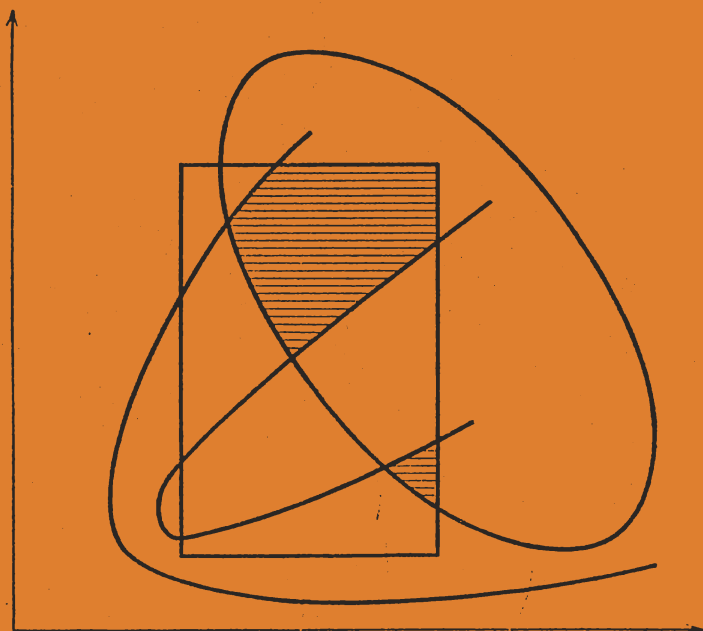


И. М. СОБОЛЬ, Р. Б. СТАТНИКОВ

**ВЫБОР  
ОПТИМАЛЬНЫХ  
ПАРАМЕТРОВ  
В ЗАДАЧАХ  
СО МНОГИМИ  
КРИТЕРИЯМИ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М. В. КЕЛДЫША

И. М. СОБОЛЬ, Р. Б. СТАТНИКОВ

ВЫБОР  
ОПТИМАЛЬНЫХ  
ПАРАМЕТРОВ  
В ЗАДАЧАХ  
СО МНОГИМИ  
КРИТЕРИЯМИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
МОСКВА 1981

УДК 518.5

**Соболь И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981.**

Книга содержит разработанную авторами методику постановки, изучения и решения задач, в которых необходимо выбрать наилучшим образом несколько параметров с учетом нескольких критериев качества. Наиболее примечательная особенность этой методики — использование ЭВМ не только для решения задачи, но и для ее постановки. Приведен численный метод приближенного построения компромиссных кривых. Отдельная глава содержит краткие сведения об ЛП<sub>n</sub>-последовательностях, с помощью которых выбираются многомерные пробные точки.

Книга рассчитана на широкий круг инженеров, конструкторов и научных работников, имеющих дело с многопараметрическими системами.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук  
**Н. Н. КАЛИТКИН**

С  $\frac{20204-504}{055(02)-81}$  24—81 (кн. 2) 1702070000

© Издательство «Наука», 1981 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Книга возникла в результате нашего многолетнего сотрудничества и выражает наши взгляды на проблему выбора оптимальных параметров. Во-первых, мы считаем необходимым рассматривать задачи оптимального проектирования как многокритериальные, а не сводить их к однокритериальным, так как это, как правило, приводит к серьезному огрублению задачи, искажению ее существа, а следовательно, к неоправданной замене одной задачи другой. К такому же выводу в настоящее время приходят многие исследователи, занимающиеся разработкой математических методов для оптимального проектирования. Что же касается конструкторов, то они всегда были рады поддержать такую точку зрения, но, к сожалению, достаточно эффективных математических методов для изучения многокритериальных задач не было.

Во-вторых, мы считаем также, что не следует стремиться к полной автоматизации процесса выбора оптимальных параметров: выбор должен осуществлять сам конструктор, но с помощью ЭВМ. Поэтому наиболее рациональными мы считаем алгоритмы, содержащие диалог человека с вычислительной машиной. И эта наша точка зрения также соответствует тенденции, наметившейся в последние годы<sup>1</sup>.

Проектирование реальных объектов с учетом многих критериев качества обычно имеет характер эвристического итерационного процесса: конструктор, рассматривая различные варианты модели, оценивает результаты, уточняет постановку задачи, затем снова решает ее и анализирует новые варианты. В процессе проектирования нередко меняются взгляды на значимость отдельных критериев. И это продолжается до тех пор, пока конструктор не решит, что пришло время остановиться: найдено то, что ему нужно.

---

<sup>1</sup> См., например, книгу «Современное состояние теории исследования операций». М.: Наука, 1979; серию статей П. С. Краснощекова, В. В. Морозова и В. В. Федорова в журнале «Техническая кибернетика» за 1979 год и др.

Нам удалось в какой-то мере алгоритмизировать этот процесс, представив его в форме диалога конструктора с ЭВМ: при помощи ЭВМ формируется множество допустимых решений, среди которых конструктор выбирает наилучшее.

Мы старались сделать книгу доступной возможно более широкому кругу читателей и ради этого пожертвовали кое-где математической общностью. Вопросы, связанные с теорией ЛП-последовательностей, вынесены в Дополнение, написанное И. М. Соболев. В качестве дополнительной литературы указаны работы, в которых использованы методы, изложенные в настоящей книге. Список этих работ не претендует на полноту.

Мы считаем своим приятным долгом вспомнить с благодарностью покойного И. И. Артоболевского, который всячески стимулировал нашу работу и в большой степени способствовал внедрению этих методов в практику проектирования механизмов и машин. Мы благодарны Г. В. Крейнину за участие в получении первой таблицы испытаний, Р. П. Федоренко, В. В. Подиновскому и П. С. Краснощекову, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний, и С. И. Фридман, которая составила программы для расчета примеров, приведенных в книге.

## ВВЕДЕНИЕ

**Задачи проектирования машин.** Они всегда многокритериальны, так как при выборе наилучшего варианта приходится учитывать много различных требований, предъявляемых к машине, и среди этих требований встречаются противоречащие друг другу. Однако почти все математические методы оптимизации предназначены для отыскания оптимального значения одной функции — одного критерия. Поэтому чаще всего пытаются неоправданными упрощениями свести многокритериальную задачу к однокритериальной. По нашему убеждению, большинство неудачных решений связано именно с этим этапом, так как если сформулированная математическая задача не адекватна исходной задаче, то никакой метод оптимизации положения не спасет: найденное «оптимальное решение» будет плохим.

Кто же должен давать математическую постановку задачи? Обычно считают, что это дело конструкторов<sup>1</sup>, которые хорошо разбираются в существе задачи. Однако в действительности, когда речь идет о задачах со многими параметрами и с несколькими критериями, поставить математическую задачу очень трудно, ибо конструктор обычно имеет достаточно хорошее представление о допустимых пределах изменения каждого параметра, но не знает возможностей всех критериев, и необходим предварительный расчет для выяснения этих возможностей. Как сказал И. И. Артоболевский [1], «поиск оптимального решения означает одновременно и поиск правильной постановки задачи».

В данной книге приведен простой алгоритм, позволяющий конструктору осуществлять разумную постановку математической задачи в процессе диалога с ЭВМ. С помощью этой методики была осуществлена постановка и найдено решение ряда важных задач, связанных с проек-

---

<sup>1</sup> Мы будем использовать как синонимы слова «конструктор», «проектировщик», «совет специалистов». В таком же смысле в некоторых работах используют термин ЛПР (лицо, принимающее решение).

тированием новых и усовершенствованием существующих механизмов и машин.

**Особенности предложенного метода.** Отличительная черта разработанного метода — систематический просмотр многомерных областей: в качестве пробных точек в пространстве параметров используются точки равномерно распределенных последовательностей. Для этих целей были применены так называемые ЛП<sub>7</sub>-последовательности, которые обладают наилучшими характеристиками равномерности среди всех известных в настоящее время равномерно распределенных последовательностей. Заметим, что волюнтаристический выбор пробных точек в многомерных областях, как правило, приводит к плохим результатам из-за отсутствия у человека многомерной геометрической интуиции.

Другая особенность метода состоит в том, что диалог конструктора с ЭВМ протекает в очень благоприятных для конструктора условиях: он оперирует привычными для него величинами — значениями критериев — и не должен «комбинировать», то есть гадать, какой выигрыш по одним критериям могут дать уступки по другим критериям; это выясняется в процессе диалога.

Приближенная характеристика задач, которые можно решать предложенным методом:

а) количество параметров не превосходит нескольких десятков;  
б) количество критериев любое (в решенных задачах оно достигало 14);

в) требования к гладкости областей, функциональных ограничений, критериев — минимальные;

г) отношение  $n$ -мерного объема множества допустимых решений, расположенного внутри заданного  $n$ -мерного параллелепипеда в пространстве параметров, к  $n$ -мерному объему этого параллелепипеда не должно быть чрезмерно малым.

Последнее из этих требований может быть проверено в ходе расчета. Однако более или менее ясно, что оно исключает задачи с очень большим количеством функциональных ограничений.

**О дальнейших возможностях метода.** Очевидно, что область применения метода не ограничивается машиностроением: задачи со многими критериями, в том числе, удовлетворяющие требованиям а—г, встречаются в самых различных областях науки и техники. От таких задач обычно старались избавиться, но, думается, причина как раз в том, что не было достаточно простого и эффективного метода для их постановки и решения.

В самом деле, в общей схеме вычислительного эксперимента А. А. Самарский [13] выделяет пятый этап:

анализ полученных результатов и уточнение математической модели. Ясно, что судить о достоинствах и недостатках используемой математической модели следует, вообще говоря, не по одному, а по многим критериям. Если модель зависит от нескольких параметров, то, естественно, возникает проблема наилучшего их выбора. Следовательно, можно надеяться, что методика, изложенная в настоящей книге, окажется полезной при осуществлении вычислительных экспериментов, связанных с самыми различными областями науки и техники. Первые шаги в этом направлении уже делаются.



## Глава 1

# СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОИСК В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

В дальнейшем изложении не раз используется метод зондирования пространства параметров, который мы назвали ЛП-поиском [16]. Название это объясняется тем, что в качестве пробных точек в единичном многомерном кубе используются точки ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей. Математическая теория таких последовательностей достаточно сложна, и поэтому краткие сведения об ЛП<sub>τ</sub>-последовательностях перенесены в Дополнение. Здесь же по возможности элементарно разъясняются трудности, связанные с многомерностью рассматриваемых областей, заставившие нас отказаться от традиционных решетчатых сеток и воспользоваться ЛП-поиском.

Читатель, которому эта глава покажется трудной, может перейти прямо к главе 2, приняв на веру, что имеется эффективный алгоритм выбора пробных точек, равномерно расположенных в конечных многомерных областях (размерности  $n \leq 51$ ).

### 1.1. Поиск в многомерном кубе

Рассмотрим единичный  $n$ -мерный куб  $K^n$ , состоящий из точек  $P$  с декартовыми координатами  $x_1, \dots, x_n$ ,

$$P = (x_1, \dots, x_n),$$

удовлетворяющими неравенствам  $0 \leq x_j \leq 1$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Кубические решетки. Обычно полагают, что наиболее равномерный просмотр такого куба обеспечивает кубическая решетка (рис. 1.1), состоящая из  $N = M^n$  точек с координатами

$$\left( \frac{i_1 + 1/2}{M}, \frac{i_2 + 1/2}{M}, \dots, \frac{i_n + 1/2}{M} \right),$$

где  $i_1, \dots, i_n$  независимо принимают все значения  $0, 1, \dots, M - 1$ . Однако это неверно. Такая решетка опти-

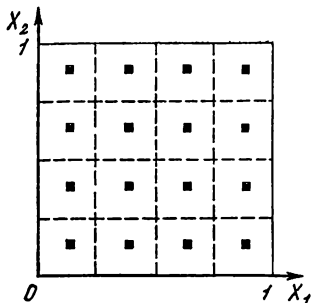


Рис. 1.1. Кубическая решетка при  $n = 2$  ( $N = 16$ )

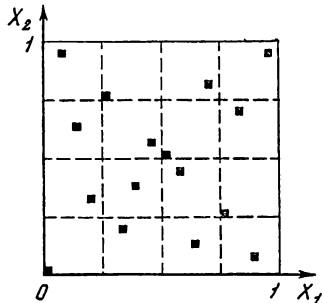


Рис. 1.3. Улучшенная сетка при  $n = 2$  ( $N = 16$ )

мальна только в одномерном случае, при  $n = 1$  (рис. 1.2). Уже при  $n = 2$  она не очень хороша, а с увеличением  $n$  «равномерность» ее быстро ухудшается. Строгая формулировка этого утверждения приведена в Дополнении. Впервые вывод о том, что кубические решетки в  $K^n$  — это плохие сетки при больших  $n$ , был сделан в 1957 году в работе [14].

Впрочем нетрудно привести элементарные соображения, разъясняющие такое, на первый взгляд парадоксальное, положение.

Сравним двухмерную сетку, изображенную на рис. 1.1, с сеткой, изображенной на рис. 1.3, которая также состоит из 16 точек. В обоих случаях каждому из 16 малых

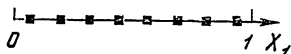


Рис. 1.2. Кубическая решетка при  $n = 1$  ( $N = 8$ )

квадратиков принадлежит одна и только одна точка сетки, так что, казалось бы, равномерность расположения точек обеих сеток примерно одинакова. Ситуация, однако, резко изменится, если потребуется исследовать функцию  $f(x_1, x_2)$ , определенную в  $K^2$ , которая сильно зависит лишь от одного аргумента: например,  $f = f(x_1)$ . В этом случае, вычислив значения функции  $f$  в точках сетки рис. 1.1, мы получим лишь четыре различных значения, каждое повторенное четыре раза; а при расчете  $f$  в точках сетки рис. 1.3, мы получим 16 значений, дающих гораздо лучшее представление о диапазоне изменения функции  $f$ .

В многомерном случае кубическая решетка оказывается еще хуже, так как «потеря информации» при вычислении  $f(x_1, \dots, x_n)$  может еще больше возрасти: вычислив  $N = M^n$  значений функции  $f(x_1)$ , мы получим всего  $M = N^{1/n}$  различных значений!

Конечно, приведенные рассуждения с рассмотрением  $f(x_1)$  — это крайний, самый неблагоприятный случай. В действительности функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , встречающиеся на практике, сильно зависят от нескольких переменных, но не от всех. И мы никогда не можем быть уверенными, что нельзя представить  $f(x_1, \dots, x_n)$  в форме

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv g(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) + h(x_1, \dots, x_n),$$

где  $m < n$  и  $g \gg h$ . Если же такое представление имеет место, то упомянутая выше потеря информации будет налицо: сосчитав  $N = M^n$  значений  $f$ , мы получим всего  $M^m = N^{m/n}$  существенно различных значений функции. Количество «лишних» точек  $N - N^{m/n}$  с увеличением  $M$  катастрофически растет; например, если  $n = 5$ ,  $m = 3$  и  $M = 10$ , то

$$N - N^{m/n} = M^5 - M^3 = 99000$$

из общего числа  $N = M^5 = 100000$ .

Отсюда вывод: проекции точек хороших многомерных сеток в  $K^n$  на  $m$ -мерные грани этого куба должны представлять собой хорошие  $m$ -мерные сетки, и это должно быть верно при любых  $m = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Равномерно распределенные последовательности точек в  $K^n$ .** Пусть  $P_1, \dots, P_i, \dots$  — последовательность точек, принадлежащих  $K^n$ . Выберем в  $K^n$  произвольный  $n$ -мерный параллелепипед  $\Pi$  со сторонами, параллельными координатным граням (рис. 1.4). Обозначим через  $S_N(\Pi)$  количество точек  $P_i$  с номерами  $1 \leq i \leq N$ , принадлежащих  $\Pi$ .

**О п р е д е л е н и е.** Последовательность точек  $P_1, \dots, \dots, P_i, \dots$  называется *равномерно распределенной* (р.р.) в  $K^n$ , если для любого  $\Pi$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(\Pi)}{N} = V_{\Pi}, \quad (1)$$

где  $V_{\Pi}$  — объем ( $n$ -мерный) параллелепипеда  $\Pi$ .

Можно доказать, что если  $G$  — произвольная область, расположенная в  $K^n$  и имеющая объем  $V_G$ , то из (1)

вытекает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(G)}{N} = V_G. \quad (2)$$

Соотношение (2) показывает, что при достаточно больших  $N$  количество точек последовательности, принадлежащих  $G$ , пропорционально объему  $G$ :

$$S_N(G) \sim NV_G. \quad (3)$$

Легко также доказать, что проекции точек р.р. последовательности на любую  $m$ -мерную грань куба  $K^n$  при  $m < n$  образуют р.р. последовательность в  $K^m$ . Таким образом, требование, сформулированное в конце предыдущего пункта, в какой-то мере выполняется для точек  $P_1, \dots, P_N$ , составляющих начальный участок р.р. последовательности.

Несмотря на то, что определение и первые примеры р.р. последовательностей были указаны Г. Вейлем еще в 1916 году,

использование таких последовательностей в вычислительной математике началось только в 60-х годах, когда удалось построить последовательности, для которых скорость сходимости в (1) при  $N \rightarrow \infty$  близка к наилучшей, а равномерность расположения наблюдается начиная с небольших  $N$ . (Заметим, что определение (1) зависит только от асимптотических свойств последовательности: если изменить, выбросить, добавить любое конечное число любых точек последовательности, то предел (1) не изменится.)

Использование в качестве сеток начальных участков  $P_1, \dots, P_N$  р.р. последовательности имеет еще одно достоинство: количество точек сетки может быть удвоено добавлением еще  $N$  точек  $P_{N+1}, \dots, P_{2N}$ . (При использовании кубических решеток удвоение  $M$  вынуждает увеличить количество точек сразу в  $2^n$  раз; а замена  $M$  на  $M + 1$  заставляет все точки новой сетки считать заново.)

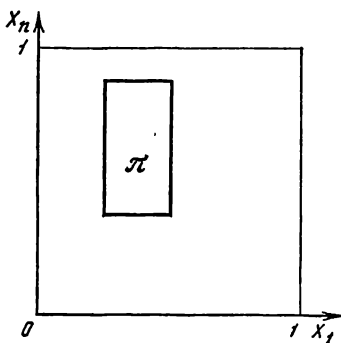


Рис. 1.4. Параллелепипед  $\Pi$  в  $K^n$

**Простейший поиск.** Предположим, что функция  $F(P)$  кусочно непрерывна<sup>1</sup> в  $K^n$  и требуется приближенно найти точку  $\hat{P}$  такую, что

$$F(\hat{P}) = \min_{P \in K^n} F(P).$$

Приближенных методов отыскания минимума функции очень много (см., например, [8, 12, 18]), но в большинстве своем это все локальные методы, сходимость которых гарантируется лишь в достаточно малой окрестности минимума. Если же речь идет о нахождении глобального минимума, то выбор методов поиска гораздо более ограничен.

Рассмотрим простейший случайный поиск, который состоит в следующем. В  $K^n$  выбираем  $N$  независимых случайных точек  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ , равномерно распределенных в  $K^n$  (здесь равномерное распределение в теоретико-вероятностном смысле). Среди значений  $F(\Gamma_1), \dots, F(\Gamma_N)$  находим наименьшее

$$F(\Gamma_{i_0}) = \min_{1 \leq i \leq N} F(\Gamma_i)$$

(если таких несколько, то выбираем любое из них). И считаем, что  $F(\Gamma_{i_0}) \approx \min F(P)$ ,  $\Gamma_{i_0} \approx \hat{P}$ .

Сходимость такого поиска доказывается достаточно просто. Пусть  $H$  — произвольная окрестность единственной точки  $\hat{P}$ , и объем  $V_H$  положителен. Так как вероятность  $P\{\Gamma \in H\} = V_H$ , то вероятность того, что хотя бы одна из точек  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  попадет в  $H$  равна  $1 - (1 - V_H)^N$  и, при  $N \rightarrow \infty$ , стремится к 1. Следовательно, при достаточно больших  $N$  вероятность попадания хотя бы одной пробной точки в любую окрестность точки минимума  $\hat{P}$  как угодно близка к 1.

Легко показать, что в качестве пробных точек в простейшем поиске можно использовать точки  $P_1, \dots, P_i, \dots$ , образующие р.р. последовательность. В самом деле, так как согласно (3)

$$S_N(H) \propto NV_H,$$

<sup>1</sup> Более подробно, требование кусочной непрерывности означает, что  $K^n$  можно представить в виде суммы конечного числа простых замкнутых областей, в каждой из которых  $F(P)$  непрерывна и имеет конечные предельные значения на границе.

то при  $N \rightarrow \infty$  количество пробных точек, попавших в  $H$ , окажется как угодно большим.

Поиск будет тем лучше, чем более равномерно расположены в  $K^n$  пробные точки (если, конечно, нет никакой предварительной информации о положении минимума). Случайны ли они, или нет — не столь важно. Нам не раз приходилось слышать от вычислителей, что в их экспериментах при  $n \geq 4$  случайный поиск оказывался лучше неслучайного. Однако во всех этих экспериментах в качестве неслучайных пробных точек использовались точки кубической решетки, а, как мы уже знаем, расположение этих точек следует расценивать как плохое.

**ЛП-поиск.** Мы предложили использовать в качестве пробных точки ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей, которые являются наиболее равномерно распределенными среди всех известных в настоящее время последовательностей. Многочисленные эксперименты, проведенные с целью сравнения ЛП-поиска с простейшим случайным поиском, неизменно показывали преимущество ЛП-поиска, хотя количественные характеристики «выигрыша» меняются в зависимости от рассматриваемых задач.

**Пример [16].** Максимум весьма сложной функции  $\Phi$ , зависящей от девяти переменных, оценивался по значениям в случайных точках  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  и в точках ЛП<sub>τ</sub>-последовательности  $Q_1, \dots, Q_N$ . Результаты, полученные при различных  $N$ , приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Поиск максимума  $\Phi$

$N$	512	1024	2048
$\max \Phi(\Gamma_i)$	42,29	42,29	43,52
$\max \Phi(Q_i)$	48,12	48,61	48,61

Можно указать два класса задач, при решении которых ЛП-поиск оказался очень полезным. Во-первых, это задачи, в которых одновременно требуется оценить максимумы и (или) минимумы нескольких функций, заданных в  $K^n$ ; ибо это можно сделать по одним и тем же пробным точкам. Во-вторых, это задачи, в которых для отыскания глобального экстремума многоэкстремальной функции используют локальные методы оптимизации: для того,

чтобы не попасть вместо глобального в какой-нибудь из локальных экстремумов, приходится повторять локальный поиск много раз, начиная из различных начальных точек; очевидно, что начальные точки должны быть равномерно расположены в  $K^n$ . Самым эффективным способом выбора начальных точек оказалось использование точек ЛП $_{\tau}$ -последовательности.

В заключение заметим, что ЛП $_{\tau}$ -последовательности — это наилучшие среди известных в настоящее время р.р. последовательностей. Если в будущем удастся построить еще лучшие последовательности (с достаточно простым алгоритмом расчета и с более равномерным расположением точек), то все алгоритмы, изложенные в книге, станут еще более эффективными, так как можно будет использовать эти новые последовательности вместо ЛП $_{\tau}$ -последовательностей.

## 1.2. Поиск в произвольной ограниченной области

В этом параграфе рассмотрены некоторые достаточно простые преобразования р.р. последовательностей, которые используются в дальнейшем. Все приводимые здесь результаты имеют весьма прозрачный геометрический смысл.

Равномерно распределенные последовательности точек в ограниченной области  $G$ . Обозначим через  $G$  произвольную  $n$ -мерную ограниченную область, имеющую конечный объем  $V_G > 0$ .

**О п р е д е л е н и е.** Последовательность точек  $P_1, \dots, P_i, \dots$ , принадлежащих  $G$ , называется *равномерно распределенной* в  $G$ , если для любого  $\Pi$ , принадлежащего  $G$  (обозначения см. в разделе 1.1):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(\Pi)}{N} = \frac{V_{\Pi}}{V_G}. \quad (4)$$

Чтобы убедиться в том, что (1) есть частный случай (4), достаточно вспомнить, что объем  $K^n$  равен 1, так что в (1) вместо  $V_{\Pi}$  можно было бы написать  $V_{\Pi}/V_{K^n}$ .

Многочисленные приемы, используемые в методах Монте-Карло для моделирования различных случайных величин, позволяют находить точки  $P_1, \dots, P_i, \dots$  р.р. в произвольной области  $G$  путем преобразования точек  $Q_1, \dots, Q_i, \dots$ , р.р. в  $K^n$ . Эти вопросы достаточно подробно освещены в [15], и мы не будем на них останавли-

ваться. Ниже нам понадобятся только формулы для расчета последовательности точек, р.р. в заданном параллелепипеде  $\Pi$  со сторонами, параллельными координатным граням (рис. 1.5).

**Л е м м а 1.** Если точки  $Q_i$  с декартовыми координатами  $(q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$  образуют р.р. последовательность в  $K^n$ , то точки  $A_i$  с декартовыми координатами  $(\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,r})$ , где при  $j = 1, 2, \dots, n$

$$\alpha_{i,j} = a_j + (b_j - a_j) q_{i,j}, \quad (5)$$

образуют р.р. последовательность в параллелепипеде  $\Pi$ , состоящем из точек  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , координаты которых удовлетворяют неравенствам  $a_j \leq \alpha_j \leq b_j$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем произвольный параллелепипед  $\Pi_0 \subset \Pi$ , который определяется неравенствами  $a_j^0 \leq \alpha_j \leq b_j^0$ . Точкам  $\Pi_0$  в силу преобразования (5) взаимно однозначно соответствуют точки параллелепипеда  $\tilde{\Pi} \subset K^n$ , который определяется неравенствами

$$(a_j^0 - a_j)/(b_j - a_j) \leq x_j \leq (b_j^0 - a_j)/(b_j - a_j).$$

Поэтому количество точек  $A_i \in \Pi_0$ , которое мы обозначим через  $S_N(\Pi_0)$ , равно количеству точек  $Q_i \in \tilde{\Pi}$ , которое мы обозначим через  $\tilde{S}_N(\tilde{\Pi})$ . А так как объемы этих параллелепипедов равны соответственно

$$V_{\Pi_0} = \prod_{j=1}^n (b_j^0 - a_j^0), \quad V_{\tilde{\Pi}} = \prod_{j=1}^n \frac{b_j^0 - a_j^0}{b_j - a_j} = \frac{V_{\Pi_0}}{V_{\Pi}},$$

то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(\Pi_0)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tilde{S}_N(\tilde{\Pi})}{N} = V_{\tilde{\Pi}} = \frac{V_{\Pi_0}}{V_{\Pi}},$$

что и требовалось доказать.

**Метод отбора для равномерно распределенных последовательностей.** Более или менее очевидно, что если среди точек  $A_1, \dots, A_i, \dots$ , образующих р.р. последовательность в  $\Pi$ , отбирать все точки, принадлежащие некоторой области  $G \subset \Pi$ , то получим последователь-

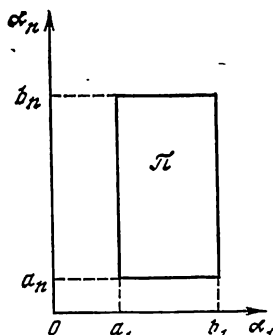


Рис. 1.5. К доказательству леммы 1



ность точек р.р. в  $G$ . Так как этот прием неоднократно используется в дальнейшем, то приведем строгое доказательство.

**Лемма 2.** Пусть  $A_1, \dots, A_i, \dots$  — последовательность точек р.р. в  $\Pi$ , а  $G \subset \Pi$  — произвольная область с положительным объемом  $V_G > 0$ . Если среди точек  $A_i$  отобразить все точки, принадлежащие  $G$ , то получим последовательность точек р.р. в  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $A_{i_1}, \dots, A_{i_N}$  — первые  $N$  среди отобранных точек. Если номер последней из них равен  $N'$  (то есть  $A_{i_N} \equiv A_{N'}$ ), то легко видеть, что  $S_{N'}(G) = N$ . Выберем теперь произвольный параллелепипед  $\Pi_0 \subset G$  и обозначим через  $s_N(\Pi_0)$  количество точек, принадлежащих  $\Pi_0$ , из числа отобранных точек  $A_{i_1}, \dots, A_{i_N}$ . Тогда  $\tilde{S}_N(\Pi_0) = S_{N'}(\Pi_0)$ , ибо те из точек  $A_1, \dots, A_{N'}$ , которые не попали в  $G$ , тем более не могли попасть в  $\Pi_0$ . Значит,

$$\frac{\tilde{S}_N(\Pi_0)}{N} = \frac{S_{N'}(\Pi_0)}{N'} \frac{N'}{N} = \frac{S_{N'}(\Pi_0)}{N'} \frac{N'}{S_{N'}(G)} \rightarrow \frac{V_{\Pi_0}}{V_G},$$

когда  $N$ , а вместе с ним и  $N'$ , стремится к  $\infty$ . Тем самым лемма доказана.

Отношение объемов

$$\gamma = V_G/V_{\Pi}$$

в теории методов Монте-Карло называют *эффективностью отбора*, так как в среднем для получения одной точки в  $G$  приходится рассмотреть  $1/\gamma$  точек в  $\Pi$ . При  $\gamma \ll 1$  метод отбора становится малоэффективным.

## Глава 2

### ВЫБОР КРИТЕРИАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Задачи проектирования в действительности многокритериальны: чем больше критериев качества вводится в рассмотрение, тем более полную характеристику достоинств и недостатков проектируемой машины можно получить. Однако, техническое задание на разработку машины с указанием требований, предъявляемых к ней, — это еще не

математическая задача. Сформулировать корректную математическую задачу в реальных условиях достаточно трудно.

Именно эта ситуация рассмотрена в разделе 2.1, а в разделе 2.2 изложена методика [17, 2], позволяющая конструктору с помощью ЭВМ выбирать разумную постановку задачи. Мы считаем нужным подчеркнуть оригинальность этой методики, так как обычно ЭВМ используется только для решения математических задач, а постановка задачи предполагается вне математики.

Некоторые особенности предложенной методики обсуждаются в разделе 2.3, а пример ее использования приведен в разделе 2.4.

## 2.1. Исходные данные

Предположим, что задана математическая модель исследуемой или проектируемой системы, и модель эта зависит от  $n$  параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Слова «задана математическая модель» означают, что имеются формулы (или готовые программы), позволяющие по заданному набору  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  вычислить любые интересующие нас характеристики системы. Сами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  могут быть естественными физическими величинами, например, массами, радиусами, жесткостями и т. п., или, если единицы измерения этих величин фиксированы, могут считаться безразмерными. Если функционирование системы описывается дифференциальными уравнениями, то в качестве параметров можно выбирать коэффициенты или начальные значения этих дифференциальных уравнений.

**Пространство параметров.** Пространством параметров называется  $n$ -мерное пространство, состоящее из точек  $A$  с декартовыми координатами  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Таким образом, каждой точке  $A$  пространства параметров соответствует конкретный набор параметров  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  и наоборот.

Как правило, проектировщики могут указать разумные пределы изменения каждого из параметров, которые мы будем называть *параметрическими ограничениями*

$$\alpha_j^* \leq \alpha_j \leq \alpha_j^{**} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

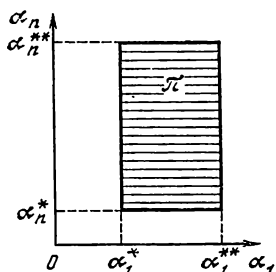
Ограничения (1) выделяют в пространстве параметров параллелепипед (рис. 2.1).  $\Pi = \{A \mid (1)\}$ , объем кото-

рого ( $n$ -мерный объем) равен произведению

$$V_{\Pi} = (\alpha_1^{**} - \alpha_1^*) \dots (\alpha_n^{**} - \alpha_n^*).$$

В дальнейшем нас будут интересовать только точки  $A$ , принадлежащие  $\Pi$ : им и только им соответствуют системы, параметры которых удовлетворяют ограничениям (1).

Так как наш метод основан на зондировании параллелепипеда  $\Pi$  конечным числом пробных точек, то без необходимости расширять границы (1) не рекомендуется: при этом объем возрастает, и для просмотра может потребоваться больше точек.



Функциональные ограничения. Кроме параметрических ограничений обычно в условия задачи включаются функциональные ограничения

Кроме параметрических ограничений обычно в условия задачи включаются функциональные ограничения

Рис. 2.1. Параллелепипед  $\Pi$  в пространстве параметров

$$c_l^* \leq f_l(A) \leq c_l^{**} \quad (l = 1, 2, \dots, t). \quad (2)$$

Здесь  $f_l(A)$  — некоторые функции от параметров  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Они могут быть заданы явно. Но если, например, функционирование системы описывается дифференциальными уравнениями, то  $f_l(A)$  часто представляют собой функционалы, зависящие от интегральных кривых этих уравнений. Мы предполагаем, что все функции  $f_l(A)$  непрерывны в  $\Pi$ .

Обозначим через  $G$  подмножество параллелепипеда  $\Pi$ , состоящее из точек  $A$ , удовлетворяющих ограничениям (2) (рис. 2.2):

$$G = \{A \mid (1), (2)\}.$$

Множество  $G$ , вообще говоря, может быть любым замкнутым множеством. Единственное ограничение: объем  $G$  должен быть положительным ( $V_G > 0$ ).

С математической точки зрения требования, предъявляемые к  $G$ , должны быть несколько более жесткими: множество  $G$  должно совпадать с замыканием множества своих внутренних точек. Именно это требование обеспечивает отсутствие в  $G$  компонент меньшей размерности, чем  $n$ .

Однако с точки зрения практики последнее требование излишне: такого положения всегда можно добиться сколь угодно малым изменением величин  $c_l^*$  и (или)  $c_l^{**}$ .

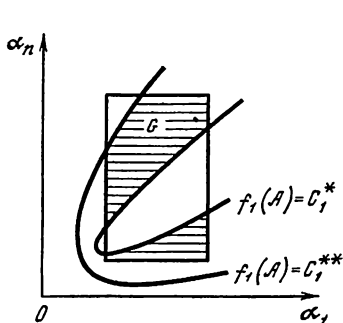


Рис. 2.2. Множество  $G$  в параллелепипеде  $\Pi$

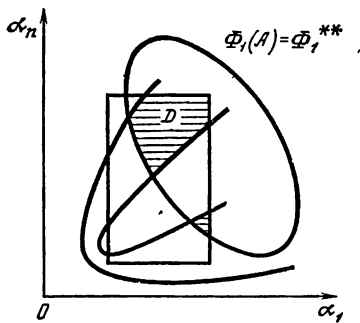


Рис. 2.3. Множество допустимых точек  $D$

Можно сказать, что требование  $V_G > 0$  исключает из рассмотрения задачи с функциональными ограничениями в форме равенств, например,  $f(A) = c$ .

Впрочем в некоторых случаях удастся разрешить систему ограничений вида

$$f_l(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = c_l \quad (l = 1, 2, \dots, t, t < n),$$

относительно  $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_n$ :

$$\alpha_j = \varphi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_t; c_1, \dots, c_t) \quad (j = t + 1, \dots, n).$$

Тогда можно рассматривать задачу в  $t$ -мерном пространстве параметров  $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$  без этих ограничений, а значения  $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_n$  считать известными функциями  $\alpha_j = \varphi_j$  от  $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ .

**Критерии качества.** Критерием качества называется характеристика системы, которая связана с ее качеством монотонной зависимостью. Иными словами, при прочих равных условиях система тем лучше, чем больше (меньше) критерий.

Для простоты записи мы всюду в дальнейшем будем предполагать, что все заданные критерии  $\Phi_1(A), \dots, \Phi_k(A)$  желательно уменьшить:

$$\Phi_v(A) \rightarrow \min.$$

Следовательно, чем меньше  $\Phi_v(A)$ , тем лучше система (при прочих равных условиях).

Формально, любой критерий можно привести к такому виду, заменяя, если это нужно,  $\Phi_v$  на  $1/\Phi_v$  или на

— $\Phi_v$ . Однако делать это совсем не обязательно: конструктору удобнее оперировать привычными реальными величинами. А как видно будет из дальнейшего, алгоритм выбора критериальных ограничений легко реализовать и тогда, когда некоторые из критериев желательно максимизировать. Относительно функций  $\Phi_v(A)$  мы также будем предполагать, что они непрерывны в  $\Pi$ .

Сформулировать математическую оптимизационную задачу при наличии нескольких критериев качества совсем непросто, ибо критерии эти часто противоречат друг другу. Например, уменьшая вес машины (что часто очень желательно), мы в то же время уменьшаем ее прочность (что как раз не желательно). Или, чрезмерное снижение стоимости изделия может обернуться ухудшением других его качеств.

Иногда полагают, что все дело в удачном выборе решающего критерия качества  $\Phi(A)$ , который «должен» соединить в себе (то есть учесть) значения и важность каждого из индивидуальных критериев  $\Phi_1(A), \dots, \Phi_k(A)$ . Однако замена нескольких критериев единым — проблема сложная и не всегда разрешимая. В большинстве реальных задач такой подход себя не оправдывает, так как при грубом выборе  $\Phi(A)$  решение математической задачи об отыскании точки  $\bar{A}$ , в которой

$$\Phi(\bar{A}) = \min_{A \in G} \Phi(A),$$

оказывается практически плохим из-за того, что некоторые из значений  $\Phi_v(\bar{A})$  превышают допустимые (по мнению проектировщиков) пределы. Чтобы избежать такой ситуации необходимо ввести *критериальные ограничения*

$$\Phi_v(A) \leq \Phi_v^{**} \quad (v = 1, 2, \dots, k). \quad (3)$$

Критериальное ограничение  $\Phi_v^{**}$  — это худшее значение критерия  $\Phi_v(A)$ , которое проектировщик считает приемлемым.

Пусть  $D$  — множество точек  $A$ , которые удовлетворяют всем ограничениям (1), (2) и (3) (рис. 2.3):

$$D = \{A \mid (1), (2), (3)\},$$

так что  $D \subseteq G \subseteq \Pi$ ; если множество  $D$  непусто, то оно замкнуто. Естественно назвать  $D$  *множеством допустимых точек*, ибо если сформулировать задачу об отыскании

точки  $\hat{A}$  такой, что

$$\Phi(\hat{A}) = \min_{A \in D} \Phi(A), \quad (4)$$

то решение этой задачи всегда существует и конструктора устраивает: как бы ни был выбран решающий критерий  $\Phi(A)$ , все значения  $\Phi_v(A)$  удовлетворяют ограничениям (3).

Таким образом, мы видим, что главная трудность при переходе к математической задаче (4) состоит в выборе критериальных ограничений  $\Phi_v^{**}$  и в обеспечении непустоты множества допустимых точек  $D$ . Требования, предъявляемые нами к множеству  $D$ , такие же, как требования к множеству  $G$  (см. выше «Функциональные ограничения»).

По нашему убеждению, обоснованный выбор критериальных ограничений невозможен без предварительного исследования системы: необходимо определить возможности системы по каждому из критериев в области  $G$  и, в частности, представлять себе диапазоны изменения каждого из критериев. В следующем параграфе изложен численный алгоритм, позволяющий выбирать  $\Phi_v^{**}$  в процессе диалога конструкторов с ЭВМ, гарантируя при этом непустоту множества  $D$ .

## 2.2. Диалоговый алгоритм

В основе нашего алгоритма лежит численное исследование (зондирование) пространства параметров проектируемой системы. Исследование проводится в три этапа.

1-й этап: составление таблиц испытаний. Этот этап выполняется ЭВМ без вмешательства человека. Последовательно выбираются  $N$  пробных точек  $A_1, \dots, A_N$ , равномерно расположенных в  $G$  (как это делается см. ниже). В каждой из точек  $A_i$  рассчитывается система и вычисляются значения всех критериев  $\Phi_1(A_i), \dots, \Phi_k(A_i)$ . По каждому критерию составляется таблица испытаний, в которой значения  $\Phi_v(A_1), \dots, \Phi_v(A_N)$  расположены в порядке возрастания

$$\Phi_v(A_{i_1}) \leq \Phi_v(A_{i_2}) \leq \dots \leq \Phi_v(A_{i_N}) \quad (5)$$

и указаны номера  $i_1, i_2, \dots, i_N$  соответствующих пробных точек (свой для каждого  $v$ ). Такие таблицы представляют

собой аналог статистических вариационных рядов. Как следует из разд. 1.1, при  $N \rightarrow \infty$  наименьшее значение  $\Phi_v(A_{i_1})$  стремится к  $\min_{A \in G} \Phi_v(A)$ , а наибольшее —  $\Phi_v(A_{i_N})$  — стремится к  $\max_{A \in G} \Phi_v(A)$ . Но таблица испытаний показывает не только приближенные значения максимума и минимума  $\Phi_v(A)$  в области  $G$ : по таблице можно судить о частоте тех или иных значений  $\Phi_v(A)$ .

Фрагменты настоящих таблиц испытаний приведены в табл. 2.3 (на с. 33).

**2-й этап: выбор критериальных ограничений.** Этот этап предполагает вмешательство проектировщика. Просматривая поочередно каждую из таблиц (5), он должен назначить ограничение  $\Phi_v^{**}$  для каждого критерия.

Стоит подчеркнуть, что наш диалог очень удобен для проектировщика: он не должен «комбинировать», уменьшая одни критерии за счет других; ему показывают одну таблицу испытаний и предлагают назначить одно ограничение; затем повторяют то же с другой таблицей испытаний. Конечно, конструктор заинтересован в том, чтобы все  $\Phi_v^{**}$  были по возможности меньше, но он понимает, что если выбирать  $\Phi_v^{**}$  неоправданно малыми, то множество допустимых точек окажется пустым...

**3-й этап: проверка непустоты  $D$ .** Этот этап также выполняется автоматически, без вмешательства человека. Фиксируем какой-нибудь из критериев, например,  $\Phi_1(A)$ , и рассмотрим соответствующую ему таблицу испытаний (5). Пусть  $s$  — количество значений в этой таблице, удовлетворяющих выбранному критериальному ограничению  $\Phi_1^{**}$ , так что

$$\Phi_1(A_{i_1}) \leq \dots \leq \Phi_1(A_{i_s}) \leq \Phi_1^{**}.$$

Путем перебора значений всех критериев в точках  $A_{i_1}, \dots, A_{i_s}$  нетрудно проверить, есть ли среди этих точек хотя бы одна такая, в которой справедливы одновременно все неравенства (3)

$$\Phi_v(A_{i_j}) \leq \Phi_v^{**} \quad (v = 1, 2, \dots, k);$$

(при  $v = 1$  можно, конечно, не проверять). Если такая точка  $A_{i_j}$  существует, то множество  $D$ , определенное неравенствами (1), (2) и (3), непусто, и задача (4) разрешима (при любом выборе  $\Phi$ !).

В противном случае следует вернуться ко второму этапу и потребовать от конструктора уступок при назначении  $\Phi_v^{**}$ . Если такие уступки невозможны, то необходимо вернуться к первому этапу и увеличить количество  $N$  пробных точек, чтобы повторить второй и третий этапы с таблицами испытаний большего объема.

Наконец, если при неоднократном увеличении  $N$  точки  $A_{ij}$ , принадлежащие  $D$ , не обнаруживаются, то есть все основания считать, что выбранные критериальные ограничения  $\Phi_v^{**}$  несовместны. Конечно, нельзя категорически исключить возможность того, что в некоторой точке  $A'$ , отличной от всех пробных точек  $A_1, \dots, A_N$ , все неравенства (1), (2) и (3) выполнены; однако, если даже такая точка  $A'$  существует, то ее окрестность, в которой эти неравенства сохраняются, очень мала (объем ее порядка  $\frac{1}{N} V_G/N$ ) и практически система, соответствующая точке  $A'$ , будет неустойчивой (не конструктивной).

**З а м е ч а н и е.** Можно сказать, что на первом этапе вычисляется матрица критериев  $\| \Phi_v(A_i) \|$ , размер которой  $k \times N$ , и ЭВМ просматривает по одной все  $k$  строк этой матрицы. На третьем этапе ЭВМ просматривает  $s$  столбцов этой же матрицы.

**Выбор пробных точек.** Во всех расчетах мы использовали точки ЛП<sub>г</sub>-последовательности  $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$ , сведения о которых изложены в Добавлении. Согласно Лемме 1 из раздела 1.2, мы по декартовым координатам очередной точки

$$Q_i = (q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$$

вычисляем декартовы координаты точки  $A^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$ , принадлежащей параллелепипеду  $\Pi$

$$\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^* + (\alpha_j^{**} - \alpha_j^*) q_{i,j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

При  $A = A^{(i)}$  рассчитываем проектируемую систему и проверяем выполнение функциональных ограничений (2). Если они выполнены, то точка  $A = A^{(i)}$  отбирается в качестве пробной точки в  $G$  и вычисляются все  $\Phi_v(A)$ ; в противном случае точка  $A = A^{(i)}$  отбрасывается. Используемые на первом этапе пробные точки  $A_1, \dots, A_N$  — это первые  $N$  отобранных таким образом точек. Согласно лемме 2 из раздела 1.2, эти пробные точки при  $N \rightarrow \infty$  образуют последовательность, равномерно распределенную в  $G$ .



Пусть  $N'$  — количество точек  $A^{(i)}$  в  $\Pi$ , которые надо проверить для того, чтобы отобрать  $N$  пробных точек в  $G$ . Так как  $N/N' \approx V_G/V_\Pi = \gamma$  (см. раздел 1.2), то  $N' \approx N/\gamma$ .

Пусть  $\tau$  — время расчета системы в одной точке  $A^{(i)}$ , а  $T_N$  — полное время расчета  $N$  пробных точек в  $G$ . Из равенства  $T_N = N'\tau$  получаем, что

$$T_N \approx N\tau/\gamma. \quad (7)$$

На практике величины  $\tau$  и  $\gamma$ , входящие в формулу (7), численно оцениваются по сравнительно небольшому количеству испытаний. После этого формула (7) позволяет оценить время  $T_N$ , необходимое для составления таблиц испытаний любого заданного объема  $N$ . При решении сложных задач объем таблиц испытаний  $N$  обычно ограничен из-за ограниченности машинного времени  $T_N$ . Однако следует иметь в виду, что если выбираются параметры машины, предназначенной для серийного производства, то любые (разумные) затраты времени  $T_N$  будут оправданы.

Нередко задают «конкретный» вопрос: каким должно быть  $N'$ ? Однозначно ответить на такой вопрос нельзя: это зависит не только от  $\tau$  и  $\gamma$ , входящих в формулу (7), но и от характера изменения функций  $\Phi_v(A)$ . Во многих решавшихся нами реальных задачах, связанных с проектированием различных машин, достаточно было выбирать  $N' = 128$  или  $N' = 256$  — даже при количестве параметров  $n$ , достигавшем 30. В некоторых задачах, где время  $\tau$  расчета одного варианта мало, количество испытаний доходило до  $N' = 4096$ , хотя существенных уточнений это, как правило, не давало.

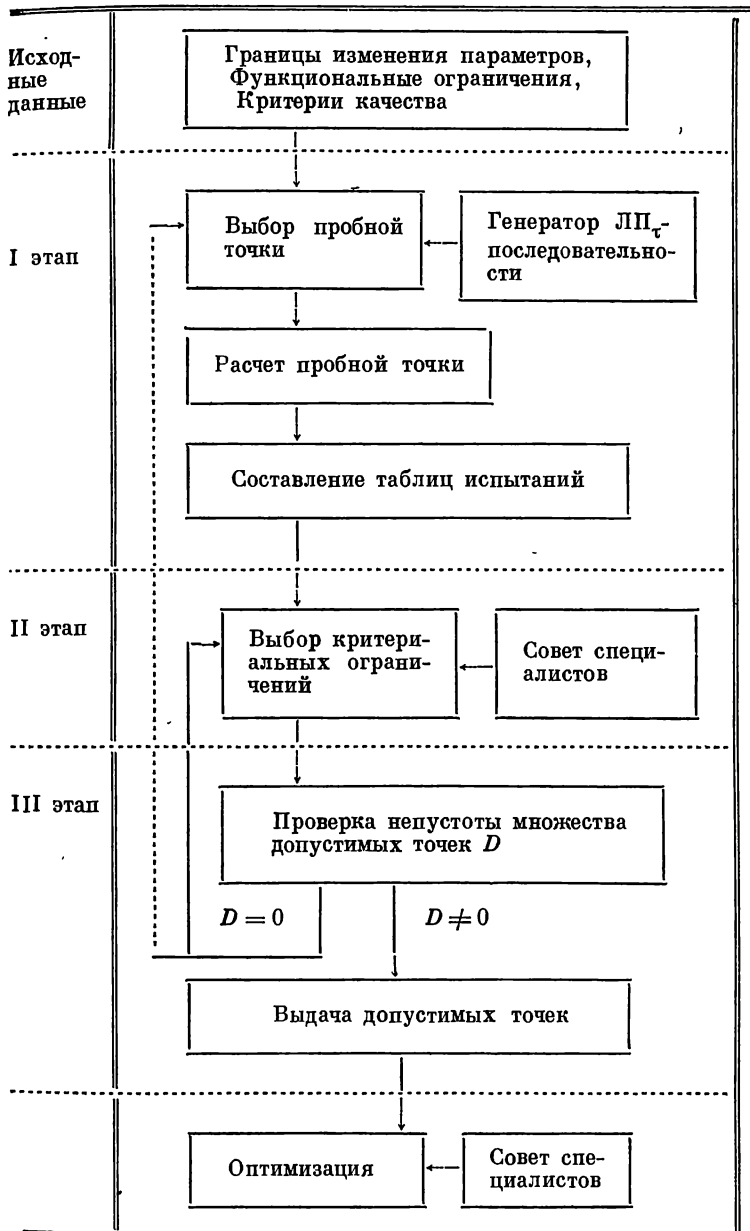
Напротив, в двух сложных задачах пришлось ограничиться значениями  $N' \approx 60$ ; и хотя при этом  $N$  были всего лишь около 20, полученные результаты вызвали у проектировщиков большой интерес.

**Последовательность  $D_N$ .** На третьем этапе мы находим не одну, а  $q$  точек, принадлежащих  $D$ . Очевидно,  $q \leq N$ . Множество этих точек обозначим через  $D_N$ .

Способ построения и отбора точек  $D_N$  (см. лемму 2, раздел 1.2) гарантирует, что  $q \rightarrow \infty$ , когда  $N \rightarrow \infty$ , и последовательность этих точек равномерно распределена в  $D$ .

Эти точки чрезвычайно полезны для последующего решения оптимизационной задачи (4). Об этом подробнее сказано в гл. 3.

### Схема алгоритма



На схеме изображен диалоговый алгоритм. Последний блок, приведенный под названием «оптимизация», обсуждается в гл. 3.

### 2.3. Некоторые особенности алгоритма

**Функциональные ограничения и псевдокритерии.** При традиционном подходе к многокритериальным задачам нередко пытаются сократить количество критериев, заменяя их функциональными ограничениями. Например, встречается рекомендация выбрать один из критериев в качестве решающего, а на остальные наложить ограничения (при этом предполагается, что эти ограничения задаются априорно, хотя, как мы уже отмечали, обоснованно задать их совсем непросто).

С точки зрения нашей методики выгоднее поступать наоборот: если функциональное ограничение

$$c_i^* \leq f_l(A) \leq c_i^{**}$$

не абсолютное, т. е. если конструктор допускает, что  $c_i^*$  и (или)  $c_i^{**}$  могут быть изменены, то стоит вместо этого ограничения ввести псевдокритерий, например,

$$\Phi_{k+1} = f_l(A).$$

Это не критерий, ибо здесь нет монотонной зависимости от качества. Однако разумные ограничения для  $\Phi_{k+1}(A)$  можно будет выбрать, изучив таблицу испытаний этой величины.

Если по мнению конструктора значение  $\bar{c}_l$  для величины  $f_l(A)$  было бы «весьма хорошим», то в качестве псевдокритерия удобно ввести величину

$$\Phi_{k+1} = |f_l(A) - \bar{c}_l|.$$

Тогда для  $\Phi_{k+1}$  можно будет выбрать лишь одностороннее ограничение вида  $\Phi_{k+1}(A) \leq \Phi_{k+1}^{**}$ , и при этом окажется, что

$$c_i^* = \bar{c}_l - \Phi_{k+1}^{**}, \quad c_i^{**} = \bar{c}_l + \Phi_{k+1}^{**}.$$

Возможность использования псевдокритериев важное достоинство данного метода. Во-первых, это позволяет во многих случаях выбирать не произвольные, а обоснованные функциональные ограничения. Во-вторых, когда количество априорных ограничений уменьшается, то уве-

дичивается объем области  $G$  и вместе с ним возрастает величина  $\gamma$ , входящая в формулу (7).

**Параметрические ограничения и псевдокритерии.** Мы всегда считаем, что параметрические ограничения (1) жестко заданы. Однако в некоторых случаях конструкторов интересует возможность сужения основного параллелепипеда за счет уменьшения вариации каких-нибудь из параметров.

Для исследования таких вопросов можно использовать те же расчеты, описанные в § 2.2, если предварительно включить исследуемые параметры в число псевдокритериев.

Пусть, например, ставится вопрос: чем придется пожертвовать, если ограничить изменение  $\alpha_p$ , так, что  $\alpha_p^* \leq \alpha_p \leq \alpha'_p$ , где  $\alpha'_p < \alpha_p^{**}$ ? В этом случае следует ввести псевдокритерий  $\Phi_{k+1} = \alpha_p$ . Введя «критериальное» ограничение  $\Phi_{k+1}^{**} = \alpha'_p$ , мы получим множество допустимых точек  $D'$ , соответствующее ограниченному изменению  $\alpha_p$ , и сможем сравнить наилучшие пробные точки в  $D'$  с наилучшими пробными точками в  $D$ .

**О таблицах испытаний.** Таблицы испытаний нередко встречаются в инженерной практике. Особенность используемых нами таблиц в том, что испытания равномерно распределены в области  $G$  пространства параметров. Благодаря этому таблицы позволяют получить правильное представление о распределении значений каждой из функций  $\Phi_\nu(A)$  при  $A \in G$  и гарантируют достаточно подробный просмотр любой наперед заданной части  $G$ , когда  $N \rightarrow \infty$ .

Если количество пробных точек  $N$  велико, то вместо просмотра всей таблицы испытаний (см. формулу (5)) можно ограничиться просмотром ее части, содержащей  $M$  наилучших значений ( $M < N$ ):

$$\Phi_\nu(A_{i_1}) \leq \Phi_\nu(A_{i_2}) \leq \dots \leq \Phi_\nu(A_{i_M}).$$

Такую таблицу мы называем усеченной таблицей испытаний. Чрезмерное усечение таблиц может оказаться причиной пустоты множества  $D$ ; но это будет обнаружено на третьем этапе диалога и тогда, возвращаясь ко второму этапу, следует увеличить объем таблиц.

**Нормированные критерии.** Предположим, что все рассматриваемые критерии  $\Phi_\nu(A)$  строго положительны:  $\Phi_\nu(A) > 0$ . Обозначим наилучшее значение  $\Phi_\nu$  в (5)

через  $\Phi_{v,N}^* = \Phi_v(A_{i_i})$ . Если вместо  $\Phi_v(A)$  рассматривать нормированный критерий

$$\lambda_v(A) = \Phi_v(A) / \Phi_{v,N}^*,$$

то вместо (5) получим таблицу испытаний вида

$$1 \leq \lambda_v(A_{i_2}) \leq \lambda_v(A_{i_3}) \leq \dots \leq \lambda_v(A_{i_N}). \quad (8)$$

Выбор критериальных ограничений можно осуществлять по таблицам вида формулы (8), которые позволяют ориентироваться на относительные изменения значений критериев.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что такая нормировка может считаться обоснованной только тогда, когда  $N$  достаточно велико, и значение  $\Phi_{v,N}^*$  достаточно близко к  $b_v^* = \min_{A \in G} \Phi_v(A)$ . Это же замечание относится к другим возможным способам нормировки критериев.

#### 2.4. Пример: оптимизация параметров редуктора<sup>1</sup>

Исходная модель. В качестве исходного был выбран реально существующий механизм — одноступенчатый редуктор [6]. Редуктор состоит из двух косозубых шевронных колес в подшипниках скольжения (рис. 2.4). Модель имеет 6 степеней свободы. Обобщенные координаты:  $x_1, x_4$  — углы поворота колес I и II (в направлении вращения);  $x_2, x_5$  — перемещения колес I и II в направлении линии зацепления;  $x_3, x_6$  — перемещения подшипников колес I и II в направлении линии зацепления. Источником возмущающих сил считается накопленная погрешность  $\Delta$  колеса I с амплитудой 10 мкм.

Колебательные процессы в редукторе описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_5 r_1 y + k_5 r_1 \dot{y} &= -c_5 r_1 \Delta, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_1(x_2 - x_3) + c_5 y + k_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_5 \dot{y} &= -c_5 \Delta, \\ m_3 \ddot{x}_3 - c_1(x_2 - x_3) + c_3 x_3 - k_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_3 \dot{x}_3 &= 0, \\ m_4 \ddot{x}_4 - c_5 r_2 y - k_5 r_2 \dot{y} &= c_5 r_2 \Delta, \\ m_5 \ddot{x}_5 + c_2(x_5 - x_6) - c_5 y + k_2(\dot{x}_5 - \dot{x}_6) - k_5 \dot{y} &= c_5 \Delta, \\ m_6 \ddot{x}_6 - c_2(x_5 - x_6) + c_4 x_6 - k_2(\dot{x}_5 - \dot{x}_6) + k_4 \dot{x}_6 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>1</sup> В диалоге с ЭВМ участвовал специалист по динамике машин П. И. Зинюков.

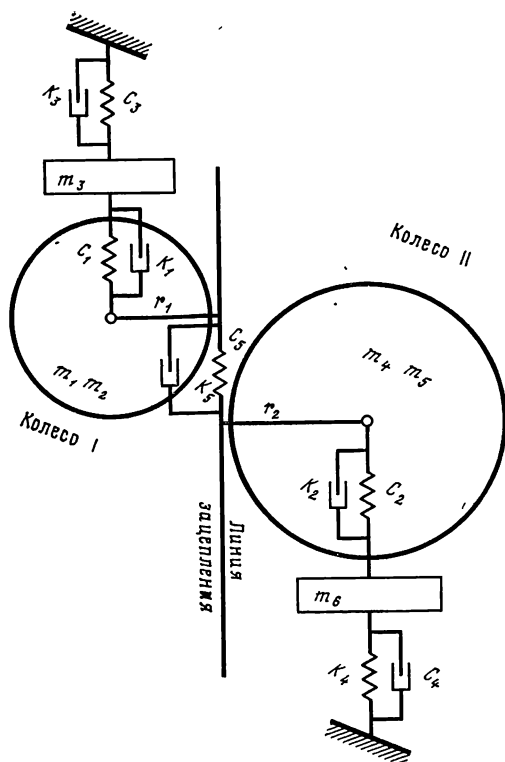


Рис. 2.4. Динамическая модель редуктора

Здесь  $r_1, r_2$  — радиусы основных окружностей колес I и II;  $m_1, m_4$  — их моменты инерции;  $m_2, m_5$  — их массы;  $m_3, m_6$  — массы подшипников колес I и II;  $c_1, c_2$  — жесткости колес I и II;  $c_3, c_4$  — жесткости стула подшипников колес I и II;  $c_5$  — жесткость зацепления;  $y = r_1 x_1 + x_2 - r_2 x_4 - x_5$ ;  $k_i$  — коэффициент демпфирования в соответствующей жесткости.

Численные значения всех параметров приведены в табл. 2.1. Значения  $k_i$  указаны при двух частотах  $f$  (в герцах), так как предполагается, что  $\ln k_i$  есть линейная функция от  $f$ .

Накопленная погрешность  $\Delta$  представляется в виде  $\Delta = \Delta_0 \sin 2\pi ft$ , где  $f$  — частота вращения колеса I — меняется в рабочем диапазоне  $f_{\text{нач}} \leq f \leq f_{\text{кон}}$ ; пред-

Таблица 2.1

Параметры исходной модели

Параметры	$i = 1$	2	3	4	5	$i = 6$
$m_i$	2 кгм <sup>2</sup>	300 кг	300 кг	75кгм <sup>2</sup>	1000кг	300 кг
$10^9 c_i$ [н/м]	0,50	0,25	0,50	0,50	3,0	—
$10^6 k_i (50) \left[ \frac{\text{н} \cdot \text{с}}{\text{м}} \right]$	0,500	0,250	0,167	0,167	0,500	—
$10^6 k_i (150) \left[ \frac{\text{н} \cdot \text{с}}{\text{м}} \right]$	0,167	0,083	0,056	0,056	0,167	—
$r_i$ [мм]	91,41	355,71	—	—	—	—

полагается, что  $f_{\text{нач}} = 5$  гц,  $f_{\text{кон}} = 300$  гц. При каждом фиксированном  $f$  установившееся решение системы (9) ищется в виде  $x_i = a_i \sin(2\pi ft + \psi_i)$ .

По имеющимся программам на ЭВМ вычисляются амплитудно-частотные характеристики  $a_i(f)$  при  $1 \leq i \leq 6$ , ускорения  $u_i(f)$  (в децибеллах) при  $1 \leq i \leq 6$  и динамические усилия  $P_i(f)$  в жесткостях  $c_i$  при  $1 \leq i \leq 5$ . Вычисляются также собственные частоты системы (9) при  $\Delta \equiv 0$  и  $k_i = 0$ .

В качестве варьируемых рассматривались 11 параметров:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{11}) = (m_1, \dots, m_6, c_1, \dots, c_5).$$

**Критерии качества.** Редуктор был построен для виброакустических исследований. Одна из основных задач такого исследования — снижение виброактивности по различным выходным характеристикам, в различных точках механизма, на различных частотах. Естественно, что задача эта оказалась многокритериальной. Проектировщиком были сформулированы 14 критериев  $\Phi_v$ , значения которых желательно уменьшить.

Для сокращения записей введем обозначения

$$\bar{F} \equiv \frac{1}{f_{\text{кон}} - f_{\text{нач}}} \int_{f_{\text{нач}}}^{f_{\text{кон}}} F(f) df, \quad \max^* F \equiv \max_{f_{\text{нач}} \leq f \leq f_{\text{кон}}} F(f).$$

Тогда нетрудно записать все критерии:

а) средние и максимальные значения амплитуд перемещений (в микронах) подшипников колес I и II соответ-

ственно:

$$\Phi_1 = \bar{a}_3, \Phi_2 = \max a_3, \Phi_3 = \bar{a}_6, \Phi_4 = \max a_6;$$

б) средние и максимальные значения амплитуд ускорений (в децибеллах) подшипников колес I и II соответственно:

$$\Phi_5 = \bar{u}_3, \Phi_6 = \max \hat{u}_3, \Phi_7 = \bar{u}_6, \Phi_8 = \max u_6;$$

в) средние и максимальные значения амплитуд динамических усилий (в ньютонах), передаваемых с подшипников колес I и II на фундамент:

$$\Phi_9 = \bar{P}_3, \Phi_{10} = \max P_3, \Phi_{11} = \bar{P}_4, \Phi_{12} = \max P_4;$$

г) масса деталей вращения:  $\Phi_{13} = m_2 + m_5;$

д) число собственных частот, попавших в рабочий диапазон

$$f_{\text{нач}} \leq f \leq f_{\text{кон}} - \Phi_{14}.$$

Проектировщик высказал также предположение, что первые 12 критериев могут быть разбиты на тройки критериев, примерно равноценных. Первая тройка состоит из наиболее важных критериев  $\Phi_1, \Phi_5, \Phi_9$ ; вторая — из критериев  $\Phi_2, \Phi_6, \Phi_{10}$ ; третья — из критериев  $\Phi_3, \Phi_7, \Phi_{11}$ ; и, наконец, четвертая — из наименее существенных критериев  $\Phi_4, \Phi_8, \Phi_{12}$ . Как мы увидим в дальнейшем (разд. 4. 2), расчеты в основном подтвердили это предположение.

Составление таблиц испытаний. Допустимые пределы варьирования каждого из параметров были указаны проек-

Таблица 2.2

Значения параметров

$j$	$\alpha_j^*$	$\alpha_{1,j}$	$\alpha_j^{**}$	$\alpha_{416,j}$	$\alpha_j'$	$\hat{\alpha}_j$
1	1	2	3	1,042	1,00	1,00
2	150	300	450	360	360	375
3	150	300	450	247	247	242
4	50	75	100	94,6	100	100
5	650	1000	1350	720	720	700
6	200	300	400	210	200	200
7	0,40	0,50	0,60	0,459	0,459	0,440
8	0,20	0,25	0,30	0,275	0,275	0,263
9	0,40	0,50	0,60	0,588	0,600	0,600
10	0,40	0,50	0,60	0,599	0,600	0,600
11	2	3	4	3,89	4,00	4,00



тировщиком так, чтобы отличие их от параметров исходной модели, приведенных в табл. 2.1, не превосходило 20%—50%. Все значения  $\alpha_j^*$  и  $\alpha_j^{**}$  имеются в табл. 2.2; здесь же записаны координаты  $\alpha_{1,j}$  точки  $A_1$ , соответствующей исходной модели и помещенной в центр параллелепипеда  $\Pi$ .

В параллелепипеде  $\Pi$  было проведено 512 испытаний. Продолжительность одного испытания  $\tau \approx 1$  мин на ЭВМ Минск-32. Мы приводим фрагмент таблиц испытаний (табл. 2.3), содержащий лишь начало, средний участок и конец таблиц для первых семи критериев.

**Первый диалог с ЭВМ.** Целью этого диалога было выяснить, существуют ли модели, не худшие, чем  $A_1$  по всем 14 критериям? Иными словами, в качестве критериальных ограничений  $\Phi_v^{**}$  были выбраны значения, соответствующие точке  $A_1$ , то есть  $\Phi_v^{**} = \Phi_v(A_1)$  при всех  $v$ .

В таблице испытаний оказалось неожиданно много таких точек — 45. Причем нетрудно было заметить, что среди этих точек много существенно различных. Вероятно это связано с тем, что перед конструкторами редуктора не ставилась задача оптимального проектирования: нужна была «достаточно хорошая» работающая модель.

**Второй диалог с ЭВМ.** Обычно считается очень желательным уменьшение количества резонансов в рабочей зоне. Исходя из этого, было решено сохранить все  $\Phi_v^{**}$  при  $1 \leq v \leq 13$  и уменьшить  $\Phi_{14}^{**}$  до минимального значения  $\min \Phi_{14}(A_i) = 2$ , то есть выбрать  $\Phi_{14}^{**} = 2$ .

Количество пробных точек, удовлетворяющих новым критериальным ограничениям, сразу резко уменьшилось до четырех —  $A_{316}$ ,  $A_{390}$ ,  $A_{416}$ ,  $A_{484}$  (табл. 2.4). Ни одна из этих точек не является наилучшей по всем четырнадцати критериям<sup>2</sup>.

**Выбор наилучшей пробной точки.** Эта, вообще говоря, сложная задача (см. гл. 3), решается в рассматриваемом случае очень просто: сравнивая значения критериев для найденных четырех точек, легко заметить, что точка  $A_{416}$  — наилучшая по всем критериям, кроме  $\Phi_6$ ,  $\Phi_7$  и  $\Phi_{13}$ , причем значения  $\Phi_6(A_{416})$  и  $\Phi_7(A_{416})$  отличаются от наилучших всего на 0,3%. Из табл. 2.5 видно, что точка

<sup>2</sup> Все четыре точки приближенно эффективны в смысле определения, приведенного в гл. 3.

Таблица 2.3 Таблицы испытаний

Номер п/п	t	$\Phi_1(A_1)$	i	$\Phi_2(A_1)$	t	$\Phi_3(A_1)$	i	$\Phi_4(A_1)$	i	$\Phi_5(A_1)$	t	$\Phi_6(A_1)$	i	$\Phi_7(A_1)$
1	446	1,46	446	3,43	384	0,530	384	1,31	446	66,9	112	88,6	64	58,4
2	348	1,53	348	3,36	64	0,532	374	1,41	304	67,5	280	88,8	304	59,1
3	112	1,54	112	3,46	400	0,550	260	1,47	348	67,6	42	88,9	400	59,2
4	280	1,62	448	3,52	260	0,559	248	1,50	112	68,2	372	89,0	312	59,3
5	448	1,65	302	4,02	304	0,564	353	1,54	280	68,3	302	89,4	232	59,7
6	304	1,68	2	4,07	248	0,573	63	1,65	448	68,4	392	89,5	384	59,8
7	302	1,79	280	4,46	232	0,577	392	1,66	64	68,5	448	89,7	260	60,2
8	42	1,84	158	4,40	353	0,596	40	1,66	208	68,8	36	89,8	72	60,3
9	372	1,86	67	4,53	392	0,598	482	1,70	392	68,9	107	90,0	248	60,3
10	64	1,89	224	4,60	20	0,628	476	1,71	224	69,1	336	90,1	392	60,4
11	224	1,89	322	4,61	224	0,637	408	1,75	372	69,2	140	90,2	353	60,5
12	322	1,90	196	4,62	212	0,660	452	1,75	400	69,4	309	90,4	364	60,6
13	392	1,90	128	4,63	364	0,661	36	1,79	264	69,5	466	90,4	20	60,7
14	140	1,92	64	4,64	44	0,662	232	1,81	42	69,5	151	90,6	216	60,7
15	2	1,94	42	4,68	72	0,663	20	1,82	72	69,6	428	90,8	322	60,7
16	400	1,97	372	4,71	446	0,663	14	1,84	188	69,6	484	90,8	224	60,8
17	208	1,97	140	4,72	340	0,666	340	1,84	484	69,7	416	91,1	416	60,9
18	484	1,99	254	4,80	312	0,675	222	1,84	302	69,7	216	91,1	340	61,1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
280	328	3,96	195	11,24	425	1,378	21	4,45	429	75,1	169	101,2	308	66,7
281	444	3,97	57	11,32	163	1,378	12	4,47	177	75,1	39	101,2	487	66,8
282	351	3,97	15	11,39	200	1,382	414	4,47	354	75,1	398	101,2	100	66,8
283	382	3,97	496	11,39	375	1,383	362	4,49	1	75,1	387	101,3	218	66,8
284	82	3,97	125	11,42	68	1,388	478	4,50	351	75,1	429	101,3	226	66,8
285	1	3,99	153	11,43	1	1,389	185	4,50	478	75,1	358	101,4	301	66,8
286	334	4,00	355	11,45	334	1,389	255	4,51	78	75,1	362	101,4	505	66,8
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
511	407	9,82	89	32,82	347	3,275	46	17,04	245	81,9	407	111,5	35	74,4
512	71	10,01	407	34,24	359	3,450	507	17,52	71	82,7	89	111,8	347	74,5

Таблица 2.4

Значения  $\Phi_v(A_i)$  в четырех точках

$i$	$v=1$	2	3	4	5	6	7
216	2,55	8,07	0,714	3,22	70,6	91,1	60,7
390	3,17	9,28	0,903	2,43	72,9	93,3	63,0
416	1,46	3,13	0,663	1,96	66,9	91,1	60,9
484	1,99	5,43	0,740	2,30	69,7	90,8	62,0

$A_{416}$  оптимальна среди всех 512 пробных точек по критериям  $\Phi_1$  и  $\Phi_5$  из первой группы и по критерию  $\Phi_2$  из второй группы. Из табл. 2.3 видно также, что она входит в число двадцати наилучших по критериям  $\Phi_3$ ,  $\Phi_6$  и  $\Phi_7$ . Поэтому наилучшей пробной точкой была объявлена точка  $A_{416}$ . Значения координат этой точки приведены в табл. 2.2.

**Улучшение точки  $A_{416}$ .** Сравнив координаты точки  $A_{416}$  с границами параллелепипеда  $\Pi$  (см. табл. 2.2), трудно заметить, что шесть из координат близки к границам  $\Pi$ , а именно  $\alpha_{416,1}$ ,  $\alpha_{416,4}$ ,  $\alpha_{416,8}$ ,  $\alpha_{416,9}$ ,  $\alpha_{416,10}$  и  $\alpha_{416,11}$  близки к  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_4^{**}$ ,  $\alpha_6^*$ ,  $\alpha_9^{**}$ ,  $\alpha_{10}^*$ ,  $\alpha_{11}^{**}$ . В соответствии с рекомендацией, высказанной в конце раздела 3.1, была рассчитана пробная точка  $A'$ , у которой эти шесть коор-

Таблица 2.5

Значения критериев

$v$	$\min \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_1)$	$\max \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_{416})$	$\Phi_v(A')$	$\Phi_v(\hat{A})$
1	1,46	3,99	10,01	1,46	1,37	1,29
2	3,13	12,97	34,24	3,13	2,98	2,66
3	0,530	1,389	3,450	0,663	0,577	0,578
4	1,31	4,37	17,52	1,96	1,43	1,38
5	66,9	75,1	82,7	66,9	66,3	66,0
6	88,6	103,7	111,8	91,1	90,3	89,9
7	58,4	67,0	74,5	60,9	59,9	60,0
8	77,7	91,8	106,1	87,3	83,9	84,3
9	664	2000	5452	861	825	777
10	1502	6490	19550	1850	1796	1601
11	231	697	1735	398	352	353
12	568	2186	10035	1175	948	845
13	846	1300	1775	1080	1080	1075
14	2	3	4	2	2	2

8	9	10	11	12	13	$v=14$
91,6	1253	3978	426	1920	1025	2
89,2	1502	4415	505	1355	983	2
87,3	861	1850	398	1175	1080	2
88,7	1054	2881	420	1302	1202	2

динат заменены граничными значениями, а остальные совпадают с координатами точки  $A_{416}$ . Из табл. 2.5 видно, что по всем критериям точка  $A'$  оказалась лучше точки  $A_{416}$ . По-видимому, минимальные значения большинства из функции  $\Phi_v(A)$  достигаются на границе  $\Pi$ .

III-поиск в окрестности  $A'$ . Точка  $A'$  была помещена в центр пятимерного параллелепипеда

$$0,95\alpha_j \leq \alpha_j \leq 1,05\alpha_j \quad (j = 2, 3, 5, 7, 8);$$

значения  $\alpha'_1, \alpha'_4, \alpha'_6, \alpha'_9, \alpha'_{10}$  и  $\alpha'_{11}$  были закреплены. Выбрав и рассчитав в этом параллелепипеде 128 пробных точек, мы убедились, что

а) улучшить точку  $A'$  по всем критериям невозможно;  
 б) значения  $\Phi_v(A')$  устойчивы при малых изменениях точки  $A$  в окрестности  $A'$ ;

в) среди 128 пробных точек проектировщик выделил одну (с порядковым номером 67), которую следует считать наилучшей. Эту точку мы обозначим  $\hat{A}$ ; координаты ее приведены в табл. 2.2, а значения  $\Phi_v(\hat{A})$  — в табл. 2.5.

Так как численные значения  $\Phi_v(\hat{A})$  сравнительно мало отличаются от  $\Phi_v(A')$ , то на этом поиск решено было прекратить. Оптимальной точкой была объявлена точка  $\hat{A}$ . Из табл. 2.5 легко видеть, насколько улучшились значения всех критериев  $\Phi_v(\hat{A})$  по сравнению со значениями  $\Phi_v(A_1)$  для исходной модели.

**Замечание.** Из табл. 2.4 видно, что если возникнет задача об уменьшении массы редуктора, то наилучшее решение придется искать не в окрестности точки  $A_{416}$ , а в окрестности  $A_{390}$ .

## ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ

После того как множество допустимых точек  $D$  определено традиционная схема выбора оптимальных параметров весьма проста: выбирается решающий критерий качества  $\Phi(A)$  и формулируется задача об отыскании точки  $\hat{A}$  такой, что

$$\Phi(\hat{A}) = \min_{A \in D} \Phi(A).$$

Координаты точки  $\hat{A}$  и будут оптимальными параметрами. Такая постановка задачи обсуждается в разделе 3.1.

Однако весьма часто конструкторы не могут или не хотят вводить один решающий критерий: по их мнению, решение о выборе параметров должно приниматься с учетом нескольких критериев, или даже всех  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ , а как сравнивать ценность различных критериев — не ясно. В этой ситуации приходится отыскивать множество возможных оптимальных точек, то есть решать гораздо более сложную задачу. Этому посвящен раздел 3.2.

А в разделе 3.3 рассмотрен важный частный случай, когда заданы два решающих критерия, противоречащих друг другу, и вместо оптимальной точки следует определить так называемую компромиссную кривую.

## 3.1 Один решающий критерий

Мы не будем давать рецептов, как выбирать решающий критерий  $\Phi(A)$ : в разных задачах это делают по-разному [10]. Приведем только несколько, как нам кажется, нестандартных соображений.

**О роли  $\Phi(A)$ .** В ходе расчета ряда задач мы обнаружили, что после определения множества  $D$ , конструкторы теряли интерес к выбору функции  $\Phi$ . Они утверждали, что любое решение, удовлетворяющее всем найденным в гл. 2 критериальным ограничениям, является отличным решением задачи. И в качестве «оптимальной» предпочитали выбрать по своему усмотрению одну из найденных точек (ср. пример в разделе 2.4).

Конечно, с математической точки зрения такое решение нельзя назвать оптимальным. Но именно так нередко принимают решение на практике.

О выборе  $\Phi(A)$ . При использовании нашей методики, когда количество рассматриваемых критериев качества не ограничивается, трудно представить себе, чтобы решающий критерий  $\Phi$  не зависел ни от одного из  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ : так как  $\Phi$  учитывает какие-то реальные (физические) характеристики проектируемой системы, то ничто не мешало нам включить их в число критериев качества. В частности, решающий критерий может либо совпадать с одним из  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ , либо зависеть от нескольких из них, так что  $\Phi = F(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$ .

Нетрудно понять, что в этой ситуации изучение таблиц испытаний помогает выбрать зависимость  $F$ : при этом учитываются не только предварительные указания о роли каждого критерия, но и их действительные возможности.

Пример. Иногда  $\Phi$  выбирают в форме

$$\Phi = \sum_{v=1}^k c_v \Phi_v(A),$$

где все  $c_v \geq 0$ , а сумма их  $c_1 + \dots + c_k = 1$ . Если из таблицы испытаний видно, что в пределах  $D$  изменение значений критерия  $\Phi_p(A)$  не существенны, то естественно положить в последней формуле  $c_p = 0$ .

О вычислении  $\Phi(A_i)$ . Если решающий критерий  $\Phi$  есть функция от  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ , то, после выбора функциональной зависимости  $F$ , значения  $\Phi(A_i)$  во всех пробных точках  $A_i$ , принадлежащих  $D$ , легко вычисляются по имеющимся значениям  $\Phi_v(A_i)$ :

$$\Phi(A_i) = F(\Phi_1(A_i), \dots, \Phi_k(A_i)).$$

Следовательно, сразу после выбора  $\Phi$ , не пересчитывая всей системы, мы можем найти значения  $\Phi(A_i)$ .

В гл. 2 доказано, что последовательность  $D_N$  пробных точек, принадлежащих  $D$ , представляет собой начальный участок последовательности, равномерно распределенной в  $D$ . Поэтому значения  $\Phi(A_i)$  в этих точках очень полезны для численного решения задачи об отыскании  $\min \Phi(A)$  при  $A \in D$ . Можно воспользоваться любым методом локального поиска экстремумов [8, 12, 18], выбирая в качестве начальных точек поиска все точки  $A_i$ , принадлежащие  $D_N$  или только лучшие из них. Если множество  $D$  несвязно (см. рис. 2.3), то только такой глобальный подход может гарантировать, что поиск захватит любые части множества  $D$ .

**Об использовании ЛП-поиска.** При расчете ряда задач мы на этой стадии использовали простейший ЛП-поиск: несколько лучших (по мнению проектировщиков) точек из  $D_N$  помещались поочередно в центр малого параллелепипеда, в котором выбирались от 16 до 128 пробных точек. Если в какой-нибудь из этих точек, назовем ее  $A'$ , значение  $\Phi(A')$  оказывалось лучше, чем значение в центре (и при этом  $A' \in D$ ), то иногда выбирался следующий параллелепипед с центром в  $A'$ . Если какая-нибудь из координат точки  $A'$  оказывалась близко к границе  $\Pi$ , то размер малого параллелепипеда соответственно уменьшался.

Общих рекомендаций на этот счет мы дать не можем. Однако если наилучшая точка  $A'$  оказывается вблизи границы  $\Pi$ , то мы считаем, что, как правило, имеет смысл сделать еще пробный расчет системы, передвинув эту пробную точку на границу  $\Pi$ : наименьшие и наибольшие значения функций часто оказываются на границе.

Мы не утверждаем, что в этих условиях ЛП-поиск эффективнее других методов поиска экстремумов: просто, все необходимое для его реализации (генератор пробных точек, алгоритмы просмотра и отбора) используется в гл. 2 и, следовательно, имеется в отлаженном состоянии.

### 3.2. Несколько решающих критериев

Предположим теперь, что конструктор желает сам осуществить окончательный выбор параметров системы, принимая во внимание несколько важнейших критериев, например,  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ , где, естественно,  $m \leq k$ . В этом случае можно облегчить ему выбор, исключив из числа пробных точек, попавших в множество  $D$ , такие точки, которые заведомо не могут оказаться наилучшими.

**Эффективные точки.** Пусть в  $n$ -мерном замкнутом множестве  $D$  заданы  $m$  непрерывных функций  $\Phi_1(A), \dots, \dots, \Phi_m(A)$ . Условимся говорить, что точка  $A'$  безусловно лучше, чем точка  $A$ , если при всех  $v = 1, 2, \dots, m$

$$\Phi_v(A') \leq \Phi_v(A)$$

и хотя бы при одном  $v$  имеет место строгое неравенство. В этом случае можно также сказать, что точка  $A$  безусловно хуже, чем точка  $A'$ .

**О п р е д е л е н и е.** Если не существует точки  $A' \in D$ , безусловно лучшей, чем  $A$ , то точка  $A$  называется *эффек-*

тивной<sup>3</sup>; если существует точка  $A'$ , безусловно лучшая, чем  $A$ , то точка  $A$  называется *неэффективной*.

Очевидно, при окончательном выборе параметров нужно принимать во внимание только эффективные точки: неэффективная точка не может оказаться наилучшей.

Множество всех эффективных точек обозначим  $E$ . Важнейшие свойства  $E$  сформулированы в известных теоремах 1 и 2.

**Теорема 1.** *Если множество  $D$  замкнуто и все функции  $\Phi_1(A), \dots, \Phi_m(A)$  непрерывны, то множество эффективных точек  $E$  непусто.*

При доказательстве этой теоремы мы воспользуемся следующим простым свойством непрерывной функции  $f(A)$ , определенной на замкнутом множестве: подмножество, состоящее из всех точек  $A$ , в которых  $f(A) = c$ , либо пусто, либо замкнуто. В самом деле, если последовательность точек  $A_1, \dots, A_i, \dots$ , в которых  $f(A_i) = c$ , сходится к точке  $A_0$ , то из непрерывности  $f(A)$  следует, что  $f(A_0) = c$ ; следовательно, точка  $A_0$  принадлежит тому же подмножеству.

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим множество  $D_1 \subseteq D$ , состоящее из точек  $A$  таких, что

$$\Phi_1(A) = \min_{A \in D} \Phi_1(A).$$

Это множество непусто. Если оно состоит из одной точки  $A_0$ , то эта точка эффективна, ибо в любой другой точке  $A'$  значение  $\Phi_1(A') > \Phi_1(A_0)$ . В противном случае рассмотрим множество  $D_2 \subseteq D_1$ , состоящее из точек  $A$  таких, что

$$\Phi_2(A) = \min_{A \in D_1} \Phi_2(A).$$

Множество  $D_2$  также непусто. Если оно состоит из одной точки  $A_0$ , то эта точка эффективна (ибо в любой другой точке  $A' \in D_1$  значение  $\Phi_2(A') > \Phi_2(A_0)$ , а в любой точке  $A' \in D - D_1$  значение  $\Phi_1(A') > \Phi_1(A_0)$ ). В противном случае рассмотрим множество  $D_3 \subseteq D_2$ , состоящее из точек  $A$  таких, что

$$\Phi_3(A) = \min_{A \in D_2} \Phi_3(A) \text{ и т. д.}$$

Если на каком-то этапе множество  $D_s$  состоит из одной точки, то эта точка окажется эффективной. В противном случае мы придем к множеству  $D_m$ , состоящему из точек  $A$  таких, что

$$\Phi_m(A) = \min_{A \in D_{m-1}} \Phi_m(A).$$

Докажем, что все точки множества  $D_m$  эффективны. Пусть  $A_0 \in D_m$ . Точка  $A' \in D - D_1$  не может быть безусловно лучше,

<sup>3</sup> Эффективные точки в литературе называют также нехудшими или паретовскими (по имени В. Парето) [7, 11]. Мы сохраним название «паретовские» для обозначения образов эффективных точек в пространстве критериев.



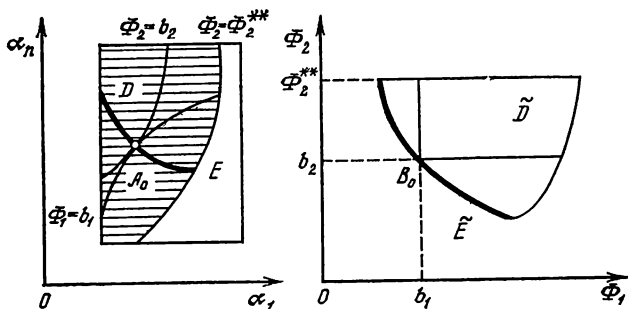


Рис. 3.1. Множество допустимых точек  $D$  и множество эффективных точек  $E$  в пространстве параметров и соответствующие множества возможных значений  $\tilde{D}$  и паретовских точек  $\tilde{E}$  в пространстве критериев

чем  $A_0$ , так как  $\Phi_1(A') > \Phi_1(A_0)$ ; точка  $A' \in D_1 - D_2$  также не может быть безусловно лучше, чем  $A_0$ , ибо  $\Phi_2(A') > \Phi_2(A_0)$ ; и т. д. Наконец, точка  $A' \in D_m$  не может быть безусловно лучше, чем  $A_0$ , ввиду того, что  $\Phi_\nu(A') = \Phi_\nu(A_0)$  при всех  $\nu = 1, 2, \dots, m$ .

Таким образом, непустота множества  $E$  доказана.

**Пространство критериев.** Рассмотрим  $m$ -мерное пространство точек с декартовыми координатами  $(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ . Каждая точка  $A$  пространства параметров отображается в точку  $B = (\Phi_1(A), \dots, \Phi_m(A))$  пространства критериев. Множество всех точек  $B$ , соответствующих всевозможным  $A \in D$ , назовем *множеством возможных точек*  $\tilde{D}$  в пространстве критериев. Если выполнены условия теоремы 1, то множество  $\tilde{D}$  замкнуто. Если часть границы множества  $D$  определяется критериальным ограничением  $\Phi_\nu(A) \leq \Phi_\nu^{**}$ , то соответствующая часть границы  $\tilde{D}$  состоит из куска гиперплоскости  $\Phi_\nu = \Phi_\nu^{**}$ .

Множество всех точек  $B$ , соответствующих всевозможным эффективным точкам  $A \in E$ , назовем *множеством паретовских точек*  $\tilde{E}$ .

Нетрудно доказать, что паретовские точки расположены на границе множества возможных точек  $\tilde{D}$  (рис. 3.1). Это вытекает из следующего свойства, которое часто называют *минимальным свойством* эффективных точек.

**Теорема 2.** Предположим, что множество  $E$  непусто, точка  $A_0 \in E$  и  $\Phi_\nu(A_0) = b_\nu$  при  $\nu = 1, 2, \dots, m$ . Для каждого фиксированного  $\nu$   $b_\nu = \min \Phi_\nu(A)$ , при условии, что  $A \in D$  и  $\Phi_\mu(A) = b_\mu$  при всех  $\mu$ , отличных от  $\nu$ .

**Доказательство.** Фиксируем для определенности  $\nu = 1$ . Теорема утверждает (см. рис. 3.1), что

$$b_1 = \min \{ \Phi_1(A) \mid \Phi_2(A) = b_2, \dots, \Phi_m(A) = b_m \} \quad (A \in D).$$

Если допустить противное: что в какой-то точке  $A'$  значение  $\Phi_1(A') < b_1$  и в то же время все остальные значения  $\Phi_2(A') = b_2, \dots, \Phi_m(A') = b_m$ , то окажется, что точка  $A'$  безусловно лучше, чем  $A_0$ ; а это противоречит предположению об эффективности  $A_0$ .

При любом другом фиксированном  $\nu$  рассуждения аналогичны, так что теорема 2 доказана.

Заметим, что минимальное свойство представляет собой необходимый признак эффективности точки. Из рис. 3.2 легко усмотреть, что этот признак, вообще говоря, не достаточен: не только эффективные точки обладают этим свойством.

Действительно, если и гипербола  $BB'B''$ , и отрезок  $B_0B'$  принадлежат изображенному на рис. 3.2 множеству возможных точек  $\tilde{D}$ , то из всех точек отрезка лишь его конец  $B_0$  будет паретовской точкой. Однако свойством минимума (по обоим критериям) обладают все точки  $A$ , отображающиеся в отрезок  $B_0B'$ .

В общем случае размерность множества паретовских точек  $E$  равна  $m - 1$ . Это видно из следующего рассуждения: фиксировав произвольные возможные значения  $b_2, \dots, b_m$ , мы получим одну соответствующую им паретовскую точку  $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ , в которой  $b_1$  определяется как условный минимум  $\Phi_1(A)$ .

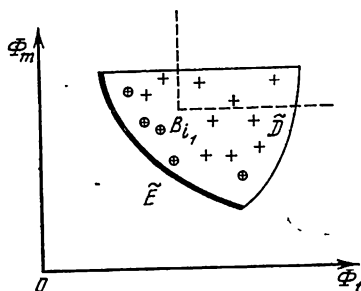
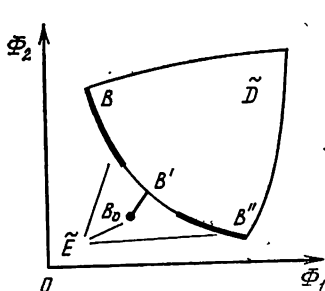


Рис. 3.2. Множество паретовских точек  $\tilde{E}$  с изолированной точкой  $B_0$

Рис. 3.3. К алгоритму исключения неэффективных точек. Приближенно паретовские точки обведены кружками

**Приближенно эффективные точки.** Предположим теперь, что в результате расчета, описанного в гл. 2, мы получили конечное множество  $D_N$ , состоящее из  $q$  пробных точек  $A_i$ , принадлежащих  $D$ , и в этих точках известны все значения  $\Phi_{v_n}(A_i)$  при  $v = 1, 2, \dots, m$ .

**О п р е д е л е н и е.** Точка  $A_i$  из  $D_N$  называется *приближенно эффективной*, если не существует такой точки  $A_j$  из  $D_N$ , которая была бы безусловно лучше, чем  $A_i$ .

Множество всех приближенно эффективных точек из  $D_N$  обозначим  $E_N$ . Очевидно все точки из  $D_N$ , которые не принадлежат  $E_N$ , не эффективны и неэффективность их может быть обнаружена сравнением значений  $\Phi_v(A_i)$  в различных точках.

**Простейший алгоритм выделения приближенно эффективных точек.** Пометим какую-нибудь точку  $A_{i_1}$  из  $D_N$ . Сравнивая ее со всеми остальными точками из  $D_N$ , исключим все точки  $A_j$ , которые безусловно хуже, чем  $A_{i_1}$ . Затем из оставшихся точек выберем непомеченную точку, например,  $A_{i_2}$  и пометим ее. Сравнивая ее со всеми оставшимися точками (включая  $A_{i_1}$ ), исключим те из них, которые безусловно хуже, чем  $A_{i_2}$  и т. д. После конечного числа шагов останутся только помеченные точки. Докажем, что все оставшиеся точки приближенно эффективны.

В самом деле, пусть  $A_s$  — какая-нибудь неэффективная точка из  $D_N \setminus E_N$ . Значит, существует хотя бы одна безусловно лучшая, чем  $A_s$ , точка  $A_i$ . Если точка  $A_i$  в процессе исключения уцелела, то, очевидно, точка  $A_s$  была исключена: самое позднее — на том шаге, на котором выбиралась и помечалась точка  $A_i$ . Если точка  $A_i$  сама была исключена, то на том же шаге должна была быть исключена и точка  $A_s$  (так как если  $A_j$  безусловно лучше, чем  $A_i$ , а  $A_i$  безусловно лучше, чем  $A_s$ , то  $A_j$  также безусловно лучше, чем  $A_s$ ); опять же — при условии, что точка  $A_s$  не была исключена еще раньше.

Геометрическая интерпретация этого алгоритма особенно наглядна, если рассматривать изображения пробных точек в пространстве критериев (рис. 3.3.): выбрав точку  $A_{i_1}$ , мы исключаем все точки  $A_j$ , образы которых попали в квадрант (в многомерном случае — гипероктант) с вершиной в точке  $B_{i_1}$  — образе точки  $A_{i_1}$ .

<sup>4</sup> То есть такие точки  $A_j$ , для которых при всех  $v$   $\Phi_v(A_i) \leq \Phi_v(A_j)$  и хотя бы при одном  $v = v_0$  имеет место строгое неравенство.

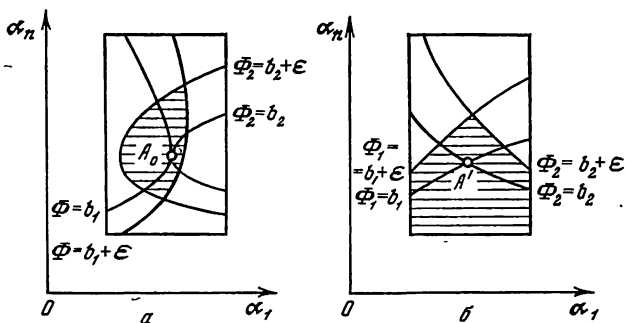


Рис. 3.4. Специальная  $\varepsilon$ -окрестность эффективной точки (а) и неэффективной точки (б)

Используя приведенный алгоритм, нетрудно исключить из множества  $D_N$  заведомо неэффективные точки и получить множество  $E_N$ , состоящее из  $q_0 \leq q$  приближенно эффективных точек. Как правило, для поиска приближенно наилучших точек конструктор может ограничиться изучением множества  $E_N$ . О возможных исключениях из этого правила см. в замечании в конце раздела 3.3.

**О сходимости.** В общем случае вопрос сходимости  $E_N$  к  $E$  при  $N \rightarrow \infty$  достаточно сложен. Мы ограничимся здесь сравнительно простой теоремой, которая тем не менее потребует введения специального аппарата. Мы будем предполагать, что

1°. Условия теоремы 1 выполнены;

2°. Среди точек множества  $E$  нет двух таких, в которых все критерии совпадают.

Для каждой точки  $A_0$  из  $E$  определим специальную  $\varepsilon$ -окрестность  $S(A_0, \varepsilon)$ , как множество точек  $A \in D$  таких, что при всех  $v = 1, 2, \dots, m$

$$\Phi_v(A) < \Phi_v(A_0) + \varepsilon. \quad (1)$$

Пример такой окрестности при  $m = 2$  изображен на рис. 3.4, а.

Докажем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  множества  $S(A_0, \varepsilon)$  стягиваются к точке  $A_0$ . В самом деле, очевидно  $A_0 \in S(A_0, \varepsilon)$  при любом  $\varepsilon > 0$ . Если допустить, что точка  $A'$  также принадлежит всем  $S(A_0, \varepsilon)$ , то из (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим, что  $\Phi_v(A') \leq \Phi_v(A_0)$  для  $v = 1, 2, \dots, m$ . Так как точка  $A_0$  эффективная, то отсюда вытекает, что  $\Phi_v(A') = \Phi_v(A_0)$  при всех  $v$ . Ясно, что этот вывод противоречит допущению 2°.

Заметим, что если точка  $A' \in D - E$ , то множество  $S(A', \varepsilon)$  может иметь весьма странный (для «окрестности») вид (рис. 3.4, б) и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  не обязано стягиваться к  $A'$ .

Если точка  $A_0 \in E$  представляет собой внутреннюю точку множества  $D$ , то можно построить шар с центром в  $A_0$  столь малого радиуса, чтобы в этом шаре  $|\Phi_v(A) - \Phi_v(A_0)| < \varepsilon$  при всех  $v$ .

Тогда весь этот шар принадлежит  $S(A_0, \varepsilon)$ , и объем ( $n$ -мерный) специальной  $\varepsilon$ -окрестности положителен.

Если точка  $A_0 \in E$  представляет собой граничную точку множества  $D$ , и в любой ее окрестности имеются внутренние точки  $D$ , то аналогичные рассуждения показывают, что объем  $S(A_0, \varepsilon)$  также будет положительным.

Следовательно, если множество  $D$  совпадает с замыканием множества своих внутренних точек (как это предполагалось в гл. 2), то для любой точки  $A_0 \in E$  объем  $S(A_0, \varepsilon)$  положителен.

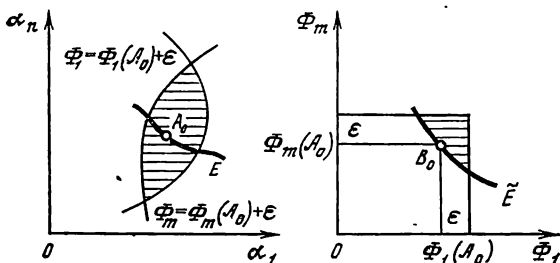


Рис. 3.5. Специальная  $\varepsilon$ -окрестность в пространстве параметров и ее образ в пространстве критериев

Напротив, если  $A_0 \in E$  — изолированная точка множества  $D$ , то при всех достаточно малых  $\varepsilon$  множество  $S(A_0, \varepsilon)$  содержит лишь одну точку  $A_0$  и объем  $S(A_0, \varepsilon)$  равен нулю. Так что, если не делать предположения о совпадении  $D$  с замыканием множества его внутренних точек, то положительность объема специальной окрестности  $S(A_0, \varepsilon)$  следует оговаривать особо.

**Теорема 3.** *Предположим, что выполнены требования 1° и 2°. Выберем любые точки  $A_1^0, \dots, A_s^0$  из  $E$  с окрестностями положительного объема  $S(A_1^0, \varepsilon), \dots, S(A_s^0, \varepsilon)$ . Можно указать такое  $N_0$ , что когда количество пробных точек  $N$  превосходит  $N_0$ , то в каждой из этих окрестностей найдется хотя бы по одной точке из  $E_N$ .*

**Доказательство.** Так как последовательность пробных точек равномерно распределена в  $G$ , то можно выбрать  $N_0$  столь большим, чтобы в каждую из  $s$  фиксированных окрестностей попала хотя бы одна пробная точка. Тогда в каждой  $S(A_j^0, \varepsilon)$  найдется хотя бы одна точка  $A_{ij}$  из  $D_{N_0}$ .

Если эта точка приближенно эффективна, то она и будет искомым точкой из  $E_{N_0}$ ; в противном случае должна существовать другая приближенно эффективная точка  $A_{ik} \in D_{N_0}$ , безусловно лучшая, чем  $A_{ij}$ . Но в этом случае  $\Phi_v(A_{ik}) \leq \Phi_v(A_{ij})$ , и точка  $A_{ik}$  также принадлежит  $S(A_j^0, \varepsilon)$ .

Следовательно, в каждой окрестности  $S(A_j^0, \varepsilon)$  найдется приближенно эффективная точка из  $D_{N_0}$ , то есть точка из  $E_{N_0}$ .

При дальнейшем увеличении  $N$  приближенно эффективная точка  $A_i$  может перестать быть таковой, но только в том случае, когда появится новая приближенно эффективная точка, безусловно лучшая, чем  $A_i$ . Вышеприведенное рассуждение показывает, что эта новая точка принадлежит той же специальной  $\varepsilon$ -окрестности  $S(A_i^0, \varepsilon)$ , что и точка  $A_i$ . Таким образом, утверждение теоремы полностью доказано.

**Замечание.** В пространстве критериев специальной  $\varepsilon$ -окрестности  $S(A_0, \varepsilon)$  эффективной точки  $A_0$  соответствует односторонняя пирамидальная окрестность паретовской точки  $B_0 = (\Phi_1(A_0), \dots, \Phi_m(A_0))$ ; на рис. 3.5 обе эти окрестности заштрихованы.

### 3.3. Компромиссная кривая

Особый интерес для практики представляет частный случай, когда заданы два решающих критерия,  $m = 2$ . В этом случае множество паретовских точек представляет собой, вообще говоря, одномерное многообразие на плоскости и допускает удобное графическое представление.

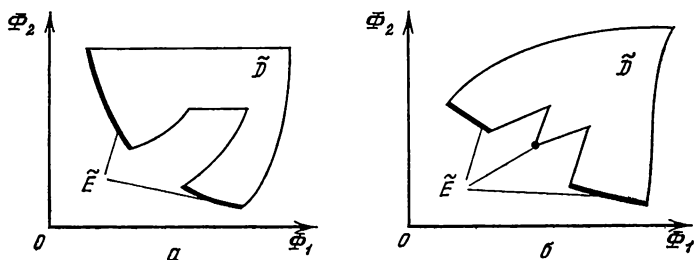


Рис. 3.6. Компромиссные кривые с разрывом (а) и с изолированной точкой (б)

**Компромиссная кривая.** Множество паретовских точек в двухмерном пространстве критериев называют *компромиссной кривой*. Хотя, строго говоря, это не всегда кривая: она может состоять из несвязных кусков и содержать изолированные точки (рис. 3.6).

Легко, однако, доказать, что компромиссная кривая строго монотонно убывает в следующем смысле. Пусть  $B$  и  $B'$  — произвольные точки, принадлежащие компромиссной кривой. Обозначим их координаты  $B = (b_1, b_2)$ ,

$B' = (b'_1, b'_2)$ . Тогда,

$$\text{если } b_1 < b'_1, \text{ то } b_2 > b'_2. \quad (2)$$

В самом деле, если бы оказалось, что  $b_1 < b'_1$  и  $b_2 \leq b'_2$ , то прообраз точки  $B'$  был бы безусловно хуже, чем прообраз точки  $B$ , и не мог бы принадлежать множеству эффективных точек  $E$ .

Как следствие неравенств (2) можно сказать, что компромиссная кривая не содержит ни горизонтальных, ни вертикальных отрезков, и уравнение ее может быть представлено и в форме  $\Phi_2 = u(\Phi_1)$ , и в форме  $\Phi_1 = v(\Phi_2)$ .

**Приближенная компромиссная кривая.** Алгоритм, приведенный в предыдущем параграфе, позволяет среди

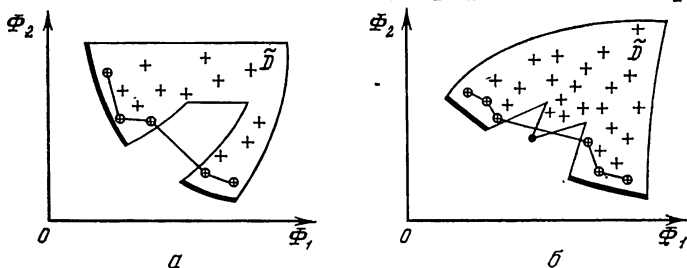


Рис. 3.7. Пробные точки и приближенные компромиссные кривые соответствующие рис. 3.6

Приближенно паретовские точки обведены кружками

$q$  пробных точек  $D_N$  отобразить конечное число  $q_0$  приближенно эффективных точек, составляющих множество  $E_N$ .

Назовем *приближенно паретовской точкой* образ приближенно эффективной точки в пространстве критериев. Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем пункте, легко доказать, что если  $B = (b_1, b_2)$  и  $B' = (b'_1, b'_2)$  — две приближенно паретовские точки, то справедливо свойство (2): если  $b_1 < b'_1$ , то  $b_2 > b'_2$ .

Легко также проверить, что если  $B' \neq B$ , то и  $b_1 \neq b'_1$  и  $b_2 \neq b'_2$  (ибо, в противном случае, один из прообразов точек  $B$  и  $B'$  был бы безусловно хуже другого и не мог бы быть приближенно эффективной точкой). Следовательно, все приближенно паретовские точки можно упорядочить по возрастанию абсцисс или, что то же, по убыванию ординат.

*Приближенной компромиссной кривой* называется ломаная, соединяющая по порядку все приближенно паретовские точки (рис. 3.7).

Из вышесказанного следует, что приближенная компромиссная кривая строго монотонно убывает, и уравнение ее может быть записано как в форме  $\Phi_2 = u_N(\Phi_1)$ , так и в форме  $\Phi_1 = v_N(\Phi_2)$ . Мы докажем, что когда количество пробных точек  $N$  возрастает, то приближенная компромиссная кривая в некотором смысле приближается к точной компромиссной кривой.

**Теорема о сходимости.**

**Теорема 4.** *Предположим, что множество  $D$  замкнуто, и функции  $\Phi_1(A)$  и  $\Phi_2(A)$  непрерывны. Предположим, что множество  $E$  или какая-то его часть, состоящая из точек со специальными окрестностями положительного объема, взаимоднозначно отображается на простую дугу компромиссной кривой. Пусть  $B = (b_1, b_2)$  — произвольная точка, расположенная внутри этой дуги. Тогда*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N(b_1) = b_2, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} v_N(b_2) = b_1.$$

**Доказательство.** Мы будем доказывать только первое утверждение теоремы, так как второе доказывается в точности так же.

Сперва докажем, что приближенная компромиссная кривая  $\Phi_2 = u_N(\Phi_1)$  определена для фиксированного нами значения  $b_1$  при всех  $N \geq N_0$ . В самом деле, обозначим

$$b_1^* = \min_{A \in D} \Phi_1(A), \quad b_2^* = \min_{A \in D} \Phi_2(A)$$

и пусть приближенные значения минимумов равны

$$\Phi_{1,N}^* = \min_{A \in D_N} \Phi_1(A), \quad \Phi_{2,N}^* = \min_{A \in D_N} \Phi_2(A).$$

При  $N \rightarrow \infty$ , как следует из главы I,  $\Phi_{1,N}^* \rightarrow b_1^*$ ,  $\Phi_{2,N}^* \rightarrow b_2^*$ . Следовательно, при увеличении  $N$ , среди точек последовательности  $D_N$  найдутся точки со значениями  $\Phi_1$  как угодно близкими к  $b_1^*$  и со значениями  $\Phi_2$ , как угодно близкими к  $b_2^*$ . Легко видеть, что точки множества  $D_N$  с минимальными значениями  $\Phi_1$  или  $\Phi_2$  приближенно эффективны и принадлежат  $E_N$ . Поэтому при  $N \geq N_0$  среди точек  $E_N$  найдутся точки  $A_i$  и  $A_j$  со значениями, удовлетворяющими неравенствам

$$b_1^* \leq \Phi_1(A_i) < b_1, \quad b_2^* \leq \Phi_2(A_j) < b_2.$$

Так как точка  $B$  паретовская, то  $\Phi_1(A_j) > b_1$ ; и отрезок существования приближенной компромиссной кривой  $\Phi_1(A_i) \leq \Phi_1 \leq \Phi_1(A_j)$  накроет значение  $b_1$ .



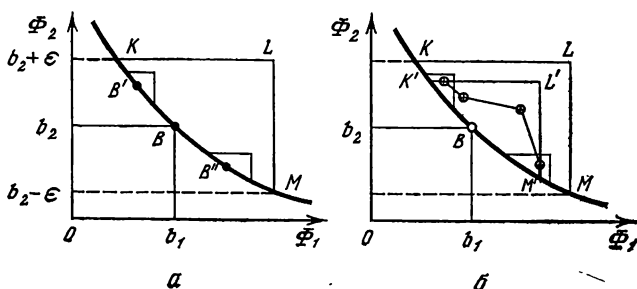


Рис. 3.8. К доказательству теоремы 4

Выберем теперь сколь угодно малое число  $\varepsilon > 0$  и докажем, что при всех  $N \geq N_1 \geq N_0$

$$|u_N(b_1) - b_2| < \varepsilon.$$

Для доказательства проведем на плоскости критериев (рис. 3.8, а) прямые  $\Phi_2 = b_2 - \varepsilon$  и  $\Phi_2 = b_2 + \varepsilon$  и построим криволинейный треугольник  $KLM$ . В пределах полосы  $|\Phi_2 - b_2| < \varepsilon$  выше и ниже точки  $B$  выберем на дуге точки  $B'$  и  $B''$ , и пусть  $A'$  и  $A''$  — их прообразы в множестве  $E$ .

Фиксируем  $\delta > 0$  так, чтобы специальные окрестности  $S(A', \delta)$  и  $S(A'', \delta)$  отображались внутрь  $KLM$ . Согласно теореме 3 можно указать  $N_1$  такое, что при всех  $N \geq N_1$  в каждой из этих двух окрестностей найдется хотя бы по одной точке из  $E_N$ . Соответствующие этим точкам приближенно паретовские точки попадут в треугольные окрестности точек  $B'$  и  $B''$  (рис. 3.8, б). Как бы ни располагались соседние с точкой  $B$  приближенно паретовские точки, они не могут выйти за пределы криволинейного треугольника  $K'L'M'$ , расположенного внутри  $KLM$ . Следовательно,

$$b_2 - \varepsilon < u_N(b_1) < b_2 + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

**Изучение приближенной компромиссной кривой.** Приближенная компромиссная кривая — ломаная, и поэтому всегда непрерывна. Если точная компромиссная кривая имеет разрывы, то при увеличении количества пробных точек можно обнаружить участки приближенной кривой, которые стремятся к вертикальным отрезкам, и приближенно оценить эти разрывы.

Несколько сложнее выделить участки, на которых компромиссная кривая не определена: для этого одним приближенно паретовских точек недостаточно (см. рис. 3.7, а). Лишь нанеся на график образы всех пробных точек, можно получить представление о форме области возможных значений  $\bar{D}$  и догадаться, что на каком-то участке компромиссная кривая не существует.

Обнаружить нашим методом изолированную точку компромиссной кривой, как правило, нельзя, хотя изучение расположения всех точек и в этом случае позволяет иногда догадаться, что, возможно, такая изолированная точка и существует (рис. 3.7, б).

Впрочем, на практике обычно используют не участки приближенной компромиссной кривой, а лишь полученные приближенно паретовские точки, которым всегда отвечают реальные приближенно эффективные варианты системы.

**Замечание.** Пример, изображенный на рис. 3.7, б, показывает также, что в некоторых задачах непаретовские точки (например, точки, расположенные в окрестности изолированной паретовской точки) могут представлять определенный интерес для конструкторов. Наша рекомендация: если в интересующей конструкторов зоне приближенно эффективных точек нет (или мало), то следует проанализировать лучшие из неэффективных точек в этой зоне.

### 3.4. Примеры расчета приближенных компромиссных кривых

В этом параграфе рассмотрены две простые задачи, в которых компромиссные кривые могут быть найдены аналитически, и сосчитанные приближенные компромиссные кривые сравниваются с точными.

**Аналитический подход [3].** Если функции  $\Phi_1(A)$  и  $\Phi_2(A)$  дифференцируемые, то можно попытаться найти геометрическое место точек соприкосновения поверхностей уровня  $\Phi_1(A) = b_1$  и  $\Phi_2(A) = b_2$ . В таких точках

$$\text{grad } \Phi_1 = -\lambda \text{ grad } \Phi_2.$$

Последнее векторное уравнение равносильно  $n$  скалярным алгебраическим уравнениям

$$\partial \Phi_1 / \partial \alpha_j = -\lambda \partial \Phi_2 / \partial \alpha_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

которые, вообще говоря, определяют кривую в пространстве параметров:

$$\alpha_1 = \varphi_1(\lambda), \dots, \alpha_n = \varphi_n(\lambda).$$

Если участок этой кривой, на котором  $\lambda \geq 0$ , принадлежит множеству  $D$ , то он принадлежит и множеству  $E$ .

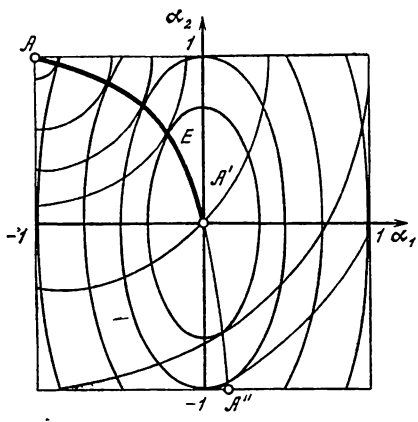


Рис. 3.9. Линии уровня  $\Phi_1 = \text{const}$  и  $\Phi_2 = \text{const}$  и множество точек соприкосновения  $AA'A''$ . Множество эффективных точек — дуга  $AA'$ .

Например, на рис. 3.9, который соответствует приведенному ниже примеру 1, дуга  $AA'$  состоит из эффективных точек, а дуга  $A'A''$  — из точек соприкосновения, не являющихся эффективными точками, хотя обе эти дуги описываются одним уравнением  $\alpha_2 = 4\alpha_1/(3\alpha_1 - 1)$ .

Участок компромиссной кривой в этом случае определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_1(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)), \\ \Phi_2 &= \Phi_2(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda)), \quad (\lambda \geq 0).\end{aligned}$$

Вдоль этой кривой

$$d\Phi_1 = \sum_{j=1}^n (\partial\Phi_1/\partial\alpha_j) d\alpha_j = -\lambda \sum_{j=1}^n (\partial\Phi_2/\partial\alpha_j) d\alpha_j = -\lambda d\Phi_2,$$

откуда для наклона компромиссной кривой получается выражение  $d\Phi_2/d\Phi_1 = -1/\lambda$ .

**Пример 1.** В квадрате  $D = \{-1 \leq \alpha_1 \leq 1, -1 \leq \alpha_2 \leq 1\}$  заданы два критерия

$$\Phi_1 = 4\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = (\alpha_1 + 1)^2 + (\alpha_2 - 1)^2,$$

которые желательно минимизировать.

Абсолютные минимумы функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  реализуются соответственно в точках  $(0, 0)$  и  $(-1, 1)$ , принадлежащих  $D$ . Поэтому линия  $E$  должна соединять эти точки. Вышеуказанным аналитическим методом получаем участок  $AA'$  гиперболы  $\alpha_2 = 4\alpha_1(3\alpha_1 - 1)^{-1}$ , изображенный на рис. 3.10.

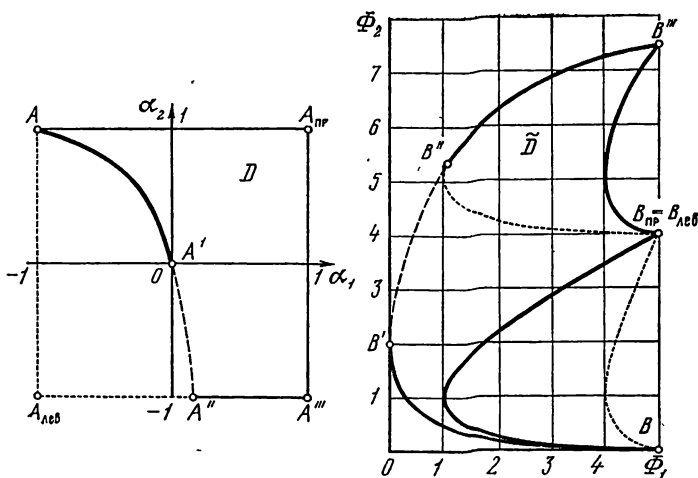


Рис. 3.10. Пример 1. Множество допустимых точек  $D$  в пространстве параметров и множество возможных точек  $\tilde{D}$  в пространстве критериев

Множество  $E$  — дуга  $AA'$ , множество  $\tilde{E}$  — дуга  $BB'$

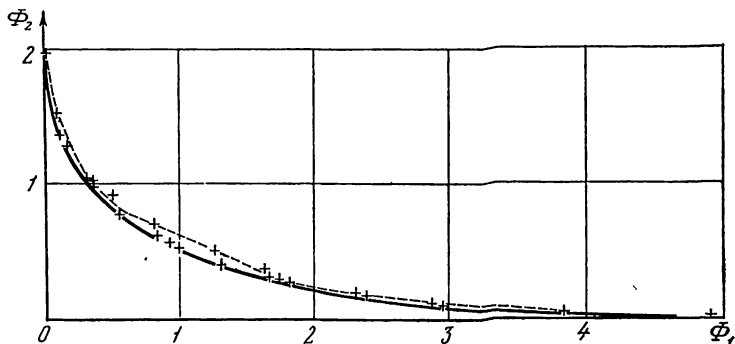


Рис. 3.11. Пример 1. Точная и приближенная (пунктир) компромиссная кривая при  $N = 63$

Кресттики — приближенно паретовские точки при  $N = 255$

Часть  $D$ , расположенная правее линии  $AA'A''$ , отображается на плоскости критериев в криволинейную фигуру  $BB'B''B'''B_{\text{прав}}$ , а часть  $D$ , расположенная левее линии  $AA'A''$ , отображается в фигуру  $BB'B''B_{\text{лев}}$ ; таким образом, точки средней части множества  $\tilde{D}$  имеют в  $D$  по два прообраза. Компромиссная кривая — это линия  $BB'$ .

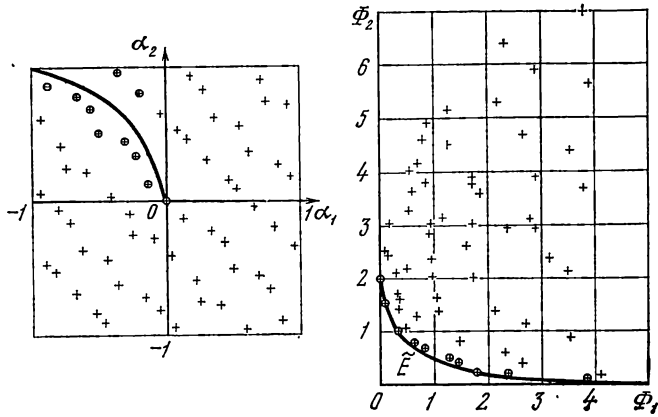


Рис. 3.12. Пример 1. Пробные точки в  $D$  и в  $\tilde{D}$  при  $N = 63$

Приближенно эффективные и приближенно паретовские точки обведены кружками

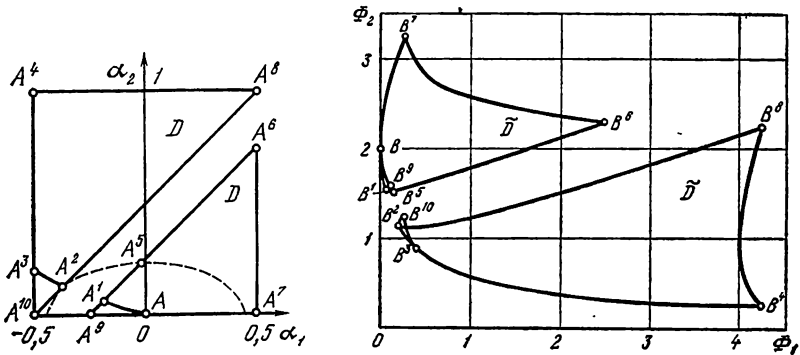


Рис. 3.13. Пример 2. Множество допустимых точек  $D$  в пространстве параметров и множество возможных точек  $\tilde{D}$  в пространстве критериев

Множество  $E$  состоит из дуг  $AA^1A^5$  и  $A^2A^4A^6$ , множество  $\tilde{E}$  — из дуг  $BB^1B^5$  и  $B^2B^4B^6$

Результаты расчета этой задачи приведены на рис. 3.11 и 3.12. На первом из них построена точная компромиссная кривая  $\Phi_2 = u(\Phi_1)$  и приближенная линия  $\Phi_2 = u_N(\Phi_1)$ . (При  $N = 511$  точная и приближенная компромиссные кривые совпадают с точностью до 0,01). На рис. 3.12 построены все пробные точки в  $D$  и в  $\tilde{D}$ . На этом рисунке заметна повышенная плотность точек в средней

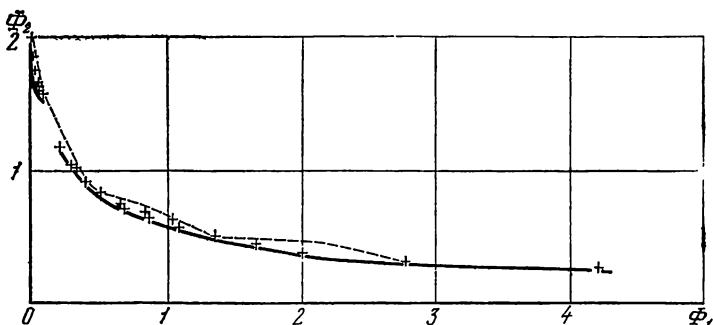


Рис. 3.14. Пример 2. Точная и приближенная (пунктир) компромиссная кривая при  $N = 63$

Крестинки — приближенно паретовские точки при  $N = 255$

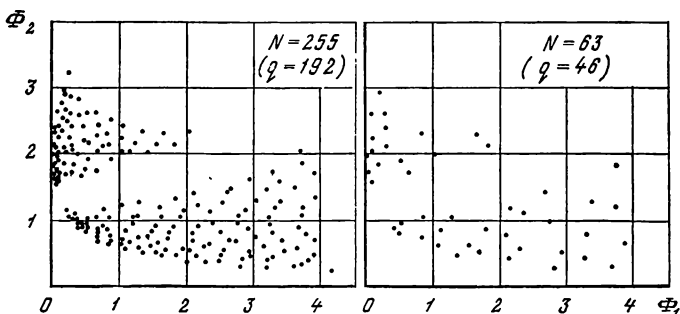


Рис. 3.15. Пример 2. Все  $q$  пробных точек в пространстве критериев при  $N = 63$  и при  $N = 255$

части  $\bar{D}$ . Видно также, что  $\bar{E}_N$  приближается к  $\bar{E}$  быстрее, чем  $E_N$  к  $E$ .

**Пример 2.** В квадрате  $\Pi = \{-0,5 \leq \alpha_1 \leq 0,5, 0 \leq \alpha_2 \leq 1\}$  заданы два критерия

$$\Phi_1 = \alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = (\alpha_1 + 1)^2 + (\alpha_2 - 1)^2,$$

которые желательно минимизировать с учетом функционального ограничения

$$|\alpha_2 - \alpha_1 - 0,375| \geq 0,125.$$

Множество  $D$  в этой задаче представляет собой квадрат  $\Pi$  с вырезанной полосой (рис. 3.13). Множество  $E$  состоит из двух участков  $AA^1$  и  $A^2A^3$  гиперболы  $\alpha_2 = -\alpha_1(3\alpha_1 + 4)^{-1}$ , из отрезка  $A^3A^4$  границы  $\alpha_1 = -0,5$

и из отрезка  $A^1A^5$  границы  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0,25$ . Здесь же изображена область  $D$  на плоскости критериев. Однако части  $D$ , состоящие из точек, имеющих по два прообраза в  $D$ , в этом примере гораздо меньше, чем в примере 1.

Точная компромиссная кривая изображена также на рис. 3.14. На рис. 3.15 построены пробные точки в  $D$ . По картине, полученной при  $N = 63$ , нельзя с уверенностью сказать, что множество  $D$  состоит из двух отдельных частей; но из картины, полученной при  $N = 255$ , это уже вполне ясно.

## Глава 4

### НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДА

В этой главе рассмотрены некоторые вопросы, которые можно решать используя метод, изложенный выше. В разделе 4.1 приведен автоматизированный вариант диалогового алгоритма, хотя мы считаем, что на этой стадии исключать вмешательство проектировщиков нецелесообразно. В разделе 4.2 изложен метод изучения зависимости критериев, а в разделе 4.3 речь пойдет о возможностях изменения постановки задачи с целью улучшения характеристик оптимального решения.

#### 4.1. Автоматизированный вариант диалога

Алгоритм, изложенный в разделе 2.2, можно полностью автоматизировать так, чтобы критериальные ограничения выбирались без вмешательства человека.

**Простейший вариант.** Фиксируем произвольное целое число  $M > 1$ . Первый этап диалогового алгоритма оставим без изменений. На втором этапе для каждого критерия  $\Phi_v$  вычисляется шаг

$$h_v = \frac{1}{M} [\Phi_v(A_{i_N}) - \Phi_v(A_{i_1})],$$

где  $\Phi_v(A_{i_1})$  и  $\Phi_v(A_{i_N})$  — наименьшее и наибольшее значение  $\Phi_v(A_i)$  или, иными словами, наибольший и наименьший элементы  $v$ -й строки матрицы  $\|\Phi_v(A_i)\|$ . В качестве критериальных ограничений выбираем значения

$$\Phi_v^{**} = \Phi_v(A_{i_1}) + h_v. \quad (1)$$

Если на третьем этапе множество  $D$  окажется пустым,

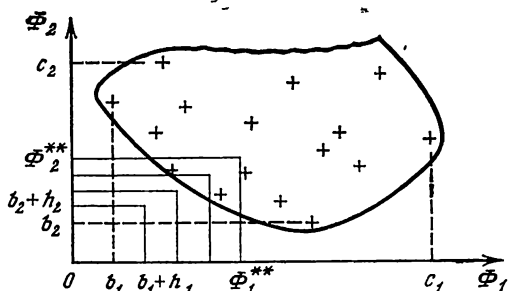


Рис. 4.1. Автоматический выбор критериальных ограничений: процесс заканчивается на 4-м шаге

то возвращаемся ко второму этапу и увеличиваем все критериальные ограничения

$$\Phi_v^{**} |_{\text{новое}} = \Phi_v^{**} |_{\text{старое}} + h_v.$$

Очевидно, при таком повторении второго и третьего этапов потребуется не более, чем  $M$ , повторений, и множество допустимых точек  $D$  окажется непустым.

Геометрическая интерпретация этого алгоритма в пространстве критериев дана на рис. 4.1, где  $b_v = \min_i \Phi_v(A_i)$ ,  $c_v = \max_i \Phi_v(A_i)$  и  $M = 10$ .

Недостатки такого варианта довольно очевидны: количество шагов по всем критериям одинаково, все критериальные ограничения увеличиваются одновременно, хотя среди критериев есть более существенные и менее существенные. Можно пытаться устранить эти недостатки, вводя приоритеты критериев, различные шаги для различных критериев, прибавление некоторых  $h_v$  не при каждом повторении второго этапа. Однако все такие заранее задаваемые тактики, по нашему убеждению, гораздо менее эффективны, чем рекомендации специалистов, основанные на изучении таблиц испытаний.

Кроме того, полная автоматизация диалога может привести к неоправданному сужению множества допустимых точек  $D$ , что также весьма нежелательно. Поясним эту ситуацию несколько подробнее. Допустим, что при первой же проверке критериальных ограничений (1) множество  $D$  оказалось непустым и в него попала одна точка  $A_{i_0}$ . Процесс выбора критериальных ограничений на этом закончится. Хотя вполне возможно, что среди точек  $A_i$ , не



удовлетворяющих ограничениям (4), есть такие, в которых значения  $\Phi_\nu(A_i)$  при некоторых  $\nu$  вполне приемлемы, а при других (более существенных) — значительно лучше, чем  $\Phi_\nu(A_{i_0})$ .

**Сопоставление с другими методами.** Автоматизированный вариант нашего метода имеет некоторое сходство с методом последовательных уступок [5] и с методом ограничений [4]. Но сходство это скорее внешнее. Не вдаваясь в подробности упомянутых методов<sup>1</sup>, заметим, что в каждом из них приходится многократно решать задачи на отыскание экстремумов каждой из функций  $\Phi_\nu(A)$  при различных ограничениях.

В нашем методе минимумы и максимумы всех функций  $\Phi_1(A), \dots, \Phi_k(A)$  в  $G$  оцениваются приближенно по одному и тому же набору пробных точек  $A_i$ . Ясно, конечно, что совсем не обязательно знать точное значение минимума  $\Phi_\nu(A)$  для того, чтобы выбрать ограничение сверху —  $\Phi_\nu^{**}$ .

## 4.2. Исследование зависимости критериев

Мы уже отмечали, что при нашем методе выбора критериальных ограничений и определения множества допустимых значений (гл. 2) число критериев качества может быть произвольным. Конструктор может указать любые критерии, не заботясь об их независимости. Лишние критерии не мешают выбору критериальных ограничений.

Однако выделение важнейших критериев представляет интерес при построении различных аналитических методов приближенного изучения исследуемой системы.

Оказывается, матрица  $\|\Phi_\nu(A_i)\|$  позволяет сравнительно просто оценить степень линейной зависимости между любыми двумя критериями. Для этого можно использовать одно хорошо известное свойство коэффициента корреляции случайных величин.

**Коэффициент корреляции** — мера линейной зависимости случайных величин. Предположим, что  $\eta$  и  $\xi$  — произвольные случайные величины, у которых существуют конечные математические ожидания  $M\eta$  и  $M\xi$  и дисперсии<sup>2</sup>  $D\eta > 0$  и  $D\xi > 0$ . Тогда существует коэффициент

<sup>1</sup> См.: Подиновский В. В., Гаврилов В. М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975.

<sup>2</sup> Напомним, что  $D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2$ .

корреляции этих величин

$$r(\eta, \xi) = \frac{M\eta\xi - M\eta M\xi}{\sqrt{D\eta D\xi}}. \quad (2)$$

Как известно,  $r(\xi, \eta) = r(\eta, \xi)$  и  $-1 \leq r(\eta, \xi) \leq 1$ . Если  $\eta$  и  $\xi$  независимы, то  $r(\eta, \xi) = 0$ .

Мы воспользуемся следующим свойством коэффициента корреляции, которое можно найти в большинстве курсов теории вероятностей:

условие  $|r(\eta, \xi)| = 1$  необходимо и достаточно для того, чтобы существовали постоянные  $c_0 \neq 0$  и  $c_1$  такие, что с вероятностью 1

$$\xi = c_0\eta + c_1. \quad (3)$$

Случай  $c_0 > 0$  соответствует условию  $r(\eta, \xi) = 1$ , а случай  $c_0 < 0$  — условию  $r(\eta, \xi) = -1$ .

**Корреляция критериев.** Пусть  $\Gamma$  — случайная точка, равномерно распределенная в  $G$ , так что плотность вероятностей ее в  $G$  постоянна:  $p(A) = 1/V_G$ . Каждому критерию  $\Phi_\nu(A)$  поставим в соответствие случайную величину  $\xi_\nu = \Phi_\nu(\Gamma)$ , определенную в  $G$ .

**О п р е д е л е н и е.** Коэффициентом корреляции критериев  $\Phi_\mu(A)$  и  $\Phi_\nu(A)$  в области  $G$  назовем число

$$r_{\mu\nu} = r(\xi_\mu, \xi_\nu).$$

Если функции  $\Phi_\mu(A)$  и  $\Phi_\nu(A)$  кусочно непрерывны и отличны от постоянных, то все условия существования  $r_{\mu\nu}$  выполнены. А вышеприведенное свойство коэффициента корреляции  $r(\eta, \xi)$  может быть сформулировано в виде теоремы.

**Т е о р е м а.** Условие  $|r_{\mu\nu}| = 1$  необходимо и достаточно для того, чтобы существовали такие постоянные  $c_0 \neq 0$  и  $c_1$ , что во всех точках  $A$ , в которых  $\Phi_\mu(A)$  и  $\Phi_\nu(A)$  непрерывны, выполняется равенство

$$\Phi_\mu(A) = c_0\Phi_\nu(A) + c_1. \quad (4)$$

Случай  $c_0 > 0$  соответствует условию  $r_{\mu\nu} = 1$ , а случай  $c_0 < 0$  — условию  $r_{\mu\nu} = -1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $|r_{\mu\nu}| = 1$ , то, переводя утверждение (3) с языка теории вероятностей на язык теории функций, можно сказать, что соотношение (4) имеет место почти всюду в  $G$ . Пусть  $A'$  — точка непрерывности  $\Phi_\mu(A)$  и  $\Phi_\nu(A)$ . В любой окрестности точки  $A'$  найдутся точки  $A$ , в которых справедливо (4). Выбрав последовательность таких точек, сходящуюся к  $A'$ , мы, ис-

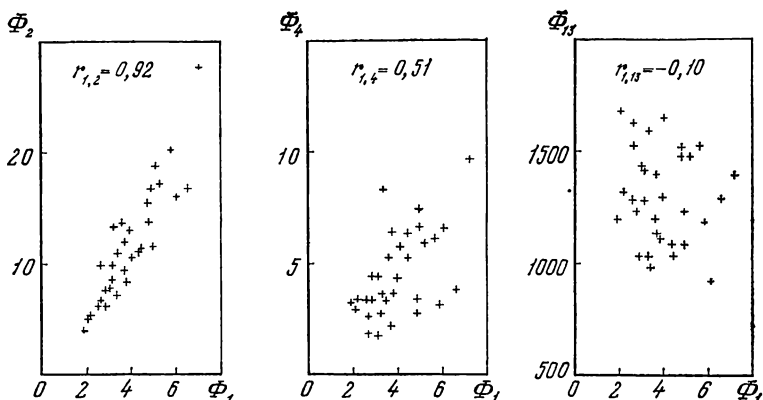


Рис. 4.2. Тридцать две пробные точки в плоскости критериев  $(\Phi_1, \Phi_2)$ ,  $(\Phi_1, \Phi_4)$ ,  $(\Phi_1, \Phi_{13})$  и соответствующие значения коэффициентов корреляции критериев

пользуя определение непрерывности функций, получим, что (4) справедливо также в точке  $A'$ .

Легко видеть, что обратное утверждение не требует доказательства: если (4) имеет место во всех точках непрерывности  $\Phi_\mu$  и  $\Phi_\nu$ , то тем самым (4) имеет место почти всюду в  $G$ . Впрочем, равенство  $|r_{\mu\nu}| = 1$  легко проверить непосредственно, исходя из (4): так как

$$M\xi_\mu = c_0 M\xi_\nu + c_1, \quad M\xi_\mu \xi_\nu - M\xi_\mu M\xi_\nu = c_0 D\xi_\nu,$$

то из (2) сразу следует, что  $r_{\mu\nu} = c_0 / |c_0|$  и  $|r_{\mu\nu}| = 1$ .

Итак, если  $r_{\mu\nu}$  близко к 1, скажем,  $r_{\mu\nu} \geq 0,9$ , то можно считать, что между функциями  $\Phi_\mu(A)$  и  $\Phi_\nu(A)$  в области  $G$  существует зависимость, близкая к линейной, и один из этих критериев можно из рассмотрения исключить.

Случай близости  $r_{\mu\nu}$  к  $-1$  практически не реален, так как это означало бы, что в числе критериев, которые желательно минимизировать, фигурирует и величина  $\Phi_\nu$ , и величина  $-\Phi_\nu$ , равносильная  $-|c_0|\Phi_\nu + c_1$ .

Другие значения  $r_{\mu\nu}$  не позволяют делать столь решительных выводов о характере зависимости между критериями  $\Phi_\mu$  и  $\Phi_\nu$ .

На рис. 4.2 построены 32 пробные точки в плоскости критериев  $(\Phi_\mu, \Phi_\nu)$  при  $r_{\mu\nu}$  равных соответственно 0,92, 0,51 и  $-0,10$ . Легко видеть, что в первом случае наилучшая точка для обоих критериев  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  одна и та же, а во втором и третьем случаях имеются четыре приблизительно

паретовские точки (рис. 4.2 соответствует примеру, рассмотренному в разделе 2.4).

Вычисление  $r_{\mu\nu}$ . Введем в рассмотрение интегралы вида

$$I_{\mu} = \frac{1}{V_G} \int_G \Phi_{\mu}(A) dA, \quad I_{\mu\nu} = \frac{1}{V_G} \int_G \Phi_{\mu}(A) \Phi_{\nu}(A) dA.$$

Все величины, входящие в определение (2) коэффициента корреляции  $r(\xi_{\mu}, \xi_{\nu})$ , легко выражаются через такие интегралы:

$$M\xi_{\mu} = \int_G \Phi_{\mu}(A) p(A) dA = I_{\mu},$$

$$M\xi_{\mu}\xi_{\nu} = \int_G \Phi_{\mu}(A) \Phi_{\nu}(A) p(A) dA = I_{\mu\nu},$$

$$M\xi_{\mu}^2 = \int_G \Phi_{\mu}^2(A) p(A) dA = I_{\mu\mu}.$$

Используя эти выражения, можно записать новую формулу для  $r_{\mu\nu}$ , в которую входят только интегралы по  $G$  (и никаких математических ожиданий):

$$r_{\mu\nu} = \frac{I_{\mu\nu} - I_{\mu}I_{\nu}}{\sqrt{(I_{\mu\mu} - I_{\mu}^2)(I_{\nu\nu} - I_{\nu}^2)}} \quad (5)$$

Далее, так как последовательность пробных точек  $A_i$  равномерно распределена в  $G$  (в смысле раздела 1.1), то из теоремы 8 Дополнения следует, что все такие интегралы являются пределами:

$$I_{\mu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_{\mu}(A_i),$$

$$I_{\mu\nu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_{\mu}(A_i) \Phi_{\nu}(A_i).$$

Поэтому при достаточно больших  $N$  можно считать, что

$$I_{\mu} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_{\mu}(A_i), \quad I_{\mu\nu} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_{\mu}(A_i) \Phi_{\nu}(A_i). \quad (6)$$

Все величины, входящие в эти формулы, имеются в матрице  $\|\Phi_{\nu}(A_i)\|$ .

Чтобы убедиться в том, что  $N$  достаточно велико, мож-

но сравнить приближенные значения  $r_{\mu\nu}$ , полученные при нескольких значениях  $N$ , например, при  $N = 64, 128, 256$ .

**Выделение лишних критериев.** Процесс выделения лишних критериев может быть организован следующим образом. По формулам (6) и (5) вычисляем приближенную корреляционную матрицу  $\|r_{\mu\nu}\|$ , в которой  $1 \leq \mu, \nu \leq k$ . Если мы хотим сохранить критерий  $\Phi_\mu$ , то просматриваем  $\mu$ -ю строку этой матрицы; обнаружив элемент  $r_{\mu\nu} \geq 0,9$ , зачеркиваем столбец номер  $\nu$  и строку номер  $\nu$ ; если в  $\mu$ -й строке есть несколько элементов, близких к 1, то повторяем эту процедуру несколько раз.

Затем повторяем то же самое с какой-нибудь другой из уцелевших строк, например, со строкой номер  $\mu'$ , если мы хотим сохранить критерий  $\Phi_{\mu'}$ .

После конечного числа шагов останется матрица, не содержащая элементов  $r_{\mu\nu} \geq 0,9$ . Строки и столбцы, соответствующие лишним критериям, будут зачеркнуты.

Заметим, что симметрия матрицы  $\|r_{\mu\nu}\|$  и равенство единице всех  $r_{\mu\mu} = 1$  позволяют ограничиться рассмотрением треугольной матрицы, в которой  $1 \leq \mu < \nu \leq k$ .

**Замечание.** Точно так же можно оценить коэффициент корреляции критериев  $\Phi_\mu(A)$  и  $\Phi_\nu(A)$  в области  $D$ . Для этого следует в формулах (6) осреднять значения  $\Phi_\mu(A_i)$  и  $\Phi_\nu(A_i)$  не во всех точках  $A_i \in G$ , а лишь в тех  $q$  точках, которые попали в  $D$ , и использовать ту же формулу (5).

**Пример.** В задаче, рассмотренной в разделе 2.4, проектировщик сформулировал 14 критериев качества, которые принимались во внимание при выборе оптимального решения. Треугольные матрицы  $r_{\mu\nu}$ , сосчитанные при  $N = 256$  и при  $N = 512$ , приведены в табл. 4.1 и 4.2. Очевидно, последние значения можно считать достаточно точными.

В табл. 4.3 приведена матрица  $r_{\mu\nu}$  после исключения зависимых критериев. В этой задаче оказалось всего шесть независимых критериев. В качестве таковых можно выбрать критерии  $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_6, \Phi_{13}, \Phi_{14}$ . Необходимо пояснить, что такой результат связан отнюдь не с некомпетентностью проектировщика. Наоборот, он подтверждает характеристику критериев, данную проектировщиком (см. с. 31), ибо оставшиеся критерии  $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_6$  принадлежат как раз различным группам.

Из табл. 4.3 вытекает также, что если встанет вопрос

Таблица 4.1. Матрица  $r_{\mu\nu}$  при  $N = 256$ 

$\mu$	$\nu=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\nu=14$
1	0,92	0,59	0,51	0,95	0,82	0,58	0,41	0,94	0,88	0,58	0,49	-0,09	0,26
2	—	0,53	0,48	0,83	0,89	0,51	0,38	0,88	0,96	0,51	0,46	-0,07	0,29
3	—	—	0,83	0,65	0,49	0,95	0,73	0,56	0,50	0,95	0,77	-0,45	0,20
4	—	—	—	0,53	0,45	0,67	0,91	0,48	0,45	0,86	0,98	-0,29	0,09
5	—	—	—	—	0,77	0,67	0,44	0,87	0,76	0,64	0,50	-0,08	0,19
6	—	—	—	—	—	0,48	0,39	0,77	0,85	0,48	0,43	-0,05	0,31
7	—	—	—	—	—	—	0,58	0,56	0,49	0,86	0,59	-0,44	0,19
8	—	—	—	—	—	—	—	0,39	0,35	0,78	0,90	-0,27	0,03
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,92	0,54	0,46	-0,09	0,19
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,48	0,43	-0,08	0,24
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,86	-0,44	0,15
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-0,28	0,05
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,02

Таблица 4.2. Матрица  $r_{\mu\nu}$  при  $N = 512$ 

$\mu$	$\nu=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\nu=14$
1	0,92	0,60	0,51	0,95	0,82	0,58	0,41	0,94	0,87	0,60	0,49	-0,10	0,29
2	—	0,54	0,49	0,82	0,89	0,52	0,38	0,89	0,97	0,54	0,47	-0,08	0,31
3	—	—	0,84	0,65	0,51	0,95	0,73	0,58	0,52	0,95	0,77	-0,45	0,20
4	—	—	—	0,53	0,47	0,68	0,91	0,49	0,46	0,87	0,97	-0,30	0,11
5	—	—	—	—	0,78	0,67	0,45	0,87	0,75	0,65	0,51	-0,08	0,25
6	—	—	—	—	—	0,50	0,40	0,77	0,85	0,50	0,45	-0,05	0,33
7	—	—	—	—	—	—	0,59	0,57	0,50	0,87	0,60	-0,44	0,20
8	—	—	—	—	—	—	—	0,39	0,36	0,78	0,89	-0,27	0,04
9	—	—	—	—	—	—	—	—	0,93	0,57	0,47	-0,09	0,23
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,52	0,45	-0,08	0,26
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,86	-0,44	0,17
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	-0,28	0,09
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,03

Таблица 4.3

Матрица  $r_{\mu, \nu}$  для независимых критериев

$\mu$	$\nu = 3$	4	6	13	$\nu = 14$
1	0,60	0,51	0,82	-0,10	0,29
3	—	0,84	0,51	-0,45	0,20
4	—	—	0,47	-0,30	0,11
6	—	—	—	-0,05	0,33
13	—	—	—	—	0,03

о дальнейшем сокращении числа критериев, то в первую очередь отказаться надо будет от критериев  $\Phi_4$  и  $\Phi_6$  и сохранить  $\Phi_1, \Phi_3, \Phi_{13}, \Phi_{14}$ , ибо значения  $r_{1,6}$  и  $r_{3,4}$  весьма значительны.

#### 4.3. О возможностях улучшения оптимального решения

Заглавие настоящего раздела звучит немного парадоксально: если решение оптимально, то, казалось бы, улучшить его нельзя... В действительности, однако, такие слова произносятся довольно часто. В самом деле, предположим, что, решив задачу о наилучшем выборе параметров, конструктор тем не менее не удовлетворен решением и хочет попытаться «улучшить» его за счет ослабления каких-то ограничений. Став на формальную точку зрения, следует сказать, что речь идет о новой задаче, так что ставить и решать ее нужно заново. Такой подход, конечно же, возможен, но часто связан с большими затратами времени.

Поэтому рассмотрим коротко, как можно использовать информацию, полученную в ходе расчета решенной задачи, для более рациональной формулировки и решения новой задачи. Конечно, речь идет о сравнительно небольших нарушениях ограничений, ибо в противном случае задачу необходимо решать заново.

**Определение ресурсов точки (модели).** Очевидно, улучшение оптимальной точки может быть достигнуто путем отказа от

1° параметрического ограничения  $\alpha_j^* \leq \alpha_j$  или  $\alpha_j \leq \alpha_j^{**}$ ,

2° функционального ограничения  $c_i^* \leq f_i(A)$  или  $f_i(A) \leq c_i^{**}$ ,

3° критериального ограничения  $\Phi_v(A) \leq \Phi_v^{**}$ .

Условимся называть ресурсом точки  $A_i$  по ограничению  $\Phi_v \leq \Phi_v^{**}$  разность  $\Phi_v^{**} - \Phi_v(A_i)$ . Точно так же ресурсом точки  $A_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})$  по ограничению  $\alpha_j^* \leq \alpha_j$  назовем разность  $\alpha_{i,j} - \alpha_j^*$ , а ресурсом точки  $A_i$  по ограничению  $f_l(A_i) \leq c_l^{**}$  — разность  $c_l^{**} - f_l(A_i)$  и т. д.

Для любой точки  $A_i$  из  $D_N$  легко определить ресурс по любому критериальному ограничению: для этого достаточно взглянуть на соответствующую таблицу испытаний, где имеется  $\Phi_v(A_i)$  и выбранное значение  $\Phi_v^{**}$ . Не сложно вычислить также ресурс точки  $A_i$  по любому параметрическому ограничению, ибо координаты точек  $A_i$  обычно сохраняются в памяти ЭВМ (а если даже не сохраняются, то расчет их заново затруднений не представляет). Хуже обстоит дело с оценкой ресурсов по функциональным ограничениям, так как значения  $f_l(A_i)$  часто не сохраняются и восстановление их требует повторного расчета проектируемой системы при  $A = A_i$ .

Это обстоятельство с новой стороны показывает важность рекомендации (см. раздел 2.3) о замене функциональных ограничений псевдокритериями: если соответствующее ограничение было заменено псевдокритерием, то ресурс по нему можно оценить при помощи соответствующей таблицы испытаний.

**Оценка возможностей улучшения произвольной точки.**

Предположим, что ставится задача об улучшении значения  $\Phi_\mu(A)$ , исходя из найденной точки  $A = A_i$ . Мы не будем приводить здесь количественных значений, так как они вряд ли имеют практическое значение, и ограничимся качественными соображениями.

Мысленно представим себе, что точка  $A$  в условиях решенной задачи движется в направлении улучшения значения  $\Phi_\mu(A)$ . Движение это чаще всего прекращается из-за того, что точка натывается на какое-то ограничение. Ресурс остановившейся точки  $A = A_i$  по задержавшему ее ограничению равен нулю. Ясно, что дальнейшее улучшение  $\Phi_\mu(A_i)$  возможно только при отказе от этого ограничения.

Если точка  $A$  остановилась из-за достижения функцией  $\Phi_\mu(A)$  локального минимума  $A = A_i$ , то ресурсы  $A_i$  по всем ограничениям положительны. В этом случае отказ



от какого-либо ограничения не позволяет улучшить значение  $\Phi_{\mu}(A_i)$  в окрестности точки  $A_i$ .

На основании этих рассуждений можно дать следующие рекомендации:

а) если точка  $A_i$ , в которой значение  $\Phi_{\mu}(A_i)$  минимально, имеет большие ресурсы по всем ограничениям, то пытаться улучшить (уменьшить) это значение в окрестности точки  $A_i$ , путем ослабления некоторых ограничений, бесполезно;

б) если точка  $A_i$  имеет малые ресурсы по каким-нибудь ограничениям, то поиск в окрестности  $A_i$  перспективен только при ослаблении этих ограничений;

в) среди нескольких точек  $\tilde{A}_i$  из  $D$ , удовлетворяющих условиям (б), лучшим кандидатом на улучшение следует считать ту из них, у которой ресурсы по ненарушаемым ограничениям больше (независимо от того, принадлежит ли эта точка  $E_N$  или нет).

Для разъяснения последней рекомендации заметим, что если ресурс точки  $A$  по какому-нибудь ограничению мал, то есть основания опасаться, что ее движение (в направлении улучшения  $\Phi_{\mu}(A)$ ) будет остановлено этим ограничением.

**Улучшение оптимальной точки без нарушения параметрических ограничений.** Если ставится задача об улучшении найденного значения  $\Phi_{\mu}(\hat{A})$  путем ослабления некоторых критериальных ограничений ( $3^{\circ}$ ), то можно, не рассуждая о ресурсах  $\hat{A}$ , воспользоваться уже имеющимися таблицами испытаний. Достаточно заново повторить второй и третий этапы диалогового алгоритма; повторять первый этап и вычислять новые таблицы испытаний не надо.

**Улучшение оптимальной точки за счет нарушения параметрических ограничений.** Если ставится задача об улучшении найденного значения  $\Phi_{\mu}(\hat{A})$  путем отказа от некоторых параметрических ограничений ( $1^{\circ}$ ), то, вместо того чтобы полностью решать новую задачу (как об этом говорилось в начале параграфа), можно поступить так: выбрать несколько «лучших» точек из  $D_N$ , и в окрестности каждой из них организовать ЛП-поиск. Слово «лучших» означает не просто лучших в смысле значений  $\Phi_{\mu}$ , но еще с учетом рекомендаций, высказанных выше.

**Пример.** На рис. 4.3 построено множество эффективных точек  $AA'$  в пространстве параметров и соответствующая ему паретовская кривая  $BB'$  в пространстве критериев.

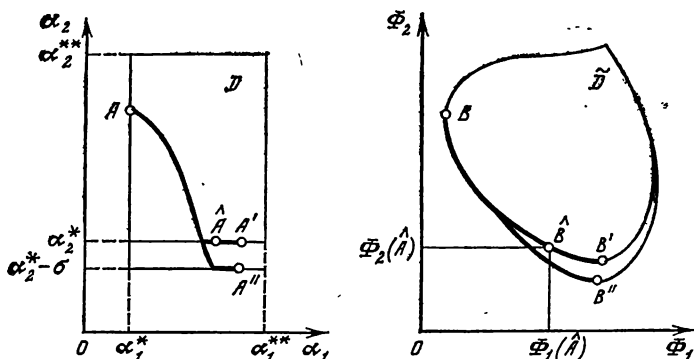


Рис. 4.3. Оптимальная точка  $\hat{A}$  может быть улучшена путем ослабления параметрического ограничения  $\alpha_2 \geq \alpha_2^*$ , так как при замене  $\alpha_2^*$  на  $\alpha_2^* - \delta$  паретовская кривая  $BB'$  превращается в  $BB''$

В качестве оптимальной была выбрана точка  $\hat{B}$ , прообраз которой обозначен  $\hat{A}$ .

Ставится вопрос: нельзя ли путем нарушения параметрических ограничений уменьшить  $\Phi_1(\hat{A})$ , не увеличив при этом  $\Phi_2(\hat{A})$ ? Так как точка  $\hat{A}$  расположена на границе  $\alpha_2 = \alpha_2^*$ , то попытку улучшения можно предпринять, отказавшись от ограничения  $\alpha_2 \geq \alpha_2^*$ .

Выбрав новое ограничение  $\alpha_2 \geq \alpha_2^* - \delta$ , мы получим частично новую паретовскую кривую  $BB''$ , на которой действительно можно выбрать «улучшенную» точку. Из рис. 4.3 видно, что улучшение возможно даже по обоим критериям.

О количественной оценке ресурсов. Приведенное выше определение ресурсов точки  $A_i$ , как например,  $\Phi_v^{**} - \Phi_v(A_i)$  или  $\alpha_{i,j} - \alpha_j^*$ , очень удобно для проектировщика, так как выражается в естественных (физических) единицах. Однако если возникнет вопрос об автоматизации попыток улучшения точки  $A_i$ , то потребуются другие характеристики ресурсов, которые позволили бы сравнивать ресурсы по различным ограничениям и (на основе заранее заданных допусков) судить о том, какой ресурс мал, какой велик.

В качестве такой характеристики можно предложить *относительный ресурс* (в процентах по отношению к величине ограничения). Например, вместо разности  $\alpha_{i,j} - \alpha_j^*$

рассматривать величину  $100 (\alpha_{i,j} - \alpha_j^*)/\alpha_j^*$ , если только  $\alpha_j^* > 0$ .

Другой возможный подход к определению относительных ресурсов состоит в следующем. Пусть среди всех  $q$  пробных точек, попавших в  $D$ , оказалось  $q_+$  точек, худших, чем  $A_i$ , в смысле рассматриваемого ограничения. *Объемным ресурсом* точки  $A_i$  по этому ограничению назовем отношение  $q_+/q$ .

В вышеприведенном примере, где рассматривается ограничение  $\alpha_j \geq \alpha_j^*$ , число  $q_+$  — это количество пробных точек  $A_s$ , попавших в  $D$ , у которых  $j$ -я координата  $\alpha_{s,j}$  ближе к границе  $\alpha_j^*$ , чем  $\alpha_{i,j}$ . Легко видеть, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (q_+/q) = V_+/V_D,$$

где  $V_D$  — объем множества допустимых точек  $D$ , а  $V_+$  — объем части  $D$ , состоящей из таких точек  $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , у которых  $j$ -я координата удовлетворяет неравенствам  $\alpha_j^* \leq \alpha_j \leq \alpha_{ij}$ . Очевидно также, что всегда  $0 \leq q_+/q < 1$ .

**Замечание.** Если для улучшения оптимального решения предпринимается новый расчет в параллелепипеде  $\Pi' \supset \Pi$ , то следует различать два случая. Во-первых, случай, когда  $V_{\Pi'} \gg V_{\Pi}$ . Тогда естественно выбирать новые пробные точки в  $\Pi'$ , не обращая внимания на то, принадлежат ли они  $\Pi$ , или нет. Во-вторых, случай, когда объем  $V_{\Pi'}$  не на много превосходит объем  $V_{\Pi}$ . Тогда можно сократить время расчета путем исключения пробных точек, попавших в  $\Pi$ , и использовать только те пробные точки, которые принадлежат  $\Pi' - \Pi$ .

## Глава 5

### ПРИМЕР: ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕЗОНАНСНОЙ ВИБРОПЛОЩАДКИ

В последние годы в различных отраслях промышленности применяются резонансные вибромашины технологического назначения. Современные машины такого типа создаются на базе нелинейных упругих систем, позволяющих обеспечить технологическую стабильность и регулировать законы колебаний рабочих органов с целью их оптимизации. Синтез резонансных вибромашин представляет дос-

таточно сложную проблему и в общем случае сводится к определению наиболее рациональной динамической структуры и выбору параметров нелинейной системы и привода, при которых периодические движения рабочего органа наилучшим образом удовлетворяют технологическим требованиям и целому ряду конструктивных ограничений. Эти задачи всегда многокритериальны. И во многих практически важных случаях конструктор именно на основании анализа таблиц испытаний выбирает наиболее предпочтительную («оптимальную») модель.

В настоящей главе описано решение двух задач такого типа, выполненное при нашем участии. Обе задачи связаны с проблемами синтеза резонансных асимметричных виброплощадок для формирования железобетонных изделий [9]. В диалоге с ЭВМ участвовал главный конструктор виброплощадки ВРА-8 Л. М. Литвин.

### 5.1. Исходные данные

В качестве исходной модели была взята существующая виброплощадка ВРА-8 грузоподъемностью 8 т. Расчетная схема такой виброплощадки изображена на рис. 5.1. Ее колебания описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + f(x) \dot{x} + \mu k_3 \dot{x}_1 + P(x) + k_3 x_1 &= k_0 \rho (\sin vt + \mu v \cos vt), \\ m_2 \ddot{x}_2 - f(x) \dot{x} + \mu k_2 \dot{x}_2 - P(x) + k_2 x_2 &= -k_0 \rho (\sin vt + \mu v \cos vt), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — смещения масс  $m_0$  и  $m_2$ ;  $x = x_1 - x_2$ ;

$$P(x) = (k_1 + k_0)x + \sigma(x)k_B(x + e);$$

$$f(x) = \mu_1 [k_1 + k_0 + \sigma(x)k_B];$$

$\sigma(x) = 0$  при  $x \geq e$ ,  $\sigma(x) = 1$  при  $x < e$ . Смысл величин, входящих в уравнения (1), разъясняется ниже.

**Варьируемые параметры.** Их всего десять:

$\alpha_1 = k_0$  — жесткость приводных упругих связей (кН/см);

$\alpha_2 = k_1$  — жесткость линейных основных упругих связей (кН/см);

$\alpha_3 = k_B$  — жесткость буферов (кН/см);

$\alpha_4 = k_2$  — жесткость опорных амортизаторов под рамой (кН/см);

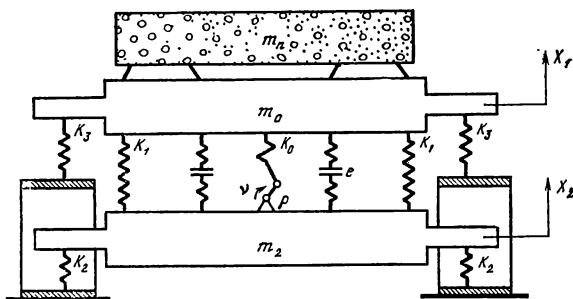


Рис. 5.1. Расчетная схема асимметричной резонансной виброплощадки

$\alpha_5 = k_3$  — жесткость опорных амортизаторов под рабочим органом (кН/см);

$\alpha_6 = \rho$  — эксцентриситет привода (см);

$\alpha_7 = m_0$  — масса рабочего органа (т);

$\alpha_8 = m_2$  — масса уравнивающей рамы (т);

$\alpha_9 = e_{\text{нач}}$  — зазор в буферах без технологической нагрузки (см);

$\alpha_{10} = \nu$  — рабочая частота ( $\text{с}^{-1}$ ).

Остальные величины.

$m_{\text{п}}$  — масса полезной нагрузки;

$k_m$  — коэффициент присоединения массы полезной нагрузки;

$m_1 = m_0 + k_m m_{\text{п}}$  — приведенная масса рабочего органа;

$\mu$  — коэффициент внутренних сопротивлений в резиновых упругих связях;

$k_{\mu}$  — коэффициент приведения сопротивления;

$\mu_1 = \mu + k_{\mu} m_{\text{п}}$  — приведенный коэффициент внутренних сопротивлений;

$e$  — зазор в буферах.

Техническое задание на проектирование включает данные о диапазоне изменения полезной нагрузки (в нашем случае —  $2 \text{ т} \leq m_{\text{п}} \leq 8 \text{ т}$ ), о диапазоне рабочих частот (в нашем случае —  $50 \text{ с}^{-1} \leq \nu \leq 100 \text{ с}^{-1}$ ), о пределах изменения ускорений рабочего органа при движении вверх и вниз —  $\omega_{1\text{в}}$  и  $\omega_{1\text{н}}$ . Рабочие режимы необходимо реализовать на восходящей ветви частотной характеристики (в дорезонансной области).

Динамика и методы расчета (1) рассмотрены в [9], где для построения приближенных периодических решений используется метод Крылова—Боголюбова.

**Функциональные ограничения.** Для формулировки функциональных ограничений вводятся следующие функции:

$$f_1(A) = w_{1в}, \quad f_2(A) = w_{1н}, \quad f_3(A) = k_0\rho,$$

$$f_4(A) = m_0 + M - (k_1 + k_3)Q (gk')^{-1},$$

$$f_5(A) = m_0 + m_2 + M - (k_2 + k_3)Q (gk')^{-1},$$

$$f_6(A) = \frac{k_2 Mg - k_0\rho(k_1 + k_3)}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} - e_{\text{нач}},$$

$$f_7(A) = \nu - \omega(A),$$

где  $M$  — максимальная величина полезной нагрузки (в нашем случае — 8 т),  $k'$  — жесткость одного резинового амортизатора (кН/см),  $Q$  — предельная нагрузка на один амортизатор (кН),  $\omega(A)$  — собственная частота линеаризованной системы ( $\text{с}^{-1}$ ).

Функции  $f_1(A)$  и  $f_2(A)$  зависят от решения системы (1), а  $f_3(A) - f_6(A)$  выражаются непосредственно через параметры  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ .

Функциональные ограничения задаются неравенствами

$$9 \leq f_1(A) \leq 22; \quad 40 \leq f_2(A) \leq 100; \quad f_3(A) \leq 120 \quad (2)$$

и

$$f_4(A) \leq 0; \quad f_5(A) \leq 0; \quad f_6(A) \leq 0; \quad f_7(A) \leq 0. \quad (3)$$

Первые два ограничения обеспечивают соответствие закона колебаний рабочего органа требованиям технического задания, третье — ограничивает величину возмущающей силы, четвертое и пятое — ограничивают нагрузки на резиновые амортизаторы, шестое — связано с нагрузкой на упругую подвеску, а седьмое — обеспечивает реализацию рабочих режимов в дорезонансной области.

Ограничения  $f_1 - f_3$  не являются «жесткими»: в зависимости от конкретных условий производства и требований, предъявляемых к железобетонным изделиям, их можно в некоторой степени варьировать. Ограничения  $f_4 - f_7$  нарушать нельзя.

**Критерии качества.** Качество проектируемой виброплощадки предлагается оценивать по шести критериям, которые желательно уменьшить. Первый критерий — масса машины — вычисляется непосредственно по параметрам:  $\Phi_1 = \alpha_7 + \alpha_8$ . Остальные пять критериев выражаются через решение системы (1), которое зависи-

от массы полезной нагрузки  $m_{\text{п}}$ . В соответствии с принятой методикой [9], система (1) решалась четырежды: при  $m_{\text{п}} = 2, 4, 6, 8$  т. Символы  $\max$  и  $\min$  в следующих формулах означают, что выбираются соответственно наибольшие или наименьшие значения величин, полученные при таких четырех расчетах. Итак, критерии качества:

1. Масса машины  $\Phi_1(A) = m_0 + m_2$ .

2. Асимметрия закона колебаний рабочего органа  $\Phi_2(A) = \max(w_{1\text{в}}/w_{1\text{н}})$ .

3. Динамическое усилие в приводе  $\Phi_3(A) = \max k_0 a_0$ , где  $a_0$  — деформация приводных упругих связей.

4. Динамическая нагрузка на фундамент  $\Phi_4(A) = \max | |k_2 a_2| - |k_1 a_1| |$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — амплитуды колебаний рабочего органа и уравнивающей рамы.

5. Характеристики стабильности «верхнего» и «нижнего» ускорения

$$\Phi_5(A) = \frac{\max w_{1\text{в}}}{\min w_{1\text{в}}} - 1, \quad \Phi_6(A) = \frac{\max w_{1\text{н}}}{\min w_{1\text{н}}} - 1.$$

Проектировщик предложил считать наиболее важным критерий  $\Phi_1$ , затем идут критерии  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$ , за ними критерий  $\Phi_2$  и, наконец, наименее важные критерии  $\Phi_5$  и  $\Phi_6$ . Однако при этом было оговорено, что в зависимости от конкретных результатов ранжирование критериев может измениться.

## 5.2. Первая задача: исследование возможностей модернизации исходной модели

Ставится вопрос: возможно ли за счет сравнительно небольших отклонений от параметров действующей модели найти лучшую модель (которую можно было бы реализовать без принципиальных конструктивных изменений)?

Для решения этого вопроса конструктор указал небольшие пределы вариации параметров, приведенные в табл. 5.1. Они определяют девятимерный параллелепипед  $\Pi$ , в центре которого расположена точка  $A_1$  с параметрами действующей модели ВРА-8. В качестве критериальных ограничений были назначены значения критериев в точке  $A_1$ , то есть  $\Phi_v^{**} = \Phi_v(A_1)$  при всех  $1 \leq v \leq 6$ .

Пробный расчет и изменение постановки задачи. В параллелепипеде  $\Pi$  при функциональных ограничениях (2) и (3) было проведено  $N' = 256$  испытаний. Количество

точек, удовлетворяющих функциональным ограничениям, оказалось равным  $N = 24$ , так что  $\gamma \approx 0,093$ . Время расчета одного испытания  $\tau \approx 10$  сек на ЭВМ «Минск-32».

Чтобы увеличить количество анализируемых вариантов (иными словами, чтобы увеличить  $\gamma$ ), было решено заменить первые три жестких ограничения псевдокритериями. Сделано это было следующим нестандартным образом. Во-первых, эти ограничения были ослаблены

$$8,5 \leq f_1(A) \leq 22,5, \quad 37 \leq f_2(A) \leq 103, \quad f_3(A) \leq 123. \quad (4)$$

Во-вторых, были введены псевдокритерии

$$\begin{aligned} \Phi_7 &= \max f_3(A), \\ \Phi_8^{(1)} &= \min f_1(A), \quad \Phi_8^{(2)} = \max f_1(A), \\ \Phi_9^{(1)} &= \min f_2(A), \quad \Phi_9^{(2)} = \max f_2(A); \end{aligned}$$

Таблица 5.1

Значения параметров

j	Первая задача					Вторая задача			
	$\alpha_j^*$	$\alpha_{1,j}$	$\alpha_j^{**}$	$\alpha_{248,j}$	$\alpha_{475,j}$	$\alpha_j^*$	$\alpha_j^{**}$	$\alpha'_{116,j}$	$\alpha''_{12,j}$
1	44	48	52	44,96	50,85	20	100	31,79	48,87
2	92	96	100	99,03	99,42	30	150	59,04	83,12
3	1400	1600	1800	1753	1490	400	3000	1449	2396
4	20	25	30	22,07	20,09	20	60	20,42	20,00
5	20	25	30	29,49	26,54	20	60	48,64	46,87
6	0,5	0,7	0,9	0,848	0,830	0,5	2,0	0,971	1,065
7	3	3	3	3	3	3	7	3	3
8	3	5	7	4,02	5,34	3	7	3	3
9	0,0	0,2	0,4	0,398	0,110	-0,3	1,5	0,438	0,637
10	94	97	100	95,10	94,20	50	100	91,48	90,63

смысл символов  $\max$  и  $\min$  тот же, что в п. «Критерии качества». Правило использования этих псевдокритериев: если точка  $A_i$  удовлетворяет ослабленным ограничениям (4), но не удовлетворяет ограничениям (2), то конструктор сам решает, включить ли точку  $A_i$  в число допустимых точек. Ясно, что такое решение будет приниматься в тех случаях, когда нарушение ограничений (2) компенсируется достаточно большим выигрышем в других критериях. Таким образом, случай, когда (4) выполнены, а (2) нет, оказывается как бы «зоной размышления» для конструктора.



Таблица 5.2

## Значения критериев

$v$	Первая задача					Вторая задача		
	$\min_i \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_1)$	$\max_i \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_{248})$	$\Phi_v(A_{476})$	$\min_i \Phi_v(A_i)$	$\Phi_v(A_{116})$	$\Phi_v(A_{12})$
1	7,02	8,00	9,04	7,02	8,34	6,95	6,00	6,00
2	0,233	0,256	0,313	0,283	0,241	0,147	0,234	0,240
3	28,25	31,72	70,62	28,34	30,94	19,54	26,44	28,21
4	3,70	6,70	12,51	6,36	3,70	4,63	5,68	5,40
5	0,047	0,421	1,143	0,768	0,357	0,050	0,895	0,674
6	0,051	0,359	1,222	0,871	0,227	0,054	0,953	0,749

Решено было также вычислять ресурсы  $\Delta_v$  точек  $A_i$  по введенным псевдокритериям  $\Phi_v$  относительно ограничений (2) (см. раздел 4.3). Если точка  $A_i$  не удовлетворяет какому-то из ограничений (2), но удовлетворяет ослабленному ограничению (4), то соответствующий ресурс полагался равным нулю;  $\Delta_v = 0$ .

**Второй пробный расчет.** Вновь было проведено  $N' = 256$  испытаний, причем в таблицы испытаний попало  $N = 33$  точки. При этом были обнаружены интересные точки  $A_{40}$  и  $A_{248}$ . Они по ряду важных критериев лучше, чем  $A_1$ , и это компенсирует некоторое ухудшение величины других критериев. Обе эти точки попали в таблицы испытаний только благодаря ослаблению функциональных ограничений (2). Наиболее интересной конструктор счел точку  $A_{248}$  (см. табл. 5.1 и 5.2). Он обратил также внимание на то, что ресурсы этих точек по  $\Phi_8$  (для  $A_{40}$ ) и по  $\Phi_9$  (для  $A_{248}$ ) исчерпаны, а некоторые координаты этих точек близки к границам  $\Pi$ . Попытки улучшить эти точки не предпринимались.

Диапазон изменения  $\Phi_1$  оказался  $7,02 \leq \Phi_1 \leq 8,89$ , хотя из исходных ограничений следует, что  $\Phi_1$  может меняться от 6 до 10. Конструктор решил, что нужно проанализировать причину такого ограниченного изменения  $\Phi_1$ , чтобы выяснить возможности дальнейшего уменьшения  $\Phi_1$ .

**Продолжение расчета первой задачи.** В том же параллелепипеде  $\Pi$  при ограничениях (3) и (4) испытания были продолжены до  $N' = 1024$ . В область  $G$  попало  $N = 108$  точек, так что в конечном счете  $\gamma \approx 0,105$  — увеличение

незначительное. Таблицы испытаний приведены в табл. 5.3. Нарисованные в таблице критериальные ограничения определяют допустимое множество  $D$ , содержащее одну единственную точку —  $A_1$ .

При решении аналогичных задач у проектировщиков нередко появляется желание «поиграть» критериальными ограничениями: попытаться понять, что дают те или иные уступки, во что обходится ужесточение тех или иных ограничений. В настоящем эксперименте конструктор рассмотрел семь наборов критериальных ограничений. Мы опишем три из них.

Первый диалог конструктора с ЭВМ. Среди всех 108 точек, попавших в таблицы испытаний, конструктор попросил выделить эффективные<sup>1</sup>. С учетом всех шести критериев, оказалось 59 эффективных точек и среди них точка  $A_1$ . Следовательно, модель  $A_1$  не представляется возможным улучшить по всем шести критериям. В определенном смысле данный вывод следует считать естественным, так как исследуется весьма хорошая конструкция машины.

Второй диалог конструктора с ЭВМ. Конструктор решил сделать уступки по наименее существенным критериям  $\Phi_5$  и  $\Phi_6$ : были выбраны ограничения  $\Phi_5^{**} = 1$ ,  $\Phi_6^{**} = 1$ . А по первым четырем критериям, по-прежнему,  $\Phi_v^{**} = \Phi_v(A_1)$ ,  $1 \leq v \leq 4$ .

В этом случае в допустимое множество  $D$  попали три точки:  $A_1$ ,  $A_{794}$  и  $A_{922}$ , из которых две последние — эффективные. Обе эти точки конструктор счел примерно эквивалентными: лучшее значение  $\Phi_1(A_{922})$  уравнивается лучшими значениями  $\Phi_3(A_{794})$  и  $\Phi_4(A_{794})$ . Любопытно, что точку  $A_1$  оказалось возможным улучшить по всем четырем важнейшим критериям.

Третий диалог конструктора с ЭВМ. Конструктор решил поискать точки, которые по одному из первых четырех критериев несколько хуже, чем  $A_1$ , зато по всем другим критериям — заметно лучше. С этой целью по таблицам испытаний были выбраны ограничения

$$\begin{aligned} \Phi_1^{**} &= \Phi_1(A_{996}) = 8,34, & \Phi_2^{**} &= \Phi_2(A_{236}) = 0,291, \\ \Phi_3^{**} &= \Phi_3(A_{445}) = 33,62, & \Phi_4^{**} &= \Phi_4(A_{847}) = 7,61. \end{aligned}$$

По-прежнему,  $\Phi_5^{**} = 1$ ,  $\Phi_6^{**} = 1$ .

<sup>1</sup> Для краткости в этой главе приближенно эффективные точки будем называть эффективными.

Таблица 5.3

## Таблицы испытаний

$i$	$\Phi_1(A_i)$	$i$	$\Phi_2(A_i)$	$i$	$\Phi_3(A_i)$	$i$	$\Phi_4(A_i)$	$i$	$\Phi_5(A_i)$	$i$	$\Phi_6(A_i)$
248	7,02	445	0,233	319	28,25	475	3,70	588	0,047	214	0,051
353	7,04	475	0,241	248	28,34	1022	3,74	418	0,106	295	0,120
132	7,17	141	0,241	794	28,46	957	4,10	910	0,133	853	0,120
673	7,30	40	0,241	47	28,94	593	4,15	863	0,144	910	0,122
47	7,31	78	0,242	935	29,38	253	4,37	214	0,155	231	0,130
528	7,32	831	0,242	176	29,52	768	4,52	134	0,170	807	0,163
905	7,37	183	0,243	498	29,59	143	4,55	853	0,176	819	0,177
733	7,39	667	0,243	13	30,15	643	4,62	295	0,180	445	0,183
379	7,41	925	0,243	40	30,34	116	4,66	637	0,197	40	0,186
836	7,42	433	0,243	528	30,62	204	4,77	947	0,214	116	0,188
141	7,42	655	0,244	922	30,82	588	4,91	347	0,233	637	0,214
690	7,43	396	0,245	475	30,94	552	4,93	396	0,236	588	0,217
620	7,47	319	0,246	905	31,62	176	5,16	203	0,243	406	0,221
421	7,49	913	0,246	682	31,68	733	5,20	231	0,256	475	0,227
922	7,50	819	0,248	141	31,69	667	5,27	925	0,256	790	0,243
498	7,52	682	0,248	819	31,70	661	5,42	406	0,256	655	0,245
787	7,57	794	0,248	1	31,72	379	5,43	116	0,271	362	0,260
218	7,58	498	0,249	1022	31,83	224	5,54	819	0,281	203	0,266
78	7,59	176	0,250	831	32,00	368	5,63	619	0,283	36	0,266
181	7,61	935	0,250	433	32,41	619	5,68	153	0,294	619	0,274
552	7,63	619	0,250	421	32,54	406	5,69	913	0,298	78	0,279
990	7,65	134	0,252	379	32,80	433	5,70	648	0,298	224	0,281
319	7,70	922	0,252	445	33,62	794	5,77	807	0,303	149	0,282
768	7,70	615	0,252	181	33,95	682	5,78	224	0,303	667	0,285
336	7,73	879	0,252	368	34,77	533	5,81	40	0,305	48	0,286

879	7,73	115	0,255	353	34,79	13	5,81	445	0,305	628	0,286
13	7,75	1	0,256	218	35,01	408	5,87	628	0,310	925	0,287
831	7,76	243	0,256	787	35,06	874	5,89	183	0,316	418	0,294
605	7,79	600	0,258	874	35,18	498	5,92	520	0,322	706	0,304
153	7,80	996	0,260	643	35,34	859	5,96	996	0,335	615	0,306
40	7,81	143	0,261	768	35,64	637	5,96	362	0,336	847	0,313
293	7,82	103	0,261	688	35,70	913	5,97	78	0,342	1022	0,313
794	7,82	643	0,262	836	35,75	922	6,03	115	0,343	347	0,315
643	7,86	368	0,262	341	36,43	293	6,13	48	0,346	513	0,324
433	7,87	874	0,262	847	36,43	787	6,18	1022	0,352	336	0,322
910	7,87	13	0,262	253	36,62	879	6,25	667	0,354	880	0,339
952	7,93	163	0,263	132	36,67	248	6,36	475	0,357	1	0,359
192	7,95	661	0,263	879	36,69	935	6,37	36	0,366	115	0,360
767	7,96	990	0,263	224	37,06	615	6,58	790	0,374	408	0,380
619	7,97	421	0,263	192	37,18	295	6,62	149	0,375	688	0,383
418	7,99	853	0,264	103	38,11	243	6,67	513	0,385	668	0,390
925	8,00	347	0,264	655	38,20	1	6,70	615	0,386	35	0,393
1	8,00	293	0,265	143	38,44	690	6,82	706	0,386	600	0,402
819	8,01	204	0,265	78	38,85	319	6,82	655	0,395	957	0,431
593	8,04	48	0,265	243	39,08	905	6,90	336	0,399	103	0,432
149	8,05	224	0,266	185	39,15	78	7,01	847	0,400	368	0,451
682	8,05	149	0,266	733	39,27	218	7,03	600	0,417	293	0,463
408	8,05	203	0,266	406	39,57	47	7,08	35	0,420	948	0,474
935	8,06	787	0,267	990	39,63	790	7,16	1	0,421	183	0,481
36	8,06	520	0,267	513	39,82	853	7,17	668	0,439	863	0,485
790	8,07	253	0,268	593	40,05	48	7,17	880	0,441	253	0,486
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Таблица 5.3 (окончание)

$i$	$\Phi_1(A_i)$	$i$	$\Phi_2(A_i)$	$i$	$\Phi_3(A_i)$	$i$	$\Phi_4(A_i)$	$i$	$\Phi_5(A_i)$	$i$	$\Phi_6(A_i)$
214	8,33	673	0,276	605	45,84	421	8,51	831	0,649	243	0,626
475	8,34	231	0,276	948	45,91	353	8,55	767	0,687	947	0,660
996	8,34	690	0,276	790	46,01	528	8,63	859	0,687	176	0,665
637	8,35	768	0,277	35	46,30	990	8,71	421	0,696	682	0,719
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
35	8,56	767	0,282	153	50,85	362	9,44	353	0,844	528	0,891
183	8,61	248	0,283	859	52,01	153	9,59	218	0,849	768	0,894
648	8,61	593	0,283	418	54,35	170	9,59	733	0,881	733	0,897
807	8,64	952	0,284	957	54,73	880	9,64	787	0,886	913	0,903
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
347	8,98	605	0,305	231	64,18	35	11,82	13	1,118	498	1,164
863	9,04	620	0,313	947	70,62	600	12,51	498	1,143	13	1,222

В допустимое множество попало всего 15 точек, из них 12 эффективных (если считать решающими только 4 первых критерия). Среди них конструктор отдал предпочтение эффективным точкам  $A_{248}$ ,  $A_{475}$  и  $A_{922}$  (см. табл. 5.1 и 5.2).

Наиболее интересным и даже неожиданным результатом оказалась точка  $A_{475}$ , которая несколько хуже точки  $A_1$  по критерию  $\Phi_1$ , но зато лучше ее по всем критериям  $\Phi_2 - \Phi_6$ ; значение  $\Phi_4(A_{475})$  минимально и значительно лучше, чем значение  $\Phi_4(A_1)$ . Об интересных соображениях конструктора, связанных с этой точкой, сказано ниже в выводах.

Последующие диалоги конструктора с ЭВМ существенно новых результатов не дали. Нетрудно заметить, что именно третий диалог более всего соответствует методике, изложенной в разделе 2.2.

Попытки улучшить точку  $A_{475}$ . Координаты  $\alpha_{475,4} = 20,09$  и  $\alpha_{475,10} = 94,20$  близки к границам параллелепипеда  $\alpha_4^* = 20$  и  $\alpha_{10}^* = 94$ . Поэтому, в соответствии с рекомендацией, приведенной на с. 38, был проведен расчет точки  $A'$ , отличающейся от  $A_{475}$ , этими двумя координатами:  $\alpha'_j = \alpha_{475,j}$  при  $j \neq 4, j \neq 10$ ;  $\alpha'_4 = 20$ ,  $\alpha'_{10} = 94$ . Значения всех критериев остались практически теми же и только  $\Phi_4(A') = 3,65$  несколько лучше, чем  $\Phi_4(A_{475}) = 3,70$ .

Был проведен ЛП-поиск в небольшом параллелепипеде, границы которого отличаются от координат  $A_{475}$  не более, чем на  $\pm 5\%$ . После 32 испытаний точку  $A_{475}$  практически улучшить не удалось.

Руководствуясь динамическими соображениями, конструктор предложил провести ЛП-поиск в плоскости параметров  $\alpha_8$  и  $\alpha_{10}$  (при  $3,00 \leq \alpha_8 \leq 5,33$ ,  $94 \leq \alpha_{10} \leq 100$ ), фиксируя остальные координаты точки  $A_{475}$ . При 128 испытаниях был получен ряд интересных, по мнению конструктора, точек, но ни одной из них отдать предпочтение перед точкой  $A_{475}$  он не решился.

Анализ зависимости критериев. Методом, изложенным в 4.2, были сосчитаны коэффициенты корреляции критериев в области  $G$ , содержащей 108 пробных точек. Результаты, приведенные в табл. 5.4, показывают, что среди всех  $\Phi_v$  при  $1 \leq v \leq 6$  только  $\Phi_5$  и  $\Phi_6$  сильно зависимы:  $r_{5,6} = 0,89$ . Внимательный анализ таблиц испытаний подтвердил этот вывод: группы лучших (и худших) точек по отношению к обоим критериям состоят, в основном, из тех же точек, хотя и расположенных в другом порядке.

Таблица 5.4

Коэффициенты корреляции критериев  $r_{\mu\nu}$ 

$\mu$	$\nu = 2$	3	4	5	$\nu = 6$
1	-0,14	0,60	0,00	-0,63	-0,56
2	—	0,24	0,05	0,17	0,14
3	—	—	0,32	-0,64	-0,47
4	—	—	—	-0,32	-0,24
5	—	—	—	—	0,89

**Некоторые выводы.**

1. Действующая модель ВРА-8, которой соответствует точка  $A_1$ , по всем шести критериям неуплучшаема. Однако существуют модели, соответствующие  $A_{794}$  и  $A_{922}$ , которые несколько превосходят исходную по четырем важнейшим критериям  $\Phi_1 - \Phi_4$ .

2. Найдена интересная модель, соответствующая точке  $A_{248}$ , оптимальной по критерию  $\Phi_1$ . Ее масса примерно на 1 тонну меньше, чем масса исходной модели, а значения остальных критериев, по мнению конструктора, приемлемы.

3. Обнаружена точка  $A_{475}$ , оптимальная по критерию  $\Phi_4$ . Модель, соответствующая этой точке, по массе на 0,34 т тяжелее, чем исходная модель, но по остальным пяти критериям превосходит ее. Динамическая нагрузка на фундамент (критерий  $\Phi_4$ ) у найденной модели почти вдвое меньше, чем у исходной! Для вновь проектируемых заводов и особенно заводов будущего предполагается строить многоэтажные здания, в которых виброплощадки можно устанавливать не только на первом, но и на более высоких этажах. Тогда уменьшение нагрузки на перекрытия приобретет первостепенное значение, и критерий  $\Phi_4$  станет главным критерием.

4. Как уже указывалось, из  $N' = 1024$  пробных точек в  $\Pi$ , всего  $N = 108$  точек попали в  $G$ . Анализ ресурсов позволил выяснить, что среди точек, не удовлетворяющих функциональным ограничениям, 72% точек не удовлетворяют ограничениям, связанным с  $f_1(A)$ , 7% — с  $f_2(A)$ , 3% — с  $f_6(A)$  и 18% — с  $f_7(A)$ .

5. В постановке задачи предусматривалось, что  $\alpha_8$  (масса уравновешивающей рамы) заключена в пределах  $3 \leq \alpha_8 \leq 7$ . В действительности из-за функциональных

ограничений пределы оказались более узкими:  $4,02 \leq \leq \alpha_8 \leq 6,04$ . Этим вызвано фактическое ограничение изменения массы  $\Phi_1$ , обнаруженное при втором пробном расчете.

6. В целом, возможности улучшения существующей модели ВРА-8 за счет сравнительно небольших изменений параметров весьма ограничены.

### 5.3. Вторая задача: эскизное проектирование машины с минимальной массой

Ставится задача: существенно улучшить значение критерия  $\Phi_1$  (масса машины) и, если это возможно, улучшить также значения других критериев. Так как предыдущее исследование показало, что в параллелепипеде  $\Pi$  такая задача неразрешима, то было решено резко увеличить область поиска.

Глобальное исследование. Конструктор определил новый параллелепипед  $\Pi'$  при помощи параметрических ограничений  $\alpha_j^*$  и  $\alpha_j^{**}$ , приведенных в той же табл. 5.1. Здесь пределы изменения  $\alpha_7$  и  $\alpha_8$  определены из условий динамической прочности. Нетрудно проверить, что при фиксированном  $\alpha_7$  отношение девятимерных объемов  $V_{\Pi'}$  к  $V_{\Pi}$  превосходит  $10^6$ .

При тех же функциональных ограничениях (3) и (4) в  $\Pi'$  было выбрано  $N' = 4096$  пробных точек, из которых в таблицы испытаний попало только  $N = 100$  точек. Значит,  $\gamma \approx N/N' = 0,025$ ; такое уменьшение  $\gamma$  (по сравнению с  $\gamma \approx 0,1$  в первой задаче) вполне естественно, так как там поиск велся в окрестности точки  $A_1$ , которая всем ограничениям удовлетворяет.

Вопреки ожиданиям, минимальные значения некоторых критериев в этом опыте оказались больше, чем минимальные значения в  $\Pi$  (табл. 5.2). Это указывает на недостаточно подробный просмотр большого параллелепипеда  $\Pi'$ . Стоит, впрочем, отметить, что коэффициенты корреляции критериев, сосчитанные по этим 100 точкам, близки к полученным в разделе 5.2.

Конструктор перепробовал шесть вариантов критерияльных ограничений; при этом количество точек, попавших в допустимое множество, колебалось от 0 до 20. После анализа всех 100 точек было принято решение продолжить исследование по локальному пути.

Локальное исследование. Были отобраны семь лучших



точек. Забегая вперед, отметим, что наилучшие результаты были получены в ходе поиска вблизи каждой из четырех точек, у которых ресурсы по  $\Phi_8$  и по  $\Phi_9$  оказались большими. Именно такое предсказание было сделано конструктором на основе вывода 4 в разделе 5.2. Наоборот, поиск вблизи каждой из трех точек, у которых ресурсы  $\Delta_9 = 0$ , существенно новых результатов не дал, хотя эти три точки и были эффективными.

С некоторым опозданием мы решили перенести локальный поиск на границу  $\Pi'$ , а именно фиксировать минимальные возможные значения  $\alpha_7 = 3$  и  $\alpha_8 = 3$ . Дело в том, что при таких предположениях  $\Phi_1 = \alpha_7 + \alpha_8$  будет минимальным:  $\Phi_1 = 6$  т.

Вот как, например, был организован поиск вблизи точки  $A_{1452} = (36,8; 61,5; 1430, 22,2; 46,4; 0,954; 4,52; 5,12; 0,425; 80,6)$ : рассматривался восьмимерный параллелепипед, определенный условиями

$$\begin{array}{ll} 30 \leq \alpha_1 \leq 40, & 0,9 \leq \alpha_6 \leq 1,0, \\ 56 \leq \alpha_2 \leq 66, & \alpha_7 = 3,0, \\ 1400 \leq \alpha_3 \leq 1450, & \alpha_8 = 3,0, \\ 20 \leq \alpha_4 \leq 25, & 0,40 \leq \alpha_9 \leq 0,45, \\ 44 \leq \alpha_5 \leq 49, & 90 \leq \alpha_{10} \leq 100; \end{array}$$

в этом параллелепипеде было проведено  $N' = 128$  испытаний, из которых  $N = 71$  удовлетворили функциональным ограничениям; наилучшие точки определялись на основе изучения таблиц испытаний.

После этих экспериментов конструктор отобрал две наилучшие, по его мнению, точки  $\bar{A}'_{116}$  и  $A''_{12}$ , которые были найдены вблизи точки  $A_{1452}$  и, соответственно, вблизи точки  $A_{2406}$ . Параметры наилучших точек приведены в табл. 5.1, а значения критериев — в табл. 5.2.

**Некоторые выводы.**

1. Найдены две модели, соответствующие точкам  $\bar{A}'_{116}$  и  $A''_{12}$ , достаточно хорошие по всем критериям и абсолютно минимальные по массе (по сравнению с точкой  $A_{248}$ , найденной в разделе 5.2, массу удалось уменьшить еще на 1 т).

2. Низкое значение  $\gamma$  указывает на сложность поставленной задачи.

3. Возможно, решение задачи упростилось бы, если бы значения  $\alpha_7 = 3$ ,  $\alpha_8 = 3$  были фиксированы перед глобальным исследованием.

**Заключение.** Значение критериев для всех наиболее интересных моделей, найденных в разделах 5.2 и 5.3, а также для исходной модели (точка  $A_1$ ) имеются в табл. 5.2.

Результаты проведенных расчетов расцениваются специалистами как очень интересные. Во-первых, доказано, что металлоемкость машины можно уменьшить на 2 т, и при этом снизить усилия в приводе и динамические нагрузки на основание на 10—20% (точки  $A'_{110}$  и  $A''_{12}$ ). Во-вторых, доказана возможность значительного снижения динамической нагрузки на фундамент с одновременным улучшением всех других критериев за счет увеличения массы машины менее, чем на 5% (точка  $A_{475}$ ).

Полученные результаты стимулируют дальнейшее совершенствование конструкций резонансных виброплощадок для формирования железобетонных изделий.

Дополнение

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛП<sub>τ</sub>-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

У читателей, которые впервые узнают про ЛП<sub>τ</sub>-последовательности, часто возникают вопросы: что означает само название, в каком смысле говорят о равномерном расположении точек, сложно ли вычислять такие последовательности и др. Дополнение ставит своей целью по возможности коротко ответить на некоторые из этих вопросов. Лица, заинтересованные только в формулах расчета ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей, могут обратиться прямо к Д.7.

Первые публикации об ЛП<sub>τ</sub>-последовательностях относятся к 1966 году [24, 25]. Более подробно теория ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей изложена в статье [26] и в монографии [27]. Ниже все результаты, содержащиеся в этой монографии, приводятся без ссылок, а все более поздние результаты — с ссылками. В этой связи можно также указать на обзорную статью [23].

### Д.1. Геометрическое определение

Этот параграф содержит вполне строгое геометрическое определение ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей.

*Двоичные параллелепипеды.* Назовем *двоичными отрезками* все отрезки, которые могут быть получены при

делении отрезка  $0 \leq x \leq 1$  на  $2^m$  равных частей;  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Для определенности все двоичные отрезки считаем замкнутыми слева и открытыми справа, если только правый конец отрезка отличен от 1; если левый конец равен 1, то отрезок замкнут также и справа. При таком определении сумма всех двоичных отрезков длины  $2^{-m}$  составляет отрезок  $[0, 1]$ .

Например, двоичными отрезками являются отрезки  $[0, 1]$ ,  $[0, 1/2]$ ,  $[1/2, 1]$ ,  $[0, 1/4]$ ,  $[1/4, 1/2]$ ,  $[1/2, 3/4]$ ,  $\dots$ . Отрезки  $[1/4, 3/4]$  или  $[5/8, 7/8]$  двоичными не считаются.

Перенумеруем все двоичные отрезки и обозначим их  $l_s$ ;  $s = 1, 2, \dots$ . Пусть  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , где некоторые (или даже все)  $k_j$  могут совпадать. Назовем *двоичным параллелепипедом*  $\Pi_k$  множество точек с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  такими, что  $x_j \in l_{k_j}$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Очевидно, любой такой двоичный параллелепипед принадлежит единичному  $n$ -мерному кубу  $K^n$ .

**$\Pi_\tau$ -сетки.** Сетку, состоящую из  $N = 2^\nu$  точек куба  $K^n$ , назовем  $\Pi_0$ -сеткой, если каждому двоичному параллелепипеду  $\Pi_k$  с объемом  $V_{\Pi_k} = 1/N$  принадлежит одна точка сетки.

Например, сетка, изображенная на рис. 1.1, не является  $\Pi_0$ -сеткой, а сетка, изображенная на рис. 1.3, —  $\Pi_0$ -сетка. (Поясним, что в число двоичных прямоугольников с площадью  $1/16$  входят прямоугольники с размерами  $1 \times 1/16$ ,  $1/2 \times 1/8$ ,  $1/4 \times 1/4$ ,  $1/8 \times 1/2$ ,  $1/16 \times 1$ ).

Нетрудно доказать, что точки  $\Pi_0$ -сетки расположены в каком-то смысле равномерно в  $K^n$ . К сожалению, такие сетки существуют только при  $n = 1, 2, 3$ ; в четырехмерном кубе невозможно построить  $\Pi_0$ -сетку с числом точек  $N \geq 4$ . Поэтому требование к распределению точек сетки приходится ослабить и ввести более общее определение.

**О п р е д е л е н и е.** Сетка, состоящая из  $N = 2^\nu$  точек куба  $K^n$ , называется  $\Pi_\tau$ -сеткой, если каждому двоичному параллелепипеду  $\Pi_k$  с объемом  $V_{\Pi_k} = 2^{\tau-\nu}/N$  принадлежат  $2^\tau$  точек сетки. При этом всегда предполагается, что  $\nu > \tau$ .

Например, сетка, изображенная на рис. 1.1, представляет собой  $\Pi_2$ -сетку.

$\Pi_\tau$ -сетки существуют в  $K^n$  при любых  $n$ , однако значения  $\tau$  с ростом  $n$  приходится увеличивать. Проекция точек, образующих  $\Pi_\tau$ -сетку в  $K^n$ , на любую  $m$ -мерную грань куба  $K^n$  образуют  $m$ -мерную  $\Pi_\tau$ -сетку. Более того, эта  $m$ -мерная сетка может оказаться  $\Pi_{\tau'}$ -сеткой с  $\tau' < \tau$ .

**ЛП<sub>τ</sub>-последовательности.** Рассмотрим произвольную последовательность точек  $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$ , принадлежащих  $K^n$ . Назовем *двоичным участком* этой последовательности множество членов  $P_i$  с номерами  $i$ , удовлетворяющими неравенству вида

$$k2^s \leq i < (k+1)2^s \quad (k = 0, 1, 2, \dots; s = 1, 2, \dots).$$

Например, участки  $0 \leq i < 8$ ,  $8 \leq i < 16$ ,  $16 \leq i < 24$ , ... двоичные, а участок  $4 \leq i < 16$  двоичным не является.

**О п р е д е л е н и е.** Последовательность точек  $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$  куба  $K^n$  называется *ЛП<sub>τ</sub>-последовательностью*, если любой ее двоичный участок, содержащий не менее, чем  $2^{\tau+1}$  точек, представляет собой П<sub>τ</sub>-сетку.

Название «ЛП<sub>τ</sub>-последовательность» появилось как сокращение фразы «последовательность, любой двоичный участок которой представляет собой П<sub>τ</sub>-сетку».

## Д.2. Количественные оценки равномерности распределения

В этом параграфе определены две количественные характеристики равномерности распределения, перечислены некоторые их свойства и оценки этих характеристик для ЛП<sub>τ</sub>-последовательностей.

**Отклонение.** Рассмотрим в  $K^n$  произвольную сетку, состоящую из  $N$  точек  $P_1, \dots, P_N$ . Как и в главе 1, обозначим через  $S_N(G)$  количество точек  $P_i$  (с номерами  $1 \leq i \leq N$ ), принадлежащих  $G$ . Произвольной точке  $P$  из  $K^n$  поставим в соответствие параллелепипед  $\Pi_P$  со сторонами, параллельными координатным плоскостям, и с диагональю  $OP$  (рис. Д.1). Объем  $\Pi_P$  обозначим через  $V_{\Pi_P}$ .

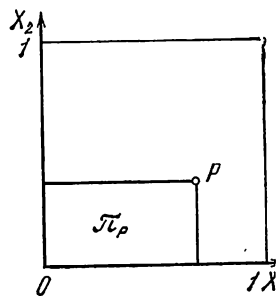


Рис. Д.1. К определению отклонения

**О п р е д е л е н и е.** *Отклонением* точек  $P_1, \dots, P_N$  называется верхняя грань

$$D(P_1, \dots, P_N) = \sup_{P \in K^n} |S_N(\Pi_P) - NV_{\Pi_P}|.$$

Таблица Д.1. Таблица числителей

$j$	$l=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	5	15	17	51	85	255	257	771	1 285	3 855
3	1	1	7	11	13	61	67	79	465	721	823	4 091
4	1	3	5	5	7	43	49	147	439	1 013	727	987
5	1	1	5	3	15	51	125	141	177	759	267	1 839
6	1	3	1	1	9	59	25	89	321	835	833	4 033
7	1	1	3	7	31	47	109	173	181	949	471	2 515
8	1	3	3	9	9	57	43	43	225	113	1 601	579
9	1	3	7	13	3	35	89	9	235	929	1 341	3 863
10	1	1	5	11	27	53	69	25	103	615	913	977
11	1	3	5	1	15	19	113	115	411	157	1 725	3 463
12	1	1	7	3	29	51	47	97	233	39	2 021	2 909
13	1	3	7	7	21	61	55	19	59	761	1 905	3 379
14	1	1	1	9	23	37	97	97	353	169	375	1 349
15	1	3	3	5	19	33	3	197	329	983	893	3 739
16	1	1	3	13	11	7	37	101	463	657	1 599	347
17	1	1	7	13	25	5	83	255	385	647	415	387
18	1	3	5	11	7	11	103	29	111	581	605	2 381
19	1	1	1	3	13	39	27	203	475	505	819	2 821
20	1	3	1	15	17	63	13	65	451	833	975	1 873
21	1	1	5	5	1	27	33	195	263	139	915	1 959
22	1	3	3	3	25	17	115	177	19	147	1 715	1 929
23	1	1	3	15	29	15	41	105	249	203	1 223	2 389
24	1	3	1	7	3	23	79	17	275	81	1 367	3 251
25	1	3	7	9	31	29	17	47	369	337	663	1 149
26	1	1	5	13	11	3	29	169	393	829	629	243
27	1	3	1	9	5	21	119	109	167	989	525	3 609
28	1	1	3	1	23	13	75	149	333	375	469	1 131
29	1	3	3	11	27	31	73	15	473	365	981	1 701
30	1	1	7	7	19	25	105	213	469	131	1 667	143
31	1	3	5	5	21	9	7	135	101	215	1 587	1 339
32	1	1	1	15	5	49	59	253	21	733	1 251	3 497
33	1	1	1	1	1	33	65	191	451	451	451	2 499
34	1	3	5	15	17	19	21	155	229	447	481	1 571
35	1	1	7	11	13	29	3	175	247	177	721	983
36	1	3	7	5	7	11	113	63	297	57	483	4 021
37	1	1	5	3	15	19	61	47	403	471	1 209	1 625
38	1	3	1	1	9	27	89	7	497	979	1 457	3 217
39	1	1	3	7	31	15	45	23	61	197	415	1 163
40	1	3	3	9	9	25	107	39	361	251	1 435	2 977
41	1	3	7	13	3	3	25	55	215	517	725	3 391
42	1	1	5	11	27	21	5	71	393	137	861	675
43	1	3	5	1	15	51	49	87	125	567	41	3 093
44	1	1	7	3	29	19	111	103	285	1 021	1 619	1 495
45	1	3	7	7	21	29	119	119	501	167	1 579	3 443
46	1	1	1	9	23	5	33	135	277	877	1 701	557
47	1	3	3	5	19	1	67	153	199	929	869	675
48	1	1	3	13	11	39	101	169	301	269	1 151	1 489
49	1	1	7	13	25	37	19	185	19	327	1 897	2 303
50	1	3	5	11	7	43	39	201	83	997	1 679	3 925
51	1	1	1	3	13	7	91	217	351	91	1 355	3 705

13	14	15	16	17	18	19	I = 20
1	1	1	1	1	1	1	1
4 369	13 107	21 845	65 535	65 537	196 611	327 685	983 055
4 125	4 141	28 723	45 311	53 505	250 113	276 231	326 411
5 889	6 915	16 647	49 925	116 487	83 243	116 529	715 667
6 929	16 241	16 565	17 139	82 207	50 979	252 717	851 901
3 913	11 643	18 777	35 225	102 401	45 059	36 865	299 009
6 211	2 147	3 169	35 873	33 841	99 889	247 315	1 032 727
1 731	11 977	7 241	63 609	81 003	15 595	144 417	685 617
1 347	4 417	5 087	12 631	103 445	152 645	130 127	775 365
6 197	14 651	2 507	27 109	5 205	91 369	302 231	172 023
2 817	9 997	7 451	12 055	44 877	24 895	508 255	574 033
5 459	2 615	13 329	35 887	97 323	83 101	320 901	810 643
8 119	13 207	8 965	9 997	75 591	226 659	187 499	628 265
5 121	13 313	19 457	1 033	62 487	250 917	234 593	308 321
7 669	2 671	18 391	31 161	12 111	259 781	36 159	232 401
2 481	5 201	3 123	32 253	78 043	63 447	508 757	974 837
7 101	11 469	11 699	15 865	49 173	147 489	81 991	802 875
2 677	14 855	721	26 903	100 419	206 167	241 771	987 201
1 405	12 165	709	41 543	57 545	77 163	357 231	378 135
7 423	5 837	20 481	12 291	86 017	12 303	329 025	774 207
725	5 387	19 285	5 165	27 985	69 809	128 325	164 575
2 465	12 483	13 057	28 931	54 019	21 251	62 233	248 081
471	12 945	32 321	29 377	127 427	103 759	472 541	1 008 719
2 887	1 279	4 865	64 771	24 321	42 247	338 691	599 831
1 715	187	12 285	53 631	110 851	4 357	153 347	171 033
5 595	8 133	4 929	10 817	8 261	189 901	255 947	734 787
5 689	11 819	15 889	48 083	67 537	63 993	336 469	749 285
441	14 471	12 625	8 881	34 707	85 105	479 495	911 133
3 169	7 615	8 405	41 135	106 823	107 847	339 031	977 907
4 485	2 981	12 593	60 913	15 703	26 967	507 907	344 073
6 311	4 081	28 637	60 935	94 129	109 273	475 921	281 389
3 557	7 223	13 425	58 577	69 521	217 151	424 277	789 985
483	11 843	28 285	12 029	86 021	217 093	348 165	176 165
3 781	10 799	15 893	959	19 793	213 491	377 941	414 943
3 195	9 277	15 405	19 637	87 283	186 143	343 297	1 041 185
5 213	2 031	4 677	26 607	20 931	54 345	259 163	741 087
5 085	15 371	19 493	56 445	26 369	27 399	521 499	132 383
185	6 603	1 129	36 087	66 817	98 051	451 841	175 361
7 323	7 563	25 321	52 563	37 745	81 777	235 347	539 895
1 713	11 617	14 979	5 455	68 289	209 987	346 179	521 289
4 021	4 129	4 099	12 345	102 733	21 287	128 115	20 689
5 875	12 061	25 469	47 423	29 505	124 097	444 613	430 923
5 363	3 471	17 589	50 131	33 137	98 739	361 365	426 737
4 977	15 919	6 731	43 771	23 313	151 281	270 519	11 187
5 441	1 097	13 483	58 779	36 561	116 819	420 599	998 391
1 779	10 369	15 325	33 331	118 321	59 665	498 897	494 137
6 777	14 343	18 465	63 615	43 349	30 799	322 567	939 017
287	8 475	6 929	46 013	52 785	75 249	14 035	507 165
6 919	16 139	16 677	34 579	120 981	239 693	73 299	863 545
1 517	305	21 765	45 827	91 157	113 679	204 881	761 911
1 875	7 621	4 381	9 079	94 533	37 261	431 301	176 455

(В литературе часто отклонением называют отношение  $D/N$ , которое для случайных точек  $P_1, \dots, P_N$  превращается в отклонение выборочной функции распределения этих точек  $S_N(\Pi_P)/N$  от теоретической функции распределения  $V_{\Pi_P}$ .)

Чем меньше  $D$ , тем более равномерным следует считать расположение точек  $P_1, \dots, P_N$  в  $K^n$ . Легко видеть, что всегда  $D(P_1, \dots, P_N) \leq N$ , но точная нижняя граница неизвестна.<sup>1</sup> (При  $n = 1$  она равна  $1/2$ .)

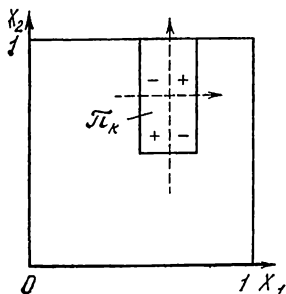


Рис. Д.2. К определению неравномерности.

**Т е о р е м а 1.** Для того чтобы последовательность  $P_1, \dots, P_1, \dots$  была равномерно распределенной в  $K^n$ , необходимо и достаточно, чтобы при  $N \rightarrow \infty$

$$D(P_1, \dots, P_N) = o(N).$$

Специалисты полагают [22, 23], что наилучший возможный порядок отклонений при  $N \rightarrow \infty$  равен  $O(\ln^2 N)$ .

**Неравномерность.** Выберем в  $K^n$  произвольный двоичный параллелепипед  $\Pi_k$  и перенесем начало координат в центр  $\Pi_k$ . Координатные плоскости разобьют  $\Pi_k$  на  $2^n$  равновеликих октантов (точнее — гипероктантов) (рис. Д.2). Обозначим через  $V_k^+$  совокупность всех «положительных», а через  $V_k^-$  — совокупность всех «отрицательных» октантов.

Если в  $K^n$  заданы  $N$  точек  $P_1, \dots, P_N$ , то равномерность их расположения в  $\Pi_k$  можно характеризовать величиной  $|S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)|$ . Верхняя грань этой величины по всем двоичным параллелепипедам

$$\sup_{\Pi_k} |S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)|$$

есть целое число, как-то характеризующее расположение точек  $P_1, \dots, P_N$  в  $K^n$ .

**О п р е д е л е н и е.** Неравномерностью точек  $P_1, \dots, P_N$  называется максимальная верхняя грань

$$\varphi_\infty(P_1, \dots, P_N) = \max \sup_{\Pi_k} |S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)|,$$

где максимум берется по всем сеткам, которые состоят из проекций точек  $P_1, \dots, P_N$  на какую-нибудь  $m$ -мерную грань куба  $K^n$  (Рассматриваются всевозможные грани при всевозможных  $1 \leq m \leq n$ ).

Нетрудно доказать, что  $1 \leq \varphi_\infty(P_1, \dots, P_N) \leq N$ , хотя значение  $\varphi_\infty = 1$  реализуемо только в одномерном случае. (В двухмерном случае ( $n = 2$ ) точная нижняя граница  $\varphi_\infty = 2$ , а при  $n > 2$  точная нижняя граница неизвестна).

**Т е о р е м а 2.** Для того чтобы последовательность  $P_1, \dots, P_i, \dots$  была равномерно распределенной в  $K^n$ , необходимо и достаточно, чтобы при  $N \rightarrow \infty$

$$\varphi_\infty(P_1, \dots, P_N) = o(N).$$

Наилучший возможный порядок неравномерностей при  $N \rightarrow \infty$  равен  $O(1)$ .

Оценки отклонений и неравномерностей. Обозначим, как обычно, через  $\binom{m}{k}$  биномиальный коэффициент,

$$\text{так что } \binom{m}{k} = m(m-1)\dots(m-k+1)/k!$$

**Т е о р е м а 3.** Для любой  $\Pi_\tau$ -сетки в  $K^n$ , состоящей из  $N \geq 2^{n-1+\tau}$  точек, справедлива оценка

$$D(P_1, \dots, P_N) \leq 2^\tau \sum_{j=0}^{n-1} \binom{v-j}{j},$$

где  $v = \log_2 N$ .

**Т е о р е м а 4.** Для произвольного начального участка любой  $\Pi_\tau$ -последовательности в  $K^n$ , содержащего не менее, чем  $2^{n-1+\tau}$  точек, справедлива оценка

$$D(P_0, \dots, P_{N-1}) \leq 2^\tau \left[ 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{v_1 - \tau + 1}{j+1} \right] - 1,$$

где  $v_1 = E(\log_2 N)$  — целая часть логарифма  $N$ .

**Т е о р е м а 5.** Для произвольного начального участка любой  $\Pi_\tau$ -последовательности в  $K^n$  справедлива оценка

$$\varphi_\infty(P_0, \dots, P_{N-1}) \leq 2^{n-1+\tau}.$$

Пусть теперь  $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$  — какая-нибудь  $\Pi_\tau$ -последовательность в  $K^n$ . Так как оценка неравномерностей в теореме 5 не зависит от  $N$ , то очевидно, при



$N \rightarrow \infty$

$$\varphi_{\infty}(Q_0, \dots, Q_{N-1}) = O(1);$$

это наилучший возможный порядок.

Из теоремы 4 вытекает, что при  $N \rightarrow \infty$

$$D(Q_0, \dots, Q_{N-1}) = O(\ln^n N);$$

как упоминалось выше, это, по-видимому, наилучший возможный порядок для всех  $N$ . Однако, если ограничиться только значениями  $N$  вида  $N = 2^{\nu}$ , то эту оценку можно усилить. Дело в том, что любой начальный участок  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{N-1}$  при  $N = 2^{\nu}$  представляет собой  $\Pi_{\tau}$ -сетку (если только  $\nu > \tau$ ), и для оценки неравномерности можно воспользоваться теоремой 3, откуда вытекает, что при  $N = 2^{\nu}$

$$D(Q_0, \dots, Q_{N-1}) = O(\ln^{n-1} N).$$

Последняя оценка показывает, что при практическом использовании ЛП $_{\tau}$ -последовательностей, вообще говоря, целесообразно выбирать количество точек вида  $N = 2^{\nu}$ . Тогда можно удваивать  $N$ , сохраняя эту оценку и не пересчитывая уже имеющиеся точки.

Из теорем 1 и 2 и оценок  $D$  и  $\varphi_{\infty}$  для ЛП $_{\tau}$ -последовательностей следует, что все ЛП $_{\tau}$ -последовательности равномерно распределены в  $K^n$ .

**Случай кубических решеток.** Для кубических решеток (см. раздел 1.1 и рис. 1.1), которые состоят из  $N = M^n$  точек с координатами

$$\left( \frac{i_1 + 1/2}{M}, \dots, \frac{i_n + 1/2}{M} \right),$$

где  $i_1, \dots, i_n$  независимо принимают все значения  $0, 1, \dots, M - 1$ , величины  $D$  и  $\varphi_{\infty}$  можно вычислить точно:

$$D = \frac{1}{2} N^{1-1/n}, \quad \varphi_{\infty} = N^{1-1/n}.$$

Из этих формул видно, что при  $n = 1$  отклонение и неравномерность таких решеток минимальны:  $D = 1/2$ ,  $\varphi_{\infty} = 1$ . Однако с увеличением  $n$  порядки этих формул быстро ухудшаются и приближаются к наихудшему порядку  $O(N)$ .

Для случайных сеток, состоящих из  $N$  независимых случайных точек, равномерно распределенных в  $K^n$ , с большой вероятностью  $D = O(\sqrt{N})$ . Поэтому асимпто-

тика отклонений для таких сеток лучше, чем асимптотика отклонений для кубических решеток, при  $n \geq 3$ , когда  $1/2 < 1 - 1/n$ .

### Д.3. Алгебраическая теория

Этот раздел Дополнения — самый сложный. Здесь очень коротко описан эффективный способ построения ЛП<sub>r</sub>-последовательностей, у которых все координаты всех точек двоично рациональны.

**ДР-последовательности.** Выберем бесконечную треугольную матрицу вида

$$\|v_{sj}\| = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ v_{sj} & & \ddots \end{vmatrix},$$

которую будем называть *направляющей матрицей*. Элементы  $v_{sj}$ , расположенные ниже главной диагонали, могут быть нулями и единицами.

Задание матрицы  $(v_{sj})$  равносильно заданию последовательности двоично рациональных дробей (в двоичной системе)

$$V_s = 0, v_{s1}v_{s2} \dots v_{ss},$$

которые называются *направляющими числами*.

Последовательностью двоично рационального типа или *ДР-последовательностью* называется последовательность чисел  $r(0), r(1), \dots, r(i), \dots$ , вычисляемых по следующим правилам:

$$1^\circ. r(0) = 0, r(2^s) = V_{s+1};$$

2<sup>o</sup>. Если  $2^s < i < 2^{s+1}$ , то  $r(i) = r(2^s) * r(i - 2^s)$ , где \* означает поразрядное сложение по модулю 2 в двоичной системе. Эта логическая операция, называемая также «исключающее ИЛИ», осуществляется во всех современных ЭВМ одной командой и часто используется для сравнения кодов (вычислители называют ее обычно командой «сравнение»). Например,  $7/16 * 5/32 = 11/32$ , ибо  $7/16 = 0,0111$ ,  $5/32 = 0,00101$ , а «сумма»  $0,0111 * 0,00101 = 0,01011$ .

Нетрудно доказать, что правила 1<sup>o</sup> и 2<sup>o</sup> равносильны следующему определению: если в двоичной системе  $i = e_m \dots e_2 e_1$ , то

$$r(i) = e_1 V_1 * e_2 V_2 * \dots * e_m V_m.$$

**Л е м м а.** ДР-последовательность  $r(0), r(1), \dots, r(i), \dots$ , соответствующая направляющей матрице  $(v_{sj})$ , есть одномерная ЛП<sub>0</sub>-последовательность, составленная из всевозможных двоично рациональных дробей.

**П р и м е р.** Пусть  $v_{sj} = \delta_{sj}$ , то есть все  $v_{ss} = 1$ , а при  $s \neq j$  все  $v_{sj} = 0$ . Тогда соответствующая ДР-последовательность представляет собой последовательность ван дер Корпута: если  $i = e_m \dots e_2 e_1$ , то

$$r(i) = 0, e_1 e_2 \dots e_m.$$

Ниже строятся многомерные ЛП<sub>r</sub>-последовательности, каждая координата которых представляет собой ДР-последовательность. Основная трудность такого построения — обеспечить в каком-то смысле независимость этих координат.

**Моноциклические операторы в поле GF(2).** Поле GF(2) состоит из двух элементов: 0 и 1. Правила умножения — обычные; правила сложения:  $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ ,  $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ .

Рассмотрим линейное разностное уравнение порядка  $m$  с постоянными коэффициентами

$$Lu_i = 0,$$

где разностный оператор  $L$  определен выражением

$$Lu_i \equiv u_{i+m} + a_{m-1}u_{i+m-1} + \dots + a_1u_{i+1} + u_i;$$

здесь все  $u_i$  и  $a_i$  принадлежат GF(2).

Решением уравнения  $Lu_i = 0$  назовем бесконечную последовательность

$$\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots,$$

определенную при всех  $-\infty < i < \infty$  и удовлетворяющую уравнению при каждом  $i$ .

**О п р е д е л е н и е.** Оператор  $L$  называется *моноциклическим*, если уравнение  $Lu_i = 0$  имеет решение с наименьшим периодом  $2^m - 1$ .

Так как существует всего  $2^m - 1$  различных нетривиальных групп  $(u_1, \dots, u_m)$ , состоящих из нулей и единиц, то нетрудно доказать, что все нетривиальные решения моноциклического уравнения различаются между собой лишь сдвигом нумерации. В литературе иногда такие решения называют  $M$ -последовательностями (последовательностями максимального периода).

Таблица всех моноциклических операторов до поряд-

ка 9 включительно приведена в [27], где, однако, имеется опечатка: вместо кода оператора 207 должен стоять код 203.

**Пример.** Оператор  $u_{i+4} + u_{i+3} + u_{i+2} + u_i$  не моноциклический, так как уравнение

$$u_{i+4} + u_{i+3} + u_{i+2} + u_i = 0$$

имеет решение  $u_i \equiv 1$  с периодом 1.

Оператор  $u_{i+4} + u_{i+1} + u_i$  моноциклический, так как любое нетривиальное решение уравнения

$$u_{i+4} + u_{i+1} + u_i = 0$$

имеет период 15. Например, решение

$$\dots, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots$$

**Построение ЛП $_{\tau}$ -последовательностей.** Условимся говорить, что направляющая матрица  $(v_{sj})$  принадлежит оператору  $L$  порядка  $m$ , если выполнены два условия:

а) Каждый из первых  $m$  столбцов матрицы является решением уравнения  $Lu_i = 0$ :

$$Lv_{ij} = 0$$

при каждом фиксированном  $j$ ;  $1 \leq j \leq m$ .

б) Каждый из последующих столбцов матрицы является решением неоднородного уравнения:

$$Lv_{ij} = v_{i, j-m}$$

при каждом фиксированном  $j$ ;  $m < j < \infty$ .

Про ДР-последовательность, соответствующую такой направляющей матрице  $(v_{sj})$ , будем также говорить, что она принадлежит оператору  $L$ . Так как элементы  $v_{sj}$ , стоящие ниже диагонали в первых  $m$  столбцах, могут выбираться произвольно, то одному оператору могут принадлежать разные ДР-последовательности.

**Теорема 6.** Пусть  $L_2, \dots, L_n$  — различные моноциклические операторы, порядки которых равны  $m_2, \dots, m_n$ . Пусть  $p_j(0), p_j(1), \dots, p_j(i), \dots$  — какая-нибудь ДР-последовательность, принадлежащая оператору  $L_j$ . Тогда последовательность точек  $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$  с координатами

$$Q_i = (p_1(i), p_2(i), \dots, p_n(i))$$

есть ЛП $_{\tau}$ -последовательность в  $K^n$  со значением

$$\tau = \sum_{i=2}^n (m_i - 1).$$

Здесь в качестве первой координаты использована определенная выше последовательность ван дер Корпута, о которой формально можно сказать, что она принадлежит оператору  $Lu_i \equiv u_{i+1}$  и единичной матрице  $(v_{sj})$ .

О значениях  $\tau$ . Из последней формулы видно, что для того, чтобы уменьшить  $\tau$ , следует выбирать моноциклические операторы  $L_j$  возможно низких порядков  $m_j$ . С помощью теоремы 6 построены  $\text{ЛП}_\tau$ -последовательности, для которых  $\tau = 0$  при  $n = 1$  и  $2$  и  $\tau = 1$  при  $n = 3$ ; доказано, что эти значения  $\tau$  — минимальные. При  $n = 4$  получается значение  $\tau = 3$ , однако минимальность этого значения не доказана. Вообще, при  $n \rightarrow \infty$

$$\tau = O(n \log n).$$

#### Д.4. О дополнительных свойствах равномерности

Оценки, полученные в разделе Д.2, показывают, что по своей асимптотике все  $\text{ЛП}_\tau$ -последовательности относятся к числу наилучших. Однако для практики важно, чтобы равномерность расположения устанавливалась быстро, а не только при  $N \rightarrow \infty$ . С этой целью в статье [34] были сформулированы некоторые дополнительные требования, которые можно удовлетворить путем выбора неопределенных пока элементов  $v_{sj}$  в направляющих матрицах.

**Свойство А.** Разобьем куб  $K^n$  плоскостями  $x_j = 1/2$  при  $j = 1, 2, \dots, n$  на  $t = 2^n$  октантов, которые будем считать двоичными параллелепипедами. Разобьем последовательность точек  $P_0, P_1, \dots, P_t, \dots$  на двоичные участки, длина которых равна  $t$ :

$$P_0, \dots, P_{t-1}; P_t, \dots, P_{2t-1}; P_{2t}, \dots, P_{3t-1}; \dots$$

Если в любом из этих участков все точки принадлежат различным октантам, то мы говорим, что последовательность обладает свойством А.

**Теорема 7.** Последовательность  $Q_0, Q_1, \dots, Q_t, \dots$ , построенная в теореме 6, обладает свойством А тогда и только тогда, когда определитель размером  $n \times n$ , составленный из первых столбцов всех направляющих матриц, равен  $1 \pmod{2}$ .

Существование  $\text{ЛП}_\tau$ -последовательностей, обладающих свойством А, в любом  $K^n$  доказано в [34]. Недавно И. Б. Матусов доказал, что  $\text{ЛП}_\tau$ -последовательность, обладающую свойством А, можно построить, используя все моноциклические операторы низших порядков подряд.

В табл. Д.1, приведенной ниже, использованы все моноциклические операторы подряд, а направляющие числа выбраны так, что свойство  $A$  выполняется при любом  $n \leq 16$ .

Свойство  $A'$ . В кубе  $K^n$  проведем  $3n$  плоскостей  $x_j = 1/4$ ,  $x_j = 1/2$ ,  $x_j = 3/4$  при  $j = 1, 2, \dots, n$ . Они разобьют  $K^n$  на  $t' = 4^n$  кубиков, которые мы также будем считать двоичными параллелепипедами. Разобьем последовательность  $P_0, P_1, \dots, P_i, \dots$  на двоичные участки, длина которых равна  $t'$ :

$$P_0, \dots, P_{t'-1}; P_{t'}, \dots, P_{2t'-1}; P_{2t'}, \dots, P_{3t'-1}; \dots$$

Если в любом из этих участков все точки принадлежат различным кубикам, то мы говорим, что последовательность обладает свойством  $A'$ .

Свойство  $A'$  также исследовано в статье [34]. Мы отметим только, что направляющие числа, приведенные ниже в табл. Д.1, выбраны так, что свойство  $A'$  выполняется при каждом  $n \leq 6$ .

Можно ли, используя все моноциклические операторы низших порядков подряд, выбрать направляющие матрицы так, чтобы при каждом  $n$  были выполнены и свойство  $A$ , и свойство  $A'$  — неизвестно.

Свойство  $A$  в какой-то мере гарантирует разумное расположение точек  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{N-1}$  при  $N < 2^n$ , так как каждая следующая точка попадает в один из свободных октантов. Более того, при  $N = 2^{n-1}$  можно доказать, что половина точек расположена в области  $x_j < 1/2$ , а другая половина — в области  $x_j \geq 1/2$ , каково бы ни было  $j = 1, 2, \dots, n$ .

## Д.5. Вычисление интегралов

Точки ЛП $_{\tau}$ -последовательностей используются в качестве узлов кубатурных формул для вычисления интегралов по  $K^n$ . В некоторых случаях такой способ вычисления интегралов обеспечивает наилучший порядок сходимости. Мы ограничимся минимальными сведениями из этой области. При этом будем обозначать точку  $(x_1, \dots, x_n) \equiv P$  и  $dx_1 \dots dx_n \equiv dP$ .

Предположим, что требуется вычислить интеграл

$$I = \int_{K^n} f(P) dP.$$

**Теорема 8.** Если последовательность  $P_1, \dots, P_i, \dots$  равномерно распределена в  $K^n$ , то для любой ограниченной интегрируемой по Риману функции  $f(P)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(P_i) = I.$$

Рассмотрим теперь класс функций  $W_1(C)$ , непрерывных в  $K^n$  и имеющих кусочно непрерывные частные производные, содержащие не более одного дифференцирования по каждому переменному, которые по абсолютной величине не превосходят  $C$ .

Более подробно, в определении класса функций  $W_1(C)$  входят все производные вида  $\partial f / \partial x_j$ , все производные вида  $\partial^2 f / \partial x_j \partial x_k$  при  $j \neq k$  и т. д. до самой старшей среди них  $\partial^n f / \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n$  включительно. И все эти частные производные по абсолютной величине не превосходят  $C$ .

**Теорема 9.** Если  $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$  — ЛП $_{\tau}$ -последовательность в  $K^n$ , то при  $N = 2^v$  и  $v \rightarrow \infty$

$$\sup_{f \in W_1(C)} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(Q_i) - I \right| = O(N^{-1} \ln^{n-1} N).$$

В статье [20] доказано, что этот порядок сходимости оптимальный для класса  $W_1(C)$ .

Примеры вычисления интегралов высокой кратности при помощи ЛП $_{\tau}$ -последовательностей имеются в [30, 38, 39].

**Вычисление несобственных интегралов [28, 29].** Предположим, что 1° функция  $f(P)$  и все ее частные производные, входящие в определение класса  $W_1(C)$ , непрерывны при  $0 < x_j \leq 1$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ; 2° при  $x_1 \dots x_n \rightarrow 0$  функция имеет интегрируемую особенность вида

$$f(P) \sim x_1^{-\beta_1} \dots x_n^{-\beta_n}.$$

**Теорема 10.** Если  $Q_0, Q_1, \dots, Q_i, \dots$  — ЛП $_{\tau}$ -последовательность, построенная согласно теореме 6, то для любой функции  $f(P)$ , удовлетворяющей требованиям 1° и 2°,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(Q_i) = I.$$

## Д.6. Некоторые другие свойства

**Отлично распределенные последовательности.** Наряду с равномерно распределенными последовательностями рассматривают также гораздо более узкий класс последовательностей, который называют отлично распределенными (well-distributed [22]). Чтобы определить такие последовательности, необходимо наряду с исходной последовательностью  $P_1, \dots, P_i, \dots$  рассмотреть всевозможные «остаточные» последовательности вида  $P_{k+1}, \dots, P_{k+i}, \dots$ . Пусть  $S_{N,k}(\Pi)$  — количество точек с номерами  $k+1 \leq i \leq k+N$ , принадлежащих  $\Pi$  (определение  $\Pi$  см. раздел 1.1).

**О п р е д е л е н и е.** Последовательность  $P_1, \dots, \dots, P_i, \dots$  называется *отлично распределенной*, если для любого  $\Pi$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_{N,k}(\Pi)}{N} = V_{\Pi}$$

равномерно относительно  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Если в качестве  $P_i$  выбирать независимые случайные точки, равномерно распределенные в  $K^n$ , то с вероятностью 1 последовательность  $P_1, \dots, P_i, \dots$  будет р.р. Но вероятность того, что последовательность эта окажется отлично распределенной, равна 0.

**Т е о р е м а 11** [35]. *Все  $\mathbb{L}\Pi_{\tau}$ -последовательности отлично распределены.*

**Корреляционные свойства  $\mathbb{L}\Pi_{\tau}$ -последовательностей.** В алгоритмах Монте-Карло с конструктивной размерностью  $n$  можно использовать точки  $\mathbb{L}\Pi_{\tau}$ -последовательности  $Q_i = (q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$  вместо случайных точек  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , где  $\gamma_j$  — независимые случайные числа [15, 32]. При этом вместо сходимости по вероятности со скоростью  $1/\sqrt{N}$  гарантируется сходимость в классическом смысле, иногда со скоростью  $1/N^{1-\varepsilon}$ , где  $\varepsilon > 0$  как угодно мало.

В таких расчетах роль независимых случайных чисел  $\gamma_j$  и  $\gamma_l$  играют последовательности координат  $q_{1,j}, \dots, \dots, q_{i,j}, \dots$  и  $q_{1,l}, \dots, q_{i,l}, \dots$ . Вместо соотношения

$$r(\gamma_j, \gamma_l) = 0$$

(определение коэффициента корреляции приведено в 4.2)



имеем соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left( q_{i,j} - \frac{1}{2} \right) \left( q_{i,l} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Скорость сходимости в последней формуле исследовалась эмпирически Б. Г. Ситниковым и А. П. Шагун. На основании этих экспериментов в [38] была высказана гипотеза, что при  $N = 2^v$

$$N \sum_{i=0}^{N-1} \left( q_{i,j} - \frac{1}{2} \right) \left( q_{i,l} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \Theta_{j,l}(v),$$

где все  $\Theta_{j,l}(v)$  — целые неотрицательные числа.

Несмотря на то, что многочисленные расчеты подтверждают эту гипотезу, а для  $\Theta_{1,2}(v)$  в [38] даже подобрана аналитическая формула, строгого доказательства (или опровержения) этой гипотезы нет.

**Бесконечномерные ЛП $_{\tau}$ -последовательности.** Так как количество моноциклических операторов бесконечно, то теорема 6 позволяет рассматривать бесконечномерные точки

$$X_i = (p(i), p_2(i), \dots, p_n(i), \dots),$$

проекции которых на  $K^n$  при каждом  $n$  представляют собой ЛП $_{\tau}$ -последовательности в  $K^n$ . Изучению последовательностей точек  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$  посвящена работа [30]. С помощью таких точек можно вычислять бесконечномерные интегралы, решать интегральные уравнения, моделировать цепи Маркова (см. также [31, 33]). Исследованию бесконечномерных равномерно распределенных последовательностей посвящена также статья [21].

## Д.7. Формулы расчета

**Таблица числителей.** В табл. Д.1 приведены числители  $r_j^{(l)}$  направляющих чисел при  $1 \leq j \leq 51$ ,  $1 \leq l \leq 20$ . Хотя в расчетах точек  $Q_i$  удобнее использовать сами направляющие числа

$$V_j^{(l)} = r_j^{(l)} 2^{-l},$$

мы табулировали числители, чтобы уменьшить объем таблицы. По таблице Д.1 можно вычислять точки  $Q_i$  с номерами  $0 \leq i < 2^{20}$  в кубе  $K^n$  размерности  $n \leq 51$ .

Если требуются точки размерности  $n \ll 51$ , то следует использовать лишь первые  $n$  строк таблицы; если количество используемых точек заранее ограничено  $i < 2^l M$ , где  $l_M < 20$ , то можно ограничиться первыми  $l_M$  столбцами этой таблицы.

**Исходный алгоритм.** Перед началом расчета надо заменить таблицу  $r_j^{(l)}$  таблицей  $V_j^{(l)}$ .

Далее, если в двоичной системе номер точки  $i$  записывается в форме  $i = e_m \dots e_2 e_1$ , то все декартовы координаты точки  $Q_i = (q_{i,1}, \dots, q_{i,n})$  вычисляются по единой формуле ( $j = 1, 2, \dots, n$ ):

$$q_{i,j} = e_1 V_j^{(1)} * e_2 V_j^{(2)} * \dots * e_m V_j^{(m)}, \quad (1)$$

где  $*$  означает поразрядное сложение по модулю два в двоичной системе (операция «исключающее ИЛИ»). Подробнее о ней сказано в разделе Д.3.

В формуле (1) умножать  $e_s$  на  $V_j^{(s)}$  не надо: если  $e_s = 1$ , то соответствующее значение  $V_j^{(s)}$  войдет в (1), а если  $e_s = 0$ , то соответствующее  $V_j^{(s)}$  надо пропустить. Таким образом, для расчета по формуле (1) нужны только логические операции.

Блок-схема программы для такого расчета имеется в [27], программа для ЭВМ типа М-20 приведена в [16].

**Арифметический алгоритм.** Для реализации формулы (1) удобно использовать машинные команды. Если такой возможности нет или использование процедур в машинном коде нежелательно, то можно прибегнуть к расчету непосредственно по таблице  $r_j^{(l)}$ . Для этого по заданному номеру  $i$  вычисляем

$$m = 1 + \lceil \ln i / \ln 2 \rceil,$$

а затем для  $j = 1, 2, \dots, n$

$$q_{i,j} = \sum_{k=1}^m 2^{-k+1} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{l=k}^m [2 \{i2^{-l}\}] [2 \{r_j^{(l)} 2^{k-1-l}\}] \right\}.$$

В последних двух формулах  $[z]$  — целая часть, а  $\{z\}$  — дробная часть числа  $z$ .

Расчет по арифметическому алгоритму гораздо медленнее, чем расчет по формуле (1), но если количество используемых в расчете точек  $Q_i$  не превосходит  $10^4$ , то он вполне приемлем. Составленная по этому алгоритму подпро-

грамма на языке ФОРТРАН, опубликованная в [37] и [36], использовалась во многих расчетах.

Подпрограмма на языке ФОРТРАН.

Целые числа  $NR (J, L)$  берутся из табл. Д.1.  $I$  — номер точки,  $N$  — ее размерность. Используются две встроенные функции, имеющиеся во всех версиях ФОРТРАНА:  $ALOG (X)$  — натуральный логарифм  $X$  и  $INT (X)$  — целая часть  $X$ , а также функция, описанная в программе,  $D (X) = X - INT (X)$ . Значение  $\ln 2$  принято равным 0,693147. Выходные данные — массив  $Q$ .

```

SUBROUTINE LPTAU (NR, I, N, Q)
DIMENSION Q(N), NR (N, 20)
D (X) = X - INT (X)
A = I
M = 1 + INT (ALOG (A)/0.693147)
DO 1 J = 1, N
S = 0
DO 2 K = 1, M
NS = 0
DO 3 L = K, M
B = NR (J, L)
3 NS = NS +
+ INT (2*D (A/2**L))*INT (2*D (B/2** (L + 1 - K)))
2 S = S + D (0.5*NS)/2**(K - 1)
1 Q (J) = S
RETURN
END

```

Сверхбыстрый алгоритм. В статье [19] предложен способ сверхбыстрого расчета ЛП $_{\tau}$ -последовательностей. Для этого порядок следования точек  $Q_i$  меняется так, чтобы каждая следующая точка  $Q'_i$  легко вычислялась по предыдущей точке  $Q'_{i-1}$  и чтобы при этом двоичные участки новой последовательности  $Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_i, \dots$  совпадали с двоичными участками последовательности  $Q_0, Q_1, \dots, \dots, Q_i, \dots$ . Последнее условие гарантирует сохранение всех основных и дополнительных свойств равномерности.

Пусть  $\Gamma (i)$  — так называемый код Грея, соответствующий номеру  $i$ . По определению

$$\Gamma (i) = i * [i/2],$$

где  $[z]$  — целая часть  $z$ .

Например,  $\Gamma(3) = 2$ , так как в двоичной системе  $i = 11$ ,  $[i/2] = 1$ ,  $i * [i/2] = 10$ ; или  $\Gamma(10) = 15$ , так как  $i = 1010$ ,  $[i/2] = 101$ ,  $i * [i/2] = 1111$ .

Два соседних кода  $\Gamma(i)$  и  $\Gamma(i-1)$  всегда различаются в одном и только в одном разряде  $l = l(i)$ , номер которого можно вычислить по формуле

$$l = 1 + \log_2 [\Gamma(i) * \Gamma(i-1)] \quad (2)$$

Поэтому, полагая  $Q'_i = Q_{\Gamma(i)}$ , получаем для расчета  $Q'_i$  следующий простой алгоритм:

- 1°.  $q'_{0,1} = \dots = q'_{0,n} = 0$ ;
- 2°.  $q'_{i,j} = q'_{i-1,j} * V_j^{(l)}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Так как вычисление по последней формуле и по формуле (2) может быть осуществлено при помощи одних логических операций, то при больших  $n$  этот алгоритм оказывается быстрее, чем стандартные алгоритмы получения псевдослучайных чисел, в которых для получения  $n$  чисел надо затратить  $n$  умножений.

**Сверхбыстрая подпрограмма на языке ФОРТРАН.** Необходимо сразу же подчеркнуть, что расчет по этой программе возможен только в том случае, когда транслятор позволяет использовать простейшие логические функции, описанные в конце параграфа. Расчеты [38] выполнены с помощью транслятора *FOREX*, составленного Ю. М. Баяковским в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. Составитель подпрограммы — Ю. Л. Левитан.

а) **Вспомогательная подпрограмма**, предназначенная для перехода от  $r_j^l$  к  $V_j^l$ .

Будем считать известным двумерный массив  $NR(JM, LM)$ , содержащий таблицу числителей Д.1 или ее часть. Размер массива должен быть указан: например, *DIMENSION NR(51, 20)*, если  $JM = 51$ ,  $LM = 20$ .

Программа *NRIV* вычисляет таблицу направляющих чисел  $IV$ , исходя из таблицы числителей  $NR$ .

*SUBROUTINE NRIV(NR, IV, JM, LM)*  
*DIMENSION NR(JM, LM), IV(JM, LM)*

```

DO 1 L = 1, LM
LL = L - 40
DO 1 J = 1, JM
1 IV (J, L) = ISL0 (NR (J, L), LL)
RETURN
END

```

б) Подпрограмма для расчета точки  $Q_i$  по  $Q_{i-1}$ .

Все координаты нулевой точки равны 0. Величина  $NG$  полагается равной 0. Это необходимо сделать в главной программе.

После этого в цикле по  $I$  можно обращаться к подпрограмме  $LPTAU$ , которая вычисляет координаты  $I$ -й точки  $Q_i$ . Эти координаты заносятся в массив  $Q$ , и их нужно сразу использовать, так как при следующем значении  $I$  туда же заносятся координаты следующей точки.

В подпрограмме вычисляются  $N$  компонент  $I$ -й точки ЛП $_{\tau}$ -последовательности  $Q_i$ .

```

SUBROUTINE LPTAU (IV, NG, I, N, Q, IQ)
DIMENSION Q(51), IV (51, 20), IQ (51)
NA = 32 000 000 000 000 00 B
NB = 64 000 000 000 000 00 B
NC = 17 777 777 777 777 B
ND = 40 000 000 000 000 00 B
NT = 100 B
NGN = IEOR (I, ISL0 (I, 1), NA)
A = IEOR (NG, NGN, NB)
L = IOR (ISL0 (A, 41) - NT, NB)
DO 1 J = 1, N
IQ (J) = IEOR (IAND (IQ (J), NC), IV (J, L))
1 Q (J) = IOR (IQ (J), ND)
NG = NGN
RETURN
END

```

в) И использованные логические функции. В приведенной программе использованы четыре логические функции:  $ISL0$ ,  $IAND$ ,  $IOR$ ,  $IEOR$ .

1°. Функция  $ISL0 (X, I)$  — сдвиг кода на количество разрядов, равное  $|I|$ . Если  $I < 0$ , то сдвиг влево; если  $I > 0$ , то сдвиг вправо.

2°. Функция  $IAND (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$  — логическая операция «И», выполняемая поразрядно.

3°. Функция  $IOR (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$  — логическая операция «ИЛИ», выполняемая поразрядно.

4°. Функция  $IEOR (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 * a_2 * \dots * a_n$  — логическая операция «Исключающее ИЛИ», выполняемая поразрядно.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

### К главам 1—5

1. *Артоболовский И. И.* Успехи советской школы теории машин и механизмов. М.: Знание, 1977.
2. *Артоболовский И. И., Сергеев В. И., Соболев И. М., Статников Р. Б.* Об использовании ЭВМ при постановке задач оптимального проектирования машин. Докл. АН СССР, 1977, 233, № 4, с. 567—570.
3. *Bartel D. L., Marks R. W.* The optimum design of mechanical systems with competing design objectives.— J. of Engineering for Industry, Trans. ASME, 1974, N 2, p. 171—178.
4. *Бенайюн Р., Ларичев О. И., Монгольфы Ж., Терни Ж.* Линейное программирование с многими критериями. Метод ограниченной.— Автоматика и телемеханика, 1971, № 8, с. 108—115.
5. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
6. *Гринкевич В. К., Зинюков П. И., Статников Р. Б., Сухоруков Л. В., Фридман С. И.* Определение оптимальных параметров механизма по нескольким локальным критериям.— В кн.: Методы создания машин в малопумном исполнении. М.: Наука, 1978, с. 44—49.
7. *Гуткин Л. С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств. М.: Сов. радио, 1975.
8. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
9. *Крюков Б. Н., Литвин Л. М.* Динамика резонансных вибромашии с нелинейными основными и приводными упругими связями.— Вибротехника, 1973, № 3 (20).
10. *Оверной В. М.* Принятие решений. Обзор.— Автоматика и телемеханика, 1971, № 11, с. 106—121.
11. *Подиковский В. В.* Методы многокритериальной оптимизации. М.: изд. ВИА им. Ф. Э. Дзержинского, 1971, вып. 1.
12. *Растринин Л. А.* Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974.
13. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
14. *Соболь И. М.* Многомерные интегралы и метод Монте-Карло.— Докл. АН СССР, 1957, 114, № 4, с. 706—709.
15. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
16. *Соболь И. М., Статников Р. Б.* ЛП-поиск и задачи оптимального конструирования.— В кн.: Проблемы случайного поиска. Рига: Зинатне, 1972, № 1, с. 117—135.
17. *Соболь И. М., Статников Р. Б.* Постановка некоторых задач оптимального проектирования при помощи ЭВМ. Препринт № 24. М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, 1977.
18. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.

## К Дополнению

19. Антонов И. А., Салеев В. М. Экономичный способ вычисления ЛП<sub>n</sub>-последовательностей.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, 19, № 1, с. 243—245.
20. Бахвалов Н. С. Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной.— Матем. заметки, 1972, 12, № 6, с. 655—664.
21. Каневский В. А., Лев Г. Ш. Последовательности точек распределенные в бесконечномерном пространстве.— Докл. АН СССР, 1979, 248, № 1, с. 31—33.
22. Kuipers L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences. New-York: J. Wiley, 1974.
23. Niederreiter H. Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numbers.— Bulletin Amer. math. soc., 1978, 84, N 6, s. 957—1041.
24. Соболев И. М. О распределении точек в кубе и сетках интегрирования.— Усп. матем. наук, 1966, 21, № 5, с. 271—272.
25. Соболев И. М. О методе рядов Хаара в теории многомерных квадратур.— В кн.: Междунар. конгресс математиков: Тезисы научн. сообщ. М., 1966, вып. 14, с. 48.
26. Соболев И. М. О распределении точек в кубе и приближенном вычислении интегралов.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 4, с. 784—802.
27. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.
28. Соболев И. М. Вычисление несобственных интегралов при помощи равномерно распределенных последовательностей.— Докл. АН СССР, 1973, 210, № 2, с. 278—281.
29. Соболев И. М. Использование равномерно распределенных последовательностей для приближенного вычисления несобственных интегралов.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложение функционального анализа. Новосибирск: Наука, 1973, с. 62—66.
30. Соболев И. М. Бесконечномерные равномерно распределенные последовательности в вычислительной математике. Препринт № 22. М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, 1974.
31. Соболев И. М. О псевдослучайных числах для построения дискретных цепей Маркова методом Монте-Карло.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 1, с. 36—44.
32. Соболев И. М. Бесконечномерные равномерно распределенные последовательности в алгоритмах Монте-Карло.— В кн.: Методы Монте-Карло в вычисл. матем. и матем. физ. Новосибирск: Наука, 1974, с. 24—31.
33. Соболев И. М. О сходимости бесконечномерных кубатур и моделировании цепей Маркова.— В кн.: Вопр. вычисл. и приклад. матем. Ташкент, 1975, вып. 32, с. 162—167.
34. Соболев И. М. Равномерно распределенные последовательности с дополнительным свойством равномерности.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, 16, № 5, с. 1332—1337.
35. Соболев И. М. О наилучших равномерно распределенных последовательностях.— Усп. матем. наук, 1977, 32, № 2, с. 231—232.
36. Sobol' I. M. On the systematic search in a hypercube. SIAM J. Numer. Analysis, 1979, 16, N 5, p. 790—793.



37. *Соболь И. М., Левитан Ю. Л.* Получение точек, равномерно расположенных в многомерном кубе. Препринт № 40. М.: Ин-т прикладной математики, 1976.
38. *Соболь И. М., Левитан Ю. Л.* Эксперименты по вычислению интегралов высокой кратности.— В кн.: *Вопр. вычисл. и приклад. матем.* Ташкент, 1978, вып. 51, с. 138—145.
39. *Соболь И. М., Розин С. Г., Хомский Л. Х.* О конструктивной размерности алгоритмов Монте-Карло. — В кн.: *Методы Монте-Карло в вычислит. матем. и матем. физ.* Новосибирск, 1976, с. 16—23.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Адаменко А. И., Кисленко В. И., Ракицкий Л. Б., Солдатова Г. В., Оноприч В. П.* Задачи и методы оптимизации серий асинхронных машин малой мощности.— В кн.: *Проблемы технической электродинамики.* Киев: Наукова думка, 1975, вып. 52, с. 3—9.
- Андрюшкявичюс А. И., Рагульскис К. М., Шульнюс П. П.* Оптимальный синтез ЛПМ с бесконечным кольцом магнитной ленты по амплитуде переходного процесса при старт-стопных режимах механизма.— *Вибротехника*, 1978, № 2(23), с. 27—32.
- Артоболевский И. И., Бобровицкий Ю. И., Генкин М. Д.* Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.
- Артоболевский И. И., Генкин М. Д., Гринкевич В. К., Соболь И. М., Статников Р. Б.* Оптимизация в теории машин ЛП-поиск.— Докл. АН СССР, 1971, 200, № 6, с. 1287—1290.
- Артоболевский И. И., Генкин М. Д., Крейнин Г. В., Сергеев В. И., Статников Р. Б.* Поиск компромиссного решения при выборе параметров машин.— Докл. АН СССР, 1974, 219, № 1, с. 53—56.
- Артоболевский И. И., Емельянов С. В., Сергеев В. И., Статников Р. Б., Шестаков О. А.* Интерактивный метод решения задачи оптимального проектирования машины.— Докл. АН СССР, 1977, 237, № 4, с. 793—795.
- Артоболевский И. И., Крейнин Г. В., Павлов Б. И.* К созданию системы автоматизированного поиска параметров машин.— *Машиноведение*, 1977, № 5, с. 18—27.
- Артоболевский И. И., Крейнин Г. В., Пронина М. А., Сергеев В. И., Статников Р. Б.* Выбор оптимальных параметров машин с помощью многомерных таблиц испытаний.— *Машиноведение*, 1973, № 4, с. 3—14.
- Артоболевский И. И., Руссман И. Б., Сергеев В. И., Статников Р. Б.* О некоторых способах выбора интегрального критерия качества в задачах оптимального проектирования машин.— *Машиноведение*, 1978, № 2, с. 3—10.
- Афонин А. А., Бондаренко В. И., Ракицкий Л. Б., Химюк И. В.* Оптимизация электромеханических устройств бегущей волны.— В кн.: *Проблемы технической электродинамики.* Киев: Наукова думка, 1975, вып. 52, с. 102—104.
- Бахит В. А., Глазов Ю. Е., Зарх Я. М., Тайнер С. Я.* К вопросу о выборе передаточной характеристики активного виброгасящего устройства.— В кн.: *Методы создания машин в маломощном исполнении.* М.: Наука, 1978, с. 94—99.
- Бахит В. А., Руссман И. Б., Статников Р. Б.* Выбор оптималь-

- ных параметров машин на основе интегрального критерия качества.— В кн.: Проектирование механизмов и динамика машин. М., 1977, вып. 11, с. 183—187.
- Генкин М. Д., Елезов В. Г., Статников Р. Б., Яблонский В. В.* Выбор оптимальных параметров активного виброизолятора с электромеханической обратной связью по относительному перемещению и суммарной силе.— В кн.: Виброакустические процессы в машинах и присоединенных конструкциях. М.: Наука, 1974, с. 76—83.
- Генкин М. Д., Зинюков П. И., Статников Р. Б.* Критерии качества и определение параметров малошумных механизмов.— В кн.: Методы создания машин в малошумном исполнении. М.: Наука, 1978, с. 38—44.
- Генкин М. Д., Русман И. Б., Статников Р. Б., Фридман С. И.* Применение методов классификации и интегральных критериев для анализа таблиц испытаний.— В кн.: Оценка характеристик качества сложных систем и системный анализ: Тез. докл. VIII межведомственного (I Всесоюзного) научно-технического семинара. М., 1978, с. 75—78.
- Гринкевич В. К., Медник А. И., Сергеев В. И., Статников Р. Б.* О выборе оптимальных параметров машин в многокритериальных задачах.— В кн.: Моделирование задач машиноведения на ЭВМ. М.: Наука, 1976, с. 17—26.
- Гринкевич В. К., Соболев И. М., Статников Р. Б.* Определение оптимальных динамических моделей в пространстве параметров.— Механика твердого тела, 1971, № 4, с. 52—54.
- Докукин А. В., Красников Ю. Д., Хургин З. Я.* Статистическая динамика горных машин. М.: Машиностроение, 1978.
- Захаров В. В., Кочегуров В. А., Саблин Н. И.* Оптимизация эксплуатации ускорителей заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1977.
- Захаров В. В., Смирнова В. И.* Экспериментальное сравнение некоторых псевдослучайных последовательностей.— В кн.: Проблемы случайного поиска. Рига: Зинатне, 1976, вып. 5, с. 185—190.
- Зейтман М. Ф., Статников Р. Б.* Поиск статистическими методами оптимальных параметров гибкого зонтичного ротора высокоскоростной ультрацентрифуги с двухступенчатой упругой подвеской.— В кн.: Колебания и уравнивание роторов. М.: Наука, 1973, с. 43—47.
- Карамзин Ю. Н., Сухорукова А. К., Чернега П. Н.* Задачи оптимизации в когерентной нелинейной оптике.— Тр. междунар. школы по нелинейной оптике и голографии. Прага, 1980, с. 172.
- Матусов И. Б., Статников Р. Б.* Принятие оптимальных решений на основе таблиц испытаний.— В кн.: Динамические характеристики и колебания элементов энергетического оборудования. М.: Наука, 1980, с. 21—29.
- Старостенко В. И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978.
- Sergeyev V. I., Sobol I. M., Statnikov R. B.* Computer aided statement of engineering optimum design problems/Proc. of the fifth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms. Montreal, 1979, vol. 2, p. 871—874.
- Соболев И. М., Статников Р. Б., Овчинникова Н. Ф.* О локализа-

- ции характеристических чисел матрицы.— *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1973, 13, № 6, с. 1581—1583.
- Соболь И. М., Статников Р. Б., Пронина М. А.* Испытание ЛП-поиска на некоторых тестовых функциях.— В кн.: *Проблемы случайного поиска*. Рига: Зинатне, 1973, № 2, с. 213—217.
- Статников Р. Б.* Выбор параметров проектируемых машин.— В кн.: *Динамика машин и синтез механизмов/Тр. ВЗМИ*, 1975, 32, с. 266—272.
- Статников Р. Б.* Решение многокритериальных задач проектирования машин на основе исследования пространства параметров.— В кн.: *Многокритериальные задачи принятия решений*. М.: Машиностроение, 1978, с. 148—155.
- Статников Р. Б., Зейтман М. Ф.* Оптимизация динамических свойств гибких вертикальных роторов статистическими методами.— В кн.: *Теория и практика балансировочной техники*. М.: Машиностроение, 1973, с. 212—219.
- Статников Р. Б., Русман И. Б., Фридман С. И.* О некоторых методах принятия решения в задачах машиноведения.— В кн.: *Динамические характеристики и колебания элементов энергетического оборудования*. М.: Наука, 1980, с. 3—12.
- Статников Р. Б., Фейгин Г. Л.* О коррекции параметрических ограничений в задаче улучшения оптимальных решений.— В кн.: *Исследование динамических систем на ЭВМ*. М.: Наука, 1980, с. 47—53.
- Статников Р. Б., Фридман С. И., Шестаков О. А.* Человеко-машинная процедура выбора оптимальных параметров машин.— В кн.: *Проектирование механизмов и динамика машин*. М., 1977, 11, с. 174—182.
- Статников Р. Б., Шестаков О. А.* Об одной процедуре принятия решения в задаче оптимального проектирования.— В кн.: *Проектирование механизмов и динамика машин: Межведомственный сборник научных трудов*. М., 1977, 10, с. 116—124.
- Сушкин В. А.* Постановка задачи оптимального проектирования системы привода исполнительного органа стругового агрегата.— В кн.: *Механизация горных работ на угольных шахтах*. Тула: Тульский политехнический ин-т, 1979, с. 93—99.
- Сушкин В. А., Мерцалов А. Н.* Распределение моделей по вероятностным зонам в диалоговой системе оптимизации выемочных машин.— В кн.: *Механизация горных работ на угольных шахтах*. Тула: Тульский политехнический ин-т, 1980, с. 28—39.
- Шатялис В.* Исследование эффективности ЛП-поиска на классе многоэкстремальных задач.— В кн.: *Теория оптимальных решений*, Вильнюс, 1976, вып. 2, с. 59—65.

## УКАЗАТЕЛЬ

- Выделение зависимых критериев 60  
 Вычислительный эксперимент 6
- Двоичный  
 отрезок 81  
 параллелепипед 82  
 участок 83
- Диалоговый алгоритм 21  
 автоматизированный 54  
 схема 25
- Допустимая точка 20  
 ДР-последовательность 89
- Интеграл 93  
 несобственный 94
- Класс функций  $W_1(C)$  94  
 Код Грея 98  
 Компромиссная кривая 45  
 аналитическая 49  
 приближенная 47
- Корреляционные свойства ЛП-последовательностей 95  
 Коэффициент корреляции 56  
 критериев 57  
 вычисление 59
- Критериальные ограничения 20  
 Критерии линейно-зависимые 56
- Критерий качества 19  
 нормированный 27  
 решающий 36
- Кубическая решетка 8
- Логические функции 100  
 ЛП-поиск 13, 38  
 ЛП<sub>τ</sub>-последовательность 83  
 бесконечномерная 96  
 неравномерность 87  
 отклонение 87
- Матрица критериев 23  
 Метод  
 Монте-Карло 16, 95  
 ограничений 56
- отбора 15  
 последовательных уступок 56
- Минимальное свойство эффективных точек 40  
 Многомерный куб  $K^n$  8  
 Множество  
 возможных точек  $\tilde{D}$  40  
 допустимых точек  $D$  20  
 паретовских точек  $\tilde{E}$  40  
 эффективных точек  $E$  39
- Модернизация исходной модели 70
- Моноциклический оператор 90  
 Монте-Карло алгоритм 95  
 М-последовательность 90
- Направляющая матрица 89  
 Направляющие числа 89  
 Неравномерность 86  
 кубической решетки 88  
 ЛП<sub>τ</sub>-последовательности 87
- Операция \* 89  
 Оптимальные параметры 36  
 Отклонение 83  
 кубической решетки 88  
 ЛП<sub>τ</sub>-последовательности 87  
 П<sub>τ</sub>-сетки 88
- Отлично распределенная последовательность точек 95
- Параметрические ограничения 17  
 Паретовская точка 40  
 Подпрограмма 98, 100  
 Поиск  
 в многомерном кубе 8  
 в произвольной ограниченной области 14  
 случайный 12
- После  $GF(2)$  90  
 Поразрядное сложение по модулю два в двоичной системе 89

- Последовательность  
ван дер Корпута 90  
двоично-рационального  
типа 89  
 $D_N$  24  
 $ЛП_{\tau}$  83  
отлично распределенная  
95  
равномерно распределенная  
10  
Приближенная компромиссная  
кривая 47  
Приближенно паретовские точки  
46  
эффективные точки 42  
Пробные точки 23  
Простейший поиск 12  
Пространство  
критериев 40  
параметров 17  
Псевдокритерии 26  
 $П_{\tau}$ -сетка 82  
Равномерное распределение  
точек  
в кубе 10  
в произвольной  
ограниченной области 14  
Редуктор 28  
Резонансная виброплощадка 66  
Ресурс точки 63  
относительный 65  
Решающий критерий 36  
Свойство  
 $A$  92  
 $A'$  93  
Случайный поиск 12  
Случайные числа 95  
Специальная  $\varepsilon$ -окрестность 43  
Сходимость 43, 47  
Таблица испытаний 21, 27  
время расчета 24  
Таблица числителей направляющих чисел 84  
Транслятор FOREX 99  
Усеченная таблица испытаний  
27  
ФОРТРАН 98, 99  
Функциональные ограничения  
18  
Цепи Маркова 96  
Эффективная точка 38  
Эффективность отбора 16

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие авторов . . . . .	2
Введение . . . . .	5
Глава 1. Систематический поиск в многомерных областях . . . . .	8
1.1. Поиск в многомерном кубе . . . . .	8
1.2. Поиск в произвольной ограниченной области . . . . .	*14
Глава 2. Выбор критериальных ограничений . . . . .	16
2.1. Исходные данные . . . . .	17
2.2. Диалоговый алгоритм . . . . .	21
2.3. Некоторые особенности алгоритма . . . . .	26
2.4. Пример: оптимизация параметров редуктора . . . . .	28
Глава 3. Выбор параметров . . . . .	36
3.1. Один решающий критерий . . . . .	36
3.2. Несколько решающих критериев . . . . .	38
3.3. Компромиссная кривая . . . . .	45
3.4. Примеры расчета приближенных компромиссных кривых . . . . .	49
Глава 4. Некоторые возможности метода . . . . .	54
4.1. Автоматизированный вариант диалога . . . . .	54
4.2. Исследование зависимости критериев . . . . .	56
4.3. О возможностях улучшения оптимального решения . . . . .	62
Глава 5. Пример: оптимальное проектирование резонансной виброплощадки . . . . .	66
5.1. Исходные данные . . . . .	67
5.2. Первая задача: попытка модернизации исходной модели . . . . .	70
5.3. Вторая задача: эскизное проектирование новой модели . . . . .	79

<b>Дополнение. Некоторые свойства <math>ЛП_{\tau}</math>-последовательностей</b> . . . . .	<b>81</b>
Д.1. Геометрическое определение . . . . .	81
Д.2. Количественные оценки равномерности распределения . . . . .	83
Д.3. Алгебраическая теория . . . . .	89
Д.4. О дополнительных свойствах равномерности . . . . .	92
Д.5. Вычисление интегралов . . . . .	93
Д.6. Некоторые другие свойства . . . . .	95
Д.7. Формулы расчета . . . . .	96
<b>Цитированная литература</b> . . . . .	<b>102</b>
К главам 1—5 . . . . .	102
К Дополнению . . . . .	103
<b>Дополнительная литература</b> . . . . .	<b>104</b>
<b>Указатель</b> . . . . .	<b>107</b>

**Илья Меерович Соболев**  
**Роман Бенционович Статников**

**ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
В ЗАДАЧАХ СО МНОГИМИ КРИТЕРИЯМИ**

Утверждено к печати  
Ордена Ленина Институтом прикладной математики  
им. М. В. Келдыша  
Академии наук СССР

Редактор издательства И. М. Мататова  
Художественный редактор Т. П. Поленова  
Технические редакторы А. М. Сатарова, Р. Г. Грузинова  
Корректоры Н. И. Казарина, Л. В. Лукичева

**ИБ № 21136**

Сдано в набор 11.05.81.  
Подписано к печати 05.11.81.  
Т-28212. Формат 84×108<sup>1/32</sup>  
Бумага типографская № 2  
Гарнитура обыкновенная  
Печать высокая  
Усл. печ. л. 5,88. Усл. кр-отт. 6,09 Уч.-изд. л. 5,8  
Тираж 5000 экз. Тип. зак. 548  
Цена 60 коп.

Издательство «Наука»  
117884 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90  
2-я типография издательства «Наука»  
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10



В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКА»  
ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

*Завадский В. Ю.*

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В ВОЛНОВЫХ  
ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ

(Акуст. ин-т им. Н. Н. Андреева)

15 л. 2 р. 30 к.

В книге развит систематический подход к численному решению широкого класса волновых задач акустики — задач излучения, поглощения, дифракции, распространения звуковых волн. Рассмотрены новые методы, алгоритмы, эффективные вычислительные схемы.

Издание рассчитано на научных работников, занимающихся вопросами акустики и изучающих волновые процессы с помощью ЭВМ и методов численного анализа.

---

Адреса магазинов «Академкнига»:

- 480091 *Алма-Ата*, ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»);
- 370005 *Баку*, ул. Джапаридзе, 13;
- 320005 *Днепропетровск*, проспект Гагарина, 24 («Книга — почтой»);
- 734001 *Душанбе*, проспект Ленина, 95 («Книга — почтой»);
- 335009 *Ереван*, ул. Туманяна, 31;
- 664033 *Иркутск*, ул. Лермонтова, 289;
- 252030 *Киев*, ул. Ленина, 42;
- 252030 *Киев*, ул. Пирогова, 2;
- 252142 *Киев*, проспект Вернадского, 79;
- 252030 *Киев*, ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»);
- 277001 *Кишинев*, ул. Пирогова, 28 («Книга — почтой»);
- 343900 *Краматорск* Донецкой обл., ул. Марата, 1;
- 660049 *Красноярск*, проспект Мира, 84;
- 443002 *Куйбышев*, проспект Ленина, 2 («Книга — почтой»);
- 192104 *Ленинград*, Д-120, Литейный проспект, 57;
- 199164 *Ленинград*, Таможенный пер., 2;
- 196034 *Ленинград*, В/О, 9 линия, 16;
- 220012 *Минск*, Ленинский проспект, 72 («Книга — почтой»);
- 103009 *Москва*, ул. Горького, 8;
- 117312 *Москва*, ул. Вавилова, 55/7; и др.

60 коп.

