

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-

ТЕХНИЧЕСКИЙ

ЖУРНАЛ

ГОСУДАРСТВЕННОГО

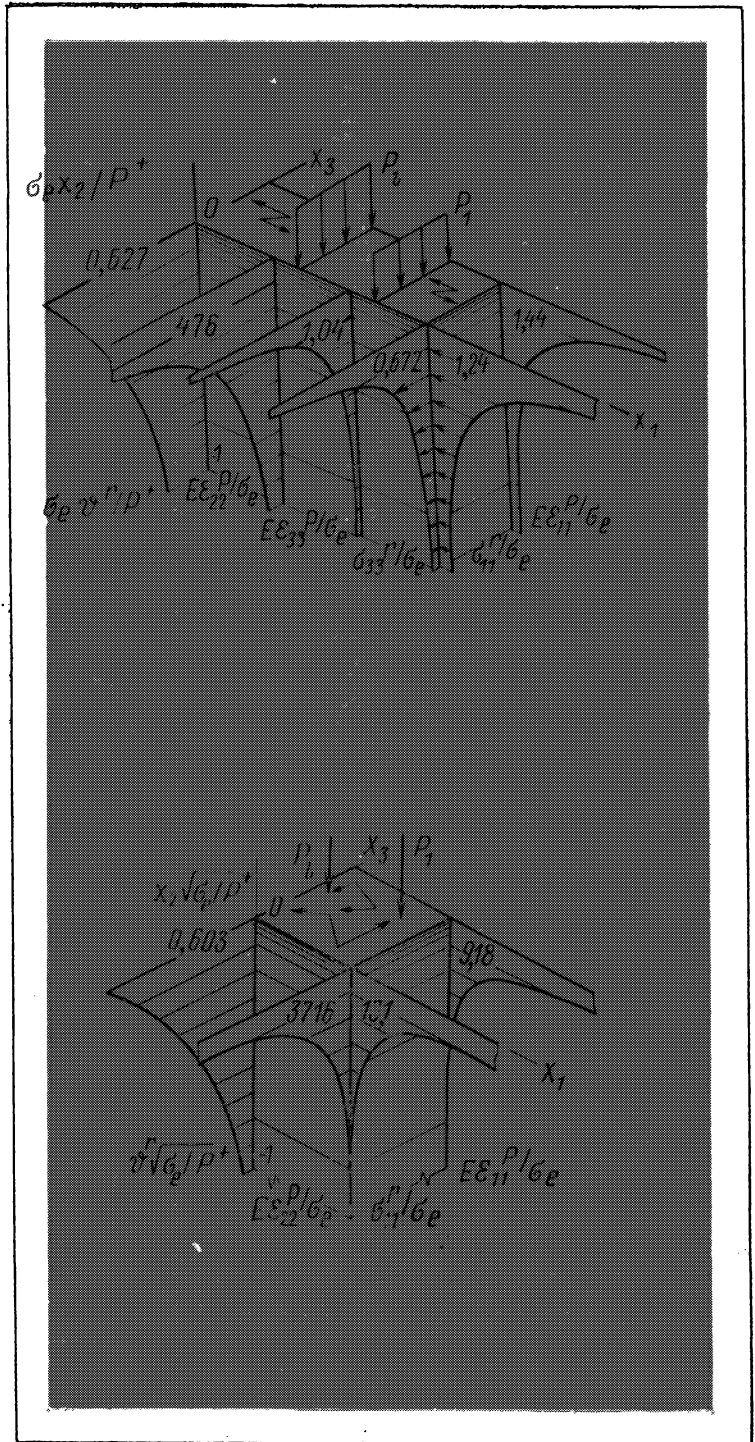
СТРОИТЕЛЬНОГО

КОМИТЕТА

СССР

3

1989



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ГОСУДАРСТВЕННОГО СТРОИТЕЛЬНОГО
КОМИТЕТА СССР

Издается с января 1959г.	МАЙ	ИЮНЬ	· Выходит 6 раз в год
Москва	№3 (183)	1989	Стройиздат

ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

УДК 624.074.1.003

И. Н. КАЛИНИН, канд. физ.-мат. наук (Горьковский филиал ВНИИмаш)

Дискретная оптимизация пространственной стержневой ферменной конструкции

Для широкого внедрения методов оптимизации в практику проектирования необходимо создание математического и программного обеспечения, позволяющего использовать разнообразные критерии оптимальности, выбирать различные параметры в качестве варьируемых переменных, учитывать широкий спектр ограничений и при этом обеспечивать выполнение условий и требований прейскурантов, сортаментов, СНИПов.

Одним из важных прикладных критериев оптимальности является критерий стоимости конструкции в деле. Этот критерий применялся в оптимизации различными авторами [1—3].

Использование в рамках одной задачи в качестве переменных оптимального проектирования параметров поперечных сечений и координат узлов конструкции приводит к существенному усложнению задачи [4] и, как следствие, к разработке нестандартных способов решения.

В статье рассматривается решение сложной задачи оптимального проектирования пространственной стержневой ферменной конструкции в следующей постановке. Будем считать, что стержни изготовлены из трубчатых элементов. Требуется определить расстояния $X_1...X_5$ (рис. 1, в скобках — номера узлов), толщины $X_6...X_{30}$ и радиусы — $X_{31}...X_{55}$ всех трубчатых стержневых элементов из условия минимума стоимости конструкции в деле

$$C_D (X_1, X_2, \dots, X_{55}) \rightarrow MIN \quad (1)$$

при ограничениях по прочности

$$\sigma (X_1, X_2, \dots, X_{55}) \leq [\sigma],$$

перемещениям

$$U (X_1, X_2, \dots, X_{55}) \leq [U], \quad (2)$$

© Стройиздат, «Строит. механика и расчет сооружений», 1989

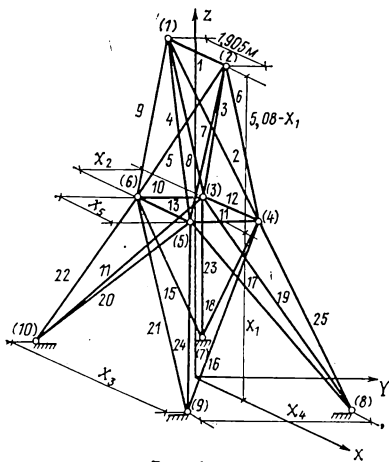


Рис. 1

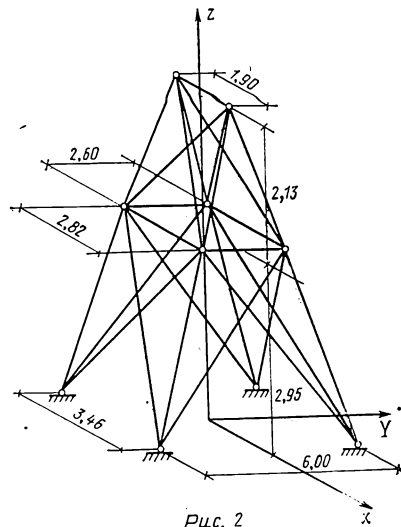


Рис. 2

устойчивости по Эйлеру

$$\sigma(X_1, X_2, \dots, X_{55}) \leq \sigma_{кр}^1 / L_1, \quad (3)$$

местной устойчивости каждого стержня (как тонкой оболочки)

$$\sigma(X_1, X_2, \dots, X_{55}) \leq \sigma_{кр}^2 / a_2, \quad (4)$$

при геометрических ограничениях

$$a_i \leq X_i \leq b_i \quad (i = \overline{1, 55}), \quad (5)$$

ограничениях дискретности

$$Z \in D \quad (6)$$

[где $Z = (X_6, X_7, \dots, X_{55})$; D — заданное множество дискретных точек, соответствующих сортаменту];

при ограничениях живучести конструкции.

Под ограничениями живучести в данном случае понимается следующее. Требуется, чтобы при выключении из работы стержня с номером $i (i \in M)$, где M — множество индексов номеров всех стержней, которые в процессе эксплуатации по каким-либо причинам могут выключаться из работы) выполнялись ограничения (1—6).

Для определения стоимости конструкции в деле использовались данные из прейскуранта [5]. Расчет стоимости конструкции в деле производился по [2].

При определении $C_d(X)$ учитывались: стоимость основных материалов, стоимость заводского изготовления (без учета транспортировки к месту монтажа), стоимость монтажа конструкции сооружения.

Стоимость конструкции в деле определялась по формуле [2]:

$$C_d = (C_{н.к} K_{скл} + C_m) K_n K_p K_{з.с}, \quad (7)$$

где $C_{н.к}$ — стоимость изготовленных конструкций; C_m — стоимость монтажа; $K_{скл}$, K_n , K_p — коэффициенты, учитывающие заготовительно-складские расходы завода-изготовителя, накладные расходы и плановые накопления монтажной организации; $K_{з.с}$ — коэффициент, учитывающий расходы на складирование.

Стоимость монтажа конструкций сооружения C_m [2] определялась по формуле

$$C_m = a_m T_{м.с} (1 + K_{н.м}) + C_{мех.с},$$

где a_m — среднечасовая заработная плата монтажников; $K_{н.м}$ — коэффициент накладных расходов на заработную плату; $C_{мех.с}$ — стоимость эксплуатации монтажных механизмов на сооружение; $T_{м.с}$ — трудоемкость монтажа сооружения.

В данном случае принято, что есть только одна основная конструкция и нет вспомогательных конструкций, поэтому трудоемкость монтажа сооружения равна трудоемкости сооружения основной конструкции ($T_{м.с} = T_{о.к}$).

Трудоемкость сооружения основной конструкции [2] представлялась в виде

$$T_{о.к} = K_{в.т} (T_{укр} + T_{уст} + T_{мет}),$$

где $T_{укр}$ — трудоемкость укрупнения конструкции; $T_{уст}$ — трудоемкость установки (подъем, закрепление временными метизами и выверка); $T_{мет}$ — трудоемкость выполнения монтажных соединений; $K_{в.т}$ — коэффициент, учитывающий вспомогательные и транспортные операции.

При решении задачи считалось, что сборка производится без предварительного укрупнения, т. е. $T_{укр}=0$.

Для определения трудоемкости установки [2] использовалась следующая зависимость

$$T_{уст} = a_{уст} + b_{уст} G_{о.к},$$

где $a_{уст}$, $b_{уст}$ — коэффициенты, зависящие от типа конструкции; $G_{о.к}$ — масса основных конструкций (в данном случае она равна массе конструкции сооружения G).

Трудоемкость выполнения монтажных соединений [2] определялась в виде

$$T_{мет} = A_M G/G^d,$$

где A_M , d — параметры, зависящие от типа конструкции; G — масса конструкции.

Стоимость изготовления конструкции, входящая в формулу (7), может быть определена так

$$C_{н.к} = 1,15 [C_{о.м} G + \alpha T (1 + K_n^*) + C_n G/\alpha'], \quad (8)$$

где 1,15 — коэффициент, учитывающий рентабельность изготовления конструкции; α — среднечасовая заработная плата; K_n^* — коэффициент, учитывающий накладные расходы, пропорциональные трудоемкости; C_n — постоянные накладные расходы; α' — коэффициент снижения массы конструкции по сравнению с массой конструкции, изготовленной из стали марки Ст3; T — трудоемкость изготовления конструкции; $C_{о.м}$ — стоимость основных материалов.

Трудоемкость изготовления конструкции в предположении, что все детали основные, определялась по формуле [2]

$$T = K_T \psi_T C \sqrt{G} n,$$

где n — число деталей конструкции; K_T — коэффициент, учитывающий повышения трудоемкости при применении стали повышенной прочности; ψ_T — строительный коэффициент трудоемкости; C — коэффициент, зависящий от типа конструкции.

Стоимость основных материалов [2], используемая при определении стоимости изготовления конструкции в (8), определялась согласно зависимости

$$C_{о.м} = 1,035 (C_{пр} K_{пр} + 1,5) K_{отх},$$

где $C_{пр}$ — оптовая цена набора профилей проката в конструкции; $K_{пр}$ — коэффициент приплат к оптовым ценам, учитывающий приплату за дополнительные испытания и мерность; $K_{отх}$ — коэффициент отходов.

В формулах (3, 4) $\sigma_{кр}^1$, $\sigma_{кр}^2$ определялись согласно известным зависимостям [6]

$$\sigma_{кр}^1 = \pi^2 E (4r^2 + h^2) / 8l^2; \quad \sigma_{кр}^2 = K E h / r, \quad (9)$$

а величинами α_1 , α_2 задавались коэффициенты запаса по устойчивости; E — модуль упругости; h — толщина; r — радиус трубчатого элемента.

Величина K в (9) задавалась выражением [6]

$$K = (1/\pi) \sqrt[8]{(100/r)^3}.$$

Отметим, что конструкция изготовлена из стали марки Ст3 со следующими данными: плотность $\rho = 0,77 \cdot 10^{-5}$ Н/см³, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^7$ Н/см², $\nu = 0,3$.

Учитывая тип конструкции и сделанные ранее предположения, необходимые для расчета стоимости конструкции в деле, константы принимались согласно рекомендациям [2]: $K_n = 1,083$; $K_{н.м} = 1,06$; $K_{з.с} = 1,0075$; $a_m = 0,9$ руб/ч; $K_{н.м} = 0,8$; $C_{мех.с} = 10$ руб/т; $K_{в.т} = 1,3$; $a_{уст} = 3,5$; $b_{уст} = 1,05$; $\alpha = 0,75$ руб/ч; $K_n^* = 2,6$; $C_n = 11$ руб/т; $\alpha' = 1$; $A_M = 21,5$; $d = 0,68$; $n = 25$; $K_T = 1$; $\psi_T = 1$; $C = 3,4$; $K_{пр} = 1,1$; $K_{отх} = 1,078$.

На конструкцию действуют шесть независимых систем нагрузок, которые приведены в таблице. Остальные данные: $\alpha_1 = 1,3$; $\alpha_2 = 1,3$; $[\sigma] = 16622,3$ Н/см²; $[U] = 0,8$ см; $a_1 = 200$ см; $a_2 = 120$ см; $a_3 = 300$ см; $a_4 = 200$ см; $a_5 = 190,5$ см; $b_1 = 450$ см; $b_2 = 450$ см; $b_3 = 600$ см; $b_4 = 600$ см; $b_5 = 300$ см; $a_i = 0,14$ см ($i = 6, 30$); $a_i = 0,6$ см ($i = 31, 55$); $b_i = 0,55$ см ($i = 6, 30$); $b_i = 6,5$ см ($i = 31, 55$).

Множество M включало в себя следующие номера стержней: 18, 19, 20, 21.

В сформулированной задаче — 55 переменных, 2718 нелинейных ограничений неравенств, геометрические ограничения на переменные проектирования, ограничения живучести и дискретности, определяемые сортаментом. Для проверки нелинейных ограничений при одном обращении необходимо произвести расчет конструкции пять раз (с различной геометрией с учетом выбрасываемых стержней). Объем задачи значителен, что

Узлы						
	1	2	3	4	5	6
<i>Нагружение 1, Н</i>						
P_x	4450	0	2225	0	0	2225
P_y	44500	44500	0	0	0	0
P_z	-22250	-22250	0	0	0	0
<i>Нагружение 2, Н</i>						
P_x	0	-4450	0	-2225	-2225	0
P_y	44500	44500	0	0	0	0
P_z	-22250	-22250	0	0	0	0
<i>Нагружение 3, Н</i>						
P_x	4450	0	22250	0	0	2225
P_y	-44500	-44500	0	0	0	0
P_z	-22250	-22250	0	0	0	0
<i>Нагружение 4, Н</i>						
P_x	0	-44500	0	-2250	-2250	0
P_y	-44500	-44500	0	0	0	0
P_z	-22250	-22250	0	0	0	0
<i>Нагружение 5, Н</i>						
P_x	0	0	0	0	0	0
P_y	89000	-89000	0	0	0	0
P_z	-22250	-22250	0	0	0	0
<i>Нагружение 6, Н</i>						
P_x	0	0	0	0	0	0
P_y	-89000	89000	0	0	0	0
P_z	-22250	-22250	0	0	0	0

практически не позволяет получить решение при прямом использовании методов математического программирования. Поэтому производился системный анализ свойств задачи для формирования вычислительного алгоритма с целью сокращения объема вычислений. Не останавливаясь подробно на описании свойств, коротко перечислим **основные элементы вычислительной схемы**.

1. Использовалась аппроксимация функций ограничений [7, 8] для каждой схемы конструкций и каждой из шести нагрузок.

2. При определении напряженно-деформированного состояния для каждой геометрической схемы расчет производился один раз с несколькими правыми частями, соответствующими всем заданным и виртуальным нагрузкам (для определения коэффициентов аппроксимационной модели).

3. Для учета ограничений использовался метод внешних штрафных функций, для безусловной минимизации по параметрам поперечных сечений — адаптивный комбинированный алгоритм прямого поиска с отключением неэффективных переменных и адаптацией направления локального исследования [9, 10].

4. Перед реализацией цикла пробных шагов в начале спуска на дно оврага и после каждого дробления пробных шагов делалась попытка, учитывая знание частных производных целевой функции, исключить цикл пробных шагов.

5. В цикле пробных шагов, когда его нужно было производить полностью, полный расчет по аппроксимационной модели не проводился, а, учитывая свойство сепарабельности целевой функции при использовании концепций аппроксимации, изменялась лишь одна компонента искомого вектора на каждом шаге.

6. Значение штрафной функции не считалось до конца (при суммировании по геометрическим структурам и нагрузкам), если при суммировании выяснялось, что значение в текущей точке будет больше минимального из найденных ранее при данном спуске на дно оврага.

Для усиления эффекта от применения данного приема при каждом полном счете целевой функции определялась степень критичности геометрических схем и нагрузок, т. е. считалось максимальное относительное значение функции ограничений для каждой из геометрических схем и нагрузок, и при счете штрафной функции суммирование производилось в порядке убывания степени критичности.

Для получения решения формировалась двухуровневая схема поиска. На верхнем уровне проводилась оптимизация по координатам узлов фермы методом конфигураций, на нижнем уровне (при фиксированных расстояниях) осуществляется поиск параметров поперечных сечений с использованием концепций аппроксимации [7, 8] адаптивным комбинированным алгоритмом прямого поиска [9, 10] с учетом свойств задачи и метода для сокращения объема вычислений [8, 10, 11]. Учет ограничений дискретности проводился после получения непрерывного решения эвристическим алгоритмом дискретной оптимизации [12], основная идея которого заключалась в целенаправленном переборе дискретных точек в некоторой окрестности «дна оврага», проходящего через точку непрерывного минимума.

В результате оптимизации (рис. 2, координаты узлов приведены в м) получен следующий результат (см): $X_1=295,31$; $X_2=260,31$; $X_3=346,31$; $X_4=599,51$; $X_5=281,81$; $X_6=0,16$; $X_7=0,16$; $X_8=0,18$; $X_9=0,16$; $X_{10}=0,16$; $X_{11}=0,20$; $X_{12}=0,18$; $X_{13}=0,20$; $X_{14}=0,22$; $X_{15}=0,16$; $X_{16}=0,16$; $X_{17}=0,22$; $X_{18}=0,16$; $X_{19}=0,16$; $X_{20}=0,16$; $X_{21}=0,16$; $X_{22}=0,16$; $X_{23}=0,18$; $X_{24}=0,18$; $X_{25}=0,18$; $X_{26}=0,22$; $X_{27}=0,25$; $X_{28}=0,20$; $X_{29}=0,20$; $X_{30}=0,25$; $X_{31}=1,50$; $X_{32}=2,90$; $X_{33}=1,80$; $X_{34}=3,40$; $X_{35}=2,60$; $X_{36}=3,60$; $X_{37}=3,80$; $X_{38}=3,20$; $X_{39}=3,20$; $X_{40}=1,00$; $X_{41}=1,00$; $X_{42}=1,70$; $X_{43}=1,60$; $X_{44}=1,00$; $X_{45}=1,00$; $X_{46}=1,00$; $X_{47}=1,00$; $X_{48}=1,70$; $X_{49}=1,20$; $X_{50}=1,80$; $X_{51}=2,40$; $X_{52}=3,80$; $X_{53}=3,00$; $X_{54}=3,20$; $X_{55}=2,40$.

Стоимость конструкций в деле в оптимальной точке равна 32,71 руб/т.

Полученное решение удовлетворяет требованиям сортамента.

Анализ результатов показал, что целевая функция медленно меняется в окрестности экстремума, поэтому непрерывный и дискретный минимумы мало отличаются по целевой функции.

В рассмотренной задаче есть ряд особенностей, существенно усложняющих процесс получения решения: переменные имеют различный физический смысл, значительное число нелинейных ограничений, наличие ограничений дискретности и живучести, необходимость учета данных прейскуранта и сортамента. Однако разработанные методы и программное обеспечение по расчету конструкций и алгоритмов оптимизации позволяют их использовать без существенной переделки и адаптации. А это означает, что в настоящее время методы оптимизации могут с успехом применяться в сложных, прикладных задачах оптимального проектирования конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Складнев Н. Н. Проблемы оптимального проектирования железобетонных конструкций // Изв. вузов. Сер. Стр-во и архитектура. — 1976. — № 10. — С. 3—20.
2. Лихтарников Я. М. Вариантное проектирование и оптимизация стальных конструкций. — М.: Стройиздат, 1979. — 319 с.
3. Коршун Л. И. Метод поэтапной оптимизации статистически неопределимых ферм в условиях реального проектирования // Всесоюз. науч. конф. «Проблемы оптимизации и надежности в строительной механике»: Тез. докл. — М., 1974. — Вып. 1. — С. 44—45.
4. Lev Oadiala E. Sequential geometric optimization // I. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. CIV. Eng. — 1981, 107. — N 10. C. 1935. — 1943.
5. Прейскурсант № 01-13. Оптовые цены на трубы стальные бесшовные и сварные. — М.: 1980. — 207 с.
6. Лизин В. Т., Пяткин В. А. Проектирование тонкостенных конструкций. — М.: Машиностроение, 1976. — 408 с.
7. Шмит Л. А., Фарши Б. Некоторые концепции аппроксимации для синтеза конструкций // Ракетная техника и космонавтика. — 1974. — № 5. — Т. 12. — С. 145—155.
8. Калинин И. Н., Никушин С. С. Проектирование ферм минимальной массы методами математического программирования с использованием концепций аппроксимации // Изв. вузов АН СССР. Сер. Механика твердого тела. — 1987. — № 2. — С. 186—189.
9. Калинин И. Н. Проектирование оптимальных оболочек методом прямого поиска // Прикладная механика. — 1982. — № 1. — Т. 18. — С. 36—42.
10. Калинин И. Н. К исследованию и сравнению алгоритмов оптимизации // Кибернетика. — 1984. — № 1. — С. 77—80, 84.
11. Калинин И. Н. О применении методов математического программирования при оптимизации оболочек // Стронт. механика и расчет сооружений. — 1981. — № 1. — С. 19—22.
12. Проектирование оптимальных конструкций при ограничениях дискретности / И. Н. Калинин, А. М. Стерлин, В. Н. Тимашов и др. // Изв. вузов. Сер. Стр-во и архитектура. — 1987. — № 11. — С. 10—13.

УДК 624.074.042

А. Н. ЧИЖЕВСКИЙ, канд. техн. наук (МИСИ им. В. В. Куйбышева)

Уравнения составного стержня в перемещениях

Отсутствие продольных перемещений в разрешающей системе уравнений составного стержня [1] создает определенные ограничения при постановке граничных условий для решения задачи.

В статье предлагается общая разрешающая система уравнений составного стержня с жесткими поперечными связями в перемещениях, позволяющая использовать все разнообразие граничных условий.

Деформированное состояние составного стержня с жесткими поперечными связями, состоящего из n ветвей, полностью определяется $(n+1)$ функциями перемещений:

$$u_i = u_i(x); \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad y = y(x), \quad (1)$$

где $u_i(x)$ — продольное перемещение точек оси i -той ветви; $y(x)$ — поперечное перемещение составного стержня.

На рис. 1 показаны внутренние усилия и напряжения в i -той ветви стержня, а также внешняя нагрузка, включающая температурное воздействие в виде значений температуры на краях ветви t_i^B и t_i^H .

Составляя уравнения равновесия для элемента dx i -той ветви стержня, в соответствии с рис. 1 находим:

$$Q_i = M'_i + \tau_{i-1,i} b_i + \tau_{i,i+1} a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2) \quad N'_i = \tau_{i-1,i} - \tau_{i,i+1} - p_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Используя гипотезы теории составных стержней с жесткими поперечными связями [1], получаем выражения напряжений и усилий через перемещения (1):

$$\tau_{i,i+1} = \xi_{i,i+1} (u_{i+1} - u_i + c_{i,i+1} y'), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4)$$

где $\xi_{i,i+1}$ — коэффициент жесткости шва и $c_{i,i+1} = a_i + b_{i+1}$.

Выражения продольных усилий и изгибающих моментов в ветвях при наличии температуры имеют вид:

$$N_i = E_i F_i (u'_i - \alpha_i t_i^c), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5) \quad M_i = -E_i I_i (y'' - \alpha_i t_i^n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где $E_i F_i$ и $E_i I_i$ — жесткости соответственно на растяжение и изгиб; α_i — коэффициент линейного расширения материала, $t_i^c = (t_i^B a_i + t_i^H b_i) / (a_i + b_i)$ — средняя температура и $t_i^n = (t_i^B - t_i^H) / (a_i + b_i)$ — температурный перепад i -той ветви составного стержня.

Подставляя (4) и (6) в (2), получаем:

$$Q_i = -E_i I_i y''' + (\xi_{i-1,i} c_{i-1,i} b_i + \xi_{i,i+1} c_{i,i+1} a_i) y' - \xi_{i-1,i} b_i u_{i-1} + \\ + (\xi_{i-1,i} b_i - \xi_{i,i+1} a_i) u_i + \xi_{i,i+1} a_i u_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Уравнение равновесия для элемента составного стержня в целом в виде проекций сил на ось y :

$$\sum_{i=1}^n Q'_i + q = 0. \quad (8)$$

Подставляя (4) и (5) в (3) и (7) в (8), после преобразований получаем искомую разрешающую систему уравнений составного стержня с жесткими поперечными связями в перемещениях:

$$E_i F_i u''_i + \xi_{i-1,i} u_{i-1} - (\xi_{i-1,i} + \xi_{i,i+1}) u_i + \xi_{i,i+1} u_{i+1} + (\xi_{i,i+1} c_{i,i+1} - \\ - \xi_{i-1,i} c_{i-1,i}) y' + p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n E_i I_i \right) y^{IV} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_{i,i+1} c_{i,i+1}^2 \right) y'' + \xi_{1,2} c_{1,2} u'_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\xi_{i,i+1} c_{i,i+1} -$$

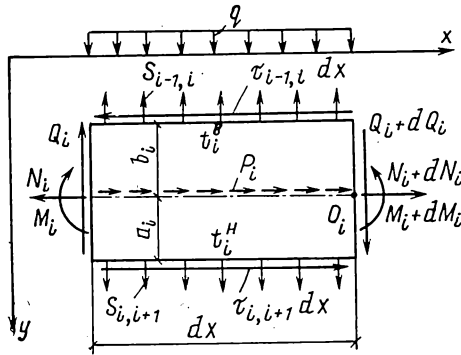


Рис. 1

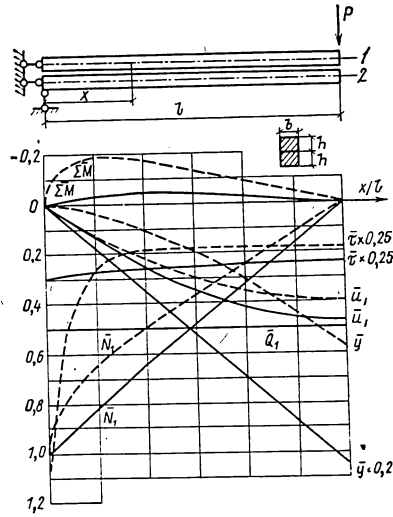


Рис. 2

$$-\xi_{i-1,i} c_{i-1,i} u'_i - \xi_{n-1,n} c_{n-1,n} u'_n = q.$$

Для решения задачи о составном стержне к (9) необходимо добавить $(2n+4)$ уравнений граничных условий.

Если постановка граничных условий, выраженных через продольное перемещение или усилие в отдельной ветви стержня возможна, то как следует из (6) и (7), выражение граничного условия через изгибающий момент или поперечную силу должно включать соответствующее совокупное усилие для всего стержня в целом. Необходимые для постановки подобных граничных условий выражения имеют вид:

$$\sum_{i=1}^n M_i = - \left(\sum_{i=1}^n E_i I_i \right) y'' + \sum_{i=1}^n E_i I_i \alpha_i t_i^{\text{II}};$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i = - \left(\sum_{i=1}^n E_i I_i \right) y''' + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_{i,i+1} c_{i,i+1}^2 \right) y' - \xi_{1,2} c_{1,2} u_1 -$$

$$- \sum_{i=2}^{n-1} (\xi_{i,i+1} c_{i,i+1} - \xi_{i-1,i} c_{i-1,i}) u_i + \xi_{n-1,n} c_{n-1,n} u_n.$$

В качестве иллюстрации подхода рассмотрим двухветвевую стержень. Полагая $\xi_{1,2} = \xi$; $c_{1,2} = c$, в соответствии с (9) находим:

$$E_1 F_1 u_1'' - \xi (u_1 - u_2 - c y') + p_1 = 0; \quad E_2 F_2 u_2'' + \xi (u_1 - u_2 - c y') + p_2 = 0; \quad (10)$$

$$(E_1 I_1 + E_2 I_2) y^{\text{IV}} + \xi c (u_1 - u_2 - c y')' = q.$$

При $p_1 = \text{const}$, $p_2 = \text{const}$ и $q = \text{const}$ решение (10) имеет вид

$$y = A_1 \text{ch } \lambda x + A_2 \text{sh } \lambda x + (f_1 + f_2) f_0 q x^4 / (24 \gamma c^2) + [\lambda^2 (f_1 + f_2) A_3 - f_0 (f_1 p_1 - f_2 p_2) / c] x^3 / (6 \gamma) + A_4 x^2 + A_5 x + A_6; \quad u_i = (-1)^i f_i \{ c \lambda (A_1 \text{sh } \lambda x + A_2 \text{ch } \lambda x) / f_0 - f_0 q x^3 / (6 \gamma c) + 0,5 x^2 [f_0 (f_1 p_1 - f_2 p_2) / (f_1 + f_2) - \lambda^2 c A_3] / \gamma - [(f_0 q / (\lambda^2 c) + 2 c A_4) x + c (A_3 + A_5) + (f_1 p_1 - f_2 p_2) / \lambda^2] \} - 0,5 f_1 f_2 (p_1 + p_2) x^2 / (f_1 + f_2) + A_7 x + A_8, \quad i=1, 2. \quad (11)$$

В (11) использованы обозначения:

$$f_0 = c^2 / (E_1 I_1 + E_2 I_2); \quad f_1 = 1 / (E_1 F_1); \quad f_2 = 1 / (E_2 F_2); \quad \gamma = f_0 + f_1 + f_2; \quad \lambda^2 = \xi \gamma.$$

Выражения внутренних усилий получаются подстановкой выражения (11) в (2), (4)–(7).

Приведем решение некоторых задач, полученных на основании (11).

1. Консольный шарнирно опертый стержень со свободным сдвигом, нагруженный на конце сосредоточенной силой P (рис. 2)

Граничные условия:

$$u_1(0) = u_2(0) = y(0) = \Sigma M(0) = 0; \quad N_1(l) = N_2(l) = \Sigma M(l) = 0; \quad \Sigma Q(l) = P.$$

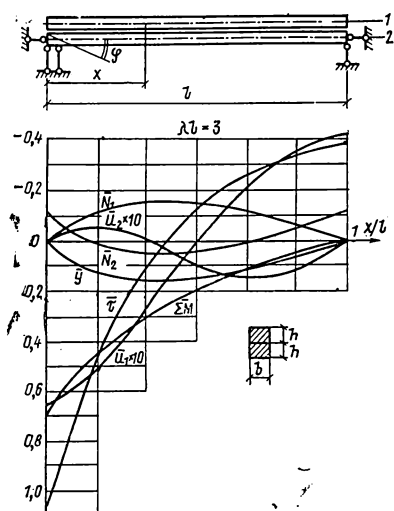


Рис. 3

$$M_1 = E_1 I_1 f_0 \Sigma M / c^2; \quad M_2 = E_2 I_2 f_0 \Sigma M / c^2; \quad Q_1 = P \{ f_0 [E_1 I_1 (f_1 + f_2) / c^2 + a_1 / c] - (f_1 + f_2) (f_0 E_1 I_1 / c^2 - a_1 / c) \nu \operatorname{ch}(\nu - \lambda x) / \operatorname{sh} \nu \} / \gamma = Q(E_1 I_1, a_1); \quad Q_2 = Q(E_2 I_2, b_2).$$

Здесь и далее $\nu = \lambda l$ — безразмерный показатель жесткости шва.

Характер напряженного и деформированного состояния стержня прямоугольного сечения, составленного из одинаковых ветвей, показан на рис. 2, где сплошной линией показаны следующие безразмерные величины:

$$\bar{y} = \frac{E b h^3 y}{P l^3}; \quad \bar{u}_1 = \frac{E b h^2 u}{P l^2}; \quad \bar{\Sigma M} = \frac{\Sigma M}{P l}; \quad \bar{\tau} = \frac{h \tau}{P}; \quad \bar{N}_1 = \frac{h N_1}{P l} \quad \text{и} \quad \bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{P}$$

при $\nu = 1,5$, а штриховой — те же величины при $\nu = 15$. Как видно из рисунка, с увеличением жесткости шва, наряду с общим снижением величины сдвигающих напряжений τ до определенного предела, резко возрастают их концентрация и величина в зоне опоры, что делает невозможным осуществление подобного опирания для монолитного стержня ($\lambda = \infty$), разумеется, в рамках принятых гипотез.

2. **Равномерный нагрев биметаллической полосы.** Рассмотрим защемленный жестко на левой опоре ($x=0$) стержень, состоящий из ветвей, выполненных из различных материалов и закрепленный на свободном крае ($x=l$) от сдвигов. При равномерном нагреве имеем:

$$\alpha_1 t_1^n = \alpha_2 t_2^n = 0; \quad \alpha_1 t_1^c = \alpha_1 t^c; \quad \alpha_2 t_2^c = \alpha_2 t^c.$$

Граничные условия

$$u_1(0) = u_2(0) = y(0) = y'(0) = 0; \quad N_1(l) + N_2(l) = \Sigma M(l) - c N_1(l) = \Sigma Q(l) = \tau(l) = 0$$

Из выражений (5) следует, что граничные условия не являются однородными.

Перемещения и усилия выражаются так:

$$y = t^c (\alpha_1 + \alpha_2) f_0 x^2 / (2 c \gamma); \quad u_i = t^c [\alpha_i + (-1)^i f_i (\alpha_1 - \alpha_2) / \gamma] x; \\ N_i = (-1)^i t^c (\alpha_1 - \alpha_2) / \gamma; \quad M_i = -t^c E_i I_i f_0 (\alpha_1 - \alpha_2) / (c \gamma), \quad i = 1, 2; \\ Q_1 = Q_2 = \tau = 0.$$

Надо обратить внимание на то, что решение не зависит от коэффициента жесткости шва ξ .

3. **Деформационное воздействие на внешне статический неопределимый составной стержень (рис. 3).** Рассматривается воздействие в виде поворота левой защемленной опоры на угол φ при полном отсутствии смещения краев оси нижней ветви на стержень со свободным сдвигом между ветвями.

Граничные условия

$$u_2(0) = y(0) = N_1(0) = 0; \quad y'(0) = \varphi; \quad u_2(l) = y(l) = N_1(l) = \Sigma M(l) = 0.$$

Ввиду громоздкости аналитических представлений ограничимся записью выражения для суммарной поперечной силы

$$\Sigma Q = -(\Sigma E I / l^2) [2 (\operatorname{ch} \nu - 1) / \operatorname{sh} \nu + \nu (\gamma / f_2 - 1)] \varphi / \Delta,$$

Подобные граничные условия могут рассматриваться при расчете колонн ферменной конструкции.

Не останавливаясь на обычной процедуре вычисления произвольных постоянных, приведем окончательные выражения перемещений и усилий:

$$y = P l^3 f_0 (f_1 + f_2) \{ [\operatorname{sh} \nu - \operatorname{sh}(\nu - \lambda x)] / \operatorname{sh} \nu + \nu^2 x^2 (3 - x/l) / (6 l^2) + [\nu (f_1 + f_2) \times \\ \times \operatorname{ch} \nu / (f_0 \operatorname{sh} \nu) + \gamma / (f_1 + f_2)] x / l \} / (\nu^2 \gamma c^2); \quad u_1 = \\ = P l^2 f_1 (f_1 + f_2) \{ [\operatorname{ch} \nu - \operatorname{ch}(\nu - \lambda x)] / \operatorname{sh} \nu + \\ + \nu f_0 x (2 - x/l) / [2 l (f_1 + f_2)] \} / (\nu \gamma c); \\ u_2 = -f_2 u_1 / f_1;$$

$$\tau = P f_0 [1 + (f_1 + f_2) \nu \operatorname{ch}(\nu - \lambda x) / (f_0 \operatorname{sh} \nu)] / (c \gamma);$$

$$N_1 = -N_2 = P l f_0 [(f_1 + f_2) \times \\ \times \operatorname{sh}(\nu - \lambda x) / (f_0 \operatorname{sh} \nu) - x / l + 1] / (c \gamma);$$

$$\Sigma M = P l (f_1 + f_2) [\operatorname{sh}(\nu - \lambda x) / \operatorname{sh} \nu + x / l - 1] / \gamma;$$

где $\Delta = [\text{ch } \nu (2 + 3 f_0/f_2 - 2 f_0/\gamma) - 2 - f_0/\gamma]/(3 \text{ sh } \nu) - 2 f_0 (\text{ch } \nu - 1)/(\gamma \nu^2 \text{ sh } \nu) - f_0 (1 - 2 f_2/\gamma)/(\nu f_2) + \nu (4 f_1/f_2 + f_0/\gamma)/12$.

Характер напряженного и деформированного состояния стержня прямоугольного поперечного сечения, составленного из двух одинаковых ветвей, показан на рис. 3, где приведены графики безразмерных величин:

$$\bar{y} = y/(\varphi l); \quad \bar{u}_1 = u_1/(\varphi h); \quad \bar{u}_2 = u_2/(\varphi h); \quad \bar{\Sigma M} = l \Sigma M/(\varphi h^2);$$

$$\bar{\tau} = l^2 \tau/(E b h^2 \varphi); \quad \bar{N}_1 = l N_1/(E b h^2 \varphi); \quad \bar{N}_2 = l N_2/(E b h^2 \varphi).$$

Если снять ограничение на горизонтальное перемещение правой опоры, т. е. граничное условие $u_2(l)=0$ заменить на $N_2(l)=0$, получим выражение для суммарной поперечной силы в виде

$$\Sigma Q^* = -(\Sigma E I/l^2) \gamma \nu^2 \text{ sh } \nu \varphi/[f_0 (\nu \text{ ch } \nu - \text{ sh } \nu + \nu^2 \text{ sh } \nu (f_1 + f_2)/(3 f_0))];$$

приведенное в [1].

Сравнение ΣQ и ΣQ^* показывает, что равенство между ними имеет место лишь при равенстве нулю коэффициента жесткости шва

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Sigma Q = \lim_{\nu \rightarrow 0} \Sigma Q^* = -3 \Sigma E I/l^2.$$

При $\nu > 0$ ($\Sigma Q/\Sigma Q^*) > 1$ и это отношение возрастает с ростом коэффициента жесткости шва. В пределе

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\Sigma Q/\Sigma Q^*) = 4 (\gamma f_1 + f_0 f_2)/(4 \gamma f_1 + f_0 f_2).$$

Таким образом, разрешающая система уравнений в перемещениях (9) приводит к полному решению задачи о составном стержне с жесткими поперечными связями. При этом в общем случае внешней статической неопределенности стержня не требуется дополнительного составления и решения уравнений совместности, как это имеет место при традиционном подходе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. — М.: Стройиздат, 1986. — 316 с.

УДК 624.044.3

В. А. ИКРИН, канд. техн. наук (Челябинский политехнический институт)

Оценка последствий действия сил, движущихся по полуплоскости и полупространству

Задачи о накоплении деформаций от движущихся нагрузок представляют практический интерес при строительстве и эксплуатации дорог, аэродромов, земляных насыпей и т. п. Решение подобных задач традиционными методами связано с необходимостью априорного выбора программы внешнего воздействия и трудоемкого шагового расчета многоциклового процесса нагружения. Ниже дано приложение метода [1] к оценке последствий действия подвижных сил на полуплоскость и полупространство. Приводятся количественные результаты исследований.

1. Рассмотрим полуплоскость (рис. 1) в плоском деформированном состоянии. По ее границе произвольно и независимо движутся силы P_l . Эти силы могут изменяться в пределах

$$0 \leq P_l \leq P_l^+ \quad (l=1, 2, \dots, l^+). \quad (1)$$

Оценим величины остаточных напряжений, деформаций и перемещений, накопившихся к моменту приспособляемости полуплоскости к указанному воздействию.

Введение в расчетную схему сосредоточенных сил, при которых напряжения в точках их приложения становятся бесконечными, и решение задачи в рамках теории приспособляемости требуют привлечения модели неограниченно упрочняющегося материала. Ограничим область упругого деформирования плоскостями $\varphi_m=0$. В целях сохранения практического аналога [2] примем $m=1, 2, \dots, 12$ (рис. 2) и

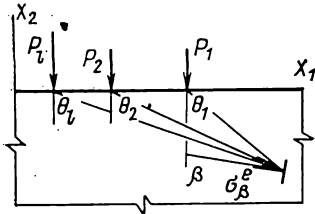


Рис. 1

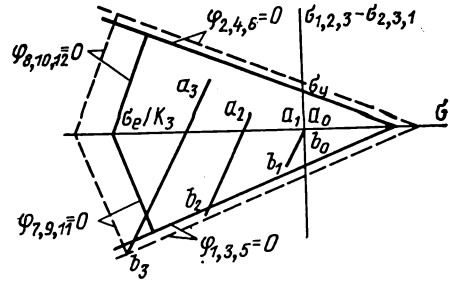


Рис. 2

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2}^{\text{пр}} &= \mp \sigma_1 \pm \sigma_2 + K_1 \sigma + K_2 \varepsilon^p - \sigma_y, & \Phi_{7,8} &= \mp \sigma_1 \pm \sigma_2 + K_3 \sigma + K_4 \varepsilon^p - \sigma_e, \\ \Phi_{3,4} &= \mp \sigma_2 \pm \sigma_3 + K_1 \sigma + K_2 \varepsilon^p - \sigma_y, & \Phi_{9,10} &= \mp \sigma_2 \pm \sigma_3 + K_3 \sigma + K_4 \varepsilon^p - \sigma_e, \\ \Phi_{5,6}^{\text{пр}} &= \mp \sigma_3 \pm \sigma_1 + K_1 \sigma + K_2 \varepsilon^p - \sigma_y, & \Phi_{11,12} &= \mp \sigma_3 \pm \sigma_1 + K_3 \sigma + K_4 \varepsilon^p - \sigma_e, \end{aligned} \quad (2)$$

в которых $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; $\varepsilon^p = \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p$ ($\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p$ — пластические деформации в направлении главных напряжений); σ_y — константа текучести при сдвиге; σ_e — константа упругости при гидростатическом сжатии; K_1 — K_4 — коэффициенты влияния соответствующих величин.

В соответствии с постулатом Друккера

$$\Delta \varepsilon_j^p = \sum_1^{12} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \sigma_j} \Delta \lambda_m \quad (j = 1, 2, 3). \quad (3)$$

Условия неупругого деформирования имеют вид:

$$\Phi_m \leq 0, \quad \Phi_m \Delta \lambda_m = 0, \quad \Delta \lambda_m \geq 0. \quad (4)$$

2. Воспользуемся методом, предложенным в работе [1]. Разложим напряжения на упругие σ_j^e и остаточные σ_j^r

$$\sigma_j = \sigma_j^e + \sigma_j^r. \quad (5)$$

Упругое напряжение [3] $\sigma_\beta^e = 2 \sum_1^{i^+} P_l \cos^2 \theta_l [\cos^2 (\theta_l - \beta)] / \pi x_2$ обращается в нуль при $\theta_l = \pi/2$ и достигает минимума при $\theta_l = \beta = 0$. Принимая во внимание напряжение, перпендикулярное полуплоскости, имеем

$$\sigma_1^e = 0, \quad 0 \geq \sigma_2^e \geq 2 \mu P^+ / \pi x_2, \quad 0 \geq \sigma_3^e \geq 2 P^+ / \pi x_2, \quad (6)$$

где μ — коэффициент Пуассона; $P^+ = \sum_1^{i^+} P_l^+$.

В методе [1] за окончательное состояние приспособляемости принимается предел последовательности состояний приспособляемости к бесконечному числу уровней воздействия, монотонно возрастающих от нуля до заданного (1). В расчете это реализуется монотонным увеличением диапазонов изменения упругих напряжений (отрезков ab на рис. 2) с соблюдением условий (4). Из графической интерпретации видно, что контактными сграницами упругой области могут быть точки a и b , для которых $\sigma_1^e = \sigma_{11}^e$, $\sigma_2^e = \sigma_{33}^e$, $\sigma_3^e = \sigma_{22}^e$, $\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\varepsilon}_{11}^p$, $\dot{\varepsilon}_2^p = \dot{\varepsilon}_{33}^p$, $\dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\varepsilon}_{22}^p$ (точка — символ скорости). На основании равенств (6) для концов отрезков ab имеем:

$$a: \sigma_1^{+e} = \sigma_{11}^{+e} = 0, \quad \sigma_2^{+e} = \sigma_{33}^{+e} = 0, \quad \sigma_3^{+e} = \sigma_{22}^{+e} = 0;$$

$$b: \sigma_1^{-e} = \sigma_{11}^{-e} = 0, \quad \sigma_2^{-e} = \sigma_{33}^{-e} = 2 \mu P^+ / \pi x_2, \quad \sigma_3^{-e} = \sigma_{22}^{-e} = 2 P^+ / \pi x_2. \quad (7)$$

Знак плюс в верхнем индексе — признак максимума, минус — минимума.

Будем считать, что в состоянии приспособляемости $\sigma_{12}^r = \sigma_{22}^r = 0$, $\sigma_{11}^r = \sigma_{12}^r = \sigma_{33}^r = 0$. Отсюда следует:

$$\sigma_{11}^r = -E (\varepsilon_{11}^p + \mu \varepsilon_{33}^p) / (1 - \mu^2), \quad \sigma_{33}^r = -E (\varepsilon_{33}^p + \mu \varepsilon_{11}^p) / (1 - \mu^2); \quad \varepsilon_{22}^r = \varepsilon_{22}^p - \mu (\sigma_{11}^r + \sigma_{33}^r) / E. \quad (8)$$

Подстановка равенств (5), (7) и (8) в (2) позволяет выразить функции текучести через параметр нагружения P^+ и пластические деформации, составить вектор максимумов функций $\varphi^+(\tau)$ [1], по условиям (4), равенствам (3) и (8) рассчитать процесс фиктивного нагружения и найти характеристики напряженно-деформированного состояния приспособившейся полуплоскости.

3. При условиях (1)–(8) и константах материала

$$\{K_1 = 0,3; K_3 = -2,222; K_2 = 0,005 E; K_4 = 0,05 E; \sigma_y = 0,1 \sigma_e; \mu = 0,3 \quad (9)$$

(выбранные значения констант укладываются в диапазоны, характерные для суглинков [4]) рассчитана полуплоскость. Результаты таковы. В приспособившейся полуплоскости сформировались четыре зоны. При $x_2 \leq -3,88 P^+/\sigma_e$ остаточных напряжений и деформаций нет. В слое $-3,88 P^+/\sigma_e \leq x_2 \leq -2,67 P^+/\sigma_e$ возникают:

$$E \varepsilon_{11}^p = -0,229 P^+/x_2 - 0,059 \sigma_e, \quad \sigma_{11}^r = 0,269 P^+/x_2 + 0,069 \sigma_e,$$

$$E \varepsilon_{22}^p = 0,123 P^+/x_2 + 0,032 \sigma_e, \quad E \varepsilon_{22}^r = 0,244 P^+/x_2 + 0,063 \sigma_e,$$

$$E \varepsilon_{33}^p = -0,053 P^+/x_2 - 0,014 \sigma_e, \quad \sigma_{33}^r = 0,133 P^+/x_2 + 0,034 \sigma_e.$$

При $-2,67 P^+/\sigma_e \leq x_2 \leq -2,46 P^+/\sigma_e$

$$E \varepsilon_{11}^p = -0,991 P^+/x_2 - 0,344 \sigma_e, \quad \sigma_{11}^r = 0,590 P^+/x_2 + 0,190 \sigma_e,$$

$$E \varepsilon_{22}^p = 4,017 P^+/x_2 + 1,488 \sigma_e, \quad E \varepsilon_{22}^r = 3,793 P^+/x_2 + 1,391 \sigma_e,$$

$$E \varepsilon_{33}^p = 1,513 P^+/x_2 + 0,572 \sigma_e, \quad \sigma_{33}^r = -1,336 P^+/x_2 - 0,515 \sigma_e.$$

В верхнем слое, где $-2,46 P^+/\sigma_e \leq x_2 \leq 0$,

$$E \varepsilon_{11}^p = -0,144 P^+/x_2, \quad \sigma_{11}^r = 0,124 P^+/x_2,$$

$$E \varepsilon_{22}^p = 49,593 P^+/x_2 + 20,003 \sigma_e, \quad E \varepsilon_{22}^r = 49,610 P^+/x_2 + 20,003 \sigma_e, \quad E \varepsilon_{33}^p = 0,104 P^+/x_2,$$

$$\sigma_{33}^r = -0,067 P^+/x_2.$$

Принимая во внимание большие деформации ε_{22}^r , находим остаточные перемещения из равенства $v^r = \int_{x_2}^0 [\varepsilon_{22}^r dx_2 / (1 - \varepsilon_{22}^r)]$. При этом учтем обжатие лишь верхнего слоя, поскольку влияние остальных пренебрежимо мало. Получившееся в результате интегрирования выражение достаточно громоздко. Для его упрощения дополним равенства (9) соотношением $E = 100 \sigma_e$ [4]. В этом случае остаточные перемещения равны

$$v^r = 0,616 P^+/\sigma_e + 0,250 x_2 + 0,775 P^+ [\ln(0,201 - 0,324 \sigma_e x_2/P^+)]/\sigma_e.$$

Край полуплоскости необратимо переместится на $v^r = -0,627 P^+/\sigma_e$. В пределах области $-P^+/\sigma_e \leq x_2 \leq 0$ характеристики состояния приспособившейся полуплоскости показаны на рис. 3.

4. В аналогичной постановке рассмотрена задача о полупространстве, для которого на основании формул упругих напряжений [3] диапазоны (6) заменены на $0 \leq \sigma_1^e \leq (1-2\mu) P^+/4\pi x_2^2$; $0 \leq \sigma_2^e \leq (1-2\mu) P^+/4\pi x_2^2$; $0 \geq \sigma_3^e \geq -3P^+/2\pi x_2^2$. В точке a области упругих напряжений в равенства обращаются левые, в точке b — правые части записанных границ. Для состояний приспособляемости принято

$$\sigma_{11}^r = \sigma_{33}^r, \quad \sigma_{12}^r = \sigma_{13}^r = \sigma_{22}^r = \sigma_{23}^r = 0; \quad \varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{33}^p, \quad \varepsilon_{11}^r = \varepsilon_{12}^r = \varepsilon_{13}^r = \varepsilon_{23}^r = \varepsilon_{33}^r = 0.$$

При этом равенства (8) сохраняют силу.

Расчеты привели к таким результатам: при $x_2 \leq -1,96 \sqrt{P^+/\sigma_e}$ остаточных напряжений и деформаций нет; при $-1,96 \sqrt{P^+/\sigma_e} \leq x_2 \leq -1,36 \sqrt{P^+/\sigma_e}$ справедливы равенства:

$$E \varepsilon_{11}^p = E \varepsilon_{33}^p = 0,169 P^+/x_2^2 - 0,044 \sigma_e, \quad E \varepsilon_{22}^p = -0,148 P^+/x_2^2 + 0,038 \sigma_e,$$

$$\sigma_{11}^r = \sigma_{33}^r = -0,241 P^+/x_2^2 + 0,063 \sigma_e, \quad E \varepsilon_{22}^r = -0,003 P^+/x_2^2 + 0,001 \sigma_e.$$

В пределах $-1,36 \sqrt{P^+/\sigma_e} \leq x_2 \leq 0$ закономерности иные:

$$E \varepsilon_{11}^p = E \varepsilon_{33}^p = 0,092 P^+/x_2^2 - 0,002 \sigma_e, \quad E \varepsilon_{22}^p = -37,36 P^+/x_2^2 + 20,01 \sigma_e,$$

$$\sigma_{11}^r = \sigma_{33}^r = -0,131 P^+/x_2^2 + 0,003 \sigma_e, \quad E \varepsilon_{22}^r = -37,28 P^+/x_2^2 + 20,01 \sigma_e,$$

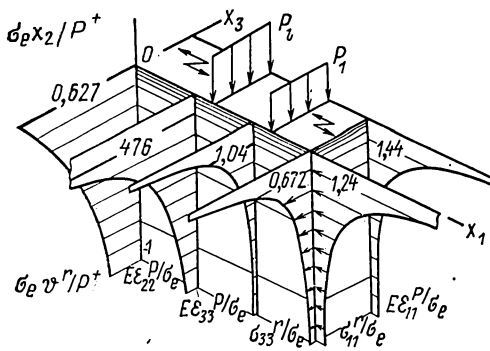


Рис. 3

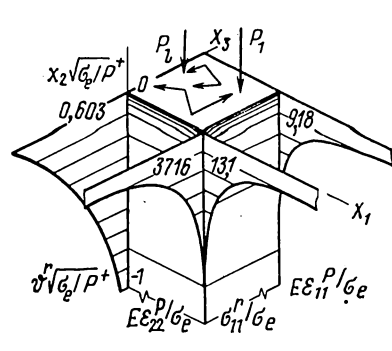


Рис. 4

$$v^r = 0,250 x_2 - 0,603 \sqrt{P^+/\sigma_e} - 0,854 \sqrt{P^+/\sigma_e} \operatorname{arctg} (1,465 x_2 \sqrt{\sigma_e/P^+});$$

остаточное перемещение поверхности $v^r = -0,603 \sqrt{P^+/\sigma_e}$. На рис. 4 приведены эпюры пластических деформаций и остаточных напряжений и перемещений в пределах глубины $-\sqrt{P^+/\sigma_e} \leq x_2 \leq 0$.

5. Использование метода [1] свидетельствует о том, что найденные расчетом характеристики состояний приспособившихся полуплоскости и полупространства занижены (по абсолютному значению) по сравнению с возможными при некоторой экстремальной программе нагружения. Введение ограничений (8) еще более увеличило погрешность расчетов. Однако благодаря этим приемам удалось настолько упростить задачу, что ее решение стало возможным с применением простейших вычислительных средств. Введение набора констант, отличающегося от (9), не изменит трудоемкости расчета.

При анализе практических ситуаций, где накопление деформаций является нежелательным (например, в период эксплуатации сооружения), получаемые описанным методом количественные границы полезны, но могут потребовать уточнения. В технологических же процессах, где деформирование является целью воздействия (уплотнение поверхности грунта, возведение насыпей и т. п.), такие результаты обладают большей значимостью, так как позволяют оценить достижимость цели, определить глубину эффективного уплотнения, выбрать толщину подсыпаемых слоев, назначать параметры технологии и т. д.

Уточнение прогноза в рамках метода [1] возможно по трем направлениям.

Первое направление — уточнение феноменологической модели (2)—(4) в результате дополнения области упругого деформирования областями, соответствующими упругопластическому поведению материала. Для этого потребуется увеличить число функций текучести (2) (с обоснованным подбором констант K , σ_y и σ_e) и соответственно расширить (а при необходимости и скорректировать) условия (3). Детально этот вопрос, лежащий в сфере механики грунтов, в настоящей статье не рассматривается. При желании можно обратиться к специальной литературе, например [2, 4].

Второе направление — имитация силового воздействия распределенной нагрузкой, согласующейся с особенностями контактирующих тел. Это исключит сингулярность решения на поверхности и повысит достоверность результатов у границы. Вычислительные трудности в этом случае возрастут по меньшей мере на порядок и потребуют привлечения ЭВМ.

Третье направление связано с отказом от условий (8) и отображением в расчете процесса движения нагрузки и неинхроности развития пластических деформаций [5]. Такое уточнение повлечет дальнейшее повышение трудоемкости. Естественно, возможно одновременное использование указанных путей, а также применение дополнительных способов, приемлемых в том или ином конкретном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Икрин В. А. Нижняя оценка максимальных деформаций, возможных в приспособившейся конструкции // Строит. механика и расчет сооружений. — 1984. — № 1. — С. 18—22.
2. Федоровский В. Г. Современные методы описания механических свойств грунтов: Обзорная информация / Научн. ред. М. И. Горбунов-Посадов. — М.: ВНИИС, 1985. — Вып. 9. — 72 с.
3. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений: Расчетно-теоретический / Ред. А. А. Уманский. — М.: Гос. изд. лит. по стр.-ву, арх-ре и стр. материалам, 1960. — 1040 с.
4. Зарецкий Ю. К., Ломбардо В. Н. Статика и динамика грунтовых плотин. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 255 с.
5. Икрин В. А. Прогноз возможных состояний конструкций, приспособляющихся к неупорядоченным статическим воздействиям. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1987. — 160 с.

Ю. Б. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук (Институт горного дела
им. А. А. Скочинского, Москва)

Дифракция упругих сферических волн на цилиндрической полости, подкреплённой впаиной оболочкой жесткости

Решение для контактной постановки задачи получено для однородной среды за счет изменения геометрических граничных условий, а также сведения задачи с некруговым контуром к полярно-симметричным граничным условиям по методу малого параметра [1, 2]. При этом соблюдалось постоянство жесткости оболочки для разных условий ее загрузки.

Наряду с предложенным ранее порядком [1] в настоящей статье изложен основанный на вариационных принципах метод, позволяющий определять динамические перемещения оболочки произвольного контура на основе решения задачи для круговой формы. Применение этого подхода совместно с методом малого параметра позволяет существенно повысить точность оценки распределения напряжений.

При определенном удалении точечного источника излучения волн решение получено для случая дифракции сферических волн на цилиндрическую полость, подкреплённую впаиной оболочкой жесткости. Отметим, что ограничение на близость точечного источника к цилиндрической полости несущественно и определяется возможностью использования решения по методу малого возмущения. Область применения данного способа представляет значительный интерес для задач «подземной» механики и определяется удалением источника более чем на 20—30 м.

1. Дифракция сферических волн на цилиндрической полости кругового очертания. Рассмотрим уравнение движения в трехмерном изотропном упругом массиве

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} + \mu \nabla^2 \vec{U} = \rho \ddot{\vec{U}}, \quad (1)$$

где λ , μ — постоянные Ляме; ρ — плотность среды; \vec{u} — вектор смещения.

Для решения (1) введем скалярный φ и векторный $\vec{\psi}$ потенциалы, связанные с перемещениями зависимостью Гельмгольца

$$\vec{U} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi}.$$

Далее, переходя к цилиндрической системе координат, направим ось z вдоль оси цилиндрической полости. Тогда, представляя падающую волну в плоскости нормальной оси полости с прямолинейным фронтом, изменяющуюся по известному закону вдоль оси z , и пренебрегая составляющей механического воздействия вдоль оси, примем скалярный потенциал падающей волны, который удовлетворяет этим условиям

$$\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_0 \gamma_n^n J_n(r \sqrt{\alpha^2 + K^2}) \cos n(\Theta - \chi) e^{-i(Kz + \omega t)}, \quad (2)$$

а потенциалы отраженных волн продольной $\bar{\varphi}$ и поперечной $\bar{\psi}$ зададим рядами:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n H_n(r \sqrt{\alpha^2 + K^2}) \cos n(\Theta - \chi) e^{-i(Kz + \omega t)}; \\ \bar{\psi} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n H_n(r \sqrt{\beta^2 + K^2}) \sin n(\Theta - \chi) e^{-i(Kz + \omega t)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где φ_0 — максимальная амплитуда динамического воздействия; J_n , H_n — функции Бесселя и Ханкеля n порядка; A_n , B_n — постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий; α , β — волновые числа, определяемые соотношениями $\alpha = \omega/C_1$ и $\beta = \omega/C_2$; ω — круговая частота; K — константа разделения; χ — угол между направлением распространения продольной волны и вертикальной осью, совпадающей с началом отсчета угла Θ ; t — время; $\gamma = 1$ при $n \geq 0$; $\gamma = 0,5$ при $n = 0$.

Для оценки напряженно-деформированного состояния среды при объемной постановке примем условие достаточной удаленности источника излучения от полости и рассмотрим скалярный потенциал φ и проекцию потенциала $\vec{\psi}$ на ось z . Проекция векторного потенциала на другие оси положим, так же как и при плоской постановке задачи, рав-

ными нулю ввиду их незначительного влияния. Это вытекает из общего решения системы дифференциальных уравнений в трехмерном упругом массиве методом малого возмущения, согласно которому оно определяется решением нулевого приближения, не учитывающего члены с малыми значениями коэффициентов, и возмущения в решении, определяемого по известной методике при соответствующем их учете.

Учитывая, что для указанных проекций векторного потенциала нулевое решение соответствует также плоской волне и равно нулю, то и возмущения для них будут также равны нулю. Таким образом, будем считать только возмущения для тех потенциалов, которые имели решения и для плоской постановки задачи.

Напряжения в массиве при отражении волны на цилиндрической полости определяются суммой потенциалов падающей (2) и отраженных (3) волн. Вычислив их по известной методике, определим компоненты напряженного состояния в плоскости $r\theta$:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-i(Kz + \omega t)} \cos n(\Theta - \chi) \{ \lambda(1 - K^2)(\alpha^2 + K^2) [-2\gamma\varphi_0 i^n f_1 - A_n f_2] + \\ &+ \mu [4\gamma\varphi_0 i^n F_1 + 2A_n F_2 - 2B_n F_3] \}; \\ \sigma_\theta &= \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-i(Kz + \omega t)} \cos n(\Theta - \chi) \{ \lambda(1 - K^2)(\alpha^2 + K^2) [-2\gamma\varphi_0 i^n f_4 - A_n F_3] - \\ &- \mu [4\gamma\varphi_0 i^n L_4 + 2A_n L_5 - 2B_n F_6] \}; \quad \sigma_{r\theta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-i(Kz + \omega t)} \sin n(\Theta - \chi) \times \\ &\times \mu [4\gamma\varphi_0 i^n L_4 + 2A_n L_5 + B_n F_6]; \quad F_{1,2} = [(n + n^2)/r^2 - (\alpha^2 + K^2)] f_{1,2} - \\ &- \sqrt{\alpha^2 + K^2} g_{1,2}/r^2; \quad F_3 = (n + n^2) f_6/r^2 - \sqrt{\beta^2 + K^2} n g_6/r; \quad F_4 = F_1 + (\alpha^2 + K^2) f_4; \\ F_5 &= F_2 + (\alpha^2 + K^2) f_5; \quad L_{4,5} = F_{4,5} + (1 - n) \sqrt{\alpha^2 + K^2} g_{4,5}/r; \quad F_6 = 2g_6 \sqrt{\beta^2 + K^2}/r + \\ &+ [(\beta^2 + K^2) - 2(n + n^2)/r] f_6; \quad f_1 = f_4 = J_n(r \sqrt{\alpha^2 + K^2}); \quad f_2 = f_5 = H_n(r \sqrt{\alpha^2 + K^2}); \\ g_1 &= g_4 = J_{n-1}(r \sqrt{\alpha^2 + K^2}); \quad g_2 = g_5 = H_{n-1}(r \sqrt{\alpha^2 + K^2}); \quad f_6 = H_{n-1}(r \sqrt{\beta^2 + K^2}); \\ g_6 &= H_{n-1}(r \sqrt{\beta^2 + K^2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Постоянные коэффициенты A_n и B_n в выражениях (4) определяются из граничных условий на круговом контуре полости, а произвольная константа разделения K — вдоль полости при воздействии на нее сферической волны

$$\varphi = \varphi_0^* e^{-i\omega(S/C_i - t)} / S, \quad (5)$$

где S — расстояние от точечного источника до полости; φ_0^* — максимальное давление на фронте волны.

2. Дифракция сферических волн на цилиндрической полости с некруговым контуром. Представим контур полости в виде

$$r = r_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k e^{ik\theta},$$

где r_0 — приведенный радиус контура выреза; S_k — амплитуда отклонения контура от круговой формы k гармоники в разложении Фурье. При незначительных отклонениях контура от круговой формы решение задачи можно свести к полярно-симметричной, используя метод малого параметра [2]. Задача решается путем линеаризации распределения напряжений в пределах отклонения контура от круговой формы, переноса граничных условий на круговой контур и представляется в виде напряжений нулевого приближения $\sigma^{(0)}$, а также возмущений в напряжениях $\sigma^{(1)}$, вызванных отклонениями контура от круговой формы. Эти напряжения представлены для условия плоской деформации [1], но могут быть использованы также и для описания напряженного состояния любого сечения, нормального к оси полости при дифракции сферических волн. Граничные условия в этом случае примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos n(\Theta - \chi) \{ \lambda(1 - K^2)(\alpha^2 + K^2) [2\gamma\varphi_0 i^n (g_1 \sqrt{\alpha^2 + K^2} - n f_1/r) + \\ &+ A_n (g_2 \sqrt{\alpha^2 + K^2} - n f_2/r)] - 2\mu [2\gamma\varphi_0 i^n (\xi f_1 - \zeta f_1 + \eta g_1) + A_n (\xi f_2 - \zeta f_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta g_2) - B_n F_7] \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k e^{i(k\theta - \omega t)}; \quad \sigma_r^{(1)} = \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} i k r^{-1} \cos n(\theta - \alpha) [\lambda(1-K^2) \times \right. \\
& \times (\alpha^2 + K^2) (-2\gamma \varphi_0 i^n f_1 - A_n f_2) + 2\mu (-2\gamma \varphi_0 i^n F_4 - A_n F_5 + B_n F_3)] - \\
& \left. - \sum_{n=0}^{n=\infty} \mu \sin n(\theta - \chi) [4\varphi_0 i^n L_1 + 2A_n L_2 + B_n F_3] \right\} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k e^{i(k\theta - \omega t)}; \\
& F_7 = [n(\beta^2 + K^2)/r - \zeta] f_6 + 3n g_6 \sqrt{\beta^2 + K^2}/r^2; \quad L_{1,2} = [n(\alpha^2 + K^2)/r - \zeta] f_{1,2} + \\
& + 3n g_{1,2} \sqrt{\alpha^2 + K^2}/r^2; \quad F_8 = [2\zeta - (\beta^2 + K^2)(n+2)/r] f_6 + \sqrt{\beta^2 + K^2} [(\beta^2 + K^2) - \\
& - 2(n^2 + 2)/r^2] g_6; \quad \xi = (\alpha^2 + K^2)(1+n)/r; \quad \zeta = (n^3 + 3n^2 + 2n)/r^3; \\
& \eta = \sqrt{\alpha^2 + K^2} [(n^2 + 2)/r^2 - (\alpha^2 + K^2)]. \quad (6)
\end{aligned}$$

3. Подкрепление полости впаиной оболочкой жесткости в условиях плоской деформации. При рассмотрении совместной работы кольца жесткости и пластины распределение напряжений получим на основе сведения задачи взаимодействия двух сред с разными механическими характеристиками к однородной за счет эквивалентного изменения параметров кольца. Однако использование в дальнейшем метода малого параметра для перехода к полярно-симметричным границам ограничено в этом случае тем, что погрешность при определении напряжений возрастает с увеличением отклонений контура от круговой формы. Для устранения этого недостатка в данной статье используется новый подход, основанный на вариационных принципах, позволяющий определять динамические перемещения кольца произвольной формы из решения [3].

Перемещения согласно вариационному принципу должны соответствовать минимальной потенциальной энергии. С учетом этого определим динамические перемещения некругового кольца из решения для эквивалентного кругового. При этом потенциальная энергия должна быть постоянной.

Тогда, рассматривая потенциальную энергию элемента некругового кольца с координатами $R = R_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k \exp(ik\theta)$ при произвольном интервале $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ в виде

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{EJ}{2R_0^2 \rho^2} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right)^2 - \rho \frac{dw}{d\theta} - q w \right] \left(R_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k e^{ik\theta} \right) d\theta,$$

а также для кругового кольца с радиусом средней линии R_0 в виде

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{EJ}{2R_0^4} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right)^2 - p_k \frac{dw}{d\theta} - q_k w \right] R_0 d\theta$$

и определяя радиус кривизны по выражению

$$\rho = \left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2} / \left[R^2 + 2 \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2 - R \frac{d^2 R}{d\theta^2} \right],$$

установим (с учетом того, что $kS_k \ll R$) условие эквивалентного перехода к круговому

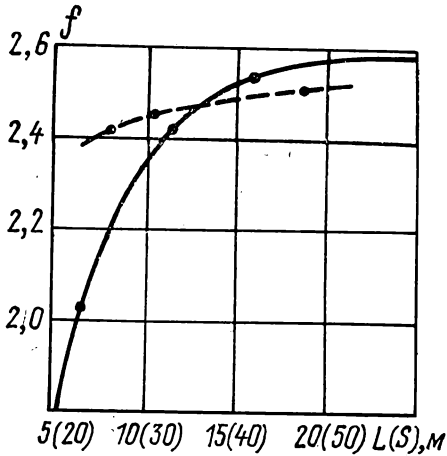
кольцу за счет изменения внешней нагрузки $\vec{P}_k = \vec{P} \left(1 + \frac{1}{R_0} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k e^{ik\theta} \right)$

и жесткости кольца дифференциально в каждой его точке:

$$E_K J_K = E_K J (1 + T); \quad T = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (2k^2 - 1) \frac{S_k}{R_0} e^{ik\theta} - \frac{k^2 S_k^2}{R_0^2} e^{i2k\theta},$$

где \vec{P} — вектор внешней нагрузки, определяемый радиальной p и касательной q составляющей; $E_K J$ — жесткость некругового кольца; w — тангенциальные перемещения; ρ — радиус кривизны некругового кольца.

Рассмотрим решение контактной задачи для равномерной составляющей нагрузки. Напряжения нулевого приближения в среде при круговых контурах кольца и выреза определим с учетом применения принципа неразрывности Сен-Венана. Для этого компенсируем зазор на контуре полости введением элемента с таким же модулем упругости, как и у пластины, за счет изменения толщины кольца при постоянстве жесткости элементов на одноосное нагружение. Тогда координаты внутреннего контура кольца определяются из выражения



$$r = r_1 - \left[\frac{T(r_2 - r_1)}{3} - \frac{E}{E_K} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k e^{ik\theta} \right], \quad (7)$$

где r_1, r_2 — соответственно внутренний и внешний приведенные радиусы кольца; E_K — модуль упругости кольца.

Решение контактной задачи при равномерной нагрузке для нулевого приближения и возмущения в напряжениях определим по выражения [1, 3], устанавливая граничные условия (6) с учетом (7).

Решения контактной задачи для неравномерной нагрузки получим на основе решения для однородной среды за счет изменения геометрических граничных условий при постоянстве жесткости кольца на изгиб. В этом случае напряжения нулевого приближения определим по известным выражениям при значении внутреннего приведенного кругового контура

$$r = r_2 - (r_2 - r_1) \sqrt[3]{E_K/E}.$$

Тогда возмущения в напряжениях при граничных условиях (6) найдем по выражениям [1] для отклонений контура, устанавливаемых зависимостью

$$s = -W \left[\frac{T(r_2 - r_1)}{3} - \sqrt[3]{\frac{E}{E_K}} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{2/3} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k e^{ik\theta} \right],$$

где $W = \sqrt[3]{E_K/E}$ — для неравномерных в окружном направлении граничных условий; $W_1 = E_K/E$ — то же, для равномерных.

4. Результаты исследований. Оценим влияние близости точечного источника излучения сферических волн с частотой $\omega = 400$ рад/с на цилиндрическую полость с радиусом $r_0 = 1,0$ м, расположенную в среде с модулем упругости $E = 2,4 \cdot 10^8$ МПа, и коэффициентом Пуассона — 0,2.

Для выполнения граничных условий при дифракции сферической волны, удовлетворяющей условию излучения А. Зомерфельда, и наличии тригонометрической зависимости изменения напряжения вдоль полости в полученном решении, разложим выражения (2) и (5) в ряд Тейлора по переменной z и рассмотрим только те члены, которые оказывают существенное влияние. Тогда, соблюдая условие $K^2 \ll \omega^2/C_2^2$, а также ограничения $LS \ll 1$ и $LK < 2$, получаем

$$K = \sqrt{6 - 12 \left(\frac{1}{4} - \frac{L^4 \omega^2}{144 S^2 C_1^2} + \frac{L^2}{6 S^2} \right)^{1/2}} / L,$$

где S — наименьшее расстояние от точного источника до цилиндрической полости.

Длину полости L , на которой выполняются граничные условия, определяем с учетом того, что краевой эффект в начальном сечении $z=0$ отсутствует. Тогда, принимая во внимание только разложение по косинусам вдоль оси z в выражении (3) и рассматривая участок полости в диапазоне $-\pi/2K < \theta < \pi/2K$, устанавливаем $L = 13$ м (рисунок), при которой погрешность влияния краевого эффекта не будет превышать 2%. На рисунке сплошной линией обозначена зависимость концентрации напряжений f от различной длины полости L , на которой производится аппроксимация внешнего воздействия.

Для принятых исходных данных показана оценка влияния близости источника излучения волн на цилиндрическую полость и установлена зависимость f в наиболее загруженных сечениях $\theta = \pm \pi/2$ от различной удаленности источника S (см. рисунок, штриховая линия).

Приведенное решение дифракции сферических волн на цилиндрическую полость позволяет определить напряженно-деформированное состояние в приконтурной зоне массива при более близкой удаленности точечного источника по сравнению с удаленностью, для которой применимо решение в плоской постановке задачи. При этом предложенные подходы повышают достоверность расчета подземных сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаренко Ю. Б. Расчет крепей горных выработок на действие динамической нагрузки // Изв. вузов. Сер. Горный журнал. — 1986. — № 9. — С. 22—27.

2. Пальмов В. А. Напряженное состояние вблизи шероховатой поверхности упругих тел // Прикладная математика и механика. — 1968. — Т. 27. — № 5. — С. 963—969.
3. Назаренко Ю. Б. Дифракция затухающих волн на горных выработках при пластической работе приконтурной зоны массива // Изв. вузов. Сер. Горный журнал. — 1988. — № 7. — С. 31—36.

УДК 624.074.432.042

А. А. ТАРАСОВ, канд. техн. наук (Волгоградский инженерно-строительный институт)

Статический расчет оболочки вращения со сложной структурой регулярных ребер

Рассматривается оболочка из линейно-упругого материала, несущая конструкция которой состоит из обшивки и жестко сопряженных с ней четырех групп регулярных ребер. Такая система моделируется как многослойная конструктивно-анизотропная оболочка, в которой подкрепляющие группы ребер заменены конструктивно-ортотропными слоями на основе принципов статико-геометрической аналогии. Для модели, эквивалентной рассматриваемой системе, считаются справедливыми гипотезы Кирхгофа—Лява. За «серединную» поверхность многослойной оболочки принята произвольная поверхность внутри пакета, уравнение меридиана которой в цилиндрической системе координат (z, θ, r) имеет вид: $r = r(z)$.

Расчетной моделью рассматриваемой оболочки является четырехслойная конструктивно-анизотропная оболочка вращения: первый слой моделирует обшивку (индекс слоя $j=0$), второй — симметрично расположенные относительно меридиана два семейства винтовых ребер равной жесткости ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, индекс слоя $j=2$), третий — поперечные ребра ($\varphi_3 = \pi/2$, индекс слоя $j=3$), и четвертый — ребра, направленные вдоль меридиана ($\varphi_4 = 0$, индекс слоя $j=4$). Вид структуры подкрепления приведен на рис. 1.

Для описания уравнений состояния расчетной модели будем следовать теории тонких упругих оболочек В. З. Власова [1]. Из двух первых уравнений равновесия удалим моментные члены ($Q_1 = Q_2 = 0$) и примем: $S_1 = S_2 = S$, что не приведет к погрешностям, превышающим заложенные в гипотезах технической теории оболочек [2, 3]. В этом случае уравнения состояния можно представить в виде:

$$\begin{aligned} N_1 &= a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2 + a_{13} \kappa_1 + a_{14} \kappa_2; & N_2 &= a_{21} \varepsilon_1 + a_{22} \varepsilon_2 + a_{23} \kappa_1 + a_{24} \kappa_2; \\ M_1 &= -a_{31} \varepsilon_1 - a_{32} \varepsilon_2 - a_{33} \kappa_1 - a_{34} \kappa_2; & M_2 &= -a_{41} \varepsilon_1 - a_{42} \varepsilon_2 - a_{43} \kappa_1 - a_{44} \kappa_2; \\ S &= a_{51} \omega + a_{52} \tau; & H_1 &= a_{61} \omega + a_{62} \tau; & H_2 &= a_{71} \omega + a_{72} \tau. \end{aligned} \quad (1)$$

Вид коэффициентов упругости a_{ij} для четырехслойной описываемой конструктивно-анизотропной модели представлен в [4]. Если (1) дополнить геометрическими соотношениями и уравнениями равновесия теории оболочек, то получим замкнутую группу уравнений для рассматриваемой ребристой оболочки. Эта группа после разделения переменных на основе метода Фурье приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для любого n

$$\{y'_n\}(z) = \{y_n\}(z) [A_n](z) + \{f_n\}(z), \quad z_0 \leq z \leq z_1. \quad (2)$$

При $n > 0$ вектор $\{y_n\}$ — восьмикомпонентный [4]

$$\{y_n\} = \{u_n, v_n, w_n, \gamma_{1n}, N_{1n}, S_n, \bar{Q}_{1n}, M_{1n}\};$$

$[A_n](z)$ — квадратная матрица переменных коэффициентов; $\{f_n\}(z)$ — вектор-функция внешних нагрузок; z — координата вдоль оси вращения; n — номер гармоники ряда Фурье.

Решение в рассматриваемом виде позволяет выразить все компоненты напряженно-деформированного состояния модели подкрепленной оболочки через вектор-функцию $\{y_n\}$. Например:

$$\begin{aligned} N_{2n} &= \frac{u_n}{A} \left(C_5 \frac{dk_2}{dz} - \frac{C_3}{B} \frac{dB}{dz} - \frac{dB}{dz} \frac{C_5 k_1}{B} \right) - v_n \frac{C_3 n}{B} - \\ &- w_n \left(C_3 k_2 + C_5 k_2^2 - C_5 \frac{n^2}{B^2} \right) - \gamma_{1n} \frac{C_5}{AB} \frac{dB}{dz} + C_1 N_{1n} + C_2 M_{1n}; \end{aligned}$$

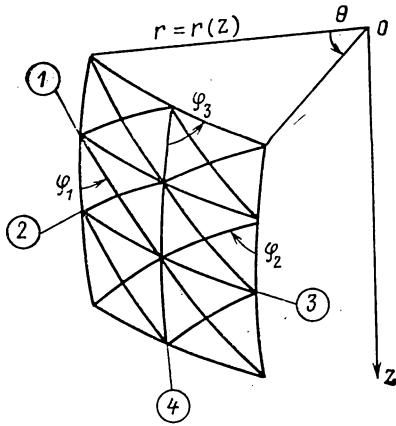


Рис. 1

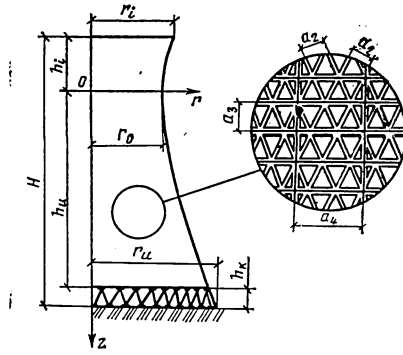


Рис. 2

$$M_{2n} = \frac{u_n}{A} \left[\frac{C_8}{B} \frac{dB}{dz} + C_9 \left(\frac{dk_2}{dz} - \frac{k_1}{B} \frac{dB}{dz} \right) \right] + v_n \frac{C_8 n}{B} + \\ + w_n \left(C_8 k_2 - C_9 k_2^2 + C_9 \frac{n^2}{B^2} \right) - \gamma_{1n} \frac{C_9}{AB} \frac{dB}{dz} + C_7 N_{1n} + C_8 M_{1n}.$$

Здесь $C_k = C_k(a_{ij})$. Например:

$$C_1 = (a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}) / (a_{11} a_{33} - a_{31}^2);$$

$$C_2 = (a_{12} a_{31} - a_{11} a_{32}) / (a_{11} a_{33} - a_{31}^2);$$

$$C_3 = (a_{11} a_{23}^2 - 2 a_{13} a_{21} a_{23} + a_{31}^2 a_{21}^2 / a_{11}) / (a_{11} a_{33} - a_{31}^2) + a_{21}^2 / a_{11} - a_{22};$$

$$C_5 = (a_{31} a_{23} a_{14} - a_{11} a_{23} a_{34} + a_{21} a_{13} a_{34} - a_{31}^2 a_{21} a_{14} / a_{11}) / (a_{11} a_{33} - a_{31}^2) - a_{12} a_{14} / a_{11} + a_{24}$$

т. д.

k_1, k_2 — главные кривизны; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы. В случае осесимметричного нагружения, когда $n=0$, усилия, деформации и перемещения оболочки не зависят от круговой координаты θ и отсутствуют нагрузки в касательной плоскости вдоль параллели. В этом случае:

$$S_n = Q_{2n} = H_{1n} = H_{2n} = 0; \quad v_n = \omega_n = \tau_n = 0$$

и система (2) снижает свой порядок до шестого.

Граничные условия (в зависимости от вида задачи — по три или четыре на каждом контуре оболочки) имеют вид [5]:

$$\text{при } z = z_0 \quad [B_0] \{y_n\} (z_0) = \{b_0\}; \quad \text{при } z = z_1 \quad [B_1] \{y_n\} (z_1) = \{b_1\}. \quad (3)$$

Здесь $[B_0], [B_1]$ — фундаментальные матрицы краевых условий; $\{b_0\}, \{b_1\}$ — известные векторы состояния.

Краевая задача (2) — (3) сводилась к ряду задач Коши, которые решались методом Рунге — Кутты. При этом в заданных точках производилась ортогонализация полученных решений искомой вектор-функции по С. К. Годунову [6].

Переход от усилий в модельной сплошной оболочке к усилиям в элементах подкрепления осуществляется с учетом жесткости ребра по формулам ($j=2, 3, 4$):

$$N^{(j)} = E_j F_j \varepsilon^{(j)}; \quad M^{(j)} = -E_j J_{1j} \chi^{(j)}; \quad H^{(j)} = G_j J_{3j} \tau^{(j)},$$

где $N^{(j)}, M^{(j)}, H^{(j)}$ — нормальное внутреннее усилие, изгибающий и крутящий моменты в ребрах j -того направления; $\varepsilon^{(j)}$ — продольная относительная деформация; $\chi^{(j)}$ и $\tau^{(j)}$ — изгибная деформация и кручение центра тяжести ребра. Деформации центров тяжести ребер могут быть определены через деформации «срединной» поверхности модельной оболочки [7, стр. 330]. Внутренние усилия в обшивке $M_i^{(0)}, N_i^{(0)}, S^{(0)}, H_i^{(0)}$ выражаются по известным зависимостям с учетом положения «срединной» поверхности. Например:

$$N_2^{(0)} = [(\varepsilon_2 + e_0 \chi_2) + \nu_0 (\varepsilon_1 + e_0 \chi_1)] E_0 h / (1 - \nu_0^2);$$

$$S^{(0)} = 0,5 (\omega + 2 e_0 \tau) E_0 h / (1 + \nu_0); \quad M_1^{(0)} = -D_0 (\chi_1 + \nu_0 \chi_2).$$

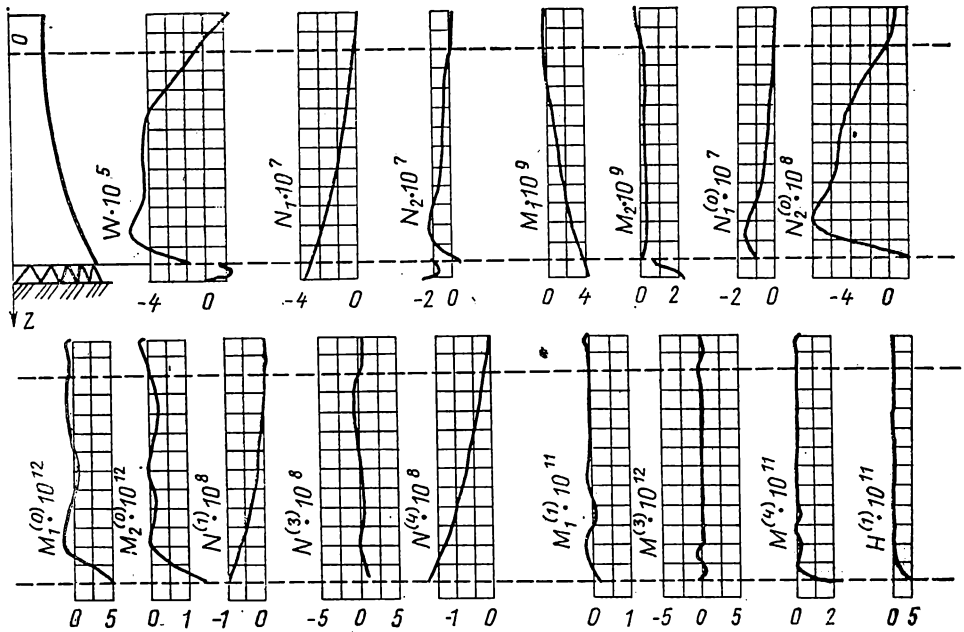


Рис. 3

Здесь ν_0 — коэффициент Пуассона материала обшивки; h — толщина обшивки; D_0 — цилиндрическая жесткость; e_0 — расстояние от «срединной» поверхности модели до срединной поверхности обшивки.

Приведем результаты расчета на ЭВМ ребристой оболочки в виде гипербоида вращения, принятой ленинградским отделением «Теплоэлектропроект» в качестве проекта сборной железобетонной градирни с площадью орошения 3400 м² (рис. 2). Решение представлено в безразмерном виде.

Сооружение возведено на опорной колоннаде высотой h_k , рассматриваемой как однослойная сетчатая оболочка. Уравнение меридиана срединной поверхности гипербоида вращения имеет вид

$$r = [0,55 + 0,45 (1 + z^2/845,8)^{0,5}] r_0.$$

Геометрические размеры сооружения, колоннады, элементов подкрепления и их обозначения описаны в [4].

Оболочка выполнена из бетона класса В30 коэффициентом Пуассона $\nu=0,20$. Верхний край оболочки свободен, а нижнее сечение опорной колоннады жестко закреплено.

Рассмотрим задачу на действие собственного веса. Его величина, отнесенная к единице площади поверхности, равна:

$$g = \gamma h_*(z),$$

где γ — безразмерный параметр плотности материала; $h_*(z)$ — приведенная безразмерная толщина оболочки;

$$h_*(z) = h + 2F_2/a_2 + F_3/a_3 + F_4/a_4.$$

Компоненты поверхностной нагрузки будут иметь вид

$$X = g \sin \psi, \quad Y = 0, \quad Z = -g \cos \psi.$$

Результаты расчета приведены на рис. 3. Для получения размерных значений функции

$$w, N_i, M_i, N^{(j)}, M^{(j)}, H^{(j)} \quad (4)$$

следует умножить на коэффициенты $kr_0\gamma/E$, $kr_0\gamma$, $kr_0^2\gamma$, $kr_0^3\gamma$, $kr_0^3\gamma$ соответственно. Здесь $h=1,2 \cdot 10^6$ м; γ — удельный вес материала оболочки. Верхний ряд графиков на рис. 3 показывает напряженно-деформированное состояние расчетной модели, нижний — внутренние усилия в ребрах жесткости.

Видно, что на линии контакта оболочки с опорной колоннадой возникает ярко выраженный краевой эффект (нижний ряд графиков). Отметим, что изгибающие моменты в расчетной модели зависят от положения «срединной» поверхности.

Был выполнен также расчет градирни на ветровую нагрузку

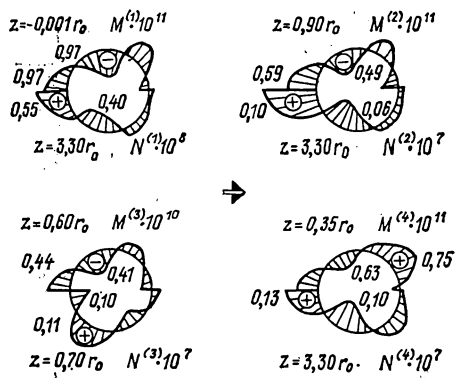


Рис. 4

значения, показано на рис. 4. Для получения размерных значений функции (4) следует умножить соответственно на коэффициенты: $r_0, r_0 E, r_0^2 E, r_0^3 E, r_0^3 E, r_0^3 E$.

Затраты времени при решении задачи о ветровой нагрузке на оболочку, представленной шестью членами ряда, составили около 5 мин для машины БЭСМ-6. При решении системы дифференциальных уравнений (2) выполнялось около 80 ортогонализаций на 160 интервалах интегрирования.

Расчеты показали, что обшивка сооружения находится практически в условиях безмоментного напряженного состояния, так как мембранные напряжения на порядок выше изгибных. Нормальные напряжения в ребрах от изгибающих моментов сопоставимы с напряжениями от продольных сил. В наиболее благоприятных условиях (сжатие) работают ребра четвертого направления, в худших условиях — третьего.

Строительство современных градирен, выполняемых в подкрепленном сложной структурой исполнении, нуждается в несложной и надежной методике определения напряженного состояния. Рассмотренный в статье подход позволяет решать такие задачи и определять оптимальные конструктивные параметры сооружений.

В заключение отметим, что разработанный и реализованный в виде программы на ЭВМ алгоритм можно использовать для решения задач многослойных оболочек вращения, слои которых ортотропны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. З. Избранные труды. — М., 1962. — Т. 1. — 528 с.
2. Муштаров Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. — Казань, 1957. — 431 с.
3. Пономарев В. В., Беляков Г. И. Расчет сетчатых оболочек вращения // Прикл. механика. — 1981. — Т. 17. — № 7. — С. 53—60.
4. Тарасов А. А. О колебаниях подкрепленной ребрами жесткости оболочки вращения // Прикл. механика. — 1985. — Т. 21. — № 5. — С. 50—54.
5. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. — М., 1976. — 278 с. |
6. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. — 1961. — Т. 16. — Вып. 3. — С. 171—174.
7. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. — М., 1982. — 353 с.

УДК 624.073.2.044

В. К. ПРИСЯЖНЮК, А. В. МАРЧУК, кандидаты техн. наук (Киевский автомобильно-дорожный институт)

Учет деформаций поперечного сдвига и обжатия в задачах контактного взаимодействия многослойных плит с упругим полупространством

В настоящей статье приведены результаты исследования влияния деформаций поперечного сдвига и обжатия на величину и характер распределения контактных напряжений между слоистой плитой конечных размеров и упругим полупространством. Для

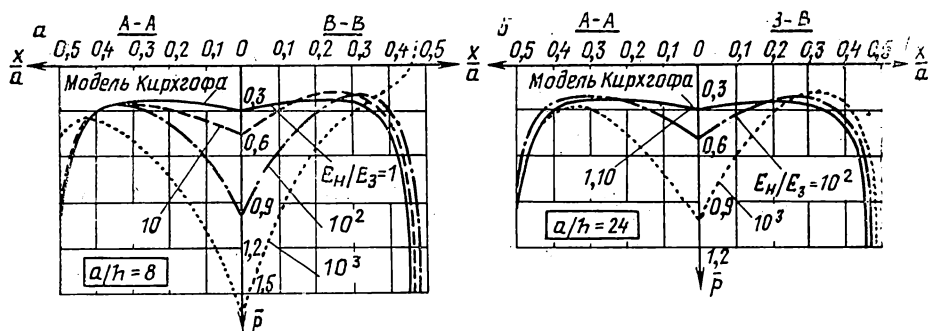


Рис. 1

их определения применяется методика расчета неоднородных плит на упругом полупространстве [1], в которой используется идея метода Б. Н. Жемочкина [3] о замене непрерывной и гладкой функции контактных напряжений кусочной. В основу методики положен конечный элемент слоистой плиты, учитывающий деформации поперечного сдвига и обжатия [2]. В [1] аппроксимация отпора основания производится кусочно-непрерывной функцией, линейной в пределах каждого конечного элемента.

Влияние деформаций поперечного сдвига на характер и величину контактных давлений между плитой и упругим полупространством покажем на примере расчета квадратной симметричной трехслойной плиты, у которой сумма толщин слоев равна толщине заполнителя. Плита нагружена в центре сосредоточенной силой $F=0,1$ кН. В качестве варьируемых величин приняты: отношение модулей упругости несущих слоев и заполнителя — $E_n/E_3=1, \dots, 10^3$, а также отношение размера плиты в плане к ее толщине — $a/h=8, \dots, 24$. Коэффициенты Пуассона слоев равны: $\nu_n=\nu_3=0,3$. При этих физико-геометрических константах плиты ее показатель гибкости, введенный в [4], куда входят также и механические характеристики полупространства (E_0, ν_0), величина постоянная и равная $r=20$, что достигается варьированием E_0 . С точки зрения классической теории плит, основанной на гипотезах Кирхгофа, рассмотренные варианты равнозначны и соответствуют случаю $E_n/E_3=1$.

На рис. 1 приведены эпюры распределения безразмерной величины контактных давлений $\bar{p}=\rho L^2/F$ по осевому ($A-A$) и диагональному ($B-B$) сечениям плиты в зависимости от отношений E_n/E_3 и a/h , полученные с учетом деформаций поперечного сдвига и по классической теории. Видно, что с уменьшением жесткости заполнителя с одновременным уменьшением a/h эффект поперечного сдвига возрастает и при $E_n/E_3=10^3$, $a/h=8$ максимальное значение контактных напряжений в пять раз больше полученных без учета этого эффекта (рис. 1, а). При этом меняется также и качественная картина распределения контактных давлений. Она становится близкой к эпюре отпора основания для плит с большим показателем гибкости ($r=50$) [4]. Увеличение жесткости заполнителя с одновременным увеличением размера плиты в плане ведет к заметному уменьшению эффекта поперечного сдвига (рис. 1, б). Так, при $E_n/E_3=10$ и $a/h=24$ эпюра контактных напряжений практически совпадает с полученной по классической теории.

На рис. 2 показано влияние поперечного сдвига на безразмерную величину нормальных перемещений в центре плиты $\bar{w}=\bar{w}_0 E_0 L/[F(1-\nu_0^2)]$, которое оказывается менее ощутимо по сравнению с влиянием поперечного сдвига на величину реактивных давлений. Так, например, для плиты с относительным размером $a/h=8$ при уменьшении жесткости заполнителя с $E_n/E_3=1$ до $E_n/E_3=10^3$ прогиб возрастает только в два раза, а контактные напряжения более чем в пять раз.

Учет деформаций поперечного обжатия оказывает на распределение контактных напряжений обратное действие. Их влияние исследовано при постоянном соотношении модулей упругости несущих слоев и упругого основания, равно $E_n/E_0=100$, а также постоянном отношении толщины несущего слоя к заполнителю $h_n/h_3=1/8$. В качестве варьируемых параметров принято отношение модулей упругости заполнителя и упругого полупространства $E_3/E_0=0,01 \dots 10$. Размеры плиты в плане принимались такими, чтобы ее показатель гибкости $r=50$.

Результаты расчетов по среднему сечению ($A-A$) и диагонали ($B-B$) плиты приведены на рис. 3. Видно, что с уменьшением модуля упругости заполнителя наибольшее значение контактных напряжений уменьшается и при $E_3/E_0=0,01$ оно в три раза меньше, чем при $E_3/E_0=10$. Меняется также характер эпюры. Она теряет пик под силой и становится практически равномерной по всей подошве плиты. В углах плиты при этом не происходит перехода эпюры в отрицательную область. Следует отметить, что решение с учетом поперечного обжатия при $E_3/E_0=10$ практически полностью совпадает с полученным по классической теории плит.

При уменьшении жесткости заполнителя (увеличивается влияние поперечного обжатия) происходит уменьшение прогиба подошвы плиты. Так, при $E_3/E_0=0,01$ прогиб

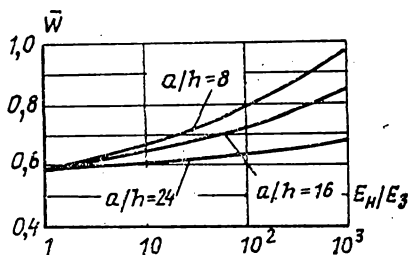


Рис. 2

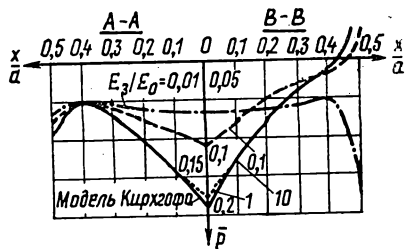


Рис. 3

на 26% меньше полученного, если $E_3/E_0=10$. Уменьшение прогиба связано с тем, что часть энергии деформации плиты расходуется на ее обжатие.

Таким образом, проведенные исследования показали, что деформации поперечного сдвига и обжатия оказывают существенное влияние на величину и характер напряжений между многослойной плитой и упругим полупространством. Причем с увеличением неоднородности и уменьшением относительного размера плиты в плане эффекты учета поперечных деформаций возрастают. Это связано с тем, что слоистая плита, имеющая слабый наполнитель, при учете деформаций сдвига становится более гибкой. В то же время при учете деформаций поперечного обжатия она как бы утрачивает свою гибкость. При этом прогибы подошвы плиты уменьшаются, а отпор основания под ней распределяется более равномерно, что ведет к уменьшению максимальных давлений под плитой. Этот эффект имеет важное значение при строительстве покрытий автомобильных дорог, аэродромов на слабых основаниях и отмечен также в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Присяжнюк В. К., Марчук А. В. МКЭ в задачах контактного взаимодействия многослойных плит с упругим полупространством // Строит. механика и расчет сооружений. — 1987. — № 4. — С. 9—12.
2. Присяжнюк В. К. Численная реализация модели многослойной пластины, учитывающей поперечный сдвиг и обжатие // Строит. механика и расчет сооружений. — 1986. — № 2. — С. 25—28.
3. Жемочкин Б. Н., Силицын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. — М.: Госстройиздат, 1962. — 328 с.
4. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. — М.: Стройиздат, 1984. — 679 с.
5. Пискунов В. Г., Присяжнюк В. К. Расчет неоднородных плит на упругом неоднородном полупространстве // Строит. механика и расчет сооружений. — 1985. — № 1. — С. 25—28.

УДК 624.042.5:681.3

В. М. КАРТВЕЛИШВИЛИ, канд. физ.-мат. наук (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва),
А. Э. ПЕТРУНЬКИН, инж. (НИАТ, Москва)

Формализованные процедуры аппроксимации в задачах вычислительной термомеханики

В работе, продолжающей исследования [1], изложены процедуры формализованного построения конечномерных аналогов вариационных задач вычислительной термомеханики строительных конструкций. В основу реализации вариационного подхода заложена возможность декомпозиции глобальной математической модели на совокупность частных, но однотипных по структуре решений, а следовательно, и по структуре информационных потоков внутри ЭВМ элементарных подзадач (обобщенных конечных элементов). Декомпозиция исходной вариационной задачи с последующей дискретизацией отдельных подзадач на основе формализованных процедур, использующих информацию, относящуюся лишь к аппроксимируемому сегменту исследуемой континуальной проблемы (обобщенному конечному элементу), позволяет добиться единообразной блочной структуры дискретного аналога глобальной математической модели. При наличии соответствующих аппаратных средств и отсутствии взаимосвязи между блоками это дает возможность реализовать вычислительные алгоритмы, исключающие пересечение информационных потоков при обработке данных. Анализ принципов построения и действия многопроцессорных ЭВМ [2] позволяет сделать вывод, что вариационный подход является перспективной базой создания алгоритмов, гибко адаптируемых к вычислительным системам, допускающим параллельную обработку данных [3].

Таким образом, вариационная постановка не только максимально ослабляет математические ограничения на разыскиваемые решения, но и удобно адаптируется на базе итерационных алгоритмов как к получившим широкое распространение мини- и микро-ЭВМ, так и к перспективным многопроцессорным вычислительным системам.

Несмотря на широкое распространение метода конечных элементов, еще не предложено алгоритмизированных процедур единообразного задания базисных функций и коэффициентов матриц жесткости, полученных в результате дискретизации исходной вариационной задачи любым из проекционных методов для элементов различной формы и с произвольным числом узловых точек в каждом элементе. В известных программах численного решения задач с учетом термосиловых воздействий часто используются линейные элементы, либо, в лучшем случае, квадратичные. При этом реализация более сложных конечноэлементных схем требует новых более сложных программ.

Предложим процедуру выбора базисных функций аппроксимирующих пространств и методику построения универсальных алгоритмов аналитического и численного задания коэффициентов матрицы жесткости, не зависящих от формы элемента и количества узлов, что позволяет реализовать различные конечноэлементные схемы в рамках одной программы на ЭВМ.

Пусть краевая задача термомеханики, заданная в области $\Omega \in R^n$ с границей Γ , допускает одну из следующих вариационных формулировок: найти соответственно такую функцию $u \in U_1$ или $u \in U_2$, что

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in U_3 \quad \text{или} \quad F(u) \equiv (1/2) a(u, u) - f(u) \leq F(v) \quad \forall v \in U_2. \quad (1)$$

Здесь $U_i, i=1, 2, 3$ — линейные пространства; $a: U_i \times U_k \rightarrow R$ — билинейная форма от u и v , такая что $a(u, v) = 0$, если носители функций u и v имеют пересечение меры нуль; $f: U_i \rightarrow R$ — линейная форма от v .

При построении искомого приближения $u_* \sim u$ обычно решают систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^m a(\psi_j, \psi_k) \alpha_j = f(\psi_j) \quad (2)$$

относительно коэффициентов α_j при известном базисе ψ_j , выбираемом, как правило, в виде заданных отрезков полиномиальных рядов, умноженных на функции от выражений, описывающих границу области Γ . Предложим методику дискретизации вариационной задачи на основе построения базисных функций по алгоритму, который позволяет также строить аппроксимации производных от функции u .

Зададим в области $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$ множество точек (узлов) $\Sigma = \{P_i: P_i \in \bar{\Omega}, i=1, \dots, l\}$, на котором необходимо определить значения $u_i = u(P_i)$ искомой функции $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\Omega}$. Построим согласованное с Σ разбиение области Ω на элементы $\Omega_k, k=1, \dots, m$, такие что $\text{mes}(\Omega_k) \neq 0$, $\Omega = \bigcup_{k=1}^m \Omega_k$, $\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0$, если $i \neq j$. Пусть m — число узлов сеточной области Σ , лежащих в элементе Ω_m , а $Q_m = \{i: P_i \in \Omega_m\}$. Обозначив значения сеточной функции $u_i, i \in Q_m$ через u_1, \dots, u_m , зададим на элементе Ω_m приближение p -й производной $D^p u(x)$, входящей в выражения (1), (2):

$$D^p u(\bar{x}) = \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \approx u^{(p)}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i^{(p)}(\bar{x}), \quad (3)$$

где $p = \{p_j: p_j \geq 0; p_1 + p_2 + \dots + p_n = |p|\}$ — мультииндекс; $\varphi_i^{(p)}(\bar{x}); i=1, \dots, m$ — искомые функции. При $p=0$ считаем, что $D^0 u(\bar{x}) \equiv u(\bar{x})$ и система функций $\varphi_i^{(0)}$ представляет искомый базис.

При использовании аппроксимаций (3) система уравнений (2) заменяется в каждом элементе Ω_m системой

$$\sum_{j=1}^m a(\varphi_j^{(p)}, \varphi_k^{(q)}) u_j = f(\varphi_j^{(r)}), \quad (4)$$

где p, q, r — порядок производных от базисных функций $\varphi_m^{(0)}$, что при известных функциях $\varphi_i^{(k)}$, а следовательно, известной матрице жесткости $a_{jk} = a(\varphi_j^{(p)}, \varphi_k^{(q)})$ позволяет найти значения искомой функции $u(\bar{x})$ в выбранных узлах $P_j, j \in Q_m$ непосредственно. Кроме того, к преимуществам аппроксимационной схемы (3) следует отнести то обстоятельство, что задание узлов P_j на границах элементов Ω_m автоматически обеспечивает непрерывность искомой функции по всей области Ω без привлечения дополнительных условий.

Таким образом, методика решения конечномерных аналогов вариационных задач (1)

в рамках подхода (3), (4) в отличие от классических конечноэлементных подходов переносит акцент на поиск базисных функций $\varphi_i^{(0)}(\bar{x})$ или их производных $\varphi_i^{(p)}(\bar{x})$ при $p > 0$ и позволяет добиться преимуществ: 1) вариационных схем, т. е. ослабить ограничения на класс аппроксимируемых функций; 2) разностной дискретизации, т. е. эффективно построить сеточную область Σ , которая универсально адаптируется к особенностям аппроксимируемой задачи, и отыскать значения искомой функции непосредственно в интересующих точках (узлах).

Неизвестные функции $\varphi_i^{(p)}(\bar{x})$ найдем, минимизируя по определенному правилу расстояние

$$\rho(D^p u, u^{(p)}) = \|D^p u - u^{(p)}\| = \|D^p u(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m u_i \varphi_i^{(p)}(\bar{x})\| \quad (5)$$

в соответствующем линейном пространстве. Ориентируясь на практическую реализацию конечноэлементной схемы, считаем, что функция $u(x)$ имеет в Ω_m непрерывные производные требуемого порядка. При этом максимальный порядок производных искомой функции M , размерность пространства n , число узлов в элементе m и порядок аппроксимируемой производной p связаны конструктивными функциональными зависимостями $F = F(M, m, n, p)$, которые определяются, согласно рассматриваемой методике построения схем, типом конкретного элемента. Выбрав произвольный узел интерполяции $P_0 \in \Omega_m$, представим выражение (5) для некоторой точки $P \in \Omega_m$ с учетом (3) в виде

$$\rho(D^p u, u^{(p)}) = \| [D^p \exp \langle \Delta \bar{x}^{(0)}, \nabla_0 \rangle - \sum_{i=1}^m \varphi_i^{(p)}(\bar{x}) \exp \langle \Delta \bar{x}^{(i)}, \nabla_0 \rangle] u(\bar{x}) \| \quad (6)$$

В операторном выражении (6) введены обозначения: $\Delta \bar{x}^{(0)} = \bar{x} - \bar{x}^{(0)}$, $\Delta \bar{x}^{(i)} = \bar{x} - \bar{x}^{(i)}$; $\nabla_0 = \nabla u(\bar{x})$ при $\bar{x} = \bar{x}^{(0)}$; ∇ — оператор Гамильтона; \bar{x} , $\bar{x}^{(0)}$, $\bar{x}^{(i)}$ — координаты точек P , P_0 , P_i ($i \in Q_m$) соответственно; $\langle \cdot \rangle$ — оператор скалярного произведения.

Разложив в ряд Тейлора стоящее под знаком нормы выражение, получим из условия обращения в нуль m сомножителей при одинаковых, произвольно выбранных, m частных производных функции $u(\bar{x})$ замкнутую систему m уравнений для отыскания

$$\varphi_i^{(p)}(\bar{x}), \quad i = \overline{1, m} \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i^{(p)}(\bar{x}) \prod_{j=1}^n (\Delta x_j^{(i)})^{l_j} - \prod_{j=1}^n \sigma(d_j) l_j! (d_j!)^{-1} (\Delta x_j^{(0)})^{d_j} = 0, \quad d_j = l_j - p_j, \quad 0 \leq l_j \leq M,$$

где $\Delta x_j^{(0)} = x_j - x_j^{(0)}$; $\Delta x_j^{(i)} = x_j^{(i)} - x_j^{(0)}$; $j = \overline{1, n}$; $i \in Q_m$; $\sigma(t)$ — функция Хевисайда.

Учитывая предъявляемые к системе функций $\varphi_i^{(p)}$ требования полноты и линейной независимости при $p=0$, заключаем, что на коэффициенты l_j из (7) следует наложить дополнительные ограничения, которые при построении конечноэлементной схемы с использованием полных полиномов имеют вид $l_j = k_j - k_{j+1}$; $k_1 = 0, M$; $k_j = 0, k_{j-1}$; $j = \overline{2, n}$; $k_{n+1} = 0$, а для элементов лагранжевого типа сводятся к условиям $l_j = 0, M$, $j = \overline{1, n}$.

Анализируя определяющую систему (7) с учетом указанных ограничений, приходим к выводу, что функции $\varphi_i^{(p)}(\bar{x})$ являются полиномами переменных x_j и без потери общности для заданного набора коэффициентов p_j могут быть представлены при условии, что по повторяющимся индексам ведется суммирование следующим образом:

$$\varphi_i^{(p)} = a_{x_1 \dots x_n}^{i(p)} x_1^{x_1} \dots x_n^{x_n}; \quad x_j = q_j - p_j, \quad (8)$$

где в случае конечноэлементных схем, построенных на базе полных полиномов, справедливы условия $q_j = k_j - k_{j+1}$; $k_1 = 0, M$; $k_j = 0, k_{j-1}$; $j = \overline{2, n}$; $k_{n+1} = 0$, а для элементов лагранжевого типа выполняются соотношения $q_j = 0, M$, $j = \overline{1, n}$.

Отметим, что в приведенных формулах величина M , определяющая максимальный порядок производных аппроксимируемой функции, совпадает с максимальной степенью полиномов $\varphi_i^{(p)}(\bar{x})$, которые образуют искомый базис и, как следует из анализа приведенных соотношений, удовлетворяют условиям $\varphi_i^{(0)}(\bar{x}^{(j)}) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), т. е. представляют базис Лагранжа [4].

Опишем процедуру формализованного определения коэффициентов $a_{x_1 \dots x_n}^{i(p)}$ из (8). Введя целочисленные суммы вида

$$S(\bar{q}) = \sum b_{q_1 \dots q_n}; b_{q_1 \dots q_n} = 1,$$

где индексы $q_1 \dots q_n$, по которым проводится суммирование, меняются в соответствии с формулой (8) и при суммировании сначала должен быть исчерпан индекс q_j с большим номером j , запишем выражение для коэффициентов полинома (8) в следующем легко алгоритмизуемом виде

$$a_{\kappa_1 \dots \kappa_n}^{i(p)} = D^{-1} D_{ij} \prod_{k=1}^n \sigma(\kappa_k) q_k! (\kappa_k!)^{-1}. \quad (9)$$

Здесь $D = \det(A)$ — детерминант $m \times m$ — матрицы $A = \{A_{st}\}$, элементы которой A_{st} вычисляются по формуле

$$A_{st} = \prod_{j=1}^n (\Delta x_j^{(t)})^{q_j}, \quad (10)$$

где номер строки s равен при фиксированом наборе $\bar{q} = \{q_j\}$ сумме $S(\bar{q})$, т. е. $s = S(\bar{q})$, номер столбца t — номеру узла P_t в элементе Ω_m . Величина D_{ij} равна алгебраическому дополнению элемента A_{ij} матрицы A . Аналогично, в формулах (9), (10) индекс j задается равенством $j = S(\bar{q})$, где набор $\bar{q} = \{q_k\}$, $k = 1, n$ выбирается согласно соотношению (8), а индекс i отвечает номеру базисной функции, элементы набора $\bar{N} = \{N_j\}$ задаются для каждого типа конечного элемента в соответствии с выписанными выше правилами.

Конструктивные формулы задания базиса в элементе Ω_m следует дополнить функциональными зависимостями $F(M, m, n, p)$, которые в случае аппроксимации производной $D^p u(x)$ от функции u , имеющей в m -узловом элементе n -мерной области M непрерывных производных, сводятся для восполнений на основе полных полиномов к условиям

$$\max_{\bar{q}} S(\bar{q}) - m = 0, \quad |p| = \sum_{j=1}^n p_j \leq M,$$

а при построении элементов лагранжевого типа записываются в виде

$$(M+1)^n - m = 0, \quad p_j \leq M, \quad j = 1, n. \quad (11)$$

Представление искомых функций в виде полиномов (8) — (10) существенно облегчает алгоритмизацию процесса построения и вычисления матрицы жесткости $a_{jk} = a(\varphi_j^{(p)}, \varphi_k^{(q)})$, выделяя в качестве базовой элементарной операции процедуру вычисления интеграла вида

$$\omega = \int_{\Omega_m} \varphi_k^{(p)}(\bar{x}) \varphi_l^{(q)}(\bar{x}) \varphi_s^{(r)}(\bar{x}) d\bar{x},$$

выполнение которой базируется на перемножении полиномов и преобразовании координат с целью сведения интегрирования по Ω_m к вычислению интеграла по стандартной области. Выбор конкретного вида преобразования зависит от типа элемента.

При построении конечноэлементных схем на базе полных полиномов удобно в качестве элементарных ячеек разбиения (конечных элементов) Ω_m использовать n -мерные симплексы (гипертетраэдры), в частности, треугольники при $n=2$ и тетраэдры при $n=3$. Введем косоугольную систему координат ξ^s , начало которой совпадает с произвольно выбранной вершиной P_0 n -мерного симплекса Ω_m , а основной репер e_s коллинеарен ребрам гипертетраэдра, выходящим из вершины P_0 , заменим с помощью преобразования (i^k -орты исходной декартовой системы координат, x_0^k — координаты вершины P_0) $x^k = \xi^s C_s^k + x_0^k$, $C_s^k = (\bar{e}_s, \bar{i}^k)$, $k, s = 1, n$ интегрирование по переменным x^k интегрированием по координатам ξ^s с якобианом $|J| = \det\{C_s^k\}$. Пределы интегрирования при указанном преобразовании выражаются элементарно через длины ребер n -мерного симплекса, что ввиду стандартного характера получающихся подынтегральных выражений позволяет при использовании полных полиномов вычислить элементы матрицы жесткости аналитически.

При построении конечноэлементных схем лагранжевого типа область Ω , заданная в декартовой прямоугольной системе координат $x = \{x^k\}$, разбивается на криволинейные гиперкубические элементы Ω_m (криволинейные прямоугольники при $n=2$, криволинейные параллелепипеды при $n=3$) с заданным, подчиняющимся условию (11), числом узлов m . В этом случае удобнее применять изопараметрическое преобразование $x =$

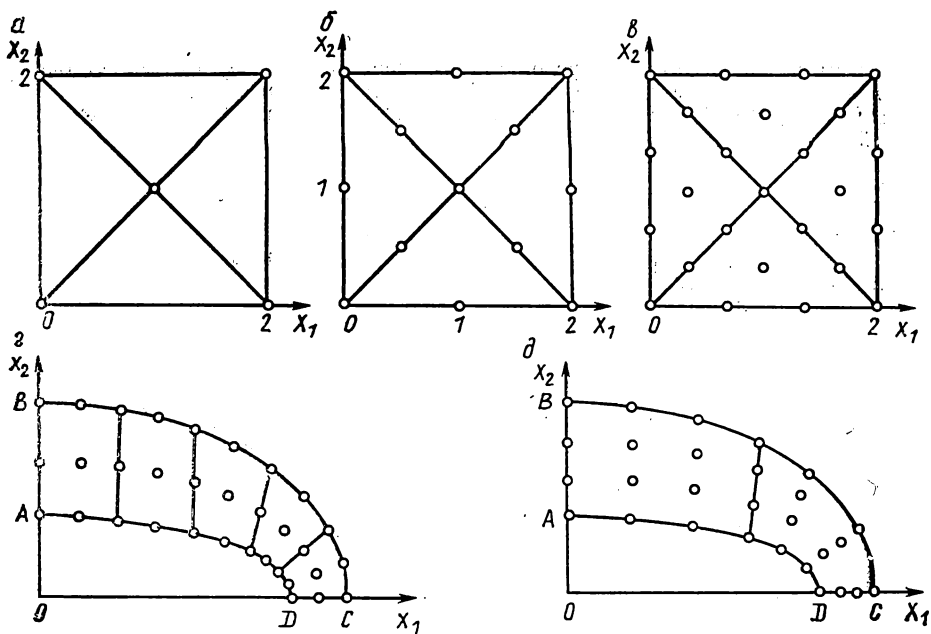


Рис. 1

$= N_i(\bar{\xi}) \bar{x}^{(i)}$, которое с помощью вектор-столбца базисных функций $N(\bar{\xi}) = \{N_i(\bar{\xi})\}$, определенных в новой системе координат $\bar{\xi} = \{\xi^k\}$, переводит криволинейный элемент Ω_m в гиперкуб $\omega_m \{-1 \leq \xi^k \leq 1\}$ с гранями, параллельными координатным гиперповерхностям, и позволяет использовать эффективные процедуры интегрирования, например, на основе формул численного интегрирования Гаусса.

Иллюстрацией возможностей и эффективности предложенных формализованных процедур построения конечномерных аналогов вариационных задач термомеханики служат результаты [1] численного моделирования процессов теплопереноса в рамках классической [5] и обобщенной [6] теорий для тел сложной конфигурации, а также анализ решений приведенных ниже специально подобранных задач теплопроводности.

В рамках единого подхода на базе стандартных программных модулей реализовывались конечноэлементные схемы (рис. 1, а—д) численного моделирования стационарного процесса теплопереноса, вызванного в случае квадратной области $\Omega (0 \leq x_i \leq 2, i = 1, 2)$ (рис. 1, а—в) при нулевой граничной температуре действием равномерно распределенного источника тепла единичной интенсивности, а для двусвязной области, ограниченной конфокальными эллипсами — наличием теплообмена по закону Ньютона между телом и внешней средой, имеющей температуру $T^+ = 20^\circ\text{C}$ и $T^- = 150^\circ\text{C}$ соответственно. На рис. 1, в—д показана четверть области Ω ; $|OA| = 0,1$, $|OD| = 0,327$, $|OB| = 0,25$, $|OC| = 0,4$ м. Принимались коэффициент теплопроводности $\lambda = 40$, коэффициенты теплоотдачи $\alpha^+ = 150$ и $\alpha^- = 100$ соответственно на внешней и внутренней поверхностях области. Полученные решения сравнивались с известными численными [7] и аналитическими [5] решениями. Так, для аппроксимации (рис. 1, а—в) относительная погрешность $\varepsilon = |(T_a - T)/T_a|$ (T_a — аналитическое решение в центральной точке области [5]) составляла соответственно 13, 7, 3%. Для двусвязной области наибольшая погрешность в сравнении с решением [7] наблюдалась в точке D и равнялась 1,72% в случае аппроксимации (рис. 1, в) и 1,8% для дискретного аналога (рис. 1, д).

Предложенный формализованный подход к построению конечноэлементных аппроксимаций с применением алгоритмов частичной дискретизации по времени [1] позволяет провести сравнительный численный анализ характерных нестационарных задач теплопереноса в рамках различных теорий теплопроводности. Так, для изображенной на рис. 2 двусвязной области сравнивались решения задач теплопереноса, вызванного наличием: 1) неподвижного нестационарного точечного источника тепла расположенного в точке B и действующего в течение 0,2 с; 2) точечного источника тепла, движущегося вдоль отрезка AC со скоростью $2,5 \text{ с}^{-1}$. На рис. 3, а, б показаны графики температур в точке D (рис. 2) для неподвижного и движущегося источника соответственно. Кривые 1 получены для классической теории теплопроводности [5], кривые 2 — для обобщенной теории теплопереноса, учитывающей инерцию теплового потока [6].

Рассмотрим также задачу расчета температурного режима угловых стыков мало-

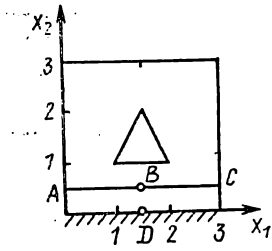


Рис. 2

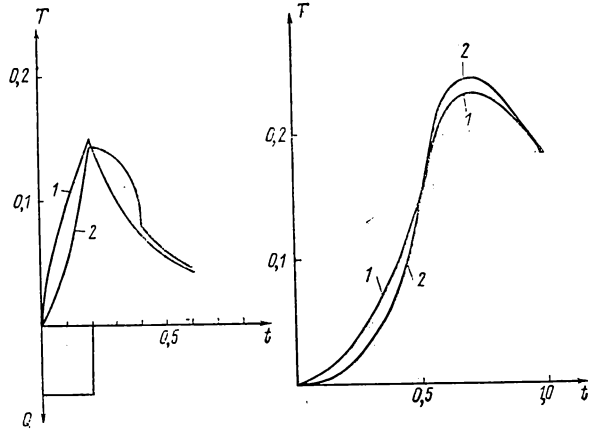


Рис. 3

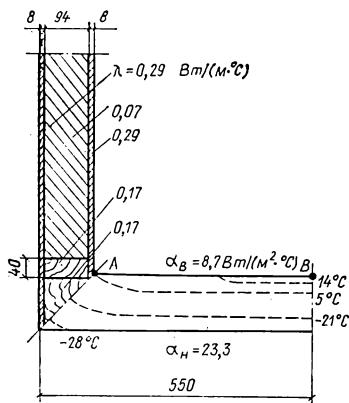


Рис. 4

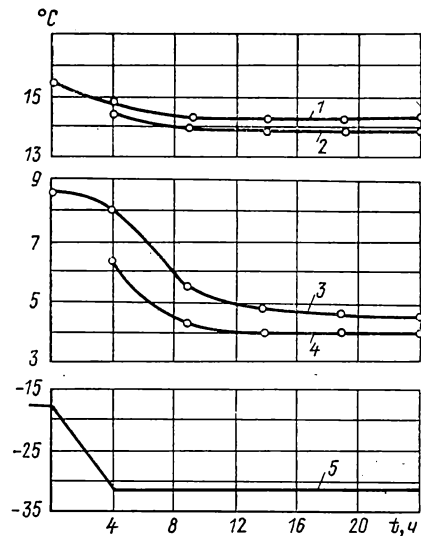


Рис. 5

этажных деревянных панельных домов [8]. Схематический чертеж стыка с размерами элементов углового соединения наружных трехслойных панелей, имеющих утеплитель, приведен на рис. 4: там же представлены теплофизические характеристики материалов конструкции и окружающей среды. Расчетная температура воздуха внутри помещения $T_{в} = 18^{\circ}\text{C}$ принималась постоянной. При установившейся температуре наружного воздуха $T_{н} = -30^{\circ}\text{C}$ температура в углу стыка на внутренней поверхности стены (точка А) снижалась до $4,9^{\circ}\text{C}$. Учитывая, что при относительной влажности 55% внутри помещения выпадение конденсата начинается уже при температуре $8,8^{\circ}\text{C}$, возможность понижения температуры на внутренней поверхности стены до $4,9^{\circ}\text{C}$ требует принятия решений по предотвращению конденсации влаги в окрестности угла [8]. Вдали от угла температура на внутренней поверхности глады стены (точка В) принимала значение $14,4^{\circ}\text{C}$. На рис. 4 штриховыми линиями показаны изотермы, соответствующие данной стационарной задаче теплопроводности.

Исследуем нестационарный температурный режим в стыке при резком понижении температуры наружного воздуха с -17°C до -31°C (см. кривую 5 на рис. 5), выбрав следующие значения объемной теплоемкости материалов в $\text{kJ}/(\text{m}^3\cdot^{\circ}\text{C})$ [9]: минераловатный утеплитель — 209, древесно-волокнистая плита — 1331, дерево — 1256. В качестве начального распределения температуры принималось стационарное состояние в исследуемой области на начальный момент времени ($T_{н} = -17^{\circ}\text{C}$). Дискретизация по времени проводилась по схеме Кранка — Николсона. Расчет выполнен за 6 мин (в [8] для решения данной задачи потребовалось более 1 ч машинного времени). На рис. 5 кривыми 3 и 1 соответственно изображены графики изменения температуры в точках А и В (рис. 4). Для сравнения на рис. 5 приведены аналогичные графики из [8] (кривые 2 и 4).

Таким образом, предложенная методика с высокой степенью формализации позво-

ляет построить конечномерные аналоги вариационных задач термомеханики строительных конструкций и создать в рамках единого подхода универсальные программные модули для современных ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каргвелишвили В. М., Петрунькин А. Э. Модели нестационарной теплопроводности в задачах вычислительной термомеханики // Строит. механика и расчет сооружений. — 1989. — № 1. — С. 18—22.
2. Яненко Н. Н. Проблемы вычислительной механики // Научные основы прогрессивной техники и технологии. — М.: Машиностроение, 1986. — С. 155—194.
3. Хокки Р., Джессхоуп К. Параллельные ЭВМ. Архитектура, программирование и алгоритмы. — М.: Радио и связь, 1986. — 392 с.
4. Деклу Ж. Метод конечных элементов. — М.: Мир, 1976. — 96 с.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.
6. Гениев Г. А. Вариант волновой теории теплопроводности твердых тел // Исследования по теории сооружений. — 1980. — Вып. 24. — С. 146—151.
7. Угодчиков А. Г., Длузга М. И., Степанов А. Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. — М.: Высшая школа, 1970. — 528 с.
8. Табунчиков Ю. А., Хромец Д. Ю., Матросов Ю. А. Тепловая защита ограждающих конструкций зданий и сооружений. — М.: Стройиздат, 1986. — 380 с.
9. СНиП П-3-79**. Строительная теплотехника.

УДК 624.073.1

Л. Н. КУРЕК, Л. Г. СМИРНОВА, кандидаты техн. наук
(МИСИ им. В. В. Куйбышева)

Решение нелинейных задач изгиба пластин и балок методом декомпозиции

В работах [1], [2] Г. И. Пшеничным для решения краевых задач предложен метод декомпозиции. Согласно этому методу решение краевой задачи получают с помощью решения более простых вспомогательных задач. При этом вводятся дополнительные неизвестные функции. В статье [2] показано применение метода декомпозиции к решению линейных задач теории упругости.

В данной статье метод декомпозиции применяется для решения нелинейных задач изгиба нелинейно-упругих пластин и балок.

1. Основное дифференциальное уравнение изгиба пластины из нелинейно-упругого несжимаемого материала получено из соотношений

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y); \quad (1)$$

$$M_x = -\frac{4}{3} J_3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad (2)$$

M_y получается заменой в M_x $x \leftrightarrow y$;

$$H = -\frac{2}{3} J_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad J_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} z^2 dz;$$

жесткость пластины J_3 определяется с помощью квадратичной функции [3]

$$P_\kappa = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_{12}^2.$$

Подставив (2) в (1), получим основное уравнение изгиба пластин в перемещениях. Введем безразмерные параметры (рис. 1):

$$w = q l^4 v / 16 \pi^4 D; \quad \alpha = \pi x / a; \quad \beta = \pi y / b; \quad l = 2a; \quad \bar{J}_3 = 4 J_3 / 3D; \quad \lambda = b/a.$$

В безразмерных параметрах основное уравнение записывается в виде

$$\begin{aligned} & \bar{J}_3 \nabla^2 \nabla^2 v + 2 \frac{\partial \bar{J}_3}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 v + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial J_3}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 v + \\ & + \frac{\partial^2 J_3}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{2 \lambda^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right) + \frac{\partial^2 J_3}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \\ & + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \right) \frac{\partial^2 J_3}{\partial \beta^2} = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Здесь } \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial v^2}{\partial \beta^2}.$$

В качестве примера рассмотрена прямоугольная пластина, жестко заделанная по контуру, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 1).

Для решения уравнения (3) использован метод декомпозиции. Согласно этому методу решены три вспомогательные задачи, две из которых — краевые:

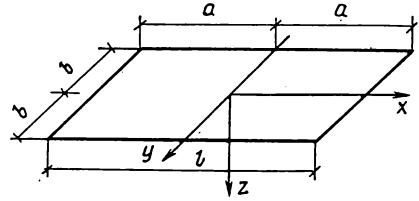


Рис. 1

$$\frac{\partial^4 v_1}{\partial \alpha^4} = f_1(\alpha, \beta); \quad v_1(\pm\pi, \beta) = \frac{\partial v_1}{\partial \alpha}(\pm\pi, \beta) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{1}{\lambda^4} \frac{\partial^4 v_2}{\partial \beta^4} = f_2(\alpha, \beta); \quad v_2(\alpha; \pm\pi) = \frac{\partial v_2}{\partial \beta}(\alpha, \pm\pi) = 0. \quad (5)$$

Третье уравнение приведено ниже. Неизвестные функции $f_1(\alpha, \beta)$, $f_2(\alpha, \beta)$ представим в виде рядов Фурье:

$$f_i(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} C_{kr} \cos k\alpha \cos kr \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

В первом приближении в рядах (6) оставим по одному члену

$$f_1 = 24C_0; \quad f_2 = 24C_2/\lambda^4.$$

Решение первой и второй краевой задачи имеет вид [2]

$$v_1 = C_0(\pi^2 - \alpha^2)^2; \quad v_2 = C_2(\pi^2 - \beta^2)^2. \quad (7)$$

Приравняв полученные решения при $\alpha = \beta = 0$, найдем $C_2 = C_0$.

Величина неизвестного коэффициента C_0 может быть найдена при решении третьей вспомогательной задачи. В первой и второй вспомогательных задачах рассмотрена только линейная часть уравнения (3), уравнение для третьей вспомогательной задачи содержит все нелинейные и оставшиеся линейные члены уравнения (3). Для решения третьей задачи необходимо использовать диаграмму работы материала. Примем, что, материал пластины подчиняется зависимости

$$\sigma_{i_i} = A \varepsilon_i - B \varepsilon_i^3.$$

$$\text{Здесь } A = E; \quad B = E/3\varepsilon_{вр}^2.$$

Безразмерная жесткость пластины определяется по формуле

$$\bar{J}_3 = 1 - n^2 \bar{P}_\kappa / 15;$$

параметр нагрузки

$$n = q l^2 h / 4\pi^2 D \varepsilon_{вр}.$$

\bar{P}_κ — безразмерная квадратичная функция (4)

$$\bar{P}_\kappa = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \right] + \frac{1}{\lambda^4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right)^2. \quad (8)$$

Разрешающее уравнение для третьей вспомогательной задачи получено из (3) с учетом (4), (5) и (8):

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial^4 v_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - \frac{n^2}{15} \left\{ \bar{P}_\kappa \nabla^2 \nabla^2 v_3 + 2 \frac{\partial \bar{P}_\kappa}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 v_3 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial \bar{P}_\kappa}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 v_3 + \frac{\partial^2 \bar{P}_\kappa}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{2\lambda^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \beta^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \bar{P}_\kappa}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \bar{P}_\kappa}{\partial \beta^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \alpha^2} \right) \right\} = 1 - f_1 - f_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя метод декомпозиции, полагаем

$$v_3 = v_1 = C_0(\pi^2 - \alpha^2)^2. \quad (10)$$

Подставляем решение (10) в (9) и требуем удовлетворения этого уравнения при $\alpha = 0$. Для определения неизвестного коэффициента C_0 получаем кубическое уравнение, которое связывает C_0 с параметром нагрузки n

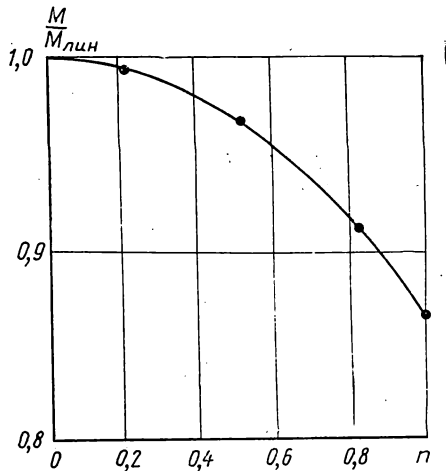


Рис. 2

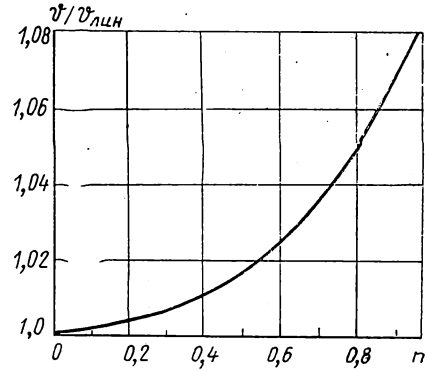


Рис. 3

$$76,8 C_0^3 n^2 \pi^4 - 24 C_0 (1 + 1/\lambda^4) + 1 = 0, \quad (11)$$

Установим связь между нагрузкой и величиной интенсивности деформаций. Величина максимальной интенсивности деформаций $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_i(h/2)$ определяется из соотношения

$$\varepsilon_{i1} = (n/\sqrt{3}) \sqrt{\bar{P}_x} \varepsilon_{вр}.$$

Используя формулы (7) и (8), получим зависимость

$$\varepsilon_{i1}/\varepsilon_{вр} = (4n/\sqrt{3}) C_0 [3\alpha^2 - \pi^2]. \quad (12)$$

Из формулы (12) находим наибольшее значение интенсивности деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon_{i1}(\pi)/\varepsilon_{вр} = 8n C_0 \pi^2/\sqrt{3}.$$

Выразив n через ε и подставив полученное значение n в уравнение (11), определим значение коэффициента C_0 :

$$C_0 = 1/[24(1 + 1/\lambda^4) - 36\varepsilon^2]. \quad (13)$$

Величину максимального прогиба найдем по формуле (7) с учетом (13)

$$v_0 = \pi^4/[24(1 + 1/\lambda^4) - 3,6\varepsilon^2]. \quad (14)$$

Безразмерный изгибающий момент получен в виде

$$\bar{M}_x = \frac{M_x}{q l^2} = -\frac{1}{4\pi^2} \left(1 - \frac{n^2}{15} \bar{P}_x\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\mu}{\lambda^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2}\right).$$

В центре пластины при $\alpha=0$ момент определяется формулой

$$\bar{M}_{x(0)} = (1 - 0,05\varepsilon^2)/[24(1 + 1/\lambda^4) - 3,6\varepsilon^2].$$

Максимальное значение момента в жесткой заделке при $\alpha=\pi$:

$$\bar{M}_{x(\pi)} = [-2(1 - 0,2\varepsilon^2)]/[24(1 + 1/\lambda^4) - 3,6\varepsilon^2]. \quad (15)$$

Для квадратной пластины результаты расчета в первом приближении показаны на рис. 2, 3. В табл. 1 приведены отношения максимального прогиба и максимального момента к соответствующим линейным величинам.

2. Основное дифференциальное уравнение изгиба нелинейно-упругой балки можно получить из уравнения (3), положив $\lambda=\infty$. Для балки безразмерный прогиб и параметр нагрузки вводятся по формулам

$$w = q l^4 v/16\pi^4 E J; \quad n = q h l^2/4\pi^2 E J \varepsilon_{вр}. \quad (16)$$

Решение основного уравнения изгиба балки проводится методом декомпозиции аналогично решению задачи об изгибе пластинки. Для жестко заделанной балки, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, величины максимального прогиба и максимального изгибающего момента определяются формулами (14) и (15) при $\lambda=\infty$.

Величина максимальной интенсивности деформаций балки определяется зависимостью: $\varepsilon=4nC_0\pi^2$. Результаты вычислений для балки приведены в табл. 2.

Для оценки полученных результатов при нагрузке $n=0,5$, определяемой соотношением (16), был сделан расчет балки методом упругих решений [4]. В табл. 3 приведены последовательные приближения, полученные этим методом.

Таблица 1

ε	n	$v_{(0)}/v_{\text{лин}}$	$\bar{M}_{(\pi)}/\bar{M}_{\text{лин}}$
0	0	1	1
0,2	0,171	1,002	0,995
0,5	0,502	1,018	0,968
0,8	0,799	1,050	0,915
1,0	0,969	1,080	0,865

Таблица 2

ε	n	$v_{(0)}/v_{\text{лин}}$	$\bar{M}_{(\pi)}/\bar{M}_{\text{лин}}$
0	0	1	1
0,2	0,124	1,006	0,998
0,5	0,292	1,039	0,987
0,8	0,438	1,108	0,965
1	0,515	1,170	0,941

Таблица 3

Метод расчета	№ приближения	$\varepsilon_{\pi}/\varepsilon_{\text{вр}}$	$v_0/v_{\text{лин}}$	$\bar{M}_{(\pi)}/\bar{M}_{\text{лин}}$
Метод упругих решений	0	0,8220	1	1
	1	0,9058	1,1015	0,9660
	2	0,9215	1,1365	0,9543
	3	0,9352	1,1400	0,9493
	4	0,9418	1,1402	0,9467
Метод декомпозиции	1	0,9555	1,1587	0,9471

Как видно, результаты, полученные методом декомпозиции, в первом приближении практически совпадают с пятым приближением метода упругих решений. Это показывает достоинства метода декомпозиции при определении максимальных значений функций и возможность применения его к решению нелинейных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничнов Г. И. Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач. — ДАН СССР. — М., 1985. — Т. 282. — № 4. — С. 792—794.
2. Пшеничнов Г. И. Решение некоторых задач строительной механики методом декомпозиции // Стрелит. механика и расчет сооружений. — 1986. — № 4. — С. 12—17.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. — М.: Гостехиздат, 1948. — 270 с.
4. Курек Л. Н., Смирнова Л. Г. К расчету балок и плит при упругопластических деформациях // Тр. МИСИ. — М. — 1983. — С. 133—143.

РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

УДК 624.042.8

И. Ф. КОЖЕМЯКИНА, канд. техн. наук, Л. Г. СМЕТАНИНА, инж. (Днепропетровский инженерно-строительный институт)

Области динамической неустойчивости трансверсально изотропной пластины при движении нагрузки

Постановка задачи о динамической устойчивости сооружений при действии подвижной нагрузки принадлежит Болотину В. В. [1, 2], который впервые на основе классической теории исследовал критические скорости движения сосредоточенной нагрузки по шарнирно опертой балке.

Изучение поведения шарнирно опертой пластины в аналогичной постановке при действии подвижной сосредоточенной нагрузки, перемещающейся с постоянной скоростью параллельно одной из сторон [3], показало, что, как и для балки, основная зона неустойчивости ограничена с одной стороны, остальные зоны неустойчивости стягиваются в линии.

При учете инерции вращения и деформации сдвига для шарнирно опертой балки [4] критическая скорость движения сосредоточенной нагрузки уменьшается по сравнению с классической теорией, основная область неустойчивости ограничена с одной стороны, последующие области имеют конечную ширину. Пренебрежение инерцией вращения существенно не отражается на основной области неустойчивости, последующие области стягиваются в линию.

Представляет интерес исследование критических скоростей движения груза по шарнирно опертой пластине с учетом деформации сдвига и инерции вращения (рис. 1).

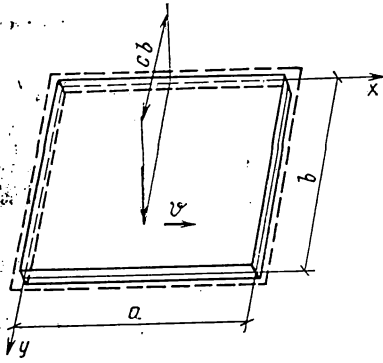


Рис. 1

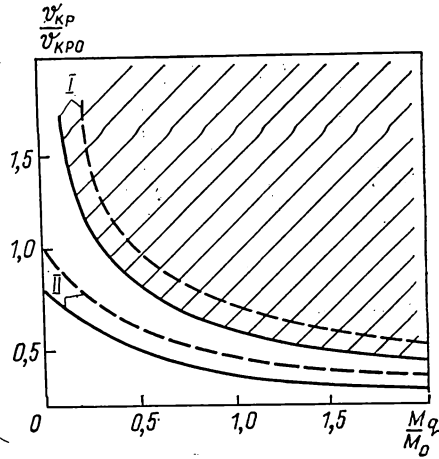


Рис. 2

Уравнения, основанные на теории М. П. Тимошенко для трансверсально-изотропной пластины, находящейся под действием нагрузки, перемещающейся с постоянной скоростью (геометрическая нелинейность не учитывается) [5], существенно упрощаются в результате представления неизвестных функций углов поворота отрезка нормали у срединной поверхности α и β и прогиба w следующим образом:

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}; \quad \beta = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}; \quad w = \frac{D}{G' k' h} \left(\nabla^2 F - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right) - F;$$

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho (1 - \nu^2)} \quad (1)$$

После преобразований основные уравнения приводятся к виду:

$$\frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 F + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \nabla^4 F + (1/D) \times$$

$$\times (P - M d^2 w / d t^2) \delta(x - vt, y - cb) = 0;$$

$$- \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + D \frac{(1 - \nu)}{2} \nabla^2 H - G' k' h H = 0, \quad (2)$$

где ρ — удельная масса пластины; $c_2^2 = G' k' / \rho$; $P = Mg$ — вес груза; $\delta(x - vt, y - cb)$ — функция Дирака; v — скорость движения нагрузки; M — масса груза.

Допустим, что въезд нагрузки осуществляется на невозмущенную пластину, т. е. начальные условия — нулевые.

Граничные условия для шарнирного опирания имеют вид:

$$x=0, x=a, M_x=0, \beta=0, w=0; \quad y=0, y=b, M_y=0, \alpha=0, w=0. \quad (3)$$

В этом случае уравнение типа краевого эффекта (2) имеет решение $H=0$.

Удовлетворяя граничным условиям (3), выберем $F(x, y, t)$ следующим образом:

$$F(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij}(t) \sin \frac{i \pi x}{a} \sin \frac{j \pi y}{b} \quad (4)$$

На основании (1) получим:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t) \sin \frac{i \pi x}{a} \sin \frac{j \pi y}{b};$$

$$f_{ij}(t) = \frac{D}{G' k' h} \left[\varphi_{ij} \frac{\pi^2}{a^2} \left(-i^2 - j^2 \frac{a^2}{b^2} \right) - \frac{1}{c_1^2} \frac{d^2 \varphi_{ij}}{d t^2} \right] - \varphi_{ij}.$$

После процедуры Бубнова — Галеркина приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{d^4 \varphi_{ij}}{d t^4} C_{ij}^{kl}(t) + \frac{d^3 \varphi_{ij}}{d t^3} F_{ij}^{kl}(t) + \frac{d^2 \varphi_{ij}}{d t^2} R_{ij}^{kl}(t) + \frac{d \varphi_{ij}}{d t} B_{ij}^{kl}(t) +$$

$$+ \varphi_{ij} S_{ij}^{kl}(t) + P_{kl}(t) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим устойчивость решений уравнения (5), ограничиваясь первым приближением в разложении (4). Проведенные ранее исследования [4] и анализ решений уравнения (5) показали, что высшие формы колебаний несущественно влияют на критические скорости движения нагрузки и границы областей динамической неустойчивости. Коэффициенты однородного уравнения, соответствующего (5), являются периодическими функциями с периодом T . Тогда два решения одинакового периода ограничивают область неустойчивости, два решения разных периодов — область устойчивости [2]. На границах областей неустойчивости имеют место периодические решения с периодом T или $2T$.

Ищем периодическое решение в виде

$$\varphi_{11}(t) = b_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n1} \sin \frac{n \pi v t}{a} + b_{n1} \cos \frac{n \pi v t}{a} \right), \quad (6)$$

где b_{01} , b_{n1} , a_{n1} — скалярные коэффициенты. В разложении (6) гармоники $n=1, 3, 5, \dots$ определяют периодические режимы колебаний с периодом $2T$, гармоники $n=2, 4, 6, \dots$ — с периодом T .

Подставляя решение (6) в (5) и рассматривая однородное уравнение, получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов b_{01} , b_{n1} , a_{n1} .

Решение с периодом T или $2T$ существует, если определители полученных систем алгебраических уравнений равны нулю. Рассматривая нулевое приближение в разложении (6), получим

$$v_{кр1} = \frac{\pi}{a \sqrt{2} \sin \pi c} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D a b}{M}} \left[1 + \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{\pi^2 D}{k' G' a^2 h} \right]^{-1/2} \quad (7)$$

Первая область неустойчивости ограничена с одной стороны. Инерция вращения не оказывает влияния на $v_{кр1}$, а следовательно, и на границу первой области неустойчивости.

Удерживая в разложении (6) слагаемые при $n=1$ и приравняв определитель системы к нулю, определяем границы второй области неустойчивости. Она распадается на две области конечной ширины. При пренебрежении инерцией вращения вторая область стягивается в линию. Таким образом, учет инерции вращения приводит к четырем значениям критической скорости, две из которых образуют область, лежащую выше, а две — ниже критической скорости, полученной с учетом деформации сдвига. Однако количественная поправка от учета инерции вращения незначительна ($< 3\%$). Критическая скорость, найденная с учетом деформации сдвига, определяется по формуле

$$v_{кр2} = \frac{\pi}{a} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D a b}{M_0 (1 + 4 M_0^2 \sin^2 \pi c / M_0)}} \left[1 + \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \frac{\pi^2 D}{k' G' a^2 h} \right]^{-1/2} \quad (8)$$

На рис. 2 изображены I и II области динамической неустойчивости для шарнирно опертой пластины с параметрами $h/a=1/8$, $k'=0,667$, $a/b=1$, $E/G'=10$, полученные с учетом деформации сдвига (сплошная линия) и в классической постановке (штриховая линия), $v_{кр0} = (\pi/a) (1 + a^2/b^2) \sqrt{D a b / M_0}$ — критическая скорость движения безмассовой сосредоточенной силы по шарнирно опертой пластине; M_0 — масса пластины, $c=0,5$.

Последующие области динамической неустойчивости лежат ниже второй и также имеют конечную ширину при учете инерции вращения и сдвига и будут стягиваться в линию, если пренебрегать инерцией вращения.

Пренебрегая деформацией сдвига в формулах (7) и (8) ($G' \rightarrow \infty$), можно получить скорости, найденные ранее в классической постановке [3].

Исследование решения неоднородного уравнения (5), характеризующего влияние собственного веса груза, приводит к незначительному (1,5...2,5%) уточнению критической скорости (8), а также дает ряд скоростей, лежащих на последующих резонансных кривых.

Таким образом, при скорости движения нагрузки $v \geq v_{кр1}$ устойчивые колебания системы, состоящей из подвижной нагрузки и шарнирно опертой пластины, невозможны. Кроме того, существует ряд критических скоростей типа $v_{кр2}$, лежащих на резонансных кривых, при которых нарушается динамическая устойчивость рассмотренной системы. Их можно «перескочить», увеличивая скорость движения нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В. В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты // Тр. МИИТ. — М., 1950. — Вып. 74. — С. 269—296.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М., 1956. — 359 с.
3. Кучма Т. К. Вынужденные колебания и динамическая устойчивость прямоугольных пластин и балок при действии подвижных нагрузок. Автореф. дис... канд. техн. наук. — Днепропетровск, 1970. — 13 с.
4. Кожемякина И. Ф. Динамическая устойчивость трансверсально-изотропной балки при действии подвижной нагрузки. — Днепропетровск, 1977. — 15 с. — Деп. в ВИНТИ 18.10.77, № 4026—77.
5. Кожемякина И. Ф., Моргаевский А. Б. Нелинейные колебания трансверсально-изотропной пластины под действием подвижной сосредоточенной нагрузки // Исследования по теории сооружений. — М., 1977. — Вып. 23. — С. 25—28.

Г. А. ГЕНИЕВ, д-р техн. наук, проф., А. Р. МИНАСЯН, инж. (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва)

О формах потери устойчивости («бляшка» и «спазм») физически нелинейных оболочек при движении в них потока жидкости

Тонкостенные цилиндрические оболочки с протекающим в них потоком жидкости или газа при определенных значениях его скорости могут потерять поперечную устойчивость. Вопросам гидроупругости оболочек посвящен целый ряд исследований советских и зарубежных авторов, в том числе работы [1—4].

В настоящей статье получено выражение для критической скорости идеальной несжимаемой жидкости, протекающей в безмоментной круговой цилиндрической оболочке из физически нелинейного материала. Критическая скорость жидкости $V_{\text{кр}}$ соответствует разветвлению исходной формы равновесия оболочки, определяемой начальным внутренним избыточным давлением p_0 , отвечающим ему радиусом поперечного сечения оболочки r_0 и относительной деформацией стенок ε_0 .

Найдем значение критической скорости потока, используя для этого метод малых возмущений системы. Установим для оболочки и потока явную зависимость между текущими значениями внутреннего избыточного давления в потоке жидкости p , относительной деформации стенок оболочки ε и ее радиуса r . Очевидно, что

$$\varepsilon = (r - r_{00})/r_{00}, \quad (1)$$

где r_{00} — радиус, соответствующий нулевому избыточному давлению. Если на входе потока в оболочку задать постоянное давление p_0 , вызывающее деформацию ее стенок ε_0 , то на основании (1)

$$r_0 = r_{00} (1 + \varepsilon_0). \quad (2)$$

Будем считать, что движение жидкости в процессе смены формы равновесия системы близко к установившемуся, для которого может быть использован интеграл Бернулли, определяющий условие постоянства вдоль потока суммы пьезометрического p и скоростного $K = \rho V^2/2$ напоров: $p + K = \text{const}$. Таким образом

$$p + \rho V^2/2 = p_0 + \rho V_0^2/2, \quad (3)$$

где V и V_0 — скорости потока жидкости соответственно при r и r_0 ; ρ — плотность жидкости. Условие сплошности потока может быть записано в форме

$$V r^2 = V_0 r_0^2. \quad (4)$$

Подставляя в уравнение (3) выражение для V из (4), получим для потока зависимость p от r в виде

$$p - p_0 = K_0 (1 - r_0^4/r^4). \quad (5)$$

Для цилиндрической оболочки справедлива зависимость

$$p = \sigma(\varepsilon) \delta_{00}/r, \quad (6)$$

где $\sigma(\varepsilon)$ — кольцевое напряжение в стенке; δ_{00} — ее толщина.

Очевидно, что реакции оболочки и потока жидкости на бесконечно малые изменения радиуса их поперечного сечения можно определить, сравнивая значения dp/dr для оболочки и потока. При $(dp/dr)_0 > (dp/dr)_\Pi$ имеет место устойчивая форма равновесия системы, при $(dp/dr)_0 < (dp/dr)_\Pi$ — неустойчивая. Условие

$$(dp/dr)_0 = (dp/dr)_\Pi \quad (7)$$

соответствует критическому состоянию системы. Из зависимости (5) следует

$$(dp/dr)_\Pi = 4 K_0 r_0^4/r^5, \quad (8)$$

а из зависимости (6) —

$$(dp/dr)_0 = [\sigma'(\varepsilon) (d\varepsilon/dr) - \sigma(\varepsilon)/r] \delta_{00}/r, \quad (9)$$

причем

$$d\varepsilon/dr = r_{00}^{-1}. \quad (10)$$

С учетом (6) и (10) выражение (9) записывается в виде

$$(dp/dr)_o = [m \sigma'(\epsilon) - p]/r, \quad (11)$$

где $m = \delta_{00}/r_{00}$. Для первоначальной формы движения потока при $p = p_0$ и $r = r_0$ выражения (8) и (11) соответственно примут вид

$$(dp/dr)_п = 4 K_0/r_0; \quad (dp/dr)_o = [m \sigma'(\epsilon_0) - p_0]/r_0.$$

Из условия (7) находим

$$K_0 \text{ кр} = [m \sigma'(\epsilon_0) - p_0]/4; \quad (12) \quad V_0 \text{ кр} = \sqrt{[m \sigma'(\epsilon_0) - p_0]/2\rho}. \quad (13)$$

При достижении или превышении скоростью значения, определяемого выражением (13), возможно образование смежных форм равновесия системы оболочка — поток: «бляшки» или «спазма». В работе [4] было получено выражение для критической скорости потока идеальной несжимаемой жидкости, протекающей в цилиндрической оболочке, радиальные перемещения которой линейно зависят от величины избыточного внутреннего давления

$$V_0 \text{ кр} = \sqrt{(\alpha^{-1} + p_0)/2\rho}, \quad (14)$$

причем $r = r_{00}(1 + \alpha p)$; $\alpha = (1 - \mu^2)/Em$;

E — начальный модуль упругости; μ — коэффициент Пуассона. Этот случай соответствует зависимости $\sigma(\epsilon) = (\alpha m)^{-1}(1 + \epsilon)\epsilon$, т. е. материалу с заметным упрочнением. Подставляя соответствующее выражение для $\sigma'(\epsilon)$ в (13), приходим к формуле (14).

Из зависимостей (1), (2), (6) следует:

$$p = m \sigma(\epsilon)/(1 + \epsilon); \quad p_0 = m \sigma(\epsilon_0)/(1 + \epsilon_0). \quad (15)$$

На основании (15) выражения (5), (12) и (13) можно записать в форме:

$$m [\sigma(\epsilon)/(1 + \epsilon) - \sigma(\epsilon_0)/(1 + \epsilon_0)] = K_0 [1 - (1 + \epsilon_0)^4/(1 + \epsilon)^4]; \quad (16)$$

$$K_0 \text{ кр} = m [\sigma'(\epsilon_0) - \sigma(\epsilon_0)/(1 + \epsilon_0)]/4; \quad (17)$$

$$V_0 \text{ кр} = \sqrt{m [\sigma'(\epsilon_0) - \sigma(\epsilon_0)/(1 + \epsilon_0)]/2\rho}.$$

Как следует из формулы (17), значение $K_0 \text{ кр}$ в общем случае зависит как от функций $\sigma(\epsilon)$, так и от значения ϵ_0 (r_0, p_0). При

$$\sigma(\epsilon) = (\alpha m)^{-1}(1 + \epsilon) \ln(1 + \epsilon) \quad (18)$$

$\sigma'(\epsilon) = (\alpha m)^{-1}[1 + \ln(1 + \epsilon)] = (\alpha m)^{-1} + \sigma(\epsilon)/(1 + \epsilon)$, $\sigma'(\epsilon_0) = (\alpha m)^{-1} + \sigma(\epsilon_0)/(1 + \epsilon_0)$ и на основании (17) $K_0 \text{ кр} = 1/4\alpha = \text{const}$, т. е. для оболочки из материала, характеризующегося зависимостью (18), значения $K_0 \text{ кр}$ и $V_0 \text{ кр}$ определяются только величиной α и не зависят от значения ϵ_0 (r_0, p_0).

На основании этого можно сделать вывод, что для оболочек из материалов, обладающих более интенсивной степенью упрочнения, чем определяемой зависимостью (18), повышение начального внутреннего давления p_0 (и соответственно ϵ_0 и r_0) приводит, при прочих равных условиях, к увеличению критической скорости потока. Этому классу зависимостей соответствует случай, описываемый выражением (14). Для оболочек из материалов с меньшей степенью упрочнения, чем определяемой (18), в том числе линейно деформируемых и, тем более, материалов «пластического» типа, повышение p_0 приводит к уменьшению критической скорости потока.

Для линейно деформируемого материала:

$$\sigma(\epsilon) = (\alpha m)^{-1}\epsilon; \quad \sigma'(\epsilon) = (\alpha m)^{-1}; \quad K_0 \text{ кр} = 1/4\alpha(1 + \epsilon_0) = (\alpha^{-1} - p_0)/4;$$

$$V_0 \text{ кр} = \sqrt{(\alpha^{-1} - p_0)/2\rho}.$$

В общем случае критерий соответствия материала оболочки тому или иному из указанных выше классов может быть установлен на основании (17) из условий

$$d[\sigma'(\epsilon_0) - \sigma(\epsilon_0)/(1 + \epsilon_0)]/d\epsilon_0 \cong 0,$$

или эквивалентных им соотношений

$$(1 + \epsilon_0)^2 \sigma''(\epsilon_0) - (1 + \epsilon_0) \sigma'(\epsilon_0) + \sigma(\epsilon_0) \cong 0. \quad (19)$$

Зависимость (18) является решением соответствующего (19) дифференциального уравнения. Для оболочек из материалов, подчиняющихся степенной зависимости σ от ϵ : $\sigma(\epsilon) = A\epsilon^n$, условия (19) имеют вид

$$n^2 - (1 + 2\epsilon_0)n/(1 + \epsilon_0) + \epsilon_0^2/(1 + \epsilon_0)^2 \cong 0. \quad (20)$$

Граница областей различного влияния p_0 на критическую скорость потока определяется при этом решением, вытекающего из (20) квадратного уравнения, устанавливающего

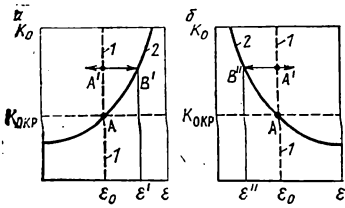


Рис. 1

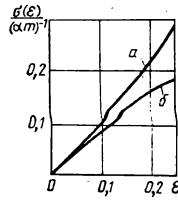


Рис. 2

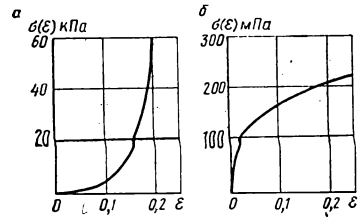


Рис. 3

однозначное соответствие между переходными значениями n и ϵ_0 . Так, например, при $\epsilon_0=0,05$ $n=1,045$; при $\epsilon_0=0,10$ $n=1,083$.

Рассмотрим некоторые качественные и количественные особенности кривых возможных равновесных состояний системы оболочка — поток при $K_0 > K_{0кр}$. Анализ уравнения состояния системы (16) показывает, что для различных видов функции $\sigma(\epsilon)$ зависимость K_0 от ϵ может иметь качественно различный характер. Прямая 1 на рис. 1 отвечает первоначальной форме движения потока; соотношение $\epsilon = \epsilon_0$ тождественно удовлетворяет уравнению (16) при любых значениях K_0 . Эта форма равновесия является устойчивой в диапазоне $K_0 < K_{0кр}$ ($V_0 < V_{0кр}$). В точке A (при $K_0 = K_{0кр}$) происходит разветвление форм равновесия системы, и при $K_0 > K_{0кр}$ первоначальная форма движения потока становится неустойчивой. Кривая 2 определяется уравнением (16) при $\epsilon \neq \epsilon_0$ и отвечает устойчивым формам равновесия системы оболочка — поток. В зависимости от вида диаграммы $\sigma - \epsilon$ кривая 2 может располагаться как в соответствии с рис. 1, а — AB' , так и в соответствии с рис. 1, б — AB'' .

Если в некоторой точке A' прямой неустойчивого равновесия 1, для которой $K_0 > K_{0кр}$, приложить к оболочке внешнее осесимметричное малое возмущение, то произойдет скачкообразное изменение физико-геометрических параметров системы, а именно, величин ϵ , r , p , V . В том случае, если кривая 2 имеет вид AB' (рис. 1, а), то при малом возмущении, обеспечивающем $d\epsilon > 0$, $dr > 0$ (образование «бляшки»), новое значение ϵ' определится абсциссой точки B' , ордината которой соответствует точке A' , и «бляшка» имеет устойчивую форму равновесия. При $d\epsilon < 0$, $dr < 0$ (образование «спазма») устойчивой формы последнего не будет. В том случае, если кривая 2 имеет вид AB'' (рис. 1, б), то при малом возмущении, обеспечивающем $d\epsilon < 0$, $dr < 0$ (образование «спазма»), новое значение ϵ'' определится абсциссой точки B'' , ордината которой также соответствует точке A' , и «спазм» имеет устойчивую форму равновесия. Если же $d\epsilon > 0$, $dr > 0$, устойчивой формы «бляшки» не будет.

Критерий соответствия материала оболочки тому или иному из двух указанных выше случаев расположения кривой 2 может быть установлен на основании (16) из условий

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{dK_0}{d\epsilon} \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{d}{d\epsilon} \left[\frac{\sigma(\epsilon)/(1+\epsilon) - \sigma(\epsilon_0)/(1+\epsilon_0)}{1 - (1+\epsilon_0)^4/(1+\epsilon)^4} \right] \cong 0,$$

приводящих к соотношениям

$$(1+\epsilon_0)^2 \sigma''(\epsilon_0) + 3(1+\epsilon_0) \sigma'(\epsilon_0) - 3\sigma(\epsilon_0) \cong 0. \quad (21)$$

Решение соответствующего (21) дифференциального уравнения приводит к следующей зависимости между σ и ϵ :

$$\sigma(\epsilon) = (\alpha m)^{-1} (1+\epsilon) [1 - (1+\epsilon)^{-4}]/4. \quad (22)$$

При зависимости (22) линия 2, определяемая выражением (16), представляет собой в координатах ϵ , K_0 горизонтальную прямую, характеризующую уравнением $K_0 = K_{0кр} = 1/4\alpha(1+\epsilon_0)^4$. При $K_0 < K_{0кр}$ система оболочка — поток, как всегда, является устойчивой. При $K_0 \geq K_{0кр}$ ни «бляшка», ни «спазм» устойчивых форм равновесия не имеют.

Для оболочек из материалов, подчиняющихся степенной зависимости σ от ϵ : $\sigma(\epsilon) = A\epsilon^n$, условия (21) имеют вид

$$n^2 - (1-2\epsilon_0)n/(1+\epsilon_0) - 3\epsilon_0^2/(1+\epsilon_0)^2 \cong 0. \quad (23)$$

Граница областей возможных устойчивых форм равновесия для «бляшки» и «спазма» определяется при этом решением вытекающего из (23) квадратного уравнения, устанавливающего однозначное соответствие между переходными значениями n и ϵ_0 . Так, например, при $\epsilon_0=0,05$ $n=0,865$; при $\epsilon_0=0,10$ $n=0,760$.

На рис. 2 представлены две диаграммы зависимости σ от ϵ , определяемые выражениями (18) (график а) и (22) (график б), отвечающими соответственно границе областей различного влияния p_0 на критическую скорость потока и границе смены устойчивых форм равновесия для «бляшки» и «спазма».

На рис. 3, а представлен график зависимости σ от ϵ для кровеносного сосуда чело-

века (брюшной аорты): $\sigma(\epsilon) = 35 \epsilon^4$ МПа. При $m=0,10$, $\epsilon_0=0,10$ на основании (15), (17) $p_0=0,318$ кПа, $K_{\text{окр}}=3,42$ кПа, $V_{\text{окр}}=2,61$ м/с; при $\epsilon=0,12$ $p=0,648$ кПа, $K_0=4,74$ кПа, $V_0=3,08$ м/с. В этом случае кривая 2, определяемая уравнением (16), проходит по линии AB' (рис. 1, а), «бляшка» ($d\epsilon > 0$) имеет устойчивую форму равновесия, а «спазм» ($d\epsilon < 0$) — неустойчивую.

График на рис. 3, б построен для меди: $\sigma(\epsilon) = 344 \epsilon^{0,32}$ МПа. Для цилиндрической оболочки из этого материала при $m=0,01$, $\epsilon_0=0,10$ — $p_0=1450$ кПа, $K_{\text{окр}}=915$ кПа, $V_{\text{окр}}=43$ м/с; при $\epsilon=0,05$ — $p=1200$ кПа, $K_0=1300$ кПа, $V_0=51$ м/с. При этом кривая 2, определяемая уравнением (16), проходит по линии AB'' (рис. 1, б) и при $d\epsilon < 0$ образуется «спазм», который имеет устойчивую форму равновесия; «бляшка» ($d\epsilon > 0$) в этом случае устойчивой формы равновесия не имеет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бологин В. В.* Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости. — Инж. сб. — Т. 24. — 1956.
2. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. — М., 1979. — 320 с.
3. *Феодосьев В. И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости. — Инж. сб. — Т. 10. — 1950.
4. *Генцев Г. А.* Поперечная устойчивость замкнутых цилиндрических оболочек при движении в них потока идеальной жидкости // Стронт. механика и расчет сооружений. — 1986. — № 1. — С. 42—44.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 624.023.943.046

Д. А. ШВАРЦМАН, канд. техн. наук, А. Д. КАЦ, инж. (ЧерноморНИИпроект, Одесса)

Определение предельной силы «зависания» грунта на анкерных тягах

Вопросам зависания грунта на анкерах и трубопроводах, лежащих на жестких опорах, посвящено значительное число исследований.

Зависание грунта — это процесс образования над конструктивным элементом, расположенным в засыпке, присоединенной массы грунта, а сила зависания — это усилия взаимодействия между ними.

Опыты [1—3] позволили авторам предложить эмпирическую схему, по которой установлена высота зоны влияния песчаного грунта на тягу, равная 5—6 d , где d — диаметр или ширина тяги, независимо от характеристик грунта засыпки.

В [4] постулировалось отсутствие зоны сдвигов у поверхности грунта и полная реализация сил трения в прорезаемом массиве грунта у самой тяги; в промежуточных сечениях угол трения присоединенной к тяге массы грунта по поверхности остального грунта принимался изменяющимся по линейному закону.

В названных работах влияние основного фактора — осадки грунтовой засыпки на усилие зависания не исследовалось.

При решении рассматриваемой задачи на основе экспериментов определена расчетная схема взаимодействия грунта с анкерными тягами, опирающаяся на экстремальные принципы и методы статики предельных состояний грунтовых масс. Это дало возможность освободиться от искусственно принимавшихся посылок, использовать строгий теоретический аппарат, полностью объяснить опытные данные и внедрить результаты расчета в практику проектирования.

Грунтовой лоток размером $1,19 \times 0,58 \times 1,20$ м (длина, ширина, высота) содержал опускаемое днище, которое при моделировании осадки грунта засыпки перемещалось вниз относительно лотка винтами. Испытуемый анкер был средним среди трех анкеров, подвешиваемых на тягах к распределительной раме, и покоился на силоизмерительном датчике, фиксирующем усилие зависания только на среднем анкере.

Наблюдаемые в эксперименте деформации показали, что в наданкерной зоне образуется симметричное относительно оси анкера уплотненное ядро, к которому примыкает симметричная криволинейная замкнутая призма выпора.

Зависание грунта на анкерных элементах обусловлено наличием взаимных перемещений анкеров и грунтового основания. При небольшой величине этих смещений (по

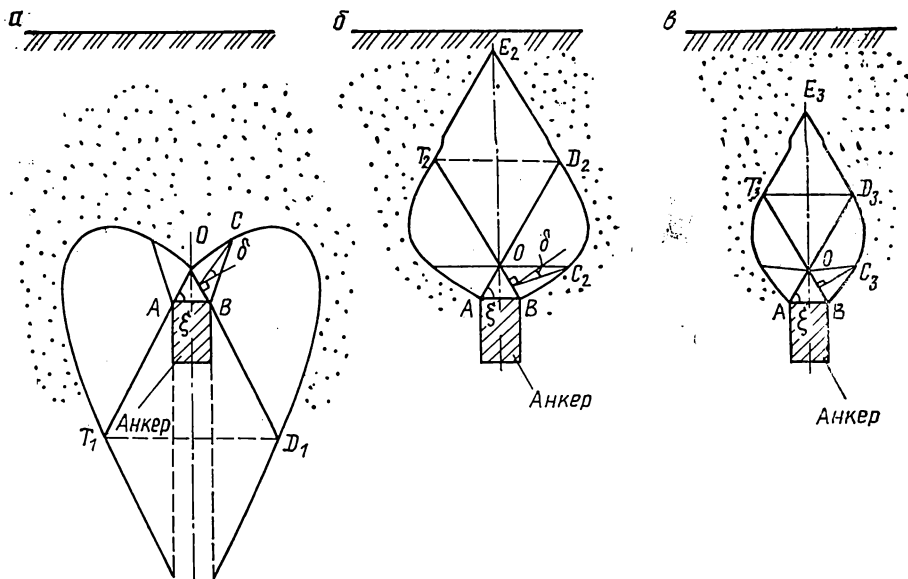


Рис. 1

опытным данным до 2...4 мм) зависимость силы зависания грунта на тягах от осадки грунта основания линейна, и процесс может описываться моделью коэффициента постели, что имеет значение при разработке метода расчета гибких анкеров, следующих за деформациями основания. При больших смещениях на каждый анкер действует предельная сила, не зависящая от деформируемости основания. Как известно, в таких случаях наиболее приемлемы решения теории предельного равновесия. Особенностью решения данной задачи теории предельного равновесия являются:

замкнутая форма призмы выпора (внутренний выпор) и связанная с этим статическая неопределимость усилий, действующих на области призмы;

неизвестное значение угла между равнодействующей усилий на грани уплотненного ядра и нормалью к этой грани.

Определим геометрию призмы выпора. Пусть боковые грани уплотненного ядра наданкерной зоны наклонены под углом ξ к горизонту. Возможны три случая: $\delta < 0$ (равнодействующая усилий на грани уплотненного ядра отклонена влево от нормали в правой половине призмы выпора (рис. 1, а); $\delta > 0$ (равнодействующая усилий на грани уплотненного ядра отклонена вправо от нормали в правой половине призмы выпора (рис. 1, б) и $\delta = 0$ (рис. 1, в).

В первом случае выпор будет направлен в глубь массива грунта, что, безусловно, обеспечивает большую несущую способность по сравнению с другими возможными случаями.

Во втором случае выпор направлен в сторону поверхности грунта, но объем призмы выпора, а значит и несущая способность грунта больше, чем в третьем случае ($b_{\Delta} BOC_2$ и ΔBOC_3 $OC_2 > OC_3$, а $C_2 \widehat{OD}_2 > C_3 \widehat{OD}_3$, следовательно, $OD_2 > OD_3$ и $OE_2 > OE_3$ (см. рис. 1, б, в)).

Таким образом, минимальная несущая способность обеспечивается при значении $\delta = 0$, а значит в соответствии с экстремальным принципом теории предельных состояний равнодействующая усилий, приложенных к грани уплотненного ядра, направлена по нормали к этой грани и форма призмы выпора определяется единственным образом. В соответствии с положениями статики предельных состояний грунтовых масс к граням уплотненного ядра примыкают две симметрично расположенные зоны минимального напряженного состояния, за каждой из которых располагается зона Прандтля, очерчиваемая логарифмической спиралью, и затем зона максимального напряженного состояния.

Определенная таким образом фигура образует призму выпора. На рис. 2 показана расчетная схема определения предельной силы зависания на анкере. На рисунке а — наданкерная призма выпора; б — многоугольники сил, действующих на зоны призмы выпора. Обе зоны максимального напряженного состояния имеют общую сторону, лежащую на оси симметрии анкера, и пригружаются массой лежащего выше грунта. Определим геометрические параметры наданкерной призмы выпора.

Так как на грани $OB(OA)$ уплотненного ядра реакция $R_{OB} \perp OB$, то наклон линий скольжения OC и BC к площадке OB определяется исходя из формул [5] при угле наклона δ линии действия реакции площадки к ее нормали, равному нулю

$$\widehat{COB} = \widehat{CBO} = \pi/4 + \varphi/2. \quad (1)$$

$$G_{OED} = \gamma d^2 e^{2\xi} \operatorname{tg} \varphi / 16 \cos^2 \xi \operatorname{tg} (\pi/4 - \varphi/2)$$

определен при помощи формулы (3).

Отсюда после простых преобразований находится реакция грунта, действующая по стороне OD призмы выпора

$$R_{OD} = \gamma d^2 e^{2\xi} \operatorname{tg} \varphi / [16 \cos^2 \xi \sin (\pi/4 - \varphi/2) + P / \cos (\pi/4 - \varphi/2)]. \quad (4)$$

На участке призмы выпора, очерченном логарифмической спиралью OCD , вес грунта

$$G_{\text{спир}} = \frac{\gamma}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2 d\alpha,$$

что с помощью формул (1) и (2) дает

$$G_{\text{спир}} = \gamma d^2 (e^{2\xi} \operatorname{tg} \varphi - 1) / 64 \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \xi \cos^2 (\pi/4 + \varphi/2). \quad (5)$$

По свойству реакций на поверхности скольжения $R_{OC} \parallel BC$ и для нахождения R_{OC} необходимо определить направление равнодействующей реакции R_{ON} по поверхности логарифмической спирали. Эта сила направлена к полюсу спирали O из точки N , лежащей на пересечении прямых BC и ED , касательных и логарифмической спирали в ее крайних точках.

Координата точки N и угол наклона силы R_{ON} к горизонту μ определяются методами аналитической геометрии

$$\operatorname{tg} \mu = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e^{2\xi} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi/2)}{\frac{\cos \varphi}{2 \sin \xi} - \frac{e^{2\xi} \operatorname{tg} \varphi}{\sin \xi} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \xi + \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Многоугольник сил $I\bar{V}WU$, действующих на грунт, находящийся в зоне Прандтля, приведен на рис. 2, б. С помощью формул (4), (5) реакция по стороне OC призмы выпора определяется из выражения

$$R_{OC} = t = \frac{P \sin (\pi/4 + \mu + \varphi/2)}{\cos (\pi/4 - \varphi/2) \sin (\pi/4 + \xi + \varphi/2 + \mu)} + \frac{\gamma d^2 \sin (\pi/4 + \mu + \varphi/2)}{16 \cos^2 \xi \sin (\pi/4 - \varphi/2) \sin (\pi/4 + \xi + \varphi/2 + \mu)} \times [e^{2\xi} \operatorname{tg} \varphi + (e^{2\xi} \operatorname{tg} \varphi - 1) \cos \mu / 4 \operatorname{tg} \varphi \sin (\pi/4 + \varphi/2 + \mu) \sin (\pi/4 - \varphi/2)]. \quad (6)$$

Рассмотрим многоугольник сил $U\bar{W}I\bar{Q}$, действующих на область минимального напряженного состояния ΔOCB . Вес грунта на участке ΔOCB равен:

$$G_{OCB} = 0,5 OC^2 \gamma \sin (\pi/2 - \varphi). \quad (7)$$

Используя формулы (1), (6), (7), получаем:

$$R_{OB} = 2t \cos (\pi/4 - \varphi/2) + \frac{\gamma d^2 \cos \varphi}{16 \cos^2 \xi \sin^3 (\pi/4 - \varphi/2)} \left[\sin \xi \cos (\pi/4 - \varphi/2) - \frac{\sin (\xi - \pi/4 + \varphi/2)}{2} \right]. \quad (8)$$

Величина предельной нагрузки, действующей на тягу, определяется из рассмотрения многоугольника сил, действующих на уплотненное ядро $Q\bar{I}\bar{F}\bar{\Psi}$ (рис. 2, б)

$$q_{\text{зав}} = R_{\text{пр}} = R_{AB} = 2R_{OB} \sin (\pi/2 - \xi) + G_{AOB}. \quad (9)$$

Здесь $G_{AOB} = (\gamma d^2 / 4) \operatorname{tg} \xi$, R_{OB} определяется по (8).

$$q_{\text{зав}} = 4t \cos \xi \cos (\pi/4 - \varphi/2) + \frac{\gamma d^2 \cos \varphi}{8 \cos \xi \sin^3 (\pi/4 - \varphi/2)} \times \left[\sin \xi \cos (\pi/4 - \varphi/2) - \frac{1}{2} \sin (\xi - \pi/4 + \varphi/2) \right] + 0,25 \gamma d^2 \operatorname{tg} \xi. \quad (10)$$

Выражение (10) справедливо при шаге анкеров B большем, чем ширина наданкерной призмы выпора, т. е. при $B > 2x_N$, где x_N — абсцисса точки N , определяемая так:

$$x_N = -\frac{d}{\sin 2\xi} \left[\frac{\cos \varphi}{2} + e^{2\xi} \operatorname{tg} \varphi \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \xi + \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

Рекомендуется принимать угол наклона боковых граней уплотненного ядра ξ к горизонту для анкеров прямоугольного сечения $\xi = 60^\circ$, а для анкеров круглого и кольцевого сечений $\xi = 50 \dots 52^\circ$, считая шириной анкера его диаметр, в песках со значениями угла внутреннего трения $26 \dots 32^\circ$.

Форма сечения анкера	Ширина анкера, см	Высота отсыпки, см	Значение предельной нагрузки, Н	
			опыт	расчет
Прямоугольная →— →—	5,0	20	429,2	336,0
	5,0	42	691,5	742,0
	5,0	91	1544,7	1595,3
Круглая	5,3	105	1425,0	1470,0

Как видно из таблицы, расчетные данные достаточно хорошо согласуются с опытными.

Таким образом, предлагаемая методика дает возможность обоснованно определять предельную нагрузку, возникающую при взаимодействии грунта засыпки с анкерами промышленных и гидротехнических сооружений, либо с конструкциями, находящимися в насыпном грунте и опирающимися на жесткие опоры, перемещения которых существенно меньше осадок уплотнения засыпки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wergzyn M.* Oddziajowanie gruntu na siangi nabrzezy oczepwiche // *Archiwum Hydrotechniki.* — 1964. — tom 12. — 86 с.
2. *Зеленский В. С.* Исследование поперечных нагрузок на анкера причальных набережных уголкового типа // *Материалы второй конференции молодых научных работников.* — М.: Транспорт, 1967. — Вып. 17(23). — С. 98—102.
3. *Яковлев П. И.* Расчет подпорных стенок с разгружающими балками // *Морские порты: Научные тр. УУЗ ММФ.* — Одесса, 1965. — № 1. — С. 12—17.
4. *Зеленский В. С.* Расчет давления грунта на анкерные тяги прямоугольного сечения / *Портовое гидротехническое строительство.* — М.: Транспорт, 1972. — Вып. 33(39). — С. 44—47.
5. *Голушкевич С. С.* Статика предельных состояний грунтовых масс. — М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1957. — 288 с.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ

УДК 624.074.1:681.3

Т. С. КИМ, канд. техн. наук, В. Г. ЯЦУРА, инж. (Хабаровский политехнический институт)

Расчет систем с односторонними связями как задача о дополнителности

Предлагаются математическая формулировка задачи об определении рабочей схемы системы с односторонними связями и способы ее решения с использованием простого и эффективного метода, называемого методом решения задач о дополнителности. Этот общий метод обладает рядом преимуществ по сравнению с методами квадратичного программирования.

Рассматривается дискретная модель в виде стержневой системы из упругого линейно деформируемого материала, имеющей кроме двусторонних набор упругих линейно деформируемых односторонних связей при статическом нагружении.

1. Задача о дополнителности заключается в отыскании неотрицательного решения системы уравнений следующего вида [1]:

найти векторы ω и x :

$$\omega = Ax + b; \quad (1) \quad \omega \geq 0; \quad x \geq 0; \quad (2) \quad \omega^T x = 0, \quad (3)$$

где A — квадратная матрица размером $n \times n$; x , ω , b — n -мерные векторы.

Условия (1) представляют собой систему n линейных уравнений с $2n$ неизвестными, на которые наложены условия неотрицательности (2) и нелинейные ограничения (3) — условия дополняющей нежесткости. Из (2) и (3) следует, что $\omega_i x_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots$, где ω_i и x_i для каждого i являются парой взаимодополнительных переменных.

Эта задача при заданных A и b имеет единственное решение, поэтому естественно, что в ее формулировке не участвует оптимизируемая целевая функция.

Запишем задачу об определении рабочей схемы системы с односторонними связями как задачу о дополнителности. При формализации записи используем основную систему метода сил, полученную отбрасыванием всех односторонних связей, если это допускается количеством и размещением прочих связей. В противном случае в основную систему могут быть введены или, напротив, из нее удалены некоторые двусторонние связи. Для упрощения записи без ограничения общности будем считать, что обошлось без этой вынужденной меры.

Обозначим: n — число односторонних связей; $x = |x_1 \dots x_i \dots x_n|^T$ — вектор реакций односторонних связей; $\Delta = |\Delta_1 \dots \Delta_i \dots \Delta_n|^T$ — вектор упругих перемещений в направлении односторонних связей относительно нейтрального положения; p — параметр внешней нагрузки; $A = \{\delta_{ij}\}_{n \times n}$ — матрица податливостей; $\delta_0 = |\delta_{i0} \dots \delta_{i0} \dots \delta_{n0}|^T$ — вектор единичных грузовых перемещений, причем $\Delta_0 = p\delta_0$; $\varepsilon = |\varepsilon_1 \dots \varepsilon_i \dots \varepsilon_n|^T$ — вектор начальных зазоров. При этом зазор ε_i может быть равен нулю, быть больше нуля (имеется открытый зазор между связью и нейтрально расположенной осью) и меньше нуля (связь стоит так, что вызывает предварительное напряжение системы); $b = |b_1 \dots b_i \dots b_n|^T$ — вектор свободных членов, причем $b = \Delta_0 + \varepsilon$; $w = |w_1 \dots w_i \dots w_n|^T$ — вектор зазоров между связью и осью системы в процессе ее деформирования, причем $w = \Delta + \varepsilon$.

При принятых обозначениях задача о дополнителности (1)–(3) эквивалентна следующей:

$$\Delta = Ax + \Delta_0; \quad (4) \quad w_i = \Delta_i + \varepsilon_i \geq 0, \quad x_i \geq 0; \quad (5)$$

$$w_i x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Полученная система ограничений (4)–(6) или (1)–(3) представляет собой полное статическое и кинематическое описание системы с односторонними связями: равновесие обеспечено использованием основной системы метода сил, уравнения (1) или (4) устанавливают связь между реакциями и перемещениями при любых их значениях, условия (2) или (5) и (3) или (6) отражают особенности односторонних связей — неотрицательность реакций и перемещений и их взаимодополнительность. Последнее условие означает, что если $\Delta_i \geq -\varepsilon_i$, то $x_i = 0$ (связь выключена), если $\Delta_i = -\varepsilon_i$, то $x_i \geq 0$ (связь включена).

Расчет системы с односторонними связями заключается в определении реакций и перемещений, удовлетворяющих соотношениям (1)–(3). Перепишем уравнения (1) в канонической форме

$$\left| \begin{array}{c} A; -E \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x \\ w \end{array} \right| = -b, \quad (7)$$

где E — единичная матрица порядка n .

2. Решение задачи о дополнителности. Если все элементы вектора b неотрицательны ($b_i = \Delta_{i0} + \varepsilon_i > 0$), то имеется очевидное решение $x_i = 0$, $w_i = b_i$ (или $\Delta_i = \Delta_{i0}$) для всех i , это значит, что все связи выключены. Задача нетривиальна при наличии хотя бы одного $b_i < 0$. Тогда начальное базисное решение системы (7) $x_i = 0$, $w_i = b_i$ удовлетворяет условию дополняющей нежесткости (3), но противоречит условию неотрицательности (2). Алгоритм решения задачи о дополнителности начинает работу с недопустимого решения, являющегося опорным планом некоторой расширенной задачи, включающей исходную задачу как крайний случай. Способ выбора расширенной задачи и начального недопустимого решения диктует последующую процедуру, приводящую к единственному решению исходной задачи (7), (2), (3). Применим этот общий метод для построения алгоритмов.

Алгоритм 1, использующий искусственный базис. Введем в уравнение (7) искусственные неотрицательные переменные y_i и запишем расширенную задачу

$$\left| \begin{array}{c} A; -E; E \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x \\ w \\ y \end{array} \right| = -b, \quad (8)$$

опорный план которой $x = 0$, $w = 0$, $y = -b$ является недопустимым для исходной задачи, так как нарушается (7). Если исходная задача обладает планом (а в нашем случае это очевидно из физических соображений), то он является планом и для расширенной задачи. Очевидно, (7) выполняется только в том случае, если $y_i = 0$. Построим искусствен-

ную целевую функцию $y = \sum_{i=1}^n y_i$. Из каждого уравнения (8) получим

$$y_i = - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j + w_i + b_0.$$

Целевая функция приобретет вид

$$y = \sum_i (c_i x_i + w_i) + b_0, \quad (9)$$

где $c_i = - \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad b_0 = - \sum_{i=1}^n b_i.$

Минимум целевой функции (9) будет достигнут, если все $y_i = 0$. В этот момент расширенное уравнение (8) совпадет с исходным (7), оптимальное решение задачи (8), (2), (3) совпадет с единственным решением задачи (7), (2), (3). Таким образом, задача заключается в минимизации (9) при ограничениях (8), (2), (3). За исключением (3) это задача линейного программирования. Соотношения (3) означают, что взаимодополнительные переменные x_i и w_i не должны одновременно входить в число базисных. При выполнении стандартной процедуры симплекс-метода это дополнительное требование учитывается правилом выбора разрешающего элемента: при определении переменной, подлежащей вводу в базис на очередном шаге, учитывается запрет на ввод переменных, взаимодополнительные которых уже являются базисными.

Заметим, что искусственный вектор, исключенный из базиса в результате некоторой итерации, не будет вводиться ни в один из последующих базисов и, следовательно, преобразование последних n столбцов расширенной матрицы (8) не требуется. Вычислительный процесс заканчивается, когда все искусственные векторы будут выведены из базиса.

Алгоритм 2, использующий расширенную задачу с модифицированными кинематическими условиями. Пусть по-прежнему все или некоторые $b_i < 0$. Для получения расширенной задачи введем во все уравнения (7) искусственную переменную $y > -b_i$

$$\left| A: -E \right| \left| \begin{matrix} x \\ w \end{matrix} \right| = -b - ye, \quad (10)$$

где $e = |1 \dots 1|^r$ — n -мерный вектор. Эта формальная процедура имеет ясную физическую интерпретацию: все односторонние связи «отступили» на одну и ту же величину y так, чтобы «не препятствовать» грузовым перемещениям в основной системе, и оказались установленными с зазорами

$$e'_i = e_i + y, \text{ при этом } b_i + y = \Delta_{10} + e'_i > 0.$$

Эта модифицированная задача имеет тривиальное решение $w = b + ye, x = 0$, которое означает, что при новом расположении связей ни одна из них не включена. Исходя из этого получим решение исходной задачи (7), (2), (3), устремив односторонние связи к исходному положению. В процессе этого возвращения будет происходить «включение и выключение» связей. Когда y обратится в нуль, условия (10) совпадут с (7) и будет достигнуто искомое решение. Вычислительный процесс, реализующий намеченную схему выявления решения, описывается ниже.

Уравнение (10) в канонической форме имеет вид

$$\left| -A: E: -e \right| \left| \begin{matrix} x \\ w \\ y \end{matrix} \right| = b. \quad (11)$$

Опорному решению [1] соответствует симплексная таблица 1, причем все или часть элементов вектора $b < 0$. На первом шаге введем искусственную переменную y в базис, а базисную переменную w_s , для которой $b_{s_0} = \min_i b_i < 0$, выведем из базиса. Для этого выполняется шаг Жордановых исключений с разрешающим элементом $-e_s$. Этим шагом определяется значение $y = y_0$, при котором происходит первое касание связи. Очевидно, что $y_0 = \min y$, при котором сохраняется рабочая схема со всеми «неработающими» связями, соответствующая опорному решению таблицы 1. Новому опорному решению [1] соответствует таблица 2:

$$y = y_0 = b'_s, \quad x = 0, \quad w_i = b'_i > 0 \text{ кроме } w_s = 0.$$

На следующем шаге определяется $y = y_1$ — минимальное значение y , при котором сохраняется рабочая схема, соответствующая опорному решению таблицы 2. Стандартный критерий симплекс-метода, дополненный альтернативными условиями (2), позволяет выработать простое и физически ясное правило выбора разрешающего элемента [1]: в базис вводится переменная, взаимодополнительная к переменной, выведенной из базиса на предыдущем шаге. Так как на первом шаге из базиса была выведена переменная w_s , то на втором шаге в базис следует ввести x_s . Это правило существенно упрощает дело: нет необходимости в заполнении и анализе строки оценок, как это предусматривается в стандартном симплекс-методе. Все остальные операции выполняются аналогично симплекс-методу.

Каждая таблица, полученная после очередного шага Жордановых исключений, соответствует моменту переключения рабочих схем. Процесс преобразования таблиц за-

канчивается, когда на очередном шаге потребуется исключение y из базиса. Решение, полученное при $y=0$, является решением исходной задачи о дополнителности.

Алгоритм 3, использующий расширенную задачу с переменным параметром внешнего воздействия. Пусть все или некоторые $b_i = \Delta_{i0} + \varepsilon_i < 0$, но при этом $\varepsilon_i > 0$, т. е. все односторонние связи стоят так, что не касаются оси системы в ненагруженном состоянии. Условия (7) запишем в виде

$$|A; -E \left| \begin{matrix} x \\ w \end{matrix} \right| = -p\delta - \varepsilon. \quad (12)$$

При $p=0$ система (12) имеет тривиальное опорное решение $w=\varepsilon$, $x=0$. Уравнения (12) совпадут с (7) при $p=P$, где P — заданное значение параметра внешнего воздействия. Исходя из этого плана расширенной задачи получим решение исходной задачи, увеличив p до значения P . В процессе роста параметра p будет происходить переключение односторонних связей в соответствии с ограничениями (12), (2), (3). Условие (12) запишем в виде

$$| -A; -E; -\delta \left| \begin{matrix} x \\ w \\ p \end{matrix} \right| = -\varepsilon.$$

Вычислительный процесс аналогичен алгоритму 2, он состоит в последовательности шагов Жордановых исключений с использованием описанного выше правила выбора разрешающего элемента. В результате этого решения получается не только рабочая схема, соответствующая заданному значению параметра нагрузки, но и все промежуточные состояния системы, что может быть использовано при решении практических задач. В [2] этот алгоритм использован при статическом расчете, а в [3] — для построения характеристики жесткости при решении задачи о колебаниях системы с односторонними связями.

В заключение заметим, что соотношения (1) — (3) являются условиями Куна — Таккера задачи квадратичного программирования, к которой сводится задача расчета системы с односторонними связями. Это свидетельствует об эквивалентности обеих формулировок. Формулировка задачи о дополнителности позволяет создавать на основе общего подхода разнообразные частные алгоритмы в зависимости от конкретной задачи или круга задач, а также учитывать вариации исходной постановки.

Описанная в настоящей статье методика реализована в виде программы для ЭВМ. Программы, реализующие метод, включены в пакет прикладных программ (ППП) КАССАНДРА, разработанный на кафедре строительной механики ХПИ. ППП КАССАНДРА проходит опытную эксплуатацию в ЦНИИпроектстальконструкция: Используемые языки программирования ПЛ-1 и ФОРТРАН-4 ЕС ЭВМ (исходные модули могут быть получены у авторов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. — Т. 2. — М.: Мир, 1986. — 134 с.
2. Ким Т. С., Яцура В. Г. Алгоритм расчета систем с односторонними связями: Сб. научн. трудов «Автоматизированное оптимальное проектирование конструкций». — Хабаровск, 1977. — 48 с.
3. Абрамсон Л. Н., Деревянкин В. А., Ким Т. С. Свободные колебания систем с односторонними связями // Строит. механика и расчет сооружений. — 1974. — № 2. — С. 41—43.

Опечатки к книге Л. П. Пилюгина «Конструкции сооружений взрывоопасных производств» (М., Стройиздат, 1989).

Страница	Строка, формула	Напечатано	Следует читать
49	15 сверху	стек-	те-
67	(2.19)	$1 - e^{-(q_0 - 3)^{2,433}/76}$	$1 - e^{-\frac{(q_0 - 3)^{2,433}}{76}}$
201	(5.15)	$p(y) = r_{1, sy} + a_p$	$p(y) = r_{1, s} y + a_p$
202	(5.12')	$\ddot{y} + 2\alpha y + \omega^2 y =$	$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y =$
204	(5.24)	$y_i =$	$\dot{y}_i =$
243	(6.16)	$d = \sqrt{l_T/4 + y_T^2}$	$d = \sqrt{l_T^2/4 + y_T^2}$
244	(6.23)	$x_1^2 = x_{1, i-1}^2 =$	$x'_1 = x'_{1, i-1} =$
261	5 сверху	$M_{p, \beta}$	$N_{p, \beta}$
281	(7.20)	$K_1 = K_{1, H} = \sqrt{\frac{\Delta p_{\max, H}}{\Delta p_{\max}}}$	$K_1 = K_{1, H} \sqrt{\frac{\Delta p_{\max, H}}{\Delta p_{\max}}}$
284	2 и 3 снизу	K_2	K_2^*
289	(7.41)	$\sum_{i=1}^n S_i k_{n, i} \psi_{pi}$	$\sum_{i=1}^{n-1} S_i k_{n, i} \psi_{p, i}$
290	(7.45)	$\sum_{n=1}^n m_i \psi_{p, i}$	$\sum_{i=1}^n m_i \psi_{p, i}$

УДК 624.074.432.044

Г. И. ПШЕНИЧНОВ, д-р техн. наук, проф., Б. А. ОРЛОВ, канд. техн. наук
(ВЦ АН СССР, Москва)

Осесимметричное физически нелинейное деформирование сетчатых оболочек вращения

Рассматривается деформированное состояние сетчатой оболочки вращения, при котором углы поворота нормали к ее срединной поверхности значительно меньше единицы, в то время как деформации настолько велики, что использование закона Гука приводит к большим погрешностям.

В настоящей статье предлагается постановка задачи, основанная на континуальной расчетной модели [1], которая в сочетании с методом упругих решений ранее использовалась в [2] при исследовании физически нелинейного изгиба сетчатых пластин. Излагается также метод численного исследования путем квазилинеаризации краевых задач статики сетчатых оболочек, в которых диаграмма растяжения-сжатия нелинейно-упругого материала может задаваться функцией весьма общего вида. Приводится пример расчета.

1. Сетчатая оболочка вращения образована несколькими семействами стержней. При этом i -тое семейство характеризуется помимо формы поперечного сечения, неизменной вдоль длины, углом наклона φ_i к меридиану в каждой точке и расстоянием a_i между соседними стержнями семейства. Сделаем еще одно допущение о конструкции, обеспечивающее осесимметрию деформирования при осесимметричном нагружении и условиях опирания, не зависящих от окружной координаты: наряду с семейством стержней, имеющих наклон φ_i , оболочка содержит такое же семейство стержней, наклоненных под углом $-\varphi_i$ к меридиану.

Следуя подходу [1], примем, что сетчатая конструкция статически эквивалентна некоторой континуальной расчетной модели. Равновесие элемента срединной поверхности описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\alpha} = -\frac{B'}{B} T_1 - \frac{A}{R_1} Q_1 + \frac{B'}{B} T_2 - A q_1; \quad \frac{dQ_1}{d\alpha} = \frac{A}{R_1} T_1 - \frac{B'}{B} Q_1 + \frac{A}{R_2} T_2 - \\ - A q_3; \quad \frac{dM_1}{d\alpha} = -A Q_1 - \frac{B'}{B} M_1 + \frac{B'}{B} M_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где α — криволинейная координата, изменяющаяся вдоль меридиана срединной поверхности оболочки. Деформации растяжения поверхности приведения расчетной модели ε_1 , ε_2 и изменения ее кривизны κ_1 , κ_2 выражаются через перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{du}{d\alpha} - \frac{w}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{AB} \frac{dB}{d\alpha} u + \frac{1}{R_2} w; \quad \gamma_1 = -\frac{dw}{d\alpha}; \quad \kappa_1 = -\frac{1}{A} \frac{d\gamma_1}{d\alpha}; \\ \kappa_2 = -\frac{B'}{AB} \gamma_1. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) коэффициенты квадратичной формы поверхности A , B и другие обозначения совпадают с принятыми в [1]. Полагая, что для деформированных стержней выполняется гипотеза Бернулли и зная ε_1 , ε_2 , κ_1 , κ_2 , можно получить деформации растяжения ε в волокне стержней на расстоянии z от поверхности приведения

$$\varepsilon_i^*(z) = c_i^2 \varepsilon_1 + s_i^2 \varepsilon_2 + z (c_i^2 \kappa_1 + s_i^2 \kappa_2); \quad c_i = \cos \varphi_i; \quad s_i = \sin \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Чтобы получить недостающие уравнения состояния для случая осесимметричной деформации, воспользуемся прежде всего соотношениями осреднения, вытекающими из гипотезы континуальной расчетной модели. Усилия и моменты расчетной модели T_1 , T_2 , M_1 , M_2 выражаются через усилия и моменты в стержнях так:

$$\begin{aligned} T_1 = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{a_i} T_i^*; \quad T_2 = \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{a_i} T_i^*; \quad M_1 = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{a_i} M_i^*; \quad M_2 = \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{a_i} M_i^*; \\ Q_1 = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{a_i} Q_i^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что во многих случаях влиянием кручения стержней и их изгибом в тангенциальной плоскости можно пренебречь и для произвольной диаграммы $\sigma = F(\epsilon)$ записать:

$$T_i^* = \int_{S_i} \sigma d S_i; \quad M_i^* = - \int_{S_i} \sigma z d S_i,$$

где σ — продольные растягивающие напряжения в волокне стержня. Это позволяет получить из (3) и (4) уравнения состояния в форме:

$$T_1 = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{a_i} \int_{S_i} f_i(z) d S_i; \quad T_2 = \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{a_i} \int_{S_i} f_i(z) d S_i; \quad M_1 = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{a_i} \int_{S_i} z f_i(z) d S_i; \quad (5)$$

$$M_2 = - \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{a_i} \int_{S_i} z f_i(z) d S_i; \quad f_i(z) = F_i [c_i^2 \epsilon_1 + s_i^2 \epsilon_2 + z (c_i^2 \kappa_1 + s_i^2 \kappa_2)].$$

Система уравнений (1) — (3) описывает напряженное и деформированное состояние расчетной модели. Дополнив ее необходимыми граничными условиями, получим краевую задачу для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

Численное решение краевой задачи получим, реализовав шаговый процесс по параметру деформирования после квазилинеаризации ее по методу Ньютона — Канторовича. В качестве параметра может быть взят как параметр нагрузки, так и некоторый функционал от решения (прогиб в характерной точке, интеграл от прогиба и т. д.). Во втором случае нагрузка не является известной функцией и подлежит определению. Допустим, что в начальный момент ($t=0$) решение известно. Тогда, задавая малое приращение Δt параметру и предполагая, что ему соответствует малое приращение решения, находим это приращение. Обозначая решение при $t=t_n$ через $\bar{y} = (u, w, \gamma_1, T_1, Q_1, M_1)^T$ и задавая Δt , будем разыскивать $\Delta \bar{y} = (\Delta u, \Delta w, \Delta \gamma_1, \Delta T_1, \Delta Q_1, \Delta M_1)^T$.

Разложим нелинейные члены уравнения в функциональный ряд Тейлора и удержим линейные относительно искомого приращения члены. Тогда линеаризованные уравнения состояния примут вид:

$$T_1 + \Delta T_1 = g_{11} \Delta \epsilon_1 + g_{12} \Delta \epsilon_2 + g_{13} \Delta \kappa_1 + g_{14} \Delta \kappa_2 + g_{15}; \quad T_2 + \Delta T_2 = g_{21} \Delta \epsilon_1 + g_{22} \Delta \epsilon_2 + g_{23} \Delta \kappa_1 + g_{24} \Delta \kappa_2 + g_{25}; \quad M_1 + \Delta M_1 = g_{31} \Delta \epsilon_1 + g_{32} \Delta \epsilon_2 + g_{33} \Delta \kappa_1 + g_{34} \Delta \kappa_2 + g_{35}; \quad M_2 + \Delta M_2 = g_{41} \Delta \epsilon_1 + g_{42} \Delta \epsilon_2 + g_{43} \Delta \kappa_1 + g_{44} \Delta \kappa_2 + g_{45},$$

где g_{ij} определяются формулами

$$g_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^4}{a_i} \int_{S_i} f_i^0 d S_i; \quad g_{12} = g_{21} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2 s_i^2}{a_i} \int_{S_i} f_i^0 d S_i; \quad g_{22} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i^4}{a_i} \int_{S_i} f_i^0 d S_i;$$

$$g_{13} = -g_{31} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^4}{a_i} \int_{S_i} z f_i^0 d S_i; \quad g_{14} = -g_{41} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2 s_i^2}{a_i} \int_{S_i} z f_i^0 d S_i; \quad g_{24} = -g_{42} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{s_i^4}{a_i} \int_{S_i} z f_i^0 d S_i; \quad g_{23} = -g_{32} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^4}{a_i} \int_{S_i} z f_i^0 d S_i; \quad g_{15} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{a_i} \int_{S_i} f_i d S_i;$$

$$g_{25} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{a_i} \int_{S_i} f_i d S_i; \quad g_{33} = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i^4}{a_i} \int_{S_i} z^2 f_i^0 d S_i; \quad g_{44} = - \sum_{i=1}^n \frac{s_i^4}{a_i} \int_{S_i} z^2 f_i^0 d S_i;$$

$$g_{35} = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{a_i} \int_{S_i} z f_i d S_i; \quad g_{45} = - \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{a_i} \int_{S_i} z f_i d S_i; \quad f_i^0 = d f_i(\epsilon_i^*) / d \epsilon_i^*.$$

Линейные уравнения (1), (2) имеют тот же вид относительно приращений. Если ввести обозначение $z = (\epsilon_1, \epsilon_2, \kappa_1, \kappa_2, T_2, M_2)^T$, то окончательно линеаризованную систему уравнений можно представить в виде

$$\Delta \bar{y}' = A_1 \Delta \bar{y} + B_1 \Delta \bar{z} + \Delta c \bar{F}_1; \quad T \Delta \bar{z} = C \Delta \bar{y} + \bar{G}.$$

Матрицы A_1, B_1, C, F_1, G, T легко выписываются, поэтому они здесь не приводятся. После очевидных преобразований получим:

$$\Delta \bar{y}' = D \Delta \bar{y} + \Delta c \bar{F}_1 + \bar{F}_2. \quad (6)$$

где $\bar{F}_2 = B_1 T^{-1} C, D = A_1 + B_1 T^{-1} C.$

Можно заметить, что матрица, обратная к T , существует, пока $g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} = 0$.

Выбрав в качестве параметра t некоторый функционал $\Phi(\bar{y})$ от решения, получим:

$$\Delta t = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \Delta y_i. \quad (7)$$

Задавая граничные условия в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \Delta \bar{y} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \quad \Gamma_2 \Delta \bar{y} = 0 \\ \text{при } \alpha = \alpha_0, \end{aligned} \quad (8)$$

получаем краевую задачу для системы уравнений (4), (5) с граничными условиями (6).

Искомое решение представим в виде: $\Delta \bar{y} = \Delta c \Delta \bar{y}_1 + \Delta \bar{y}_2$, где $\Delta \bar{y}_1$, $\Delta \bar{y}_2$ — решения уравнений соответственно $\Delta \bar{y}_1 = D \Delta \bar{y}_1 + \bar{F}_1$; $\Delta \bar{y}_2 = D \Delta \bar{y}_2 + \bar{F}_2$,

удовлетворяющие граничным условиям (6). Решения находятся численным интегрированием с использованием ортогонализации частных решений по С. К. Годунову [3]. Приращение Δc находится из условия (5). В частности, если параметр t есть прогиб в точке α , то

$$\Delta c = [(\Delta w(\alpha))_1 - (\Delta w(\alpha))_2] / \Delta w.$$

2. Рассмотрим, например, задачу о нагружении равномерным давлением цилиндрической оболочки, один край которой зашпелен, а другой свободен ($u = w = \gamma_1 = 0$ при $\alpha = 0$, $T_1 = M_1 = Q_1 = 0$ при $\alpha = \alpha_0$). Прогиб на свободном крае примем в качестве параметра деформирования.

Стержни трех семейств, образующих треугольную сетку, имеют одинаковое двутавровое сечение, площадь которого равна S . Соотношение линейных размеров сечения соответствует размерам двутавра 30 Ш1 (ТУ 14-2-24-72). Будем выбирать параметры сетки a_i так, чтобы выполнялось условие $S(a_1^{-1} + a_2^{-2} + a_3^{-3}) = V = \text{const}$ для треугольной сетки $a_1 = a_2 = a = 2 \cos \varphi a_3$. Фиксируя константу V и задавая $a = S(1 + \cos \varphi + \sin \varphi) / V$, получим напряженно-деформированное состояние конструкции для различных углов φ при постоянном объеме материала.

Поведение материала при деформировании описывается нелинейной диаграммой [4]

$$\sigma = E \varepsilon - 4 E^3 \varepsilon^3 / (27 \sigma_{\pi}^2). \quad (9)$$

Здесь $E = 196 \cdot 10^9$ Па, $\sigma_{\pi} = 392 \cdot 10^6$ Па.

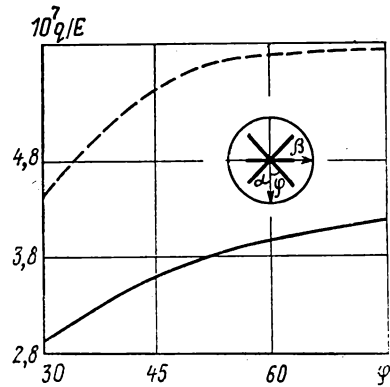
Цилиндрическая оболочка, имеющая длину, равную диаметру d , и высоту сечения двутавра $h = d/200$, испытывала равномерно распределенное внешнее давление. Был зафиксирован объем материала, соответствующий параметрам сетки $\varphi = 30^\circ$. Параметр деформирования возрастал до тех пор, пока деформации растяжения (сжатия) где-либо в волокне стержня не достигли значения ε_{π} , при котором диаграмма деформирования (9) имеет максимум. Соответствующая искомая предельная нагрузка, найденная при различных φ , показана на рисунке сплошной линией. При том же уровне наибольших по абсолютной величине деформаций в стержнях функция нагрузки, вычисленная без учета физической нелинейности, показана штриховой линией.

Как показали расчеты, напряженное состояние для кольцевых стержней представляет собой практически чистое сжатие, а для наклонных — изгиб. Положение точки наибольших напряжений изменяется в зависимости от величины φ . Напряжения в наклонных стержнях достигают своего наибольшего значения на параллели зашпеления, а напряжения в кольцах — вблизи этой параллели. Полученный результат хорошо согласуется с физическими представлениями о наличии в зоне зашпеления краевого эффекта. При малых φ напряжения в кольцах выше, но при $\varphi \approx 60^\circ$ они выравниваются и при увеличении угла напряжения в наклонных стержнях начинают преобладать.

Численные эксперименты показали сравнительно быструю сходимость метода. Во всем диапазоне φ и нагрузок потребовалось не более четырех итераций, чтобы получить решение с погрешностью до 5%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. — М.: Наука, 1982. — 352 с.
2. Пшеничников Г. И., Орлов Б. А. Нелинейно-упругий изгиб сетчатых пластин // Стронт. механика и расчет сооружений. — 1987. — № 1. — С. 27—31.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1961. — Т. 16. — Вып. 3. — С. 171—174.
4. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. — М.: Стройиздат, 1978. — 208 с.



Е. К. НУРМАГАНБЕТОВ, канд. техн. наук (ААСИ, Алма-Ата),
А. В. СКОРИКОВ, инж. (МИСИ им. В. В. Куйбышева, Москва)

Свободные колебания пологой сферической оболочки с упругим контуром

В статье методом декомпозиции [1], [2] решается задача о свободных колебаниях квадратной в плане пологой сферической оболочки с упругим относительно угла поворота контуром. Получена простая приближенная формула для значения частоты основного тона колебаний. В отличие от некоторых задач строительной механики, рассмотренных ранее в [2], метод применялся к решению не одного, а системы дифференциальных уравнений.

Система линейных уравнений свободных установившихся колебаний пологой сферической оболочки радиуса R в перемещениях имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1+\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 24 \frac{1+\nu}{h^2 R^2} w - 12 \frac{1+\nu}{h^2 R} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\rho h \omega^2 w}{D}, \end{aligned} \quad (1)$$

где u , v , w — компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности; ρ и ν — плотность и коэффициент Пуассона материала оболочки; h — толщина оболочки; D — цилиндрическая жесткость.

Рассмотрим следующие граничные условия (длина стороны контура a):

$$\begin{aligned} v = \partial u / \partial x = w = 0, 5 k a \partial^2 w / \partial x^2 \pm (1-k) \partial w / \partial x = 0 \quad \text{при } x = \pm a/2; \\ u = \partial v / \partial y = w = 0, 5 k a \partial^2 w / \partial y^2 \pm (1-k) \partial w / \partial y = 0 \quad \text{при } y = \pm a/2, \end{aligned} \quad (2)$$

где k — безразмерный коэффициент, характеризующий упругость контура. Случай $k=1$ соответствует свободному опиранию оболочки по контуру. При $k=0$ края защемлены и касательная к срединной поверхности не получает поворота. В общем случае $k=k(\omega)$.

В соответствии с методом декомпозиции введем в рассмотрение три вспомогательные задачи, из которых первые две — краевые.

Первая задача:

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{R} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = f_1^{(1)}(x, y); \quad (3)$$

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} = f_2^{(1)}(x, y); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^4} - 12 \frac{1+\nu}{h^2 R} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = f_3^{(1)}(x, y); \quad (5)$$

$$v^{(1)} = \partial u^{(1)} / \partial x = w^{(1)} = 0, 5 k a \partial^2 w^{(1)} / \partial x^2 \pm (1-k) \partial w^{(1)} / \partial x = 0 \quad \text{при } x = \pm a/2. \quad (6)$$

Вторая задача:

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} = f_1^{(2)}(x, y); \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{R} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} = f_2^{(2)}(x, y); \quad (8)$$

$$\frac{\partial^4 w^{(2)}}{\partial y^4} - 12 \frac{1+\nu}{h^2 R} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = f_3^{(2)}(x, y); \quad (9)$$

$$u^{(2)} = \partial v^{(2)} / \partial y = w^{(2)} = 0, 5 k a \partial^2 w^{(2)} / \partial y^2 \pm (1-k) \partial w^{(2)} / \partial y = 0 \quad \text{при } y = \pm a/2. \quad (10)$$

Третья задача:

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v^{(3)}}{\partial x \partial y} = f_1^{(3)}(x, y) = -f_1^{(1)}(x, y) - f_1^{(2)}(x, y); \quad (11)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x \partial y} = f_2^{(3)}(x, y) = -f_2^{(1)}(x, y) - f_2^{(2)}(x, y); \quad (12)$$

$$2 \frac{\partial^4 w^{(3)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(24 \frac{1+\nu}{h^2 R^2} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right) w^{(3)} = f_3^{(3)}(x, y) = -f_3^{(1)}(x, y) - f_3^{(2)}(x, y). \quad (13)$$

Решение $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ задачи (1), (2) представлено здесь в трех формах:

$$u^{(k)}(x, y); v^{(k)}(x, y); w^{(k)}(x, y) \quad (k=1, 2, 3).$$

В правых частях уравнений вспомогательных задач имеем неизвестные функции $f_i^{(k)}(x, y)$ ($i, k=1, 2, 3$). Если положить

$$u \equiv u^{(k)}, \quad v \equiv v^{(k)}, \quad w \equiv w^{(k)} \quad (14)$$

и сложить операторы левых частей уравнений вспомогательных задач, а также их правые части, то получим исходную систему уравнений (1). Объединение граничных условий (6) и (10) приведет к условию (2). Таким образом, задача (1), (2) эквивалентна задаче (3—14).

Неизвестные функции $f_i^{(k)}(x, y)$ определяются из условий (14). При таком решении задачи эти условия выполняются точно. В данной статье будем отыскивать приближенное решение рассматриваемой задачи путем аппроксимации указанных неизвестных функций, что приведет лишь к приближенному выполнению условий (14).

Установим некоторые свойства функции $f_i^{(k)}(x, y)$.

Так как низшая частота соответствует симметричной форме колебаний, то функции u, v, w имеют следующие свойства симметрии:

$$u(x, y) = v(y, x); \quad v(x, y) = u(y, x); \quad w(x, y) = w(y, x).$$

Из этих условий и условия (14) следует, что правые части (3—5) должны получаться соответственно из правых частей (7—9) путем замены $x \rightleftharpoons y$. Отсюда следует, что

$$f_1^{(1)}(x, y) = f_2^{(2)}(y, x); \quad f_2^{(1)}(x, y) = f_1^{(2)}(y, x); \quad f_3^{(1)}(x, y) = f_3^{(2)}(y, x). \quad (15)$$

Из первой вспомогательной задачи и условий четности u, v, w получим:

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(x, y) &= -f_1^{(1)}(-x, y) = f_1^{(1)}(x, -y); \quad f_2^{(1)}(x, y) = f_2^{(1)}(-x, y) = \\ &= -f_2^{(1)}(x, -y); \quad f_3^{(1)}(x, y) = f_3^{(1)}(-x, y) = f_3^{(1)}(x, -y). \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично записываются свойства четности для функции

$$f_i^{(2)}(x, y) \quad (i=1, 2, 3).$$

Кроме того, будем использовать граничные условия (6), (10) и условия (14). Например, имеем

$$u^{(2)}(x, \pm a/2) = w^{(2)}(x, \pm a/2) = 0; \quad u^{(1)} \equiv u^{(2)}; \quad w^{(1)} \equiv w^{(2)}.$$

Тогда левая часть уравнения (3) при $y = \pm a/2$ обращается в нуль, поскольку дифференцируются по x функции, тождественно равные нулю. Следовательно,

$$f_1^{(1)}(x, \pm a/2) = 0.$$

Исследуя таким образом свойства всех функций $f_i^{(k)}(x, y)$, в итоге получим:

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(x, \pm a/2) &= f_2^{(1)}(\pm a/2, y) = f_3^{(1)}(x, \pm a/2) = 0; \\ f_1^{(2)}(x, \pm a/2) &= f_2^{(2)}(\pm a/2, y) = f_3^{(2)}(\pm a/2, y) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая (15—17), разложим функции $f_i^{(k)}(x, y)$ в ряды Фурье, удерживая в них первые члены:

$$\begin{aligned} f_1^{(1)} &= C_1 \sin \pi x/a \cos \pi y/a; \quad f_2^{(1)} = C_2 \cos \pi x/a \sin \pi y/a; \\ f_3^{(1)} &= (C_3 + C_4 \cos \pi x/a) \cos \pi y/a. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражения для $f_1^{(2)}$ и $f_2^{(2)}$ получим соответственно из $f_1^{(1)}$ и $f_2^{(1)}$ заменой $C_1 \rightleftharpoons C_2$; $f_3^{(2)}$ получим из $f_3^{(1)}$ заменой $x \rightleftharpoons y$.

Здесь C_j ($j=1, 2, 3, 4$) — подлежащие определению константы.

Решим вспомогательные задачи.

После двукратного интегрирования уравнения (7) находим

$$u^{(2)} = \frac{2}{1-\nu} \int dy \int f_1^{(2)}(x, y) dy + \Phi_1(x) y + \Phi_2(x). \quad (19)$$

Вследствие четности u и y функции $\Phi_1(x)$ равна нулю. Используя одно из граничных условий (10): $u^{(2)}(x, \pm a/2) = 0$, получим

$$\Phi_2(x) = -\frac{2}{1-\nu} \left[\int dy \int f_1^{(2)}(x, y) dy \right]_{y=a/2}.$$

Тогда, решение (19) можно представить в виде

$$u^{(2)} = \frac{2}{1-\nu} \int_{a/2}^y dt \int f_1^{(2)}(x, t) dt$$

или с учетом (18):

$$u^{(2)} = -[2a^2/\pi^2(1-\nu)] C_2 \sin \pi x/a \cos \pi y/a.$$

Таким же образом получим решения дифференциальных уравнений (4), (11), (12):

$$v^{(1)} = -\frac{2a^2}{\pi^2(1-\nu)} C_2 \cos \pi x/a \sin \pi y/a;$$

$$v^{(3)} = [2a^2/\pi^2(1+\nu)] (C_1 + C_2) \cos \pi x/a \sin \pi y/a;$$

$$u^{(3)} = [2a^2/\pi^2(1+\nu)] (C_1 + C_2) \sin \pi x/a \cos \pi y/a.$$

Выполнив равенства $u^{(2)} = u^{(3)}$, $v^{(1)} = v^{(3)}$, найдем соотношения между константами C_1 и C_2 : $C_2 = -0,5(1-\nu) C_1$.

Примем $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$ и подставим выражения для $u^{(2)}$ в (5). Решение этого уравнения с учетом (18), четности w по x и граничных условий (6) для $w^{(1)}$ имеет вид

$$w^{(1)} = \left\{ \frac{C_3}{24} \left[x^4 - \frac{1}{2} (1+2k) a^2 x^2 + \frac{1}{16} (1+4k) a^4 \right] + a^4/\pi^4 \times \right. \\ \left. \times \left[C_4 + 12 \frac{a(1+\nu)}{\pi h^2 R} C_1 \right] \left[\cos \pi x/a + \frac{\pi(1-k)}{a^2} x^2 - \frac{\pi(1-k)}{4} \right] \right\} \cos \pi y/a. \quad (20)$$

Из условий симметрии можно записать

$$w^{(2)}(x, y) = w^{(1)}(y, x). \text{ Заметим, что } w^{(2)} = w^{(1)} \text{ при } y = \pm x.$$

Найдем выражение для функции $w^{(1)}$ в другом виде. Интегрируя (3) и учитывая (18) и часть граничных условий из (6), а именно

$$w^{(1)}(\pm a/2, y) = \partial u^{(1)}/\partial x(\pm a/2, y) = 0,$$

получаем

$$w_*^{(1)} = 2 \frac{aR}{\pi(1+\nu)} C_1 \cos \pi x/a \cos \pi y/a.$$

Для определения констант C_3 и C_4 поставим два условия. Первое условие

$$w^{(1)}(0, y) = w_*^{(1)}(0, y). \quad (21)$$

Подставив (20) в уравнение (13) и выполнив это уравнение в точках $x=0, y=\pm a/2$, получим второе условие, которое улучшит поведение функции $w^{(1)}$ на краях $y=\pm a/2$:

$$2 \left(\frac{\partial^4 w^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{x=0, y=\pm a/2} = -f_3^{(1)}(0, \pm a/2) - f_3^{(2)}(0, \pm a/2). \quad (22)$$

Из (21) и (22) найдем

$$C_3 = 0, \quad C_4 = \left(\frac{8\pi^3 R}{4 - (1-k)\pi a^3(1+\nu)} - \frac{12a(1+\nu)}{\pi h^2 R} \right) C_1. \quad (23)$$

Принимая $w^{(1)} \equiv w^{(3)}$ и используя формулы (18), (20) и (23), выполним уравнение (13) в точке $x=y=0$. Тогда получим искомое выражение для безразмерной частоты основного тона свободных колебаний

$$\Omega = 1 + \frac{4}{3} \frac{\pi^3(\pi-1+k)h^2 R^2}{4 - (1-k)\pi a^3(1-\nu^2)}, \quad (24)$$

где $\Omega = \rho \omega^2 R^2/E$.

В случае $k=1$, т. е. для оболочки, свободно опертой по контуру, формула (24) приводит к точному решению, полученному В. З. Власовым [4]

$$\Omega = 1 + (\pi^4/3) [h^2 R^2/a^4 (1 - \nu^2)]. \quad (25)$$

Заметим, что в решениях (24) и (25) безмоментные члены (т. е. первые члены) равны. Этот результат следовало ожидать [5], [6], так как тангенциальные граничные условия в (2) и для свободно опертой оболочки совпадают.

При $k=0$ из (24) следует:

$$\Omega = 1 + (4/3) [\pi^3 (\pi - 1)/4 - \pi] [h^2 R^2/a^4 (1 - \nu^2)].$$

Положив в формуле (24) $R \rightarrow \infty$, получим выражение для частоты основного тона в случае свободных колебаний пластинки

$$\omega^2 = [16 \pi^3 (\pi - 1 + k)/4 - (1 - k) \pi] (D/\rho h a^4).$$

При $k=1$ эта формула дает точное значение частоты для пластинки, шарнирно опертой по контуру. При $k=0$ получаем

$$\omega = (3b, 2/a^2) \sqrt{(D/\rho h)},$$

что на 25% отличается от точного значения частоты для защемленной по контуру пластинки [7].

Полученные новые решения удобны для практического использования при экспериментальном исследовании и проектировании перекрытий и покрытий зданий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничников Г. И. Метод декомпозиции решения уравнений и краевых задач: ДАН СССР. — М., 1985. — Т. 282. — № 4. — С. 792—794.
2. Пшеничников Г. И. Решение некоторых задач строительной техники методом декомпозиции // Строит. механика и расчет сооружений. — 1986. — № 4. — С. 12—17.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М., 1972. — С. 27—28.
4. Власов В. З. Избранные труды. — М., АН СССР. — 1962. — Т. 1. — 369 с.
5. Пшеничников Г. И. Малые свободные колебания упругих оболочек вращения // Инж. журн. — 1965. — Т. 5. — Вып. 4. — С. 685—690.
6. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, 1979. — С. 60—61.
7. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. — М., 1968. — Т. 3. — 378 с.

УДК 624.075.4.012.35

В. И. СЛИВКЕР, д-р техн. наук (ЛенЗНИИЭП)

Расчет на устойчивость стенки, составленной из шарнирно сочлененных панелей

Рассмотрим расчет на устойчивость вертикальной стенки, нагруженной в верхнем сечении сосредоточенной силой P (рис. 1). Предполагается, что стенка образуется системой вытянутых в горизонтальном направлении панелей, соединяемых между собой швом, обеспечивающим совместность линейных перемещений соседних панелей и независимость их поворотов (рис. 2). В торцевых сечениях панели шарнирно опираются по всей высоте стенки на жесткие опоры. В расчетной схеме (рис. 1) штриховыми линиями отмечены оси цилиндрических шарниров. Нижняя грань нижней панели закреплена от линейных смещений.

Вводятся следующие упрощающие расчет предпосылки:

1. При выпучивании стенки отдельные панели сохраняют свою прямолинейность в поперечном направлении (в направлении оси z). Очевидно, что эта гипотеза выполняется с тем большей точностью, чем меньше отношение a/l .

2. Эффект обжатия панелей дает пренебрежимо малый вклад в общий энергетический баланс системы.

3. В продольном направлении (в направлении оси y) форма выпучивания удовлетворительно аппроксимируется синусоидой.

Пусть u_i — смещение i -того цилиндрического шарнира в направлении оси x ; w_i — смещение в том же направлении средней линии i -той панели; β_i — угол поворота поперечного сечения i -той панели. На рис. 3 показано поперечное сечение стенки в деформированном состоянии при ее выпучивании, там же дана нумерация цилиндрических

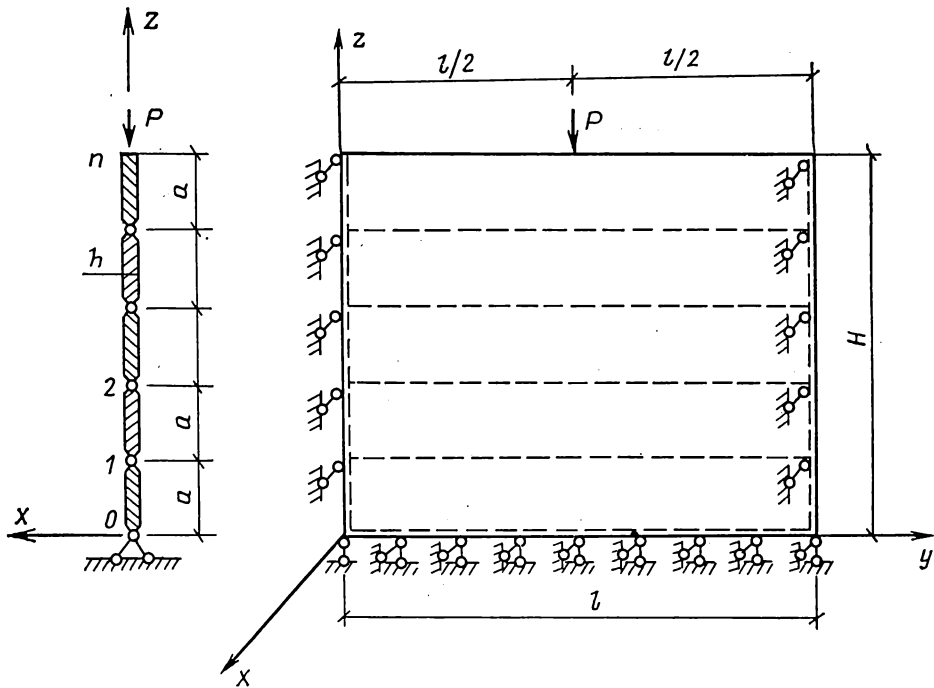


Рис. 1

шарниров. Считается, что i -тая панель расположена между цилиндрическими шарнирами с номерами $i-1$ и i . Имеем

$$\beta_i = (u_i - u_{i-1})/a, \quad w_i = (u_i + u_{i-1})/2. \quad (1)$$

В результате выпучивания стенки каждая из панелей подвергается изгибу и закручиванию. Жесткость панелей при изгибе и кручении подсчитывается по известным формулам

$$EJ = ah^3 E/12, \quad GJ_{кр} = ah^3 (1 - 0,63h/a)/3, \quad G = E/[2(1 + \nu)],$$

где E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала панелей, а остальные обозначения понятны из рис. 1.

Задачу определения критической нагрузки будем решать энергетическим методом, полагая

$$u_i = A_i \sin(\pi y/l). \quad (2)$$

Подсчитаем энергию деформации W , накапливаемую в системе при выпучивании стенки

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w_i}{dy^2} \right)^2 dy + \int_0^l GJ_{кр} \left(\frac{d \beta_i}{dy} \right)^2 dy \right]. \quad (3)$$

После подстановки в (3) соотношений (1) и (2) и интегрирования, получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\overline{EJ} (A_i + A_{i-1})^2 + \overline{GJ_{кр}} (A_i - A_{i-1})^2 \right],$$

где

$$\overline{EJ} = \pi^4 EJ/(8l^3); \quad \overline{GJ_{кр}} = \pi^2 GJ_{кр}/(2a^2 l).$$

Работа V внешней силы P равняется

$$V = P \sum_{i=1}^n (a \beta_i^2)/2 \Big|_{y=l/2} = P \sum_{i=1}^n (A_i - A_{i-1})^2/(2a).$$

В положении равновесия полная потенциальная энергия системы $U = W - V$ принимает стационарное значение, т. е.

$$\frac{\partial U}{\partial A_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

или

$$\overline{EJ} (A_{k-1} + 2A_k + A_{k+1}) + (\overline{GJ}_{кр} - P/a) (2A_k - A_{k-1} - A_{k+1}) = 0; \quad (4)$$

$$(k = 1, \dots, n-1);$$

$$A_0 = 0, \quad \overline{EJ} (A_n + A_{n-1}) + (\overline{GJ}_{кр} - P/a) (A_n - A_{n-1}) = 0.$$

Введем в рассмотрение безразмерный параметр λ

$$\lambda = (1 - \mu) / (1 + \mu),$$

$$\mu = (P/a - \overline{GJ}_{кр}) / \overline{EJ}. \quad (5)$$

Теперь (4) переписывается в виде:

$$A_{k-1} + 2\lambda A_k + A_{k+1} = 0$$

$$(k = 1, \dots, n-1); \quad A_0 = 0;$$

$$A_{n-1} + \lambda A_n = 0. \quad (6)$$

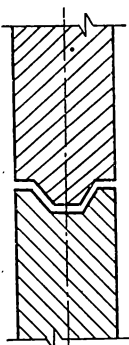


Рис. 2

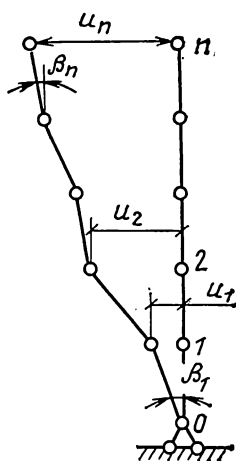


Рис. 3

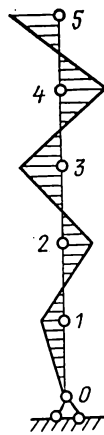


Рис. 4

Рассматривая однородную систему уравнений (6) как конечноразностную, будем искать ее решение в виде

$$A_k = C_1 \sin k\alpha + C_2 \cos k\alpha.$$

Из условия $A_0 = 0$ имеем $C_2 = 0$, поэтому

$$A_k = C_1 \sin k\alpha. \quad (7)$$

Подстановка (7) в k -е уравнение системы (6) дает

$$\sin(k-1)\alpha + 2\lambda \sin k\alpha + \sin(k+1)\alpha = 2(\cos\alpha + \lambda) \sin k\alpha = 0$$

и, следовательно,

$$\lambda + \cos\alpha = 0. \quad (8)$$

Теперь из последнего уравнения системы (6) с учетом (7) и (8) получаем

$$\sin(n-1)\alpha + \lambda \sin n\alpha = -\cos n\alpha \sin n\alpha = 0,$$

откуда

$$\alpha = \pi(1+2j)/(2n) \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Таким образом

$$\lambda_j = -\cos\alpha = -\cos[\pi(1+2j)/(2n)] \quad (j = 0, \dots, n-1).$$

Воспользовавшись (5), получаем выражение для спектра критических нагрузок

$$P_j = \left[1 + \cos \frac{\pi(1+2j)}{2n} \right] \overline{EJ} a / \left[1 - \cos \frac{\pi(1+2j)}{2n} \right] + \overline{GJ}_{кр} a.$$

Минимальному значению критической нагрузки P_* , определяющему потерю устойчивости стенки, соответствует значение индекса $j = n-1$ и, следовательно,

$$P_* = \left[\frac{1 - \cos(\pi/2n)}{1 + \cos(\pi/2n)} + \frac{8l^2 t}{\pi^2 a^2 (1 + \nu)} \right] \frac{\pi^4 a^2 E h^3}{96 l^3}, \quad t = 1 - 0,63 h/a. \quad (9)$$

В соответствии с полученным решением форма потери устойчивости, отвечающая минимальной критической нагрузке P_* , определяет следующие соотношения амплитудных значений перемещений цилиндрических шарниров

$$A_k = C_1 \sin [k(2n-1)\pi/(2n)].$$

Полученная форма потери устойчивости системы, имеющая знакопеременный характер, изображена на рис. 4.

Отметим, что зубчатый характер формы выпучивания системы согласуется с выводами, полученными ранее Р. Е. Гейzenом для задач более общего характера в аналогичной постановке (например, в [1]).

В качестве примера подсчитаем критическую нагрузку для стенки со следующими исходными данными: $l = 12$ м, $h = 0,2$ м, $a = 1,2$ м, $n = 10$, $E = 3 \cdot 10^7$ кН/м².

После подстановки данных в формулу (9) получаем $P_* = 12620$ кН.

При достаточно большом количестве панелей формулу (9) можно упростить. Действительно, при больших значениях n , раскладывая косинус в ряд Тейлора, получим приближенно

$$[1 - \cos(\pi/2n)]/[1 + \cos(\pi/2n)] \approx \pi^2/(8n^2)$$

и, следовательно,

$$P_* = [\pi^4/(64n^4\tau^2) + t/(1+\nu)] \pi^2 E h^3/(12l), \quad \tau = H/l.$$

Пренебрегая вследствие малости первым слагаемым в квадратных скобках, получим окончательно простую формулу, удобную для проведения практических расчетов

$$P_* = \pi^2 E h^3 t/[12l(1+\nu)]. \quad (10)$$

Для оценки точности формулы (10) подсчитаем значение критической нагрузки для приведенного выше примера. Имеем $P_* = 12619$ кН, что дает практически полное совпадение с решением по формуле (9).

Отметим, что при большом количестве панелей критическая нагрузка практически не зависит от высоты стенки, если только $n^2 \gg \pi^2/(8\tau)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гейзен Р. Е. Устойчивость круглых в плане ограждений из сборных элементов с шарнирными соединениями // Строит. механика и расчет сооружений. — 1984. — № 2. — С. 57—60.

Памяти Ольги Ивановны Томсон



8 февраля 1989 года на 79-м году жизни скоропостижно скончалась Ольга Ивановна Томсон, заместитель главного редактора, член редакционной коллегии журнала «Строительная механика и расчет сооружений». Издательской работой Ольга Ивановна успешно занималась практически со дня основания журнала до последних дней своей жизни — 30 лет.

Ушла из жизни Ольга Ивановна — высококвалифицированный специалист в области прикладной динамики сооружений, талантливый инженер, человек высокой принципиальности и большой скромности.

После окончания МГУ им. Ломоносова до последних дней своей жизни Ольга Ивановна работала в ЦНИИСКе им. Кучеренко.

Ольгой Ивановной был выполнен большой цикл экспериментальных и теоретических исследований по динамике промышленных зданий и сооружений, а также по разработке методов и средств виброзащиты прецизионного оборудования от кинематических возмущений. Под ее руководством и при непосредственном участии проведены динамические испытания многих промышленных сооружений, подверженных вибрации, и разработаны рекомендации по снижению уровня вибрации обследованных объектов, позволившие широко внедрить средства виброизоляции в различные отрасли промышленности, в частности в радиотехническую, электронную. О. И. Томсон известна как талантливый инженер-практик.

О. И. Томсон вела большую общественную работу. Она была секретарем и членом партбюро, председателем профкома института и председателем Совета трудового коллектива отдела динамики сооружений ЦНИИСКА им. Кучеренко.

Много сил и энергии О. И. Томсон отдавала организации технической помощи отдела динамики сооружений проектным и строительным организациям, формированию планов научных исследований и шефской помощи отдела динамики сооружений. О. И. Томсон награждена орденом «Знак Почета» и медалями.

Ольга Ивановна навсегда останется в памяти тех, кто ее знал, как образец прекрасных человеческих качеств, добросовестного отношения к своим обязанностям, честности и порядочности.

И. М. БАЛКАРЕЙ, В. Д. ДЕРЕЧИН, кандидаты техн. наук
(Харьковский ПромстройНИИпроект)

Опыт виброизоляции тяжелого низкочастотного дробильного оборудования

В журнале [1, 2] рассмотрены астатические виброизолирующие системы с мягкой нелинейной характеристикой. Астатический виброизолятор (рис. 1) включает жесткую стойку 1 с двумя резинометаллическими шарнирами 2 и 4 на концах, связанными соответственно с машинкой и основанием, и пружину 3 для обеспечения статической устойчивости. Разработанные в Харьковском ПромстройНИИпроекте астатические виброизоляторы с резинометаллическими шарнирами позволяют при высокой несущей способности (до 1000 кН) получать низкую (до 0,5 Гц) частоту собственных горизонтальных колебаний установки. Это дало возможность использовать их для уменьшения наиболее опасных горизонтальных динамических воздействий от тяжелого низкочастотного дробильного оборудования.

Астатические системы виброизоляции получили широкое распространение в промышленности. Однако недостаточная информированность проектных и эксплуатирующих оборудование организаций приводит к тому, что на некоторых предприятиях, как правило, небольших, предпринимаются попытки уменьшить динамические нагрузки путем установки машин на эластичные элементы без необходимого экспериментального и теоретического обоснования.

Ниже приведены расчетные и экспериментальные характеристики систем виброизоляции конусных дробилок типа 1750 (вес — 500 кН, амплитуда горизонтальной гармонической динамической силы — до 60 кН, частота — 4,33 Гц) и 2200 (вес — 1000 кН, амплитуда силы до 200 кН, частота — 4 Гц), изготовленных предприятиями, эксплуатирующими машины.

1. На дробильной фабрике Алма-Атинского домостроительного комбината конусная дробилка 1750 установлена на четыре виброизолятора, собранных из резиновых элементов, расположенных между металлическими прокладками. Диаметр виброизолятора — 32 см, суммарная высота элементов — 7 см. На рис. 2, а показана осциллограмма колебаний виброизолированной дробилки в рабочем режиме, на рис. 2, б — при переходе через резонанс в момент, когда амплитуды максимальны. Из рисунков видно, что частоты рабочих и резонансных колебаний отличаются менее чем в два раза. Частота собственных горизонтальных колебаний виброизолированной установки по результатам измерения составила 2,4 Гц, при этом достигнуто уменьшение горизонтальной динамической силы только в два раза.

2. На Редутском щебзаводе конусная дробилка 2200 установлена на 4 резиновые

прокладки диаметром 29 см и высотой 3,8 см, в горизонтальном направлении машина зафиксирована резиновыми упорами [3]. В соответствии с приведенными в [3] значениями жесткости резиновых прокладок частота собственных горизонтальных колебаний установки составляет 7,2 Гц. Уменьшение горизонтальной гармонической динамической силы не достигается.

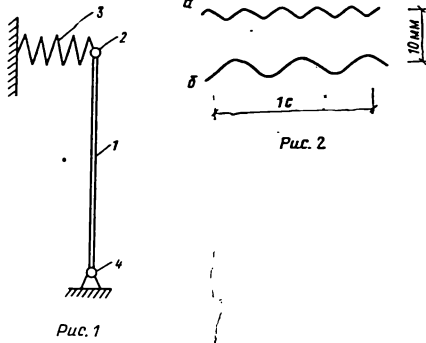
3. На Сарненском заводе дорожно-строительных материалов конусные дробилки 2200 установлены на полиуретановые прокладки, имеющие размер в плане 50×50 см и высоту 10 см. Частота собственных горизонтальных колебаний машин составляет около 8 Гц. Гармоническая динамическая сила не уменьшается.

4. На Полтавском горнообогатительном комбинате отдельные конусные дробилки 2200 установлены на резиновые элементы, горизонтальные перемещения машин ограничены пружинами. Расчетное значение частоты собственных горизонтальных колебаний составляет около 2 Гц. Предприятие предполагает отказаться от прокладок из-за потери горизонтальной устойчивости машины вследствие ползучести резины и установить дробилки на астатические виброизоляторы [1, 2], успешно эксплуатирующиеся на ГОКе в течение ряда лет.

В рассмотренных случаях не выполнено основное условие виброизоляции — требуемая отстройка частоты собственных колебаний от частоты возмущающей силы. Приведенные примеры использования эластичных прокладок для уменьшения динамических нагрузок от дробилок свидетельствуют о том, что создание высокоэффективных систем виброизоляции требует расчетных и экспериментальных проработок.

Высокоэффективные виброизоляторы для тяжелого низкочастотного оборудования с горизонтальными динамическими нагрузками, разработанные в Харьковском ПромстройНИИпроекте, прошли проверку на производстве. Они эксплуатируются на Костомукшском, Михайловском, Полтавском ГОКах, Микашевическом комбинате нерудных материалов и на многих других предприятиях с меньшим объемом дробильного производства. Частота собственных колебаний виброизолированной установки составляет 0,75...1 Гц, что обеспечивает уменьшение динамических нагрузок в 20...30 раз.

В 1985 г. Харьковским ПромстройНИИпроектом разработаны и внедрены в производство малогабаритные астатические виброизоляторы, в которых роль жесткой стойки 1 (рис. 1) выполняет цилиндр, заполненный резиной, находящейся в замкну-



том объеме под высоким давлением 10... 20 МПа. Цилиндр шарнирно связан с машиной и основанием. Наличие упругого заполнителя в стойке позволяет уменьшить высоту малогабаритных виброизоляторов в несколько раз. Их применение наиболее целесообразно при реконструкции, когда габариты зданий и существующие технологические линии не позволяют поднять дробилку на высоту около 1 м. Малогабаритные виброизоляторы обеспечивают уменьшение динамических нагрузок в 6—10 раз, что, как показал опыт, вполне достаточно при заме-

не оборудования на более мощное и производительное.

Применение виброизоляции позволяет получить высокую экономическую эффективность за счет:

проектирования облегченных поддерживающих конструкций для вновь строящихся предприятий;

установки на реконструируемых предприятиях более мощного оборудования на существующие конструкции;

создания новых агрегатов и технологических линий с дробильными установками.

Например, виброизоляция 18 конусных дробилок 2200 при реконструкции Михайловского ГОКа позволила отказаться от усиления фундамента и достигнуть экономического эффекта 0,5 млн. руб.

Выводы. 1. Установка тяжелых низкочастотных дробилок на эластичные прокладки без предварительных экспериментальных и расчетных проработок не обеспечивает эффективного уменьшения динамических нагрузок.

2. Разработанные в Харьковском ПромстройНИИпроекте астатические виброизоляторы надежны в эксплуатации и эффективно уменьшают динамические нагрузки от тяжелого низкочастотного оборудования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балкарей И. М., Деречин В. Д. Свободные колебания виброизолирующей системы с мягкой нелинейной характеристикой // Строит. механика и расчет сооружений. — 1981. — № 1. — С. 69—72.
2. Балкарей И. М., Деречин В. Д. Стационарные колебания виброизолирующей системы с мягкой нелинейной характеристикой // Строит. механика и расчет сооружений. — 1982. — № 5. — С. 69—61.
3. Виброизоляция фундамента дробилки КСД-2200 / В. И. Уманец, А. А. Вишняк, Н. Г. Матюшенко и др. // Путь и путевое хозяйство. — 1984. — № 1. — С. 25.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Стройиздат выпускает научную, научно-популярную, производственно-техническую литературу для инженеров, техников и рабочих, учебную литературу для студентов вузов, учащихся техникумов, профессионально-технических училищ, справочники, инструктивно-нормативную литературу и плакатную продукцию.

Издательство просит своевременно оформлять заказы на книги, пользуясь планами выпуска литературы, которые ежегодно поступают в книжные магазины страны.

Напоминаем адреса магазинов — опорных пунктов Стройиздата:

Ашхабад	74400, ул. Ф. Энгельса, 32, магазин № 1 «Техническая книга»
Владимир	600017, ул. Горького, 44, магазин № 4
Донецк	340055, ул. Артема, 125, магазин № 50 «Техническая книга»
Ереван	375009, ул. Кирова, 8, магазин № 16
Казань	420084, ул. Куйбышева, 3, магазин № 13 «Научно-техническая книга»
Калинин	170000, Тверской пр., 17/6, магазин № 14 «Техническая книга»
Киев	252005, ул. Красноармейская, 51, магазин № 16 «Техническая книга»
Ленинград	195027, Большеохтинский пр., 1, «Дом строительной книги»
Минск	220115, ул. Кижеватова, 66, магазин № 51
Москва	117334, Ленинский пр., 40, магазин № 115 «Дом научно-технической книги»
Рига	226253, бульвар Падомью, 24, Центральный книжный магазин
Ташкент	700100, ул. Руставели, 43, магазин № 21 «Техническая книга»
Уфа	450025, ул. 50-летия СССР, 12, магазин № 7
Фрунзе	720000, ул. Советская, 125, магазин № 11 «Научно-техническая книга»

УДК 624.04.042.3

А. П. БУЛЫЧЕВ, канд. техн. наук (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва),
Е. И. ДЕСЯТНИК, А. С. СЕМЧЕНКОВ, кандидаты техн. наук (ЦНИИЭП торгово-
бытовых зданий и туристских комплексов, Москва), Ю. М. МЕЩЕРЯКОВ,
канд. техн. наук (МАрХИ, Москва)

Временные нагрузки на несущие конструкции зданий торговли

Временные нагрузки на несущие элементы зданий торговли задаются на основании технологического задания на проектирование или минимально возможными нормативными равномерно распределенными значениями, приведенными в СНиП 2.01.07—85 «Нагрузки и воздействия». В настоящей статье предлагаются материалы статистического исследования действительных нагрузок на балочные перекрытия каркасных зданий и вероятностного обоснования их эквивалентных равномерно распределенных значений.

Натурные обследования нагрузок. Временная нагрузка на перекрытия складывается из нагрузки от людей, технологического оборудования (поддоны, стеллажи, вешалки, прилавки и т. д.), а также от товаров, размещенных на технологическом оборудовании и находящихся в складских помещениях и в торговых залах. В настоящей статье рассматривается временная нагрузка только от товаров, размещенных на технологическом оборудовании. Нагрузка на перекрытие от оборудования передается через ножки, названные далее «опорами», в виде воздействия точечного типа, случайно меняющегося во времени по величине и по положению [1, 2].

Натурные обследования проводились в течение семи лет в различных торговых зданиях нескольких городов страны по всей номенклатуре промышленных и продовольственных товаров. Для определения усилий, действующих на перекрытие, под опоры технологического оборудования устанавливались датчики давления — месдозы с гидравлическим преобразователем. Их показания фиксировались с помощью системы контрольно-измерительных приборов. При выборе числа датчиков принято допущение о равномерном заполнении стеллажей, поддонов и т. д. размещаемыми товарами. Это позволило ограничиться 10—15 датчиками при числе опор 1,5 шт/м² в одном помещении. Полная запись нагрузок для каждой группы товаров в складских помещениях проводилась на протяжении 6—12 месяцев с частотой 3—4 раза в неделю, в торговых залах — на протяжении одной недели. Последнее объясняется постоянным наличием товаров в торговом зале. Расположение технологического оборудования на площади перекрытия учитывалось фиксацией координат его опор. Масса оборудования при обработке замеров усилий не учитывалась.

Статистическая модель нагрузки. Действительные нагрузки имеют различные интенсивности и расположение по площади перекрытия. При описании статистических свойств таких нагрузок с несколькими случайными параметрами удобно перейти к эквивалентной равномерно распределенной нагрузке с одним случайным параметром — интенсивностью. Изменение величины действительной нагрузки характеризуется функцией распределения усилий под опорами, а изменение ее положения — функцией распределения эквивалентной нагрузки при конкретном значении усилия под опорами, поэтому вероятностная характеристика действительных нагрузок определяется функцией распределения эквивалентных нагрузок, получаемой по формуле полной вероятности.

Усилия от опор технологического оборудования. Запись усилий проводилась один раз в сутки в течение различных интервалов времени (сутки, недели), поэтому предполагается статистическая независимость замеров усилий. Величины усилий под опорами различного оборудования достаточно близки, так как его складские площади примерно одинаковы. Представляя усилия в виде выборки случайных значений, строятся эмпирические функции распределения усилия и доверительные интервалы каждой функции, отвечающие 0,95 для всех помещений по всей номенклатуре товаров. Эти функции используются в табличном виде. На рис. 1 показана функция распределения усилия в складском помещении мужской верхней одежды.

Условные функции распределения эквивалентных нагрузок. Помимо записи величин усилий под опорами проводилось фиксирование расположения опор по площади, позволяющее учесть изменение распределения нагрузки. При обработке результатов использовались условные функции распределения эквивалентных нагрузок, определяющие на-

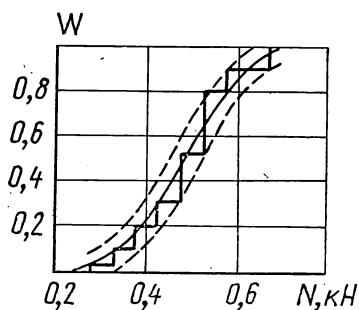


Рис. 1

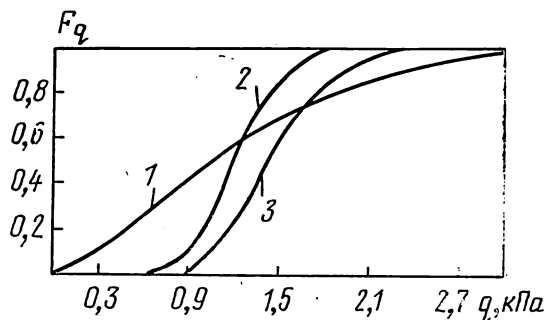


Рис. 2

грузки на различные несущие элементы при случайном расположении опор и конкретной величине усилия.

Для определения конкретного усилия интервал изменения эмпирической функции распределения случайной величины усилия разбивался на ряд значений. По каждому значению величины усилия находились эквивалентные нагрузки на несущие элементы перекрытия. При этом рассматривались все возможные схемы расположения опор на площади ячейки, ограниченной сеткой колонн. Каждая схема приложения нагрузки приводилась к эквивалентной равномерно распределенной нагрузке из условия $S_q = \max S_p$, где $\max S_p$ — максимальное усилие в сечении несущего элемента от действительных нагрузок; S_q — соответствующее усилие от эквивалентной нагрузки. Таким образом, для каждого значения усилия от опор имела выборка значений эквивалентной нагрузки, являющейся случайной величиной. По этой выборке строилась условная эмпирическая функция распределения эквивалентной нагрузки. На рис. 2 показаны функции распределения эквивалентных нагрузок для плит (кривая 1), колонн (кривая 2) и ригелей (кривая 3) в складском помещении.

Безусловные функции распределения эквивалентных нагрузок. Рассматривая изменение действительной нагрузки по величине и расположению и имея вероятностные характеристики этих изменений, находим полную вероятностную характеристику нагрузки

$$F_q = \sum_{k=1}^m F(q/k) W_k,$$

где m — число градаций интервала изменения величины случайного усилия в опорах; $F(q/k)$ — вероятность распределения q по варианту k размещения сосредоточенных нагрузок на площади перекрытия; W_k — вероятность варианта k .

Нормирование эквивалентных нагрузок. При определении нормативных значений эквивалентных нагрузок задаются прочностными характеристиками несущего элемента, функцией распределения эквивалентной нагрузки и вероятностью безотказной работы конструкции. Нормативные значения нагрузок на плиты перекрытий и ригели определяем по прочностной характеристике арматуры, на колонны — по прочностным характеристикам бетона и арматуры [3]. Функцию распределения предела текучести арматуры примем по нормальному закону с $\bar{r} = 1,5$ и $\hat{r} = 0,12$, функцию распределения несущей способности колонн также по нормальному закону с $\bar{r} = 1,6$ и $\hat{r} = 0,1$. Для ригелей и плит $\bar{r} = \bar{R}_a / R_a^p$ и $\hat{r} = \hat{R}_a / R_a^p$. Для колонн

$$\bar{r} = (\bar{R}_{np} + \mu \bar{R}_a) / (R_{np}^p + \mu R_a^p); \quad \hat{r} = \sqrt{(\hat{R}_{np} + \mu \hat{R}_a) / (R_{np}^p + \mu R_a^p)},$$

где \bar{R} — среднее значение характеристики; \hat{R} — ее стандартное отклонение; R — расчетное значение характеристики; μ — коэффициент армирования.

Параметры законов распределения прочностных характеристик и их расчетные значения назначим по действующим нормам. Тогда нормативное значение нагрузки можно найти путем перебора ряда ее значений и определения вероятностей безотказной работы конструкции с тем, чтобы эта вероятность определялась величиной 0,9965. (Величина 0,9965 — вероятность безотказной работы конструкции, находящейся под действием одной нагрузки и запроектированной по действующим нормам). Определение вероятности безотказной работы сводится к определению вероятности выполнения предельного неравенства. В таблице приведены полные нормативные значения временной нагрузки от товаров на перекрытия торговых зданий, полученные в результате статистических исследований всей номенклатуры товаров (новые) и вычисленные без учета статистиче-

Группы	Полное нормативное значение нагрузки, кПа	
	новое	старое
В торговых залах		
а) продовольственные товары	4,5	6,0
б) непродовольственные товары:		
хозяйственные, скобяные, краски, удобрения	7,0	10,0
остальные	3,5	6,0
В складских помещениях		
а) продовольственные товары:		
бакалейные	7,0	9,0
кондитерские и хлебобулочные изделия, рыбные, молочные товары, гастрономия	5,0	9,0
мясные продукты, овощи, фрукты, вино-водочные изделия, безалкогольные напитки	4,0	8,0
б) непродовольственные товары:		
керамические плиточные изделия, листовое железо (кровельное), цемент	не менее	не менее
книги, краски, хозяйственные товары	15,0	15,0
электротовары, посуда	10,0	13,0
канцтовары, ткани, ковры, бытовая химия	8,0	9,0
радиотовары, фототовары, фарфор, хрусталь	7,0	9,0
детские игрушки, ювелирные изделия, часы, сантехника, спорттовары, мебель	6,0	7,0
обувь, одежда, галантерея, музыкальные товары, порфюмерия, белье, трикотаж	5,0	5,0
	4,0	7,0

ской изменчивости нагрузки (старые). Сравнение этих значений показывает, что применение вероятностного подхода позволяет снизить величину нормируемой временной нагрузки для зданий торговли в среднем на 25%, а в отдельных случаях на 40...50%.

Коэффициенты грузовой площади ригелей и колонн. Для определения коэффициентов грузовой площади приравниваются средние ожидаемые затраты на возведение с учетом ущерба при отказах ригелей и колонн двух зданий, имеющих одинаковые площади и отличающихся сетками колонн [2]. По функциям распределения эквивалентных нагрузок на ригели и колонны при различных грузовых площадях определяются коэффициенты снижения эквивалентных нагрузок на конструкции и при их грузовой площади $A > 36 \text{ м}^2$. В зависимости от грузовой площади эквивалентная нагрузка умножается на коэффициент грузовой площади Ψ , при $A > A_1 = 36 \text{ м}^2$: в торговых залах $\Psi = 0,5 + 0,5/\sqrt{A/A_1}$; в складских помещениях $\Psi = 0,7 + 0,3/\sqrt{A/A_1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Складнев Н. Н., Десятник Е. И. Методика назначения расчетных эквивалентных нагрузок на железобетонные сборные перекрытия складских помещений в зданиях торговли // Изв. вузов. Сер. Стр-во и архитектура. — 1986. — № 5. — С. 1—6.
2. Булычев А. П. Вероятностно-экономический метод определения эквивалентных нагрузок на несущие элементы зданий // Строит. механика и расчет сооружений. — 1982. — № 1. — С. 6—9.
3. Снарский Б. И. Оптимальные расчетные и контрольные значения случайных параметров как средство оптимизации надежности // Проблемы надежности в строительном проектировании. — Свердловск, 1972. — С. 202—206.

УДК 691.421.003.121:539.4

Н. Н. КРУЧИНИН, инж. (ЦНИИСК им. Кучеренко, Москва)

О статистической оценке прочности кирпича

В период становления и развития советской строительной индустрии и методов расчета строительных конструкций под руководством Л. И. Онищика, С. А. Семенцова, С. В. Полякова и др. были разработаны нормативные документы, определяющие ряд требований, предъявляемых к кирпичу и к другим искусственным камням, установлены основные показатели их физико-механических характеристик, методы их опреде-

ления и контроля, а также разработан детерминированный метод расчета каменных конструкций по предельным состояниям, построенный на использовании марочной прочности компонент.

В настоящее время системой государственных стандартов искусственные камни различаются в основном по виду и по прочности. К прочностным характеристикам кирпича (камня) относятся временный пре-

дел прочности кирпича на сжатие и временный предел прочности на растяжение при изгибе.

По прочности кирпич подразделяется на марки. Марке кирпича соответствуют средние значения временных пределов прочности материала на сжатие и растяжение при изгибе, а для некоторых видов кирпича — только пределов прочности на сжатие. Для каждой марки кирпича установлена и нижняя граница прочностных характеристик на сжатие и растяжение при изгибе — минимальные значения прочности. Однако назначение этих границ требует должного обоснования. В настоящее время для основных видов кирпича различают следующие марки по прочности: М35, М50, М75, М100, М125, М150, М200, М250, М300.

Не анализируя регламентированные методы испытаний кирпича, отметим, что существующая методика контроля прочности кирпича имеет следующие недостатки: во-первых, она не дает возможности получить достоверную оценку прочности кирпича; во-вторых, не дает предпосылок к совершенствованию технологии производства и строительства и, в-третьих, эта методика не соответствует общетехническому подходу к нормированию и контролю прочности строительных материалов и построению методов расчета строительных конструкций [1, 2].

Наши исследования ставили целью определить фактические прочностные характеристики кирпича и провести анализ этих характеристик на основе сбора результатов стандартных испытаний кирпича, проведенных лабораториями строительных организаций Москвы и области в 1980—85 гг., и их статистическую обработку.

В табл. 1 приведены объемы выборок результатов одинаковых стандартных испытаний кирпича на сжатие (в числителе) и растяжение при изгибе (в знаменателе) по его видам и маркам. Объединение выборок кирпича по виду вызвано тем, что в главе СНиП II-22-81 в таблицах расчетных сопротивлений кирпичной кладки не вводится различий по виду кирпича.

По данным таблицы 1 возможно оценить объем выпуска кирпича по прочности — в рассматриваемом регионе преобладает выпуск кирпича марок М75 и М100. Прочностные характеристики этих двух марок кирпича как наиболее представительные выборки и подверглись статистической обработке.

В основу статистической обработки прочностных характеристик кирпича был положен опыт, накопленный в последние годы в исследованиях статистических свойств наблюдений в различных областях естествознания и техники, который показал, что распределения наблюдаемых величин, как правило, отличаются от нормального (например [3—5]).

Нами был принят подход, основанный на использовании системы кривых Пирсона, в виде программного обеспечения ЭВМ, разработанного в [3]. (Некоторые дополнения к разработанному программному обес-

печению выполнены И. В. Лебедевой при нашем участии). Проверки гипотез о виде распределения и однородности проводились с помощью критериев «хи-квадрат» и критерия Колмогорова — Смирнова. Большие объемы выборок при точечной оценке пер-вых четырех моментов, а по ним параметров кривых распределений Пирсона методом моментов практически всегда (при уровнях значимости до 0,15—0,20) приводили к принятию гипотез о соответствии теоретического распределения экспериментальному и однородности выборок.

В табл. 2 приведена требуемая стандартами и фактическая средняя прочность кирпича на сжатие (в числителе) и растяжение при изгибе (в знаменателе) по маркам и видам, коэффициент вариации прочности и тип кривой распределения прочности. В скобках указаны значения прочности кирпича глиняного обыкновенного полусухого прессования. Наименьшие значения прочности кирпича глиняного обыкновенного марок М75 и М100 в серии испытаний нормируются стандартом и равны 5,0/0,9 (0,7) и 7,5/1,1 (0,8) МПа.

В табл. 3 приведена прочность кирпича (в числителе — на сжатие, в знаменателе — на растяжение) при обеспеченностях 0,995... 0,900.

Фактическая средняя прочность кирпича на сжатие и растяжение практически удовлетворяет требованиям стандартов. Коэффициент вариации прочности кирпича на сжатие равен 30...40%, на растяжение — около 40%. Это объясняется, на наш взгляд, большой разнородностью сырья и нестабильностью технологических процессов. Вычисления показали, что прочность кирпича при нормируемых обеспеченностях (0,95 и 0,995) до 30...40% ниже средних ее значений на сжатие и до 40...50% на растяжение. По прочности на растяжение при нормируемых обеспеченностях кирпич марок М75 и М100 практически неразличим — его прочность для обеспеченности 0,95 равна 0,901 и 0,915 МПа, а для обеспеченности 0,995—0,855 и 0,745 МПа. Это указывает на слишком мелкую градацию шкалы марок кирпича и необоснованное объединение двух прочностных характеристик для одной марки кирпича.

Анализ кривых распределения прочностных характеристик материалов показывает наличие левосторонней асимметрии. Для металлов с достаточно высокими прочностными характеристиками она менее заметна, и ею возможно пренебречь. Для материалов с более низкой прочностью, например, для древесины, левосторонняя асимметрия более выражена и ее рекомендуется учитывать, используя логнормальное распределение [4]. Левосторонняя асимметрия наблюдается и для прочностных характеристик кирпича (рис. 1, а — на сжатие, б — на растяжение).

В этой связи возможно предположить, что при рассмотрении шкалы прочности материалов, когда для всех ее совокупностей принимаются сопоставимые точности измерения признака, будет прослеживаться за-

Таблица 1

	Марка кирпича				
	М50	М75	М100	М125	М150
Кирпич:					
глиняный	15	744	1915	55	20
обыкновенный	15	595	1602	44	23
лицевой	10	15	450	10	5
	10	5	251	—	—
пустотелый	10	45	109	10	—
	—	—	82	—	—
силикатный	—	15	74	5	15
	—	15	58	5	15
Объединение выборок	—	744	2475	—	—
	—	613	1975	—	—

Таблица 2

	Прочность кирпича по ГОСТу		Средняя фактическая прочность кирпича, МПа		Коэффициент вариации		Тип кривой распределения	
	М75	М100	М75	М100	М75	М100	М75	М100
Кирпич:								
глиняный	7,5	10,0	9,33	11,12	33,6	40,4	1J	3
обыкновенный	1,8 (1,4)	2,2 (1,6)	1,61	1,82	40,0	40,1	1	1
лицевой	7,5	10,0	—	10,53	—	34,3	—	3
	1,8	2,2	—	1,73	—	34,0	—	1
Объединение выборок	—	—	9,33	11,05	33,6	34,2	1J	1J
	—	—	1,74	1,96	41,3	41,4	1J	1

Таблица 3

	Кирпич М75					Кирпич М100				
	0,995	0,990	0,950	0,920	0,900	0,995	0,990	0,950	0,920	0,900
Кирпич:										
глиняный	5,13	5,27	5,80	6,13	6,19	7,189	7,230	7,551	7,791	7,952
обыкновенный	0,475	0,528	0,691	0,775	0,823	0,471	0,527	0,748	0,852	0,912
лицевой	—	—	—	—	—	5,027	5,176	5,946	6,364	6,580
	—	—	—	—	—	0,565	0,658	0,961	1,085	1,152
Объединение выборок	4,11	4,13	4,30	4,43	4,52	6,338	6,361	6,558	6,718	6,828
	0,855	0,860	0,901	0,934	0,956	0,745	0,772	0,915	0,994	1,040

висимость между видом распределения и совокупностью прочности материала. Иначе, с уменьшением марки материала по прочности асимметрия кривой распределения увеличивается и при приближении ее к нулю кривая распределения прочности стремится к J-образному виду.

Гистограмма и тип кривой распределения прочности кирпича как любого другого материала показывают плотность одномерного множества — марки кирпича по прочности. Из рассмотрения гистограмм и кривых распределений прочности кирпича смежных марок М75 и М100 видно, что

имеет место смешение этих множеств. В частности, слева при заданных обеспеченностях прочности кирпича на растяжение при изгибе марки М75 и М100 мало различимы (табл. 3), а справа на гистограммах наблюдается чередование интервалов, имеющих частоту, равную нулю и отличную от нуля (рис. 1).

Можно привести более простую интерпретацию в виде размахов варьирования прочности кирпича на сжатие и растяжение при изгибе, за нижнюю и верхнюю границы которых принята прочность кирпича с обеспеченностью 0,95 и 0,05 (см. рис. 2).

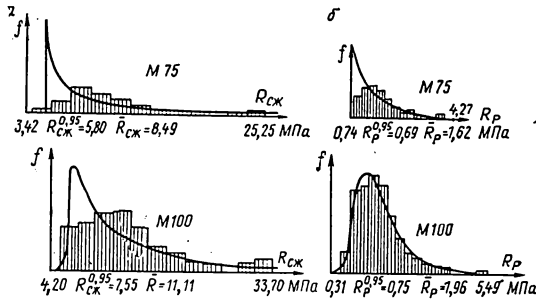


Рис. 1

Смешение прочности кирпича естественно при принятых стандартом марках кирпича и действующей стандартизированной методике контроля по среднему и наименьшему. Стандарт не должен давать такой возможности, поскольку в противном случае при аттестации продукции и на стадии проектирования нельзя получить желаемых гарантий правильности браковки материала данной партии и обеспечить расчетное сопротивление кладки со всеми вытекающими из этого последствиями.

Вычисления показали, что для объединения марок кирпича глиняного М75 и М100 по прочности на сжатие и растяжение средние значения прочности соответственно равны 10,64 и 1,76 МПа, коэффициенты вариации — 39,8% и 40,5%, а прочности при обеспеченности 0,95 соответственно 7,55 и 0,83 МПа. В этой связи при переходе к классам кирпича возможно объединить две три смежные марки в одну и отказаться от различия кирпича по виду. При этом следует иметь в виду, что близкие по величине прочности кирпича на растяжение при изгибе для разных марок и видов кирпича ни в коей мере не исключают существенного влияния этой прочностной характеристики на прочность каменной кладки (одним из объяснений незначительного увеличения расчетного сопротивления кладки при росте марки кирпича является указанная особенность), а также необходимости контроля прочности кирпича растяжению. Слабая связь между прочностью кирпича сжатие и растяжению показывает, что целесообразно установить отдельные шкалы прочности кирпича на сжатие и растяжение, рассматривая эти характеристики как самостоятельные, увязав их с прочностью и деформативностью кладки. Этому может способствовать принятая модель для определения прочности кладки при сжатии, позволяющая учитывать прочность кирпича на растяжение.

Не следует считать, что укрупнение шкалы прочности исключит дифференцирование кирпича по качеству. Всякое улучшение качества кирпича возможно учесть, на-

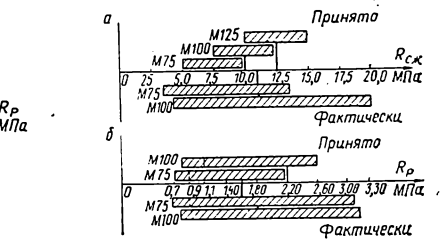


Рис. 2

пример, по аналогии с определением групп прочности металлопроката для каждого конкретного предприятия.

Нормирование прочности кирпича необходимо рассматривать во взаимосвязи с нормированием прочности каменной кладки и строительного раствора [6]. Оно позволяет обосновать количество назначаемых совокупностей прочности и считать целесообразным, как было показано для бетонов, переход к классам кирпича по прочности, что не замедлит сказаться в условиях хозяйствования на экономической заинтересованности предприятий-изготовителей в повышении качества кирпича и качества строительства.

На основе нормирования прочности кирпича возможно перейти к разработке правил статистического контроля прочности кирпича, получить гарантии требуемого качества материала и иметь постоянную достоверную оценку его прочности. Статистический контроль прочности кирпича позволит получить информацию для совершенствования технологических процессов и повышения качества исходного сырья и своевременно влиять на качество производимого материала.

Выводы: 1. Существующая методика контроля прочности кирпича и использования средних ее значений для определения прочности кладки не способствует совершенствованию методов расчета на надежность, следовательно, снижению материалоемкости зданий и сооружений, а также повышению качества материала и строительных конструкций.

2. Проведенные статистические исследования показали целесообразность перехода к классам кирпича по прочности и ее статистическому контролю, обоснованность существующей шкалы прочности кирпича и целесообразность введения отдельных шкал прочности кирпича на сжатие и растяжение при изгибе. Продолжение исследований в этом направлении позволит перейти к вероятностному методу расчета каменных и армокаменных конструкций и устранить приведенные выше недостатки.

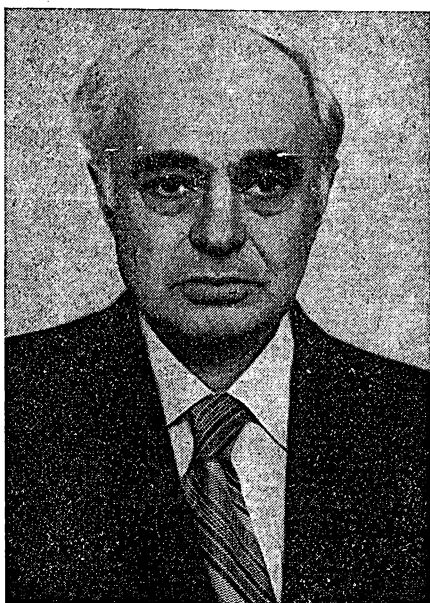
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Складнев Н. Н. О методологических принципах вероятностного расчета строительных конструкций // Строит. механика и расчет сооружений. — 1986. — № 3. — С. 12—16.
2. Райзер В. Д. Методы теории надежности в задачах нормирования расчетных параметров строительных конструкций. — М.: Стройиздат. 1986. — 192 с.

3. *Андреев О. О.* Оценка несущей способности железобетонных сечений с учетом вероятностной природы прочности бетона и стали // Строит. механика и расчет сооружений. — 1984. — № 6. — С. 16—19.
4. *О статистической оценке нормируемых характеристик прочности клееной древесины* / М. Б. Краковский, Е. М. Знаменский, А. К. Цветков, Ю. Ю. Славик // Строит. механика и расчет сооружений. — 1983. — № 6. — С. 6—9.
5. *Бойцов Б. В., Орлова Т. М.* Статистическое исследование механических характеристик конструктивных материалов // Надежность и контроль качества. — 1982. — № 5. — С. 50—55.
6. *Райзер В. Д., Кручинин Н. Н.* О нормировании прочности строительных растворов // Строит. механика и расчет сооружений. — 1988. — № 4. — С. 50—53.

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

К 75-летию И. Е. Милейковского



Известному ученому в области строительной механики, доктору технических наук, профессору Иосифу Ефимовичу Милейковскому исполнилось 75 лет.

И. Е. Милейковский — один из ведущих специалистов в области теории и методов расчета тонкостенных пространственных систем.

Трудовую деятельность Иосиф Ефимович начал в 1932 г. в ЦНИИПсе (ныне ЦНИИСК им. Кучеренко) техником. В 1939 г. окончил МИСИ им. В. В. Куйбышева. В годы Великой Отечественной войны участвовал в проектировании объектов оборонного значения. С 1945 г. И. Е. Милейковский работает в ЦНИИПсе, пройдя путь от младшего до главного научного сотрудника отдела прочности и надежности сооружений. В 1967 г. утверждён в звании профессора.

Научная деятельность И. Е. Милейковского началась под руководством крупнейшего советского ученого В. З. Власова. И. Е. Милейковский обобщил и развил раз-

работанные В. З. Власовым методы расчета оболочек и складчатых систем.

И. Е. Милейковский принимал участие в разработке методов расчета ряда ответственных сооружений. Им и его учениками выполнены исследования по разработке алгоритмов и программ для расчета пространственных систем на ЭВМ, в частности, созданы теория и программное обеспечение для расчета оболочек спирально-навивного типа. Результаты его теоретических исследований внедрены во многих проектных и исследовательских организациях. Ученики И. Е. Милейковского (32 человека) успешно защитили кандидатские диссертации.

Труды И. Е. Милейковского посвящены проблемам расчета пространственных конструкций, в частности, задачам расчета покрытий типа гиперболического параболоида, расчетам железобетонных оболочек с учетом реальной диаграммы деформирования, а также многоволновых и ребристых оболочек на прочность и устойчивость, учету податливости опорных закреплений, расчету оболочек методом предельного равновесия и др.

Из 120 опубликованных работ 6 составляют монографии, в том числе «Расчет оболочек и складок методом перемещений», «Расчет массивных конструкций методами строительной механики пространственных систем», «Расчет железобетонных цилиндрических складок-оболочек», отмеченная премией В. З. Власова. Им написаны статьи к «Справочнику проектировщика», «Энциклопедии строительства».

В течение многих лет И. Е. Милейковский является членом Президиума Национального комитета СССР по пространственным конструкциям (ИАСС). За внедрение в практику проектирования пространственных конструкций он трижды награжден бронзовыми медалями ВДНХ, имеет пять авторских свидетельств.

В коллективе Иосиф Ефимович Милейковский пользуется авторитетом не только как высококвалифицированный специалист, но и как скромный, отзывчивый, чуткий товарищ.

Желаем Иосифу Ефимовичу доброго здоровья и творческих успехов.

СОДЕРЖАНИЕ

Вопросы оптимального проектирования

Калинин И. Н. Дискретная оптимизация пространственной стержневой ферменной конструкции 1

Расчеты на прочность

Чижевский А. Н. Уравнения составного стержня в перемещениях 6

Икрин В. А. Оценка последствий действия сил, движущихся по полуплоскости и полупространству 9

Назаренко Ю. Б. Дифракция упругих сферических волн на цилиндрической полости, подкрепленной впаиной оболочкой жесткости 13

Гарасов А. А. Статический расчет оболочки вращения со сложной структурой регулярных ребер 17

Присяжнюк В. К., Марчук А. В. Учет деформаций поперечного сдвига и обжатия в задачах контактного взаимодействия многослойных плит с упругим полупространством 20

Картвелишвили В. М., Петрунькин А. Э. Формализованные процедуры аппроксимации в задачах вычислительной термомеханики 22

Курек Л. Н., Смирнова Л. Г. Решение нелинейных задач изгиба пластин и балок методом декомпозиции 28

Расчеты на устойчивость

Кожемякина И. Ф., Сметанина Л. Г. Области динамической неустойчивости трансверсально изотропной пластины при движении нагрузки 31

Гениев Г. А., Минасян А. Р. О формах потери устойчивости («бляшка» и «спазм») физически нелинейных оболочек при движении в них потока жидкости 34

Экспериментальные исследования

Шварцман Д. А., Кац А. Д. Определение предельной силы «зависания» грунта на анкерных тягах 37

Программное обеспечение инженерных расчетов

Ким Т. С., Яцура В. Г. Расчет систем с односторонними связями как задача о дополнителности 41

В помощь работникам проектных организаций

Пишечников Г. И., Орлов Б. А. Осесимметричное физически нелинейное деформирование сетчатых оболочек вращения 45

Нурмаганбетов Е. К., Скориков А. В. Свободные колебания пологой сферической оболочки с упругим контуром 48

Сливкер В. И. Расчет на устойчивость стенки, составленной из шарнирно сочлененных панелей 51

Балкарей И. М., Деречин В. Д. Опыт виброизоляции тяжелого низкочастотного дробильного оборудования 55

Нормирование расчетов

Булычев А. П., Десятник Е. И., Семченков А. С., Мещеряков Ю. М. Временные нагрузки на несущие конструкции зданий торговли 57

Кручинин Н. Н. О статистической оценке прочности кирпича 59

Наши юбилеры

К 75-летию И. Е. Милейковского 63

Информация 2-я пол. обл.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Н. Н. СКЛАДНЕВ (гл. редактор), И. В. СИТНИКОВА (зам. гл. редактора), А. В. АЛЕКСАНДРОВ, О. О. АНДРЕЕВ, В. И. БАЙКО, В. В. БОЛОТИН, Г. А. ГЕНИЕВ, П. Ф. ДРОЗДОВ, М. И. ЕРХОВ, В. В. ЛАРИОНОВ, Б. Я. ЛАЩЕНИКОВ, Н. Н. ЛЕОНТЬЕВ, Р. Р. МАТЕВОСЯН, Л. Л. ПАНЬШИН, В. Д. РАЙЗЕР, В. И. ТРАВУШ, А. И. ЦЕЙТЛИН, А. А. ЧИРАС

Адрес редакции: 109389, Москва, Ж-389; 2-я Институтская, д. 6, тел. 174-86-47.

Технический редактор Н. Н. Удалова

Корректор И. В. Медведь

Сдано в наб. 09.03.89 Подп. в печ. 16.05.89 Т-09769 Формат 70×108^{1/16} Бум. книжно-журнальная
Печать высокая. Усл. п. л. 5,6 Усл. кр.-отт. 6,13 Уч.-изд. л. 7,52
Тираж 4043 экз. Зак. № 102.

Подольский филиал ПО «Периодика» Союзполиграфпрома Госкомиздата СССР
142110, Подольск, ул. Кирова, 26

Публикуем рефераты докладов, прочитанных в 1988 г. на секции строительной механики и сопротивления материалов Ленинградского Дома ученых им. М. Горького АН СССР.

Проблемы механики зернистых сред. И. И. Кандауров (Ленинград).

Автором написана новая книга, в которой много внимания уделяется методологическим вопросам построения механики зернистых сред и ее связи с другими областями знаний, развивается системный подход к механике грунтов.

Известно, что математическим аппаратом системного подхода является теория вероятностей и вероятностные методы, которые использовались автором книги при решении задач механики зернистых сред и ранее. Новый подход позволил сделать обобщения и построить решения, из которых прежние результаты в области механики зернистых сред получаются как частные случаи. Кроме того, на основе изучения распределения напряжений в зернистых средах автор построил решения, относящиеся к теории вероятностей, из которых как частные случаи получаются различные известные распределения вероятностей (Ландалса, Гаусса, Максвелла, Рэлея, Вейбулла). На основе уравнений, используемых в механике зернистых сред, показано также, что эти известные распределения относятся к одному семейству распределения вероятностей.

Развитие метода конечных элементов для решения физических нелинейных задач строительной механики. А. С. Городецкой, А. И. Козачевской, В. М. Мельников (Киев).

Разработан вычислительный комплекс (ВК) «Феникс», предназначенный для расчета строительных конструкций с учетом физической и геометрической нелинейности на ЕС ЭВМ. В ВК реализован метод конечных элементов для нелинейного расчета различными модификациями шагового метода.

ВК позволяет выполнить: статический расчет стержневых, тонкостенных и массивных железобетонных конструкций с учетом развития неупругих деформаций в сжатых и образовании трещин в растянутых зонах бетона, текучести арматуры при кратковременном действии нагрузки;

статический расчет вантовых и мембранных систем с учетом геометрической и физической нелинейности;

расчет конструкций на грунтовом основании с учетом неупругих свойств грунта;

армирование сечений отдельных типов стержневых и тонкостенных конструкций от действия усилий, получаемых при расчете с учетом неупругих свойств материала.

При расчете железобетонных конструкций используются ортотропная и квазианізотропная модели бетона, а также анизотропная модель деформирования железобетона с трещинами.

Учет геометрической нелинейности реализуется как с изменением геометрии в процессе шагового расчета и учетом этого изменения при составлении уравнений равновесия на каждом шаге, так и решением дифференциального уравнения изогнутой оси стержня с учетом продольного изгиба.

Метод граничных элементов в контактных задачах механики сплошной среды. А. М. Линьков (Ленинград).

Дан обзор проблемы численной реализации метода граничных элементов (МГЭ) и в этом контексте освещены результаты работ, выполненных под руководством автора. Отмечено, что решение с помощью МГЭ контактных задач механики твердого тела, теплотехники и теории фильтрации предпочтительно строить на основе прямых методов, в которых в граничные интегральные уравнения (ГИУ) входят физические величины. Отмечены достоинства предложенных автором уравнений, связывающих разрывы смещений (потоков) с усилиями (потенциалом, температурой, напором). Рассмотрены вопросы технологии программирования и дан анализ универсальных блоков программы. Выделена конечная цель — простая и доступная для модификаций программа.

Отмечены особенности интегрирования при

вычислении элементов матриц, учета граничных и контактных условий, формирования глобальных матриц и решения систем уравнений. Обращено внимание на трудности, возникающие при рассмотрении угловых точек, и указаны способы их преодоления. Сформулированы требования к организации диалогового режима при реализации МГЭ на пересокомпьютерах. Подчеркнута целесообразность объединения усилий по разработке отечественного коммерческого комплекса программ на основе МГЭ и полезность издания справочника по МГЭ.

Итерационные алгоритмы решения краевых задач строительной механики на ЭВМ В. В. Улитин (Ленинград).

Рассматриваются численные алгоритмы решения краевых задач для оболочек вращения, стержней переменного сечения на упругом основании и других подобных систем. Разрешающие уравнения в этих случаях представляют собой либо линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами либо систему линейных дифференциальных уравнений нормального вида. В первом случае предлагается алгоритм, основанный на факторизации линейного дифференциального оператора, во втором — алгоритм построения матрицанта для матрицы системы. В обоих случаях в численном виде получается общее решение задачи. При этом все величины представляются множеством своих значений в узлах сегментов. Основное преимущество алгоритмов состоит в том, что они позволяют с минимальными затратами времени получать решения многовариантных по условиям закрепления и нагружения задач и строить матрицы жесткости и податливости для элементов, свойства которых описываются указанными выше уравнениями. Это позволяет использовать их в составе программ, реализующих МКЭ.

Для решения нестационарных задач разработан численный алгоритм выполнения прямого и обратного преобразования Лапласа. Приводится экономичный алгоритм поиска минимума в пространстве параметров.

Для реализации этих алгоритмов разработана система процедур на языке ПЛ/1. Приведен пример решения нестационарной задачи для оболочки с коническим переходом и охлаждаемым фланцем.

Применение квазистержневых моделей в задачах о взаимодействии сооружения с грунтом. О. Д. Танаидыко (Ленинград).

При расчете строительных конструкций на основе метода одномерных элементов в принятой расчетной схеме необходимо обеспечить сопряжение квазистержневой модели сооружения с моделью основания, отвечающей тем или иным гипотезам, принимаемым в механике грунтов. Применительно к двухпараметрической модели грунтового основания предложено несколько вариантов квазистержневых и обычных стержневых моделей для решения статических и динамических задач.

Более сложные варианты квазистержневых аналогий приходится применять в тех случаях, когда грунт рассматривается как линейно деформируемое тело, рассчитываемое на основе гипотез теории упругости. Во многих случаях оказывается возможным ограничиться обычной стержневой моделью в виде плоской или пространственной фермы, топология которой определяется необходимостью соединить каждый узел модели основания с каждым другим узлом с помощью двух стержней и промежуточного шарнирного узла. При расчете свайных фундаментов, шпунтовых стен, бульверков формируется квазистержневая модель грунта основания, позволяющая проследить за переходом части грунта в предельное состояние.

В расчетах фундаментов глубокого заложения и тоннельных обделок могут применяться так называемые бесконечные элементы. Разработан ряд типов таких элементов, примененных к решению задач сейсмостойкости тоннелей в квазистатической постановке.