

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-

ТЕХНИЧЕСКИЙ

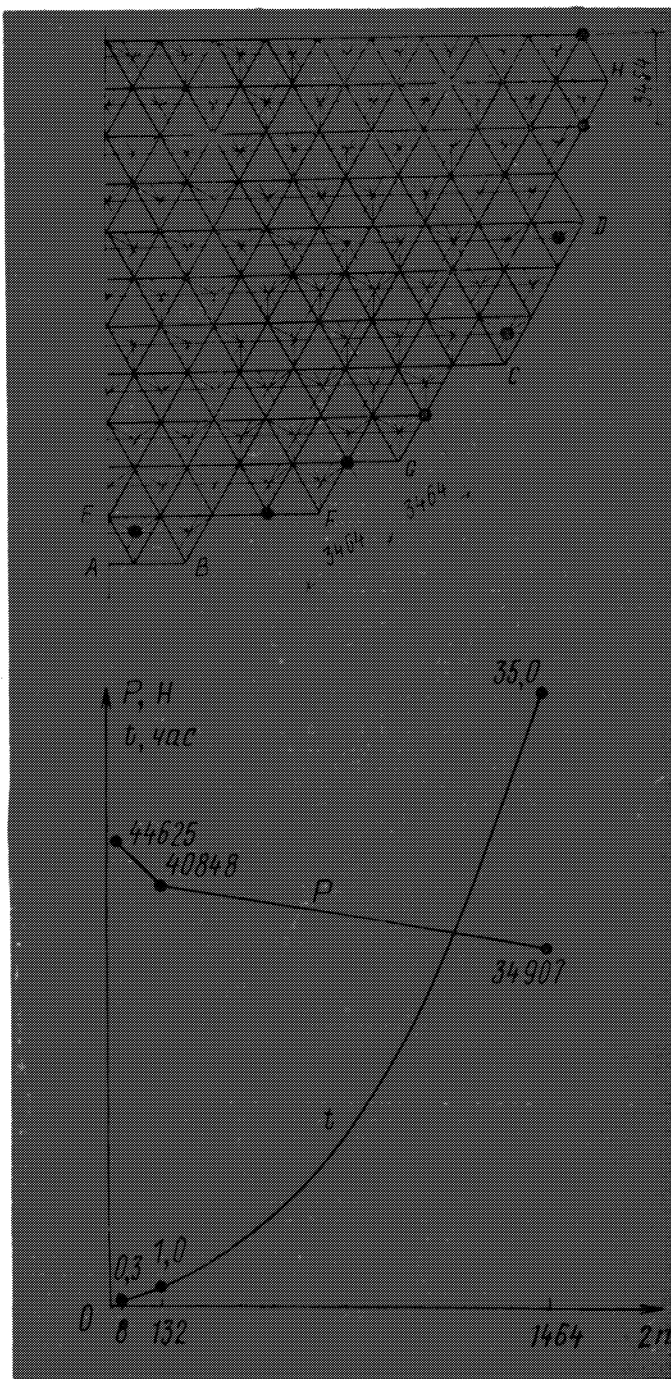
ЖУРНАЛ

ГОСУДАРСТВЕННОГО

СТРОИТЕЛЬНОГО

КОМИТЕТА

СССР



5
1988

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ГОСУДАРСТВЕННОГО СТРОИТЕЛЬНОГО
КОМИТЕТА СССР

Издается с января 1959 г. №5(179) сентябрь, октябрь 1988 Выходит 6 раз в год
Москва Стройиздат

НА ПУТИ РЕВОЛЮЦИОННОГО ОБНОВЛЕНИЯ СОВЕТСКОГО ОБЩЕСТВА

Внимание миллионов советских людей приковано к решениям XIX Всесоюзной конференции КПСС, которые имеют огромное значение для судеб нашей страны. Конференция, на которой шло откровенное, деловое, острое и принципиальное обсуждение вопросов, волнующих всех советских людей, явилась крупным событием в истории партии.

Дискуссия, развернувшаяся в ходе обсуждения доклада Генерального секретаря ЦК КПСС М. С. Горбачева «О ходе реализации решений XXVII съезда КПСС и задачах по углублению перестройки» и проходившая при чрезвычайно высокой активности делегатов, охватила большой комплекс проблем обновления советского общества и искоренения его социально-экономического развития. Она отразила ту политическую атмосферу и уровень демократических перемен, которые сложились за время, прошедшее после апрельского (1985 г.) Пленума ЦК КПСС. В центре внимания конференции стояли вопросы дальнейшего углубления перестройки, всеохватывающей демократизации жизни, радикальной реформы политической системы нашего общества. Главный итог конференции, как сказал в речи при ее закрытии М. С. Горбачев, состоит в том, что по всем коренным вопросам, которые были предметом общепартийного, общенародного обсуждения на основе Тезисов ЦК КПСС, выработана программная политическая позиция.

Конференция отметила, что выработанный партией стратегический курс на всестороннее и революционное обновление советского общества, на осуществление радикальной экономической реформы и демократизацию общества неуклонно претворяется в жизнь. Идет процесс оздоровления экономики, ее поворот к удовлетворению насущных потребностей людей. Развиваются процессы демократизации и гласности. Внедряются новые методы хозяйствования и организационные структуры управления. Возобновлен рост реальных доходов трудящихся, реализуются практические меры по увеличению производства продуктов питания и предметов потребления, расширению жилищного строительства. Начаты реформы образования и системы здравоохранения. Проводятся меры по обновлению и приданию динамизма внешней политике.

Однако коренного перелома в экономическом, социальном и культурном развитии не произошло. Экономике во многом еще присуще движение по экстенсивному пути, а ее структура сохраняет пока в основном затратный характер. Медленными темпами разворачивается научно-технический прогресс, не наблюдается заметного улучшения качества продукции. Не выполняются планы по увеличению национального дохода и ресурсосбережению. Острой остается проблема снабжения населения продовольственными и промышленными товарами, обеспечения жилищем и оказания услуг. Все это свидетельствует о необходимости дальнейшего углубления перестройки.

Конференция признала, что только кардинальная реформа политической системы способна открыть новые возможности углубления перестройки и обеспечить гарантии ее необратимости. Она должна приобрести комплексный характер, охватив все звенья системы, и осуществляться скоординированно в единстве с перестройкой в экономике и во всем обществе.

Основное направление реформы — создать такую политическую систему, при которой

© Стройиздат, «Строит. механика и расчет сооружений», 1988

все дела в стране решались бы народом и его полномочными представителями, находились под его полным и действенным контролем, а Советам народных депутатов как основе социалистической государственности и самоуправления было обеспечено действительное полновластие.

Конференция отметила, что важнейшими предпосылками эффективного функционирования политической системы является преобразование высшей власти в государстве, которое предусматривает ежегодный созыв съездов народных депутатов СССР, деятельность на регулярной основе двухпалатного Верховного Совета, учреждение поста Председателя Верховного Совета, демократическое использование ими своих prerogativ, конституционно регламентированное взаимодействие всех высших эшелонов власти, включая Совет Министров СССР.

Важнейшим направлением реформы политической системы является также децентрализация управления и перераспределение функций и полномочий, обеспечивающие развитие максимальной инициативы и самостоятельности на местах. Ключевое значение имеет разграничение функций партийных и государственных органов.

Реформа предусматривает обновление деятельности и значительное повышение роли в функционировании политической системы общественных организаций, представляющих интересы различных слоев населения.

Осуществление реформы политической системы должно способствовать расширению и углублению демократизации советского общества, созданию социалистического правового государства, в котором высшим принципом должно стать безусловное подчинение всего и всех закону, обеспечение защиты конституционных прав и свобод советских людей, ответственность государства перед гражданином и гражданина перед государством.

Демократизация общества должна идти в направлении упрощения структуры и совершенствования методов работы государственного аппарата, перестройки избирательной системы.

Конференция отметила, что успех осуществления реформы политической системы во многом зависит от деятельности партии, от глубины демократизации ее внутренней жизни. В связи с этим поставлен ряд задач по восстановлению ленинского понимания принципа демократического централизма, повышению самостоятельности и боевности первичных партийных организаций, развертыванию критики и самокритики, укреплению авторитета выборных органов, повышению деловитости партийных собраний и пленумов, обновлению кадровой политики.

Большое внимание на конференции было уделено межнациональным отношениям. Отметив успешное решение национального вопроса в условиях социалистического строительства, конференция вместе с тем подчеркнула, что достигнутые результаты в решении национального вопроса абсолютизировались, утверждалось представление о беспроblemности национальных отношений. В период культа личности и времени застоя постепенно накапливались негативные явления, которые своевременно не решались. Конференция поставила задачу настойчиво осуществлять курс XXVII съезда партии на сочетание интересов всех наций и народностей с общими интересами и потребностями страны, своевременно решать возникающие проблемы на основе ленинских принципов и норм национальной политики. В резолюции конференции сказано, что радикальная экономическая реформа, процесс демократизации открывают широкий простор для оптимального сочетания интересов как национально-государственных образований, так и страны в целом.

Конференция признала, что в социально-экономической сфере важнейшей задачей является ускорение решения насущных проблем народного благосостояния. Партия последовательно проводит в жизнь линию XXVII съезда КПСС на социальную переориентацию экономики. Прежде всего следует добиться существенного улучшения продовольственного снабжения страны. Кратчайший путь его осуществления — всемерное раскрытие потенциала колхозов и совхозов на основе развития разнообразных форм подряда и аренды, создания широкой сети кооперативов. Должно быть восстановлено социально-экономическое равновесие между городом и деревней.

Конференция одобрила меры по резкому увеличению объемов, темпов и улучшению качества жилищного строительства. Было привлечено внимание к задачам поддержания жилья в надлежащем состоянии. Должны быть безусловно выполнены принятые программы по здравоохранению и охране окружающей среды.

Революционная перестройка предполагает всемерную активизацию интеллектуального, духовного потенциала общества, прогресса науки и техники, увеличение научно-технического вклада ученых и инженерных кадров, повышение их престижа и улучшение условий работы. Конференция подчеркнула важность интенсивного развития фундаментальных и прикладных наук, решения острых проблем внедрения открытий и изобретений в практику, постоянной связи науки с производством. Необходимы новые формы организации научной жизни, дальнейшая демократизация всей сферы науки и культуры. Должны быть приняты меры по созданию надлежащей материальной базы для этой сферы.

Решения XIX партийной конференции служат надежной основой для дальнейшего развития процесса революционного обновления нашего общества.

УДК 624.074.1.046.5:681.3

И. Н. КАЛИНИН, канд. физ.-мат. наук, С. С. НИКИШИН, инж.
(Горьковский филиал ВНИИМаш)

Исследование и оптимальное проектирование структурной плиты перекрытия выставочного павильона

Методы и средства систем автоматизированного проектирования (САПР) в настоящее время широко входят в практику деятельности проектных организаций. Одной из важнейших составляющих САПР является математическое обеспечение получения оптимальных решений при выполнении всех необходимых проектных и технологических требований. В области разработки методов оптимизации достигнут существенный прогресс — имеется большое число достаточно эффективных методов с готовым программным обеспечением для ЭВМ; разрабатываются пакеты прикладных программ, реализующие наиболее известные и хорошо себя зарекомендовавшие алгоритмы; создаются диалоговые системы оптимизации. С помощью готового математического обеспечения сейчас уже можно достаточно уверенно решать широкий круг задач оптимизации в различных постановках. Однако специфика реализации методов оптимизации и особенности задач оптимального проектирования конструкций в подавляющем большинстве случаев не позволяют обеспечить получение оптимальных проектов при наличии большого числа переменных (несколько десятков и более) и значительных затратах на расчет напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции. Поэтому для отдельных, практически важных классов задач разрабатываются специализированные подходы и методы, позволяющие расширить возможности исследователя в оптимальном проектировании реальных систем с большим числом варьируемых переменных. Разработка подобных подходов служит также дальнейшему развитию систем автоматизации проектирования и обеспечению потребностей промышленного производства.

В статье рассматривается решение задачи оптимального проектирования структурной плиты перекрытия выставочного павильона. Описываются схема численного решения, способы учета физических особенностей задачи, приводятся численные результаты, обсуждаются перспективы дальнейшего развития программного и математического обеспечения.

1. Постановка задачи. Рассматривается пространственная стержневая структурная плита (рис. 1), изготовленная из трубчатых элементов [1]. Считается, что материал линейно упругий.

Математическая постановка задачи следующая. Требуется определить параметры поперечных сечений трубчатых элементов: толщины X^* и внешние диаметры Y^* , (X^* , $Y^* \in E^n$) из условия минимума веса конструкции

$$P(X, Y) = \rho \sum_{i=1}^m F_i l_i \quad (1)$$

при ограничениях:
по прочности

$$\sigma_i^e(X, Y) \leq [\sigma]^\pm, \quad (i = \overline{1, m}, e = \overline{1, q}), \quad (2)$$

по эйлеровской устойчивости сжатых стержней

$$\sigma_i^e(X, Y) \leq \sigma_k(X, Y), \quad (i = \overline{1, p}, e = \overline{1, q}), \quad (3)$$

по перемещениям узлов

$$u_j^e(X, Y) \leq [U], \quad (j = \overline{1, k}, e = \overline{1, q}), \quad (4)$$

на пределы изменения переменных

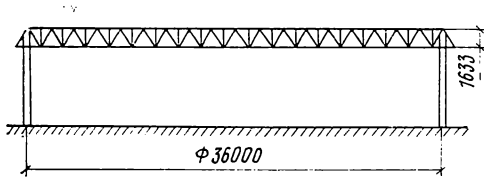


Рис.1

тов нагружения; $[\sigma]^\pm$ — допускаемое напряжение соответственно на растяжение и сжатие; $\sigma_k(X, Y)$ — критическое напряжение потери устойчивости; $[U]$ — величина допускаемого перемещения; a_i^1, b_i^1 — нижние и верхние границы изменения диаметров; $a_i(Y_i), b_i(Y_i)$ — нижние и верхние границы изменения толщин с учетом границ сортамента (приложение 9 [1]).

2. **Схема получения решения.** Сформулированная задача содержит большое число переменных проектирования. Расчет напряженно-деформированного состояния требует значительных вычислительных затрат, поэтому получить решение с помощью стандартных методов нелинейного математического программирования не представляется возможным.

По указанной причине схема вычислительного алгоритма формировалась на основе концепций системного подхода. Не останавливаясь на деталях построения вычислительной схемы, опишем коротко основные этапы и способы поиска оптимального решения.

Строилась последовательность задач с увеличивающейся размерностью — 8, 132, 1464, причем решение задачи с меньшей размерностью принималось за начальное приближение последующей задаче.

Каждая из трех задач решалась с использованием способа аппроксимации функций ограничений [2, 3], позволяющего добиться резкого сокращения объема вычислений.

Ограничения по прочности, устойчивости и перемещениям представлялись в виде

$$f_j^e(X, Y) = \sum_{i=1}^m \frac{E_{ij}^e}{F_i(X, Y)} - f_j^{*e}(X, Y) \leq 0, \quad (6)$$

где j — номер ограничения; $f_j^{*e}(X, Y)$ — предельное значение для i -го ограничения.

Для конструкций типа ферм коэффициенты E_{ij}^e для ограничений по перемещениям и напряжениям можно записать так:

$$E_{ij}^e = P_{ie} P_{ij} l_i / E_i, \quad E_{ir}^e = P_{ie} P_{ir} l_i / E_i. \quad (7)$$

В приведенных формулах: P_{ie} — внутреннее усилие в i -м стержне от e -го условия нагружения; P_{ij} — внутреннее усилие в i -м стержне от виртуального (единичного) воздействия по j -й степени свободы; P_{ir} — внутреннее усилие в i -м стержне от виртуального воздействия, приложенного в узлах, соединяемых i -м стержнем; E_i — модуль Юнга материала i -го стержня.

Для ферменных конструкций, рассматриваемых как линейно-упругие системы, с фиксированной геометрией и нагрузкой, независимой от переменных проектирования, данный способ аппроксимации дает приближения первого порядка относительно величин, обратных площадям поперечных сечений стержней. Коэффициенты E_{ij}^e для статически неопределимых ферм являются функциями от (X, Y) . В процессе оптимизации необходимо их уточнение по мере изменения вектора переменных.

Использовался следующий алгоритм:

шаг 1: в начальной точке k -й итерации проводится прямой расчет конструкции и определяются E_{ij}^e согласно (7);

шаг 2: решается задача оптимального проектирования (1)–(5) методами математического программирования с учетом аппроксимации ограничений (6);

шаг 3: проверяется критерий останова

$$|P(X^{*k}, Y^{*k}) - P(X^{*k-1}, Y^{*k-1})| < \varepsilon$$

и в случае его выполнения (X^{*k}, Y^{*k}) считается решением поставленной задачи, в противном случае управление передается на шаг 1.

При решении задачи размерностью 1464 реализован специальный алгоритм проверки ограничений, который заключается в следующем.

На первом этапе осуществлялась одна итерация по параметрам аппроксимационной модели с учетом только одного ограничения (по жесткости). Производился полный расчет конструкции, формировался набор нарушенных и потенциально нарушенных ограничений. Проводилась следующая итерация по параметрам модели с выделенным набором ограничений. В дальнейшем на каждой итерации проводилась корректировка множества активных ограничений.

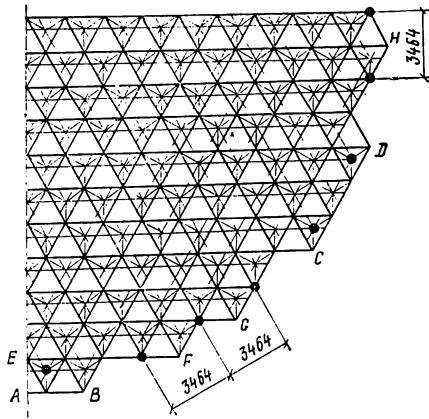


Рис. 2

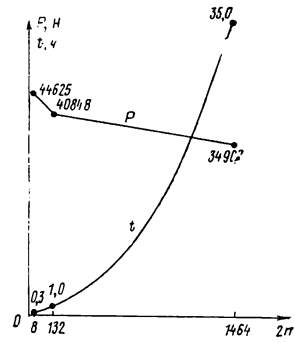


Рис. 3

Таким образом, по мере развития итерационного процесса уточнялись параметры модели и множество ограничений, которое учитывалось в оптимизации.

На каждой итерации аппроксимационная задача оптимизировалась с использованием метода внешнего (негладкого) штрафа [4]; для безусловной оптимизации применялся метод комбинированного прямого поиска, хорошо приспособленный для совместного учета физических особенностей задач и свойств алгоритмов оптимизации с целью сокращения объема вычислений и повышения надежности поиска [4—7].

Разработанное ранее математическое и программное обеспечение обладает высокой степенью унификации и возможностью учета свойств задач, что позволило реализовать описанный вычислительный алгоритм достаточно просто, без переработки программных средств.

3. Численные результаты. В ходе оптимизации критические напряжения для эйлеровской устойчивости определялись по формуле [1]

$$\sigma_k(X, Y) = R_y^c \varphi(X, Y),$$

где R_y^c — расчетное сопротивление материала для сжатия, $\varphi(X, Y)$ — коэффициент продольного изгиба центрально-сжатых стержней, зависящий от механических характеристик материала и гибкости элемента

$$\lambda = 4l / \sqrt{Y^2 + (Y - 2X)^2}.$$

В качестве исходных данных рассматривались следующие величины.

Структурная плита перекрытия состоит из 2840 стержней и опирается по периметру на 30 опор, расположенных с шагом 3464 мм [1]. Основными габаритными размерами являются — толщина конструкции, равная 1633 мм, и диаметр по опорам — 36000 мм. Трубчатые элементы имеют одинаковую длину $l = 2600$ мм.

Плита равномерно нагружена ортогонально своей плоскости по верхнему поясу. Нормативная и расчетные нагрузки, приведенные к внутреннему узлу верхнего пояса, равны соответственно 5333,9 Н и 6966,1 Н.

В связи с наличием двух плоскостей симметрии рассматривается четвертая часть конструкции, расчетная схема которой включает 732 стержня (рис. 2).

В качестве материала конструкции используется сплав 1915Т, для которого модуль Юнга $E = 6,965 \cdot 10^4$ МПа, $\rho = 2,6487 \cdot 10^{-5}$ Н/мм³, расчетные сопротивления (или допускаемые напряжения)

для сжатия $R_y^c = 200,0$ МПа, для растяжения $R_y^p = 180,0$ МПа [1].

Вертикальные перемещения середины плиты от нормативной нагрузки согласно [8] не должны превышать $1/300$ пролета или 120 мм. Значения коэффициента φ выбираются из табл. 5 [1] с учетом линейной интерполяции в промежуточных точках.

Первоначально стержневые элементы конструкции объединяются по четырем группам жесткости, каждая из которых характеризуется своим типоразмером: верхний пояс, сжатые и растянутые раскосы, нижний пояс [1]. При этом число переменных проектирования равно 8.

В качестве начального приближения рассматривалась конструкция с параметрами $(X^0, Y^0) = (5,0; 4,0; 4,0; 4,0; 83,0; 73,0; 60,0; 60,0)$ (мм) весом $P(X^0, Y^0) = 34038$ Н (здесь и ниже вес относится к четверти всей плиты).

Как показывает расчет конструкции, максимальные напряжения в ряде элементов существенно превышают допустимые (более чем в 6 раз), а вертикальные перемещения середины плиты, равные 200 мм, в значительной мере не удовлетворяют нормативным требованиям.

Оптимизация плиты при рассмотренных исходных данных привела к проекту конструкции $(X^*, Y^*) = (3,477; 2,0; 2,75; 5,5; 113,32; 93,04; 78,79; 109,84)$ (мм) с $P(X^*, Y^*) = 44625$ Н.

На следующем этапе проектирования число групп жесткости было расширено до 66 (и соответственно до 132 число переменных проектирования). Объединение элементов по группам в этом случае осуществляется с учетом их расположения относительно центра плиты. В первую группу вошли стержни верхнего пояса, расположенные по линиям AB и CD (рис. 2), во вторую группу — стержни верхнего пояса, примыкающие к элементам первой группы, в третью группу элементов — сжатые раскосы, в четвертую — растянутые, и наконец, в пятую — элементы нижнего пояса. Шестая группа вновь формируется из элементов верхнего пояса, расположенных по линиям EF и GH , и т. д. Проводилось два численных эксперимента с учетом границ сортамента и с учетом лишь нижних ограничений на толщину стенки $X \geq 1,4$ мм и внешний диаметр $Y \leq 45$ мм. В первом случае вес оптимальной конструкции составил 43197 Н, во втором — 40848 Н.

На последнем этапе структурная плита оптимизировалась по каждому элементу. Общее число переменных — 1464, ограничений — 2928. Получен проект со значением веса $P(X^*, Y^*) = 34907$ Н.

Кратко проанализируем ход и свойства вычислительного процесса. Как указывалось выше, схема решения является итерационной, и каждая итерация включает расчет конструкции, выбор активных ограничений, построение для них аппроксимаций и определение оптимума аппроксимационной модели. Распределение затрат по этапам на получение решения следующее: на первом — 3 итерации, на втором — 6 (в обоих экспериментах) и на последнем — 35 итераций.

Вычислительные затраты от этапа к этапу растут, но, видимо, это не связано с непосредственным увеличением размерности оптимизационной задачи, а зависит от свойств рассматриваемой конструкции. При малом числе групп жесткости внутренние усилия мало возрастают при уточнении переменных. С возрастанием количества жесткостных групп усиливаются свойства, присущие статически неопределимым системам, что приводит к увеличению числа необходимых на поиск итераций.

Этот факт подтверждается и процессом формирования набора активных ограничений. На первых двух этапах исследования данный набор не изменялся (учитывалось 25 ограничений). На последнем этапе (при 1464-х переменных) он существенно менялся от итерации к итерации (на каждой из первых 4—5 добавлялось до 50 новых ограничений, затем регулярно по 2—3 ограничения) и в оптимальной точке составлял порядка 300 ограничений.

На рис. 3 показаны значения весовых характеристик оптимальных проектов и временных затрат на их получение (ЭВМ ЕС-1045) в зависимости от размерности оптимизационной задачи.

4. Выводы и перспективы. Разработанное математическое и программное обеспечение по оптимальному проектированию ферменных конструкций позволяет получать решения сложных прикладных задач с большим числом переменных и обладает практической независимостью от геометрической структуры объекта, числа и величин нагрузок, формы поперечного сечения элементов, физического смысла целевой функции (масса, стоимость и т. д.). Оно с успехом может использоваться в проектных организациях для проведения реальных исследований.

Дальнейшее развитие должно происходить в области разработки методов учета дискретности изменения переменных, выбора оптимальной унификации элементов в конструкции (возможно, даже по сериям конструкций), создания САПР оптимального проектирования сложных систем с автоматизацией задания входной информации, проверки ее на достоверность и непротиворечивость, с разработкой эффективных человеко-машинных процедур, с использованием средств оперативной визуализации промежуточных и окончательных результатов (алфавитно-цифровые и графические дисплеи, графопостроители).

Именно в таком направлении ведутся работы по оптимальному проектированию больших конструкций в Горьковском филиале ВНИИИзмаш, часть которых представлена в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Труцев А. Г. Пространственные металлические конструкции. Учеб. пособие. — М.: Стройиздат, 1983. — 215 с.
2. Шмит Л. А., Фарши Б. Некоторые концепции аппроксимаций для синтеза конструкций // Ракетная техника и космонавтика. — 1974. — Т. 12. — № 5. — С. 145—155.
3. Калинин И. Н., Никишин С. С. Проектирование ферм минимальной массы методами математического программирования с использованием концепций аппроксимации // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. — 1987. — № 2. — С. 186—189.
4. Калинин И. Н. О применении методов математического программирования при оптимизации оболочек // Стронт. механика и расчет сооружений. — 1981. — № 1. — С. 19—22.
5. Калинин И. Н., Ленкин И. Б. Оптимизация оболочек кусочно-постоянной толщины при ограничениях по прочности // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. — 1978. — № 6. — С. 89—94.
6. Калинин И. Н. К исследованию и сравнению алгоритмов оптимизации // Кибернетика. — 1984. — № 1. — С. 77—80.
7. Калинин И. Н., Никишин С. С. Об учете особенностей задач механики в рамках одного алгоритма оптимизации // Изв. вузов. — Сер. Строительство и архитектура. — 1986. — № 11. — С. 111—114.
8. СНиП 11-24-74. Алюминиевые конструкции.

УДК 624.073.2.001.57

Л. Г. ПЕТРОСЯН, канд. техн. наук (Ереванский ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт им. К. Маркса)

Об одной модели упругого основания

Для описания упругих свойств грунтового основания применяются различные линейные модели, среди которых наиболее распространены упругое однородное и неоднородное полупространство, упругий слой и т. п. модели, дающие хорошие результаты для грунтов связного типа. Вместе с тем модели такого типа обладают определенными механическими недостатками, так как на краевых участках конструкций они имеют особенности — неограниченно возрастающие напряжения, что в некоторых случаях затрудняет решение задач о расчете конструкций на упругом основании. В частности, по этим причинам до настоящего времени не решена задача о расчете двух балок или плит, лежащих свободно на поверхности основания и примыкающих друг к другу. Такая задача по терминологии Б. Г. Коренева [1] называется задачей о неизолированных конструкциях на упругом основании.

В настоящей статье рассматривается модель упругого основания, близкая при различных значениях параметров к модели неоднородного или однородного полупространства и винклеровского основания, позволяющая решать любые задачи, в том числе и о расчете неизолированных конструкций. Введением двух дополнительных параметров учитывается неоднородность по глубине и сглаживаются особенности, возникающие в краевых сечениях конструкций. Предлагаемая модель не основывается на каких-либо расчетных схемах или механических соображениях, она вводится в соответствии с подходами, принятыми в [1, 2], непосредственно через ядро основания (функцию влияния). Показано, что задача о двух полубесконечных неизолированных плитах со свободным краем, лежащих без сцепления на основании, описываемом предлагаемой моделью, имеет решение в квадратурах.

Известно [1, 2], что ядро любого однородного линейно-деформируемого основания, т. е. перемещение в точке (x, y) поверхности основания от единичной силы, приложенной в точке поверхности (x_1, y_1) , является функцией расстояния между этими точками:

$$K(x, x_1; y, y_1) = \theta K_0(R) \quad R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

где θ — физическая константа. В частности, для упругого изотропного однородного полупространства

$$K_0(R) = 1/2 \pi R, \tag{1}$$

а для полупространства, модуль упругости которого меняется с глубиной по степенному закону (модель Г. К. Клейна),

$$K_0(R) = 1/2 \pi R^{\nu+1}. \tag{2}$$

Для ядра основания могут быть построены преобразования Фурье и Ханкеля, определяющие следующие интегральные представления 1:

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \frac{\theta}{4 \pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = \\ &= \frac{\theta}{2 \pi} \int_0^{\infty} c(t) J_0(t \sqrt{x^2 + y^2}) dt, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{где } c(t) = 2 \pi t \int_0^{\infty} r K_0(r) J_0(tr) dr, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

Рассмотрим модель основания с двумя малыми параметрами, ядро которого имеет вид

$$K_0(R) = 1 / (2 \pi \sqrt{R^2 + \varepsilon^2})^{1+\nu}. \tag{5}$$

В предельных случаях ядро (5) переходит в ядра для однородного полупространства

ва ($\varepsilon=0, \nu=0$) и неоднородного полупространства ($\varepsilon=0$), определяемые соответственно формулами (1) и (2). Вместе с тем введение параметров ε и ν позволяет получить при решении различных задач сходящиеся интегралы и учесть в известной степени в результате «сглаживания» решений такие явления, как местные пластические деформации и т. п. Заметим, что ядро (5) является по существу дальнейшим обобщением предложенного Б. Г. Корневым [1] ядра

$$K_0(R) = 1 / \sqrt{R^2 + \varepsilon^2}$$

и ядра (2).

Весьма существенно, что рассматриваемая модель наряду со связными основаниями может также описывать малосвязные грунты, для которых обычно применяют винклеровскую модель. Действительно, при $\nu=2$ и $\theta=4\pi^2 k_0 \varepsilon^{\nu/2}$,

$$K(r) = \frac{k_0 \varepsilon}{2\pi (r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K(r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k_0 \varepsilon}{2\pi r (r^2 + \varepsilon^2)} = \frac{k_0 \delta(r)}{2\pi r},$$

т. е. приходим к ядру винклеровской модели. Здесь k_0 имеет смысл коэффициента постели; $\delta(r)$ — дельта-функция. Как видим, при малых ε и $\nu=2$ предлагаемая модель близка к винклеровскому основанию, но сохраняет при этом слабую связность.

Определим для ядра (5) функцию $c(t)$. Подставляя (5) в (4) и вычисляя интеграл, получаем

$$c(t) = t^{\frac{\nu+1}{2}} \varepsilon^{\frac{1-\nu}{2}} K_{\frac{1-\nu}{2}}(\varepsilon t) \int_0^{\infty} \frac{3\nu-1}{2^{\frac{3\nu-1}{2}}} \pi^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right), \quad (6)$$

где $K_{\frac{1-\nu}{2}}(\varepsilon t)$ — функция Макдональда. При $\nu \rightarrow 0$ из (6) получаем $c(t) = e^{-\varepsilon t}$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ $c(t) = 1$, что соответствует модели однородного полупространства.

В случае плоской задачи ядро модели может быть вычислено по формуле [2]

$$\bar{K}(s) = \theta \int_0^{\infty} c(t) \cos st dt. \quad (7)$$

Используя представление (6), находим

$$\bar{K}(s) = \theta_\nu / (s^2 + \varepsilon^2)^{\nu/2}; \quad \theta_\nu = \theta \Gamma(\nu/2) / 2^{\nu+1} \pi^{\nu-1/2} \Gamma[(1+\nu)/2].$$

Для перехода к предельным случаям $\nu \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ необходимо предварительно определить угол наклона поверхности основания $\bar{K}'(s)$, так как интеграл (7) при этих пределах не существует. Дальнейший переход к пределам и последующее интегрирование приводят к плоским ядрам для однородной ($\varepsilon \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0$) и неоднородной $\varepsilon \rightarrow 0$ полуплоскостям и к винклеровскому основанию ($\varepsilon \rightarrow 0, \nu=2, \theta=4\pi^2 k_0 \varepsilon$).

Для определения характеристик модели можно использовать результаты штамповых испытаний грунтов. При небольшом диаметре штампа его перемещение z_0 можно отождествить с величиной $z_0 = K(0)$

$$z_0 = \theta / (2\pi \varepsilon)^{1+\nu}. \quad (8)$$

Выберем еще две точки с координатами r_1, r_2 так, чтобы их перемещения

$$z_1 = \theta / \left(2\pi \sqrt{r_1^2 + \varepsilon^2}\right)^{1+\nu}; \quad z_2 = \theta / \left(2\pi \sqrt{r_2^2 + \varepsilon^2}\right)^{1+\nu}$$

удовлетворяли соотношению $z_1/z_0 = (z_2/z_0)^2$. Тогда, как нетрудно показать, величины ε и ν могут быть определены по формулам

$$\varepsilon = r_2^2 / \sqrt{r_1^2 - 2r_2^2}; \quad \nu = (\ln z_1 - \ln z_0) / (\ln \varepsilon - \ln \sqrt{r_1^2 + \varepsilon^2}) - 1.$$

Физическая постоянная θ согласно (8) будет $\theta = z(2\pi\varepsilon)^{1+\nu}$. В качестве иллюстрации вычислим параметры модели на основе экспериментальных данных Л. И. Манвелова и Э. С. Бартошевича, полученных в [4]. Принимаем по экспериментальной кривой $z_0 = 1$ мм, $z_1 = 0,09$ мм, $z_2 = 0,3$ мм, $r_1 = 210$ мм, $r_2 = 80$ мм. На рисунке приведены графики перемещений поверхности основания вне кругового штампа; сплошная линия — экспериментальные данные; штриховая — данные, полученные по формуле (5); штрихпунктирная линия — результаты, полученные по модели упругого изотропного полупространства. Как видим, предлагаемая модель, ядро которой в этом случае имеет вид

$$K(r) = (0,0007632 + 1)^{-0,678},$$

дает достаточно хорошее приближение к экспериментальной функции влияния при принятом допущении о малости радиуса штампа. В указанных экспериментах радиус штампа не был малым, поэтому расхождение кривых вблизи штампа заметно, оно было бы существенно меньше при меньшем радиусе штампа.

Рассмотрим задачу о неизолированных полубесконечных плитах со свободным краем вдоль оси $x=0$. Следуя работе [3], в которой рассматривалась близкая задача о двух шарнирно-соединенных плитах, лежащих на слое, запишем интегро-дифференциальную систему уравнений равновесия плиты:

$$\nabla \nabla w_* = q_* - p_*;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(R_*) p(x_{1*}, y_{1*}) dx_{1*} dy_{1*} = w_* \quad (9)$$

в безразмерных параметрах

$$\lambda = \sqrt[3]{D\theta}, \quad x = x_* \lambda, \quad y = y_* \lambda, \quad w_* = w \lambda / Q \theta,$$

$$q = \frac{Q q_*}{\lambda^2}, \quad R = R_* \lambda, \quad \varepsilon = \varepsilon_* \lambda, \quad Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(x, y) dx dy.$$

Поскольку в дальнейшем мы будем пользоваться только безразмерной формой уравнений равновесия (9), звездочки в индексах функций и координат опускаем. Здесь w_* — перемещение и контактное давление плиты; D — цилиндрическая жесткость; q — внешняя нагрузка.

Осуществим в (9) преобразование Фурье по координате y

$$(d^2/dx^2 - \eta^2)^2 w_\eta(x) = q_\eta(x) - p_\eta(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta y} K(R) p(x_1, y_1) dx_1 dy_1 dy = w_\eta(x).$$

Произведя в интегральном уравнении замену переменной $y - y_1 = z$, получим

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_\eta(x - x_1) p_\eta(x_1) dx_1 = w_\eta(x).$$

Здесь индексом η обозначена трансформанта Фурье по координате y . Преобразованные граничные условия свободного края примут вид

$$\frac{d^2 w_\eta}{dx^2} - \sigma \eta^2 w_\eta = 0; \quad \frac{d^3 w_\eta}{dx^3} - (2 - \sigma) \eta^2 \frac{dw_\eta}{dx} = 0, \quad (x = \pm 0). \quad (10)$$

Переходя к преобразованиям Фурье по координате x , необходимо учесть, что по линий $x=0$ функция $w_\eta(x)$ и ее производные могут претерпевать разрывы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \right)^2 w_\eta(x) dx = (\xi^2 + \eta^2)^2 w_\xi \eta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\Delta \frac{d^3 w_\eta(0)}{dx^3} - \right.$$

$$\left. - i \xi \Delta \frac{d^2 w_\eta(0)}{dx^2} - \xi^2 \Delta \frac{dw_\eta(0)}{dx} + i \xi^3 \Delta w_\eta(0) \right) + \frac{2\eta^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\Delta \frac{dw_\eta(0)}{dx} - i \xi \Delta w_\eta(0) \right).$$

Здесь через Δ обозначены скачки функций, например,

$$\Delta w_\eta(0) = w_\eta(+0) - w_\eta(-0).$$

Удовлетворяя граничным условиям (10), получаем

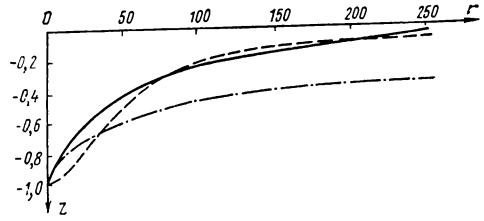
$$(\xi^2 + \eta^2)^2 w_\xi \eta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (\xi^2 + \sigma \eta^2) \Delta \frac{dw_\eta(0)}{dx} - i \xi [\xi^2 + (2 - \sigma) \eta^2] \Delta w_\eta(0) \right\} =$$

$$= q_\xi \eta - p_\xi \eta, \quad 2\pi K_{\xi\eta} p_\xi \eta = w_\xi \eta,$$

где $K_{\xi\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \eta y)} K(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$

Учитывая (3), для трансформанты ядра основания можем записать

$$K_{\xi\eta} = \theta c (\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) / 2\pi \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$



Следовательно,

$$\omega_{\xi \eta} = \frac{q_{\xi \eta} - (2\pi)^{-1/2} \left\{ (\xi^2 + \sigma \eta^2) \Delta \frac{d\omega_{\eta}(0)}{dx} - i \xi [\xi^2 + (2 - \sigma) \eta^2] \Delta \omega_{\eta}(0) \right\}}{\bar{R}(\xi, \eta)} \quad (11)$$

и по формуле обращения Фурье получаем

$$\omega(x, y) = \omega_q(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi x + \eta y)} \frac{(\xi^2 + \sigma \eta^2) A + i \xi [\xi^2 + (2 - \sigma) \eta^2] B}{\bar{R}(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (12)$$

$$\text{где } \omega_q(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_{\xi \eta} e^{-i(\xi x + \eta y)}}{\bar{R}(\xi, \eta)} d\xi d\eta -$$

— перемещение неограниченной плиты от внешней нагрузки;

$$\bar{R}(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2)^2 + (2\pi K_{\xi \eta})^{-1};$$

$$A(\eta) = -(2\pi)^{-1/2} \Delta \frac{d\omega_{\eta}(0)}{dx}; \quad B(\eta) = (2\pi)^{-1/2} \Delta \omega_{\eta}(0).$$

Контактное напряжение $p(x, y)$ определится по формуле

$$p(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_{\xi \eta}}{K_{\xi \eta}} e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Внутренние усилия в плите могут быть определены путем дифференцирования выражения (12) в соответствии с известными формулами технической теории изгиба плит.

Из (11) следует

$$\omega_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_{\xi \eta} + (\xi^2 + \sigma \eta^2) A(\eta) + i \xi [\xi^2 + (2 - \sigma) \eta^2] B(\eta)}{\bar{R}(\xi, \eta)} e^{-i \xi x} d\xi = \\ = \omega_{q \eta}(x) + A(\eta) [C_2'(x, \eta) + \sigma \eta^2 C_1'(x, \eta)] + B(\eta) [C_3(x, \eta) + (2 - \sigma) \eta^2 C_2(x, \eta)], \quad (13)$$

$$\text{где } C_1(x, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi x d\xi}{\bar{R}(\xi, \eta)}; \quad C_2(x, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \sin \xi x d\xi}{\bar{R}(\xi, \eta)};$$

$$C_3(x, \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\xi^3 \sin \xi x d\xi}{\bar{R}(\xi, \eta)}. \quad (14)$$

Удовлетворяя далее преобразованным граничным условиям (10), получаем уравнения для определения неизвестных $A(\eta)$ и $B(\eta)$. При этом существенным фактом является сходимость интегралов (14) при трехкратном (C_3) и четырехкратном (C_1, C_2) дифференцировании. При $l \rightarrow \infty$ имеем

$$K_{\frac{1-\nu}{2}}(\varepsilon t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon t}} e^{-\varepsilon t}$$

и, следовательно, знаменатель подынтегрального выражения в рассматриваемых интегралах имеет экспоненциальный рост на бесконечности, так что все интегралы можно трижды дифференцировать по параметру x .

Из системы уравнений (10), записанной с учетом (13), найдем

$$A(\eta) = \frac{\sigma \eta^2 \omega_{q \eta}(0) - \omega_{q \eta}''(0)}{C_2'''(0, \eta) + \sigma \eta^2 C_1'''(0, \eta) - \sigma \eta^2 [C_2'(0, \eta) + \sigma \eta^2 C_1'(0, \eta)]}; \\ B(\eta) = \frac{(2 - \sigma) \eta^2 \omega_{q \eta}'(0) - \omega_{q \eta}'''(0)}{C_3'''(0, \eta) + (2 - \sigma) \eta^2 C_2'''(0, \eta) - (2 - \sigma) \eta^2 [C_3'(0, \eta) + (2 - \sigma) \eta^2 C_2'(0, \eta)]}.$$

Таким образом, предлагаемая модель приводит к замкнутому решению задачи, выраженному через сходящиеся интегралы, что позволяет использовать ее при расчете неизользованных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнев Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. — М.: Госстройиздат, 1954. — 232 с.
2. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. — Киев — Одесса: Вища школа, 1982. — 168 с.
3. Серебряный Р. В. Расчет тонких шарнирно-соединенных плит на упругом основании. — М.: Госстройиздат, 1962. — 64 с.
4. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании. — М.: Стройиздат, 1973. — 626 с.

УДК 624.073.042.3:624.93

Ю. В. КРАСНОЩЕКОВ, канд. техн. наук (Сибирский автомобильно-дорожный институт им. В. В. Куйбышева, Омск), **Е. В. ШИЛОВ**, канд. техн. наук (МИСИ им. В. В. Куйбышева)

Расчет сборных железобетонных настилов с замоноличенными швами на поперечную нагрузку

Плиты сборных железобетонных перекрытий и покрытий, проектируемые обычно по балочной схеме, при замоноличивании межплитных швов образуют плоские системы — настилы, которые способны под поперечной нагрузкой работать в двух направлениях. Для расчета таких систем применяются методы, апробированные при исследовании настилов различных конструкций с частными случаями загрузки и опирания по контуру. Однако широкого распространения они не получили. Одна из причин этого — отсутствие обобщенной расчетной методики, позволяющей учитывать как конструктивные особенности настилов, так и произвольный характер поперечной нагрузки.

Анализ исследований сборных железобетонных настилов показывает, что наиболее приемлемые для практических расчетов предпосылки и принципы сформулированы В. Н. Байковым [1] применительно к регулярным балочным системам, загруженным поперечной нагрузкой. На основе этих принципов разработана методика, позволяющая решать широкий круг задач по расчету настилов.

Основным исходным моментом метода является представление замоноличенных швов в расчетной схеме настила в виде линейных шарниров, способных передавать с плиты на плиту вертикальные перерезывающие силы V_{kx} в сечении x каждого k -го шва (рис. 1). Влияние опор, расположенных у продольных кромок крайних плит, учитывается

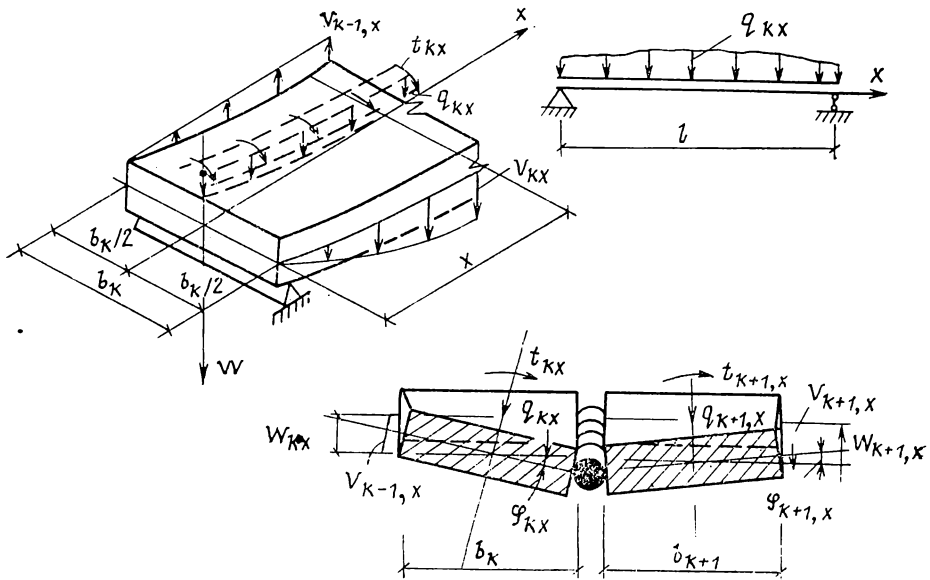


Рис. 1

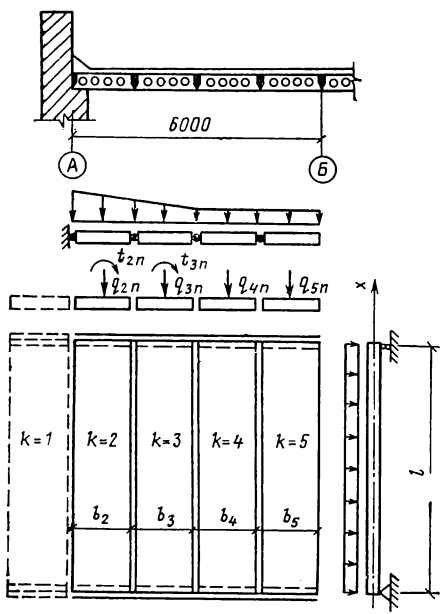


Рис. 2

введем в эту схему фиктивных плит с жесткостными характеристиками, эквивалентными деформативности опор (рис. 2). Торцевые опорные конструкции считаются абсолютно жесткими.

Предполагая, что отрыв плит от торцевых опор исключается, разложим функцию v_{kx} , непрерывную на интервале l , равном расчетному пролету плит, в бесконечный тригонометрический ряд по синусам

$$v_{kx} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{kn} \sin \lambda_n x, \quad (1)$$

$$v_{kn} = \frac{2}{l} \int_0^l v_{kx} \sin \lambda_n x \, dx, \quad (2)$$

$$\lambda_n = n \pi / l; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Внешние силовые воздействия q_{kx} , t_{kx} и перемещения w_{kx} , φ_{kx} каждой k -й плиты также представим в рядах, аналогичных (1). Значения коэффициентов q_{kn} , t_{kn} , w_{kn} , φ_{kn} определяются из зависимостей, аналогичных (2).

Приведем значения q_{kn} для трех случаев загрузки k -й плиты, показанных на рис. 3. Соответственно для схем $a, б, в$ имеем

$$q_{kn} = (4 q_k / \lambda_n l) \sin 0,5 \lambda_n (a + c) \sin 0,5 \lambda_n (c - a); \quad (3) \quad q_{kn} = (2 F_k / l) \sin \lambda_n c; \quad (4)$$

$$q_{kn} = (2 M_k \lambda_n / l) \sin \lambda_n c. \quad (5)$$

Функциями q_{kx} и t_{kx} описываются соответственно симметричная и косимметричная составляющие внешней нагрузки. Функция t_{kx} может быть представлена в виде $t_{kx} = q_{kx} e$, где e — эксцентриситет нагрузки q_{kx} относительно продольной оси плиты. Нагрузка q_{kx} вызывает поперечный изгиб плиты, а t_{kx} — кручение. На рис. 1 указаны положительные направления силовых воздействий и перемещений: прогибов w_{kx} и углов закручивания φ_{kx} .

Система взаимодействующих плит является статически неопределимой с числом неизвестных, равным количеству продольных швов и соответственно усилий взаимодействия v_{kx} .

Условие равновесия k -й плиты при закручивании вокруг продольной оси имеет вид

$$B_{tk} \frac{\partial^2 \varphi_{kx}}{\partial x^2} + t_{kx} + \frac{b_k}{2} (v_{k-1,x} + v_{kx}) = 0, \quad (6)$$

где B_{tk} — жесткость k -й плиты на кручение, b_k — ширина плиты.

Условие равновесия плиты при поперечном изгибе

$$B_k \frac{\partial^2 v_{kx}}{\partial x^2} = q_{kx} + v_{kx} - v_{k-1,x}, \quad (7)$$

где B_k — жесткость плиты на изгиб.

Условие совместности перемещений каждой пары смежных плит отражает равенство их прогибов по шву k :

$$v_{k+1,x} - w_{kx} = (b_k \varphi_{kx} + b_{k+1} \varphi_{k+1,x}) / 2. \quad (8)$$

Подставив выражения для v , q , t , w , φ в уравнения (6), (7), после преобразования получим n -е коэффициенты бесконечных рядов для k -й плиты в следующем виде

$$w_{kn} = (q_{kn} + v_{kn} - v_{k-1,n}) / B_k \lambda_n^4; \quad (9) \quad \varphi_{kn} = [t_{kn} + b_k (v_{k-1,n} + v_{kn}) / 2] / B_{tk} \lambda_n^2 \quad (10)$$

Произведем подстановку выражений для w_{kx} и φ_{kx} в (8) и в результате преобразо-

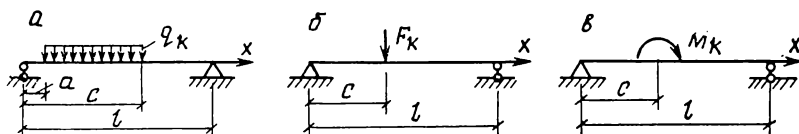


Рис. 3

ваний с учетом (9), (10), получим условие совместности перемещений каждой пары смежных плит в коэффициентах Фурье

$$v_{k-1,n} \left(\frac{1}{B_k \lambda_n^2} - \frac{b_k^2}{4 B_{tk}} \right) - v_{kn} \left(\frac{1}{B_k \lambda_n^2} + \frac{1}{B_{k+1} \lambda_n^2} + \frac{b_k^2}{4 B_{tk}} + \frac{b_{k+1}^2}{4 B_{t,k+1}} \right) + v_{k+1,n} \left(\frac{1}{B_{k+1} \lambda_n^2} - \frac{b_{k+1}^2}{4 B_{t,k+1}} \right) = \frac{q_{kn}}{B_k \lambda_n^2} - \frac{q_{k+1,n}}{B_{k+1} \lambda_n^2} + \frac{t_{kn} b_k}{2 B_{tk}} + \frac{t_{k+1,n} b_{k+1}}{2 B_{t,k+1}}. \quad (11)$$

Расчет настила из k плит (с учетом фиктивных) сводится к решению системы из $k-1$ линейных алгебраических уравнений (11). Эту систему можно записать в матричной символике $AV=C$ или в развернутом виде для каждого значения n при $\xi_{kn} = B_k \lambda_n^2 b_k / 2 B_{tk}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k,k-1} & a_{kk} & a_{k,k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-2,k-3} & a_{k-2,k-2} & a_{k-2,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,k-2} & a_{k-1,k-1} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_k \\ \dots \\ v_{k-2} \\ \dots \\ v_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_k \\ \dots \\ c_{k-2} \\ \dots \\ c_{k-1} \end{pmatrix} \quad (12)$$

где

$$a_{kk} = -[(1 + \xi_{kn} b_k / 2) / B_k + (1 + \xi_{k+1,n} b_{k+1} / 2) / B_{k+1}] / \lambda_n^2; \quad a_{k,k-1} = a_{k-1,k} = (1 - \xi_{kn} b_k / 2) / B_k \lambda_n^2; \quad a_{k,k+1} = a_{k+1,k} = (1 - \xi_{k+1,n} b_{k+1} / 2) / B_{k+1} \lambda_n^2; \quad c_k = [(q_{kn} + t_{kn} \xi_{kn}) / B_k - (q_{k+1,n} - t_{k+1,n} \xi_{k+1,n}) / B_{k+1}] / \lambda_n^2.$$

Наиболее просто такая система решается путем последовательного исключения неизвестных v_k по компактной схеме [2]. При этом v_k находятся из уравнений

$$\begin{aligned} v_1 + \alpha_1 v_2 &= \beta_1; \\ v_2 + \alpha_2 v_3 &= \beta_2; \\ \dots & \dots \\ v_k + \alpha_k v_{k+1} &= \beta_k; \\ \dots & \dots \\ v_{k-1} &= \beta_{k-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Компактный метод требует меньшего количества промежуточных записей и вычислений, чем известный метод Гаусса и становится особенно простым, когда матрица $[a_{ki}]$ симметрична.

Вычисление коэффициентов системы (13) ведется с помощью рекуррентных формул в следующем порядке:

$$\gamma_1 = a_{11}; \quad \alpha_1 = a_{12} / \gamma_1; \quad \dots; \quad \gamma_k = a_{kk} - a_{k,k-1} \alpha_{k-1}; \quad \alpha_k = a_{k,k+1} / \gamma_k; \quad \dots; \quad \gamma_{k-1} = a_{k-1,k-1} - a_{k-1,k-2} \alpha_{k-2}; \quad \beta_1 = c_1 / \gamma_1; \quad \dots; \quad \beta_k = (c_k - a_{k,k-1} \beta_{k-1}) / \gamma_k; \quad \dots; \quad \beta_{k-1} = (c_{k-1} - a_{k-1,k-2} \beta_{k-2}) / \gamma_{k-1} = v_{k-1}; \quad \dots; \quad v_k = \beta_k - \alpha_k v_{k+1}; \quad \dots \quad (14)$$

Данный метод легко реализуется на ЭВМ, но допускает накопление ошибок округления. По этой причине требуется повышенная точность при вычислении вручную.

Порядок расчета настила следующий:

для каждого значения n определяются коэффициенты q_{kn} и q_{kne} (3)–(5); в соответствии с расчетной схемой составляется система уравнений (12), в результате решения которой вычисляются коэффициенты v_{kn} ; по (9) и (10) определяются коэффициенты перемещений w_{kn} и φ_{kn} , затем вычисляются перемещения w_{kx} и φ_{kx} k -х плит по сечениям x ; изгибающие моменты M_{kx} , поперечные силы Q_{kx} и крутящие моменты T_{kx} определяются дифференцированием функций w и φ в сечениях x :

$$M_{kx} = -B_k \partial^2 w_{kx} / \partial x^2; \quad Q_{kx} = -B_k \partial^3 w_{kx} / \partial x^3; \quad T_{kx} = B_{tk} \partial \varphi_{kx} / \partial x.$$

При работе настила за пределами стадии упругости требуется их поэтапное уточнение, так как жесткостные параметры изгибаемых железобетонных конструкций находятся в зависимости от усилий. В первом приближении параметры B_k и B_{tk} можно вычислять без учета влияния усилий взаимодействия. Для практических расчетов в большинстве случаев можно ограничиться вычислением первых членов бесконечных рядов, т. е. при $n=1$.

Параметры, ед. изм.	n		
	1	3	5
$\lambda_n, \text{ м}^{-1}$	0,533	1,597	2,661
$q_{2n}, \text{ кН/м}$	4,775	1,592	0,955
$q_{3n}, \text{ кН/м}$	2,865	0,955	0,573
$q_{4n} = q_{5n}, \text{ кН/м}$	1,910	0,637	0,382
$t_{2n} = t_{3n}, \text{ кН}$	-0,239	-0,0796	-0,0478
$\bar{\epsilon}_{kn}, \text{ м}^{-1}$	0,170	1,531	4,249
$a_{11}, \text{ кН}$	$-0,994 \cdot 10^{-3}$	$-0,210 \cdot 10^{-3}$	$-0,148 \cdot 10^{-3}$
$a_{22} = a_{33} = a_{44}$	$-1,989 \cdot 10^{-3}$	$-0,421 \cdot 10^{-3}$	$-0,296 \cdot 10^{-3}$
$a_{12} = a_{23} = a_{34}$	$0,769 \cdot 10^{-3}$	$-0,0145 \cdot 10^{-3}$	$-0,0772 \cdot 10^{-3}$
$c_1, \text{ м}^{-1}$	$-4,246 \cdot 10^{-3}$	$-0,168 \cdot 10^{-3}$	$-0,0382 \cdot 10^{-3}$
$c_2, \text{ м}^{-1}$	$1,612 \cdot 10^{-3}$	$0,0375 \cdot 10^{-3}$	$-0,00451 \cdot 10^{-3}$
$c_3, \text{ м}^{-1}$	$0,806 \cdot 10^{-3}$	$0,0187 \cdot 10^{-3}$	$0,00225 \cdot 10^{-3}$
$c_4, \text{ м}^{-1}$	0	0	0
$\gamma_1, \text{ кН}^{-1}$	$-0,994 \cdot 10^{-3}$	$-0,210 \cdot 10^{-3}$	$-0,148 \cdot 10^{-3}$
α_1	-0,774	0,069	0,535
$\gamma_2, \text{ кН}^{-1}$	$-1,394 \cdot 10^{-3}$	$-0,120 \cdot 10^{-3}$	$-0,251 \cdot 10^{-3}$
α_2	-0,552	0,0346	0,304
$\gamma_3, \text{ кН}^{-1}$	$-1,565 \cdot 10^{-3}$	$-0,420 \cdot 10^{-3}$	$-0,272 \cdot 10^{-3}$
α_3	-0,492	0,0346	0,284
$\gamma_4, \text{ кН}^{-1}$	$-1,611 \cdot 10^{-3}$	$-0,420 \cdot 10^{-3}$	$-0,274 \cdot 10^{-3}$
$\beta_1, \text{ кН/м}$	4,270	0,800	0,259
$\beta_2, \text{ кН/м}$	1,199	-0,117	-0,0963
$\beta_3, \text{ кН/м}$	0,0744	-0,0405	0,019
$\beta_4, \text{ кН/м}$	0,0355	0,0014	0,00536
$v_4, \text{ кН/м}$	0,0355	0,0014	0,00536
$v_3, \text{ кН/м}$	0,0919	-0,0406	0,0175
$v_2, \text{ кН/м}$	1,250	-0,116	-0,102
$v_1, \text{ кН/м}$	5,237	0,808	0,313
$w_2, \text{ см}$	0,069	0,006	0,002
$w_3, \text{ см}$	0,150	0,01	0,002
$w_4, \text{ см}$	0,163	0,007	0,001
$w_5, \text{ см}$	0,165	0,006	0,001

В качестве примера рассмотрим симметричную относительно оси систему покрытия, расчетная схема которой изображена на рис. 2. Исходные данные для расчета: пролет $l=5,9$ м; ширина плит $b_k=1,5$ м; нагрузка от собственного веса $g_k=4,5$ кН/м; действующая после замоноличивания швов (вес кровли и снега) нагрузка $q_2=3,75$ кН/м, $q_3=2,25$ кН/м, $q_4=q_5=1,5$ кН/м; $t_2=t_3=-0,1875$ кН, $t_4=t_5=0$. Изгибная жесткость плит в первом приближении $B_k=4000$ кН·м²; жесткость фиктивной первой плиты $B_1=\infty$; отношение жесткостей $B_k/B_{tk}=0,8$ [1].

Расчет по алгоритму (14) ведется на нагрузки, действующие после замоноличивания швов (без учета собственного веса плит). Основные результаты вычислений сведены в таблицу.

Максимальные прогибы плит с учетом собственного веса (приведены результаты, полученные при удержании одного, двух и трех членов бесконечных рядов): $w_2=0,13$ (0,11, 0,12) см, $w_3=1,93$ (1,91, 1,92) см, $w_4=1,94$ (1,93, 1,93) см, $w_5=1,95$ (1,93, 1,94) см. Изгибающие моменты соответственно равны (в кН·м): $M_2=1,44$ (0,77, 1,31), $M_3=21,91$ (20,89, 21,58), $M_4=22,06$ (21,38, 21,75), $M_5=22,08$ (21,45, 21,83). Значения моментов, определенных без учета взаимодействия плит: $M_3=29,4$, $M_4=M_5=26,1$.

Таким образом видно, что уточнение результатов путем удержания дополнительных членов рядов незначительно влияет на значения прогибов и изгибающих моментов (за исключением усилий в крайней плите $k=2$) в сторону их уменьшения.

Выводы. Разработанный на основании анализа исследований сборных железобетонных настилов метод расчета позволяет в отличие от существующих методов решать с любой точностью более широкий круг задач. По этому методу можно определять распределение усилий взаимодействия между плитами в нерегулярных конструктивных системах при произвольных граничных условиях и нагрузках. Метод ориентирован на применение ЭВМ, однако простые системы легко рассчитываются вручную. Возможен учет изменения жесткостных характеристик сборных элементов в процессе загрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байков В. Н. Расчет сборного панельного перекрытия на местную продольную линейно сосредоточенную нагрузку // Проектирование железобетонных конструкций. — М., 1966. — С. 83—104.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1978. — С. 662—663.

К расчету двухслойных балок с упорами

В [1] показано, что усилия в связях сдвига двухслойных балок, даже при установке абсолютно жестких торцевых упоров, остаются значительными. При этом прочность конструкций комбинированных балок [2], как правило, обуславливается несущей способностью связей сдвига или торцевых упоров. В связи с этим в настоящей статье проводится расчет двухслойных балок при наличии также упругоподатливых упоров, промежуточных между опорой и серединой пролета, выявляются целесообразность устройства таких упоров и их расположение.

Использовано известное [3] дифференциальное уравнение для определения суммарных сдвигающих усилий

$$T'' - \lambda^2 T + \varepsilon M_0 W / \Sigma E I = 0, \quad (1)$$

где W — расстояние между центральными осями составляющих стержней; ε — жесткость связей сдвига; M_0 — момент от внешней нагрузки в однослойной балке,

$$\lambda^2 = \gamma \varepsilon; \quad \gamma = \Sigma (1/E F) + W^2 / \Sigma E I.$$

Рассматривается однопролетная шарнирно опертая балка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой и имеющая помимо торцевых упоров с жесткостью ε_{y1} , промежуточные упоры с жесткостью ε_{y2} , расположенные на расстоянии a от опор.

Выражение для суммарных сдвигающих сил на участке между опорой и промежуточным упором $i=1$; $a \gg x \gg 0$), а также между промежуточным упором и серединой пролета ($i=2$; $l/2 \gg x \gg a$) для такой балки можно записать

$$T_i = C_i \operatorname{ch} \lambda x + D_i \operatorname{sh} \lambda x - 2 \tau_c / \lambda^2 l + \tau_c x (1 - x/l), \quad (2)$$

где $\tau_c = q l \omega / (2 \gamma \Sigma E I)$.

Интенсивность сдвигающих усилий определяется выражением

$$\tau_i = C_i \lambda \operatorname{sh} \lambda x + D_i \lambda \operatorname{ch} \lambda x + \tau_c (1 - 2x/l). \quad (3)$$

Использованы следующие условия:

- а) $\tau_2 = 0$ при $x = l/2$ — условие симметрии;
- б) $\tau_1 / \varepsilon = T_1 / \varepsilon_{y1}$ при $x = 0$ — условие равенства сдвига на краю балки величине смещения торцевого упора;
- в) $\tau_1 = \tau_2$ при $x = a$ — условие равенства интенсивности сдвигающих усилий перед упором и после него;
- г) $\tau_2 / \varepsilon = (T_2 - T_1) / \varepsilon_{y2}$ при $x = a$ — условие равенства сдвига промежуточного упора разности суммарных сдвигающих усилий перед упором и после него, деленной на его жесткость.

Из условия «а» получим $D = C_2 / (\operatorname{ch} \lambda l / 2) = -D_2 / (\operatorname{sh} \lambda l / 2)$; из условия «б», учитывая, что $\nu_1 = \varepsilon_{y1} \gamma$, найдем $C_1 = D_1 \nu_1 / \lambda = \tau_c (\nu_1 + 2/l) / \lambda^2$. Наконец, из условий «в» и «г» соответственно будем иметь

$$C_1 \operatorname{ch} \lambda a + D_1 \operatorname{ch} \lambda a = -D \operatorname{sh} \lambda (l/2 - a);$$

$$C_1 \operatorname{ch} \lambda a + D_1 \operatorname{sh} \lambda a = D \operatorname{ch} \lambda (l/2 - a) - (\nu_2 / \lambda^2) \tau_c (1 - 2a/l) + (\nu_2 / \lambda) D \operatorname{sh} \lambda (l/2 - a).$$

Умножая выражение, полученное из «в», на $-\operatorname{sh} \lambda a$, а из «г» на $\operatorname{ch} \lambda a$ и складывая их, выразим C_1 через D . Аналогично можем выразить D_1 через D . Подставляя эти значения в соотношение, полученное из условия «б», найдем D , а затем произвольные постоянные C_i и D_i . Подставив их в (2) и (3) и перейдя к безразмерным параметрам

$$r_i = \nu_i l / 2; \quad z = \lambda l / 2; \quad \xi = 2x/l; \quad \alpha = 2a/l; \quad K_{\tau i} = \tau_i / \tau_c;$$

$$K_{\tau i} = 4 T_i / \tau_c l, \quad \text{получим}$$

$$K_{\tau i} = \xi (2 - \xi) - (2/z^2) + 2 [(r_1 + 1) \operatorname{ch} (1 - \xi) z + p_i] / t z; \quad (4)$$

$$K_{\tau i} = 1 - \xi - [(r_1 + 1) \operatorname{sh} (1 - \xi) z + q_i] / t,$$

где $t = z \operatorname{ch} z + r_1 \operatorname{sh} z + r_2 \beta \operatorname{sh} (1 - \alpha) z$;

$$p_1 = (r_2/z) [(r_1 + 1) \operatorname{ch} (\alpha - \xi) z - (1 - \alpha) (z \operatorname{sh} z + r_1 \operatorname{ch} \xi z)] \operatorname{sh} (1 - \alpha) z;$$

$$p_2 = r_2 (1 - \alpha) \beta \operatorname{ch} (1 - \xi) z; \quad q_1 = (r_2/z) [(r_1 + 1) \operatorname{sh} (\alpha - \xi) z + (1 - \alpha) (z \operatorname{ch} \xi z + r_1 \operatorname{sh} \xi z)] \operatorname{sh} (1 - \alpha) z;$$

$$q_2 = r_2 (1 - \alpha) \beta \operatorname{sh} (1 - \xi) z; \quad \beta = \operatorname{ch} \alpha z + (r_1/z) \operatorname{sh} \alpha z.$$

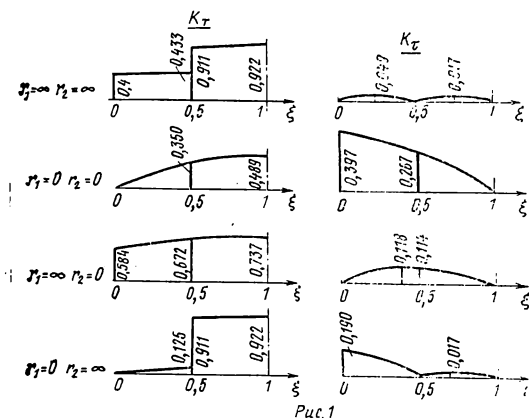


Рис. 1

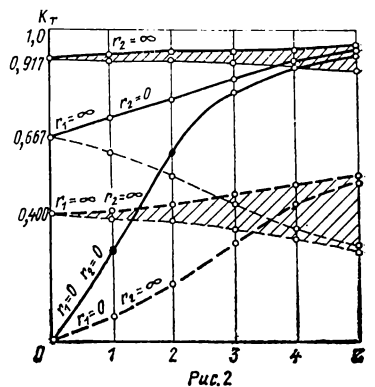


Рис. 2

При отсутствии соответствующего упора $r_i=0$, при абсолютно жестких упорах $r_i=\infty$. Если принять $\alpha=0$, то получим балку с торцевым упором, жесткость которого $r=r_1+r_2$. Можно показать, что при увеличении α усилие, воспринимаемое промежуточным упором, возрастает, однако при $\alpha=1$ промежуточный упор не влияет на K_{Ti} и τ_i . На рис. 1 приведены эпюры K_T и K_τ при $z=1,5$ и $\alpha=0,5$ для различных значений r_1 и r_2 .

На рис. 2 показана зависимость безразмерных суммарных сдвигающих усилий K_T от характеристик жесткости связей для однопролетных двухслойных балок. Сплошные жирные линии — усилия, воспринимаемые всеми средствами соединения составляющих стержней, т. е. упорами и связями сдвига. Тонкими штриховыми линиями показаны усилия, воспринимаемые торцевыми упорами. Жирные штриховые линии — сумма усилий в торцевом упоре и в связях сдвига до промежуточного упора. Наконец, тонкие штриховые линии — сумма усилий во всех соединениях, кроме связей сдвига между серединой пролета и промежуточным упором. Заштрихованная зона между тонкой и жирной штриховыми линиями — усилия в связях сдвига до промежуточного упора, а между тонкой и жирной сплошными линиями — усилия в связях сдвига от промежуточного упора до середины пролета.

Из рисунка видно, что торцевые упоры оказывают заметное влияние на величину суммарных сдвигающих усилий при $z < 3$, при больших z они лишь снижают усилия в связях сдвига. Промежуточные упоры оказывают заметное влияние на величины суммарных сдвигающих усилий при $z < 5$, а при больших z значительно снижают усилия в связях сдвига и в торцевых упорах.

При расчете реальных конструкций упоры могут быть приняты абсолютно жесткими. В этом случае при наличии торцевых и промежуточных упоров имеются два максимума K_τ (рис. 1). Поскольку несущая способность двухслойных балок определяется достижением предела текучести в наиболее напряженной связи, выгодно одновременное достижение предела текучести в обоих максимумах. В связи с этим представляет интерес такое размещение промежуточных упоров, при котором значения максимальных интенсивностей сдвигающих усилий равны. Приняв $r_1=r_2=\infty$, найдем

$$K_{\tau 1} = 1 - \xi_1 - [(1 - \alpha) \operatorname{sh} \xi_1 z + \operatorname{sh} (\alpha - \xi_1) z] / \operatorname{sh} \alpha z; \quad 0 \leq \xi_1 \leq \alpha; \quad (5)$$

$$K_{\tau 2} = 1 - \xi_2 - (1 - \alpha) \operatorname{sh} (1 - \xi_2) z / \operatorname{sh} (1 - \alpha) z.$$

Приравняв нулю значение производных $K_{\tau i}$, найдем выражения для определения абсцисс обоих максимумов

$$(1 - \alpha) z \operatorname{ch} \xi_1 z - z \operatorname{ch} (\alpha - \xi_1) z + \operatorname{sh} \alpha z = 0;$$

$$(1 - \alpha) z \operatorname{ch} (1 - \xi_2) z = \operatorname{sh} (1 - \alpha) z.$$

Из (6) при известных z можно найти зависимости ξ_1 и ξ_2 от α , а затем, используя (5), подобрать α таким образом, чтобы соблюдалось равенство $K_{\tau 1} = K_{\tau 2}$.

Абсциссы точек максимальной интенсивности сдвигающих усилий ξ , вычисленные при отсутствии промежуточных упоров, и наимыгоднейшего расположения таких упоров α различаются незначительно. Величины ξ определим по формуле

$$\xi = 1 - (1/z) \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x = (\operatorname{sh} z) / z.$$

Приведем результаты вычислений

z	1,0	3,0	5,0	10,0

ξ	0,42	0,37	0,32	0,23
α	0,39	0,37	0,33	0,27

Таким образом, при реальных жесткостях связей сдвига установка промежуточных упоров целесообразна на расстояниях от опоры, равных около 0,15 пролета балки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович Р. И. Расчет двухслойных балок с упругоподатливыми торцевыми упорами // Строит. механика и расчет сооружений. — 1985. — № 2. — С. 27—29.
2. Петров И. А., Рабинович Р. И., Ханукова Г. Е. Конструктивные решения комбинированных перекрытий с внешним армированием стальным профилированным листом // Пром. стр-во. — 1984. — № 2. — С. 11—14.
3. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. — М., 1986. — 315 с.

УДК 624.012.45.042.072:681.3

Н. И. КАРПЕНКО, д-р техн. наук, проф., Т. А. МУХАМЕДИЕВ, канд. техн. наук (НИИЖБ Госстроя СССР, Москва), Г. Р. РОЗЕНВАССЕР, канд. техн. наук, Л. М. ШВАРЦ, инж. (ПромстройНИИпроект, Донецк)

Расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом режимов нагружения

Рассматривается методика расчета статически неопределимых стержневых систем шаговым методом при знакопеременных и повторных нагружениях. Необходимость в таком расчете возникает как при проектировании новых конструкций, так и при анализе несущей способности объектов, которые после определенного периода эксплуатации подлежат реконструкции, проработке и др. Матрица жесткости материала строится на основе использования диаграмм деформирования арматуры и бетона [1]. Ввиду принятого варианта пошагового нагружения нелинейные диаграммы деформирования бетона и арматуры аппроксимируются ломаными линиями, разгрузка и повторная нагрузка до начала разгрузки принимаются линейными. Для арматуры, пересекаемой трещинами, вводятся согласно [2, 3] модифицированные (на основании коэффициентов ψ_5 В. И. Мурашева) диаграммы деформирования. Устанавливаются связи между приращениями напряжений и деформаций. Используются гипотеза плоских сечений и процедура численного интегрирования эпюры напряжений по высоте сечения. Учитывается влияние на характер перераспределения напряжений образования трещин (путем выключения растянутых волокон бетона) и перехода отдельных сжатых волокон на нисходящую ветвь деформирования. На диаграмме сжатия волокон бетона, которые ранее имели трещины, вводится некоторый начальный участок зажатия повышенной деформативности. Более подробно предпосылки принятой физической модели изложены в [2, 3]. Рассматривается совместное действие моментов M и продольных сил N .

На шаге нагружения приращения $\{\Delta R\}$

реакций КЭ (рис. 1, а) определяются согласно, например, [4];

$$\{\Delta R\} = \int_0^a [S]^T \{\Delta \sigma\} dx, \quad (1)$$

где $[S]$ — матрица связи относительных деформаций (или их приращений) с узловыми перемещениями (приращениями перемещений); a — длина КЭ;

$$\{\Delta \sigma\} = \{\Delta M, \Delta N\}^T,$$

$\Delta M, \Delta N$ — приращения моментов и сил в сечении. Выражение (1) интересно тем, что при его выводе еще не используется физическая матрица.

При выводе матрицы $[S]$ прогиб $v(x)$ и продольные перемещения $u(x)$ КЭ выражаются через узловые перемещения v_k с помощью одномерных функций $\mathcal{E}_k(x)$:

$$v(x) = \sum_k v_k \mathcal{E}_k(x), \quad (k=2, 3, 5, 6);$$

$$u(x) = \sum_k v_k \mathcal{E}_k(x), \quad (k=1, 4),$$

где функции $\mathcal{E}_k(x)$ вычисляются по формулам (10.6) и (10.17) из [4] с формальной перенумерацией индексов k ($k=1$ в работе [4] заменяются на $k=2; 2$ на $3; 3$ на $5; 4$ на $6; 5$ на $1; 6$ на 4), причем $\mathcal{E}_k(x)$ при $k=2, 3, 5, 6$ — функции Эрмита. Вектор деформаций $\{\epsilon\} = \{\varkappa, \epsilon_0\}^T = \{-v''(x), u'(x)\}^T$, где \varkappa — кривизна, ϵ_0 — относительное удлинение выбранной оси, откуда

$$\{\epsilon\} = [S] \{v\}, \quad (2)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{a^2} & \frac{12x}{a^3} & \frac{4}{a} & \frac{6x}{a^2} & 0 & \frac{-6}{a^2} & \frac{12x}{a^3} & \frac{2}{a} & \frac{6x}{a^2} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

Можно (в геометрически линейной постановке) заменять в (2) $\{\epsilon\}$ на $\{\Delta\epsilon\} = \{\Delta\kappa, \Delta\epsilon_0\}^T$ и $\{v\}$ на $\{\Delta v\}$.

Матрица жесткости $[D^\Delta]$ материала железобетона (матрица упругости) выводится следующим образом. Для численного интегрирования сечение элемента по высоте разделяется на i тонких бетонных слоев площадью A_{bi} и отдельно фиксируются слои арматуры площадью A_{sj} ; z_{bi} и z_{sj} — расстояния от продольной оси x до центра тяжести слоев; σ_{bi} и σ_{sj} — напряжения в слоях бетона и арматуры; положительные значения z_{sj} , z_{bi} отсчитываются вверх от оси x (рис. 1, б).

Относительная деформация любого слоя

$$\epsilon = \epsilon_0 + z\kappa, \quad (3)$$

где $\epsilon = \epsilon_{bi}$, ϵ_{sj} при $z = z_{bi}$, z_{sj} ($\Delta\epsilon$ получаем, заменяя κ на $\Delta\kappa$ и ϵ_0 на $\Delta\epsilon_0$).

Приращения момента и нормальной силы в сечении (рис. 1, б):

$$\Delta M = \sum_j \Delta \sigma_{sj} A_{sj} z_{sj} + \sum_i \Delta \sigma_{bi} A_{bi} z_{bi};$$

$$\Delta N = \sum_j \Delta \sigma_{sj} A_{sj} + \sum_i \Delta \sigma_{bi} A_{bi}. \quad (4)$$

Учитывая, что

$$\Delta \sigma_{sj} = E_{sj}^\Delta \Delta \epsilon_{sj}; \quad \Delta \sigma_{bi} = E_{bi}^\Delta \Delta \epsilon_{bi}, \quad (5)$$

где E_{bi}^Δ , E_{sj}^Δ — модули, связывающие при-

ращения напряжений с приращениями деформаций (в нашем случае модули в пределах линейных участков ломаных линий, аппроксимирующих диаграммы). Внося (5) в (4), предварительно выразив в (5) приращения деформаций в арматуре и слоях бетона через приращения $\Delta\kappa$ и $\Delta\epsilon_0$ (рис. 1, б), на основании (3), находим

$$\begin{aligned} \{\Delta \sigma\} &= \begin{bmatrix} D_{11}^\Delta & D_{12}^\Delta \\ D_{12}^\Delta & D_{22}^\Delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \kappa \\ \Delta \epsilon_0 \end{Bmatrix} = \\ &= [D^\Delta] \{\Delta \epsilon\} = [D^\Delta] [S] \{\Delta v\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где коэффициенты D_{ij}^Δ равны

$$D_{11}^\Delta = \sum_j E_{sj}^\Delta A_{sj} z_{sj}^2 + \sum_i E_{bi}^\Delta A_{bi} z_{bi}^2;$$

$$D_{12}^\Delta = \sum_j E_{sj}^\Delta A_{sj} z_{sj} + \sum_i E_{bi}^\Delta A_{bi} z_{bi}; \quad (7)$$

$$D_{22}^\Delta = \sum_j E_{sj}^\Delta A_{sj} + \sum_i E_{bi}^\Delta A_{bi}.$$

В (7) модули E_{sj}^Δ принимают различные значения в зависимости от того, работает ли слой арматуры без трещин или с трещинами. В последнем случае E_{sj}^Δ вычисляется на линейных отрезках аппроксимации кривой $E_s \psi_s$ [2].

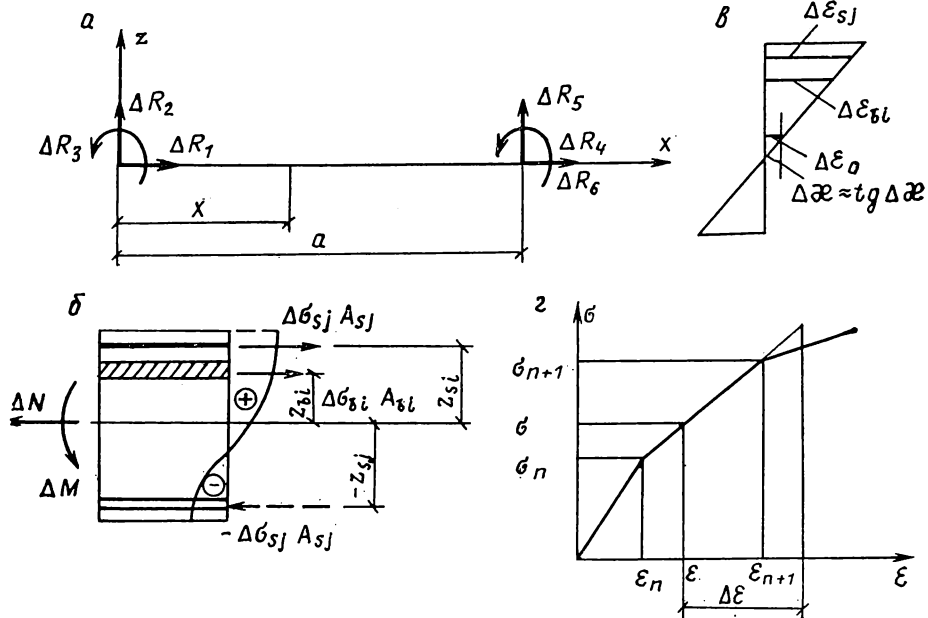


Рис. 1

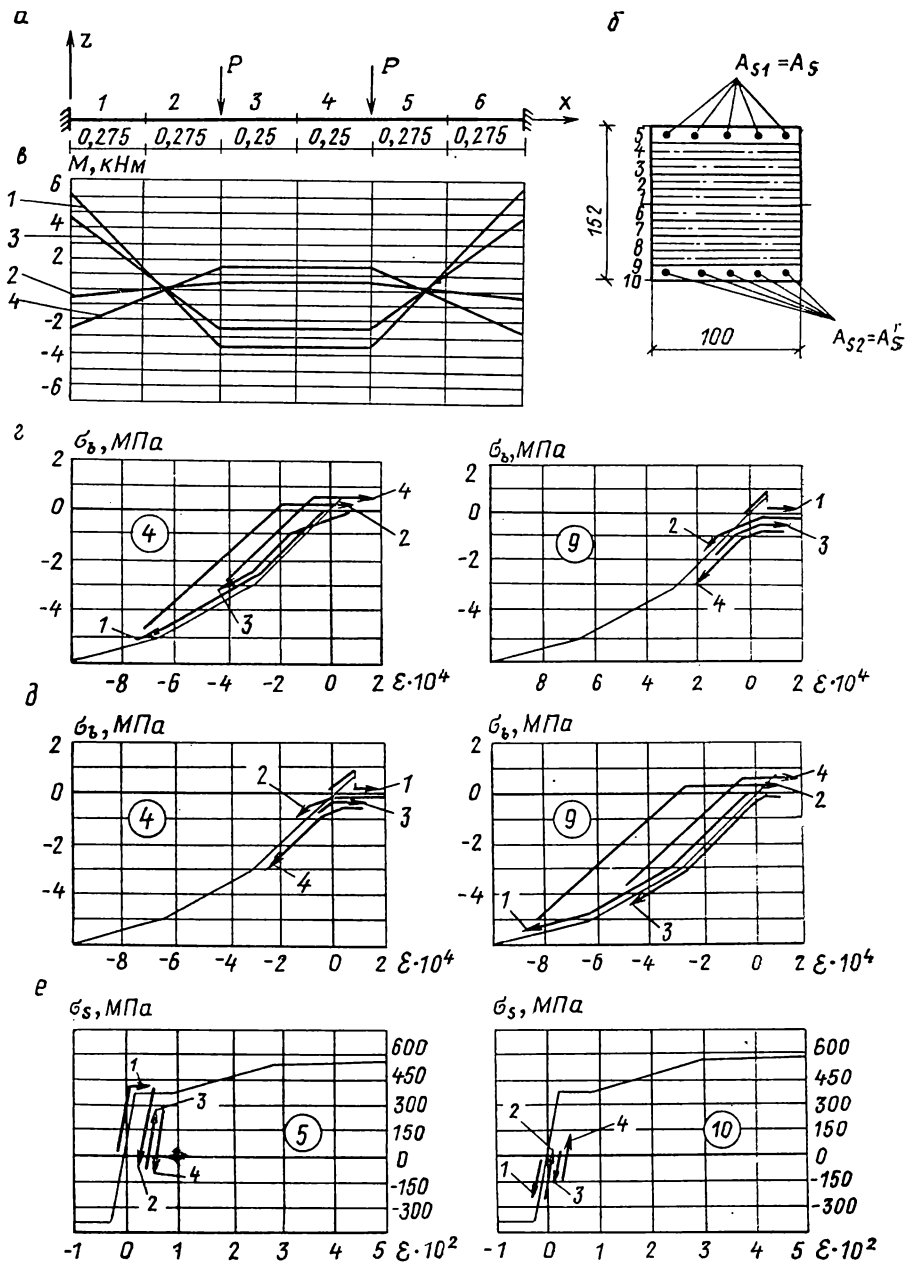


Рис. 2

ние которой представлены на рис. 2, а, б, изготовлена из бетона класса В10, арматуры класса АIII ($A_s = A'_s = 1,01 \text{ см}^2$, здесь $A_{s1} = A_s$; $A_{s2} = A'_s$) и загружена в четыре этапа (1—4 на рис. 2, в—е) знакопеременной нагрузкой P , которая изменялась в пределах 0—18 кН — на первом этапе, 18—(-2) кН — на втором, (-2)—15 кН — на третьем и 15—(-5) кН — на четвертом. Результаты расчетов показаны на рис. 2: изменение

эпюры моментов (на конец этапа) — рис. 2, б; изменение напряжений и деформаций в слоях 4 и 9 бетона (номера слоев указаны в кружках) элемента 3 — рис. 2, г; то же, элемента 6 — рис. 2, д; изменение напряжений и деформаций в арматуре слоев 5 и 10 элемента 6 — рис. 2, е.

Пример 2. Стена заглубленного сооружения (рис. 3, а, б) рассчитана от трех последовательных этапов нагружения: активного давления P_r грунтовой засыпки (пе-

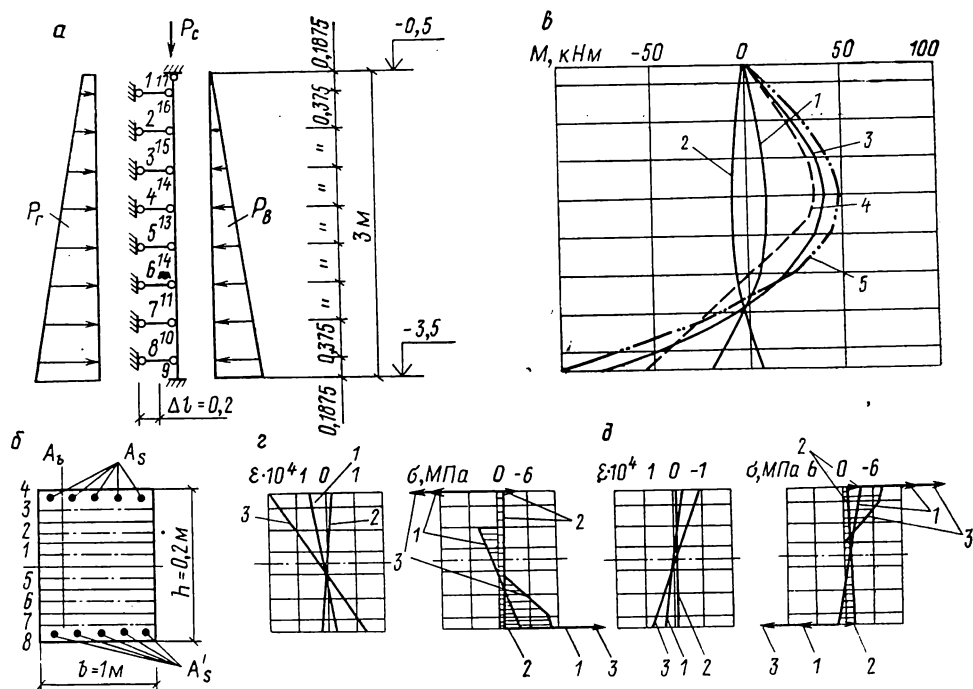


Рис. 3

сок с объемным весом $\gamma^* = 18 \text{ кН/м}^3$ и углом внутреннего трения $\varphi = 24^\circ$) и собственного веса P_c ; гидростатического давления воды P_b ; дополнительного давления грунта, вызванного деформациями сжатия при подработке Δl . Железобетонная стеновая панель ПС-8 выполнена из бетона класса В30 и арматуры класса АIII ($A_s = A'_s = 15 \text{ см}^2$). Матрица жесткости грунтового конечного элемента построена с использованием диаграмм сопротивления сжатию грунта и имеет структуру, аналогичную (9). Активное давление грунта (рис. 3, в) вызывает прогиб стеновой панели внутрь сооружения и соответствующую эпюру моментов 1; гидростатическое давление — разгрузку и эпюру моментов противоположного знака 2; давление от подработки — вновь изменяет эпюру моментов 3; штрихпунктирной линией 5 показаны результаты расчета упругой системы на этапе 3.

Эпюры ϵ и σ по сечению элемента 9 и 14 для соответствующих этапов 1—3 показаны на рис. 3, г, д.

Значения моментов, полученные программой «Сомбайн» при неупруго-нелинейной системе расчета, на 15—20% меньше соответствующих показателей расчета упругой системы, и они удовлетворительно согласуются с данными эксперимента (штриховая линия 4 на рис. 3, в), проведенного в Донецком ПромстройНИИпроекте [5]; некоторые расхождения объясняются трудностями точного определения давления грунта. Процессорное время счета для примера 1 — около 4 мин, для примера 2 — около 7 мин.

Программа «Сомбайн» (ЕС-1035), реализующая представленную методику расчета, использована Донецким ПромстройНИИпроектом при расчете и проектировании ряда промышленных объектов (конструкций железобетонных резервуаров и щелевых камер на подрабатываемых территориях). Она также может быть использована для расчета различных статически неопределимых стержневых конструкций при повторных и знакопеременных режимах нагружения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпенко Н. И., Мухамедиев Т. А., Петров А. Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. — М.: НИИЖБ, 1986. — С. 7—25.
2. Карпенко Н. И., Мухамедиев Т. А., Сапожников М. А. К построению методики расчета стержневых элементов на основе диаграммы деформирования материалов // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. — М.: НИИЖБ, 1987. — С. 4—24.
3. Карпенко Н. И. Методика конечных приращений для расчета деформаций железобетонных элементов при знакопеременной нагрузке // IX Всесоюзная конференция по бетону и железобетону: Сб. статей. — М., 1983. — С. 3—11.
4. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1974. — 342 с.
5. Петраков А. А., Розенвассер Г. Р., Шварц Л. М. К определению эксплуатационной пригодности конструкций подрабатываемых объектов // Пром. стр-во и инж. сооружения. — 1985. № 4. — С. 7—8.

Прочность бетонов при простом многоосном нагружении

Многочисленными экспериментально-теоретическими исследованиями установлено, что предельная поверхность прочности бетона представляет собой в пространстве главных напряжений неротационную поверхность, осью симметрии которой является гидростатическая ось, а девиаторным сечением — криволинейный треугольник (рис. 1, б). Вершина отсекает на гидростатической оси отрезок, проекции которого на координатные оси численно равны пределу прочности бетона при равномерном трехосном растяжении R_{3p} . Со стороны равномерного трехосного сжатия эта поверхность открыта.

Принимаем, что растяжение положительно и выполняется условие

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1. \quad (1)$$

Область, соответствующая неравенству (1) в пространстве главных напряжений, представляет собой двугранный угол, ребро которого — гидростатическая ось ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), а грани составляют плоскости $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ и $\sigma_2 - \sigma_3 = 0$. Область прочного сопротивления бетона ограничена этим двугранным углом и некоторой неротационной поверхностью (рис. 1, а).

Координатная плоскость $\sigma_3 = 0$ отсекает область с предельной поверхностью SBR_p трехосного растяжения ($p-p-p$), а в этой плоскости лежит область двухосного растяжения с предельной кривой прочности BR_p . Координатные плоскости $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$ отсекают область растяжение — растяжение — сжатие ($p-p-c$) с предельной поверхностью $BR_p R_c$ а в плоскости $\sigma_2 = 0$ расположена область двухосного растяжения — сжатия с предельной кривой прочности $R_c QR_p$. Между плоскостями $\sigma_1 = 0$ и $\sigma_2 = 0$ расположена область растяжение — сжатие — сжатие ($p-c-c$) с предельной поверхностью $FR_p R_c$, а в плоскости $\sigma_1 = 0$ — область двухосного сжатия с предельной кривой FR_c . Область трехосного сжатия ($c-c-c$) расположена за плоскостью $\sigma_1 = 0$ в отрицательную сторону.

На граничной плоскости двугранного угла $OEPR_p$ выполняется условие $\sigma_2 = \sigma_3$ и коэффициент Лодэ — Надаи $\mu_\sigma = -1$, что соответствует состоянию обобщенного растяжения. Предельная кривая в этой плоскости проходит через точки, соответствующие пределам прочности бетона при одноосном растяжении R_p и при двухосном равномерном сжатии F .

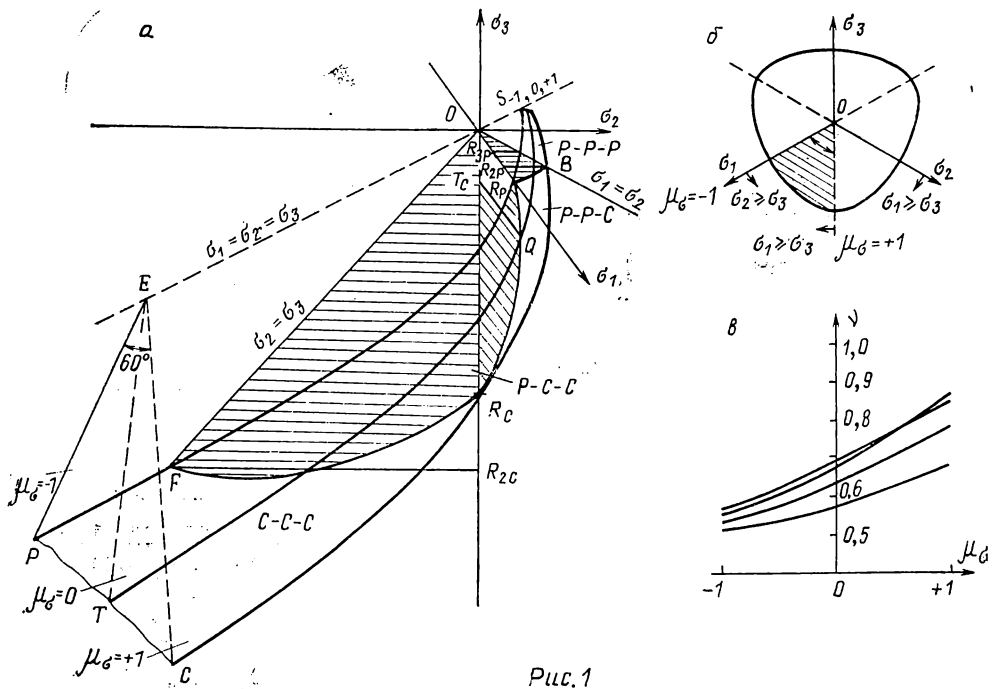


Рис. 1

На другой граничной плоскости *ОЕСВ* выполняется условие $\sigma_1 = \sigma_2$ и коэффициент Лоде — Надаи $\mu_\sigma = 1$, что соответствует состоянию обобщенного сжатия. Срединная плоскость рассматриваемой области *ОЕТQ*, для которой $\mu_\sigma = 0$, является плоскостью обобщенного сдвига.

Для описания поверхности прочности бетона при условии (1) воспользуемся критерием прочности Баландина — Гениева [1] в форме

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) + (R_c - R_p)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - R_c R_p \leq 0 \quad (2)$$

и выражениями для определения октаэдрических нормального и касательного напряжений

$$\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3; \quad (3)$$

$$\tau_0 = (\sqrt{2}/3) \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)}. \quad (4)$$

Путем несложных преобразований выражение (2) представим в октаэдрических координатах

$$\tau_0 \leq \sqrt{[(2\nu - 1)\sigma_0^2 - (R_c - R_p)\sigma_0 + R_c R_p/3]/(1 + \nu)}. \quad (5)$$

При фиксированном значении параметра ν предельная поверхность (2) или (5) представляет собой поверхность вращения. Экспериментальные данные о прочности материалов, неодинаково работающих на сжатие и растяжение (к ним относятся и бетоны), показывают, что при одном и том же октаэдрическом нормальном напряжении предельное октаэдрическое касательное напряжение при обобщенном сжатии выше, чем при обобщенном растяжении.

Будем считать, что параметр ν является предельным значением обобщенного коэффициента относительных поперечных деформаций (по терминологии А. В. Яшина) и будет изменяться в зависимости от коэффициента Лоде — Надаи. Для обобщенного растяжения характерными частными случаями являются одноосное растяжение и равномерное двухосное сжатие — процессы, одинаковые по своей физической сущности, поэтому логично предположить, что предельный параметр ν при $\mu_\sigma = -1$ будет иметь одно и то же фиксированное значение, которое определим из условия прохождения предельной кривой через точку *F*, соответствующую пределу прочности при равномерном двухосном сжатии (рис. 1,а). Подставим в (2) $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -R_{2c}$. Получим выражение параметра ν для обобщенного растяжения

$$\nu_p = 1 - (R_c - R_p)/R_{2c} - 0,5 R_c R_p/R_{2c}^2. \quad (6)$$

Аналогично, для обобщенного сжатия частными случаями являются одноосное сжатие и равномерное двухосное растяжение — одинаковые процессы с точки зрения трехосного напряженно-деформированного состояния. Значение параметра ν в этом случае определим из условия прохождения предельной кривой через точку $\sigma_1 = \sigma_2 = R_{2p}$, $\sigma_3 = 0$. Из (2) для обобщенного сжатия получим

$$\nu_c = 1 + (R_c - R_p)/R_{2p} - 0,5 R_c R_p/R_{2p}^2. \quad (7)$$

В плоскости обобщенного сдвига ($\mu_\sigma = 0$) предельная кривая проходит через точку, соответствующую пределу прочности при чистом сдвиге. Подставив в (2) $\sigma_1 = T_c$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -T_c$ получим

$$\nu_T = 0,5 R_c R_p/T_c^2 - 1. \quad (8)$$

Для определения значения ν при произвольном коэффициенте Лоде — Надаи μ_σ , представим

$$\nu = a \mu_\sigma^2 + b \mu_\sigma + c. \quad (9)$$

Коэффициенты a , b и c определим из условия, что

$$\text{при } \mu_\sigma = -1 \quad \nu = \nu_p; \quad \text{при } \mu_\sigma = +1 \quad \nu = \nu_c; \quad \text{при } \mu_\sigma = 0$$

$$\nu = \nu_T; \quad a = 0,5(\nu_c + \nu_p) - \nu_T; \quad b = 0,5(\nu_c - \nu_p); \quad c = \nu_T. \quad (10)$$

Таким образом, для оценки прочности бетона при трехосном нагружении необходимо определить коэффициент Лоде — Надаи μ_σ , затем по (9) найти параметр ν с учетом (6)...(8) и оценить условие (2) в ортогональной системе координат главных напряжений или (5) в системе октаэдрических координат $\tau_\theta - \sigma_\theta$ для фиксированного значения μ_σ . В рассмотренном алгоритме используются пять механических характеристик: общепользуемые пределы прочности бетона на одноосное растяжение и сжатие — R_p и R_c , а также T_c — предел прочности при чистом сдвиге; R_{2p} и R_{2c} — пределы прочности при равномерном двухосном растяжении и сжатии. Все эти параметры имеют четкий физи-

ческий смысл и могут быть оценены на основе нормативных и немногочисленных экспериментальных данных.

Анализ нормативных сопротивлений бетона осевому сжатию ($R_{bn}=R_c$) и растяжению ($R_{btн}=R_p$) [2] показывает, что для тяжелых бетонов марок В 10...60 существует зависимость в виде

$$R_p = R_c (0,113 - 0,00133 R_c). \quad (11)$$

Нормативных данных для разных марок бетонов по определению T_c , R_{2p} и R_{2c} не имеется, поэтому они определены из условия прохождения кривых прочности для обобщенных растяжения, сжатия и сдвига в зоне наиболее вероятных значений прочности (рис. 2) в виде функций предела прочности на одноосное сжатие

$$T_c = R_c (0,196 - 0,0015 R_c); \quad (12)$$

$$R_{2p} = R_c (0,0621 - 0,000756 R_c); \quad (13) \quad R_{2c} = R_c (1,6 + 0,01 R_c). \quad (14)$$

Значения для T_c и R_{2c} по формулам (12) и (13) получены несколько завышенными по сравнению с опытными данными [3] для плоско-напряженного бетона, что вполне согласуется с выводами работ [4] и [5] и экспериментальными данными, представленными в [6].

Для бетонов с призменной прочностью выше 43 МПа механические характеристики R_p , T_c , R_{2p} и R_{2c} принимаются такими же, как и для бетона марки В 60.

На рис. 1, б показан характер изменения параметра ν в зависимости от коэффициента Лоде — Надаи μ_σ (9) с учетом (6)...(8) и (10)...(14) для бетонов с прочностью на осевое сжатие 10, 20, 30 и 40 МПа (соответственно кривые 1, 2, 3 и 4). Анализ показывает, что параметр ν изменяется в пределах

$$0,5 < \nu < 1. \quad (15)$$

Исследуем характер предельной поверхности (2) при ограничении (15), для чего воспользуемся основными понятиями общей теории поверхностей второго порядка. Общему уравнению (2) соответствуют следующие четыре инварианта [7]:

$$I = 3; \quad J = 3(1 - \nu^2); \quad D = (1 - 2\nu)(1 + \nu)^2;$$

$$A = 2 R_c R_p (1 + \nu)^2 \{ \nu - [0,5 + 3(R_c - R_p)^2 / 8 R_c R_p] \}.$$

Для указанного промежутка изменения параметра ν имеем $A < 0$, $DI < 0$, $J > 0$. Согласно классификации поверхностей второго порядка можно утверждать, что меридиональным образующим исследуемой предельной поверхности (2) при каждом фиксированном $\nu = \nu(\mu_\sigma)$ будут соответствовать образующие двухполостных гиперболоидов, а в каждом девиаторном сечении (выпуклая кривая) направляющая, по которой формируется выпуклая вращающаяся поверхность.

Инвариант A , называемый дискриминантом уравнения (2), удовлетворяет (15) при

$$3(R_c - R_p)^2 / 8 R_c R_p > 0,5.$$

Отсюда после несложных вычислений можно получить ограничение для коэффициента хрупкости

$$x = R_c / R_p > 1,5.$$

Определим прочность бетона при равномерном трехосном растяжении R_{3p} из (5) при условии $\tau_d = 0$:

$$R_{3p} = (R_c - R_p - \sqrt{(R_c - R_p)^2 - 4(2\nu - 1) R_c R_p / 3}) / (2(2\nu - 1)).$$

При подходе к гидростатической оси по разным меридиональным образующим получим неоднозначность R_{3p} при $\nu = \nu(\mu_\sigma)$, однако разброс полученных данных вдоль гидростатической оси будет небольшой и составит менее 2%. Например, для бетона с прочностью на осевое сжатие $R_c = 30$ МПа $R_{3p} = 0,36 R_p$ при $\mu_\sigma = -1$; $R_{3p} = 0,362 R_p$ при $\mu_\sigma = 0$; $R_{3p} = 0,367 R_p$ при $\mu_\sigma = +1$.

Для исключения этой неоднозначности предлагается ограничить поверхность прочности бетона со стороны равномерного трехосного растяжения плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3} R_{3p}$, где R_{3p} вычислена для $\mu_\sigma = -1$.

Для частного случая $R_c = R_p = R_{2c} = R_{2p}$, $T_c = R_c / \sqrt{3}$ из (6)...(9) получим $\nu = \nu_c = \nu_p = \nu_\tau = 0,5$. Уравнению (2) при таком условии будут соответствовать инварианты $I = 3$, $J = 2,25$, $D = 0$, $A = 0$ и, согласно классификации поверхностей второго порядка, это эллиптический цилиндр [7].

На рис. 2 показаны в относительных единицах октаэдрических нормальных и касательных напряжений данные исследований прочности материалов с различными коэффициентами хрупкости x , проведенных на разных испытательных устройствах, обзоры которых приведены в [6] и [8]. Опытные точки расположены на некотором доверительном интервале для обобщенного сжатия $\mu_\sigma = +1$ (рис. 2, а) и для обобщенного растяжения $\mu_\sigma = -1$ (рис. 2, б) в широком диапазоне значений нормальных октаэдриче-

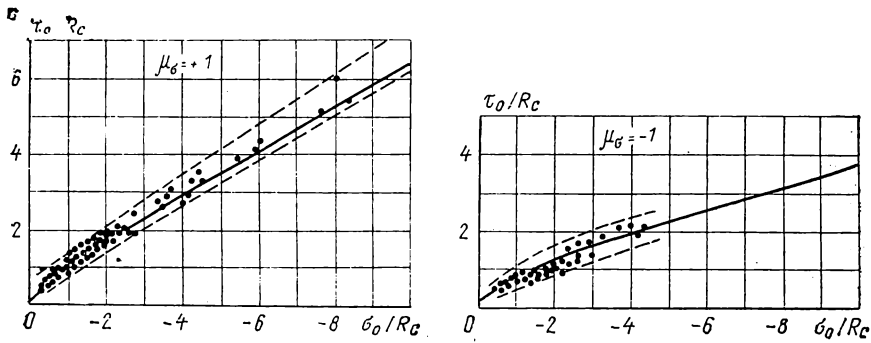


Рис. 2

ских напряжений. Сплошной линией показаны предельные кривые прочности по (5) для бетона с пределом прочности на одноосное сжатие $R_c=40$ МПа; вычисленные на основании (11)...(14) характеристики: $R_p=2,4$ МПа; $T_c=5,3$ МПа; $R_{2p}=1,2$ МПа, $R_{2c}=88$ МПа. Параметр ν имеет следующие значения, определяемые по (6) и (7): при $\mu_\sigma = +1$ $\nu_c=0,85$; при $\mu_\sigma = -1$ $\nu_p=0,57$.

Для сравнения с опытными данными [6] в небольшом диапазоне изменения σ_0 на рис. 3 построены предельные кривые прочности по (5) для бетона с пределом прочности на одноосное сжатие $R_c=31,7$ МПа при обобщенном растяжении (а), сжатии (б), сдвиге (в), а также девиаторное сечение (г) при $\sigma_0=34,8$ МПа.

Частный случай предлагаемого критерия бетона при плоском напряженном состоянии (двухосное сжатие, сжатие — растяжение) и сравнение с опытными данными рассмотрены в [9].

Приведенный алгоритм определения предельного состояния бетона при двух- и трехосном напряженно-деформированном состоянии реализован в вычислительном комплексе «ФЕНИКС», разработанном в НИИАСС Госстроя УССР.

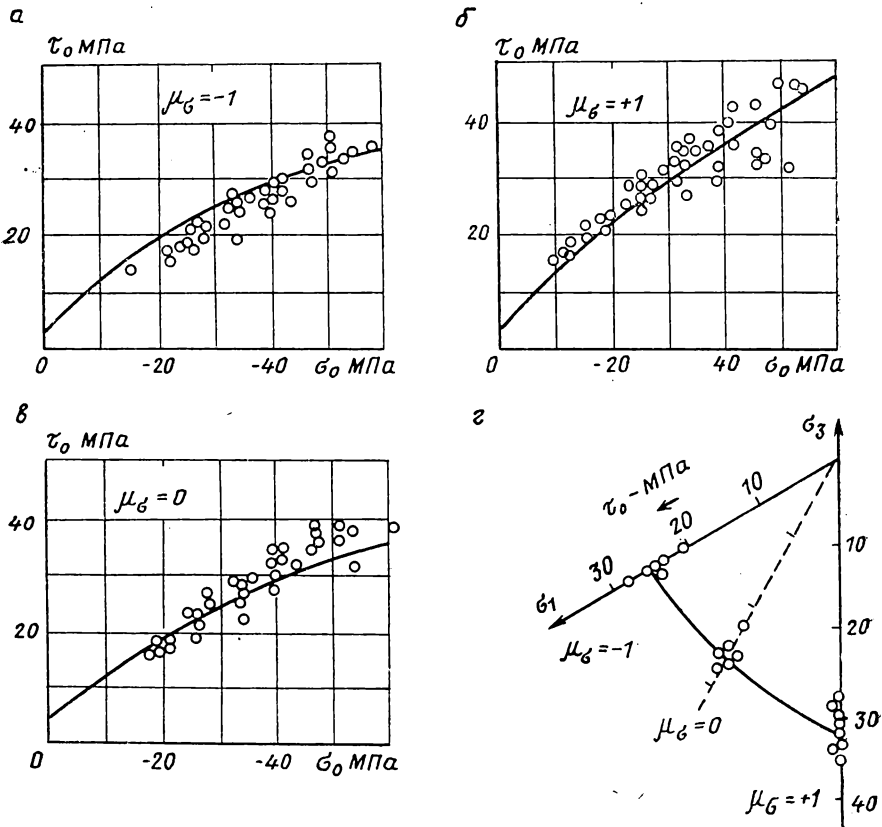


Рис. 3

1. *Гениев Г. А., Киссюк В. Н., Тюпин Г. А.* Теория пластичности бетона и железобетона. — М.: Стройиздат, 1974. — 316 с.
2. *СНП 2.03.01—84.* Бетонные и железобетонные конструкции.
3. *Kupfer H. B.* Das nicht-lineare Verhalten des Betons bei zweiachsigen Beanspruchung // *Beton und Stahlbetonbau.* — 1973. — N 11. — S. 269—274.
4. *Евдокимов В. И.* Предельная прочность бетона при двухосном сжатии // *Технология, расчет и конструирование бетонных и железобетонных конструкций.* — М., 1979. — С. 84—88.
5. *Козачевский А. И., Язын А. М.* О влиянии коэффициента поперечной деформации на условия прочности бетона при двухосном сжатии // *Сопротивление материалов и теория сооружений.* — 1982. — Вып. 40. — С. 95—100.
6. *Kotsovos M. D.* A mathematical description of the strength properties of concrete under generalized stress // *Magazine of Concrete Research.* — 1979. — Vol. 31. — No. 108, P. 151—159.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1978. — С. 89—97.
8. *Лукиша Л. К.* О неротационной предельной поверхности в теории прочности // *Доклады АН ВССР,* 1977, — Т. XXI. — № 2. — С. 134—137.
9. *Язын А. М.* Прочность и деформативность железобетонных конструкций при двухосном напряженном состоянии с учетом неупругой работы материалов: Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. — Киев, КИСИ, 1985. — 20 с.

УДК 624.073.13.046.2

С. Б. СМЕРНОВ, канд. техн. наук (МИСИ им. В. В. Куйбышева)

Метод определения предельных нагрузок для плосконапряженных и плоскодеформированных систем

В [1] предложен метод расчета железобетонных, бетонных и металлических балок-стенок в предельной стадии их работы. В настоящей статье дано развитие этого метода и его обобщение на любые плосконапряженные и плоскодеформированные элементы, а также на элементы, промежуточные между ними. Основными объектами практической реализации метода явились весьма распространенные «короткие» железобетонные элементы (короткие консоли, перемычки двух ветвевых колонн, подрезки ригелей, рамные узлы и т. д.), а также балки-стенки, панели, диафрагмы жесткости и т. д. Метод прошел экспериментальную проверку при расчете балок-стенок, коротких консолей, панелей и диафрагм.

При построении метода было доказано, что разрушение по сжато-растянутым зонам, впервые описанное А. С. Залесовым [2], наиболее типично для всех реальных плоских железобетонных элементов. В этих опасных зонах уже в упругой стадии поле напряжений близко к однородному [3, 4]. (В железобетоне с возникновением трещин в таких зонах сохраняется интегральная однородность поля $\{\sigma\}$).

Разрушение по сжато-растянутым зонам в коротких элементах и балках-стенках подтверждено многочисленными экспериментами, проведенными в [3]. Здесь предложено упрощенно заменять эти зоны одноосно сжатыми полосами фиксированной ширины, направленными вдоль потоков напряжений $\sigma_{гд}^-$. Данный метод отчасти развивает эту концепцию, позволяя находить реальную форму опасных зон, а также определять в них растягивающие напряжения $\sigma_{гд}^+$.

В настоящей статье предлагается определять напряжения и положение опасных реальных однородно напряженных пластических зон с помощью таких же зон в равновесных кусочно-однородных полях напряжений. Разработаны общие принципы построения таких полей, отражающих форму нагрузки, граничных условий, эпюр M , Q . Доказано, что такие поля, имеющие минимальное число зон, единственны и отображают местоположение реальных пластических зон и линий текучести. Поэтому они определяют действительную предельную нагрузку q_0 . Сущность метода состоит в следующем.

Все нагрузки, действующие по контуру элемента, представляются в виде ступенчатых нагрузочных эпюр q_σ и q_τ , загружающих n_d^q контурных линий. Затем по всей плоскости элемента строится искомое кусочно-однородное равновесное поле $\{\sigma\}$ с минимальным числом треугольных зон $n_3 = n_3^{\min} = n_d^q$. Определяем в них компоненты напряжений в опасных зонах и, подставив их в соответствующее условие пластичности

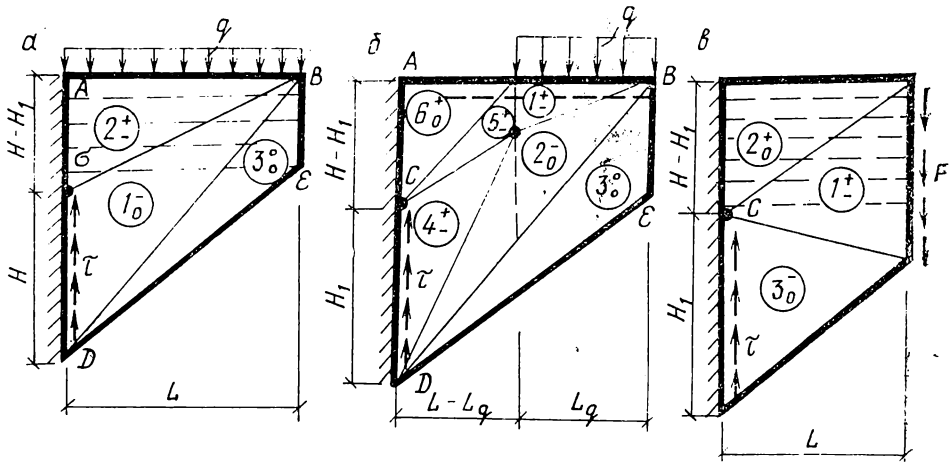


Рис. 1

(прочности), получаем формулы для предельной нагрузки q_0^{c-p} ; $q_0^{изг}$; $q_0^{см}$, отвечающие трем типам механизмов, и величину

$$q_0^{min} = f(H, L, d_i, \mu R_s, R_B).$$

Изложим кратко общие принципы построения равновесных кусочно-однородных полей $\{\sigma\}$. Проведение каждой линии, разделяющей зоны, накладывает два условия равновесия на их напряжения. Число уравнений равновесия $n_{ур}$, равное удвоенному числу внутренних и контурных линий разбивки $2(n_{л}^в + n_{л}^к)$, не должно превышать число неизвестных n_n , равное числу компонентов напряжений $n_{\sigma} = 3n_3$ и числу координат центров разбивки $n_{\tau} = 2n_{ц}^в + n_{ц}^к$, где n_3 — число зон, $n_{ц}^в$ и $n_{ц}^к$ — число соответственно внутренних и внешних центров разбивки. Если нагрузки приложены только по выпуклому внешнему контуру полигонального элемента с числом нагрузочных линий (участков) $n_{л}^q = n_{л}^к$, то необходимое условие равновесной разбивки имеет вид

$$n_{ур} = 2(n_{л}^q + n_{л}^в) \leq n_n = 3n_3 + 2n_{ц}^в + n_{ц}^к + 3.$$

Доказано, что сквозные зоны-аналоги реальных пластических зон возникают лишь при максимально крупных зонах с минимальным их числом. При ограничении $n_3 = n_3^{min}$ построение поля $\{\sigma\}$ резко усложняется. Четкие принципы для построения удается получить лишь при числе нагруженных участков $n_{л}^q \leq 9$.

Правильная разбивка элемента, имеющего $n_{л}^q$ контурных линий (участков) нагрузки, производится лучами из единого внутреннего центра «С» в $n_{л}^q$ точек контура. В этом случае $n_{ц}^в = 1$; $n_{ц}^к = 0$; $n_{л}^q = n_{л}^к = n_{л}^в = n_3 = n_3^{min}$ и условие (1) принимает вид

$$n_{ур} = 4n_{л}^q = 4n_3 \leq n_n = 3n_3 + 5; \quad n_{л}^q = n_3 \leq 5.$$

Если $n_{л}^q > 5$, то надо уменьшить число уравнений, введя угловые зоны в количестве n_3^y (если это допускает нагрузка). При этом условие (2) принимает вид $n_{л}^q = n_3 \leq 5 + n_3^y$. Для реальных прямоугольных элементов

$$n_3^y = n_{3, \max}^y = 4; \quad n_{л}^q = n_3^{min} \leq 9 \text{ или } n_3^{min} = n_{л}^q + n_{ц}^к.$$

На рис. 1, б и рис. 2 показаны схемы, где для образования угловых зон нужно вводить контурные центры числом $n_{ц}^к$.

Используя принцип единого центра и угловых зон, можно получить правильную схему разбивки (т. е. поле $\{\sigma\}$) для любого элемента, где $n_{л}^q \leq 9$. При этом положение внутренних и контурных центров разбивки, а также знаки главных напряжений в зонах находятся из условий равновесия зон и равновесного отображения полем $\{\sigma\}$ граничных условий и эпюр Q, M . Поля $\{\sigma\}$ при $n_{л}^q > 9$ (рис. 2, б) строятся путем суперпозиции, комбинирования и трансформации простых базисных полей, заранее построенных для систем каждого типа (рис. 2, а), где $n_{л}^q \leq 9$.

Если все зоны элемента в предельной стадии охвачены пластичностью, то кусочно-

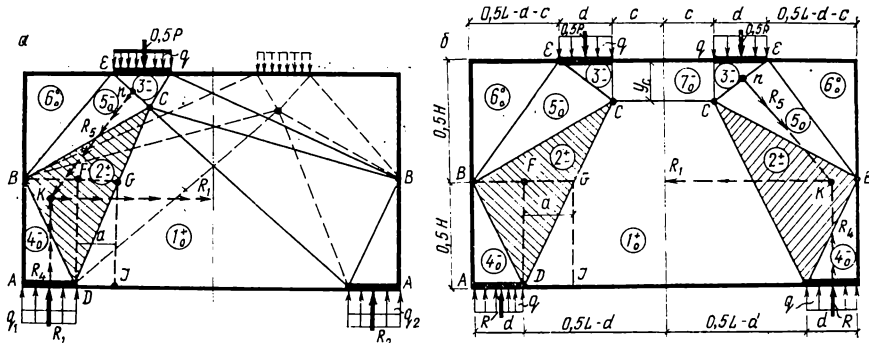


Рис. 2

однородное поле $\{\sigma\}$ в нем является истинным, как, например, в консольной балке-стенке (рис. 1, а). Здесь вид поля $\{\sigma\}$ однозначно определен формой эпюр M , Q и граничными условиями. Около верхней грани AB возникает однородная пластическая зона $2\pm$ растяжения-сжатия, где $\sigma_{гЛ.2} = \sigma_y^{(2)} = -q$. В зоне 3_0^0 , которая примыкает к двум незагруженным граням, возникает нулевое поле $\{\sigma\}$. Вблизи незагруженной наклонной грани BD возникает пластическая зона одноосного сжатия 1_0^- , где $\sigma_{гЛ.1}$ направлено вдоль BD .

Приведем решение для металлической балки-стенки при условии пластичности Треска. Из условий равновесия и пластичности зоны 1_0^- имеем:

$$\tau_{xy}^{(1)} = 0,5 \sigma_{гЛ.1}^- \sin 2\alpha; \quad \sigma_x^{(1)} = \sigma_{гЛ.1}^- \cos^2 \alpha; \quad \sigma_{гЛ.1}^- = \sigma_T.$$

Из условия $\Sigma Y_{общ} = 0$ с учетом (1) находим

$$q = \tau_{xy}^{(1)} (H_1/L) = 0,5 H_1 L^{-1} \sigma_T \sin 2\alpha.$$

Из условия пластичности зоны $2\pm$ $\tau_{max} = 0,5 (\sigma_{гЛ.2}^+ - \sigma_{гЛ.2}^-) = 0,5 \sigma_T$ находим

$\sigma_x^{(2)} = \sigma_{гЛ.2}^+ = \sigma_T + \sigma_{гЛ.2}^- = \sigma_T - q$. Из условия $\Sigma X_{общ} = \sigma_x^{(1)} H_1 - \sigma_x^{(2)} (H - H_1) = 0$, подставив в него $\sigma_x^{(1)}$ и $\sigma_x^{(2)}$, получим

$$\sigma_T \cos^2 \alpha H_1 - (\sigma_T - q) (H - H_1) = 0.$$

Отсюда получаем уравнение относительно q

$$q = 2 H / \sigma_T \sin 2\alpha - q (H + H \operatorname{ctg} \alpha + 2 H / \sin 2\alpha + \sigma_T H = 0. \quad (1)$$

Если $\alpha = \pi/4$, то (1) примет вид $q^2 - 2q\sigma_T + 0,5\sigma_T^2 = 0$, откуда $q_0 = 0,3\sigma_T$; $q_0^{\text{бал}} = (H^2/2H^2)\sigma_T = 0,5\sigma_T$. Таким образом, разница между точным решением q_0 и приближенным $q_0^{\text{бал}}$ в короткой консоли составляет 40%.

Приведем решение для железобетонной консоли (рис. 1, а), в верхней зоне которой имеет место продольное армирование интенсивности μR_s . Рассмотрим основной вариант разрушения — одновременное возникновение пластичности бетона в зонах 1_0^- и $2\pm$ без текучести арматуры в зоне $2\pm$ (т. е. $\sigma_s^+ < R_s$). Все условия равновесия остаются в силе, но условие пластичности в зоне 1_0^- меняется: ($\sigma_{гЛ.1}^- = R_B$), и формула для q принимает вид $q = 0,5 H_1 L^{-1} R_B \sin 2\alpha$. Условие пластичности железобетона в сжато-растянутой зоне $2\pm$ было получено в [5] с использованием идей из [6]. Оно имеет вид

$$\sigma_{гЛ.2}^- + 0,5 \sigma_{гЛ.2}^- R_B (\mu R_s)^{-1} = R_B.$$

Отсюда, учтя, что $\sigma_{гЛ.2}^- = -q$, найдем $\sigma_x^{(2)} = \sigma_{гЛ.2}^+ = 2 R_B^{-1} (R_B - q) \mu R_s$.

Из условия

$$\Sigma M_{общ} = 0,5 L^2 q - 0,5 \sigma_x^{(2)} (H - H_1) H = 0 \quad (2)$$

$$\text{получим } q L^2 = 2 (R_B - q) \mu R_s R_B^{-1} (H - H_1) H. \quad (3)$$

Совместное решение (2) и (3) дает квадратное уравнение относительно предельной нагрузки $q = q_0$:

$$a q^2 - b q + c = 0; \quad a = 2 L K H / R_B \sin 2 \alpha; \quad b = L^2 + 2 L K H / \sin 2 \alpha + H^2 K; \\ c = R_B H^2 K; \quad K = 0,5 R_B (\mu R_S)^{-1}. \quad (4)$$

Если нагрузка занимает часть консоли, то схема поля $\{\sigma\}$ принимает вид, показанный на рис. 1, б. Здесь опасными также являются зоны 2_0^- и 1_+^+ . Формулы (4) остаются в силе, но в них следует заметить L на L_q . В схеме на рис. 1, в пластичность возникает либо в зоне 1_+^+ , либо сразу в двух зонах (1_+^+ и 3_0^-). Реализация пластичности сразу во всех трех зонах возможна лишь при определенном сочетании параметров L , H и H_1 .

На рис. 2 приведены схемы полей $\{\sigma\}$ для однопролетных железобетонных балок-стенок, где пластичность возникает только в зонах 2_+^+ . Схема, показанная на рис. 2, а, где число участков нагрузки $n_L^q = 8$, получена путем проведения лучей из единого центра C с образованием четырех угловых зон при двух контурных центрах. Здесь $n_3^{\min} = n_L^q + n_C^K = n_L^K = n_L^B = 10$, т. е. должно возникнуть 10 зон и столько же внутренних и контурных линий.

Доказано, что при разрушении однопролетных элементов по сжато-растянутым зонам размер высоты сжатой зоны y_c слабо влияет на величину напряжений $\sigma_{x,2}$; $\sigma_{y,2}$; $\tau_{xy,2}$ (5) в опасных зонах 2_+^+ и на величину q_0^{c-p} . Поэтому величину y_c можно назначать по приближенной формуле $y_c = 0,2 H^2 L^{-1}$ или $y_c = 0,1 H^2 a_{cp}^{-1}$, где y_c должна удовлетворять ограничению $y_c \geq 2 \mu R_S R_B^{-1} H$, $y_c \geq 2 A_S R_S (R_B \delta H)^{-1} H$. Положение контурных центров B находится из условия равновесия зон 2_+^+ и 5_0^- , где линия BE параллельна линии kn .

Схема, приведенная на рис. 2, б, получена путем суммирования двух зеркально отраженных полей $\{\sigma\}$, показанных на рис. 2, а. Во всех однопролетных элементах опасными являются сжато-растянутые зоны 2_{\pm} , где компоненты $\sigma_x^{(2)}$, $\sigma_y^{(2)}$, $\tau_{xy}^{(2)}$ находятся стандартно из условий равновесия $\Sigma x = 0$ и $\Sigma y = 0$ для участков $ABGJ$ и $ABFD$ для сжато-растянутых зон в 2_+^+ :

$$\sigma_y^{(2)} = -q \frac{d}{a+d}; \quad \tau_{xy}^{(2)} = q \frac{2ad}{(a+d)H}; \quad \sigma_x^{(2)} = q \frac{4ad^2}{(a+d)H^2}, \quad (5)$$

где $a = 0,5 H (0,5 L - c - d) (H - y_c)^{-1} = a_{cp} 0,5 H (H - y_c)^{-1}$.

Угол $\alpha = \alpha_x$ наклона оси $\sigma_{гд}^+$ к направлению x определяется из условия

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = 2 \tau_{xy} (\sigma_x - \sigma_y)^{-1} = 4 a H (4 a d + H^2)^{-1}.$$

При наличии нижних растянутых стержней и хомутов, направленных по осям x и y , с коэффициентами армирования $\mu_x^{ст}$, μ_x^x и μ_y^x , образующих углы α_x и $(\beta - \alpha_x)$ с осью $\sigma_{гд}^+$, а также сжатых хомутов, направленных по оси y (μ_y^x), условие прочности сжато-растянутого железобетона, согласно (5), можно принять в виде

$$\sigma_{гд}^- + \sigma_{гд}^+ K \leq R_B + c; \quad K = 0,5 R_B [\mu_x \cos^2 \alpha_x + \mu_y \sin^2 \alpha_y + \mu_\beta \cos^2 (\beta - \alpha_x)]^{-1} R_S^{-1}; \\ c = \mu_y^c \sigma_{sc} \cos^2 \alpha_y \text{ при } \alpha_y \leq \pi/6; \quad c = 0 \text{ при } \alpha_y > \pi/6, \quad (6)$$

где $\mu_x = \mu_x^{ст} + \mu_x^x$; $\mu_y = \mu_y^x$; $\mu_\beta = \mu_\beta^x$; $\mu_x^{ст} = A_{ст}/\delta (H - y_c)$.

Величина σ_{sc} согласно [3] лежит в интервале $[0,6 R_{sc}; 0,8 R_{sc}]$.

Главные напряжения в (6) находятся по формулам $\sigma_{гд}^+ = \sigma_x + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha$; $|\sigma_{гд}^-| = |\sigma_y^-| + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha$. Выразив в (6) $\sigma_{гд}^+$ и $\sigma_{гд}^-$ через параметр q с помощью (5), получим следующую формулу для искомой предельной нагрузки

$$q_0^{c-p} = (R_B + c) H [(a+d)/d] [H + 2 a \operatorname{tg} \alpha + (4 a d/H + 2 a \operatorname{tg} \alpha) K]^{-1}. \quad (7)$$

Эта формула справедлива для всех схем данного типа (рис. 2) при любом положении грузов в пролете.

Проверка точности формулы (7) была произведена путем расчета 100 элементов, доведенных до разрушения в экспериментальных работах [7], а также 66 элементов, разрушенных в экспериментальных работах [8]. Из 166 рассчитанных элементов разницы $\epsilon\%$ между $P_{0.теор}$ и $P_{0.эксп}$ составила: для 57 эл. $\epsilon < 5\%$; для 39 эл. $\epsilon < 10\%$; для 44 эл. $\epsilon < 15\%$; для 26 эл. $\epsilon < 26\%$. При наличии среднестатистических данных для $P_{0.эксп}$ точность метода существенно возрастает.

Наименование балок-стенок из [7]	R_B , кН/см ²	ψ	$K = \psi R_B$	c , кН/см ²	$\omega_x = f(K, c)$	$q_0^{c-p} = \omega_x R_B$, кН/см ²	P_0 теор., кН	P_0 эксп., кН	ε , %
1А-1/0,23	2,79	0,0087	0,024	0,243	1,463	4,083	412	522	10
1А-2/0,23	2,79	0,0087	0,024	0,243	1,463	4,083	472	494	4,66
1А-3/0,23	2,79	0,0087	0,024	0,243	1,463	4,083	472	519	9,56
1С-2/0,23	2,77	0,0087	0,024	0,243	1,469	4,068	470	517	9,56
2А-1/0,23	2,77	0,0056	0,015	0	1,549	4,243	490	575	16
2А-2/0,23	2,74	0,0056	0,015	0	1,549	4,243	490	585	17,7
2А-3/0,23	2,74	0,0056	0,015	0	1,549	4,243	490	566	14,4
2С-2/0,23	2,97	0,0056	0,16	0	1,897	4,497	520	540	3,8
3А-1/0,23	2,93	0,0054	0,15	0,243	1,663	4,873	563	599	6,2
3А-2/0,23	2,93	0,0054	0,15	0,243	1,663	4,873	563	622	10
3А-3/0,23	2,93	0,0054	0,15	0,243	1,663	4,873	563	625	10,1
3С-2/0,23	2,99	0,0054	0,016	0	1,652	4,940	571	626	9,2
5С-2/0,23	2,87	0,0043	0,012	0	1,631	4,680	541	556	2,7
6А-2/0,23	2,90	0,0049	0,014	0	1,579	4,575	528	544	3
6А-3/0,23	2,90	0,0049	0,014	0	1,578	4,575	528	529	0,2

Приведем примеры вычисления величин $P_{0, \text{теор}}$ по формуле (7) для шести серий балок-стенок (рис. 2, б), доведенных до разрушения в экспериментальных работах [7] при следующих параметрах: $H=50,8$ см; $\delta=d=7,6$ см; $a_{cp}=0,23$ $H=11,7$ см; $(L-d)/H=1; 2; 3$; $y_c=0,1$ $H^2/a_{cp}=22,1$ см; $a=0,5$ $a_{cp} H (H-y_c)^{-1}=10,3$ см; $\text{tg}2\alpha=4aH(4ad+H^2)^{-1}=0,72$; $\alpha=17,9^\circ$; $\text{tg}\alpha=0,32$; $\sin^2\alpha=0,09$; $\cos^2\alpha=0,91$; $\alpha=\alpha_x=\alpha_y$; $\beta=\pi/4$; нижняя арматура $1\varnothing 20$ $R_s=41,4$ кН/см²; $\mu_x^{\text{CT}}=A_{cT}/\delta(H-y_c)=0,014$ горизонтальные, вертикальные и наклонные хомуты $\varnothing 6$ с шагом 7,6 см $\mu_x^x=\mu_y^x=0,0092$; $\mu_\beta^x=0,0093$ и $\mu_\beta^y=0,0186$; $R_s^x=41,75$ кН/см². Подставив в (7) константы $H=50,8$ см; $d=7,6$ см; $a=10,3$ см; $\text{tg}\alpha=0,32$, получим для данной серии

$$q_0^{c-p} = 119,6 (R_B + C) (57,5 + 12,9 K)^{-1}. \quad (8)$$

Подставив величины μ_i в формулу для K (6), получим K_i в виде

$$K_i = \psi_i R_B.$$

Подставив K и C в (8), найдем $(q_0^{c-p}) = \omega_i R_B$. Значения констант ω_i , ψ_i , C величин q_0^{c-p} ; $P_{0 \text{ теор}}$; $P_{0 \text{ эксп}}$; $\varepsilon = (\Delta P/P_{cp}) \cdot 100$ % приведены в таблице.

Для тех же балок-стенок при нагрузке q по всей верхней грани формула для q_0^{c-p} принимает вид

$$q_0^{c-p} = R_B H (d + 2a) L^{-1} [0,5 H + a \text{tg} \alpha + (a \text{tg} \alpha + a d/H) K]^{-1}. \quad (9)$$

Возможности метода для выявления опасных реальных сжато-растянутых зон и нахождения предельных нагрузок в сложных случаях хорошо иллюстрируют построение поля $\{\sigma\}$ и нахождение q_0 в соосно сжатой бетонной полосе или железобетонной панели (рис. 3, а), где под штампами появляется двухосное сжатие, а в центре — опасная зона 1_{\perp}^+ , растянутая по горизонтали. Наличие всех указанных зон подтверждено экспериментально в [4]. Поле $\{\sigma\}$ в нашем методе получается путем суперпозиции трех полей: поля для двухконсольной балки-стенки, полученного из поля, показанного на рис. 1, а, поля $\{\sigma\}$, обратного ему, и поля одноосного растяжения полосы.

Найдя главные напряжения в опасных зонах 1_{\perp}^+ и 2_0^- и подставив их в соответствующие условия прочности, получим формулу для предельной нагрузки, подтвержденную экспериментами из [4],

$$q_0 = \frac{(c + R_B) H y_t (2l + d)}{d [H y_t + 2l (2l + d) K]}; \quad K_{ж.б} = \frac{0,5 R_B}{\mu R_s}; \quad K_{бет} = \frac{0,5 R_B}{R_{Bt}};$$

$$c_{бет} = 0; \quad c_{ж.б} = \sigma_{sc} \mu^c,$$

где размеры опасной зоны 1_{\perp}^+ l и y_t находятся из уравнений

$$\frac{dq}{dl} = 0; \quad \frac{dq}{dy_t} = 0.$$

Приведенный метод позволяет также находить предельные нагрузки для панелей-диафрагм жесткости высотных зданий и монолитных стен зданий АЭС, где при восприятии горизонтальных сдвиговых нагрузок тоже появляются сжато-растянутые однородные зоны, определяющие их несущую способность. На рис. 3, б дан пример построения

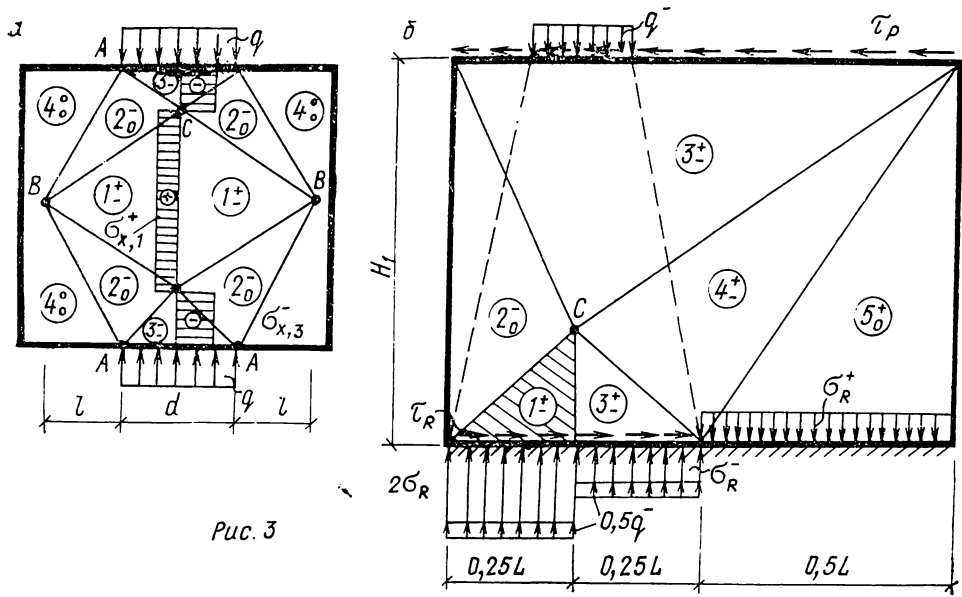


Рис. 3

кусочно-однородного поля в диафрагме с двухпараметрической сдвиговой и нормальной нагрузкой, где разрушение происходит в опасной зоне 1^{\pm} .

Вывод. Предлагаемый метод впервые позволяет получить достаточно строгие, точные и весьма простые расчетные формулы без эмпирических коэффициентов для нахождения предельных (разрушающих) нагрузок для широкого класса плоских железобетонных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов С. Б., Давлятов Р. Х. Метод расчета балок-стенок в пластической стадии // Строит. механика и расчет сооружений. — 1984. — № 5. — С. 26—30.
2. Залесов А. С. Новый метод расчета прочности железобетонных элементов по наклонным сечениям // Расчет и конструирование железобетонных конструкций. — М., 1977. — Вып. 39. — С. 26—32.
3. Баранова Т. И. Короткие железобетонные элементы (Экспериментально-теоретические исследования, методы расчета, конструирование): Дис. ... докт. техн. наук. — М., 1986. — 468 с.
4. Старчевский А. В. Напряженно-деформированное состояние и расчет железобетонных балок-стенок по предельному состоянию при действии сосредоточенных нагрузок: Дис. ... канд. техн. наук. — М., 1987. — 193 с.
5. Смирнов С. Б., Давлятов Р. Х. К вопросу о прочности и сдвиговом разрушении в плосконапряженных железобетонных элементах // Изв. вузов. Сер. Стр-во и архитектура. — 1982. — № 3. — С. 12—16.
6. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. — М.: Стройиздат, 1976. — 204 с.
7. Kong F. K., Singh A. Diagonal cracking and Ultimate loads of lightweight concrete deep beams. ACI, 69 // Journal, Aug., 1972. — P. 513—521.
8. CUR. Commissie vor Uifvoerig van Research://Ingesfeld door de Betonvereniging Gedrongen Balken en horte. Conzoles. — 1971.

21 октября 1988 г. в зале заседаний ученого совета МИСИ им. В. В. Куйбышева (Москва, Ярославское шоссе, 26) в 10 ч состоится научная конференция, посвященная памяти ВАСИЛИЯ ЗАХАРОВИЧА ВЛАСОВА
Проезд: метро ВДНХ, троллейбус 76, автобусы 244, 172 до остановки «Улица Вешних вод».

УДК 624.074.433.046.3

С. Н. КАН, д-р техн. наук, проф., А. П. ХРЕНОВА, инж.
(Харьковский институт инженеров коммунального строительства),
А. И. ИВАНОВ, канд. техн. наук (Харьковское высшее военное авиационное
инженерное Краснознаменное училище)

Устойчивость цилиндрических оболочек с криволинейными образующими при радиальном давлении

Точное решение задач устойчивости упругих систем часто связано с математическими трудностями интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений. Кроме того, численный подход к решению задач в ряде случаев не позволяет провести как количественный, так и качественный анализ поведения конструкции и приводит к существенным затратам машинного времени. Поэтому в инженерной практике существует потребность в прикладных методах расчета.

Рассмотрим устойчивость цилиндрических оболочек с криволинейными образующими от действия радиального давления (рис. 1, 2). Такие оболочки могут применяться в водонапорных и силосных башнях, в корпусах ракет, подводных лодок, фюзеляжах и двигателях летательных аппаратов.

Для определения критической нагрузки используем модифицированный энергетический метод [1]. В качестве аппроксимирующей функции принимаем не радиальные перемещения, как это принято в обычном методе, а кривизны образующих, удовлетворяя статическим и кинематическим граничным условиям

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} = f \left(\sin \frac{\pi \xi}{L} + \bar{\sigma}_0 \right) \cos n \varphi,$$

где f — некоторый малый коэффициент; $\sin \pi \xi / L$ — характеризует вид потери устойчивости при свободном опирании краев оболочки; $\bar{\sigma}_0$ — поправочная постоянная, учитывающая влияние граничных условий; $\cos n \varphi$ — характеризует изменение функции в окружном направлении при числе волн $n=2, 3, 4$ и т. д.

Девиации и радиальные перемещения равны:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = f \left(-\frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi \xi}{L} + \bar{\sigma}_0 \xi + A_1 \right) \cos n \varphi; \quad \omega = f \left(-\frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi \xi}{L} + \bar{\sigma}_0 \frac{\xi^2}{2} + A_1 \xi + A_2 \right) \cos n \varphi.$$

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 , так же, как и $\bar{\sigma}_0$, определяются из граничных условий

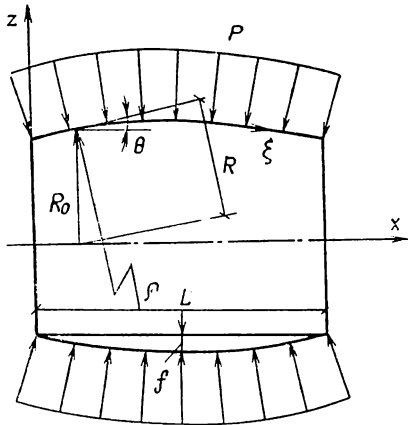


Рис. 1

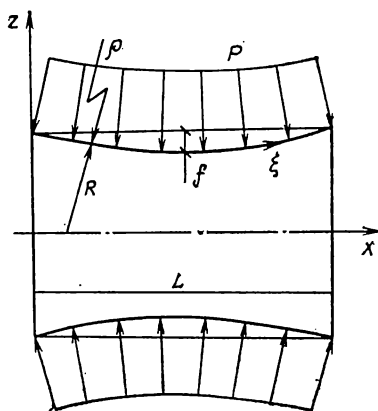


Рис. 2

$$\omega_{\xi=0} = 0; \quad \omega|_{\xi=L} = 0; \quad d\omega/d\xi|_{\xi=L/2} = 0.$$

Для свободно опертой по краям оболочки получим $A_1=0; A_2=0; \bar{\sigma}_v=0$.

При потере устойчивости рассматриваемых конструкций продольные u и окружные v перемещения по сравнению с радиальными w получаются малыми.

Используя гипотезы полубезмоментной теории оболочек В. З. Власова [2]:

отсутствие относительного удлинения срединной поверхности системы в кольцевом направлении

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_0} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R} = 0;$$

отсутствие сдвига срединной поверхности системы

$$\gamma = \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + R_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{R_0} \right) = 0,$$

выразим все деформации и внутренние силовые факторы в элементах оболочки через радиальные перемещения [3].

Продольные относительные деформации

$$\varepsilon_\xi = - (R_0^2/Rn^2) (d^2 w/d\xi^2) + w/\rho,$$

дополнительные продольные нормальные напряжения

$$\sigma_\xi = E \varepsilon_\xi = - E [(R_0^2/Rn^2) (d^2 w/d\xi^2) - w/\rho],$$

изменение кривизны направляющей

$$\chi_\varphi = (n^2/R_0^2) w.$$

Полные кольцевые изгибающие моменты

$$m_\varphi = D_{ш} \chi_\varphi = (D_{ш} n^2/R_0^2) w,$$

где $D_{ш} = E \delta_{ш}^3/[12(1-\mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость ортотропной оболочки; $\delta_{ш} = \delta + f_{ш}/a$ — толщина стенки оболочки в кольцевом направлении с учетом поперечных ребер. Здесь $f_{ш}$ — площадь сечения поперечных ребер, расположенных друг от друга на расстоянии a .

Искомую критическую нагрузку найдем из условия минимума потенциальной энергии системы

$$U = \int_0^L \Gamma d\xi = 0, \quad (1)$$

где Γ — потенциальная энергия системы на единицу длины

$$\Gamma = \oint 0,5 [m_\varphi \chi_\varphi + \sigma_\xi \delta_c \varepsilon_\xi - p_{кр} R w \chi_\varphi] R d\varphi. \quad (2)$$

При этом $\delta_c = \delta + f_c/b$ — толщина стенки оболочки с учетом продольных ребер, расположенных друг от друга на расстоянии b .

Рассматриваемая форма потери устойчивости характеризуется искривлением поверхности оболочки вследствие деформаций изгиба как в продольном, так и в кольцевом направлениях. Следовательно, в общем балансе потенциальной энергии системы в состоянии безразличного равновесия определяющую роль играет работа кольцевых изгибающих моментов m_φ и дополнительных осевых усилий σ_ξ , а также кольцевых усилий $p_{кр} R$, энергия которых выражает работу внешней критической нагрузки. Энергией второстепенных деформаций пренебрегаем из-за малого ее влияния.

Рассмотрение оболочки с малым отклонением формы от цилиндрической позволяет считать $R \approx R_0 = \cos n\xi$ и $\rho = \text{const}$. Подставляя в (2) соответствующие величины, входящие в нее, получаем

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left\{ \frac{D_{ш} n^4}{R^4} \left(-\frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi \xi}{L} \right)^2 + E \delta_c \left[\frac{R}{n^2} \sin \frac{\pi \xi}{L} - \left(-\frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi \xi}{L} \right) / \rho \right]^2 - \frac{p_{кр} n^2}{R} \left(-\frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi \xi}{L} \right)^2 \right\} \pi R.$$

Окончательно используя зависимость (1), находим выражение для критической радиальной нагрузки рассматриваемых конструкций

$$p_{кр} = (D_{ш} n^2/R^3) [1 + (\pi^4 R^6 E \delta_c)/D_{ш} L^4 n^8] F,$$

где F — коэффициент, учитывающий влияние кривизны образующей на устойчивость оболочки $F=1+AB$. В данном случае

$$A = R^4 n^2 L^2 / \rho^2 \{ [n^8 L^4 \delta^2 / 12 (1 - \mu^2) + R^6 \pi^4] \}; \quad B = 2 R \pi^2 \rho + n^2 L^2.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим изотропную оболочку положительной гауссовой кривизны (рис. 1) с параметрами $L=0,86$ м; $\mu=0,3$; $R=0,26$ м; $\delta=2 \cdot 10^{-3}$ м; максимальное отклонение образующей от формы прямой, параллельной оси вращения, $f=\delta$. Радиус кривизны $\rho \approx L^2 / 8f$.

Минимальная величина коэффициента $F=1,05$ получилась при числе волн $n=2$. Следовательно, величина отклонения $f=\delta$ привела к увеличению критической нагрузки цилиндрической оболочки с криволинейной образующей на 5%.

Если рассмотреть оболочку с аналогичными параметрами, но с отрицательной гауссовой кривизной (рис. 2), то $F=0,87$ при $n=4$. В этом случае критическая нагрузка из-за наличия кривизны падает на 13%. Сравнительные расчеты показывают, что малое искривление образующих цилиндрических оболочек при действии радиального давления приводит к увеличению или к падению критической внешней нагрузки в меньшей степени, чем при действии осевого сжатия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кан С. Н., Кан С. С., Каплан Ю. И. О модификации энергетического метода в задачах устойчивости // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. — 1979. — № 11. — С. 21—26.
2. Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. — М.: Гостройиздат, 1958. — 502 с.
3. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. — М.: Машиностроение, 1966. — 508 с.

УДК 624.075.2.046.3

А. Я. ДРИВИНГ, канд. техн. наук (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва)

Об устойчивости плоской формы изгиба статически неопределимых тонкостенных балок

В статье [1] предложен аппарат метода перемещений для расчета на устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных стержневых систем. Аппарат позволяет провести исследования влияния на устойчивость плоской формы изгиба факторов, которые ранее в литературе не рассматривались. В настоящей статье с помощью разработанного аппарата исследуется влияние на устойчивость тонкостенных балок промежуточных подкреплений из плоскости изгиба, их положения по высоте поперечного сечения, степени напряженности соседних панелей между точками подкрепления, а также угла перелома оси у балок ломаного очертания. В статье используются обозначения, символические изображения связей, таблицы реактивных усилий и специальные функции [1].

1. Рассмотрим тонкостенную шарнирно-опертую из плоскости изгиба балку с промежуточной жесткой опорой (рис. 1, а). Промежуточная опора препятствует перемещению точки среднего сечения с координатой h_y относительно центра тяжести (рис. 1, б). Поперечное сечение имеет две оси симметрии. Накладывая на подкрепленное сечение три

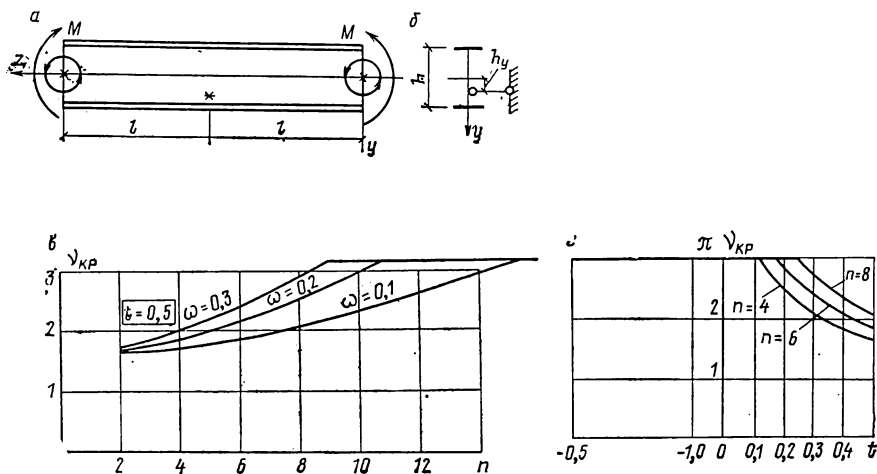


Рис. 1

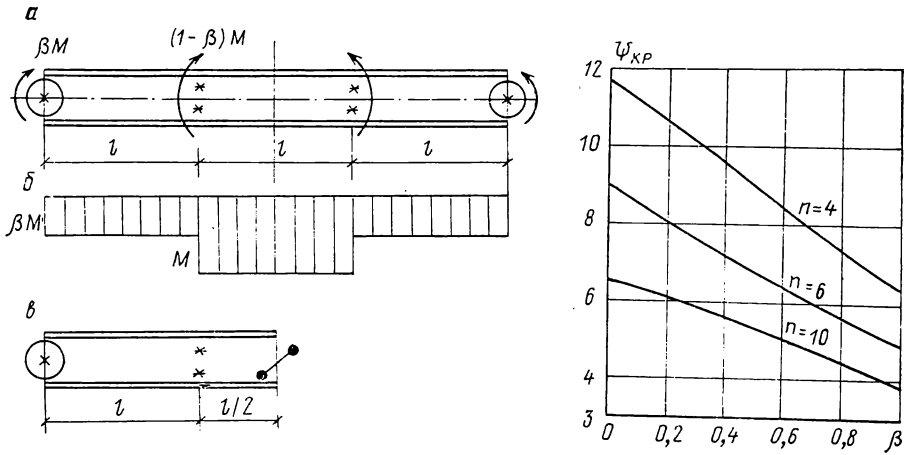


Рис. 2

связи — № 1 типа 1, № 2 типа 2, № 3 типа 4 [1], получим основную систему метода перемещений, состоящую из двух элементов 1 (рис. 2, а [1]). В соответствии с табл. 1 [1] определим выражения реактивных усилий в наложенных связях при единичном перемещении каждой из них:

$$r_{11} = \frac{2 E J_y}{l n d} \bar{D}_{\mu \nu}; \quad r_{22} = \frac{2 E J_y}{l} \bar{R}_{\mu \nu}; \quad r_{33} = \frac{E J_y h}{n d} \bar{J}_{\mu \nu}; \quad (1)$$

$$r_{12} = r_{13} = 0; \quad r_{23} = -2 E J_y \bar{N}_{\mu \nu} / n \sqrt{d}.$$

Условие устойчивости рассматриваемой системы сводится к виду

$$r_{11} (r_{22} r_{33} - r_{23}^2) = 0. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), после ряда преобразований получим

$$\bar{\alpha}_{\nu} [\bar{\gamma}_{\nu} (\nu + \mu T_{\mu} \sqrt{d})^2 + \bar{\gamma}_{\mu} (\mu - T_{\nu} \sqrt{d})^2] = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) для этой же задачи получено другим путем в [2].

Зависимость первого корня $\nu_{кр}$ уравнения (3) от $n=l/h$ при $d=4$, $t=0,5$ (подкреплена растянутая кромка), $\omega=0,1$; $0,2$; $0,3$ показана на рис. 1, в. Графики этой зависимости имеют характерные точки перелома, соответствующие смене формы потери устойчивости с однополуволновой ($\nu_{кр} < \pi$) на двухполуволновую без поворота подкрепленного сечения относительно точки подкрепления ($\alpha=0$, $\nu_{кр} = \pi$). Если подкреплена сжатая кромка ($t=-0,5$), то $\nu_{кр} = \pi$ при любом n . При этом форма искривления оси всегда двухполуволновая.

Графики на рис. 1, г показывают влияние относительной координаты t точки подкрепления на параметр $\nu_{кр}$ при различных значениях n . Они позволяют заключить, что точечное подкрепление эффективно, т. е. обеспечивает двухполуволновую форму потери устойчивости не только в сжатой, но и в части растянутой зоны.

Координату t^* границы зоны эффективности подкрепления (точки перелома на графиках рис. 1, г) легко определить, если подставить в квадратную скобку (3) $\nu = \pi$, и, приравняв к нулю полученное выражение, разрешить его относительно t^* . Тогда получим

$$t^* = (\sqrt{\bar{\gamma}_{\mu}} - \pi^2) / [\sqrt{d} \pi (\pi \mu + \sqrt{\bar{\gamma}_{\mu}})],$$

где $\mu = \sqrt{\pi^2 + n^2 \omega}$.

2. Рассмотрим трехпролетную двутавровую балку (рис. 2, а), концевые и промежуточные опоры которой представляют собой цилиндрические шарниры. Балка нагружена одинаковыми парами βM по концам и одинаковыми парами $(1-\beta)M$ на промежуточных опорах ($\beta < 1$). Соответствующая эпюра моментов показана на рис. 2, б. Вследствие симметрии задачи для симметричных форм потери устойчивости достаточно рассмотреть расчетную модель, изображенную на рис. 2, в.

Накладывая на единственное промежуточное подкрепленное сечение две фиктивные связи № 1 типа 2 и № 2 типа 4 [1], получим основную систему метода перемещений, состоящую из элементов I и III (рис. 2, а, в [1]). В соответствии с табл. 1, 3 [1] будем иметь

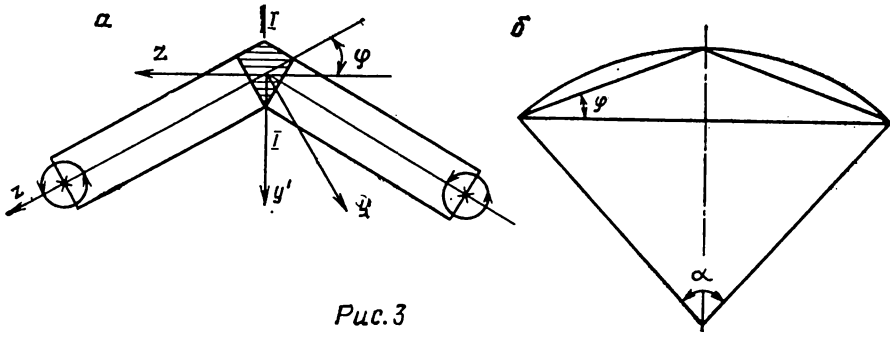


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= (E J_y / l) [\bar{R}_{\mu \nu_1} + 2 (\mu_2^2 T_{\nu_2} + \nu_2^2 T_{\mu_2}) / s_2]; \\
 r_{22} &= (E J_y h^2 / l d) [\bar{J}_{\mu \nu_1} + 2 (\nu_2^2 T_{\nu_2} + \mu_2^2 T_{\mu_2}) / s_2]; \\
 r_{12} &= (E J_y h / l \sqrt{d}) [\bar{N}_{\mu \nu_1} + 2 \mu_2 \nu_2 (T_{\mu_2} - T_{\nu_2}) / s_2].
 \end{aligned} \quad (4)$$

Дополнительные нижние индексы 1, 2 относятся к элементам I, III соответственно. Подставляя выражения (4) в определитель второго порядка, после выкладок получим

$$\begin{aligned}
 s_1 s_2 (\bar{\alpha}_{\nu_1} \bar{\alpha}_{\mu_1} + 4 T_{\nu_2} T_{\mu_2}) + 2 [c_1^2 (T_{\nu_2} \bar{\alpha}_{\nu_1} + T_{\mu_2} \bar{\alpha}_{\mu_1}) + c_2^2 (T_{\nu_2} T_{\mu_1} + T_{\mu_2} \bar{\alpha}_{\nu_1})] = 0, \\
 c_1 = \nu_1 \mu_2 - \nu_2 \mu_1; \quad c_2 = \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2.
 \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5) решалось многократно. На рис. 2, з построены графики зависимости критического параметра $\Psi_{кр} = M_{кр} l \sqrt{E J_y G J_d}$ средней панели балки от коэффициента β при различных значениях n . Эта зависимость близка к линейной. Значение $\Psi_{кр}$ возрастает с уменьшением β , т. е. моментов в крайних панелях. Так, при $n=6$ значение $\Psi_{кр}$ возрастает в 1,84 раза при изменении β от 1 до 0.

3. Рассмотрим тонкостенную балку ломаного очертания в условиях чистого изгиба (рис. 3, а). Концевые сечения балки шарнирно закреплены относительно плоскости изгиба. Угол φ будем называть углом перелома. Учитывая симметрию системы, при симметричной форме выпучивания ($\xi' = \theta' = 0$) на среднее сечение I—I достаточно наложить две фиктивные связи: № 1 типа 1 и № 2 типа 3 [1]. Если заштрихованный участок в зоне перелома трактовать как жесткую вставку, то реактивные усилия в наложенных связях можно выразить формулами

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= 2 \bar{M}_{z' z'} = 2 (\bar{M}_{zz} \cos^2 \varphi + \bar{M}_{yy} \sin^2 \varphi + \bar{M}_{zy} \sin^2 \varphi); \\
 r_{22} &= 2 \bar{\theta}_x; \quad r_{12} = 2 \bar{M}_{z' x} = 2 (\bar{M}_{zx} \cos \varphi - \bar{M}_{yz} \sin \varphi),
 \end{aligned} \quad (6)$$

где первый нижний индекс указывает, относительно какой оси дается единичное перемещение, а второй — характеризует тип связи. На основании данных табл. 1 [1] имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{zz} &= (E J_y / l n^2 d) \bar{D}_{\mu \nu}; \quad \bar{M}_{yy} = (E J_y / l) \bar{R}_{\mu \nu}; \quad \bar{M}_{zy} = (E J_y / n l \sqrt{d}) \bar{T}_{\mu \nu}; \\
 \bar{M}_{yx} &= (-E J_y / l^2) \bar{L}_{\mu \nu}; \quad \bar{\theta}_x = (E J_y / l^3) \bar{V}_{\mu \nu}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя в определитель второго порядка выражения (6), с учетом (7) получим

$$\bar{\gamma}_{\mu} \bar{\gamma}_{\nu} s - 2 \mu \nu n \sqrt{d} \operatorname{tg} \varphi (\nu^2 \bar{\gamma}_{\mu} + \mu^2 \bar{\gamma}_{\nu}) = 0. \quad (8)$$

Если положить $J_{\omega} = 0$ и учесть, что при этом $\omega = \infty$, $\nu = \psi$, $\mu = n \sqrt{\omega}$, $\bar{\gamma}_{\mu} = \mu^2$, $\bar{\gamma}_{\nu} = \bar{\alpha}_{\nu} - \nu^2$, то вместо (8) будем иметь условие устойчивости полосы с одним переломом

$$\bar{\alpha}_{\nu} - \nu^2 / (1 - 2 \nu \sqrt{d / \omega} \operatorname{tg} \varphi) = 0,$$

которое полностью совпадает с условием, полученным для этого частного случая в [3].

Значения первых положительных ν_+ и отрицательных ν_- корней уравнения (8) в зависимости от угла перелома φ при $d=4$, $n=4$, $\omega=0,2$ приведены в 3-й, 4-й строчках таблицы. Положительное направление момента показано на рис. 3, а.

Сравним устойчивость пологой тонкостенной арки и вписанной в нее тонкостенной балки ломаного очертания (рис. 3, б). Известное решение В. З. Власова [4] для тонкостенного стержня кругового очертания в наших обозначениях имеет вид

$$\psi = \pm 0,5 \sqrt{u^2 + v^2 (\pi^2 - \alpha^2)} - 0,5 u,$$

α	0	0,1	0,2	0,3	0,4
φ	0	0,025	0,050	0,075	0,100
$\psi_{кр}^+$	2,09	1,88	1,68	1,52	1,37
$\psi_{кр}^-$	2,09	2,32	2,57	2,84	3,12
$\psi_{кр}^+$	2,09	1,95	1,86	1,79	1,59
$\psi_{кр}^-$	2,09	2,20	2,34	2,51	2,61

где $u = (\alpha/2) \sqrt{d/\omega} (v+1)$, $v = (\pi^2 + 4n^2\omega)/4n^2d$, $\alpha = 4\varphi$.

Параметр ψ для удобства сравнения отнесен к половине длины арки. Критические значения ψ_+ , ψ_- в зависимости от α при тех же прочих данных приведены в 5-й и 6-й строках таблицы. При малых значениях угла раствора арки разница между критическими значениями параметра изгибающего момента для арки и ломаной балки невелика. Из этого следует, что с помощью разработанного метода можно рассчитывать на устойчивость плоской формы изгиба криволинейные тонкостенные стержни произвольного очертания, заменяя их полигональной балкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дривинг А. Я. Метод перемещений в задачах устойчивости плоской формы деформирования тонкостенных стержневых систем // Строит. механика и расчет сооружений. — 1988. — № 4. — С. 21—25.
2. Дривинг А. Я. Об устойчивости плоской формы изгиба стальных стержневых конструкций: Межвуз. темат. сб. / МИСИ, 1987. — С. 41—43.
3. Дривинг А. Я. Аппарат метода перемещений в задачах устойчивости плоской формы сжатых стержневых систем // Строит. механика и расчет сооружений. — 1987. — № 1. — С. 56—62.
4. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. — М., 1959. — 568 с.

ДИНАМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

УДК 624.074.43:534.014.1

Г. И. ПШЕНИЧНОВ, д-р техн. наук, проф. (ВЦ АН СССР, Москва),
А. В. СКОРИКОВ, инж. (МИСИ им. В. В. Куйбышева)

Решение задачи о свободных колебаниях пологой сферической оболочки методом декомпозиции

В [1] предложен новый метод решения уравнений и краевых задач. Решения некоторых задач строительной механики методом декомпозиции приведены в [2]. В настоящей статье этим методом получена простая аналитическая формула для наименьшей частоты свободных колебаний квадратной в плане пологой сферической оболочки при жестком защемлении ее краев, допускающем смещение по нормали к контуру в касательной плоскости. Эта задача, в отличие от [2], приводит к решению не одного, а системы дифференциальных уравнений.

Система линейных уравнений свободных колебаний пологой сферической оболочки радиуса R в перемещениях имеет вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1+v}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1+v}{R} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 24 \frac{1+v}{h^2 R^2} w - 12 \frac{1+v}{h^2 R} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\rho h \omega^2 w}{D}.$$

Граничные условия формулируются так (длина стороны контура $2a$):

$$\begin{aligned} v &= \partial u / \partial x = \omega = \partial \omega / \partial x = 0 \quad \text{при } x = \pm a; \\ u &= \partial v / \partial y = \omega = \partial \omega / \partial y = 0 \quad \text{при } y = \pm a. \end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии с методом декомпозиции введем в рассмотрение три вспомогательные задачи, из которых первые две — краевые.

Первая задача:

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{R} \frac{\partial \omega^{(1)}}{\partial x} = f_1^{(1)}(x, y); \quad (3) \quad \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} = f_2^{(1)}(x, y); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^4 \omega^{(1)}}{\partial x^4} - 12 \frac{1+\nu}{h^2 R} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = f_3^{(1)}(x, y); \quad (5)$$

$$v^{(1)} = \partial u^{(1)} / \partial x = \omega^{(1)} = \partial \omega^{(1)} / \partial x = 0 \quad \text{при } x = \pm a. \quad (6)$$

Вторая задача:

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} = f_1^{(2)}(x, y); \quad (7) \quad \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{R} \frac{\partial \omega^{(2)}}{\partial y} = f_2^{(2)}(x, y); \quad (8)$$

$$\frac{\partial^4 \omega^{(2)}}{\partial y^4} - 12 \frac{1+\nu}{h^2 R} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = f_3^{(2)}(x, y); \quad (9)$$

$$u^{(2)} = \partial v^{(2)} / \partial y = \omega^{(2)} = \partial \omega^{(2)} / \partial y = 0 \quad \text{при } y = \pm a. \quad (10)$$

Третья задача:

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x \partial y} &= f_1^{(3)}(x, y) = -\left(f_1^{(1)}(x, y) + f_1^{(2)}(x, y)\right); \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x \partial y} &= f_2^{(3)}(x, y) = -\left(f_2^{(1)}(x, y) + f_2^{(2)}(x, y)\right); \end{aligned} \quad (11)$$

$$2 \frac{\partial^4 \omega^{(3)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(24 \frac{1+\nu}{h^2 R^2} - \frac{\rho h \omega^2}{D}\right) \omega^{(3)} = f_3^{(3)}(x, y) = -\left(f_3^{(1)}(x, y) + f_3^{(2)}(x, y)\right). \quad (12)$$

Искомое решение задачи (1), (2) $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\omega(x, y)$ представлено здесь в трех формах:

$$u^{(k)}(x, y), \quad v^{(k)}(x, y), \quad \omega^{(k)}(x, y) \quad (k=1, 2, 3). \quad (13)$$

Правые части систем уравнений каждой из трех задач являются неизвестными функциями

$$f_i^{(k)}(x, y) \quad (i=1, 2, 3; k=1, 2, 3).$$

Если положить

$$u^{(1)} \equiv u^{(2)} \equiv u^{(3)}; \quad v^{(1)} \equiv v^{(2)} \equiv v^{(3)}; \quad \omega^{(1)} \equiv \omega^{(2)} \equiv \omega^{(3)} \quad (14)$$

и сложить операторы левых частей уравнений вспомогательных задач, а также их правые части, то получим исходную систему уравнений (1), а объединение граничных условий (6) и (10) приведет к условию (2).

Решение краевой задачи (1), (2) заменим решением вспомогательных задач, содержащих неизвестные функции $f_i^{(k)}(x, y)$, с подчинением решения (13) условиям (14). В данной статье получено приближенное решение задачи (1), (2), так как некоторые из условий (14) были выполнены приближенно.

Представим функции $f_i^{(k)}(x, y)$ в виде полиномов, содержащих неизвестные коэффициенты. Значения этих коэффициентов определяются в процессе решения вспомогательных задач и приближенного выполнения условий (14).

Предварительно установим некоторые свойства функций $f_i^{(k)}(x, y)$, что сразу позволит уменьшить число неизвестных коэффициентов. Низшая частота колебаний будет соответствовать симметричной форме. Поэтому функции u , v , ω имеют следующие свойства:

$$u(x, y) = v(y, x); \quad v(x, y) = u(y, x); \quad \omega(x, y) = \omega(y, x). \quad (15)$$

Из условий симметрии (15) и условия (14) следует, что правые части (3), (4), (5) должны получаться соответственно из правых частей (8), (7), (9) путем замены $x \rightleftharpoons y$. Отсюда следует, что

$$f_1^{(1)}(x, y) = f_2^{(2)}(y, x); \quad f_2^{(1)}(x, y) = f_1^{(2)}(y, x); \quad f_3^{(1)}(x, y) = f_3^{(2)}(y, x). \quad (16)$$

Рассмотрим также свойства четности функций u, v, w по аргументам x и y :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -u(-x, y) = u(x, -y); \\ v(x, y) &= v(-x, y) = -v(x, -y); \\ w(x, y) &= w(-x, y) = w(x, -y). \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда, учитывая, что при дифференцировании какой-либо функции по аргументу четность ее по этому аргументу меняется, из первой вспомогательной задачи и условия (17) получим

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(x, y) &= -f_1^{(1)}(-x, y) = f_1^{(1)}(x, -y); \\ f_2^{(1)}(x, y) &= f_2^{(1)}(-x, y) = -f_2^{(1)}(x, -y); \\ f_3^{(1)}(x, y) &= f_3^{(1)}(-x, y) = f_3^{(1)}(x, -y). \end{aligned} \quad (18)$$

Для функций $f_i^{(2)}(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) свойства четности получаются аналогично.

Кроме того, будем использовать граничные условия (6), (10) и условия (14). Например, имеем

$$u^{(2)}(x, \pm a) = w^{(2)}(x, \pm a) = 0; \quad u^{(1)} \equiv u^{(2)}; \quad w^{(1)} \equiv w^{(2)}.$$

Тогда левая часть уравнения (3) при $y = \pm a$ обращается в нуль, поскольку дифференцируются по x функции, равные нулю.

Следовательно, $f_1^{(1)}(x, \pm a) = 0$.

Исследуя таким образом свойства всех функций $f_i^{(k)}(x, y)$, получим

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(x, \pm a) &= \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial x}(\pm a, y) = f_2^{(1)}(\pm a, y) = \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial y}(x, \pm a) = f_3^{(1)}(x, \pm a) = 0; \\ f_1^{(2)}(x, \pm a) &= \frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x}(\pm a, y) = f_2^{(2)}(\pm a, y) = \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial y}(x, \pm a) = f_3^{(2)}(\pm a, y) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

На основании (16), (18), (19), функции $f_i^{(k)}(x, y)$ можно приближенно представить в виде полиномов третьей степени:

$$\begin{aligned} f_1^{(1)} &= c_1(a^2x - x^3/3)(a^2 - y^2), \quad f_1^{(2)} = c_2(a^2x - x^3/3)(a^2 - y^2), \\ f_2^{(1)} &= c_2(a^2y - y^3/3)(a^2 - x^2), \quad f_2^{(2)} = c_1(a^2y - y^3/3)(a^2 - x^2), \\ f_3^{(1)} &= (c_3 + c_4x^2)(a^2 - y^2), \quad f_3^{(2)} = (c_3 + c_4y^2)(a^2 - x^2), \end{aligned} \quad (20)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — подлежащие определению константы.

Решим вспомогательные задачи, выполняя условия (14) уже в процессе решения.

После двукратного интегрирования уравнения (7) находим

$$u^{(2)} = \frac{2}{1-\nu} \int dy \int f_1^{(2)}(x, y) dy + \Phi_1(x)y + \Phi_2(x). \quad (21)$$

Используя одно из граничных условий (10): $u^2(x, \pm a) = 0$ и учитывая, что $\Phi_1(x) = 0$, вследствие четности u по y , получим

$$\Phi_2(x) = -\frac{2}{1-\nu} \left[\int dy \int f_1^{(2)}(x, y) dy \right]_{y=a}.$$

Следовательно, решение (21) можно представить в виде

$$u^{(2)} = \frac{2}{1-\nu} \int_a^y dt \int f_1^{(2)}(x, t) dt. \quad (22)$$

Подставив в формулу (22) выражение для $f_1^{(2)}$ из (20), найдем

$$u^{(2)} = -\frac{c_2}{18(1-\nu)} (3a^2x - x^3)(y^4 - 6a^2y^2 + 5a^4). \quad (23)$$

Рассмотрим совместно уравнения (7) и (11). Учитывая, что в точном решении должно выполняться равенство $\partial^3 u^{(2)}/\partial x \partial y^2 = \partial^3 u^{(3)}/\partial x \partial y^2$, получим выражение, связывающее функции $f_1^{(2)}$, $f_2^{(1)}$ и $f_2^{(2)}$:

$$\frac{\partial f_1^{(2)}}{\partial x} = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial f_2^{(2)}}{\partial y} \right). \quad (24)$$

Из (20) и (24) получаем соотношение между константами c_1 и c_2 :

$$c_2 = -0,5 (1-\nu) c_1.$$

Тогда (23) можно переписать в виде

$$u^{(2)} = c_1 (3a^2 x - x^3) (y^4 - 6a^2 y^2 + 5a^4) / 36. \quad (25)$$

Подставим формулу (25) в уравнение (5) (что эквивалентно приравнению $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$) и после четырехкратного интегрирования этого уравнения с учетом (20) и четности w по аргументу x , найдем

$$w^{(1)} = -((1+\nu) c_1 / 360 h^2 R) (y^4 - 6a^2 y^2 + 5a^4) (x^6 - 15a^2 x^4) + (1/360) (a^2 - y^2) (15c_3 x^4 + c_4 x^6) + \psi_1(y) x^2 + \psi_2(y).$$

Используя два последних граничных условия из (6) для определения $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$, окончательно получим

$$w^{(1)} = -c_1 [(1+\nu)/360 h^2 R] (y^4 - 6a^2 y^2 + 5a^4) (x^6 - 15a^2 x^4 + 27a^4 x^2 - 13a^6) + (1/360) (a^2 - y^2) [15c_3 (x^4 - 2a^2 x^2 + a^4) + c_4 (x^6 - 3a^4 x^2 + 2a^6)]. \quad (26)$$

Заметим, что из условий симметрии можно по аналогии записать $w^{(2)}(x, y) \equiv w^{(1)}(y, x)$, а также $v^{(1)}(x, y) = u^{(2)}(y, x)$.

Найдем выражение для функции $w^{(1)}$ в другом виде. В уравнение (3) входит производная от $w^{(1)}$ по x . После интегрирования (3), подставляя $f_1^{(1)}$ из (20) и $u^{(2)}$ из (25) и используя два первых граничных условия (6), получаем

$$w_*^{(1)} = (c_1 R / 12 (1+\nu)) [(a^2 - x^2) (y^4 - 6a^2 y^2 + 5a^4) + (a^2 - y^2) (x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4)].$$

Выразим константы c_3 и c_4 через c_1 . Для этого необходимо поставить два условия. Первое условие:

$$w^{(1)}(0, 0) = w_*^{(1)}(0, 0). \quad (27)$$

Второе условие получим, потребовав выполнения уравнения (13) в точках $x=0, y=\pm a$ (положим $w^{(3)} \equiv w^{(1)}$ и учтем, что $w(0, \pm a) = 0$):

$$2 \left(\frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{x=0, y=\pm a} = -f_3^{(1)}(0, \pm a) - f_3^{(2)}(0, \pm a). \quad (28)$$

Требование (28) логично, так как функция $w^{(1)}$, полученная при решении уравнения (5), хорошо описывает функцию прогибов $w(x, y)$ в направлении координаты x и удовлетворяет граничным условиям при $x=\pm a$. Подчинение функции $w^{(1)}$ условию (28) улучшит ее поведение на краях $y=\pm a$.

Из (27) и (28) найдем

$$\begin{aligned} c_3 &= [25,26 R / (1+\nu) - 5,473 (1+\nu) a^4 / h^2 R] c_1; \\ c_4 &= [8,547 (1+\nu) a^2 / h^2 R - 39,54 R / (1+\nu) a^2] c_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Принимая $w^{(1)} \equiv w^{(3)}$ и используя формулы (26), (20) и (29), выполним уравнение (12) в точке $x=y=0$. Тогда получим выражение для квадрата круговой частоты:

$$\omega^2 = [1 - 0,042 (1+\nu) / (1-\nu)] (E/\rho R^2) + 77,7 D/\rho h a^4. \quad (30)$$

Проведем некоторый анализ полученной приближенной формулы (30). Для этого обратимся к решению задачи при граничных условиях

$$\begin{aligned} v &= \partial u / \partial x = w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0 & \text{при } x = \pm a; \\ u &= \partial v / \partial y = w = \partial^2 w / \partial y^2 = 0 & \text{при } y = \pm a, \end{aligned} \quad (31)$$

допускающих точное решение в двойных тригонометрических рядах [4]:

$$\omega^2 = E/\rho R^2 + \pi^4 D/4\rho h a^4. \quad (32)$$

Тангенциальные граничные условия в (2) и (31), т. е. первые два условия совпадают. Следовательно, для оболочек не слишком пологих (значение R/a не слишком велико) частоты колебаний основного тона при граничных условиях (2) и (31) должны быть близки. Действительно, такие колебания приближенно описываются безмоментной теорией ($D=0$) и тангенциальными граничными условиями [5], [6]. Этот вывод следует также из формул (30), (32): при $D=0$ результаты практически совпадают.

С ростом пологости оболочки вклад моментности напряженно-деформированного состояния растет и принимает максимальное значение (100%) для пластинки ($R=\infty$). Формулы (32), (30) в этом случае приводят соответственно к значениям

$$\omega^2 = \pi^4 D/4 \rho h \alpha^4; \quad \omega^2 = 77,7 D/\rho h \alpha^4.$$

Первая из этих формул дает точное значение частоты для пластинки шарнирно опертой по контуру, вторая — приближенное (с точностью 2,1%) значение частоты для пластинки, защемленной по контуру [7].

Следовательно, полученные результаты хорошо согласуются с известными формулами для низших частот свободных колебаний пологой сферической оболочки при свободном опирании по контуру и жесткозакрепленной пластинки.

Итак, формула (32) позволяет с высокой точностью определять частоту основного тона колебаний рассмотренных пологих оболочек и может быть использована при проектировании сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничнов Г. И. Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач: ДАН СССР. — М., 1985. — Т. 282. — № 4. — С. 792—794.
2. Пшеничнов Г. И. Решения некоторых задач строительной механики методом декомпозиции // Строит. механика и расчет сооружений. — 1986. — № 4. — С. 12—17.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М., 1972. — С. 27—28.
4. Власов В. З. Избранные труды. — М.: АН СССР, 1962. — Т. II. — 369 с.
5. Пшеничнов Г. И. Малые свободные колебания упругих оболочек вращения // Инж. журн., 1965. — Т. 5. — Вып. 4. — С. 685—690.
6. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979. — С. 60—61.
7. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. — М., 1968. — Т. 3. — 378 с.

УДК 624.042.8

С. Н. БЕШЕНКОВ, канд. техн. наук, Г. А. КАРЯКИН, инж. (Запорожский государственный университет)

Нестационарное взаимодействие упругих тел с разномодульной средой

Задачи исследования колебаний деформируемых систем, взаимодействующих со средой, относятся к наиболее сложным в механике твердого деформируемого тела и их анализу посвящено значительное число работ. При этом, как правило, предполагается, что среда одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Однако многим материалам присуще свойство разносопротивляемости этим видам деформации [1], в связи с чем возникает необходимость учета такого различия (разномодульности).

Рассмотрим плоскую и осесимметричную задачу нестационарного деформирования неоднородных упругих тел, взаимодействующих с разномодульной средой, которую можно смоделировать безынерционным упругим основанием с различными коэффициентами жесткости на растяжение и сжатие (c_r и c_s). Полученные результаты могут быть использованы для уточненного анализа колебаний конструкций, взаимодействующих с грунтами. Кроме этого, определенный интерес они могут представить для задач мягких (не воспринимающих сжатие) оболочек и конструкций с упругими связями, препятствующими перемещениям в заданном направлении, задач кавитационного взаимодействия упругих тел с жидкостью и т. д. Как частный случай, отсюда могут быть полу-

чены решения рассмотренных в [2, 3] задач о нестационарных колебаниях пластин и оболочек на одностороннем (не сопротивляющемся отрыву) основании.

Разобьем рассматриваемое неоднородное упругое тело на треугольные или четырехугольные конечные элементы, связанные между собой в узлах. Вектор перемещений на каждом из конечных элементов аппроксимируем выражением

$$[u]^e = [N(x, z)]^e [q(t)]^e,$$

где $[N(x, z)]^e$ — матрица базисных функций элемента; $[q(t)]^e$ — вектор узловых перемещений.

Матричное уравнение, описывающее изменение узловых перемещений во времени, может быть получено с использованием различных формулировок МКЭ [4, 5] и в случае взаимодействия со средой представлено в виде

$$[M] \ddot{[q]}(t) + [C] [\dot{q}](t) = [Q](t) - [R](t). \quad (1)$$

Здесь $[M]$, $[C]$, $[Q]$ — глобальные матрицы массы, жесткости и вектор внешних поверхностных нагрузок, вычисляемых по стандартной процедуре МКЭ. Вектор $[R(t)]$ учитывает реакцию среды и выражается че-

рез контактные усилия, связанные с нормальными перемещениями в граничных узлах по формуле

$$R_i(t) = 0,5(c_s + c_r) \omega_i(t) + 0,5(c_s - c_r) |\omega_i(t)|. \quad (2)$$

Для численного интегрирования матричного уравнения (1) применим безусловно устойчивую трехслойную схему [4], имеющую вид

$$\left([M] + \frac{[C] T^2}{4} \right) [q]_{n+1} = [M] (2 [q]_n - [q]_{n-1}) - \frac{[C] T^2}{4} (2 [q]_n + [q]_{n-1}) + \frac{[Q]_{n-1} + 2 [Q]_n + [Q]_{n+1}}{4} T^2 - [R]^{n+1} T^2; \quad (3)$$

$$[R]^{n+1} = \int_{-1}^0 [R(nT + \tau T)] (-\tau) d\tau + \int_0^1 [R(nT + \tau T)] \tau d\tau. \quad (4)$$

Здесь $[q]_n = [q(nT)]$ — значения узловых перемещений в момент времени $t = nT$; $[Q]_n = [Q(nT)]$; T — шаг интегрирования по времени.

Так как вектор $[R(nT + \tau T)]$ выражается при $\tau > 0$ нелинейным образом через неизвестные нам узловые перемещения, то для вычисления интегралов в (4) примем, что компоненты вектора $[R]$ остаются постоянными в пределах каждого из временных интервалов и меняются скачком в конце интервала. Используя для их вычисления значения узловых перемещений с двух предыдущих временных слоев, из формулы (4) получим

$$2 [R]^{n+1} = [R(nT - T)] + [R(nT)]. \quad (5)$$

Таким образом, для учета взаимодействия конструкции со средой на каждом шаге по времени необходимо провести следующие вычисления:

1. По формуле (2) найти значения контактных усилий в граничных узлах на двух предыдущих временных слоях, т. е. при $t = nT - T$ и $t = nT$.

2. Для этих же моментов времени вычислить векторы $[R(nT - T)]$ и $[R(nT)]$, а затем вектор $[R]^{n+1}$.

3. Подставить $[R]^{n+1}$ в систему (3) и решить ее.

Для оценки работоспособности предложенной схемы был проведен расчет круглой стальной пластины радиусом $a = 0,3$ м и толщиной $h = 0,03$ м, контактирующей с односторонним ($c_r = 0$) основанием, коэффициент жесткости которого $c_s = 6 \cdot 10^9$ Н·м⁻³. Пластина зашпечлена по контуру и возбуждается внезапно приложенной нагрузкой интенсивности $Q = 10^7$ Н·м² и длительностью $T_D = 0,25 \cdot 10^{-3}$ с. Кривой 1 на рис. 1 показана зависимость прогиба в центре от времени. Такая же зависимость, но

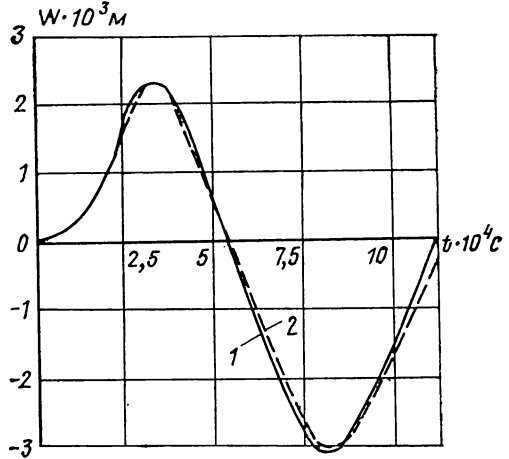


Рис. 1

найденная путем конечно-разностного решения уравнения изгибных колебаний круглой пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q(r, t) - c_s \frac{w + |w|}{2},$$

показана кривой 2.

На рис. 2 представлены зависимости прогибов от времени в центре круглой трехслойной пластины с алюминиевыми обшивками толщиной $\delta = 0,3 \cdot 10^{-2}$ м и заполнителем с параметрами $E = 25 \cdot 10^7$ Н·м⁻²; $\rho = 1,5 \cdot 10^3$ кг·м⁻³; $\nu = 0,4$; $2h = 0,03$ м. Пластина имеет радиус $R = 0,3$ м, зашпечлена по контуру и возбуждается нагрузкой $Q(r, t) = 10^5 \exp(-10^3 t)$ Н·м². По радиусу пластина разбивалась на тридцать элементов, по толщине — на семь (обшивки по одному элементу). Кривые 1—3 соответ-

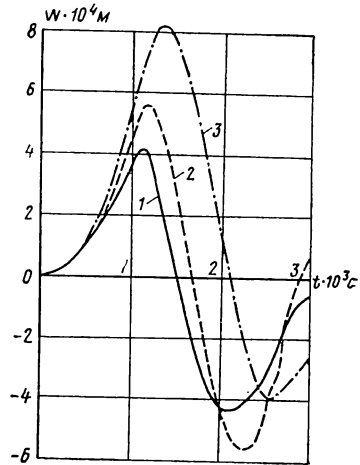


Рис. 2

вуют значениям коэффициентов жесткости основания: 1) $c_s=4 \cdot 10^8$ Н·м⁻³; $c_r=0$; 2) $c_s=c_r=2 \cdot 10^8$ Н·м⁻³; 3) $c_s=0$; $c_r=4 \cdot 10^8$ Н·м⁻³. Заметим, что третий случай является предельным для оснований с модулем упругости на сжатие значительно меньшим, чем на растяжение. На существование таких материалов указано в работе [1]. Представленные зависимости показывают, что разномодульность основания может приводить к весьма существенному отличию в величинах максимальных отклонений точек конструкции по разные стороны от недеформированного состояния. Это наглядно иллюстрирует кривая 3. Отсутствие такой же асимметрии у кривой 1 объясняется тем, что здесь движение пластины в сторону, противоположную направлению действия нагрузки, начинается раньше и нагрузка оказывает большее сопротивление ее движению в сторону $w < 0$. Сравнивая кривые 1 и 3 с кривой 2, следует отметить также более высокочастотный характер колебаний при $c_r=c_s$ по сравнению со случаем $c_r \neq c_s$ при условии, что величина c_r+c_s сохраняет постоянное значение.

На рис. 3 приведены результаты определения прогибов наружной обшивки в середине трехслойной цилиндрической оболочки с внутренним радиусом $R=0,6$ м, алюминиевыми обшивками $\delta=0,3 \cdot 10^{-2}$ м и заполнителем с параметрами $E=5 \cdot 10^8$ Н·м⁻²; $\nu=0,4$; $\rho=0,3 \cdot 10^3$ кг·м⁻³; $2h=3 \cdot 10^{-2}$ м. Оболочка имеет длину 1 м, закреплена по торцам и возбуждается изнутри равномерно распределенной нагрузкой. Зависимость нагрузки от времени бралась в виде одной волны синусоиды с амплитудой $A=10^9$ Н·м⁻² и частотой $\omega=2 \cdot 10^4$ с⁻¹. Оболочка находится в среде со следующими коэффициентами жесткости основания: 1) $c_s=10^9$ Н·м⁻³; $c_r=0$; 2) $c_s=c_r=10^9$ Н·м⁻³; 3) $c_s=c_r=0$. В силу симметрии задачи рас-

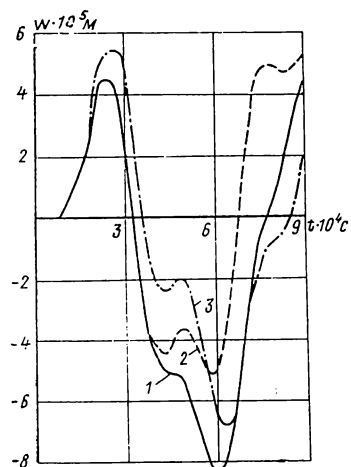


Рис. 3

сматривалась только половина оболочки, которая разбивалась на 50 элементов. По толщине разбиение такое же, как и для пластины. Из графиков видно, что односторонний характер основания приводит к увеличению отклонений, связанных с отрывом оболочки от среды, причем величина этого отклонения для некоторых видов нагрузок может оказаться больше, чем для свободной оболочки. После снятия нагрузки колебания конструкции на одностороннем основании являются более низкочастотными, чем в случае двухсторонней связи, что совпадает с выводами, сделанными в работах [2, 3], и соответствует физической стороне рассматриваемой задачи.

Предложенная численная схема может быть рекомендована для анализа нестационарного взаимодействия упругих тел с разномодульной средой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ажбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. — М.: Наука, 1982. — 320 с.
2. Янютин Е. Г. Нестационарное деформирование балки на упругом одностороннем основании переменной жесткости // Пробл. машиностроения. — 1984. — Вып. 22. — С. 11—17.
3. Янютин Е. Г. Нестационарное деформирование цилиндрической оболочки, односторонне контактирующей со средой // Пробл. машиностроения. — 1985. — Вып. 23. — С. 6—11.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986. — 318 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. — 541 с.

УДК 624.042.8

В. Ф. НИКИФОРОВ, канд. техн. наук (Ярославский политехнический институт)

О динамическом расчете комбинированных конструкций

Комбинированные конструкции отличает многообразие схем, поддерживающих балку висячих или вантовых систем. Соответственно и методы их расчета на динамические воздействия получили развитие в приложении к отдельным конкретным конструкциям. Чаще они посвящены определению динамических характеристик [1, 2 и др.], реже — прямым динамическим расчетам [3, 4 и др.]. В [2] дан пример единого подхода к рас-

чету однокабельных и ванто-балочных конструкций на основе уравнений Лагранжа II рода. Однако практическое решение этой задачи, реализующее непрерывный подход, не получилось общим, к тому же оно ограничено линейной постановкой задачи. В настоящей работе предлагается решение, выполненное на той же основе, что и в [2], но в дискретно-непрерывной трактовке. Совокупность конструктивных элементов поддерживающей системы рассматривается как шарнирно-стержневая структура произвольной геометрической конфигурации, чем достигается общность предлагаемого метода.

На первом этапе выполняется вспомогательный расчет поддерживающей системы на заданные в обобщенной форме перемещения балки [5]. Для каждого элемента определяются коэффициенты отпорности (аппроксимации) φ и ψ , что позволяет выразить приращения усилий в функции обобщенных координат

$$\Delta N_j = \sum_{i=1}^{n_1} (\varphi_{ji} a_i + \psi_{ji} a_i^2); \quad j = 1, 2, 3, \dots, n_2, \quad (1)$$

где n_1 — число учитываемых обобщенных координат, n_2 — число элементов в поддерживающей системе.

Принятая в (1) квадратичная форма аппроксимации отвечает как дискретной теории висячих конструкций [6], так и непрерывной [7].

На втором этапе выполняется собственно динамический расчет, использующий в своей основе уравнения Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial a_i} + \frac{\partial T}{\partial a_i} = Q_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (2)$$

Предположив массу распределенной в уровне балки и представив прогиб в обобщенной форме

$$\eta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(i \pi x/l), \quad (3)$$

запишем выражения для кинетической энергии конструкции [2] и потенциальной энергии изгиба балки

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_i^2 m l/4; \quad (4) \quad T_6 = \sum_{i=1}^{\infty} i^4 a_i^2 E I \pi^4/4 l^3. \quad (5)$$

Энергию деформирования поддерживающей системы как шарнирно-стержневой структуры произвольной геометрической конфигурации определим в форме

$$T_{nc} = \sum_{j=1}^{n_2} \int_0^{\Delta l_j} N_j d(\Delta l_j). \quad (6)$$

Ограничиваясь линейной упругостью материалов

$$N_j l_j = N_j + \Delta N_j = N_j + \Delta l_j/2 B_j, \quad (7)$$

где $B_j = l_j/2EA_j$, преобразуем (6) с учетом (1) и (7)

$$T_{nc} = \sum_{j=1}^{n_2} B_j \left\{ 2 N_j \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_{ji} a_i + \psi_{ji} a_i^2) + \left[\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_{ji} a_i + \psi_{ji} a_i^2) \right]^2 \right\}. \quad (8)$$

Подставив (4, 5 и 8) в систему (2), учитывая, что в исходном состоянии конструкция находится в равновесии, т. е.

$$2 \sum_{j=1}^{n_2} B_j N_j \varphi_{ji} = Q_{iq}$$

и ограничивая число обобщенных координат числом n_1 , получаем расчетную систему уравнений

$$m l \ddot{a}_i/2 + E I_i^4 \pi^4 a_i/2 l^3 + \sum_{j=1}^{n_2} 2 B_j \left[2 N_j \psi_{ji} a_i + (\varphi_{ji} + 2 \psi_{ji} a_i) \sum_{r=1}^{n_1} (\varphi_{jr} a_r + \psi_{jr} a_r^2) \right] = Q_{i1} + Q_{i2} + Q_{i3}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_1, \quad (9)$$

описывающую поведение комбинированной конструкции с произвольной схемой поддерживающей системы при динамическом нагружении.

Обобщенные силы зависят: Q_{iq} — от постоянной нагрузки; Q_{i1} — от временной нагрузки; Q_{i2} — от вязкого сопротивления среды; Q_{i3} — от фрикционных сил. Обобщенные

силы Q_{i1} для нескольких видов нагружений даны в работах [2 и др.], а методика их определения — в работе [8]. Вязкое сопротивление, пропорциональное скорости движения конструкции, в обобщенной форме имеет вид: $Q_{i2} = -c\dot{a}_i$, где c — коэффициент, характеризующий сопротивление среды. Фрикционные силы, возникающие в податливых на сдвиг соединениях, направлены против движения

$$Q_{i3} = - \sum_k F_k \alpha_k \sin(i \pi x_k/l) \operatorname{sign} \dot{\eta}_k.$$

Здесь α_k — коэффициенты, учитывающие особенности проявления фрикционных сил, x_k — координаты точек их приложения к балке.

Решение системы (9) выполняется методом Рунге — Кутты. После определения a_i вычисляются прогибы в сечениях балки (ζ), усилия в каждом элементе поддерживающей системы (1) и изгибающие моменты в сечениях балки, например, через прогибы в конечно-разностной форме.

Если нагрузки имеют скорости «проползания» [3], то соответствующий расчет будет статическим. Это дает возможность не только подготовить данные для построения линий влияния всех интересующих параметров конструкции, но и само их построение осуществить программно. Определение скорости «проползания» как некоторой части нижней критической скорости возбуждения может быть выполнено численно. Однако удобнее эту задачу решить, используя динамические характеристики конструкции. Для их определения воспользуемся линейным решением, пренебрегая в (9) слагаемыми, содержащими a_i в степенях выше первой. Тогда при $Q_i = 0$ и $a_i = A_i \sin \omega t$ задача сведется к известной процедуре вычисления определителя с определением частот и форм собственных колебаний

$$\begin{vmatrix} c_{11} - M\omega^2 & c_{12} & \dots & c_{1n_1} \\ c_{21} & c_{22} - M\omega^2 & \dots & c_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_1 1} & c_{n_1 2} & \dots & c_{n_1 n_1} - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

$$\text{где } c_{11} = EI i^4 \pi^4 / 2 l^3 + \sum_{j=1}^{n_2} 2 B_j [2 N_j \psi_{ji} + \varphi_{ji}]; \quad i = \overline{1, n_1};$$

$$M = ml/2; \quad c_{ri} = c_{ri} = \sum_{j=1}^{n_2} 2 B_j \varphi_{ji} \sum_{r=1}^{n_1} \varphi_{jr}; \quad i = r = \overline{1, n_1}.$$

Если дополнительно к предыдущему принять $\varphi_{ji}\varphi_{jr} = 0$ для $i \neq r$, исключив взаимное влияние главных форм колебаний друг на друга, то по аналогии с [2] получим группу несвязанных уравнений, отвечающих каждой из обобщенных координат.

$$m l \ddot{a}_i / 2 + EI i^4 \pi^4 a_i / 2 l^3 + \sum_{j=1}^{n_2} 2 B_j (2 N_j \psi_{ji} + \varphi_{ji}^2) a_i = Q_{i1} + Q_{i2} + Q_{i3}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_1. \quad (11)$$

Достоинством этого упрощенного решения является возможность использования известных результатов общего анализа уравнения типа (11), а также определения прогибов и частот в явной форме:

$$\eta(x, t) = \sum_{i=1}^{n_1} e^{-\delta t} \sin \frac{i \pi x}{l} [C_{1i} \cos \omega_{1i} t + C_{2i} \sin \omega_{1i} t + \\ + \frac{1}{M \omega_{1i}} \int_0^t e^{\delta t_1} (Q_{i1} + Q_{i3}) \sin \omega_{1i} (t - t_1) dt_1,$$

где $\delta = c/lm$; C_{1i}, C_{2i} — начальные параметры движения балки;

$$\omega_{1i}^2 = \omega_i^2 - \delta^2; \quad \omega_i^2 = \frac{1}{m} \left[EI \frac{i^4 \pi^4}{l^4} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{4 B_j}{l} (2 N_j \psi_{ji} + \varphi_{ji}^2) \right]; \quad i = \overline{1, n_1}. \quad (12)$$

Как показывают практические расчеты, частоты, найденные по (10) и (12), отличаются друг от друга на доли процента, а преобразование (12), выполненное, например, для висячей однокабельной комбинированной конструкции при $n_2 = 1$; $B_1 = l/2EA$; $N_1 = H$ — распор кабеля;

$$\varphi_{1i} = 8 f E A (1 - \cos i \pi) / i \pi l^2; \quad \psi_{1i} = i^2 \pi^2 E A / 4 l^2,$$

дает выражение

$$\omega_i^2 = \frac{1}{m} \left[EI \frac{i^4 \pi^4}{l^4} + H \frac{i^2 \pi^2}{l^2} + \frac{128 f^2 EA (1 - \cos i \pi)^2}{i^2 \pi^2 l^4} \right],$$

сопоставимое с аналогичным в [2, § 33.1] и повторяющее справочное [9, раздел 11] при $El=0$. В свою очередь нелинейное решение дает поправку на резонансную частоту (в пределах 7...10%) при $a_i \leq l/100$.

Как видно, общность рассмотренного подхода определяется не только его применимостью к расчету гибких и комбинированных конструкций с произвольной конфигурацией висячей или вантовой системы, но и возможностью упрощения решения при сохранении достаточной для практического применения точности результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Червяков А. В. Приближенный метод определения собственных частот и форм вертикальных колебаний висячих мостов // Научные сообщения ЦНИИС. — М., 1963. — Вып. 8. — С. 61—74.
2. Качурин В. К., Брагин А. В., Ерунов Б. Г. Проектирование висячих и вантовых мостов. — М.: Транспорт, 1971. — 280 с.
3. Ружанский И. Л. О влиянии масс и скоростей движущейся нагрузки на усилия и перемещения в элементах висячего моста // Строит. механика и расчет сооружений. — 1973. — № 4. — С. 28—33.
4. Сафронов В. С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. — Воронеж: ВГУ, 1983. — 196 с.
5. Никифоров В. Ф., Никифорова С. Г. К расчету шарнирно-стержневых конструкций на перемещения промежуточных узлов / Яросл. политехн. ин-т. — Ярославль, 1986. — 5с. — Деп. в ВНИИС 10.07.86, № 7180.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. — М.: Физматгиз, 1959. — 439 с.
7. Дмитриев Л. Г., Касилов А. В. Вантовые покрытия. — Киев: Будівельник, 1974. — 271 с.
8. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. — М.—Л.: Госнаучтехиздат, 1932. — 344 с.
9. Справочник по динамике сооружений. — М., 1972. — 511 с.

РАСЧЕТЫ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

УДК 624.042.7:69.057.122

Г. В. МАМАЕВА, канд. техн. наук (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва)

Динамические характеристики каркасных зданий

В настоящее время наиболее широко распространен метод расчета зданий и сооружений на сейсмические воздействия по спектральным кривым. Согласно [1] при определении величины сейсмической нагрузки необходимо знать период основного тона собственных колебаний здания.

Период колебаний может быть определен как расчетным путем, так и экспериментально. Значения расчетных периодов, как правило, отличаются от экспериментальных. При этом существенное различие наблюдается для каркасных зданий и в меньшей степени — для кирпичных, каменных, крупнопанельных, крупноблочных.

В ряде работ [2, 3] предложены линейные эмпирические зависимости между периодом T_n и числом этажей n здания. Приведем для каркасных зданий: $T_n = 0,068 n + 0,05$ (по [3]); $T_n = 0,0905 H/\sqrt{B}$ (по америк. нормам); $T_n = n/12$ (по европейским нормам для железобетонных конструкций); $T_n = 0,064 n$ (по [7]); $T_n^x = 0,07 n$ (по [2]). Здесь H — высота; B — ширина здания. Предложенные формулы часто используют для определения периода колебаний ос-

новного тона. Однако по ним можно определить значения периода без учета влияния таких факторов, как разнообразие грунтовых условий основания и геометрических размеров зданий в плане.

С целью определения зависимостей «период — число этажей» зданий с учетом указанных факторов были проанализированы экспериментальные значения периодов (и одновременно декрементов колебаний) для каркасных зданий. Источник этих данных — паспорта станций инженерно-сейсмометрической службы (ИСС), размещенных на каркасных зданиях различной этажности, протяженности в плане и расположенных на грунтовых основаниях с различными гидрогеологическими условиями. По сейсмическим свойствам все грунты разделены на три категории [3]: к первой категории относятся скальные грунты; ко второй — гравелистые пески, к третьей — пески рыхлые пылеватые влажные и водонасыщенные.

Согласно «Рекомендациям» [4] в паспорте станций ИСС, на которых ведутся инженерно-сейсмометрические наблюдения, должны быть внесены экспериментально определенные динамические характеристики.

Таблица 1

Категория грунта основания	Продольное направление, x				Поперечное направление, y			
	m	Уравнение $T_n^x - n$	r	s	m	Уравнение $T_n^y - n$	r	s
I	10	$T_n^x = 0,05n + 0,01$	0,96	0,05	11	$T_n^y = 0,049n + 0,05$	0,95	0,05
II	24	$T_n^x = 0,056n + 0,08$	0,97	0,07	20	$T_n^y = 0,058n + 0,07$	0,98	0,06
III	14	$T_n^x = 0,067n + 0,06$	0,98	0,04	12	$T_n^y = 0,073n + 0,05$	0,98	0,04

Способ силового возбуждения при определении периодов колебаний может быть разным (по записям микросейсм, с помощью импульса или вибрационной машины), а уровень нагружения должен соответствовать упругой стадии работы здания. Замечено, что величина периода колебаний зависит от способа силового воздействия. Однако при анализе экспериментальных данных способ возбуждения не учитывался.

Для анализа из паспортов станций ИСС были взяты периоды колебаний 53 каркасных зданий с числом этажей от 3 до 25 различной протяженности в плане, возведенные на грунтах I, II и III категорий. Распределение всего количества зданий по этажности следующее: при числе этажей 3; 4; 5; 7—8; 9—10; 11—12; 13—14; 15—16; 18—25 число зданий m_n соответственно равно: 3; 6; 9; 5; 10; 6; 3; 5; 6. Из приведенных данных видно, что большинство экспериментальных значений ($\sim 70\%$) соответствует зданиям малой и средней этажности (до 12 этажей).

В первом приближении зависимость «период — этажность» принималась линейной, а коэффициенты уравнений определялись на базе экспериментальных данных по методу наименьших квадратов. Вначале учитывались все значения периодов колебаний независимо от размера здания и категории грунта основания. При определении зависимостей $T_n^y - n$ для периодов поперечных колебаний зданий исключались лишь те значения, которые были значительно меньше, чем значения периодов продольных колебаний T_n^x . Такое сочетание периодов соответствует зданиям с частым расположением поперечных стен (например, здания отелей, пансионатов, больниц и т. п.). Исключены же они были ввиду малочисленности экспериментальных данных, отвечающих вышеупомянутому случаю.

Для оценки влияния категории грунта основания здания на период его колебаний были определены зависимости $T_n - n$ отдельно для зданий, расположенных на грунтах I, II, III категорий. Для иллюстрации эти зависимости представлены в табл. 1 (m — число экспериментальных значений, на базе которых определялась зависимость $T_n - n$ ($\lambda_n - n$); r — коэффициент корреляции; s — среднеквадратичное отклонение). Хотя аналитические зависимости определены на основе различного количества экспериментальных значений m , все же влияние

грунта основания на величину периода колебаний неоспоримо: с увеличением категории грунта основания период колебания здания растет.

Разброс экспериментальных значений периодов поперечных колебаний значительно больший, чем продольных. Замечено, что значительный разброс экспериментальных данных соответствует случаю, когда учитываются периоды зданий, расположенных на грунтах разных категорий.

Из табл. 1 следует, что влияние грунта наиболее заметно для зданий повышенной этажности. Степень доверия к экспериментальным зависимостям табл. 1 различна, наиболее достоверна зависимость, которая определена при максимальном числе экспериментальных данных m и максимальном охвате числа этажей от 3 до 25. Этим условиям отвечают зависимости $T_n - n$, определенные для зданий этажностью от 3 до 12, возведенные на грунтах II категории. Зависимости $T_n - n$ для зданий, расположенных на грунтах I и III категорий для числа этажей от 13 и выше предлагаем использовать лишь для качественной оценки.

С целью учета влияния размера здания в плане на период его колебаний был введен коэффициент протяженности μ , равный отношению длины здания L к его ширине B в плане (длина определена как расстояние от торца здания до сейсмического шва).

Для зданий, расположенных на грунтах II категории, были определены зависимости $T_n - n$ для $\mu = 1,5$. Определение зависимостей $T_n - n$ при разных μ для зданий, возведенных на грунтах II категории, объясняется наличием наибольшего числа экспериментальных значений периодов, отличающихся разнообразием сочетаний размеров зданий в плане и этажности.

На рис. 1 а, б представлены зависимости продольных и поперечных колебаний $T_n - \mu$ (сплошными линиями) для зданий с числом этажей 1; 5; 10; 15; 20; 25 (цифры в кружках соответствуют этажности здания). На основании анализа зависимостей $T_n - n$, полученных по экспериментальным данным, нами было сделано предположение о том, что период колебаний каркасных зданий одной и той же этажности постоянен при значениях $\mu = 1...3$.

С увеличением μ от 3 до 4 наблюдалось уменьшение периода продольных колебаний. Влияние протяженности здания наиболее ощутимо для зданий повышенной этажности. Величина периода $\mu \geq 4$ остается без изменений.

Таблица 2

μ	Продольное направление, x				Поперечное направление, y			
	m	Уравнение	r	s	m	Уравнение	r	s
≤ 3	16	$T_n^x = 0,058n + 0,08$	0,99	0,05	14	$T_n^y = 0,061n + 0,05$	0,97	0,07
≥ 4	8	$T_n^x = 0,047n + 0,1$	0,98	0,04	6	$T_n^y = 0,054n + 0,09$	0,99	0,04

Построенные в соответствии с принятым предположением зависимости $T-n$ (штриховые линии на рис. 1) совпадают полностью с экспериментальными зависимостями (сплошная линия) для продольных и поперечных колебаний; имеется различие лишь для малоэтажных башен в продольном направлении и для многоэтажных башен в поперечном направлении. Однако, учитывая, что в практике строительства высотные здания проектируются, как правило, башенного типа, а малоэтажные — протяженного, указанными выше различиями между штриховой и сплошной прямыми можно пренебречь. К тому же эти различия можно объяснить еще и тем, что зависимость T_n-n для $\mu=1$ определена на основе экспериментальных данных для зданий повышенной этажности ($n=15-25$ этажей). Ее экстраполяция в область малой и средней этажности (для которой экспериментальные данные полностью отсутствовали) привела к погрешности: период колебаний при $\mu=1$ меньше, чем при $\mu=2...3$.

По аналогии можно объяснить различие между предполагаемой и экспериментальной зависимостью $T-n$ для высоких протяженных зданий в поперечном направлении: эта зависимость при $\mu \geq 4$ определялась в основном для малоэтажных зданий.

Приведенные на рис. 1 зависимости

$T_n^{xy}-\mu$ позволяют сделать основной вывод: периоды продольных колебаний протяженных и башенных зданий существенно отличаются между собой, а поперечных — почти одинаковы. Для зданий с частым расположением поперечных стен, перегородок эффект влияния протяженности на период не зависит от направления колебаний.

Полученные результаты позволили классифицировать здания в зависимости от величины μ на башни ($\mu \leq 3$) и протяженные здания ($\mu \geq 4$). В табл. 2 представлены зависимости T_n-n для протяженных и башенных зданий, возведенных на грунтах II категории. Для зданий, у которых отношение μ занимает промежуточное значение между 3 и 4, периоды колебаний определяются по линейной интерполяции.

Классификация зданий по размерам в плане позволила определить зависимости $T_n^{xy}-n$ для башен и протяженных зданий, расположенных на грунтах I и III категорий. Хотя зависимости T_n-n определены на базе различного количества экспериментальных значений m , все же влияние грунта и размера здания в плане на величину периода колебаний бесспорно ощутимо. С понижением категории грунта растет период колебаний. Категория грунта оказывает влияние в большей мере на период колебаний

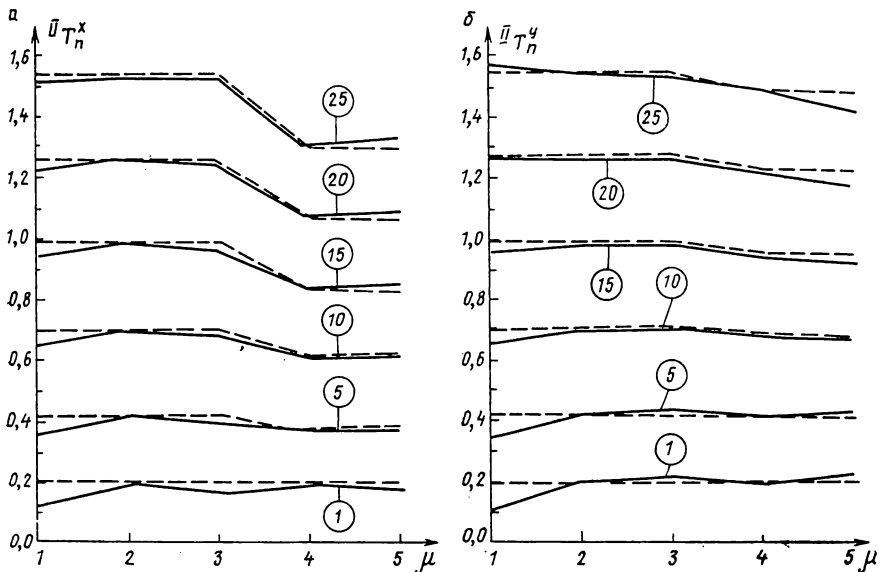


Рис. 1

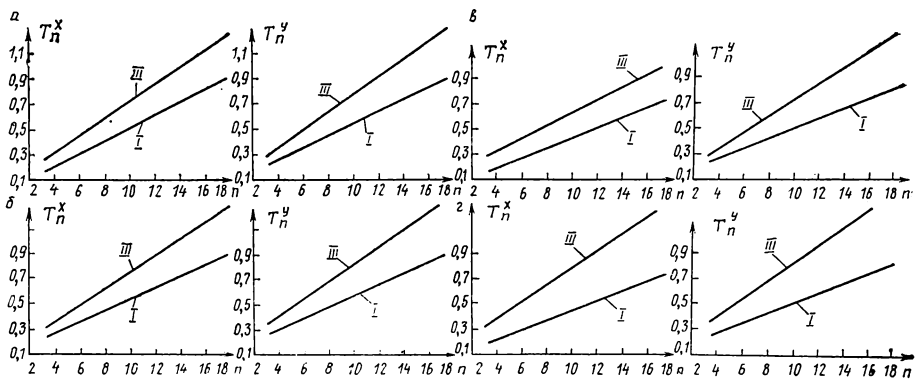


Рис. 2

башен, чем протяженных зданий. Размеры здания, независимо от категории грунта основания, почти не оказывают влияния на период поперечных колебаний.

Влияние этажности на периоды колебаний башен и протяженных зданий различно. Угол наклона зависимости $T_n - n$ для башен больше, чем протяженных. Категория грунта в большей мере влияет на период колебаний башен, чем протяженных зданий. Максимальные периоды колебаний характерны для башен повышенной этажности, возведенных на грунтах основания III категории.

На основании проведенного анализа был сделан вывод: при определении периода колебаний здания необходимо учитывать влияние категории грунта и размера здания в плане. Пренебрежение этими двумя факторами может привести к существенной недооценке или переоценке периода колебаний, особенно для зданий повышенной этажности. Для иллюстрации сказанного на рис. 2 представлены зависимости $T_n - n$ для зданий башенных (рис. 2, б), протяженных (2, в), возведенных на грунтах I и III категорий, и без учета размера здания в плане (рис. 2, а). Сочетание возможных комбинаций размеров зданий и категорий грунта основания показывает, в каких пределах возможна ошибка в оценке периода, если одна из двух зависимостей $T_n - n$ будет соответствовать предполагаемым или реальным условиям. Из рис. 2, г видно, что при сравнении двух зависимостей для зданий протяженного и башенного типа, расположенных на грунтах I и III категорий соответственно, наблюдается большее расхождение между периодами продольных колебаний, чем при других сочетаниях грунтовых условий и протяженности в плане (рис. 2, а, б, в).

По экспериментальным зависимостям были определены периоды продольных колебаний для протяженных зданий и башен с числом этажей от 3 до 25 с учетом влияния протяженности и категорий грунта основания.

Сравнение периодов, вычисленных по предложенным и заимствованным зависимостям [2, 3], показывает неплохое согласо-

вание только для зданий башенного типа, возведенных на грунтах II категории.

Беличина периода колебаний не является постоянной для реального здания. В период эксплуатации происходит осадка фундамента здания, появляются микро- и макротрещины, связанные с вибрационными воздействиями различных производственных процессов. И, наконец, сейсмические воздействия оказывают влияние на изменение жесткости здания и, следовательно, на период его колебаний.

Результаты инженерно-сейсмометрических наблюдений показали, что периоды колебаний 5—9-этажных каркасных зданий после 30 сейсмических воздействий интенсивностью 3—5 баллов увеличиваются на 10—20% по сравнению с периодами, определенными до землетрясения [6].

При выборе для анализа экспериментальных значений декрементов колебаний λ_n из паспортов станций ИСС принимался во внимание способ силового возбуждения (но не уровень нагрузки) при их определении. Были взяты только значения, определенные с помощью импульса или вибромашины. По сравнению с периодами колебаний мы располагали сравнительно меньшим числом экспериментальных данных о декрементах. Вначале все значения λ_n^x были нанесены на график (рис. 3) в координатах $\lambda_n^x - n$ без учета категории грунта основания, но с учетом размера здания — протяженные (белые кружки) и башни (черные). Из рис. 3, а видно, что какая-либо зависимость между λ_n и n отсутствует. Можно лишь заметить, что значения декрементов колебаний для башен меньше, чем для протяженных зданий. На рис. 3, б, в, г представлены декременты колебаний зданий, расположенных на грунтах I, II и III категорий. Из рис. 3 видно, что независимо от категории грунта, значение декрементов для протяженных зданий также выше, чем для башен. Замечается тенденция к уменьшению λ_n с ростом числа этажей n . Снижение характерно в большей мере для башен, чем для протяженных зданий. Для подбора аналитической зависимости $\lambda_n - n$ были приняты во внимание результаты натурных испытаний

Таблица 3

μ	Категория грунта	Зависимость $\lambda_n^x - n$	r	s
≤ 3	I	$\lambda_n^x = 0,33 - 0,33n$ ($n=1...8$); $\lambda_n^x = 0,1$ ($n \geq 9$)	0,99	0,006
	II	$\lambda_n^x = 0,34 - 0,013n$ ($n=1...9$); $\lambda_n^x = 0,22$ ($n \geq 10$)	0,94	0,01
	III	$\lambda_n^x = 0,38 - 0,008n$ ($n=1...11$); $\lambda_n^x = 0,3$ ($n \geq 12$)	0,92	0,01
≥ 4	I	$\lambda_n^x = 0,31 - 0,005n$	0,94	0,02
	II	$\lambda_n^x = 0,35 - 0,003n$	0,73	0,01
	III	$\lambda_n^x = 0,41 - 0,005n$	0,97	0,01

четырёх однотипных крупноблочных моделей в $1/4$ натуральной величины [5]. Результаты испытаний моделей показали снижение декремента колебаний от 0,62 до 0,1 с ростом числа этажей от 3 до 9. Основываясь на качественной оценке имеющихся результатов и не располагая достаточным количеством экспериментальных данных с учетом категории грунта основания и размера зданий в плане, нами была принята в качестве первого приближений линейная зависимость между λ_n и n . Для протяженных зданий зависимость $\lambda_n - n$ экстраполируется в пределах от 1 до 25 этажей; для башен — от 1 до 9. Принято также, что в пределах от 9 до 25 этажей декремент колебаний башен постоянен. С учетом каждой категории грунта основания по методу наименьших квадратов была определена зависимость $\lambda_n - n$ для башен и протяженных каркасных зданий. Эти зависимости представлены в табл. 3.

Значения декрементов, определенные по

зависимостям табл. 3, попадают в интервал значений, полученных другими авторами [3]. Располагая сравнительно небольшим количеством экспериментальных значений декрементов колебаний (с учетом категории грунта и размера здания), мы рассматриваем приведенный анализ в значительной мере как качественную оценку.

Изменяется ли декремент колебаний, как и его период, в процессе эксплуатации здания, подвергающегося различного рода вибрационным или сейсмическим воздействиям? По этому вопросу имеются данные инженерно-сейсмических наблюдений за зданиями г. Петропавловска-Камчатского, из которых следует, что после 30 землетрясений интенсивностью 3—4 балла (в том числе 1—7-балльное) декременты колебаний крупнопанельных и крупноблочных зданий значительно увеличились (в 1,5...3 раза).

Предлагаемые линейные эмпирические зависимости — «период — число этажей» и «логарифмический декремент — число эта-

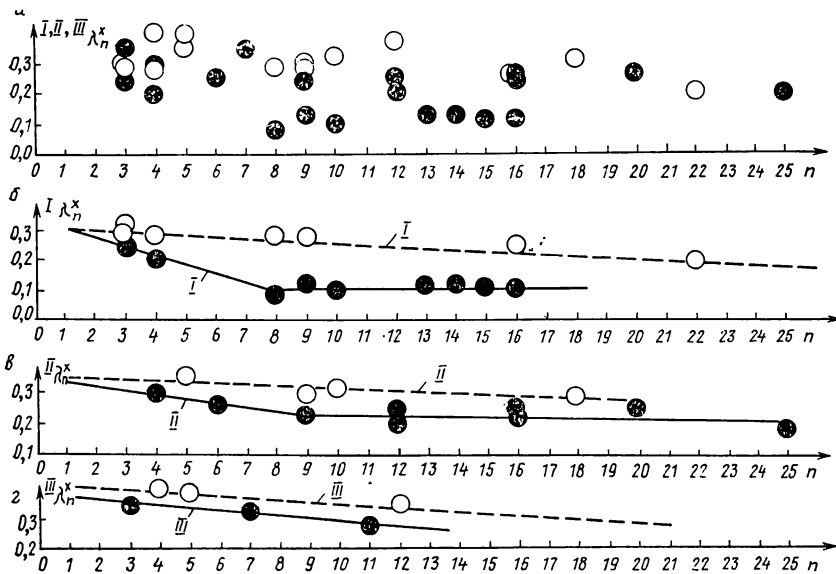


Рис. 3

жей» определены по результатам многочисленных натурных испытаний. В отличие от других работ здесь учтено влияние как грунта основания, так и конструктивных несущих и вентилирующих элементов (перегородки, лестничные марши, теплоизоляционные плиты, навесные панели и т. п.).

Приведенные в статье экспериментальные зависимости могут найти применение в теории и практике сейсмостойкого строительства, в частности, они могут выполнять роль ориентира для оценки влияния различных факторов при теоретических исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. СНиП 11-7-81. — Строительство в сейсмических районах. — 49 с.
2. Блиникова-Вяземская М. В., Котов Ю. И. Предложения по определению динамических характеристик многоэтажных каркасных зданий и сооружений. — М.: ПЭМ ЦИНИС Госстроя СССР, 1974. — Вып. 3. — С. 11—13.
3. Поляков С. В. Сейсмостойкие конструкции зданий. — М.: Высшая школа, 1969. — 335 с.
4. Рекомендации по организации станций инженерно-сейсмометрической службы (ИСС). — М.: ПЭМ ВНИИС Госстроя СССР, 1984. — 74 с.
5. Шапцов В. А. Динамические параметры зданий из объемных блоков // Строительство и архитектура. — М., 1983. — Вып. 5. — (Экспресс-информация). — С. 16—18.
6. Малаева Г. В., Федяков М. В., Федякова С. Н. Информация о работе инженерно-сейсмометрической службы Петропавловска-Камчатского // Совершенствование системы наблюдений за колебаниями зданий, Сб. статей. — М., 1986. — С. 62—69.
7. Husid R. Analisis de las medidas de periodos de vibration de edificios nuevos // IDEM. — Чили. — 1965. — N. 3. — т. 4. — С. 87—90.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 624.074.43.046.3

Б. А. КУРАНОВ, д-р техн. наук, В. М. МУРАТОВ, А. Т. ТУРБАЙВСКИЙ,
кандидаты техн. наук (НПО Криогенмаш, Балашиха)

Устойчивость подкрепленных конических оболочек с технологическими несовершенствами формы

Последние годы характеризуются интенсивным развитием численных методов расчета сложных оболочечных конструкций. Увеличение габаритов изделий, усложнение их конструктивных форм, сопровождающиеся неизбежным ростом технологических отклонений в процессе монтажа, требуют выполнения серии экспериментальных исследований для надежной оценки влияния технологических факторов на их устойчивость в условиях эксплуатации [1]. В настоящей работе представлены результаты исследований на моделях устойчивости крупногабаритных конических оболочек, изготовленных по типовой промышленной технологии. Анализ литературных данных показал, что предшествующие исследования в основном ориентированы на сравнительно малоразмерные модели с тщательной технологией изготовления [2—4].

Модели конических оболочек, имеющие форму усеченного конуса, изготавливались в заводских условиях по типовой технологии, включавшей операции вальцовки, сборки и сварки. После вальцовки производилась сварка продольного шва по образующей модели, приварка вальцованных ребер прерывистым сварным швом с шагом 50 мм и катетом 4 мм и приварка по торцам крепежных фланцев и торцевых плоских днищ, усиленных радиальными ребрами. Для изготовления моделей был использован листовой прокат Ст3 ($E=2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu=0,3$), аустенитной стали 12X18H10T ($E=1,86 \cdot 10^5$ МПа, $\nu=0,3$) и алюминиевого сплава АМцС ($E=0,72 \cdot 10^5$ МПа, $\nu=0,3$). Характерные размеры моделей (толщина оболочки — h , ширина и высота ребер — H и B) приведены в табл. 1.

Ребра на оболочках располагались с равномерным шагом l . В двух моделях (№ 4, 12) были установлены ребра переменной жесткости, в остальных — постоянной жесткости с равномерным шагом.

При испытаниях модели нагружались гидравлическим давлением до потери устойчивости.

Схема установки модели в испытательную камеру и характерные размеры ее показаны на рис. 1. На рисунке: 1 — корпус; 2 — модель оболочки; 3 — прижимное кольцо;

Таблица 1

№ модели	Материал	h, мм	B×H, мм	Число ребер	Расстояние между ребрами l, мм
1, 2, 5, 6, 7, 9, 11	Ст. 3	$2^{-0,04}$	4×6	9	$100^{\pm 1}$
3	Ст. 3	$2^{-0,04}$	4×8	3	$300^{\pm 1}$
4, 12	Ст. 3	$2^{-0,02}$	6×12 4×6	2 3	$150^{\pm 1}$
13, 14	12X18H10T	$2^{-0,02}$	4×10	15	$62,5^{\pm 1}$
15, 16	АМцС	$2^{-0,04}$	4×6	9	$100^{\pm 1}$

4 — уплотнение; 5 — трубопровод подачи давления; 6 — манометр. Скорость подъема давления варьировалась в диапазоне 0,04...0,06 МПа/мин и регистрировалась манометром класса 0,5. Момент потери устойчивости фиксировался по резкому падению давления в камере на 30...50% от достигнутого уровня. После сброса давления восстанавливалась практически исходная форма модели (рис. 2, а, зона потери устойчивости отмечена краской). Для фиксации формы потери устойчивости проводилось дальнейшее повышение давления. В процессе нагружения наблюдалось развитие начальной формы потери устойчивости с появлением дополнительных вмятин (рис. 2, б). При повторном подъеме давления его верхнее значение было на 10...20% ниже критического. Во всех случаях начальная форма потери устойчивости имела локальный характер.

Перед испытаниями был проведен тщательный обмер моделей. Замер отклонений формы выполнялся по шести образующим, равномерно расположенным по окружности. При наличии исходных вмятин в оболочке замеры проводились по их центру. Характерное поле отклонений в одной из моделей представлено на рис. 3. Модели № 1, 2, 3, 9, 15, 16 имели вмятины глубиной 16, 12, 11, 7, 8 и 9 мм соответственно. Наибольшие по площади вмятины были отмечены в моделях № 1, 2. В этих моделях в продольном направлении размер вмятины соответствовал длине оболочки по образующей и в окружном направлении составлял 400 мм и 550 мм соответственно.

В модели № 3 размер вмятины по образующей составлял 820 мм, в окружном направлении — 330 мм. В модели № 9 вмятина имела по образующей размер 350 мм, по окружности — 320 мм. В моделях 15 и 16 вмятины располагались вблизи фланца и имели размеры по образующей 462 и 510 мм, по окружности 251 и 280 мм.

В моделях № 4, 5, 7, 13, 14 геометрические отклонения не превышали допускаемых значений, определяемых по формуле [5]:

$$f_d = (0,1 h + 3) \text{ мм}, \quad (1)$$

h — толщина оболочки.

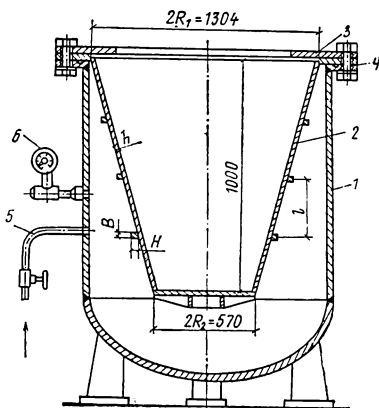


Рис. 1

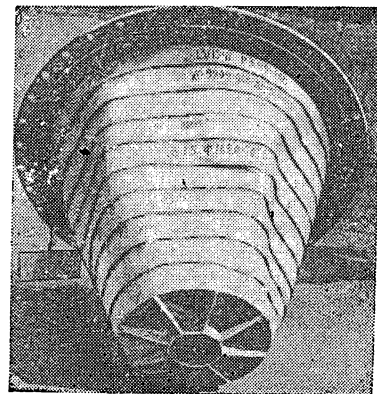
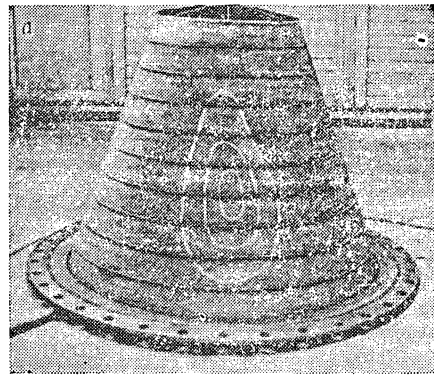


Рис. 2

№ модели	Материал	$q_{кр}^T$, МПа	Число волн, n_T	МПа при $q_{кр}^3$, МПа	$K_{сн} = q_{кр}^3 / q_{кр}^T$
1	Ст. 3	0,41	7	0,175	0,43
2	Ст. 3	0,41	7	0,160	0,39
3	Ст. 3	0,245	11	0,146	0,57
4	Ст. 3	0,39	17	0,23	0,59
5	Ст. 3	0,41	7	0,22	0,54
6	Ст. 3	0,41	7	0,195	0,48
7	Ст. 3	0,41	7	0,205	0,50
9	Ст. 3	0,41	7	0,165	0,40
11	Ст. 3	0,41	7	0,198	0,48
12	Ст. 3	0,39	17	0,160	0,41
13	12X18H10T	1,2	5	0,55	0,46
14	12X18H10T	1,2	6	0,54	0,45
15	АМцС	0,144	7	0,062	0,43
16	АМцС	0,144	7	0,063	0,44

Следует отметить, что все ребра имели отклонения от плоскости, соответствующие синусоидальной форме с амплитудой до ± 1 мм.

Определение верхних значений критических нагрузок выполнялось с использованием программы вычислительного комплекса «ТУПРОК» [6, 7], реализующей полуаналитический вариант метода конечных элементов. При определении расчетных критических нагрузок формоизменение модели не учитывалось. Расчетная схема корректно учитывала ребро как круговое кольцо с эксцентриситетом относительно срединной поверхности оболочки и неоднородность докритического напряженного состояния. В зоне установившегося фланца граничные условия формулировались как условия жесткого защемления, в зоне приварки плоской крышки — как условия сопряжения с жестким телом. В целом постановка задачи соответствовала основным требованиям [8].

В табл. 2 представлены расчетные ($q_{кр}^T$) и экспериментальные ($q_{кр}^3$) значения критических нагрузок для испытанных моделей (Значения $q_{кр}^3$ для моделей с отклонениями $f \leq f_g$ подчеркнуты). Здесь же приведены расчетные значения волновых чисел для реализовавшихся форм потери устойчивости. Зафиксированные при испытаниях формы потери устойчивости показаны на рис. 2.

В процессе осмотра и обмера испытанных моделей установлено, что модели № 2, 15, 16, имевшие начальные вмятины, теряли устойчивость в зоне вмятин. Характерный размер волны варьировался в диапазоне $1/6 \dots 1/8$ длины окружности. По замерам в моделях с девятью ребрами волновые числа варьировались в диапазоне $n_3 = 6 \dots 8$ при их расчетном значении $n_r = 7$. В модели № 3, подкрепленной тремя ребрами, реализовалась общая форма потери устойчивости, соответствующая $n_r = 8$ при расчетном значении $n_r = 11$. В оболочках с пятью ребрами переменной жесткости отмечена местная потеря устойчивости в зоне между установочным фланцем и ребром повышенной жесткости. При дальнейшем подъеме давления зафиксировано образование системы вмятин по всей оболочке. В моделях с большим количеством ребер № 13, 14 (15 ребер) зафиксирована местная потеря устойчивости, захватывающая зону между фланцем и вторым ребром.

По результатам испытаний построена зависимость коэффициента снижения критической нагрузки

$$K_{сн} = q_{кр}^3 / q_{кр}^T \quad (2)$$

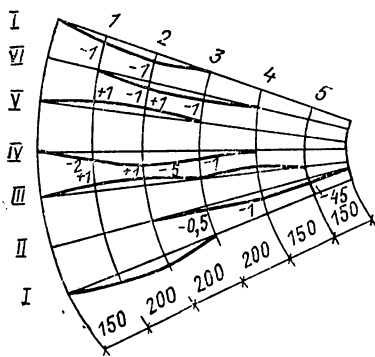


Рис. 3

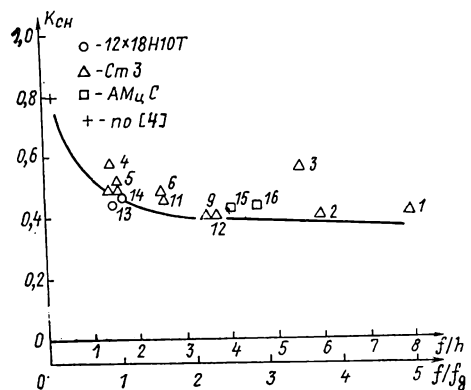


Рис. 4

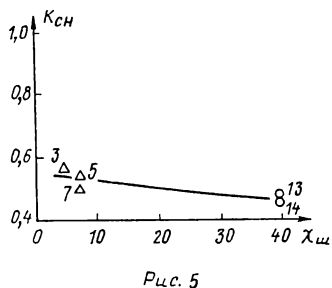


Рис. 5

На рис. 5 представлена зависимость коэффициента снижения критической нагрузки $K_{сн}$ от параметра относительной жесткости ребер $\chi_{ш}$:

$$\chi_{ш} = (I_{ш} + a^2 F_{ш}) / (l h^3 / 12). \quad (3)$$

В формуле (3) введены обозначения: $I_{ш}$ — момент инерции ребра; $F_{ш}$ — площадь поперечного сечения ребра; a — эксцентриситет ребра относительно оболочки; l — расстояние между соседними ребрами вдоль образующей.

Зависимость $K_{сн}(\chi_{ш})$ определялась по результатам испытаний моделей с начальными несовершенствами формы, удовлетворяющими требованиям [5]. Для получения этой зависимости использован метод наименьших квадратов. Здесь важно отметить, что с увеличением числа ребер выявлено закономерное уменьшение $K_{сн}$. Этот результат качественно отличен от результатов испытаний точных оболочек, приведенных в [4]. Наиболее вероятным объяснением полученной закономерности может быть только влияние остаточных напряжений сварки на устойчивость оболочки.

Выполненные исследования позволяют с достаточной надежностью определять коэффициент снижения критической нагрузки (рис. 4) как функции начальных несовершенств конструкции.

Во всех случаях, когда на стадии проектирования отсутствуют достоверные данные о величинах начальных несовершенств, следует принимать $K_{сн} = 0,4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бушнелл Д. Потеря устойчивости и выпучивание оболочек — ловушка для проектировщиков // Ракетная техника и космонавтика. — 1981. — № 10. — С. 93—154.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
3. Григорюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. — М.: Наука 1978. — 360 с.
4. Seide P. A. Survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness. NASA. Techn. Note, 1962, D—15110. — P. 401—426.
5. ОСТ 26-291—79. Сосуды и аппараты стальные сварные. Технические требования.
6. Куранов Б. А., Турбаевский А. Т. Численное исследование устойчивости оболочек, подкрепленных нерегулярным набором призматических и тонкостенных шпангоутов. Расчеты на прочность. — М.: Машиностроение, 1978. — Вып. 19. — С. 141—161.
7. ОСТ 26-04-2585—86. Техника криогенная и криогенно-вакуумная. Сосуды и камеры. Нормы и методы расчета на прочность, устойчивость и долговечность сварных конструкций.
8. ГОСТ 14249—80. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность.

УДК 624.012.4:691:620.17

Г. В. РЫКОВ, д-р техн. наук, проф., В. П. ОБЛЕДОВ, Е. Ю. МАЙОРОВ,
В. Т. АБРАМКИНА, инженеры (Москва)

Экспериментальные исследования процессов деформирования и разрушения бетонов при интенсивных динамических нагрузках

Современный этап развития методов расчета железобетонных конструкций характеризуется стремлением использовать для решения прикладных задач аппарат механики сплошных сред и соответствующие численные методы расчета с применением

ЭВМ [1, 2]. Такой подход требует формулировки математических моделей материалов, в частности бетона, наиболее адекватно отражающих особенности их деформирования в конструкциях на всех этапах нагружения как при статических, так и при

кратковременных динамических нагрузках.

В настоящее время опубликованы экспериментальные результаты по определению полных диаграмм одноосного сжатия бетона $\sigma_1 - \epsilon$ (с учетом нисходящей ветви) при статическом нагружении [3, 4].

Для условий динамического нагружения эти результаты касаются главным образом вопросов влияния скорости деформирования на максимальную прочность бетона [5, 6]. Данные о протекании процессов деформирования и разрушения во времени практически отсутствуют.

Ниже изложены методы и результаты экспериментальных исследований процессов деформирования и разрушения бетонов различной прочности $R_c = (20,0...88,1)$ МПа в условиях одноосного сжатия при действии кратковременных динамических и статических нагрузок. Методика исследований основана на применении специально разработанной автоматизированной системы сбора и обработки экспериментальной информации. Приведены количественные данные по основным механическим характеристикам указанных выше бетонов с учетом их работы на нисходящей ветви диаграммы $\sigma_1 - \epsilon$.

Экспериментальные результаты снабжены статистическими оценками точности и надежности.

1. Испытаниям подвергались цилиндрические образцы $\varnothing = 7$ см и высотой $h = 21$ см, которые бетонировались сериями по 20 шт. в каждой в специально сконструированных металлических формах. Параллельно изготавливались образцы — кубы с ребром 10 см. Для приготовления бетонных смесей использовались одни и те же материалы: цемент Усть-Каменогорского завода М 50, гранитный щебень фракции 5...10 мм месторождения «Кузнечное» и песок карьера «Академический».

Опытные образцы испытывались в возрасте одного года. При проведении испытаний измерялись одновременно вертикальная нагрузка на образец, а также его продольные и поперечные деформации. Нагрузка измерялась с помощью стальных тензометрических цилиндров, устанавливавшихся на образец сверху, а также под образцом.

Для измерения продольных деформаций образца на всей его базе использовались специально сконструированные датчики перемещений, аналогичные [7]. При испытаниях устанавливались три таких датчика.

Поперечные деформации измерялись в средней части образца тремя датчиками, выполненными из константановой проволоки $\varnothing 30$ мк, которая наматывалась с определенным усилием по периметру образца и закреплялась на его боковой поверхности в одной точке.

Параллельно проводились измерения обычными тензодатчиками с базой 50 мм, обычными тензодатчиками с базой 50 мм, наклеиваемых на боковую поверхность образца в его средней части (по три датчика в каждом направлении). Коэффициенты вариации при градуировке указанных выше датчиков не превышали $k_v = \pm 0,005$.

Испытаниям предшествовали методиче-

ские эксперименты, имевшие целью отработку методов измерений деформаций указанными выше датчиками, включая учет влияния на результаты измерений торцевых эффектов.

Статические испытания образцов бетона проводили на прессе ПС1000, используя упругий компенсатор, с помощью которого увеличивалась жесткость испытательной системы. Перед испытанием образцы центрировались путем пробных нагружений до напряжений $\sigma_1 = 0,15 R_c$. Испытания проводились в режиме непрерывного возрастания нагрузки на систему образец — упругий компенсатор со средней скоростью деформирования $\epsilon_{\text{сер}} = (k...1,5) \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$.

Кроме указанных выше измерений, при статических испытаниях производилось также измерение времени пробега продольной упругой волны образца вдоль его оси в течение всего процесса деформирования, включая нисходящую ветвь диаграммы $\sigma_1 - \epsilon$. Для этого использовался ультразвуковой метод. Излучатель и приемник ультразвуковых колебаний с частотой $f = 100$ кГц устанавливались в торцах верхнего и нижнего силоизмерительных цилиндров, имевших непосредственный контакт с образцом.

Динамические нагрузки создавались с помощью вертикального копра за счет удара по образцу через прокладку падавшего по направляющим груза массой 500 кг. При этом образец размещался в специально сконструированной установке, обеспечивающей его центровку. Условия динамического нагружения, в том числе масса груза и высота его сброса, определялись с учетом необходимости обеспечения квазистатического режима деформирования образца [8].

Полученные результаты свидетельствуют о достаточной точности теоретического определения условий квазистатичности. Соответствующая средняя величина систематической погрешности измерения напряжений составляла в опытах (2...3) % при $t_0 = 0,2 t_n$, где t_n — время нарастания напряжений до максимального значения. К моменту времени $t = t_0$ напряжения в образце достигли значений $\sigma_1 = (0,2...0,25) R_c$. Из этих данных согласно [8] следует, что при $t > t_0$ в образце по всей его высоте распределение напряжений и деформаций практически равномерное.

Регистрация и обработка измерительной информации производилась с использованием средств автоматизированной системы «Парус» [9], предназначенной для динамических испытаний строительных материалов и конструкций. Система включает в себя две подсистемы — регистрации и обработки. Подсистема регистрации основывалась на использовании в качестве регистраторов магнитографов типа 7003 Брюль и Кьер (Дания), что позволяло регистрировать процессы в диапазоне частот 0...10 кГц с последующей их дискретизацией с шагом от 50 до $1 \cdot 10^{-6}$ с с помощью дискретно-регистрирующих устройств. Подсистема обработки строилась на базе ЭВМ ЕС-1022.

Проведенная оценка суммарной погрешности измерений автоматизированной систе-

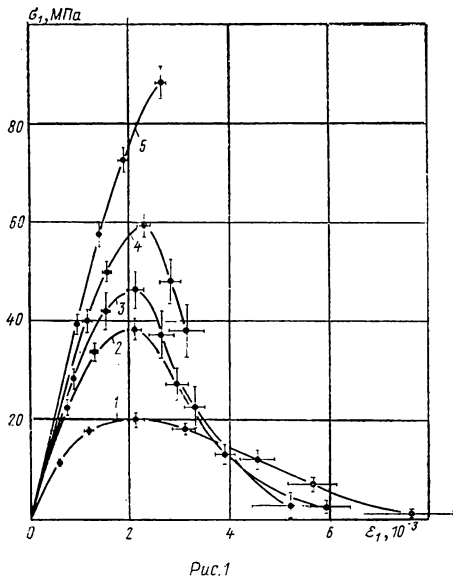


Рис. 1

мы с учетом погрешности первичных преобразователей показала, что при статических и динамических испытаниях она практически одинакова и составляет 3,4%.

2. В таблице приведены основные характеристики испытанных бетонов и максимальные значения параметров, характеризующих процессы деформирования и разрушения этих материалов при статических и динамических нагрузках. Здесь обозначено: E_0 , ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; ϵ_{1R} , ϵ_{2R} — продольные и поперечные деформации, соответствующие максимальной прочности образца R_c ; ϵ_{1m} , ϵ_{2m} — максимальные продольные и поперечные деформации на нисходящей ветви, достигнутые в опытах; t_n , t_c — время нарастания нагрузки на образец до максимального значения и время ее спада до нуля; k_v — коэффициент вариации максимальной прочности образца R_c .

Приведенные в таблице цифры — средние значения соответствующих параметров, полученные в результате статистической обработки результатов испытаний. В скобках указаны относительные доверительные интервалы, определенные с надежностью 0,95.

На рис. 1 представлены данные по статическим диаграммам сжатия $\sigma_1 - \epsilon_1$ испытанных бетонов, кривые 1—5 соответствуют сериям С1...С5 (см. табл.). Максимальные продольные деформации на нисходящей ветви диаграммы $\sigma_1 - \epsilon_1$, достигнутые в опытах, при статическом нагружении составили $\epsilon_{1m} = (5,2 \dots 7,7) \cdot 10^{-3}$ для серий С1...С3. Для серии С4 удалось достигнуть только величины $\epsilon_{1m} = 3,1 \cdot 10^{-3}$ вследствие недостаточной жесткости экспериментальной установки. По этой же причине не удалось получить данных о деформациях на нисходящей ветви для бетона серии С5.

В качестве примера, характеризующего изменение напряжений и деформаций в образцах бетона при динамическом нагруже-

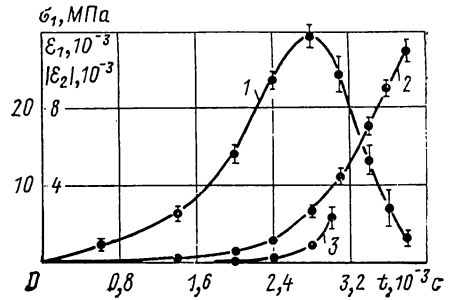


Рис. 2

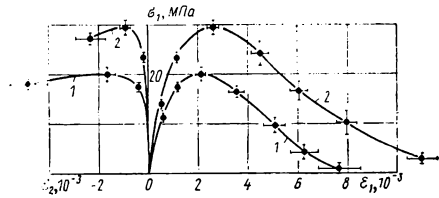


Рис. 3

нии, на рис. 2 представлены кривые: 1— $\sigma_1(t)$, 2— $\epsilon_1(t)$ и 3— $\epsilon_2(t)$, полученные при испытаниях бетона серии С1 со статической прочностью $R_c = 20,0$ МПа. Каждая экспериментальная точка здесь — средняя по результатам 16 реализаций для $\sigma_1(t)$ и 24 реализаций для $\epsilon_1(t)$ и $\epsilon_2(t)$.

Необходимо отметить прежде всего достаточно высокую точность измерений напряжений и деформаций в опытах как при динамических, так и при статических нагрузках. В частности, из данных таблицы и рис. 1, 2 следует, что относительные доверительные интервалы (показаны на рисунках в виде отрезков) для значений R_c , ϵ_{1R} и ϵ_{2R} во всех случаях находились в пределах — $\delta_{R_c} = 0,04 \dots 0,06$, $\delta_{\epsilon_{1R}} = 0,06 \dots 0,08$, $\delta_{\epsilon_{2R}} = 0,10 \dots 0,15$.

На рис. 3 представлены кривые $\sigma_1(\epsilon_1)$, $\sigma_1(\epsilon_2)$, полученные путем исключения времени из представленных выше данных на рис. 2 (кривая 2), а также соответствующие данные статических испытаний для того же бетона (кривая 1). Из рисунка видно, что на максимальную прочность бетона существенное влияние оказывает скорость деформирования. При изменении средней скорости деформирования в опытах от $\epsilon_1 = 1,0 \cdot 10^{-5}$ до $\epsilon_1 = 1,5 \text{ с}^{-1}$ увеличение прочности составило 40...50%. Для бетонов с большей прочностью эта величина несколько ниже, чем с меньшей прочностью (см. табл.).

В опытах с достаточной надежностью была получена зависимость величины ϵ_{1R} от R_c при статическом нагружении в виде (кривая 1 рис. 4):

$$\epsilon_{1R} \cdot 10^5 = \epsilon_{1R}^0 + m R_c, \quad (1)$$

где $m = 0,54$; $\epsilon_{1R}^0 = 198$. Пределы применимости (1) $20,0 \leq R_c \leq 88,1$ (МПа). Необходимо отметить, что с учетом обработки

опубликованных в литературе данных в зависимости (1) несколько изменяются коэффициенты $m=1,01(\pm 0,23)$; $\epsilon_{1R}^0 = 172 (\pm 6)$. Однако полученные авторами результаты находятся в пределах доверительных интервалов для средней кривой, определенных с надежностью 0,95 (кривая 2). Точки на рис. 4, 5 и 6 — результаты обработки экспериментальных данных различных авторов: 1 — Яшин А. В. (1972); 2 — Кроль И. С., Красновский Р. О. (1979); 3 — Жумагулов Е. Ш. (1981); 4—6 — данные авторов: 4 — статика ($\epsilon_1=1,0 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$), 5 — динамика ($\epsilon_1=1,5 \text{ с}^{-1}$), 6 — динамика ($\epsilon_1=\infty$); 7 — Hadley H. M. (1950); 8 — Cowan H. I. (1952); 9 — Hognestad E., Hanson N. W., McHenry D. (1955); 10 — Barnard P. R. (1964); 11 — Rasch C. (1962); 12 — Smith G. M., Young L. E. (1956); 13 — Ahmad S. H., Shah S. P. (1985); 14 — Dilger W. H., Koch R., Kowalczyk R. (1984); 15 — Rüsч H. (1960); 16 — Ahmad S. H.,

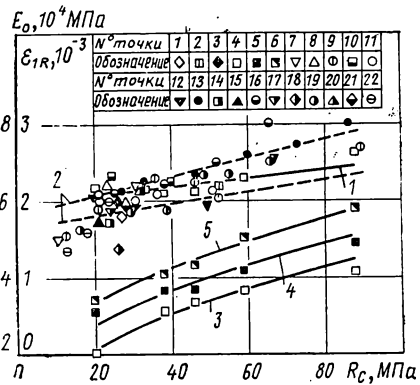


Рис. 4

Shah S. P. (1982); 17 — Tomaszewicz A. (1986); 18 — Brock G. (1962); 19 — Wischers G. (1978); 20 — Kupfer H., Hilsdorf H., Rüsч H. (1969); 21 — Kiendl

№ серии	Статика ($\epsilon_1 \cong 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$)			
	$\frac{R_c, \text{ МПа}}{k_v, \%}$	$\frac{E_0, 10^2 \text{ МПа}}{\nu}$	деформации, 10^{-3}	
			$\frac{\epsilon_{1R}}{ \epsilon_{2R} }$	$\frac{\epsilon_{1m}}{ \epsilon_{2m} }$
C1	$\frac{20,0 (\pm 1,5)}{6,5}$	$\frac{206,7 (\pm 30,6)}{0,160 (\pm 0,037)}$	$\frac{2,12 (\pm 0,18)}{1,65 (\pm 0,34)}$	$\frac{7,66 (\pm 0,87)}{4,81 (\pm 0,74)}$
C2	$\frac{38,2 (\pm 2,2)}{6,8}$	$\frac{309,5 (\pm 36,1)}{0,150 (\pm 0,031)}$	$\frac{2,11 (\pm 0,15)}{0,82 (\pm 0,13)}$	$\frac{5,95 (\pm 0,50)}{1,78 (\pm 0,43)}$
C3	$\frac{46,2 (\pm 3,7)}{7,1}$	$\frac{332,6 (\pm 45,8)}{0,165 (\pm 0,026)}$	$\frac{2,12 (\pm 0,16)}{0,62 (\pm 0,11)}$	$\frac{5,23 (\pm 0,80)}{1,63 (\pm 0,55)}$
C4	$\frac{59,3 (\pm 2,2)}{3,0}$	$\frac{365,5 (\pm 38,3)}{0,153 (\pm 0,025)}$	$\frac{2,30 (\pm 0,13)}{0,82 (\pm 0,10)}$	$\frac{3,15 (\pm 0,34)}{2,19 (\pm 0,59)}$
C5	$\frac{88,1 (\pm 3,2)}{4,0}$	$\frac{413,9 (\pm 41,6)}{0,174 (\pm 0,017)}$	$\frac{2,64 (\pm 0,10)}{1,53 (\pm 0,17)}$	—

Продолжение табл.

№ серии	Динамика ($\epsilon_1 \cong 1,5 \text{ с}^{-1}$)				
	$\frac{R_c, \text{ МПа}}{k_v, \%}$	$\frac{E_0, 10^2 \text{ МПа}}{\nu}$	деформации, 10^{-3}		$\frac{t_n, 10^{-3} \text{ с}}{t_c, 10^{-3} \text{ с}}$
			$\frac{\epsilon_{1R}}{ \epsilon_{2R} }$	$\frac{\epsilon_{1m}}{ \epsilon_{2m} }$	
C1	$\frac{29,5 (\pm 1,5)}{7,4}$	$\frac{311,1 (\pm 61,5)}{0,148 (\pm 0,043)}$	$\frac{2,63 (\pm 0,25)}{0,90 (\pm 0,17)}$	$\frac{10,98 (\pm 0,61)}{2,31 (\pm 0,39)}$	$\frac{2,80 (\pm 0,09)}{1,00 (\pm 0,07)}$
C2	$\frac{57,8 (\pm 1,9)}{6,0}$	$\frac{364,7 (\pm 43,9)}{0,147 (\pm 0,029)}$	$\frac{2,84 (\pm 0,17)}{1,53 (\pm 0,23)}$	$\frac{9,52 (\pm 0,30)}{4,64 (\pm 0,53)}$	$\frac{3,40 (\pm 0,07)}{0,92 (\pm 0,05)}$
C3	$\frac{64,2 (\pm 3,2)}{5,8}$	$\frac{370,4 (\pm 40,4)}{0,156 (\pm 0,032)}$	$\frac{2,84 (\pm 0,17)}{0,93 (\pm 0,27)}$	$\frac{8,50 (\pm 0,42)}{3,81 (\pm 0,99)}$	$\frac{3,40 (\pm 0,13)}{0,86 (\pm 0,06)}$
C4	$\frac{82,9 (\pm 2,3)}{4,0}$	$\frac{421,1 (\pm 59,9)}{0,158 (\pm 0,039)}$	$\frac{2,89 (\pm 0,24)}{0,88 (\pm 0,17)}$	$\frac{8,01 (\pm 0,72)}{2,92 (\pm 0,58)}$	$\frac{2,61 (\pm 0,16)}{0,62 (\pm 0,04)}$
C5	$\frac{122,0 (\pm 2,1)}{3,6}$	$\frac{490,5 (\pm 54,8)}{0,170 (\pm 0,029)}$	$\frac{3,25 (\pm 0,15)}{1,58 (\pm 0,66)}$	$\frac{9,06 (\pm 0,74)}{4,38 (\pm 0,48)}$	$\frac{3,29 (\pm 0,25)}{0,54 (\pm 0,03)}$

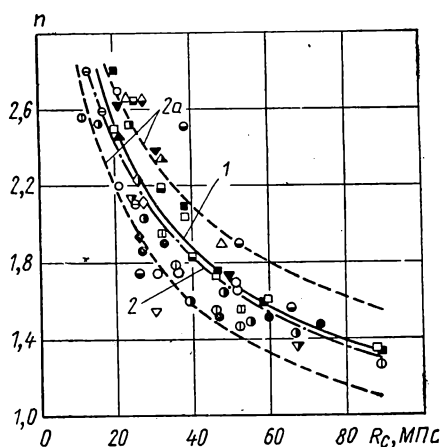


Рис. 5

О. Г., Maldari J. A. (1938); 22 — Ramaley D., McHenry D. (1947).

Указанное выше увеличение скорости деформирования привело к увеличению начального модуля упругости E_0 (кривая 4 рис. 4) примерно на 13%. Модуль упругости, соответствующий предельной динамической диаграмме ($\varepsilon_1 = \infty$) (кривая 5) увеличился по сравнению со статическим (кривая 3) на 30...70%. Изменение коэффициента Пуассона ν при динамическом нагружении находилось в пределах точности эксперимента (см. табл.).

Как видно из рис. 1, 3, при $\varepsilon_1 > \varepsilon_{1R}$ прочность образцов бетона уменьшается постепенно при увеличивающихся деформациях. Важно отметить, что бетон и при динамическом нагружении не разрушается хрупко, а также сохраняет определенную прочность, причем большую, чем при соответствующих статических деформациях. При этом максимальные продольные деформации ε_{1m} , соответствующие близким к нулю напряжениям, составили в опытах $\varepsilon_{1m} = (6,0...11,0) \cdot 10^{-3}$, что значительно превышает деформации, соответствующие максимальной прочности $\varepsilon_{1R} = (2,1...3,3) \cdot 10^{-3}$, которые обычно принимаются в качестве предельных при расчетах конструкций.

Следует отметить, что интенсивность снижения прочности на нисходящей ветви кривой $\sigma_1(\varepsilon_1)$ существенно увеличивается с увеличением R_c как при статических, так и при динамических нагрузках. С ростом прочности R_c соответственно существенно уменьшается предельная деформативность бетонов. Таким образом, можно отметить, что бетоны с большей прочностью обладают большей «хрупкостью».

Процесс деформирования бетонов при $\varepsilon_1 > \varepsilon_{1R}$ характеризуется существенными структурными изменениями, интенсивным развитием трещин и их раскрытием, в результате чего происходит быстрое нарастание поперечных деформаций ε_2 (см. табл., рис. 2, 3) и объемных деформаций разрыхления $\varepsilon = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 < 0$.

Необходимо отметить, что в данных опытах не были замерены максимальные

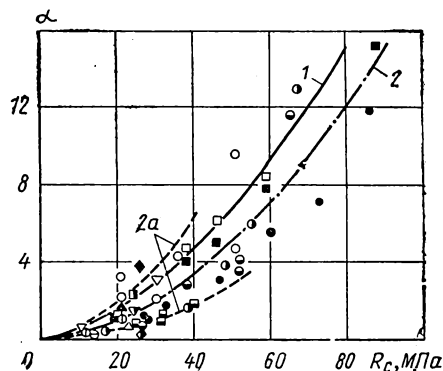


Рис. 6

величины ε_2 , соответствующие деформациям ε_{1m} , вследствие выхода из строя датчиков поперечных деформаций.

На основе обработки экспериментальных результатов было получено, что статические диаграммы одноосного сжатия для бетонов различной прочности с достаточной точностью описываются выражениями

$$\sigma_1 = \begin{cases} R_c [1 - (1 - \varepsilon_1/\varepsilon_{1R})^n], & 0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{1R}; \\ R_c \left[(\varepsilon_1/\varepsilon_{1R}) e^{-(\varepsilon_1/\varepsilon_{1R} - 1)\alpha} \right], & \varepsilon_1 > \varepsilon_{1R}. \end{cases} \quad (2)$$

где величины n и α — экспериментальные коэффициенты, зависящие от прочности бетона R_c .

Результаты определения этих коэффициентов в зависимости от R_c получены в виде

$$n = n_0 R_c^{\nu_1}; \quad \alpha = \alpha_0 R_c^{\nu_2}, \quad (3)$$

где $n_0 = 9,31$ ($\text{МПа}^{-\nu_1}$); $\nu_1 = -0,434$;

$$\alpha_0 = 9,11 \cdot 10^{-3}$$
 ($\text{МПа}^{-\nu_2}$); $\nu_2 = 1,69$.

Соответствующие экспериментальные данные авторов, а также результаты обработки авторами экспериментальных данных, опубликованных ранее в литературе, представлены на рис. 5, 6. Последние результаты также достаточно хорошо описываются зависимостями (3) с коэффициентами

$$n_0 = 8,56 (\pm 0,20) (\text{МПа}^{-\nu_1});$$

$$\nu_1 = -0,419 (\pm 0,044);$$

$$\alpha_0 = 3,70 \begin{pmatrix} +0,50 \\ -0,44 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} (\text{МПа}^{-\nu_2});$$

$$\nu_2 = 1,84 (\pm 0,23).$$

При этом видно, что различие соответствующих обобщенных кривых 2 и кривых 1, полученных авторами, находится в пределах точности экспериментов. На рис. 5 и 6 кривые 2а соответствуют доверительным интер-

валам (определены с надежностью 0,95) для обобщенных кривых.

Интересно отметить, что величины n и α слабо зависят от скорости деформирования. Это следует из того, что точки b (рис. 5, 6), полученные при динамических испытаниях, в пределах точности эксперимента лежат на тех же кривых, что и точки, соответствующие статическим испытаниям.

Скорость деформирования при $\epsilon_{1n} < \epsilon_1 < \epsilon_{1m}$ изменялась мало и находилась в пределах $\epsilon_1 = 9 \dots 12 \text{ с}^{-1}$.

Полученные экспериментальные результаты могут быть использованы при расчете железобетонных конструкций на действие статических нагрузок методами, основанными на использовании реальных диаграмм сжатия бетона $\sigma_1 - \epsilon_1$. Кроме того, их можно применять для разработки динамических методов расчета, связанных с необходимостью формулировки математических моделей бетона, учитывающих влияние скорости деформирования на его напряженно-деформированное состояние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпенко Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами. — М.: Стройиздат, 1976. — 208 с.
2. Рыков Г. В., Голда Ю. Л., Латушкин С. Н. О расчете железобетонных цилиндрических оболочек на действие динамических нагрузок // Строит. механика и расчет сооружений. — 1986. — № 3. — С. 67—69.
3. Rasch C. Spannungs—Dehnungs—Linien des Betons und Spannungsverteilung in der Begedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit // Deutschen Ausschuss für Stahlbeton. — Berlin, 1962. — Heft 154. — P. 72.
4. Wischers G. Aufnahme und Auswirkungen von Druckbeanspruchungen // Beton-technische Berichte. — Düsseldorf, 1978. — P. 31—56.
5. Баженов Ю. М. Бетон при динамическом нагружении. — М.: Стройиздат, 1970. — 272 с.
6. Suaris W., Shan S. P. Mechanical Properties of Materials Subjected to Impact // Introductory Report, RILEM/IABSE/CEB/IASS Symposium on Concrete Structures Under Impact and Impulsive Loading. — Berlin (West), 1982. — P. 33—62.
7. Гольке В. Физическое исследование высокоскоростного деформирования металлов // Физика быстропотекающих процессов. — М.: Мир. — 1971. — Т. 11. — С. 77—100.
8. Рыков Г. В., Скобеев А. М. Измерение напряжений в грунтах при кратковременных нагрузках. — М.: Наука, 1978. — 167 с.
9. Шейнин А. Н., Веркиенко Ю. В., Новгородов А. Ф. Система автоматизации территориально разоб- щенных экспериментов // Материалы VII Всесоюзной школы по автоматизации научных исследований. — М., 1974. — С. 575—582.

В ПОМОЩЬ РАБОТНИКАМ ПРОЕКТНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

УДК 624.042.953:621.642.3.04

М. У. УШИЦКИЙ, канд. техн. наук (ЦНИИпромзернопроект, Москва)

О взаимосвязи физико-механических параметров зерна и оценок его давления на стены силоса

Определению вероятностных характеристик давления статистически неоднородной сыпучей среды на стены силосов посвящены работы [1—5]. В [1] в предположении о статистической независимости удельного веса γ , коэффициентов внешнего f и внутреннего трения $tg\varphi$ построены оценки изменчивости давления и получены соотношения для его стандартных отклонений s_p в зависимости от стандартов s_γ , s_f , s_φ . Средние значения давления приняты по Янсену. В [2, 3] с использованием корреляционной теории методом малого параметра исследованы случайные флуктуации давления на стены силоса с коэффициентом бокового распора k , случайным образом меняющимся по высоте засыпки. При этом γ и f предлагались неслучайными и равными нормативным значениям, а средние значения давления также оценивались по Янсену. В этих работах существенным образом использованы свойство статистической независимости физико-механических параметров среды γ , f , φ друг от друга и нормальность закона их распределения.

Результаты измерений [4] параметров γ , f и φ зерна пшеницы различных районов

страны и импортного зерна показали, что эту сыпучую среду отличает высокая территориально-сортовая изменчивость свойств.

На основе линеаризованного решения [1] в [4] построена унифицированная нагрузочная функция давления сыпучей среды на стены силоса и оценены вероятностные характеристики давления различных зернопроизводящих зон и страны в целом. По данным [4] и [5] методом Монте-Карло определены математическое ожидание давления m_p и среднеквадратическое отклонение s_p давления на стены силоса статистически неоднородной сыпучей среды с некоррелированными параметрами γ, f, φ для случая нормального закона их распределения и для закона распределения, аппроксимируемого рядом Грамма—Шарлье [6].

Целью данной работы является анализ влияния корреляционной взаимосвязи основных физико-механических параметров γ, f и φ зерновой сыпучей среды на изменение вероятностных характеристик ее давления на стены силоса в предположении о наличии территориально-сортовой изменчивости параметров среды.

В качестве детерминированного аналога воспользуемся решением Янсена с сохранением всех его расчетных предпосылок [7]. Случайные параметры сыпучей среды γ, f и φ будем полагать обладающими свойством территориально-сортовой изменчивости [4], так что вероятностные характеристики выборки определяются принятой схемой зонирования и не изменяются по высоте засыпки.

Для выборки значений γ, f и φ [5] были вычислены коэффициенты корреляции $K_{\gamma f}, K_{\gamma \varphi}, K_{f \varphi}$. Посредством критерия « χ^2 » [6] оценена их взаимосвязь. Установлено, что между параметрами γ, f и φ имеется статистическая взаимосвязь, причем наиболее значима корреляция коэффициентов внешнего и внутреннего трения, а также удельного веса и внешнего трения. Сравнение нормированных корреляционных матриц

$$K_{\gamma f \varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -0,032 & -0,450 \\ -0,032 & 1 & 0,367 \\ -0,450 & 0,367 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_{\gamma \varphi f_{ст}} = \begin{pmatrix} 1 & -0,032 & -0,169 \\ -0,032 & 1 & 0,239 \\ -0,169 & 0,239 & 1 \end{pmatrix}$$

показывает, что эта корреляция сказывается в большей степени на коэффициентах трения зерна по бетону, чем по стали. Поэтому в дальнейшем будем полагать γ, f, φ системой взаимосвязанных случайных величин. Их распределение, как показано в [5], отлично от нормального. Однако сопоставление вероятностных характеристик давления, вычисленных в [5], для распределений γ, f и φ , аппроксимируемых нормальным законом и трехчленным приближением ряда Грамма—Шарлье, показало, что расчетные величины давлений различаются не более чем на 3,3%. Таким образом, хотя отличие случайных величин γ, f и φ от нормального закона и существенно, при оценке вероятностных характеристик давления его можно не учитывать. Это объясняется сглаживающим характером многократного интегрирования, выполняемого в соответствии с процедурой метода Монте-Карло. Поэтому для дальнейшего обобщения [5] целесообразно рассмотреть случай нормально распределенных и коррелированных случайных величин γ, f, φ .

Плотность нормально распределенных коррелированных случайных величин γ, f, φ имеет вид

$$\rho(\gamma, f, \varphi) = [1/(2\pi)^{3/2} \Delta] \exp \left\{ -(1/\Delta) [A_{11}(\gamma - m_\gamma)^2 + A_{22}(\varphi - m_\varphi)^2 + A_{33}(f - m_f)^2 + 2A_{12}(\gamma - m_\gamma)(\varphi - m_\varphi) + 2A_{13}(\gamma - m_\gamma)(f - m_f) + 2A_{23}(\varphi - m_\varphi)(f - m_f)] \right\}, \quad (1)$$

где $\Delta = \sigma_\gamma^2 \sigma_\varphi^2 \sigma_f^2 + 2K_{\gamma \varphi} K_{\gamma f} K_{\varphi f} - \sigma_\gamma^2 K_{\varphi f}^2 - \sigma_\varphi^2 K_{\gamma f}^2 - \sigma_f^2 K_{\gamma \varphi}^2$, $A_{11} = \sigma_\varphi^2 \sigma_f^2 - K_{\varphi f}^2$, $A_{12} = K_{\varphi f} K_{\gamma f} - K_{\gamma \varphi} \sigma_f^2$, $A_{13} = K_{\gamma \varphi} K_{\varphi f} - \sigma_\varphi^2 K_{\gamma f}$, $A_{22} = \sigma_\gamma^2 \sigma_f^2 - K_{\gamma f}^2$, $A_{23} = K_{\gamma \varphi} K_{\varphi f} - \sigma_\gamma^2 K_{\varphi f}$, $A_{33} = \sigma_\gamma^2 \sigma_\varphi^2 - K_{\gamma \varphi}^2$.

Вероятностные характеристики давления m_p и D_p (его математическое ожидание и дисперсия) могут быть вычислены следующим образом:

$$m_p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\gamma, f, \varphi) \rho(\gamma, f, \varphi) d\gamma df d\varphi, \quad (2)$$

$$D_p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_n^2(\gamma, f, \varphi) \rho(\gamma, f, \varphi) d\gamma df d\varphi - m_p^2, \quad (3)$$

где $P_n = (\gamma r/f)[1 - \exp(-kfz/r)]$ —боковое давление по Янсону; z —вертикальная координата засыпки; r —гидравлический радиус силоса, а k приближенно аппроксимируется предельным соотношением [7] $k = \text{tg}^2(45^\circ - \varphi/2)$.

Интегралы (2) и (3) с плотностью вероятности (1), аппроксимируемой по гисто-

Т а б л и ц а 1

z, м	γ, φ, f — нормальный закон распределения, независим.			γ, φ, f — закон распределения, отличен от нормального, независим.			γ, φ, f — нормальный закон распределения, коррелирован.		
	m_p 10^{-1} , МПа	σ_p 10^{-1} , МПа	$m_p + 2\sigma_p$ 10^{-1} , МПа	m_p 10^{-1} , МПа	σ_p 10^{-1} , МПа	$m_p + 2\sigma_p$ 10^{-1} , МПа	m_p 10^{-1} , МПа	σ_p 10^{-1} , МПа	$m_p + 2\sigma_p$ 10^{-1} , МПа
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,043	0,009	0,061	0,043	0,009	0,061	0,042	0,011	0,064
4	0,082	0,014	0,110	0,083	0,013	0,109	0,081	0,019	0,119
6	0,120	0,017	0,154	0,120	0,016	0,152	0,118	0,023	0,164
8	0,146	0,033	0,212	0,149	0,032	0,213	0,151	0,032	0,215
10	0,179	0,037	0,253	0,180	0,036	0,252	0,181	0,037	0,255

Т а б л и ц а 2

z, м	r, м			
	1,5	3,0	4,5	6,0
2	0,753	0,715	0,725	0,741
4	0,769	0,745	0,743	0,725
6	0,771	0,758	0,727	0,710
8	0,801	0,740	0,746	0,737
10	0,833	0,771	0,747	0,740

граммам, приведенным в [5], вычислялись на ЭВМ методом Монте-Карло. Принятое число точек суммирования $N=80000$ обеспечивало вычисление дисперсии D_p во всех случаях с точностью до 1%.

В табл. 1 приведены результаты определения вероятностных характеристик давления зерна пшеницы $m_p(z)$ и $\sigma_p = \sqrt{D_p(z)}$ на стены железобетонного силоса $r=6$ м. Там же для сравнения приведены результаты определения m_p и σ_p в случае статистически независимых параметров γ, f, ϕ при нормальном законе их распределения и законе распределения, аппроксимируемом рядом Грамма — Шарлье [6], полученных в [5] (аналогичные расчеты были выполнены для силосов радиусом 1,5 м, 3 м, 4,5 м из бетона и стали). Зависимости m_p и $(m_p+2\sigma_p)$ от z близки к приведенным в [5], а коэффициент надежности по нагрузке для всех рассчитанных силосов из железобетона находится в интервале 1,33...1,48, превышая соответствующее значение по СНиП 2.10.05—85, равное 1,3.

В табл. 2 приведено отношение величин $(m_p+2\sigma_p)$ к соответствующим расчетным значениям $P_n(\gamma_n, f_n, \phi_n)$ по СНиП 2.10.05—85, вычисленным для нормативных значений $\gamma_n=800$ кг/м³, $k_n=0,44$; $f_n=0,4$. Сравнение величин P_n и $(m_p+2\sigma_p)$ показывает, что для железобетонных силосов расчетные величины P_n на 20...41% превышают величины $(m_p+2\sigma_p)$, причем учет корреляционной взаимосвязи параметров γ, f, ϕ приводит к относительно малому изменению расхождения P_n и $(m_p+2\sigma_p)$ по сравнению с [5]. Следует отметить, что это расхождение возрастает с увеличением радиуса силоса и снижается с увеличением глубины засыпки.

Учет корреляционной взаимосвязи параметров γ, f и ϕ так же, как и учет отличия от нормального закона их распределения, приводит к увеличению вероятностных характеристик давления m_p на 1...2,5%, а σ_p на 4...38,7%. Такое увеличение σ_p , однако, изменяет расчетные нагрузки $(m_p+2\sigma_p)$ в пределах 1,5...8,6%.

Таким образом, при определении вероятностных характеристик нормативных давлений фактором коррелированности параметров γ, f, ϕ можно пренебречь, считая эти параметры нормально распределенными статистически независимыми величинами. В задачах же, связанных с оценкой флуктуаций давления (в первую очередь при определении расчетных значений давления и коэффициента надежности по нагрузке), фактор коррелированности указанных величин является существенным и его следует учитывать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ушицкий М. У. Оценка изменчивости горизонтального давления сыпучего тела на стенки силоса // Повышение полнотности и технико-экономических показателей элеваторов и зерноперерабатывающих предприятий. — М.: Стройиздат, 1982. — С. 3—7.
- Граник В. Т. О вероятностной теории давлений сыпучего заполнителя на стены силосной оболочки // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1984. — № 2. — С. 35—42.
- Граник В. Т. О вероятностной модификации теории сыпучей среды // Прикладная механика. — 1986. — Т. 22. — № 3. — С. 84—91.
- Ушицкий М. У., Халтурина Т. И. Оценка давления статистически неоднородной сыпучей среды на стены силосных емкостей // Исследование по расчету строительных конструкций и надежности сооружений / Под ред. Г. А. Геннева и В. Д. Райзера. — М.: Стройиздат, 1987. — С. 92—98.
- Ушицкий М. У., Янков В. Ю. О давлении статистически неоднородной сыпучей среды на стены силоса // Стр. механика и расчет сооружений. — 1987. — № 4. — С. 59—62.
- Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984. — 248 с.
- Клейн Г. К. Строительная механика сыпучих тел. — М.: Стройиздат, 1977. — 256 с.

Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций

(В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко. — Киев: Будівельник, 1986. — 176 с.)

Прикладные задачи современной техники во многих случаях приводят к изучению напряженно-деформированного состояния конструкций, имеющих слоистую структуру по толщине. Такие конструкции достаточно широко применяются в машиностроении, судостроении, авиационной технике. Последние исследования указывают на эффективность применения слоистых конструкций и в строительстве, в частности, на сокращение трудозатрат при их изготовлении и монтаже по сравнению с традиционными железобетонными и металлическими конструкциями.

Исследование напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций в рамках классической теории, основанной на гипотезах Кирхгафора — Лява, может привести к существенным погрешностям из-за наличия слоев, оказывающих слабое сопротивление при трансверсальном сдвиге и обжатии. В связи с этим в последнее время разработаны различные варианты теорий, учитывающие те или иные уточняющие факторы и обладающие различной степенью применимости.

Заслугой авторов рецензируемой книги является то, что им удалось построить достаточно универсальную прикладную теорию расчета такого класса конструкций, отражающую реальный характер их деформирования и ориентированную на использование в широкой инженерной практике.

В книге приведено построение линейной теории расчета слоистых конструкций и методов ее реализации (главы 1, 2), которые положены в основу дальнейшего обобщения на случай решения физически нелинейных задач (главы 3, 4). В главе 5 приведены примеры расчета реальных конструкций.

Следует особо подчеркнуть практическую направленность книги и, в частности, подробно разработанную схему реализации предлагаемой теории на основе метода конечных элементов, названную авторами дискретно-континуальной схемой МКЭ.

Все вышеотмеченное говорит о том, что книга, безусловно, полезна инженерам-конструкторам и расчетчикам проектных организаций и научно-исследовательских институтов.

В. А. СМЕРНОВ

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Павел Филаретович Дроздов

Исполнилось 75 лет со дня рождения и 55 лет инженерной, научно-исследовательской, педагогической и общественной деятельности доктора технических наук, профессора, известного специалиста в области строительных конструкций и расчета сооружений Дроздова Павла Филаретовича.

В нашей стране и за рубежом П. Ф. Дроздов широко известен своими исследованиями различных систем многоэтажных зданий. Им разработан общий метод расчета пространственно работающих несущих систем зданий большой этажности и их элементов с учетом физической и геометрической нелинейности, который играет определяющую роль в современных исследованиях и проектировании. Реализованный в ряде программ для ЭВМ этот метод получил внедрение во многих проектных, исследовательских и учебных институтах. Отдельные направления общего метода успешно развива-



ются в работах его многочисленных учеников и последователей.

Будучи последние 30 лет профессором кафедры железобетонных конструкций МИСИ им. В. В. Куйбышева П. Ф. Дроздов ведет большую педагогическую работу, передавая молодому поколению свой богатый практический опыт и глубокие теоретические знания. Под его руководством выполнили дипломные проекты более 160 студентов, защитили кандидатские диссертации 45 аспирантов. Много внимания он уделяет консультированию и чтению лекций в ведущих проектных и исследовательских организациях и вузах по проблемам проектирования высоких зданий. П. Ф. Дроздов является автором 13 книг, им опубликовано 110 статей, он автор 5 изобретений.

П. Ф. Дроздов ведет активную общественную работу, являясь членом ряда ученых советов по защите докторских и кандидатских диссертаций, членом НТС и членом пленума научно-координационного совета Госстроя СССР по бетону и железобетону, председателем постоянной комиссии по железобетонным конструкциям зданий большой этажности, членом секции по строительной механике железобетона научного совета АН СССР по строительной механике и

теории конструктивных форм, членом совета ЦНИИЭПЖилища, членом делегации СССР в рабочих группах постоянной комиссии СЭВ по строительству, членом секции железобетонных конструкций и жилищного строительства центрального правления ВНТО Стройиндустрии, членом редколлегии журнала «Строительная механика и расчет сооружений» и «Интернационального журнала по строительным конструкциям», издаваемого в Индии, сотрудничает как автор и рецензент в журналах «Бетон и железобетон», «Жилищное строительство». «Известия вузов — строительство и архитектура».

Большая и плодотворная инженерная, научная, педагогическая и общественная деятельность П. Ф. Дроздова отмечена правительственными наградами, благодарностями, грамотами, почетными знаками.

Глубокий профессионализм, широкая эрудиция, высокая требовательность к себе, незаурядное педагогическое дарование, целеустремленность в работенискали Павлу Филаретовичу Дроздову уважение и признательность.

Поздравляем Павла Филаретовича со знаменательным юбилеем, желаем ему здоровья и новых творческих успехов.

ЯРМАРКА «НТД-88»

В конце августа на территории объединенных павильонов «Строительство» ВДНХ СССР начала работу ярмарка.

Организатор ярмарки — Всесоюзный научно-исследовательский институт информации по строительству и архитектуре Госстроя СССР (ВНИИС Госстроя СССР) — предлагает организациям и предприятиям строительного комплекса наиболее эффективные разработки отраслевой науки.

На ярмарке можно приобрести по договорным ценам готовые разработки, заказать нужную продукцию, заключить договора на выполнение научно-технических и проектно-конструкторских работ.

Каждый экспонат ярмарки — оригинальное научное решение. Ярмарка представляет широкие возможности для заключения взаимовыгодных контрактов.

Адрес ярмарки: Москва, Фрунзенская наб., 30.

Телефоны для справок: 251-17-95; 251-17-83; 251-52-28.

Содержание

На пути революционного обновления советского общества	1
Вопросы оптимального проектирования	
Калинин И. Н. Исследование и оптимальное проектирование структурной плиты перекрытия выставочного павильона	3
Расчеты на прочность	
Петросян Л. Г. Об одной модели упругого основания	7
Краснощекоев Ю. В., Шилов Е. В. Расчет сборных железобетонных настилов с замкнутолинейными швами на поперечную нагрузку	11
Рабинович Р. И. К расчету двухслойных балок с упорами	15
Карпенко Н. И., Мухамедиев Т. А., Розенвассер Г. Р., Шварц Л. М. Расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом режимов нагружения	17
Зязиц А. М. Прочность бетонов при простом многоосном нагружении	22
Смирнов С. Б. Метод определения предельных нагрузок для плосконапряженных и плоскодеформированных систем	26
Расчеты на устойчивость	
Кан С. Н., Хренова А. П., Иванов А. И. Устойчивость цилиндрических оболочек с криволинейными образующими при радиальном давлении	32
Дривинг А. Я. Об устойчивости плоской формы изгиба статически неопределимых тонкостенных балок	34
Динамические расчеты	
Пшеничнов Г. И., Скориков А. В. Решение задачи о свободных колебаниях пологой сферической оболочки методом декомпозиции	37
Бешенков С. Н., Карякин Г. А. Нестационарное взаимодействие упругих тел с равномодульной средой	41
Никифоров В. Ф. О динамическом расчете комбинированных конструкций	43
Расчеты на сейсмические воздействия	
Мамаева Г. В. Динамические характеристики каркасных зданий	46
Экспериментальные исследования	
Куранов Б. А., Муратов В. М., Турбаивский А. Т. Устойчивость подкрепленных конических оболочек с технологическими несовершенствами формы	51
Рыков Г. В., Обледов В. П., Майоров Е. Ю., Абрамкина В. Т. Экспериментальные исследования процессов деформирования и разрушения бетонов при интенсивных динамических нагрузках	54
В помощь работникам проектных организаций	
Ущицкий М. У. О взаимосвязи физико-механических параметров зерна и оценок его давления на стены силоса	59
Критика и библиография	
Смирнов В. А. Линейные и нелнейные задачи расчета слоистых конструкций	62
Наши юбиляры	
Павел Филаретович Дроздов	62
Информация	

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А. В. АЛЕКСАНДРОВ, В. В. БОЛОТИН, А. В. ГЕММЕРЛИНГ, Г. А. ГЕНИЕВ, П. Ф. ДРОЗДОВ, Ю. А. ДЫХОВИЧНЫЙ, М. И. ЕРХОВ, Б. Г. КОРЕНЕВ, Б. Я. ЛАЩЕНИКОВ, С. В. ПОЛЯКОВ, Л. М. ПУХОНТО, Н. Н. СКЛАДНЕВ (главный редактор), О. И. ТОМСОН, А. А. ЧИРАС.

Адрес редакции: 109389, Москва, Ж-389, 2-я Институтская, д. 6, тел. 174-86-47

Технический редактор Н. Н. Удалова

Корректор Г. С. Беляева

Сдано в наб. 08.07.88 Подп. в печать 20.11.88, Т-18159 Формат 70×108¹/₁₆. Бум. книжно-журнальная Печать высокая. Усл. печ. л. 5,6. Усл. кр.-отт. 6,13. Уч.-изд. л. 7,4. Тираж 3961 экз. Зак. 256. Цена 90 коп.

Подольский филиал ПО «Периодика» Союзполиграфпрома Госкомиздата СССР
142110, Подольск, ул. Кирова, 25

Публикуем рефераты докладов, прочитанных на семинаре по проблемам устойчивости конструкций при ЦНИИСК им. Кучеренко Госстроя СССР под руководством проф. Р. Р. Матевосяна.

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАМНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ВСЕГО СПЕКТРА ПОСЛЕДНИХ ЧЛЕНОВ РЯДОВ УСТОЙЧИВОСТИ. А. Н. Раевский (ИСИ, Пенза).

Излагается методика качественной проверки устойчивости рамных систем, на основе анализа всего спектра последних членов рядов устойчивости. Они получаются путем l -кратного преобразования определителя матрицы реакций всей системы к треугольной форме. Последний член каждого из l рядов устойчивости означает реакцию в заданной системе с единственной дополнительной связью (нумерация которой поочередно меняется) от единичных перемещений. Степень податливости узлов рамы повороту или линейному перемещению определяется производными от рассматриваемых реакций по переменным продольным силам. Анализируются эти реакции и производные для различных систем при изменении нагрузки до первого критического значения и даются рекомендации по эффективному усилению отдельных частей рамы.

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ ДЛИН ЭЛЕМЕНТОВ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ НА НОВОЙ ОСНОВЕ (С УЧЕТОМ ХАРАКТЕРА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМ ОТ ДЕЙСТВИЯ НАГРУЗОК). А. Я. Дривинг (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва).

При расчете сжатых-изогнутых элементов стальных рам согласно СНиП II-23-81 определяется предельная сжимающая сила, воспринимаемая эталонным объектом — шарнирно-опертым внецентренно сжатым стержнем с заданной диаграммой $\sigma - \epsilon$. Критерием перехода к эталонному объекту является равенство расчетной длины рамного стержня длине эталонного объекта. Тем самым предполагается, что при любых активных нагрузках стержневая система всегда деформируется по первой собственной форме. На самом деле форма деформирования, как правило, является «смешанной», причем, чем большую долю составляет нагрузки, стимулирующие высшие собственные формы, тем меньше деформативность системы и выше предельная точка на кривой равновесных состояний. Поэтому предлагается новый критерий перехода от рамного стержня к эталонному: равенство расчетному сопротивлению максимальных краевых напряжений в рамном и эталонном стержнях при одном и том же значении продольной силы. Разработан алгоритм определения расчетных длин «смешанной» формы деформирования сжатых-изогнутых элементов одноэтажных симметричных рам. Установлено, что предельная нагрузка, определенная по предлагаемой методике, всегда ниже, чем по результатам эксперимента или численного решения.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА БАЛОК ЛОМАНОГО ОЧЕРТАНИЯ. В. А. Косиченко, (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва).

Разработан модифицированный аппарат сцидальной формы метода перемещений для решения задач устойчивости плоской формы изгиба балок ломаного очертания. Получены формулы реактивных усилий для элементов основной системы. Рассмотрены три задачи устойчивости балки: с одним переломом осн. с одним подкреп-

лением из плоскости и без подкрепления, а также две задачи устойчивости плоской формы изгиба защемленной консоли ломаного очертания.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СПИРАЛЬНО-НАВИВНОГО ТИПА. А. И. Канцыбко (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва).

Предлагается новый метод расчета цилиндрических круговых оболочек спирально-навивного типа на устойчивость с учетом начальных несовершенств на осесимметричную нагрузку. На основе нелинейных соотношений для деформаций получен смешанный функционал, вторая полная вариация которого (квадратичный функционал над пространством вариаций перемещений и напряжений) используется для определения критических нагрузок на основе качественной теории бифуркаций равновесий. Докритическое равновесное состояние при осесимметричном деформировании определяется методом перемещений, расчетная схема принята в виде составной системы из цилиндрических оболочек, соединенных ребрами фальцевого типа. Разработан алгоритм и программа на языке PL/I ОСЕС. выполнены расчеты конкретных силосов для хранения зерна.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ НЕОСОБЕННЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ. Г. А. Мануйлов, К. А. Жуков (МИИТ, Москва).

Предлагается новый численный алгоритм определения бифуркационной нагрузки для идеальной системы с верхней критической для системы с начальными несовершенствами в геометрически нелинейных задачах устойчивости упругих систем. Основная особенность алгоритма — величина шага по нагрузке — вычисляется в зависимости от близости системы к критическому состоянию таким образом, чтобы этот шаг оказался меньше «расстояния» от текущего значения нагрузки до ее критической величины. Это исключает возможность пропуска бифуркационной или верхней критической нагрузки. Приводятся примеры исследования устойчивости купольных, стержневых и некоторых других оболочечных конструкций.

ГАЛОПИРОВАНИЕ ПРОВОДОВ В ВЕТРОВОМ ПОТОКЕ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ ПО ВЫСОТЕ. УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ. В. Б. Зылев (МИИТ, Москва).

Изложен численный метод решения задач о колебаниях нитевых систем в условиях больших перемещений. Нить заменяется шарнирно-стержневым многозвенником, массы сосредоточиваются в шарнирах. Интегрирование уравнений движения осуществляется численно на ЭВМ по явной схеме с использованием метода Адамса. Приведено несколько решений, в которых получены устойчивые колебания галопирования с большими амплитудами. Выдвинуто положение, что перемещенность скорости с высотой является основной причиной колебаний галопирования. Рассмотрены другие задачи нелинейных колебаний. В частности показано, что плоская форма колебаний струны является неустойчивой. Приведены результаты выполненных лабораторных экспериментов, которые подтверждают расчетные предположения.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ КОКСОВЫХ БАТАРЕЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИЛОВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ. Ю. Н. Яровой (ХИСИ, Харьков).

Предложен расчет обогривательного простенка коксовой печи из огнеупорного материала (динас) на заданную долговечность (20 лет) в условиях циклических силовых и температурных воздействий с частотой, обратной периоду коксования (14 ч), в котором в качестве характеристики прочности материала использованы оценки предела ограниченной выносливости, полученные экспериментальным путем с использованием обобщенных диаграмм ползучести.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ЧАСТОТНЫМ СПЕКТРОМ СОСТАВНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ. Г. А. Мануйлов (МИИТ, Москва).

*Рассматриваются сложные стержневые и пластинчатые системы с бесконечно большим числом степеней свободы, составленные из фрагментов, каждый из которых объединяет динамически однородные элементы с одинаковым спектром парциальных собственных значений (в составе основной системы метода сил или перемещений). Исследуется влияние топологической структуры связей между элементами фрагмента, их количественного состава, а также размерности используемого фактора програнс.ва обобщенных координат на глобальное распределение (как для фрагмента, так и для составной системы, в которую он включен) собственных значений внутри и на границах некоторых интервалов, порождаемых точками спектра соответствующей основной системы. Основные результаты формируются при помощи понятий «спектральных вкладов» фрагмента (собственного, дополнительного, «скрытого» и максимально возможного), которые выражаются через его структурные параметры. Даются примеры анализа и управления частотным спектром для некоторых стержневых и пластинчатых систем.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН. А. А. Евстратов, С. В. Дядич (Шахтинский филиал НИИ, Шахты).

В результате исследования напряженно-деформированного состояния упругопластических пластин, работающих в условиях стенки двутавровых колонн и балок, получены зависимости обобщенной деформации от параметра нагрузки. Установлены значения предельной нагрузки, зависящие от гибкости, соотношения сторон и начального прогиба пластинки. Для пластины высокой гибкости получены точки, в которых наблюдается смена форм равновесия. Разработана методика решения задачи вблизи бифуркационных точек, дающая гарантированную сходимость.

О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ДВУТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ, ИМЕЮЩИХ ЛОКАЛЬНУЮ ПОГИБЬ И ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ ОСЕВОГО СЖАТИЯ. С. Ю. Фалко (УкрНИИпроект-стальконструкция, Киев).

Предлагается модель тонкостенного стержня, имеющего локальную погибь, подверженного действию как центрального, так и внецентренного сжатия. Модель состоит из пластинчатой системы, описывающей деформирование выпучившегося участка, и жестких участков, моделирующих пропорные части стержня. Деформирование каждой из прямоугольных пластин стенки и поясов, представляющих выпученный участок стержня, описывается геометрически нелинейными уравнениями Кармана и соотношениями теории пластического течения Прандтля-Рейсса для идеального упруго-пластического материала.

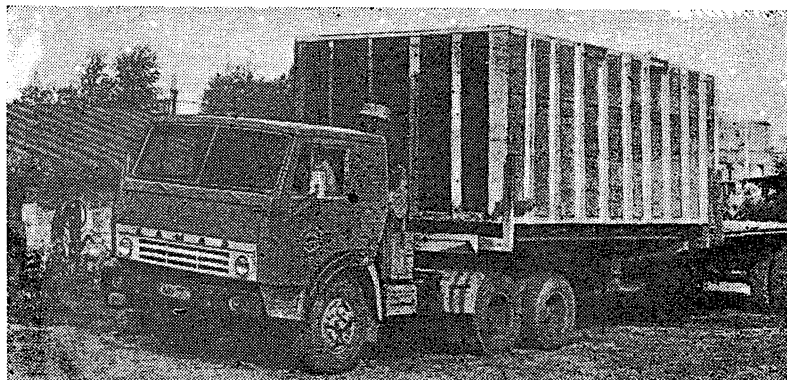
Проведено исследование несущей способности тонкостенных стержней в зависимости от гибкости стенки и поясов, величины начальной погнги и эксцентриситета нагрузки. Результаты представлены в виде простых соотношений, связывающих безразмерный параметр нагрузки с указанными параметрами стержня.

Вниманию подписчиков!

Редакция журнала «Строительная механика и расчет сооружений» сообщает о введении новых рубрик «Консультации проектировщикам», «В порядке обсуждения», «Программное обеспечение инженерных расчетов» и о расширении публикаций в рубрике «Из опыта работы проектных организаций».

ПРОСИМ СВОЕВРЕМЕННО ОФОРМИТЬ ПОДПИСКУ НА ЖУРНАЛ НА 1989 ГОД. ПЕРИОДИЧНОСТЬ — 6 НОМЕРОВ В ГОД. СТОИМОСТЬ ПОДПИСКИ НА ГОД — 5 РУБ. 40 КОП. ИНДЕКС 70884. ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ В АГЕНТСТВАХ «СОЮЗПЕЧАТИ».

УНИФИЦИРОВАННЫЙ МОДУЛЬ-БЛОК ПОЛНОЙ ЗАВОДСКОЙ ГОТОВНОСТИ



Предназначен для строительства комплектно-блочным методом станции биологической очистки стоковых вод производительностью от 50 до 700 м³ в сутки и более, резервуаров для хранения различных жидкостей объемом от 15 до 500 м³, ванн для плавания в детсадах.

Состоит из трех плоских асбестоцементных листов, склеенных и покрытых гидроизоляционным составом, и металлического каркаса.

Размер ванны 6×3 (3,6)×0,7—3 м, масса 2,2—6,8 т.

Экономический эффект по сравнению с типовым проектом 902-2-223 позволяет снизить:

стоимость на 19,27 тыс. руб.,

трудозатраты на 364,11 чел.-дн.,

расход металла на 4,8 т,

расход цемента на 20 т.

Использованы изобретения по а. с. 789655, БИ № 47,1980, 947324, БИ № 28, 1982

Разработчики: ЦНИИСК им. Кучеренко Госстроя СССР, КТИ Минюгстроя СССР, комбинат «Инжсельстрой», ЦНИИЭП инженерного оборудования

За справками обращаться: 109389, Москва, 2-я Институтская ул., д. 6, тел. 174-89-66. Потапов В. К.