\mathcal{F})$ группы $\Delta(\mathcal{F})$, в основном базисе и положим $A = E + B$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ подпространство, порожденное векторами-столбцами всех матриц B. Очевидно, построенное таким способом подпространство будет рациональным. Мы должны теперь показать, что оно является изотропным подпространством и именно тем, которое соответствует взятой нами компоненте. С этой целью заметим, что хотя конструкция этого подпространства по группе $\Delta(\mathcal{F})$ зависит от некоторого базиса, построенное подпространство на самом деле не зависит от базиса. Следовательно, нам достаточно показать, что пространство $\mathfrak{B}$ является искомым изотропным подпространством хотя бы для одного базиса.

Выберем базис так, чтобы выполнялось соотношение (9). Для этого случая наше утверждение непосредственно очевидно. Таким образом, мы показали, что между Г-рациональными компонентами и рациональными изотропными подпространствами существует взаимно однозначное соответствие.

Легко видеть, далее, что Г-эквивалентным рациональным компонентам соответствуют Г-эквивалентные изотропные подпространства.

Из сказанного вытекает следующий рецепт построения графа для группы Г.

Рассмотрим подпространство Q^{2p}, снабженное кососимметрическим скалярным произведением. Обозначим через Г группу всех целочисленных симплектических преобразований пространства Q^{2p}. Отнесем каждому классу эквивалентных изотропных подпространств пространства Q^{2p} (в том числе и нулевому подпространству) точку на плоскости. Условимся две точки A и B соединять отрезком со стрелочкой, направленной от A к B, если любое подпространство, соответствующее

*) Подгруппа $\Delta_0(\mathcal{F})$ выделяется условиями $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$.

точке A, содержится в некотором подпространстве, соответствующем точке B.

Полученный граф описывает, как ясно из предыдущего, структуру аналитического расширения фактор-пространства H_p/Γ.

Легко показать, что граф, соответствующий модулярной группе Зигеля, состоит из $p+1$ точки $A_0, A_1, \ldots, A_p$, причем любые две из этих точек A_k и A_s соединены отрезком, направленным от A_k к A_s, если $k < s$ и от A_s к A_k, если $s < k$. Отметим, что точка A_k соответствует k-мерным изотропным подпространствам.

Очевидно, что компонента, соответствующая A_k, аналитически эквивалентна H_{p-k} и что индуцированная на ней дискретная группа есть опять модулярная группа Зигеля соответствующей размерности.

Покажем теперь, что пространство M для модулярной группы Зигеля компактно. Доказательство основано на одном результате К. Л. Зигеля о строении фундаментальной области для модулярной группы.

Обозначим через $\Omega_p(u)$, где u — положительное вещественное число, совокупность всех $Z = X + iY \in H_p$ следующего вида:

$$|x_{ij}| \leqslant u, \quad |w_{ij}| \leqslant u \text{ при } i < j, \quad w_{ij} = 0 \text{ при } i > j,$$
$$w_{ii} = 1, \quad ud_{r+1} \geqslant d_r > 0, \quad r = 1, \ldots, p-1, \quad ud_1 > 1,$$

где $X = (x_{ij})$, $Y = W'\mathcal{D}W$, $W = (w_{ij})$ — треугольная матрица, $\mathcal{D}$ — диагональная матрица с элементами $d_1, \ldots, d_p$.

Лемма Зигеля. *Существует фундаментальная область H_p/Γ_p, содержащаяся в области $\Omega_p(u_p)$ при некотором $u_p > 0$.* (См. Зигель [3] или А. Картан [2], сообщение 3.)

Покажем с помощью этой леммы, что пространство M компактно.

Очевидно, достаточно проверить для модулярной группы Зигеля выполнение свойства A (см. § 9).

Пусть $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \ldots$ — бесконечная последовательность точек H_p. В силу леммы Зигеля можно, не ограничивая общности, принять, что $Z^{(k)} \in \Omega_p(u_p)$ при всех $k \geqslant 0$. Положим

$$Z^{(k)} = X^{(k)} + iY^{(k)}; \quad Y^{(k)} = W^{(k)}\mathcal{D}^{(k)}W^{(k)}.$$

Ясно, что всегда можно выделить подпоследовательность, для которой существует такое r, что $\lim\limits_{k\to\infty} d_{r+1}^{(k)} = \infty$, а $d_r^{(k)}$ ограничено. Из этой подпоследовательности мы можем выбрать подпоследовательность, для которой существуют пределы $X^{(k)}$, $W^{(k)}$, $d_1^{(k)}, \ldots, d_k^{\prime(k)}$ при $k \to \infty$. Точки этой подпоследовательности снова обозначим через $Z^{(k)}$.

Положим

$$Z^{(k)} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} Z_{11}^{(k)} & Z_{12}^{(k)} \\ Z_{21}^{(k)} & Z_{22}^{(k)} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ p-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & p-r \end{array} & \end{array}.$$

Очевидно, существуют конечные пределы для $Z_{11}^{(k)}$, $Z_{12}^{(k)}$, $Z_{21}^{(k)}$ при $k \to \infty$. Заметим далее, что отображение

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \to Z_{11}$$

есть проектирование на компоненту. Следовательно, надо ожидать, что наша последовательность сходится к точке компоненты вида

$$T = \lim_{k\to\infty} Z_{11}^{(k)}.$$

Пользуясь леммой 4 § 6, покажем, что это действительно так. Положим

$$U_n = \begin{pmatrix} Z^{(n)} \\ E \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} Z^{(0)} \\ N \end{pmatrix},$$

$$Z^{(0)} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда (в обозначениях § 6)

$$\lim_{n\to\infty} B(U_n, U_0) = W(U_0, U_0),$$

$$\text{где } B(U_n, U_0) = U_0^* J U_n (U_n^* J U_n)^{-1} U_n^* J U_0,$$

$$W(U_0, U_0) = U_0^* J U_0 = \begin{pmatrix} \bar{T} - T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наше утверждение доказано.

ГЛАВА IV

АВТОМОРФНЫЕ ФОРМЫ

В настоящей главе изучаются автоморфные формы для дискретных групп аналитических автоморфизмов классических областей.

В § 14 содержатся вспомогательные факты о дискретных подгруппах групп Ли.

В § 16 дан основной результат настоящей главы — оценка размерности пространства автоморфных форм, из которой следует теорема об алгебраических соотношениях. Эта оценка основывается на предварительном изучении некоторых рядов в областях Зигеля, чему посвящен § 15.

В § 17 изучаются автоморфные формы. В конце § 17 дан очерк метода Сельберга для вычисления размерности пространства автоморфных форм данного веса.

§ 14. Некоторые замечания о дискретных подгруппах групп Ли

В настоящем параграфе устанавливаются некоторые леммы, которые будут применяться в следующих параграфах.

Лемма 1. *Пусть G — некоторая группа Ли*, Γ — *дискретная подгруппа группы G, фактор-пространство G/Γ имеет конечный объем. Пусть, кроме того, $g(t)$ — произвольная замкнутая некомпактная однопараметрическая подгруппа группы G. Тогда в группе Γ содержится бесконечное множество элементов вида $g_1 g(t) g_2$, где g_1 и g_2 принадлежат произвольно малой окрестности единицы в группе G.*

Доказательство. Мы используем сейчас принцип Дирихле в следующей форме. Пусть X — топологическое пространство с мерой; Γ — дискретная группа унимодулярных, т. е. сохраняющих меру преобразований пространства X; мера $\mu(X/\Gamma)$ фундаментальной области X/Γ группы Γ конечна. Если Q — измеримое подмножество X и $\mu(Q) \geqslant N\mu(X/\Gamma)$, то существует по крайней мере N таких элементов группы Γ, что множество $Q \cap \gamma(Q)$ не пусто.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству леммы. В качестве X возьмем пространство группы G. Сопоставим каждому элементу $\gamma \in \Gamma$ преобразование $g \to \gamma g$, где $g \in G$.

Пусть U — достаточно малая окрестность единицы группы G, $Q(U) = Ug(t)$, $-\infty < t < +\infty$. Объем $Q(U)$ бесконечен, поскольку $g(t)$ некомпактная подгруппа. Существуют такие $\gamma \in \Gamma$, что при некотором $g \in Q(U)$ (своем для каждого γ) $\gamma g \in Q(U)$.

Пусть $g_1, g_2 \in Q(U)$. Представим их в виде $g_1 = u_1 g(t_1)$, $g_2 = u_2 g(t_2)$, где $u_1, u_2 \in U$. Обозначим через $\rho(g_1, g_2)$ нижнюю грань модуля $|t_1 - t_2|$ по всем указанным представлениям. Из дискретности группы Γ вытекает, что если окрестность U достаточно мала, то

$$\inf_{\substack{g \in Q(U) \\ \gamma g \in Q(U)}} \rho(g, \gamma g) = \delta > 0.$$

Обозначим через $R(\tau)$ совокупность таких $g \in Q(U)$, что $\rho(g(\tau), g) < \frac{\delta}{2}$. Рассмотрим множество $R_\tau = \sum_{m=1}^{\infty} R(m\tau)$. Объем R_τ бесконечен. Поэтому существует такое $\gamma \in \Gamma$, что при некотором $g = u_1 g(t_1) \in R_\tau$ имеем $\gamma g = u_2 g(t_2) \in R_\tau$, откуда $\gamma = u_1 g(t_1 - t_2) u_2^{-1}$, где $u_1, u_2 \in U$. Из определения R_τ ясно, что $|t_1 - t_2| \geqslant \tau - \delta$. Остается заметить, что число τ можно взять сколь угодно большим и что δ с уменьшением U, очевидно, может только убывать. Лемма доказана.

На плоскости Лобачевского, в отличие от обычной плоскости, существуют дискретные подгруппы Γ с некомпактной фундаментальной областью, но обладающие конечной площадью. В связи с этим возникает вопрос, чем характеризуются такие группы Ли G, у которых из конечности инвариантного объема фактор-пространства G/Γ следует, что G/Γ компактно. К числу таких групп принадлежат, как легко проверить, коммутативные группы. Аналогичным свойством обладают нильпотентные группы Ли. Не касаясь доказательства этого факта, мы рассмотрим важный для дальнейшего частный случай.

Пусть G состоит из пар (b, a), где b — m-мерный вектор, а a — n-мерный вектор со следующим законом композиции:

$$(b_1, a_1)\times(b_2, a_2)=(b_1+b_2, a_1+a_2+Q(b_1, b_2)),$$

здесь $Q(b_1, b_2)$ — билинейная кососимметрическая векторная форма, которая невырождена в следующем смысле: для любого $b_1\neq 0$ существует такое b_2, что $Q(b_1, b_2)\neq 0$.

Совокупность элементов вида $(0, a)$ образует нормальный делитель R, изоморфный n-мерному векторному пространству над полем действительных чисел. Фактор-группа G/R изоморфна m-мерному векторному пространству над полем действительных чисел.

Лемма 2. *Пусть Γ — дискретная подгруппа группы G, $\Gamma_R=\Gamma\cap R$, $\Gamma_1=\Gamma/\Gamma_R$. Если фактор-пространство G/Γ имеет конечный объем, то Γ_R — группа с n образующими, а Γ_1 — группа с m образующими, причем для любых $b_1, b_2\in\Gamma_1$ имеем $2Q(b_1, b_2)\in\Gamma_R$.*

Доказательство. Покажем вначале, что Γ_1 дискретна. Действительно, в противном случае существует последовательность $\gamma_n=(b_n, a_n)\in\Gamma$ такая, что $b_n\to 0$. Без ограничения общности можно предположить, что $b_n=t_nb'_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b'_n=$ $=b'\neq 0$. С помощью леммы 1 легко доказать, что существует такое $\gamma_0=(b_0, a_0)\in\Gamma$, что $Q(b_0, b')\neq 0$. С другой стороны,

$$[\gamma_0, \gamma_n]=(0, 2Q(b_0, b_n))\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Следовательно, $Q(b_0, b_n)=0$ для всех достаточно больших n, откуда $Q(b_0, b')=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}Q(b_0, b_n)=0$.

Полученное противоречие показывает, что Γ_1 дискретна. Согласно лемме 1, для любого $a\neq 0$ в Γ имеется бесконечное число элементов вида

$$(b_1, a_1)(0, ta)(b_2, a_2)=(\tilde{b}, ta+\tilde{a}),$$

где b_1 и b_2, а значит, и $\tilde{b}$ сколь угодно малы. Поскольку Γ'

дискретна, то при достаточно малом $\tilde{b}$ этот элемент принадлежит Γ_R. Легко видеть, что существует n линейно независимых элементов такого вида. Аналогичным способом проверяется, что Γ' — группа с m образующими.

§ 15. Ряды Фурье — Якоби

Пусть S — некоторая область Зигеля, V, $L_t(u, v)$ и Δ имеют то же значение, что в § 3, $\mathcal{F}$ — база области S, Γ — некоторая дискретная группа квазилинейных преобразований области S. Как и в § 12, мы будем предполагать, что фактор-пространство Δ/Γ_Δ, где $\Gamma_\Delta = \Delta \cap \Gamma$, компактно.

Обозначим через Δ_0 коммутативный нормальный делитель группы Δ, состоящий из преобразований вида

$$z \to z + a, \quad u \to u, \quad t \to t. \tag{1}$$

Как было доказано выше (см. § 14), фактор-пространство Δ/Γ_Δ компактно тогда и только тогда, когда число образующих в абелевых группах $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Delta_0$ и Γ_Δ/Γ_0 соответственно равно размерности групп Δ_0 и Δ/Δ_0, т. е. n и $2m$.

Как мы видели в § 12, любую Γ-автоморфную форму $f(w)$ можно разложить в ряд Фурье

$$f(w) = \sum_{\rho} \psi_\rho(u, t)\, e^{2\pi i (\rho, z)}, \tag{2}$$

где ρ пробегает решетку, взаимную к решетке Γ_0.

Дальнейшее изучение автоморфных форм в областях Зигеля основано на детальном исследовании коэффициентов Фурье $\psi_\rho(u, t)$ в ряде (2).

Мы покажем, что функции $\psi_\rho(u, t)$ как функции от u являются якобиевыми функциями. В связи с этим ряд (2) мы будем называть рядом Фурье — Якоби.

Отметим следующее нужное для дальнейшего соотношение.

Пусть (c_1, a_1) и (c_2, a_2) принадлежат Γ_Δ, тогда

$$2Q(c_1, c_2) \in \Gamma_0, \tag{3}$$

где $Q(c_1, c_2)$ определено в § 3.

Действительно,

$$[(c_1, a_1), (c_2, a_2)] = (0, 2Q(c_1, c_2)).$$

Из функционального уравнения для автоморфной формы вытекает следующее соотношение:

$$f(z+a+2iL_t(u,\ c(t))+ \\ +iL_t(c(t),\ c(t)),\quad u+c(t),\ t) = f(z,\ u,\ t) \tag{4}$$

при всех $(c,\ a) \in \Gamma_\Delta$. Отсюда для функций $\psi_\rho(u,\ t)$ получаем

$$\psi_\rho(u+c(t),\ t) = \psi_\rho(u,\ t)\, e^{-2\pi i(\rho,\ a+2iL_t(u,\ c(t))+iL_t(c(t),\ c(t)))}. \tag{5}$$

Выражение, стоящее в показателе, является линейной функцией от u. Представим его в виде

$$(b_\rho(t),\ u)+\beta_\rho(t), \tag{6}$$

где $b_\rho(t)$ и $\beta_\rho(t)$ определяются из следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &(b_\rho(t),\ u) = 4\pi(\rho,\ L_t(u,\ c(t))), \\ &\beta_\rho(t) = 2\pi(\rho,\ L_t(c(t),\ c(t)) - 2\pi i(\rho,\ a)). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Разумеется, $b_\rho(t)$ и $\beta_\rho(t)$ зависят от c.

Пусть $c^{(1)},\ \ldots,\ c^{(2m)}$ образуют базис решетки $\Gamma' = \Gamma_\Delta/\Gamma_1$. Соотношение (5) для базиса можно представить в виде

$$\psi_\rho(u+c^{(k)}(t),\ t) = \psi_\rho(u,\ t)\, e^{\left(b_\rho^{(k)}(t),\ u\right)+\beta_\rho^{(k)}(t)}, \tag{8}$$

где $b_\rho^{(k)}(t)$ и $\beta_\rho^{(k)}(t)$ определяются из (7) по $c^{(k)}(t)$.

Напомним, что **якобиевыми** функциями $\psi(u)$ называются аналитические в m-мерном комплексном пространстве функции, для которых имеют место соотношения

$$\psi(u+c_k) = \psi(u)\, e^{(b_k,\ u)+\beta_k},\quad k=1,\ \ldots,\ 2m, \tag{9}$$

где $c_1,\ \ldots,\ c_{2m}$ — некоторая система вещественно линейно независимых векторов. Матрица C, столбцы которой суть векторы $c_1,\ \ldots,\ c_{2m}$, называется **матрицей периодов**.

Известно, что не при любом выборе векторов c_k и b_k существует функция, удовлетворяющая соотношениям (9).

Напомним (см. Зигель [1], стр, 50—54), что для существования функций, удовлетворяющих (9), необходимо выполнение следующих условий:

α) все элементы матрицы $R = \frac{1}{2\pi i}(B'C - C'B)$ — целые числа (здесь B — матрица со столбцами $b_1,\ \ldots,\ b_{2m}$);

β) эрмитова матрица $H = \frac{1}{i} G'R\bar{G}$ неотрицательно определена (G находится из условий $CG = E_m$, $C\bar{G} = 0$).

Далее, размерность пространства якобиевых функций с данными c_k, b_k, β_k всегда конечна и не превосходит $2^m \sqrt{d_R}$ (d_R — наибольший общий делитель миноров матрицы R максимального возможного порядка, при котором они не все равны нулю, в частности, если R — невырождена, то d_R — определитель матрицы R).

Если матрица $H = i^{-1}G'R\bar{G}$ положительно определена, то размерность пространства якобиевых функций равна $2^m \sqrt{d_R}$ (легко проверить, что в этом случае матрица R невырождена).

Покажем, что выполняется условие α). С помощью (7) мы получаем, что

$$2\pi i r_{sk} = (b_s, c_k) - (b_k, c_s) = 4\pi (\rho, L_t(c^{(k)}(t), c^{(s)}(t))) -$$
$$- 4\pi (\rho, L_t(c^{(s)}(t), c^{(k)}(t))) = 4\pi i (\rho, Q(c_s, c_k))$$

(r_{sk} — элемент матрицы R, стоящий на пересечении s-й строки и k-го столбца). Целочисленность r_{sk} вытекает из (3).

Перейдем к проверке условия β). Представим $L_t(u, v)$ в виде

$$L_t^{(1)}(u, v) + L_t^{(2)}(u, v),$$

где $L_t^{(1)}(u, v)$ — симметрическая, а $L_t^{(2)}(u, v)$ — эрмитова части формы $L_t(u, v)$. Как известно, такое представление единственно. Обозначим через W_t ($t \in \mathcal{F}$) совокупность всех векторов ρ n-мерного вещественного пространства, для которых

$$(\rho, L_t^{(2)}(u, u)) \geqslant 0 \text{ при любом } u. \tag{10}$$

Мы покажем, что β) имеет место тогда и только тогда, когда $\rho \in W_t$. Заметим, что соотношение (7) каждой вектор-функции $c(t)$ из нашего семейства ставит в соответствие некоторую аналитическую на $\mathcal{F}$ вектор-функцию $b_\rho(t)$, причем если

$$c'(t) \to b'_\rho(t), \quad c''(t) \to b''_\rho(t),$$

то

$$(\mu_1 c' + \mu_2 c'')(t) \to \mu_1 b'_\rho(t) + \mu''_2(t)$$

при любых вещественных μ_1, μ_2.

Следовательно, связь между $c(t)$ и $b_\rho(t)$ можно представить в виде

$$b_\rho(t) = K_\rho^{(1)}(t)\, c(t) + K_\rho^{(2)}(t)\, \overline{c(t)}, \tag{11}$$

где $K_\rho^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$, — квадратные комплексные матричные функции от t, зависящие от ρ линейно.

Аналитичность матричных функций $K_\rho^{(i)}(t)$, вообще говоря, не имеет места.

Подставляя в (7) выражение для $b_\rho(t)$, легко убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \left(K_\rho^{(1)}(t)\, c(t),\ u\right) &= 4\pi\left(\rho,\ L_t^{(1)}(u,\ c(t))\right), \\ \left(K_\rho^{(2)}(t)\, \overline{c(t)},\ u\right) &= 4\pi\left(\rho,\ L_t^{(2)}(u,\ c(t))\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Легко проверить, что матрица $K_\rho^{(2)}(t)$ эрмитова.

Из (12) вытекает, что $K_\rho^{(2)}(t)$ неотрицательна тогда и только тогда, когда $\rho \in W_t$.

Остается показать, что указанная в β) матрица H с точностью до положительного вещественного множителя равна $K_\rho^{(2)}(t)$.

Подставляя в формулу, определяющую H, выражение R через B и C, мы получим

$$\begin{aligned} H &= -(2\pi)^{-1} G' (B'C - C'B)\, \overline{G} = (2\pi)^{-1} B \overline{G} = \\ &= (2\pi)^{-1}\left(K_\rho^{(1)}(t)\, C + K_\rho^{(2)}(t)\, \overline{C}\right) \overline{G} = (2\pi)^{-1} K_\rho^{(2)}(t). \end{aligned}$$

Здесь использованы соотношения:

$$CG = \overline{C}\overline{G} = E_m, \quad CG = 0.$$

Из наших рассуждений непосредственно вытекает следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть Γ — дискретная группа квазилинейных преобразований области Зигеля S, причем фактор-пространство $\Delta/(\Gamma \cap \Delta)$ компактно. Если для всех t из некоторого открытого подмножества области $\mathcal{F}$ выпуклая оболочка векторов $L_t(u, u)$ совпадает с $\overline{V}'$, то любая Γ-автоморфная форма $f(w)$ будет ограничена во всякой цилиндрической области.*

Доказательство. Разложим $f(w)$ в ряд Фурье — Якоби. Из наших рассмотрений вытекает, что при выполнении условий леммы коэффициенты Фурье $\psi_\rho(u, t) \equiv 0$, если $\rho \overline{\in} \overline{V'}$. Отсюда и из леммы 2 § 12 главы III следует, что функция $f(w)$ ограничена в любой цилиндрической области.

Впервые подобного рода «эффект», правда, в другом случае, был обнаружен немецким математиком Кехером, установившим следующую замечательную теорему (Кехер [2]):

Теорема Кехера. *Пусть H — верхняя полуплоскость Зигеля, т. е. совокупность всех комплексных симметрических матриц $Z = X + iY$, где Y положительно определена. Обозначим через* Γ *группу преобразований области H вида*

$$Z \to A'ZA + S,$$

где A — любая целочисленная унимодулярная матрица, а S — любая целочисленная симметрическая матрица.

Тогда Γ-инвариантная аналитическая в H функция будет ограничена во всякой области, состоящей из точек вида $Z + iT$, где $Z \in H$, а T — произвольная положительно определенная симметрическая матрица.

Доказанная выше лемма показывает, что «эффект» Кехера имеет место, как правило, для областей Зигеля второго и третьего рода.

Мы докажем сейчас лемму, включающую как частный случай теорему Кехера. В этой лемме содержатся условия, которые надо наложить на дискретную группу аффинных преобразований области Зигеля S первого рода для того, чтобы имел место «эффект» Кехера.

Как известно, аффинные преобразования области Зигеля первого рода S имеют вид

$$z \to Az + a, \tag{13}$$

где A — матрица аффинного преобразования конуса V в себя, a — произвольный вещественный вектор. Следовательно, группу всех аффинных преобразований S в себя можно рассматривать как группу пар (A, a) с законом композиции

$$(A_1, a_1) \times (A_2, a_2) = (A_1A_2, a_1 + A_1a_2). \tag{14}$$

Обозначим через Δ подгруппу группы G, состоящую из элементов вида (E, a), Пусть G' обозначает совокупность всех аффинных преобразований конуса V, а G'_0 означает подгруппу G', состоящую из унимодулярных аффинных преобразований конуса V.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $G \to G'$. Если $\Gamma_\Delta = \Gamma \cap \Delta$ имеет столько образующих, какова размерность группы Δ, то $\Gamma' = \Gamma/\Gamma_\Delta$ — подгруппа группы G'_0. Действительно, каждому (A, a) соответствует следующий автоморфизм решетки Γ_Δ:

$$(A, a)(0, b)(A, a)^{-1} = (0, Ab).$$

Очевидно, определитель матрицы автоморфизма решетки равен ± 1.

Мы будем предполагать, что S — произведение однородных областей Зигеля 1-го рода, перечисленных в § 1 гл. I.

Лемма 2. *Пусть Γ — дискретная группа линейных преобразований области S такая, что фактор-пространство G'_0/Γ', где $\Gamma' = \Gamma/\Gamma_\Delta$, имеет конечный объем. Тогда любая Γ-инвариантная функция ограничена во всякой цилиндрической области.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ — некоторая аналитическая Γ-инвариантная функция. Разложим ее в ряд Фурье:

$$f(z) = \sum_\rho \lambda_\rho e^{2\pi i (\rho, z)}, \quad (\rho, z) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k z_k. \tag{15}$$

Заметим, что между коэффициентами λ_ρ существует соотношение, вытекающее из инвариантности $f(z)$ относительно группы Γ. Пусть $(A, a) \in \Gamma$, тогда $f(Az + a) = f(z)$, и следовательно,

$$\lambda_{A'\rho} = \lambda_\rho e^{2\pi i (\rho, a)}, \tag{16}$$

где A' определено из условия $(Ay, \rho) = (y, A'\rho)$. Условимся в дальнейшем векторы ρ и $A'\rho$ называть ассоциированными. Лемма будет доказана, если мы покажем, что $\lambda_{\rho_0} = 0$ для любого $\rho_0 \overline{\in} \overline{V'}$. Будем вести доказательство этого факта от противного. Пусть $\lambda_{\rho_0} \neq 0$ при некотором $\rho_0 \overline{\in} \overline{V'}$. Обозначим через y_0 произвольную точку V и зафиксируем ее. Согласно равенству Парсеваля

$$\sum_\rho |\lambda_\rho|^2 e^{-4\pi(\rho, y_0)} < \infty.$$

Обозначим через M_0 совокупность различных ρ, ассоциированных с ρ_0. Из (16) получаем

$$\sum_{\rho \in M_0} e^{-4\pi(\rho, y_0)} < \infty. \tag{17}$$

Пользуясь явным описанием областей S (см. § 1 гл. I), легко проверить, что в группе G' существует такая однопараметрическая подгруппа $g(\tau)$, что $\lim\limits_{\tau \to \infty} (g(\tau)\rho_0, y_0) = -\infty$. Согласно лемме 1 § 14 существует бесконечное число элементов группы Γ' вида $B_1 g(\tau) B_2$, $\tau > 0$, где B_1 и B_2 сколь угодно близки к единице. Нетрудно показать, что при достаточно малых B_1 и B_2

$$\lim_{\tau \to +\infty} (B_1 g(\tau) B_2 \rho_0, y_0) = -\infty.$$

Следовательно, существует такая последовательность элементов A_p группы Γ, что

$$\lim_{p \to \infty} \left(A'_p \rho_0, \rho_0\right) = -\infty.$$

Это, очевидно, противоречит (17). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству лемм, с помощью которых в следующем параграфе будет произведена оценка размерности пространства автоморфных форм.

Лемма 3. *Пусть $S(Q_1, r_1) \subset S(Q_2, r_2)$ — две цилиндрические области, $Q_1 \subset Q_2$, $r_1 - r_2 \in V$.*

Для любой «аналитической в бесконечности» Γ-автоморфной формы $f(w)$, все коэффициенты Фурье которой $\psi_\rho(u, t)$ равны нулю при $|\rho| < \tau$, имеет место неравенство

$$\sup_{w \in S(Q_1, r_1)} |f(w)| < c_1 e^{-c_2 \tau} \sup_{w \in S(Q_2, r_2)} |f(w)|, \tag{18}$$

где c_1 и c_2 зависят только от $r = r_1 - r_2$ и не зависят от τ.

Доказательство. Непосредственным интегрированием можно проверить справедливость следующей формулы:

$$\left.\begin{aligned} f(z, u, t) &= \frac{1}{\operatorname{mes} L} \int f(z - x - ir)\, \mathcal{D}(x; r, \tau)\, dx, \\ \mathcal{D}(x; r, \tau) &= \sum_{\rho \in V', |\rho| \geqslant \tau} e^{2\pi i (\rho, x + ir)}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где L — фундаментальный параллелепипед решетки Γ_0.

Из (19) следует:

$$\sup_{w\in S(Q_1, r_1)} |f(w)| < \sup_{w\in S(Q_2, r_2)} |f(w)| \frac{1}{\operatorname{mes} L} \int\limits_L |\mathcal{D}(x;\ r,\ \tau)|\,dx. \tag{20}$$

Остается оценить интеграл, стоящий в правой части (20). Мы имеем

$$\frac{1}{\operatorname{mes} L} \int\limits_L |\mathcal{D}(x;\ r,\ \tau)|^2\,dx \leqslant \sqrt{\frac{1}{\operatorname{mes} L} \int\limits_L |\mathcal{D}(x;\ r,\ \tau)|^2\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{|\rho|\geqslant\tau,\ \rho\in\overline{V}'} e^{-4\pi(\rho,\ r)}} = \sqrt{\sum_k \lambda(k)\, e^{-4\pi k}},$$

где $\lambda(k)$ означает число решений уравнения

$$(\rho,\ r) = k,\quad \rho\in\overline{V}',\quad |\rho| \geqslant \tau.$$

Из того, что $r\in V$, следует существование таких положительных констант c_3 и c_4, что $c_3|\rho| < (\rho,\ r) < c_4|\rho|$. Отсюда: 1) $\lambda(k) = O(k^n)$, где n — размерность конуса V; 2) $\lambda(k) = 0$, если $k < c_5\tau$, где c_5 — некоторая константа.

Следовательно,

$$\frac{1}{\operatorname{mes} L} \int\limits_L |\mathcal{D}(x;\ r,\ \tau)|\,dx \leqslant \sqrt{\sum_{k > c_5\tau} c_6 k^n e^{-4\pi k}} \leqslant c_1 e^{-c_2\tau}. \tag{21}$$

Из (21) и (22) непосредственно следует утверждение леммы.

Следующая лемма представляет собой основу обычного метода оценки размерности пространства автоморфных форм в случае, когда фундаментальная область компактна.

Лемма 4. *Пусть A — некоторая область в комплексном N-мерном пространстве; B — область, содержащаяся строго внутри A, т. е. $\overline{B}\subset A$; E — некоторое линейное пространство аналитических функций $f(z)$. Если существует такая константа M, что*

$$\sup_{z\in A} |f(z)| \leqslant M \sup_{z\in B} |f(z)| \quad \textit{для любой} \quad f(z)\in E, \tag{22}$$

то размерность E конечна и не превосходит $\gamma(\ln M)^N$, причем γ зависит только от A и B.

Доказательство. Обозначим через 2ρ расстояние от B до границы A. Выберем в B конечную систему P точек $z_1, \ldots, z_q$, обладающую следующим свойством: для всякой точки $z \in B$ существует такая точка $z_k \in P$, что $|z - z_k| < \rho$.

Очевидно, для того чтобы функция $f(z)$ имела в точках $z_1, \ldots, z_q$ нули порядка не меньше m, достаточно наложить на функцию $f(z)$ qm^n линейных однородных соотношений. Таким образом, если бы размерность E была больше qm^n, то в E содержалась бы функция, имеющая в точках $z_1, \ldots, z_q$ нули порядка не меньше, чем m.

Покажем, используя условия леммы, что в E не может существовать функции $f(z)$, имеющей в точках $z_1, \ldots, z_q$ нули порядка строго большего, чем $\frac{\ln M}{\ln 2}$. Предположим противное. Обозначим через z_0 точку, в которой модуль $|f(z)|$ достигает максимума в $\overline{B}$. Существует точка $z_k \in P$, для которой $|z_0 - z_k| < \rho$. Очевидно, точка $z_k + \lambda(z_0 - z_k)$ при любом комплексном λ, $|\lambda| \leqslant 2$, содержится в A.

Функция

$$\psi(\lambda) = \lambda^{-m} f(z_k + \lambda(z_0 - z_k)), \quad m = \left[\frac{\ln M}{\ln 2}\right] + 1,$$

регулярна в круге $|\lambda| \leqslant 2$ и, следовательно, достигает своего максимума на границе этого круга. Значит, в A существует такая точка z', что

$$|f(z')| \geqslant 2^m \max_{z \in B} |f(z)|.$$

Следовательно,

$$\max_{z \in A} |f(z')| \geqslant 2^m \max_{z \in B} |f(z)|, \quad m = \left[\frac{\ln M}{\ln 2}\right] + 1. \tag{23}$$

Но (22) и (23) противоречат друг другу. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Прежде чем формулировать лемму 5, введем некоторые определения. Обозначим через G совокупность всех квазилинейных преобразований рассматриваемой области Зигеля S следующего вида:

$$z \to z + a(u, t), \quad u \to B(t)u + b(t), \quad t \to g(t). \tag{24}$$

Через G' обозначим фактор-группу G/Δ.

Лемма 5. *Пусть Γ — такая дискретная подгруппа группы G, что фактор-пространства G'/Γ' и Δ/Γ_Δ компактны, где $\Gamma_\Delta = \Gamma \cap \Delta$, $\Gamma' = \Gamma/\Gamma_\Delta$. Пусть, кроме того, $E(\rho, \mu)$ — совокупность всех аналитических в $\mathcal{T} \times C^m$ функций $\psi_\rho(n, t)$, могущих стоять в качестве коэффици-*

ента перед $e^{2\pi i(\rho, z)}$ *в ряде Фурье какой-либо* Γ-*автоморфной формы веса* μ. *Размерность пространства* $E(\rho, \mu)$ *конечна и не превосходит*

$$c(|\rho| + \mu)^{m+k}, \tag{25}$$

где m — *комплексная размерность пространства* u, *а* k — *комплексная размерность* $\mathcal{F}$, c — *константа, зависящая только от* Γ.

Доказательство. Пусть

$$z \to z + a(u, t), \quad u \to B(t)u + b(t), \quad t \to g(t) \tag{26}$$

некоторое квазилинейное преобразование области S, принадлежащее дискретной группе Γ. Из функционального уравнения автоморфной формы вытекает:

$$j^{-\mu}(w) \sum_\rho \psi_\rho(u, t)\, e^{2\pi i(\rho, z)} = \\ = \sum_\rho \psi_\rho(B(t)u + b(t), g(t))\, e^{2\pi i(\rho, z + a(u, t))},$$

где $j(w)$ — якобиан преобразования (26). Непосредственно очевидно, что $j(w)$ зависит только от t и от g, откуда мы получаем для функций $\psi_\rho(u, t)$ следующее функциональное уравнение:

$$\psi_\rho(u, t) = \psi_\rho(B(t)u + b(t), g(t))\, e^{2\pi i(\rho, a(u, t))} (\chi_g(t))^\mu, \tag{27}$$

$\chi_g(t)$ означает якобиан $j(w)$ преобразования (26). Кроме того, как мы видели раньше, функции $\psi_\rho(u, t)$ удовлетворяют функциональному уравнению (8). Из (27) и (8) следует, что функции $\psi_\rho(u, t)$ можно рассматривать как формы, автоморфные относительно некоторой дискретной группы K, аналитические в области $\mathcal{F} \times C^m$. Из условий леммы вытекает, что фактор-пространство $\mathcal{F} \times C^m/K$ компактно.

Поэтому мы можем применить обычный метод оценки размерности пространства автоморфных форм, который основан на лемме 4, доказанной выше.

Обозначим через B фундаментальную область для группы K. Пусть A — некоторое открытое множество в $\mathcal{F} \times C^m$, содержащее фундаментальную область B вместе с ее замыканием.

Обычным методом с помощью функциональных уравнений (8) и (27) мы можем получить следующую оценку:

$$\sup_{(u,\,t)\in A} |\psi_\rho(u,\,t)| \leqslant e^{c_1(|\rho|+\mu)} \sup_{(u,\,t)\in B} |\psi_\rho(u,\,t)|. \tag{28}$$

Из этой оценки и из леммы 4 сразу вытекает, что размерность пространства $E(\rho,\,\mu)$ конечна и, более того, что она не превосходит

$$c(|\rho|+\mu)^{m+k},$$

где c зависит только от группы Γ. Лемма 5 полностью доказана.

§ 16. Другое доказательство теоремы об алгебраических соотношениях

В настоящем параграфе дано другое доказательство теоремы об алгебраических соотношениях.

Хорошо известно (Зигель [1], стр. 77), что теорема об алгебраических соотношениях является простым следствием следующей оценки размерности пространства автоморфных форм

$$N_\mu \leqslant c\mu^N, \tag{1}$$

где N_μ — размерность пространства автоморфных форм веса μ, N — комплексная размерность области существования этих автоморфных форм.

Отметим, что полученная этим путем теорема об алгебраических соотношениях несколько слабее, чем та, которую мы доказали в предыдущей главе. Дело в том, что при выводе теоремы об алгебраических соотношениях из оценки (1) (Зигель [1]) автоморфные функции определяются как отношения автоморфных форм одинакового веса. Прямое определение автоморфных функций, которое было дано в § 10, во многих случаях удобней, кроме того, оно лучше с точки зрения логической законченности. Однако доказательство теоремы об алгебраических соотношениях с помощью оценки (1) представляет интерес, поскольку оно не требует знания теории аналитических нормальных пространств.

Отметим также, что дискретные группы, для которых ниже будет установлена оценка (1), определяются формально несколько иначе, чем нормальные дискретные группы.

Можно показать, что модулярная группа Зигеля и ее обобщения, т. е. все абелевы модулярные группы (И. И. Пятецкий-Шапиро [11]), удовлетворяют этим новым предположениям.

Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая классическая область, Γ — дискретная группа ее аналитических автоморфизмов.

Определение. Группа Γ называется квазинормальной, если существует конечное число Γ-рациональных компонент $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p$, удовлетворяющих условиям:

1) существуют такие цилиндрические области $T_1, \ldots, T_p$ с основаниями в этих компонентах, что фундаментальная область $B = \mathcal{D}/\Gamma$ целиком содержится в

$$T_1 + \ldots + T_p; \tag{2}$$

2) фактор-пространство G'/Γ', где $\Gamma' = \Gamma_5(\mathcal{F})/\Gamma_3(\mathcal{F})$, компактно *);

3) существуют такие цилиндрические области $T'_1, \ldots, T'_p$, с основаниями, принадлежащими $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p$, причем $T_k \subset T'_k$, $k = 1, \ldots, p$, что для любого $\gamma \in \Gamma$

$$\left| \frac{a_l(\gamma z)}{a_k(z)} j_\gamma(z) \right| < c_1, \quad \text{если } z \in T'_k, \quad \gamma z \in T_l, \quad 1 \leqslant k, \ l \leqslant p, \tag{3}$$

где c_1 — некоторая константа ($\alpha_k(z)$ — якобиан отображения области $\mathcal{D}$ на соответствующую каноническую область Зигеля).

Перейдем теперь к определению автоморфной формы. Мы дадим это определение в форме, пригодной для любых дискретных групп аналитических автоморфизмов классических областей.

Определение. Аналитическая в $\mathcal{D}$ функция $f(z)$ называется Γ-автоморфной формой веса μ, если она удовлетворяет таким условиям:

а) $f(\gamma z)(j_\gamma(z))^\mu = f(z)$ для всех $\gamma \in \Gamma$ ($j_\gamma(z)$ — якобиан отображения $z \to \gamma z$);

б) пусть $\mathcal{F}$ — некоторая Γ-рациональная компонента; функция $\theta_{\mathcal{F}}(z) = f(z)\alpha^{-\mu}(z)$, где $\alpha(z)$ — якобиан отображения области $\mathcal{D}$ на соответствующую каноническую область

*) Определение $\Gamma_5(\mathcal{F})$ и $\Gamma_3(\mathcal{F})$ см. в § 9.

Зигеля, ограничена в любой цилиндрической области с основанием в $\mathscr{F}$.

Условие б) означает «аналитичность» функции $\Theta_{\mathscr{F}}(z)$ в точках компоненты $\mathscr{F}$. Кехер [2] показал, что условие б) для модулярной группы Зигеля выполняется автоматически. Основной причиной этого является то, что размерность компоненты, как правило, на две единицы меньше комплексной размерности самой области $\mathscr{D}$ (см. § 10). В следующем параграфе мы, пользуясь некоторыми леммами из § 15, покажем, что в большинстве случаев условие б) является следствием функционального уравнения автоморфной формы.

Перейдем теперь к доказательству оценки (1).

Теорема 1. *Пусть* Γ — *квазинормальная дискретная группа аналитических автоморфизмов некоторой классической области* $\mathscr{D}$.

Размерность пространства E_μ *автоморфных форм веса* μ *конечна и не превосходит*

$$c_2\mu^N, \tag{4}$$

где c_2 — *константа, зависящая только от* Γ, N — *комплексная размерность области* $\mathscr{D}$.

Доказательство. Обозначим через M' максимум модуля $|\Theta_{\mathscr{F}_k}(z)|$ в областях T_k и через M максимум $\Theta_{\mathscr{F}_k}(z)$ в областях T_k.

Из (3) вытекает, что для любой отличной от тождественного нуля функции $f(z) \in E_\mu$ имеет место неравенство

$$M' < Me^{c_3\mu}, \tag{5}$$

где $c_3 = \ln|c_1|$.

Функция $\Theta_{\mathscr{F}_k}(z)$ инвариантна относительно группы $\Gamma_3(\mathscr{F}_k)$. Поэтому ее можно разложить в ряд Фурье — Якоби. Из леммы 3 § 15 следует, что если все коэффициенты $\psi_\rho(u, t)$ функции $\Theta_{\mathscr{F}_k}(z)$ обращаются в нуль при условии $|\rho| \leqslant \tau$, то

$$\sup_{z \in T_k} |\Theta_{\mathscr{F}_k}(z)| < c_4 e^{-c_5\tau} \sup_{z \in T'_k} |\Theta_{\mathscr{F}_k}(z)|, \tag{6}$$

где c_4 и c_5 — некоторые константы.

Из (5) и (6) ясно, что существует такое c_6, что если при всех k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ все коэффициенты Фурье $\psi_\rho(u, t)$ функций $\Theta_{\mathscr{F}_k}(z)$ для $|\rho| < c_6\mu$ равны нулю, то $f(z) \equiv 0$.

Остается заметить, что ввиду леммы 5 § 15 для того, чтобы обратить в нуль эти коэффициенты, достаточно наложить на $f(z)$ не более, чем $c_7\mu^{n+m+k} = c_7\mu^N$ линейных однородных условий. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

§ 17. Автоморфные формы

В настоящем параграфе показывается, что условие б) определения автоморфной формы, как правило, является следствием условия а), т. е. функционального уравнения. Будет описано скалярное произведение, которое обычно вводится в пространстве автоморфных форм. В заключение мы дадим краткий очерк метода Сельберга [1] для подсчета размерности пространства автоморфных форм данного веса.

Пусть $\mathcal{D}$ — некоторая классическая область, а Γ — произвольная дискретная группа ее аналитических автоморфизмов.

Из леммы 1 § 15 непосредственно вытекает следующее предложение. Если $\mathcal{F}$ — Γ-рациональная компонента 2-го рода (см. определение в § 5), то для любой Γ-автоморфной формы функция $\Theta_{\mathcal{F}}(z)$ ограничена в любой цилиндрической области с основанием в $\mathcal{F}$.

Ясно, что если все Γ-рациональные компоненты второго рода, то условие б) является следствием условия а). Например, это имеет место, если $\mathcal{D}$ — произведение неприводимых областей первого типа, где $p \neq q$.

С помощью леммы 2 § 15 можно дать аналогичные условия в случае компонент 1-го рода. Они состоят в следующем. Пусть $\mathcal{F}$ — Γ-рациональная компонента первого рода. Если фактор-пространство $G_{10}(\mathcal{F})/\Gamma_1(\mathcal{F})$ имеет конечный объем, то функция $\Theta_{\mathcal{F}}(z)$ ограничена в любой цилиндрической области с основанием в $\mathcal{F}$ ($G_{10}(\mathcal{F})$ означает подгруппу $G_1(\mathcal{F})$, состоящую из преобразований, у которых определитель матрицы соответствующего однородного преобразования равен единице). Окончательный вывод мы можем сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Обозначим через $\mathcal{D}$ классическую область, а через Γ — некоторую дискретную группу ее аналитических автоморфизмов. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторая Γ-рациональная компонента. Предположим, что область $\mathcal{D}$ можно представить в виде*:

$$\mathcal{D}_1 \times \cdots \times \mathcal{D}_p,$$

где $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_p$ — классические области, не обязательно неприводимые, причем группа $\Gamma_1(\mathscr{F})$ содержит произведение групп:

$$\Gamma_1(\mathscr{F}_1) \times \ldots \times \Gamma_1(\mathscr{F}_p),$$

где каждая из компонент $\mathscr{F}_k$ либо 2-го рода, либо 1-го рода, но при этом фактор-пространство $G_{10}(\mathscr{F}_k)/\Gamma_1(\mathscr{F}_k)$ имеет конечный инвариантный объем. Тогда функция $\Theta_{\mathscr{F}}(z)$ ограничена в любой цилиндрической области.

Отметим наконец, что если условие теоремы выполняется для всех Г-рациональных компонент, то условие б) является следствием а). Если же условия теоремы выполняются не для всех Г-рациональных компонент, то выполнение б) достаточно потребовать только для тех компонент, для которых не выполняются условия теоремы 1.

Перейдем теперь к описанию скалярного произведения в пространстве автоморфных форм веса m.

Следуя идее Петерсена, мы определим скалярное произведение как интеграл по фундаментальной области $B = \mathscr{D}/\Gamma$.

Пусть $\rho(z)$ — непрерывная положительная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению:

$$\rho(gz) = \rho(z)\,|\,j_g(z)\,|^2 \quad \text{для всех } g \in G \tag{1}$$

(G — полная группа аналитических автоморфизмов области $\mathscr{D}$).

Такая функция $\rho(z)$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя.

Пусть f_1 и f_2 — функции, удовлетворяющие функциональному уравнению для автоморфных форм веса m. Положим

$$(f_1, f_2) = \int_B f_1 \bar{f}_2 \rho^m(z)\,dv. \tag{2}$$

Легко проверить, что интеграл (2) не зависит от выбора фундаментальной области B.

Известно, что даже не для всех автоморфных форм f существует интеграл (f, f).

Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{A}(\Gamma, m)$ — пространство автоморфных относительно данной дискретной группы Γ форм веса m;

$A(\Gamma, m)$ — пространство решений функционального уравнения для автоморфных форм, для которых $(f, f) < \infty$.

Покажем, что пространство $A(\Gamma, m)$ как гильбертово пространство полно.

Действительно, пусть последовательность функций $f_n(z) \in A(\Gamma, m)$ удовлетворяет критерию Коши, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n = n(\varepsilon)$, что при любых $n_1 > n(\varepsilon)$, $n_2 > n(\varepsilon)$

$$(f_{n_1} - f_{n_2}, f_{n_1} - f_{n_2}) < \varepsilon.$$

С помощью функционального уравнения автоморфной формы легко показать, что

$$\lim_{n_1, n_2 \to \infty} \int_{\mathscr{D}_1} |f_{n_1}(z) - f_{n_2}(z)|^2 \rho^m(z)\, dv = 0,$$

где $\mathscr{D}_1$ — любая фиксированная подобласть области $\mathscr{D}$, для которой $\overline{\mathscr{D}}_1 \subset \mathscr{D}$. Пользуясь общими свойствами аналитических функций, отсюда легко получить, что последовательность функций $f_n(z)$ равномерно в любой подобласти $\mathscr{D}_1$ области $\mathscr{D}$ сходится к некоторой функции $f_0(z)$. Для предельной функции $f_0(z)$, очевидно, будет выполнено функциональное уравнение автоморфной формы веса m.

Обозначим через C верхнюю грань чисел (f_n, f_n).

Очевидно, что

$$\int_{B \cap \mathscr{D}_1} |f_0(z)|^2 \rho^m(z)\, dv \leqslant \lim_{n \to \infty} \int_B |f_n(z)|^2 \rho^m(z)\, dv \leqslant C,$$

где $\mathscr{D}_1$ — произвольная подобласть области $\mathscr{D}$, $\overline{\mathscr{D}}_1 \subset \mathscr{D}$. Следовательно,

$$(f_0, f_0) = \int_B |f_0(z)|^2 \rho^m(z)\, dv \leqslant C.$$

Таким образом,

$$f_0(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z) \in A(\Gamma, m).$$

Мы покажем теперь, что требование конечности интеграла (f, f) сильней условия б), т. е. что $A(\Gamma, m) \subset \mathfrak{A}(\Gamma, m)$.

Пусть T — некоторая достаточно малая цилиндрическая область с основанием Q в некоторой Γ-рациональной компоненте $\mathscr{F}$. Мы будем предполагать, что T выбрана так, что если две точки z_1 и z_2 эквивалентны относительно Γ (т. е.

$z_2 = \gamma z_1$, где $\gamma \in \Gamma$), то $\gamma \in \Gamma_1(\mathcal{F})$. При таком выборе T имеет место неравенство:

$$\int\limits_{T/\Gamma_1(\mathcal{F})} |f(z)|^2 \rho^m(z)\, dv < \infty. \tag{3}$$

Отобразим область $\mathcal{D}$ на соответствующую каноническую область Зигеля S. Интеграл (3) после замены переменных запишется в виде

$$\int\limits_{T/\Gamma_1(\mathcal{F})} |\Theta_F(w)|^2 \lambda^m(w)\, dv, \tag{4}$$

где $\lambda(w)$ — решение в области S уравнения (1), $\Theta_{\mathcal{F}}(w) = f(\varphi(w))\, j^m(w)$, dv — инвариантный объем.

Функция $\Theta_{\mathcal{F}}(w)$ инвариантна относительно преобразований из группы $\Gamma_3(\mathcal{F})$, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье — Якоби

$$\Theta_{\mathcal{F}}(w) = \sum_{\rho} \psi_\rho(u, t)\, e^{2\pi i(\rho,\, z)}. \tag{5}$$

Легко проверить, что $\lambda(w) = \lambda_1(y - \operatorname{Re} L_t(u, u))\lambda_2(t)$ и что инвариантный объем имеет вид

$$dv = \lambda^{-1}(w)\, dx\, dy\, du_1\, du_2\, dt_1\, dt_2,$$
$$u = u_1 + iu_2, \quad t = t_1 + it_2.$$

Обозначим через $A(y_0, u_0, t_0; \varepsilon)$ совокупность точек $w = (z, u, t) \in S$ таких, что

$$|u - u_0| < \varepsilon, \quad |t - t_0| < \varepsilon, \quad |y - \lambda_{y_0}| < \varepsilon, \quad \lambda \geqslant 1, \quad x \in L,$$

где L — фундаментальная область для группы $\Gamma_4(\mathcal{F})$.

Из (4) следует конечность интеграла

$$\int\limits_{A(y_0,\, u_0,\, t_0;\, \varepsilon)} \left| \sum_\rho \psi_\rho(u, t) e^{2\pi i(\rho,\, z)} \right|^2 \lambda^{m-1}(w)\, dx\, dy\, du_1\, du_2\, dt_1\, dt_2 \tag{6}$$

при подходящих y_0, u_0, t_0 и ε и, значит (после выполнения интегрирования по x), конечность суммы:

$$\sum_\rho \int \lambda^{m-1}(w) |\psi_\rho(u, t)|^2 e^{-4\pi(\rho,\, y)}\, dy\, du_1\, du_2\, dt_1\, dt_2. \tag{7}$$

Легко проверить, что отдельный член этой суммы может быть конечен только при условии $\rho \in \bar{V}'$. Отсюда с помощью леммы 2 § 12 заключаем, что функция $\Theta_{\mathcal{F}}(z)$ ограничена в любой цилиндрической области с основанием в $\mathcal{F}$. Таким образом, мы показали, что из $(f, f) < \infty$ следует выполнение условия б).

Из доказанной в § 16 теоремы вытекает, что для любой квазинормальной дискретной группы размерность пространства $A(\Gamma, m)$ конечна.

Весьма важной задачей является вычисление размерности N_m пространства $A(\Gamma, m)$. Сельберг [1] дал метод, позволяющий это сделать. Мы вкратце изложим сейчас суть этого метода.

Обозначим через $k_m(z, u)$ функцию от $z \in \mathcal{D}$ и $u \in \mathcal{D}$, обладающую следующими двумя свойствами:

1) интегральный оператор

$$\int_{\mathcal{D}} k_m(z, u) f(u) dv \tag{8}$$

перестановочен с операторами $T_g f(z) = f(gz) j_g^m(z)$;

2) функция $k(z, u)$ аналитична по z.

Легко показать, что свойство 1) эквивалентно следующему функциональному уравнению:

$$k_m(gz, gu) j_g^m(z) j_g^{-m}(u) = k_m(z, u)$$

для всех $g \in G$ (G — полная группа аналитических автоморфизмов области $\mathcal{D}$).

Нормируем функцию $k_m(z, u)$ условием $k_m(0, 0) = 1$ (мы предполагаем для простоты, что $\mathcal{D}$ реализована так, что все аналитические автоморфизмы, оставляющие на месте точку $z = 0$, являются линейными преобразованиями). Легко показать, что такая функция единственна и что имеет место соотношение $k_m(z, u) = (k_1(z, u))^m$.

Можно показать, что для всех аналитических в $\mathcal{D}$ функций, для которых интеграл (b) сходится абсолютно, имеют место соотношения

$$\lambda_m f(z) = \int_{\mathcal{D}} k_m(z, u) f(u) dv, \tag{9}$$

где λ_m — константа, зависящая только от m.

Для λ_m мы имеем выражение *)

$$\lambda_m = \int_{\mathcal{D}} k_m(0, u)\, dv = \int_{\mathcal{D}} (k_1(0, u))^m\, dv.$$

Можно легко показать, что модуль функции $k_1(0, u)$ достигает максимума, равного 1, в точке $u=0$. С помощью метода перевала легко вычислить, что

$$\lambda_m \sim cm^n, \tag{10}$$

где c — константа, зависящая только от природы области $\mathcal{D}$, а n — комплексная размерность $\mathcal{D}$.

Пусть Γ — дискретная группа и B — ее фундаментальная область.

Обозначим через H совокупность всех измеримых в $\mathcal{D}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих соотношению $T_\gamma f = f$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и таких, что

$$\int_B |f|^2 \rho^m(z)\, dv < \infty.$$

Очевидно, H можно рассматривать как гильбертово пространство. Положим

$$K_m(z, u; \Gamma) = \sum_\gamma k_m(\gamma z, u)\, j_\gamma^m(z).$$

Можно показать, что для всех $f \in A(\Gamma, m)$ имеет место соотношение

$$\lambda_m f(z) = \int_B K_m(z, u; \Gamma) f(u)\, dv, \tag{11}$$

т. е. функции $f \in A(\Gamma, m)$ собственные. Можно показать, что у операторов (11) нет других собственных функций.

Таким образом, имеет место следующая фундаментальная формула:

$$N_m = \frac{1}{\lambda_m} \int K_m(z, z; \Gamma)\, dv. \tag{12}$$

Совершенно элементарно, пользуясь только выражением K_m в виде ряда, можно показать, что

$$\lim_{m\to\infty} K_m(z, z; \Gamma) = 1, \tag{13}$$

*) Явное выражение для λ_m легко найти, воспользовавшись интегралами, вычисленными в книге Хуа Ло Кена [1].

если z не является неподвижной точкой ни для одного из преобразований $\gamma \in \Gamma$ за исключением $\gamma = \varepsilon$. Отметим, что (13) выполняется равномерно в любой замкнутой подобласти $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$, не содержащей неподвижных точек для группы Γ.

Далее, можно показать, что в любой замкнутой подобласти $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$ функция $K_m(z, z; \Gamma)$ ограничена равномерно по m некоторой константой C_1, которая зависит только от $\mathcal{D}_1$.

Эти утверждения наводят на мысль, что имеет место следующее предельное соотношение:

$$N_m \sim \frac{V_\Gamma}{\lambda_m} \sim c V_\Gamma m^n, \tag{14}$$

где V_Γ — инвариантный объем фундаментальной области.

Для справедливости последнего соотношения необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовала такая компактная подобласть $B_\varepsilon \cap B$, что при всех m

$$\left| \int\limits_{B - B_\varepsilon} K_m(z, z; \Gamma)\, dv \right| \leqslant \varepsilon. \tag{15}$$

Проверка этого утверждения очень трудна. По всей видимости, можно доказать справедливость его для всех нормальных или даже квазинормальных дискретных групп.

ГЛАВА V

ОГРАНИЧЕННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ОБЛАСТИ

В настоящей главе описаны некоторые методы конструкции ограниченных однородных областей в аффинном комплексном пространстве.

Параграф 18 содержит описание аффинно однородных областей Зигеля 2-го рода, связанных с однородными конусами, перечисленными в § 1. Можно показать, что конструкции этого параграфа охватывают все такие области.

В § 20 дана конструкция однородных областей Зигеля 3-го рода.

В § 19 приведены без доказательства некоторые результаты Кошуля, позволяющие редуцировать задачу классификации всех ограниченных однородных областей к некоторой чисто алгебраической задаче. Эта задача еще далека от решения, но нам кажется, что в конструкциях § 20 содержатся все (или, точнее говоря, все с точностью до областей, связанных с особыми группами Ли) ограниченные однородные области в аффинном комплексном пространстве.

§ 18. Однородные области Зигеля 2-го рода

В настоящем параграфе описана конструкция однородных областей Зигеля 2-го рода и выяснено, какие из них являются симметрическими. Поскольку каждая область Зигеля 2-го рода аналитически эквивалентна ограниченной области (см. § 2), то из результатов настоящего параграфа вытекает существование ограниченных однородных несимметрических областей, и тем самым проблема, поставленная в 1935 г. Э. Картаном [3], получает отрицательное решение. Как показал Э. Картан, всякая ограниченная однородная область в двух- или трехмерном комплексном пространстве симметрична. Ниже (см. лемму 1) будет приведен пример ограниченной однородной несимметрической области в четырехмерном комплексном пространстве.

Отметим, что несимметрических областей в некотором смысле больше, чем симметрических.

В дальнейшем H будет означать область Зигеля 2-го рода, а V — соответствующий ей конус. Обозначим через Ω совокупность всех линейных преобразований A конуса V, продолжающихся до линейных преобразований всей области H, т. е. таких, что при некотором комплексном линейном преобразовании $u \to Bu$ имеет место соотношение

$$AF(u, v) = F(Bu, Bv). \tag{1}$$

Легко проверить, что если Ω действует на V транзитивно, то соответствующая область H аналитически однородна.

Для выяснения условий симметричности области Зигеля мы используем следующие леммы.

Лемма 1. *Инволюция области H с неподвижной точкой $(z_0, 0)$, если она существует, всегда имеет вид*

$$(z, u) \to (\varphi(z), A(z)u), \tag{2}$$

где $z \to \varphi(z)$ — инволюция области Зигеля 1-го рода с конусом V, а $A(z)$ — некоторая аналитическая матричная функция.

Доказательство. Инволюцию с неподвижной точкой $(z_0, 0)$ запишем в виде

$$(z, u) \to (\varphi(z), A(z)u). \tag{3}$$

Очевидно, что она должна быть перестановочна с любым автоморфизмом области H, сохраняющим точку $(z_0, 0)$, и в частности, с преобразованием

$$(z, u) \to (z, e^{i\theta}u), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

откуда мы получаем

$$\varphi(z, e^{i\theta}u) = \varphi(z, u), \quad A(z, e^{i\theta}u) = e^{i\theta}A(z, u).$$

Пользуясь аналитичностью по u, теперь легко вывести, что инволюция должна иметь указанный в формулировке леммы вид. Остается заметить, что $z \to \varphi(z)$ — аналитический автоморфизм области Зигеля 1-го рода с конусом V и с единственной неподвижной точкой $z = z_0$; квадрат его равен тождественному преобразованию, и следовательно, это инволюция этой области. Лемма доказана.

В следующей лемме будет установлена несимметричность двух простейших областей Зигеля, комплексная размерность которых соответственно равна 4 и 5. Обозначим через H_1 область в пространстве четырех комплексных переменных z_1, z_2, z_3, u, выделенную неравенствами

$$y_1 - |u|^2 > 0, \quad (y_1 - |u|^2)\, y_2 - y_3^2 > 0, \tag{4}$$

где $y_k = \operatorname{Im} z_k$, $k = 1, 2, 3$. Остов этой области, очевидно, выделяется уравнениями

$$y_1 - |u|^2 = y_2 = y_3 = 0. \tag{5}$$

Обозначим через H_2 область в пятимерном комплексном пространстве $(z_1, z_2, z_3, u_1, u_2)$, выделенную неравенствами

$$y_1 - |u|^2 > 0, \; (y_1 - |u_1|^2)(y_2 - |u_2|^2) - (y_3 - \operatorname{Re} u_1\bar{u}_2)^2 > 0. \tag{6}$$

Остов этой области выделяется уравнениями

$$y_1 - |u_1|^2 = y_2 - |u_2|^2 = y_3 - \operatorname{Re} u_1\bar{u}_2 = 0. \tag{7}$$

Лемма 2. *Области H_1 и H_2 несимметрические.*

Доказательство. Рассмотрим сначала область H_1. Согласно лемме 1 инволюция в точке $(i, i, 0, 0)$, если она существует, должна иметь вид

$$(z_1, z_2, z_3, u) \to \left(\frac{-z_2}{\Delta(z)}, \frac{-z_1}{\Delta(z)}, \frac{z_3}{\Delta(z)}, a(z_1, z_2, z_3)\, u\right), \tag{8}$$
$$\Delta(z) = z_1 z_2 - z_3^2.$$

Как мы знаем (см. § 2), при аналитическом автоморфизме области H точка остова переходит либо в бесконечность, либо опять в точку остова. Поэтому, для того чтобы показать, что (8) не является аналитическим автоморфизмом нашей области, достаточно найти точку остова, переходящую при отображении (8) не в точку остова. Можно, например, взять точку

$$(i, 1, 1, 1).$$

Автоморфизм (8) переводит эту точку в точку

$$\left(\frac{1}{1-i}, \frac{i}{1-i}, \frac{-1}{1-i}, a(i, 1, 1)\right),$$

которая, очевидно, не принадлежит остову.

Докажем теперь, что область H_2 несимметрическая. Мы можем считать, что область H_2 состоит из пар (Z, u), где

$$Z=\begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix}, \quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Остов этой области определяется уравнением

$$\operatorname{Im} Z=\operatorname{Re} uu^* \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |u_1|^2 & \operatorname{Re} u_1\bar{u}_2 \\ \operatorname{Re} u_1\bar{u}_2 & |u_2|^2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $y_k=\operatorname{Im} z_k$, $k=1, 2, 3$. Согласно лемме 1 инволюция с неподвижной точкой $(iE, 0)$, если она существует, должна иметь вид

$$(Z, u)\to\left(-Z^{-1}, A(Z)u\right), \tag{10}$$

где $A(Z)$ — аналитическая матричная функция от Z.

Пусть (Z, u) — произвольная точка остова. Условие перехода этой точки при инволюции опять в точку остова означает, что

$$\operatorname{Im}\left(-Z^{-1}\right)=\operatorname{Re} Auu^*A^*, \quad \text{если} \quad \operatorname{Im} Z=\operatorname{Re} uu^*. \tag{11}$$

Из $\operatorname{Re} uu^*=\operatorname{Re} \bar{u}u'$ вытекает, что $\operatorname{Re} Auu^*A^*=\operatorname{Re} A\bar{u}u'A^*$, и значит,

$$\operatorname{Re} AJA^*=0, \quad \text{где} \quad J=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Из последнего соотношения тривиально следует, что при любом Z матрица $A(Z)$ имеет вид $e^{i\theta}B$, где B — вещественная матрица, вообще говоря, своя для каждого Z.

Следовательно, $A(Z)=a(Z)B$, где $a(Z)$ — некоторая аналитическая функция, а B — фиксированная вещественная матрица. Главная линейная часть инволюции (10) в точке $(iE, 0)$, как известно, равна $-E$. Поэтому, если нормировать $a(Z)$ условием $a(iE)=-1$, то $B=E$. Подставляя в (11) найденное выражение для $A(Z)$, мы приходим к следующему равенству:

$$Z^{-1}Y\bar{Z}^{-1}=|a(Z)|^2 Y, \tag{13}$$

имеющему место для всех $Z=X+iY$, $Y>0$.

Подставляя $Z=\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ в (13), приходим к противоречию. Лемма полностью доказана.

Несимметричность рассматриваемых ниже однородных областей Зигеля можно установить обобщением приема, примененного для доказательства несимметричности областей H_1 и H_2. Мы, однако, изберем другой, более простой путь. Условимся говорить, что область $\mathscr{D}_1$ *правильно вложена* в область $\mathscr{D}_2$, если существует аналитический автоморфизм g области $\mathscr{D}_2$, множество неподвижных точек которого аналитически эквивалентно $\mathscr{D}_1$.

Лемма 3. *Если ограниченная область $\mathscr{D}_1$ правильно вложена в ограниченную симметрическую область $\mathscr{D}_2$, то $\mathscr{D}_1$ сама является симметрической областью.*

Доказательство. Обозначим через g аналитический автоморфизм области $\mathscr{D}_2$, выделяющий аналитическое многообразие $\mathscr{F}$, аналитически эквивалентное области $\mathscr{D}_1$. Инволюция φ_0 области $\mathscr{D}_2$ с неподвижной точкой $z_0 \in \mathscr{F}$ переводит $\mathscr{F}$ в себя. Действительно, $\varphi_0 g = g\varphi_0$, так как инволюция φ_0 перестановочна с любым аналитическим автоморфизмом с неподвижной точкой z_0, в частности с g. Далее, при $z \in \mathscr{F}$

$$g(\varphi_0 z) = (\varphi_0 g) z = \varphi_0 z, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_0 z \in \mathscr{F}.$$

$\mathscr{D}_2$ — симметрическая область, поэтому для каждой точки $z \in \mathscr{F}$ существует инволюция с этой неподвижной точкой. Следовательно, область $\mathscr{D}_1$, аналитически эквивалентная $\mathscr{F}$, будет симметрической.

Согласно последней лемме для доказательства несимметричности некоторой области $\mathscr{D}$ достаточно построить цепочку областей, в которой каждая следующая область правильно вложена в предыдущую и которая кончается некоторой заведомо несимметрической областью.

В § 1 были перечислены 4 серии неприводимых однородных конусов. Мы дадим сейчас для каждой из этих серий конусов конструкцию соответствующих однородных областей Зигеля 2-го рода и выясним, когда эти области являются симметрическими.

1. Пусть V — конус вещественных положительно определенных симметрических матриц Y порядка $p \geqslant 2$.

Пространство, в котором будут определены вектор-функции, описывается следующим образом. Пусть s — некоторое целое положительное число и $r(t)$ — неубывающая целочисленная функция на сегменте $[1, s]$, причем $r(1) > 0$, $r(s) \leqslant p$. Рассмотрим все прямоугольные матрицы $U = (u_{kt})$ из p строк и s столбцов такие, что $u_k = 0$ при $k > r(t)$, u_{kt} — любые комплексные числа при $k \leqslant r(t)$. Иными словами, мы рассматриваем прямоугольные матрицы U, разбитые на клетки, и требуем, чтобы все элементы ниже главной диагонали были равны нулю. Матрицы указанного вида образуют комплексное аффинное пространство, размерность которого равна $\sum_{t=1}^{s} r(t)$.

Вектор-функция $F(U, V)$ в этом пространстве определяется формулой

$$F(U, V) = \frac{1}{2}(UV^* + \bar{V}U'). \tag{14}$$

Группа Ω во всяком случае содержит все аффинные преобразования конуса V вида

$$Y \to BYB', \tag{15}$$

где B — вещественная квадратная матрица порядка p, все элементы которой ниже диагонали равны нулю. Действительно, поставим в соответствие преобразованию (15) преобразование $U \to BU$. Если B — треугольная, то это преобразование переводит матрицы U указанного выше вида в себя. Тогда мы имеем

$$F(BU, BV) = \frac{1}{2}((BU)(BV)^* + (\overline{BV})(BU)') =$$
$$= \frac{1}{2}(BUV^*B' + B\bar{V}U'B') = BF(U, V)B'.$$

Мы показали, что выполняется (1). Легко проверить, что та ая группа Ω транзитивна в конусе V.

Покажем, что все построенные области являются несимметрическими. Обозначим через g аналитический автоморфизм области H, который оставляет на месте Z и первый столбец матрицы U, а у остальных элементов матрицы U меняет знак. Совокупность неподвижных точек этого автоморфизма представляет собой область того же типа, только матрица U состоит из одного столбца. Согласно лемме 3, если область H симметрическая, то совокупность ее точек, остающихся на месте при отображении $z \to gz$, также будет симметрической областью. Таким образом, достаточно разобрать случай, когда матрица U состоит из одного столбца. В этом случае U — вектор p_1-мерного комплексного пространства, где $p_1 \leqslant p$.

Доказательство несимметричности мы будем вести индукцией по p. Случай $p=2$ разобран в лемме 2. Пусть $p>2$. Покажем, предполагая установленной несимметричность для $p-1$, что она имеет место для p. Обозначим через g_1 аналитический автоморфизм области H, который меняет знак у z_{pk} и z_{kp}, $k=1, \ldots, p-1$, и у u_p, если $p_1=p$, а остальные элементы матриц Z и U оставляет на месте. Этот автоморфизм выделяет некоторую область, являющуюся несимметрической по предположению индукции.

2. Пусть V — конус эрмитовых положительно определенных матриц Y порядка $p \geqslant 2$. Пространство, в котором будут определены вектор-функции, описывается следующим образом. Пусть s_1 и s_2 — целые положительные числа, $r_1(t)$ и $r_2(t)$ — неубывающие положительные целочисленные функции, заданные на сегментах $[1, s_1]$ и $[1, s_2]$, причем $r_i(s_i) \leqslant p$, $i=1, 2$.

Пространство, в котором будет задана вектор-функция, состоит из пар $(U^{(1)}, U^{(2)})$, где $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ — прямоугольные матрицы порядков $p \times s_1$ и $p \times s_2$ соответственно, причем $u_{kt}^{(i)}=0$ при $k>r_i(t)$, $i=1, 2$, а остальные элементы матриц $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ могут быть любыми комплексными числами. Размерность пространства матриц указанного вида равна $\sum\limits_{t=1}^{s_1} r_1(t)+\sum\limits_{t=1}^{s_2} r_2(t)$.

Вектор-функцию $F(U, V)$ определим формулой

$$F(U, V)=U^{(1)}V^{(1)*}+\bar{V}^{(2)}U^{(2)\prime}. \tag{16}$$

Покажем, что группа Ω во всяком случае содержит преобразование вида

$$Y \rightarrow BYB^*, \tag{17}$$

где B — квадратная матрица порядка p, все элементы которой ниже диагонали равны нулю. Действительно, каждому преобразованию вида (17) соответствует следующее преобразование в пространстве, в котором задана вектор-функция $F(U, V)$:

$$(U^{(1)}, U^{(2)}) \rightarrow (BU^{(1)}, \bar{B}U^{(2)}), \tag{18}$$

где B — матрица, определенная в (17).

Непосредственно проверяется, что если все элементы ниже диагонали матрицы B равны нулю, то (18) есть преобразование нашего пространства. Как и выше, проверяется, что имеет место соотношение (1). Хорошо известно, что такая группа Ω транзитивна в конусе V.

Если одно из чисел s_1 или s_2 равно нулю и соответствующая функция $r_i(t)$ тождественно равна p, то соответствующая область является симметрической. В § 2 указана инволюция для этой области. Покажем, что в остальных случаях построенные области будут несимметрическими.

Рассмотрим вначале случай, когда $s_1 s_2 \neq 0$ и $r_i(t) = p$, $i = 1, 2$, $1 \leqslant t \leqslant s_i$.

Обозначим через g аналитический автоморфизм области, оставляющий на месте Z и первые столбцы матриц $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, а у элементов остальных столбцов матриц $U^{(i)}$ ($i = 1, 2$) — меняющий знак. Согласно лемме 3, достаточно доказать, что совокупность точек, которые g оставляет на месте, есть несимметрическая область.

Таким образом, дело свелось к рассмотрению области в пространстве $(Z, U^{(1)}, U^{(2)})$, выделенной неравенствами

$$\frac{1}{i}(Z - Z^*) - U^{(1)} U^{(1)*} - \overline{U}^{(2)} U^{(2)\prime} > 0,$$

где Z — квадратная матрица порядка p, а $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ — записанные в столбцы p-мерные комплексные векторы.

Обозначим через h следующий аналитический автоморфизм этой области:

$$(Z, U^{(1)}, U^{(2)}) \to (Z', U^{(2)}, U^{(1)}). \tag{19}$$

Множество точек, остающихся на месте при автоморфизме h, есть опять область Зигеля

$$\frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) - \operatorname{Re} U U^* > 0, \tag{20}$$

где $Z = Z'$ — квадратная симметрическая матрица порядка p, а U — столбец из p строк.

В пункте 1 мы показали, что область (20) несимметрическая. Рассмотрим теперь случай, когда одно из чисел s_i, например s_1, отлично от нуля и $r_1(1) < p$. С помощью подходящего автоморфизма доказательство несимметричности легко свести к случаю, когда $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $r_1(1) = p_1 < p$.

Доказательство несимметричности, как и в соответствующем месте пункта 1, мы будем вести индукцией по p. Пусть вначале $p=2$. Автоморфизм

$$(Z,\ U)\to(Z',\ U)$$

выделяет область H_1, несимметричность которой установлена в лемме 2.

Пусть теперь $p>2$. Предполагая доказанной несимметричность при $p-1$, покажем, что соответствующая область несимметрическая. Рассмотрим следующие возможности: 1) $p_1=1$ и 2) $p_1>1$. В первом случае мы используем автоморфизм g_1, который меняет знак у всех элементов матрицы Z, стоящих в последнем столбце и последней строке, за исключением z_{pp}. Во втором случае мы применяем автоморфизм g_2, который меняет знак у всех элементов матрицы Z, стоящих в первой строке и первом столбце, за исключением z_{11}, и у u_1, а остальные элементы матриц Z и U оставляет на месте.

3. Пусть V — конус в $(n+2)$-мерном действительном пространстве, заданный неравенствами

$$y_1y_2-y_3^2-\ \dots\ -y_{n+2}^2>0,\quad y_1>0. \tag{21}$$

Конструкция вектор-функции $F(u,\ v)$ использует числа Клиффорда (Г. Вейль [1], стр. 363 или Э. Картан [1]), что вполне естественно, поскольку мы должны в каком-то смысле «извлечь квадратный корень» из суммы квадратов.

Обозначим через C_0^N вспомогательное N-мерное комплексное пространство, в котором введено скалярное произведение векторов с обычными свойствами.

Пусть $T_1,\ \dots,\ T_n$ — система унитарных преобразований в пространстве K, обладающих следующими свойствами:

$$T_kT_m^*+T_mT_k^*=0\qquad (m\neq k). \tag{22}$$

Свойство (22) можно сформулировать еще так: при любых вещественных $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n$ $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k^2=1\right)$ преобразование $T_\lambda=$ $=\lambda_1T_1+\dots+\lambda_nT_n$ унитарно.

Построение такой системы унитарных матриц и выяснение связи между возможными значениями n и N сводится к числам Клиффорда следующим образом.

Системы $T_1,\ \dots,\ T_n$ и $AT_1B,\ \dots,\ AT_nB$, где A и B — произвольные унитарные матрицы, естественно считать эквивалентными. Пользуясь этим, заданную систему можно заменить на эквивалентную, в которой $T_1 = E$.

Положим $T_{k+1} = iP_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда из (22) мы получим для P_k следующие соотношения:

$$P_kP_m + P_mP_k = 0, \quad m \neq k, \quad P_k^2 = E, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{23}$$

$$P_k^* = P_k, \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{24}$$

Соотношения (23) суть обычные условия для чисел Клиффорда. Отметим, что (24) автоматически выполняется при обычной реализации чисел Клиффорда. Можно показать (Г. Вейль [1], стр. 363), что для N возможны любые значения, кратные 2^ν, где $\nu = \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Перейдем к описанию вектор-функции $F(u, v)$. Пространство, в котором она определена, состоит из троек (u_0, u_1, u_2), где u_0 — s-мерный вектор, и $u_1, u_2 \in C_0^N$. Размерность m этого пространства равна $s + 2N$.

Выпишем формулы для $F(u, u)$ *)

$$\left.\begin{aligned} F_1(u, u) &= (u_0, u_0) + (u_1, u_1), \\ F_2(u, u) &= (u_2, u_2), \\ F_{k+2}(u, u) &= \operatorname{Re}(u_1\ T_ku_2), \qquad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Покажем, что $F(u, u) \in V$, т. е. что при любом u

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k+2}^2(u, u) \leqslant F_1(u, u)\, F_2(u, u). \tag{26}$$

Рассмотрим следующее выражение с произвольными вещественными $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_{k+2}(u, u) = \operatorname{Re}(u_1, T_\lambda u_2). \tag{27}$$

Очевидно, что

$$|\operatorname{Re}(u_1, T_\lambda u_2)|^2 \leqslant |(u_1, T_\lambda u_2)|^2 \leqslant (u_1, u_1)(T_\lambda u_2, T_\lambda u_2) = \\ = (u_1, u_1)(u_2, u_2)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right).$$

В частности, полагая $\lambda_k = \operatorname{Re}(u_1, T_ku_2)$, получаем (26).

---

*) $F(u, v)$ легко выразить через $F(u \pm v, u \pm v)$ и $F(u \pm iv, u \pm iv)$.

Область с такой вектор-функцией F однородна. В самом деле, каждому преобразованию конуса V вида

$$\left.\begin{aligned} &y_1 \to \lambda_1 y_1, \\ &y_2 \to \lambda_2 y_2, \\ &y_k \to \mu y_k, \quad k = 3, \ldots, n, \quad \mu = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

соответствует преобразование в пространстве u

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_0} & u_0 \\ \sqrt{\lambda_1} & u_1 \\ \sqrt{\lambda_2} & u_2 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

так что имеют место соотношения (1), следовательно, преобразования (28) принадлежат группе Ω.

Далее, преобразования конуса V вида

$$\left.\begin{aligned} &y_1 \to y_1 + 2 \sum_{k=1}^{n} a_k y_{k+2} + y_2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \\ &y_2 \to y_2, \\ &y_{k+2} \to y_{k+2} + a_k y_2, \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

($a_1, \ldots, a_n$ — любые действительные числа) соответствуют следующему преобразованию в пространстве u:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 + T_a u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad Ta = a_1 T_1 + \ldots + a_n T_n, \tag{31}$$

так что выполняется (1), поэтому преобразования (30) принадлежат группе Ω.

Легко показать, что группа, порожденная (28) и (30), транзитивна в конусе V.

Если $s = 0$, $n = 2$ и собственные значения матрицы $T = T_1^{-1} T_2$ одинаковы *), то полученная область совпадает с областью, рассмотренной в пункте 2, где $p = 2$, $s_1 = 2N$, $s_2 = 0$, $r_1(t) = 2$ при $1 \leqslant t \leqslant s_1$, и поэтому является симметрической.

---

*) Из (22) вытекает, что собственные значения матрицы T равны $\pm i$.

В § 6 установлена симметричность нашей области при $s=0$, $n=4$ и $N=2$. Покажем, что в остальных случаях построенные области не являются симметрическими.

Пусть сначала $s>0$. Обозначим через g аналитический автоморфизм этой области, меняющий знак у всех компонент вектора u, кроме первой, и оставляющий на месте z и остальные компоненты вектора u. Множество точек рассматриваемой области, остающихся на месте при автоморфизме g, есть опять область указанного типа с $s=1$ и $N=0$. Эта область в $(n+3)$-мерном пространстве $(z_1, \ldots, z_{n+2}, u)$ задается неравенствами:

$$(y_1-|u|^2)y_2-y_3^2-\ldots-y_{n+2}^2>0, \quad y_2>0, \tag{32}$$
$$y_k=\operatorname{Im} z_k, \qquad k=1, \ldots, n+2.$$

Обозначим через g_1 следующий автоморфизм области (32):

$$\begin{aligned} z_k &\to z_k \qquad & k&=1,\ 2,\ 3,\\ z_k &\to -z_k, \qquad & k&=4, \ldots, n+2,\\ u &\to u. \end{aligned}$$

Ясно, что совокупность точек области (32), неподвижных при автоморфизме g_1, есть область H_1, несимметричность которой установлена в лемме 2.

Рассмотрим теперь случай, когда $s=0$, а n — нечетно.

Пусть $T_1=E$, $T_2=iP_1$, $\ldots$, $T_n=iP_{n-1}$, где $P_1, \ldots, P_{n-1}$ удовлетворяют (23) и (24). Положим

$$P=i^{\nu}P_1\ldots P_{n-1}, \quad \nu=\frac{n-1}{2}.$$

Легко проверить, что имеют место равенства

$$PP_k=-P_kP, \quad P^2=E, \quad PP^*=E. \tag{33}$$

Рассмотрим следующий автоморфизм области:

$$\begin{pmatrix} u_1\\ u_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Pu_1\\ Pu_2 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Легко проверить, что множество точек области Зигеля, остающихся на месте при автоморфизме (34), является областью такого же типа с $s=0$, $n=1$ и N равным размерности подпространства пространства K, в котором $Pu=u$. Число N положительно. Действительно, $P^2=E$, следовательно, при $N=0$ все собственные значения P были бы равны -1, т. е. P было бы перестановочно с P_k, что противоречит (33).

Несимметричность полученной области установлена в пункте **1**.

Рассмотрим теперь случай четного n. Если $n=2$, то рассматриваемые области совпадают с областями, введенными в пункте 2 с $p=2$ *). Пусть $n=4$, тогда минимальное возможное значение $N=2$, а остальные кратны 2. В главе II было установлено, что при $N=2$ эта область симметрическая. Покажем, что при $N>2$ она несимметрическая. Рассмотрим вначале случай $N=4$. Легко показать **), что тогда компоненты вектор-функции F имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= u_{11}\bar{u}_{11}+u_{12}\bar{u}_{12}+u_{13}\bar{u}_{13}+u_{14}\bar{u}_{14},\\
F_2 &= u_{21}\bar{u}_{21}+u_{22}\bar{u}_{22}+u_{23}\bar{u}_{23}+u_{24}\bar{u}_{24},\\
F_3 &= \operatorname{Re}(u_{11}\bar{u}_{21}+u_{12}\bar{u}_{22}+u_{13}\bar{u}_{23}+u_{14}\bar{u}_{24}),\\
F_4 &= \operatorname{Im}(u_{11}\bar{u}_{21}-u_{12}\bar{u}_{22}+u_{13}\bar{u}_{23}-u_{14}\bar{u}_{24}),\\
F_5 &= \operatorname{Re}(-u_{11}\bar{u}_{22}+u_{12}\bar{u}_{21}-u_{13}\bar{u}_{24}+u_{14}\bar{u}_{23}),\\
F_6 &= \operatorname{Im}(u_{11}\bar{u}_{22}+u_{12}\bar{u}_{21}+u_{13}\bar{u}_{24}+u_{14}\bar{u}_{23}),
\end{aligned}\right\}\tag{35}$$

где $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$ — компоненты вектора u_1, а $u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24}$ — компоненты вектора u_2.

Рассмотрим следующий автоморфизм:

$$\left.\begin{aligned}
&z_k\to z_k,\quad k=1,\,2,\,3,\,6;\quad z_k\to -z_k,\quad k=4,\,5;\\
&u_{k1}\to u_{k4},\ u_{k2}\to u_{k3},\ u_{k3}\to u_{k2},\ u_{k4}\to u_{k1},\ \text{где } k=1,2.
\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

Множество точек области, которые остаются на месте, есть область рассматриваемого типа с $n=2$. Несимметричность полученной области была нами установлена в пункте **2**.

Рассмотрим теперь случай $N>4$. Обозначим через K_1 инвариантное относительно операторов P_1, P_2, P_3 подпространство K размерности 4, а через K_2 ортогональное дополнение к K_1. Пусть g — автоморфизм нашей области, меняющий знак у всех векторов $u\in K_1$ и сохраняющий его у всех

*) Легко проверить, что конус (21) с $n=2$ совпадает с конусом эрмитовых положительно определенных матриц порядка 2.

**) Формулы (35) вытекают из рассмотрения обычного представления кватернионов с помощью матриц второго порядка.

векторов $u \in K_2$. Совокупность неподвижных точек этого автоморфизма совпадает с областью, несимметричность которой была установлена выше.

Рассмотрим теперь случай, когда n четно и больше 4. Пусть $T_1 = E$, $T_2 = iP_1$, ..., $T_n = iP_{n-1}$, где $P_1, \ldots, P_{n-1}$ удовлетворяют (23) и (24). Положим

$$P = i^{\nu} P_4 \ldots P_{n-1}, \quad \nu = \frac{n-4}{2}. \tag{37}$$

Легко проверить, что

$$PP_k = P_k P, \quad k = 1, 2, 3; \quad PP_k = -P_k P, \quad k = 4, \ldots, n-1.$$

Рассмотрим следующий автоморфизм области:

$$\left.\begin{aligned} &z_k \to z_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad z_k \to -z_k, \quad k = 7, \ldots, n+2; \\ &u_1 \to \varepsilon P u_1, \quad u_2 \to \varepsilon P u_2, \quad \text{где } \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Совокупность неподвижных точек при автоморфизме (38) есть область рассматриваемого типа с $n = 4$. Очевидно, что если $n > 6$, то хотя бы при одном значении ε для N имеет место неравенство $N \geqslant 4$, следовательно, совокупность неподвижных точек автоморфизма (38) образует несимметрическую область.

Если же $n = 6$, то возможные значения N имеют вид $k2^{\nu}$, где $\nu = \left[\frac{n-1}{2}\right] = 2$. В случае, когда $k > 1$, применимо предыдущее рассуждение. Если же $k = 1$, то можно показать, что эта область будет симметрической областью, связанной с некоторой особой группой. Очевидно, что комплексная размерность ее равна 16.

Таким образом, мы показали, что рассматриваемые области являются симметрическими только в следующих случаях:

1) $s = 0$, $N = 0$, n — любое,
2) $s = 0$, N — любое, $n = 2$ и $T_1 = \mu T_2$, где $\mu = \pm i$,
3) $s = 0$, $N = 4$, $n = 4$,
4) $s = 0$, $N = 4$, $n = 6$.

В заключение отметим одно важное свойство построенных нами областей.

Покажем, что если $s = 0$, то группа Ω совпадает с полной группой аффинных преобразований конуса V.

Действительно, каждому преобразованию конуса V вида

$$y_1 \to y_1,$$
$$y_2 \to y_2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k y_{k+2} + y_1 \sum_{k=1}^{n} a_k^2,$$
$$y_{k+2} \to y_{k+2} + a_k y_1, \quad k = 1, \ldots, n,$$

соответствует, как легко видеть, следующее преобразование в пространстве:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 + T_a^* u_1 \end{pmatrix}, \qquad T_a = a_1 T_1 + \ldots + a_n T_n.$$

Без труда можно проверить, что предыдущее преобразование конуса V и преобразования (28) и (30) порождают полную группу аффинных преобразований конуса V.

4. Пусть V — конус эрмитовых положительно определенных матриц Y порядка $2p\,(p \geqslant 2)$, удовлетворяющих условию:

$$YJ = J\overline{Y}, \quad J = \begin{pmatrix} j & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & j & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & j \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (39)$$

Пространство, в котором будут определены вектор-функции, описывается так же, как и выше. А именно, пусть s — некоторое целое число и $r(t)$ — неубывающая целочисленная функция, $r(1) > 0$, $r(s) \leqslant 2p$. Рассмотрим такие комплексные прямоугольные матрицы $U = (u_{kt})$ из $2p$ строк и s столбцов, что $u_{kt} = 0$ при $k > r(t)$, а при $k \leqslant r(t)$ u_{kt} принимает любые значения. Матрицы этого вида, очевидно, образуют комплексное аффинное пространство, размерность которого равна $\sum_{t=1}^{s} r(t)$.

Вектор-функция $F(U, V)$ определяется формулой

$$F(U, V) = \frac{1}{2}(UV^* + J\overline{V}U'J').$$

Группа Ω во всяком случае содержит все аффинные преобразования конуса V вида

$$Y \to BYB^*, \quad BJ = J\overline{B},$$

где B — квадратная матрица порядка $2p$, причем все элементы этой матрицы ниже диагонали равны нулю. Действительно, легко проверить, что преобразование $U \to BU$ переводит пространство матриц U указанного вида в себя. Хорошо известно, что такая группа Ω транзитивна в конусе V.

В § 7 была установлена симметричность построенной нами области при $s=1$ и $r(1)=2p$. Покажем, что в остальных случаях мы получаем несимметрические области. Применим метод индукции по p. Конус (39) при $p=2$, как легко проверить, совпадает с конусом из пункта **3** при $n=4$. Пользуясь этим, легко показать, что при $p=2$ область несимметрическая.

Пусть $p > 2$. Покажем, что область несимметрическая, предполагая это установленным для $p-1$.

Заметим вначале, что можно без ограничения общности считать $s \leqslant 2$. Действительно, автоморфизм g, меняющий знак у элементов всех столбцов матрицы U, за исключением первых двух, выделяет область того же типа с $s \leqslant 2$.

Рассмотрим вначале случай $s=2$. Обозначим через g_1 следующий автоморфизм:

$$z_{kt} \to -z_{kt} \quad \text{при} \quad \begin{cases} k=2p-1 \ \text{или} \ 2p, \ t=1, \ \ldots, \ 2p-2, \\ t=2p-1 \ \text{или} \ 2p, \ k=1, \ \ldots, \ 2p-2, \end{cases}$$

$$u_{st} \to -u_{st} \quad \text{при} \quad s=2p-1, \ 2p; \ t=1, \ 2.$$

Остальные элементы матриц Z и U остаются на месте.

Легко проверить, что совокупность неподвижных точек этого автоморфизма есть произведение бицилиндра и области рассматриваемого типа, которая, согласно предположению индукции, является несимметрической. Аналогично рассматривается случай $s=1$.

Отметим, что, как можно доказать, нет других аффинно однородных областей Зигеля 2-го рода, соответствующих перечисленным конусам.

§ 19. Некоторые результаты Кошуля

В настоящем параграфе будут изложены без доказательства некоторые результаты Кошуля, позволяющие свести задачу классификации ограниченных однородных областей в C^n к некоторой чисто алгебраической задаче.

Пусть M — некоторое комплексное многообразие, $\mathfrak{G}$ — транзитивно действующая на нем группа аналитических автоморфизмов. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{G}$ эффективна. Обозначим через $\mathfrak{B}$ стационарную группу некоторой точки $z_0 \in M$, через G алгебру Ли группы $\mathfrak{G}$, и через B алгебру Ли группы $\mathfrak{B}$.

Известно, что если многообразие M является комплексным многообразием, то в алгебре Ли G существует эндоморфизм J *), называемый эндоморфизмом квазикомплексной структуры и обладающий следующими свойствами:

1) $J(b) = 0$ для всех $b \in B$,

2) $J(g) + g \in B$ для любого $g \in G$,

3) $J([b, g]) - [b, Jg] \in B$ при любых $b \in B$ и $g \in G$,

4) $[g_1, g_2] + J([J(g_1), g_2]) + J([g_1, J(g_2)]) - [J(g_1), J(g_2)] \in B$ для любых g_1 и $g_2 \in G$.

Отметим, что оператор J определен неоднозначно, но индуцированный им оператор на фактор-пространстве G/B уже определен однозначно.

Предположим, что на многообразии M существует инвариантный относительно группы $\mathfrak{G}$ объем. Запишем элемент объема в виде

$$K dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_n, \tag{1}$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — некоторая локальная система координат.

Рассмотрим форму

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta} dz^\alpha d\overline{z}^\beta. \tag{2}$$

Без труда проверяется, что эта форма не зависит от выбора локальной системы координат и является инвариантом при аналитических отображениях.

В ряде важных случаев, например, для ограниченных областей в C^n эта форма положительно определена. Это же имеет место и для многообразий Кобаяси, введенных в § 4.

Достижение Кошуля состоит в том, что ему удалось вычислить эту форму в терминах алгебры Ли. Сформулируем его результат.

---

*) Эндоморфизм J является эндоморфизмом G как векторного пространства, но не как алгебры Ли.

Пусть $g_1, g_2 \in G$. Положим $\psi(g_1, g_2) = J[g_1, g_2] - [g_1, Jg_2]$. Заметим, что $\psi(g_1, g_2) \in B$ при любом $g_1 \in B$. Следовательно, каждому $g_0 \in G$ соответствует аффинное преобразование в пространстве G/B

$$g \to \psi(g, g_0).$$

Обозначим через $\omega(g_0)$ след этого преобразования.

Перенесем форму (2) на фактор-пространство G/B и обозначим ее через $k(\overline{g}_1, \overline{g}_2)$. Кошуль показал, что имеет место равенство

$$k(\overline{g}_1, \overline{g}_2) = \omega([Jg_1, g_2]) + i\omega([g_1, g_2]), \tag{3}$$

где $\overline{g}_1, \overline{g}_2$ — элементы G/B, а g_1, g_2, — соответствующие элементы алгебры Ли G.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Пусть M — ограниченная область в C^n или, более общо, произвольное многообразие Кобаяси. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая транзитивно и эффективно действующая на нем группа его аналитических автоморфизмов. Обозначим через G алгебру Ли группы $\mathfrak{G}$, а через B алгебру Ли стационарной группы.

Тогда в G существует эндоморфизм J, для которого выполняются свойства 1) — 4) *и форма* (3) *положительно определена на G/B.*

Таким образом, задача классификации всех ограниченных однородных областей естественно приводит к отысканию всех алгебр Ли G, в которых отмечена некоторая подалгебра B и задан эндоморфизм J, причем выполняются условия 1) — 4) и форма (3) положительно определена. Такие алгебры Ли будем называть J-алгебрами. Условимся говорить, что J-алгебры G_1 и G_2 изоморфны, если существует изоморфизм φ алгебры G_1 на G_2, причем $\varphi(B_1) = B_2$ и $\varphi J_1 g - J_2 \varphi g \in B_2$ при любом $g \in G_1$.

Условимся называть идеал G_1 алгебры G J-идеалом, если его проекция на G/B J-инвариантна.

Легко доказать, что всякий J-идеал J-алгебры представляет собой опять J-алгебру. Для этого достаточно проверить, что форма (3) на G_1 будет положительно определена, а это сразу вытекает из того, что она совпадает с формой (3) на всей алгебре Ли G.

Естественно в первую очередь поставить задачу классификации всех J-простых J-алгебр, т. е. не имеющих J-идеалов.

Пусть H — одна из областей Зигеля, перечисленных в § 18, $\mathfrak{G}$ — ее полная группа аффинных преобразований, G — алгебра Ли. Можно показать *), что алгебра Ли G J-проста тогда и только тогда, когда соответствующая группа Ω является полной группой аффинных преобразований конуса V.

§ 20. Конструкция однородных областей Зигеля 3-го рода

В настоящем параграфе дается способ построения области Зигеля 3-го рода по области Зигеля 2-го рода H и некоторой ограниченной области $\mathscr{D}$.

В конце параграфа дана конструкция однородных областей Зигеля 3-го рода.

Пусть H — область Зигеля 2-го рода, которая задана, как обычно, соотношением

$$\operatorname{Im} z - F(u, u) \in V, \tag{1}$$

где V — некоторый конус, а $F(u, v)$ — V-эрмитова векторная функция (см. § 2) от пары векторов $u, v \in C^m$.

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая ограниченная область в пространстве C^k, точки которого мы будем обозначать буквой t.

Пусть $t \to \lambda(t)$ — голоморфное отображение $\mathscr{D}$ в совокупность аффинных преобразований C^m, удовлетворяющее следующим условиям:

α) $F(\lambda(t)\bar{u}, v) = F(\lambda(t)\bar{v}, u)$ при всех $u, v \in C^m$, $t \in \mathscr{D}$,

β) $F(u, u) - F(\lambda(t)\bar{u}, \overline{\lambda(t)\bar{u}}) \in \bar{V}$ при всех $u \in C^m$, $t \in \mathscr{D}$,

γ) $F(u, u) \neq F(\lambda(t)\bar{u}, \overline{\lambda(t)\bar{u}})$, если $u \neq 0$, $t \in \mathscr{D}$.

Заметим, что из γ) следует, что преобразование $E - \lambda(t)\overline{\lambda(t)}$ невырождено (E — тождественное преобразование). Действи-

*) Этот результат принадлежит Э. Б. Винбергу и автору настоящей книги.

тельно, в противном случае существует такой вектор u_0, $u_0 \neq 0$, что $(E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})u_0=0$. Отсюда

$$0=F((E-\lambda(t)\overline{\lambda(\lambda)})u_0, u_0)=F(u_0, u_0)-F(\lambda(t)\overline{\lambda(t)}u_0, u_0)= \\ =F(u_0, u_0)-F(\lambda(t)\overline{u_0}, \lambda(t)\overline{u_0}).$$

В последнем равенстве мы использовали условие α).

Для задания области Зигеля 3-го рода S с базой $\mathscr{D}$ достаточно, очевидно, задать конус и форму $L_t(u, v)$ (см. § 3).

В качестве конуса мы возьмем конус V, который фигурирует в определении H. Форму $L_t(u, v)$ определим следующим образом:

$$L_t(u, v)=F(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}(v-\lambda(t)\bar{v})). \tag{2}$$

Для $c \in C^m$ положим

$$c(t)=c+\lambda(t)\bar{c}, \tag{3}$$

где $\bar{c}$ означает комплексно-сопряженный вектор. Покажем, что для таких $L_t(u, v)$ и $c(t)$ выполняются условия § 3.

Заметим вначале, что справедливо соотношение

$$L_t(u, c(t))=F(u, c) \text{ при всех } u, c \in C^m, t \in \mathscr{D}. \tag{4}$$

Действительно,

$$L_t(u, c(t))=F(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}(c+\lambda(t)\bar{c}-\lambda(t)\bar{c}- \\ -\lambda(t)\overline{\lambda(t)}c))=F(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}(c-\lambda(t)\overline{\lambda(t)}c))=F(u, c). \tag{5}$$

Покажем, что форма $L_t(u, v)$ полуэрмитова. Для этого достаточно доказать, что 1) форма $L_t(u, v)$ комплексно линейна по первому аргументу и вещественно линейна по второму, 2) разность $L_t(u, v)-L_t(v, u)$ чисто мнима. Первое из этих утверждений непосредственно вытекает из определения $L_t(u, v)$. Докажем второе. Для этого, очевидно, достаточно убедиться в том, что разность $L_t(c_1(t), c_2(t))-L_t(c_2(t), c_1(t))$ чисто мнимая. Мы имеем

$$L_t(c_1(t), c_2(t))-L_t(c_2(t), c_1(t))=F(c_1(t), c_2)- \\ -F(c_2(t), c_1)=F(c_1, c_2)-F(c_2, c_1)+F(\lambda(t)\bar{c}_1, c_2)- \\ -F(\lambda(t)c_2, c_1)=2i\,\mathrm{Im}\,F(c_1, c_2). \tag{6}$$

В последнем равенстве мы воспользовались условием α).

«Согласованность» $L_t(u, v)$ и $c(t)$ вытекает из (4). Таким образом, все условия § 3 выполняются.

Мы должны теперь показать, что область Зигеля S, построенная с помощью определенной выше формы $L_t(u, v)$, аналитически эквивалентна некоторой ограниченной области. Вначале мы докажем включение

$$2\operatorname{Re} L_t(c(t), c(t)) - F(c(t), c(t)) \in \overline{V} \tag{7}$$

при всех $c \in C^m$, $t \in \mathscr{D}$.

Пользуясь (4), мы имеем

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re} L_t(c(t), c(t)) - F(c(t), c(t)) = 2\operatorname{Re} F(c(t), c) - \\ - F(c(t), c(t)) = 2F(c, c) + 2\operatorname{Re} F(\lambda(t)\bar{c}, c) - F(c, c) - \\ - F(\lambda(t)\bar{c}, c) - F(c, \lambda(t)\bar{c}) - F(\lambda(t)\bar{c}, \lambda(t)\bar{c}) = \\ = F(c, c) - F(\lambda(t)\bar{c}, \lambda(t)\bar{c}) \in V.\end{aligned}$$

Последнее соотношение следует из β).

Область S аналитически эквивалентна некоторой ограниченной области. Действительно, из (7) вытекает, что S содержится в области

$$\operatorname{Im} z - \frac{1}{2} F(u, u) \in V, \quad t \in \mathscr{D},$$

которая, очевидно, представляет собой произведение двух областей, аналитически эквивалентных ограниченной области.

Сделаем теперь некоторые замечания, которые разъясняют смысл условий α), β), γ).

Условие α) мы использовали для доказательства полуэрмитовости формы $L_t(u, v)$. Условие β) гарантировало аналитическую эквивалентность области S ограниченной области. Условие γ), как нетрудно проверить, эквивалентно существованию у отображения $c \to c(t)$ обратного отображения.

Покажем, что условие β) может быть заменено на одно из следующих условий:

β') $\operatorname{Re} L_t(u, u) \in \overline{V}$ при всех $u \in C^m$,

β'') $L_t^{(1)}(u, u) \in \overline{V}$ при всех $u \in C^m$,

где $L_t(u, v)$ определена формулой (2), $L_t^{(1)}(u, v)$ означает эрмитову часть формы $L_t(u, v)$.

Действительно, из (7) ясно, что из условия β) следует β'). Далее, в силу тождества $2L_t^{(1)}(u, u) = \operatorname{Re} L_t(u, u) + \operatorname{Re} L_t(iu, iu)$ имеем, что из β') следует β''). Остается доказать, что из условия β'') следует β'). Легко проверить соотношение

$$L_t^{(1)}(u, u) = F(u, (E - \lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}u).$$

Положим $u = (E - \lambda(t)\overline{\lambda(t)})\,u_1$. Тогда из α) следует:

$$F\left(u, (E - \lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}u\right) = F\left((E - \lambda(t)\overline{\lambda(t)})\,u_1, u_1\right) =$$
$$= F(u_1, u_1) - F(\lambda(t)\overline{\lambda(t)}\,u_1, u_1) = F(u_1, u_1) - F(\lambda(t)\,\bar{u}_1, \lambda(t)\bar{u}_1),$$

откуда ясно, что из β'') следует β).

Перейдем теперь к рассмотрению условий аналитической однородности построенной области S.

Обозначим через Ω совокупность всех аффинных преобразований $y \to Ay$ конуса V на себя, которые продолжаются до аффинных преобразований всей области S, т. е. для которых существует такое невырожденное преобразование $u \to Bu$, что

$$AL_t(u, v) = L_t(Bu, Bv) \text{ при всех } u, v \in C^m, t \in \mathcal{D}. \quad (8)$$

Обозначим через G совокупность всех аналитических автоморфизмов $t \to g(t)$ области $\mathcal{D}$, которые продолжаются до аналитических автоморфизмов всей области S, т. е. для которых существуют: а) аналитическая в $\mathcal{D}$ матричная функция $B(t)$, б) симметрическая билинейная векторная форма $K_t(u, v)$ на C^m со значениями в C^n, аналитически зависящая от $t \in \mathcal{D}$, причем выражение

$$K_t(u, u) + L_{g(t)}(B(t)\,u, B(t)\,u) - L_t(u, u) \text{ чисто мнимо} \quad (9)$$

при всех $u \in C^m$, $t \in \mathcal{D}$.

Из теоремы 2 § 3 вытекает, что если Ω транзитивна в конусе V, а G транзитивна в $\mathcal{D}$, то область S аналитически однородна.

Покажем, что условия (8) и (9) можно сформулировать в форме, более пригодной для проверки.

В самом деле, (8) имеет место тогда и только тогда, когда

$$B\lambda(t) = \lambda(t)\,\overline{B}, \quad (10)$$

$$F(Bu, Bv) = AF(u, v). \quad (11)$$

Для доказательства этого заметим вначале, что из (10) и (11) следует (8). Действительно, из (10) следует:

$$B(E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})=(E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})B,$$

откуда

$$(E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}B=B(E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}. \qquad (12)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_t(Bu,\ Bv) &= F(Bu,\ (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}(Bv-\lambda(t)\overline{Bv}))= \\ &= F(Bu,\ (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}B(v-\lambda(t)\bar{v}))= \\ &= F(Bu,\ B(E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}(v-\lambda(t)\bar{v}))=AL_t(u,\ v). \end{aligned}$$

Покажем обратное, а именно, что из (8) следуют (10) и (11). Прежде всего заметим, что соотношение (8) должно выполняться отдельно для эрмитовой и для симметрической частей формы $L_t(u,\ v)$.

Следовательно,

$$F(Bu,\ (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}Bv)=AF(u,\ (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}v), \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} E(Bu,\ (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}\lambda(t)\overline{Bv}) &= \\ &= AF(u,\ (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}\lambda(t)\bar{v}) \qquad (14) \end{aligned}$$

при всех $u,\ v\in C^m,\ t\in\mathscr{D}$.

Заменяя в (13) v на $B^{-1}\lambda(t)\overline{B}\bar{v}$, мы получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} F(Bu,\ (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}\lambda(t)\overline{Bv}) &= \\ &= AF(u,\ (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}B^{-1}\lambda(t)\overline{B}\bar{v}). \qquad (15) \end{aligned}$$

Из (14) и (15) следует, что

$$F(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}\lambda(t)\bar{v})=F(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}B^{-1}\lambda(t)\overline{B}\bar{v}),$$

откуда, пользуясь невырожденностью функции $F(u,\ v)$ (см. § 2), мы заключаем, что

$$\lambda(t)=B^{-1}\lambda(t)\overline{B}. \qquad (16)$$

Мы показали, что из (8) следует (10). Из (10), как мы видели выше, следует (12). Из (12) и (13), как легко видеть, следует (11).

Перейдем теперь к изучению условия (9). Заменяя в (9) u на iu, мы получим, что выражение

$$-K_t(u, u)+L_{g(t)}(iB(t)u, iB(t)u)-L_t(iu, iu) \text{ чисто мнимо.} \tag{17}$$

Складывая и вычитая выражения (9) и (17), мы получим

$$L^{(1)}_{g(t)}(B(t)u, B(t)u)=L^{(1)}_t(u, u), \tag{18}$$

$$K_t(u, u)+L^{(2)}_{g(t)}(B(t)u, B(t)u)-L^{(2)}_t(u, u)=0, \tag{19}$$

где $L^{(1)}_t(u, v)$ и $L^{(2)}_t(u, v)$ — эрмитова и симметрическая части формы $L_t(u, v)$. Знак равенства в (18) имеет место в силу вещественности формы $L^{(1)}_t(u, u)$, а в (19) — из-за аналитичности левой части. Ясно и обратное, т. е. из (18) и (19) следует (9).

Заметим, что из (18) и (19) обычным способом можно получить соотношения:

$$L^{(1)}_{g(t)}(B(t)u, B(t)v)=L^{(1)}_t(u, v), \tag{20}$$

$$K_t(u, v)=L^{(2)}_t(u, v)-L^{(2)}_{g(t)}(B(t)u, B(t)v). \tag{21}$$

Переходя к выражению L через F, мы получим следующие соотношения:

$$F(B(t)u, (E-\lambda(g(t))\overline{\lambda(g(t))})^{-1}B(t)v)= \\ =F\big(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}v\big), \tag{22}$$

$$K_t(u, v)=F(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}\lambda(t)\bar{v})- \\ -F(B(t)u, (E-\lambda(g(t))\overline{\lambda(g(t))})^{-1}\lambda(t)\overline{B}(t)\bar{v}). \tag{23}$$

Пользуясь (22), мы находим для $K_t(u, v)$ следующее выражение:

$$K_t(u, v)=F\big(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}\lambda(t)\bar{v}\big)- \\ -F(u, (E-\lambda(t)\overline{\lambda(t)})^{-1}B^{-1}(t)\lambda(g(t))\overline{B}(t)\bar{v}), \tag{24}$$

откуда вытекает, что матричная функция

$$(E-\overline{\lambda(t)}\lambda(t))^{-1}\big(\overline{B}^{-1}(t)\lambda(g(t))B(t)-\overline{\lambda(t)}\big)$$

голоморфна в области.

Таким образом, (9) эквивалентно (22) и (24).

Прежде чем заняться явной конструкцией однородных областей Зигеля 3-го рода, мы установим простой критерий несимметричности областей Зигеля 3-го рода.

Лемма 1. *Пусть S — некоторая область Зигеля 3-го рода с базой $\mathcal{D}$. Если область $\mathcal{D}$ несимметрическая, то область S также будет несимметрической.*

Доказательство. Напомним, что область S задается соотношениями вида

$$\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} L_t(u, u) \in V, \quad t \in \mathcal{D}.$$

Отображение $z \to z$, $u \to -u$, $t \to t$ является аналитическим автоморфизмом области S. Множество неподвижных точек этого автоморфизма представляет собой произведение двух областей, а именно — области Зигеля 1-го рода ($\operatorname{Im} z \in V$) и области $\mathcal{D}$. Поскольку область $\mathcal{D}$ несимметрическая, это произведение также является несимметрической областью. Теперь из леммы 3 § 18 сразу следует, что и область S несимметрическая.

Перейдем теперь к конструкции однородных областей Зигеля 2-го рода. Мы покажем, как для каждой однородной области Зигеля 2-го рода, описанной в § 18, построить связанные с ней однородные области Зигеля 3-го рода.

Начнем со следующего замечания. Пусть H — некоторая область Зигеля 2-го рода, заданная, как обычно, соотношением

$$\operatorname{Im} z - F(u, u) \in V.$$

Обозначим через Ω_0 некоторую группу линейных преобразований $u \to Bu$ пространства C^m таких, что

$$F(Bu, Bv) = AF(u, v),$$

где A — некоторое линейное преобразование конуса V, свое для каждого $B \in \Omega_0$.

Назовем Ω_0-мультипликатором такое линейное преобразование $u \to \lambda u$ пространства C^m, что имеют место равенства

$$F(\lambda u, \bar{v}) = F(\lambda v, \bar{u}), \tag{25}$$

$$(B\lambda)\bar{u} = \lambda \bar{B} \bar{u} \tag{26}$$

при всех u, $v \in C^m$ и любом $B \in \Omega_0$ ($\bar{u}$ — вектор, комплексно-сопряженный с u).

Совокупность всех Ω_0-мультипликаторов, очевидно, сама представляет собой линейное комплексное пространство. Рассмотрим, далее, совокупность K таких Ω_0-мультипликаторов λ, что

$$F(u, u) - F(\lambda\bar{u}, \lambda\bar{u}) \in \bar{V} \quad \text{и} \quad F(u, u) \neq F(\lambda\bar{u}, \lambda\bar{u}) \qquad (27)$$

при всех $u \neq 0$, принадлежащих C^m.

Нетрудно видеть, что K представляет собой ограниченную область.

Ниже будет показано, что для всех областей Зигеля 2-го рода, описанных в § 18, K представляет собой классическую область.

Конструкция по области Зигеля 2-го рода H и ограниченной однородной области $\mathcal{D}$ некоторой области Зигеля 3-го рода сводится к построению аналитического отображения φ области $\mathcal{D}$ в K, обладающего следующим свойством: существует транзитивная на $\mathcal{D}$ совокупность аналитических автоморфизмов g области $\mathcal{D}$, для каждого из которых существует такой аналитический автоморфизм h области K, что $\varphi g = h\varphi$.

Отметим, что отображение φ, вообще говоря, не взаимно однозначно. Действительно, пусть $\mathcal{D}$ — некоторая ограниченная область. Для задания по H и $\mathcal{D}$ некоторой области Зигеля 3-го рода S достаточно определить функцию $\lambda(t)$, для которой выполняются соотношения α), β), γ). Каждому аналитическому отображению φ области $\mathcal{D}$ в K соответствует, очевидно, некоторая область Зигеля 3-го рода с базой $\mathcal{D}$, поскольку это отображение однозначно определяет функцию $\lambda(t)$ формулой $\lambda = \varphi(t)$.

Область K естественно назвать *классифицирующим пространством* по аналогии с теорией расслоенных пространств.

Нетрудно проверить, что классифицирующее пространство для произведения областей Зигеля 2-го рода является произведением классифицирующих пространств для сомножителей. Поэтому достаточно описать классифицирующие пространства для неприводимых областей Зигеля 2-го рода.

1. Рассмотрим однородные области Зигеля 2-го рода, описанные в пункте **1** § 18. Напомним, что пространство, в котором определяются вектор-функции $F(u, v)$, описывается следующим образом.

Пусть p и s — некоторые целые положительные числа. Рассмотрим все прямоугольные матрицы U из p строк и s столбцов. Мы будем предполагать, что матрицы U разбиты произвольным образом на «ящики» и что все элементы, стоящие ниже «диагонали» из «ящиков», равны нулю. Матрицы указанного вида образуют комплексное аффинное пространство, которое мы обозначим через C^m.

Группа Ω_0 состоит из всех вещественных матриц B, разбитых аналогичным образом на «ящики», причем опять все элементы ниже «диагонали» равны нулю.

Легко видеть, что совокупность всех Ω_0-мультипликаторов тождественна с совокупностью всех квадратных «квазидиагональных» комплексных симметрических матриц λ порядка s, причем каждой такой матрице соответствует следующее преобразование пространства*) C^m:

$$U \to U\lambda. \tag{28}$$

Условие (27) означает, что

$$\lambda^*\lambda < E,$$

откуда ясно, что K есть произведение симметрических областей III типа.

Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая ограниченная область в аффинном комплексном пространстве, точки которого обозначим через t.

Обозначим через G некоторую транзитивную группу аналитических автоморфизмов области $\mathscr{D}$. Предположим, что нам дано аналитическое отображение φ области $\mathscr{D}$ в K, при котором аналитические автоморфизмы $g \in G$ продолжаются до аналитических автоморфизмов всего K. Определим теперь функцию $\lambda(t)$ формулой

$$\lambda(t) = \varphi(t).$$

Покажем, что так построенная область Зигеля 3-го рода будет аналитически однородна. Для этого достаточно проверить выполнение условий (8) и (9). Для (8) это очевидно. Чтобы проверить выполнение условия (9), нужно вначале

*) Разбиение матриц λ на «ящики» однозначно определяется тем, что (28) является преобразованием пространства C^m.

определить соответствующим образом матричную функцию $B(t)$. Для этого заметим, что аналитические автоморфизмы области K могут быть записаны следующим образом:

$$\lambda \to (A_{11}\lambda + A_{12})(A_{21}\lambda + A_{22})^{-1}, \tag{29}$$

где A_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — квадратные матрицы.

Пусть g — некоторый аналитический автоморфизм области $\mathscr{D}$. Предположим, что (28) — продолжение его на все K, тогда $B(t)$ определяется как матрица преобразования

$$U \to U(A_{21}\lambda(t) + A_{22})^{-1}.$$

Нетрудно проверить с помощью формул § 7, что при таком определении $B(t)$ имеют место соотношения (22) и (24), эквивалентные (9).

2. Рассмотрим теперь области Зигеля 2-го рода, описанные в пункте **2** § 18. Напомним, что пространство, в котором задается вектор-функция $F(u, v)$, состоит из пар $u = (U^{(1)}, U^{(2)})$, $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ — прямоугольные матрицы типа $p \times s_1$ и $p \times s_2$ соответственно. Мы предполагаем, что матрицы $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ разбиты на «ящики», каждая по-своему, и что все элементы ниже «диагонали» каждой из матриц равны нулю. Совокупность всех таких матриц образует пространство, которое мы обозначим через C^m.

Группа Ω_0 состоит из всех квадратных матриц B порядка p таких, что преобразование

$$(U^{(1)}, U^{(2)}) \to (BU^{(1)}, \bar{B}U^{(2)})$$

переводит C^m в себя.

Рассмотрим совокупность всех прямоугольных матриц λ типа $s_1 \times s_2$ таких, что преобразование

$$(U^{(1)}, U^{(2)}) \to (U^{(2)}\lambda', U^{(1)}\lambda)$$

является аффинным преобразованием введенного нами пространства. Так же как и выше, нетрудно показать, что условие (27) означает, что имеет место неравенство:

$$\lambda^*\lambda < E.$$

Следовательно, K является произведением симметрических областей I типа. Мы опускаем дальнейшие построения, поскольку они совершенно аналогичны построениям предыдущего пункта.

3. Здесь мы рассмотрим однородные области Зигеля 2-го рода, описанные в пункте **3** § 18.

Конус V в этом случае задается неравенством

$$y_1 y_2 - y_3^2 - \ldots - y_{n+2}^2 > 0, \qquad y_1 > 0.$$

Мы будем считать, что $n \geqslant 3$, так как при $n \leqslant 2$ конус V совпадает с уже рассмотренными выше.

Напомним, что пространство C, в котором задана вектор-функция $F(u, v)$, состоит из троек

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

где u_0 — s-мерный комплексный вектор, а u_1, u_2 принадлежат вспомогательному комплексному пространству C_0^N, причем $N = p2^\nu$, $\nu = \left(\frac{n-1}{2}\right)$.

Мы не будем приводить выкладки, с помощью которых определяется K, а ограничимся формулировкой окончательного результата.

Оказывается, что K представляет собой произведение двух областей K_1 и K_2, причем K_1 — классическая область II типа, т. е. совокупность всех кососимметрических матриц λ_1 порядка p таких, что

$$\lambda_1 \lambda_1^* < E,$$

K_2 — классическая область III типа, т. е. совокупность всех комплексных симметрических матриц λ_2 порядка s таких, что

$$\lambda_2 \lambda_2^* < E.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые применялись в пункте **1**.

4. Рассмотрим однородные области Зигеля 2-го рода, описанные в пункте **4** § 18.

Напомним, что пространство C, в котором определяется вектор-функция $F(u, v)$, состоит из всех комплексных матриц U типа $2p \times s$, разбитых некоторым способом на «ящики», причем, как и выше, все элементы ниже «диагонали» — нули.

Группа Ω_0 состоит из всех квадратных комплексных матриц B порядка p таких, что имеет место равенство $BJ = J\overline{B}$ и

$$U \to BU$$

является преобразованием нашего пространства C (J определено в § 18 (39)).

Можно показать, что совокупность всех Ω_0-мультипликаторов тождественна с совокупностью таких кососимметрических матриц λ порядка s, что

$$U \to JU\lambda$$

есть преобразование пространства C.

K представляет собой совокупность всех λ указанного вида таких, что

$$\lambda\lambda^* < E_s.$$

Ясно, что K является произведением классических областей II типа. Остальные рассуждения аналогичны тем, которые применяются в пункте 1.

Отметим в заключение, что все построенные таким образом области Зигеля 3-го рода можно вложить в соответствующую классическую область достаточно высокой размерности так, чтобы их естественные аналитические автоморфизмы продолжались до аналитических автоморфизмов всей классической области. Из этого вытекает возможность следующей «многоэтажной» конструкции несимметрических областей.

Пусть H_ν ($\nu = 0, 1, \ldots$) — некоторая последовательность областей Зигеля 2-го рода. Мы будем предполагать, что все они из числа описанных в § 18.

Обозначим через K_ν классическую область, соответствующую H_ν. Предположим, что существует такое аналитическое отображение H_0 в K_1, при котором естественные аналитические автоморфизмы H_0 продолжаются до аналитических автоморфизмов всего K_1. Тогда, как мы знаем, можно построить некоторую область Зигеля 3-го рода с базой H_0 и слоем H_1.

Обозначим ее через S_1. Предположим, что существует аналитическое отображение S_1 в K_2, обладающее нужными свойствами, тогда можно построить область Зигеля 3-го рода S_2 с базой S_1 и слоем H_2. Аналогично при выполнении соответствующих условий строятся S_3, S_4 и т. д.

После написания настоящей книги автор доказал, что любую ограниченную однородную область можно получить такой конструкцией из соответствующих однородных областей Зигеля 2-го рода, в которой транзитивно действует разрешимая группа Ли.

ЛИТЕРАТУРА

Бейли В. (Baily W.)

1. On the quotient of an analytic manifold by a group of analytic homeomorphisms. Proc. Nat. Akad. Sci. U. S. A. **40** (1954), 804—808.

2. Satake's compactification of V^n. Amer. J. Math. **80** (2) (1958), 348—364.

Борель А. (Borel A.)

1. Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **40** (1954), 1147—1151.

Бохнер С. и Мартин У. Т.

1. Функции многих комплексных переменных, Гостехиздат, 1951.

Бохнер С. (Bochner S.)

1. Algebraic and linear dependence of automorphic functions in several variables, J. Indian Math. Soc. **16** (1952), 1—6.

Вейль Г. (Weil A.)

1. Discontinuous subgroups of classical groups.

Вейль Г. (Weyl H.)

1. Классические группы, Гостехиздат, 1947.

2. Theory of reduction for arithmetical equivalence. I. Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 126—164, II. Trans. Amer. Math. Soc. **51** (1942), 203—231.

3. Fundamental domains for lattice groups in division algebras. Comment. mat. helv. **17** (1944—1945), 283—306.

Винберг Э. Б.

1. Однородные конусы. Докл. АН СССР **133**, № 1 (1960), 9—13.

Гельфанд И. М. и Граев М. И.

1. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с этим вопросы интегральной геометрии. Тр. Моск. матем. об-ва **8** (1959), 321—390.

Гельфанд И. М. и Фомин С. В.

1. Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны. Успехи матем. наук **VIII** (1952), 118—137.

Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И.

1. Теория представлений и теория автоморфных функций Успехи матем. наук XIV (2) (1959), 172—194.

Граев М. И.

1. Унитарные представления вещественных простых групп Ли. Тр. Моск. матем. об-ва 7 (1958), 335—389.

Зигель К. Л. (Siegel C. L.)

1. Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, Гостехиздат, 1954.
2. Einheiten quadratischer Formen. Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 13 (4) (1940), 209—239.
3. Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. 116 (1939), 617—657.
4. Symplectic Geometry. Amer. J. Math. 65 (1943), 1—86.
5. Discontinuous groups. Ann. Math. 44 (2) (1943), 674—689.
6. Uber die analytische Theorie der Quadratischen formen. Ann. Math. 36 (3) (1935), 527—606.
7. Some remarks on discontinuous groups. Ann. Math. 46 (2) (1945), 708—718.
8. Мероморфные функции на компактных аналитических многообразиях, Математика. Сб. переводов 1 : 1 (1957), 37—42.
9. Uber einige Ungbeichungen bei Bewegungsgruppen in der nichteuklidischen Ebene. Math. Ann. 133, № 2 (1957), 127—138.

Карпелевич Ф. И.

1. Геодезические линии и гармонические функции на симметрических пространствах. Докл. АН СССР 124, № 6 (1959), 1199—1202.

Картан Э. (Gartan E.)

1. Геометрия римановых пространств, ОНТИ, 1936.
2. Теория спиноров, ИЛ, 1947.
3. Sur les domaines bornés homogénes de l'espace de n variables complexes, Abhandl. mats. Semin. Univ. Hamburg II (1936), 116—162.

Картан А. (Cartan H.)

1. Prolongement des espaces analytiques normaux. Math. Ann. 136 (1958), 97—110.
2. Seminaire E. N. S. (1957—1958).
3. Seminaire E. N. S. (1953—1954).

Кехер М. (Koecher M.)

1. Positivitätsbereiche im R^n, Amer. J. Math. 79 (3) (1957), 575—597.
2. Zur Theorie der Modulformen n Grades. Math. Z. 59 (1954), 399—416.

Клинген Г. (Klingen H.)

1. Über die analytischen Abbildungen verallgemeinerter Einheitskreise auf sich. Math. Ann. 132 (1956), 134—144.

2. Discontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen Math Ann. **129** (1955), 345—369.

Кобаяси С. (Kobayashi S.)

1. Geometry of bounded domains, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (2) (1959), 267—291.

Кошуль (Koszul J. L.)

1. Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes. Canad. J. Math. **VII**, № 4 (1955).

Левин Б. Я.

1. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956.

Пятецкий-Шапиро И. И.

1. Сингулярные модулярные функции, Изв. АН СССР. Сер. матем. **20** (1956), 53—98.
2. Абелевы модулярные функции. Докл. АН СССР **95**, № 2 (1954), 221—224.
3. Аналог теоремы Лефшеца. Докл. АН СССР **96**, № 5 (1954), 917—920.
4. К теории абелевых модулярных функций. Докл. АН СССР **106**, № 6 (1956), 973—976.
5. Классификация модулярных групп. Докл. АН СССР **110**, № 1 (1956), 19—22.
6. Об оценке размерности пространства автоморфных форм для некоторых типов дискретных групп. Докл. АН СССР **113**, № 5 (1957), 980—983.
7. Некоторые вопросы гармонического анализа в однородных конусах. Докл. АН СССР **116**, № 2 (1957), 181—184.
8. Об одной проблеме Э. Картана. Докл. АН СССР **124**, № 2 (1959), 272—273.
9. Дискретные группы аналитических автоморфизмов полицилиндра. Докл. АН СССР **124**, № 4 (1959), 760—763.
10. Геометрия однородных областей и теория автоморфных функций. Решение одной проблемы Э. Картана. Успехи матем. наук **XIV** (3) (1959), 190—192.
11. Теория модулярных функций и смежные вопросы теории дискретных групп. Успехи матем. наук **XV** (1) (1960), 99—136.

Раманатан К. Г. (Ramanathan K. G.)

1. Quadratic forms over invalutorial division algebras. J. Indian Math. Soc. **20** (1—3) (1956), 227—259.
2. On ortogonal groups. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. IIa 6 (1957), 113—121.
3. Units of Fixed Point in Involutorial Algebras. Proc. Int. Sympos. Algebr. Number. Theory, Tokyo, 1955, 103—106.

Реммерт Р. (Remmert R.)

1. Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. Math. Ann. **132** (1956), 277—288.

Сатаке И. (Satake I.)

1. On the compactification of the Siegel space. J. Indian Math. Soc. 20 (1—3) (1956), 259—281.

Сельберг А. (Selberg A.)

1. Гармонический анализ и дискретные группы в слабосимметрических римановых пространствах; приложение к теории рядов Дирихле. Математика. Сб. переводов 1:4 (1957), 3—28.

Форд Р.

1. Автоморфные функции, ОНТИ, 1935.

Фукс Б. А.

1. Теория аналитических функций многих комплексных переменных, Гостехиздат, 1948.

Хано И. (Hano I.)

1. On Käehlerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups. Amer. J. Math. 79 (4) (1957), 885—900.

Хуа Ло Кен.

1. Гармонический анализ в классических областях, ИЛ, 1960.
2. On the theory of automorphic functions of a matrix variable. Amer. J. Mauh. 66 (1944), 470—488, 531—563.
3. On the theory of Fuchsian functions of several variables. Ann. Math. 47 (2) (1946), 117—191.

Пятецкий-Шапиро Илья Иосифович

Геометрия классических областей
и теория автоморфных функций

Редактор *А. Н. Копылова*
Техн. редактор *Е. А. Ермакова*
Корректор *Г. Г. Желтова*

Сдано в набор 15/XII 1960 г. Подписано к печати 22/II 1961 г. Бумага $84\times108/_{32}$. Физ. печ. л. 6. Усл.-печ. л. 9,84. Уч.-изд. л. 9,24. Тираж 5000 экз. Т-03103. Цена книги 66 коп. Заказ 2021.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр. 29.