Династия

Иэн Стюарт

ИСТИНА И КРАСОТА

Всемирная история симметрии

СЕРИЯ Эe | Лl | Еe | Мm | Еe | Нn | Тf | Ыy

Э$_{e}$ Л$_{l}$ Е$_{e}$ М$_{m}$ Е$_{e}$ Н$_{n}$ Т$_{t}$ Ы$_{y}$

elementy.ru

Ian Stewart

WHY BEAUTY IS TRUTH

A History of Symmetry

Династия

Серия основана в 2007 г.

Иэн Стюарт

ИСТИНА И КРАСОТА

Всемирная история симметрии

Перевод с английского
Алексея Семихатова

издательство **астрель**

УДК 51(091)
ББК 22.1г
С88

Публикуется с разрешения издательства PERSEUS BOOKS, INC (США)
и Агентства Александра Корженевского (Россия)

Издание осуществлено при поддержке
Фонда некоммерческих программ Дмитрия Зимина "Династия"

Художественное оформление и макет Андрея Бондаренко

Стюарт, И.

С88 Истина и красота: Всемирная история симметрии / Иэн Стюарт; пер. с англ. А. Семихатова. — М.: Астрель : CORPUS, 2010. — 461, [3] с. — (ЭЛЕМЕНТЫ)

ISBN 978-5-271-27178-6 (ООО "Издательство Астрель")

На протяжении многих веков симметрия оставалась ключевым понятием для художников, архитекторов и музыкантов, однако в XX веке ее глубинный смысл оценили также физики и математики. Именно симметрия сегодня лежит в основе таких фундаментальных физических и космологических теорий, как теория относительности, квантовая механика и теория струн. Начиная с древнего Вавилона и заканчивая самыми передовыми рубежами современной науки Иэн Стюарт, британский математик с мировым именем, прослеживает пути изучения симметрии и открытия ее основополагающих законов. Эксцентричный Джироламо Кардано – игрок и забияка эпохи Возрождения, первым решивший кубическое уравнение, гениальный невротик и революционер-неудачник Эварист Галуа, в одиночку создавший теорию групп, горький пьяница Уильям Гамильтон, нацарпавший свое величайшее открытие на каменной кладке моста, и, конечно же, великий Альберт Эйнштейн – судьбы этих неординарных людей и блестящих ученых служат тем эффектным фоном, на котором разворачивается один из самых захватывающих сюжетов в истории науки.

УДК 51(091)
ББК 22.1г

ISBN 978-5-271-27178-6 (ООО "Издательство Астрель")

© 2007 by Joat Enterprises
© Фонд Дмитрия Зимина "Династия", издание на русском языке, 2010
© А.Семихатов, перевод на русский язык, 2010
© А.Бондаренко, художественное оформление, макет, 2010

Династия

Фонд некоммерческих программ

“Династия”

основан в 2002 году
Дмитрием Борисовичем Зиминым,
почетным президентом компании “Вымпелком”.
Приоритетные направления деятельности Фонда —
развитие фундаментальной науки и образования
в России, популяризация науки и просвещение.
В рамках программы по популяризации науки
Фондом запущено несколько проектов.
В их числе — сайт elementy.ru, ставший одним
из ведущих в русскоязычном Интернете
тематических ресурсов,
а также проект “Библиотека “Династии” —
издание современных научно-популярных книг,
тщательно отобранных экспертами-учеными.
Книга, которую вы держите в руках,
выпущена в рамках этого проекта.
Более подробную информацию о Фонде “Династия”
вы найдете по адресу

www.dynastyfdn.ru.

Оглавление

Предисловие 11

Глава 1. Вавилонские писцы 19

Глава 2. Имя на устах 43

Глава 31. Персидский поэт 64

Глава 4. Ученый игрок 80

Глава 5. Хитрый лис 106

Глава 6. Расстроенный врач и больной гений 122

Глава 7. Революционер-неудачник 153

Глава 8. Посредственный инженер
и трансцендентный профессор 193

Глава 9. Пьяный вандал 212

Глава 10. Несостоявшийся солдат
и хилый книжный червь 246

Глава 11. Служащий из бюро патентов 266

Глава 12. Квантовый квинтет 309

Глава 13. Пятимерный человек 344

Глава 14. Политический журналист 381

Глава 15. Математическая кутерьма 405

Глава 16. Искатели Истины и Красоты 429

Литература 438

Предметно-именной указатель 441

Когда мы сгинем в будущем, как дым,
И снова скорбь людскую ранит грудь,
Ты скажешь поколениям иным:
“В прекрасном — правда, в правде — красота.
Вот знания земного смысл и суть”.

Джон Китс
Ода греческой вазе
(Перевод В. Микушевича)

Предисловие

На календаре 13 мая 1832 года. В рассветной дымке два молодых француза стоят друг против друга с пистолетами в руках. Дуэль — из-за молодой женщины. Выстрел; один из юношей падает смертельно раненным на землю. Ему всего 21 год; перитонит убивает его через два дня, и его хоронят в общей могиле. Одна из наиболее важных идей в истории математики и науки едва не погибает вместе с ним.

Оставшийся в живых дуэлянт так и остался неизвестным; погибший же — Эварист Галуа, политический революционер, одержимый математикой. В полном собрании его работ едва наберется шестьдесят страниц, и тем не менее наследие Галуа произвело революцию в математике. Он изобрел язык, позволяющий описывать симметрии в математических структурах и выводить их следствия.

Сегодня этот язык, известный как "теория групп", используется во всей чистой и прикладной математике, причем отвечает за формирование закономерностей в физическом мире. Симметрия играет центральную роль на передовых рубежах физики, в квантовом мире сверхмалого и релятивистском ми-

ре сверхбольшого. Симметрия может даже проложить дорогу к долгожданной "Теории Всего" — математическому объединению двух ключевых направлений в современной физике. И все это началось с простого вопроса по алгебре — вопроса о решениях математических уравнений, то есть о нахождении "неизвестного" числа на основе нескольких математических подсказок.

Симметрия — это не число и не форма, но специальный вид *преобразований*, то есть некоторый способ "шевелить" объект. Если объект выглядит неизменным после преобразования, то данное преобразование представляет собой симметрию. Например, квадрат выглядит так же, как раньше, если его повернуть на прямой угол.

Эта идея — серьезно расширенная и усовершенствованная — лежит в основе того, как современная наука понимает вселенную и ее происхождение. Теория относительности Альберта Эйнштейна основана на принципе, согласно которому законы физики должны оставаться неизменными во всех точках пространства и с течением времени. Другими словами, законы должны быть симметричны относительно движений в пространстве и течения времени. Квантовая физика говорит нам, что все во вселенной состоит из набора очень маленьких "фундаментальных" частиц. Поведение этих частиц управляется математическими уравнениями — законами природы, и эти законы снова обладают симметриями. Частицу можно математически преобразовать в совсем другие частицы, и эти преобразования также оставляют законы физики неизменными.

Все эти концепции — как и самые последние, относящиеся к рубежам современной физики, — не были бы открыты без глубокого математического понимания симметрии. Такое понимание пришло из чистой математики; роль симметрии в физике проявилась позднее. Чрезвычайно полезные идеи могут возникать из чисто абстрактных рассуждений — нечто вроде то-

го, что физик Юджин Вигнер назвал "непостижимой эффективностью математики в естественных науках". Когда дело касается математики, мы порой получаем на выходе больше, чем вкладывали изначально.

Начиная с писцов древнего Вавилона и заканчивая физиками двадцать первого столетия, "Почему в красоте правда" повествует, как математики наткнулись на концепцию симметрии и как казавшийся бесцельным поиск формул, которых, как выяснилось, вообще не существует, открыл новое окно во вселенную и произвел переворот в естественных науках и математике. Говоря более широко, история симметрии иллюстрирует, как культурное влияние и историческую непрерывность великих идей можно выпукло отразить на фоне как политических, так и научных сдвигов и переворотов.

Первая половина книги может на беглый взгляд показаться вовсе не имеющей отношения к симметрии и лишь вскользь относящейся к реальному физическому миру. Причина в том, что в качестве доминирующей идеи симметрия появилась не так, как можно было бы этого ожидать, — т. е. не через геометрию. Вместо этого глубинно прекрасная и жизненно необходимая концепция симметрии, которой сегодня пользуются математики и физики, пришла к нам из алгебры. Поэтому значительная часть данной книги описывает поиск решений алгебраических уравнений. Может показаться, что это сугубо технический момент, однако в действительности это поистине захватывающее приключение, многие из ключевых участников которого прожили необычные и драматические жизни. Математики — живые люди, пусть даже иногда они теряются за своими абстрактными размышлениями. Некоторые из них могут позволить логике слишком сильно вмешиваться в их жизнь, но мы снова и снова будем убеждаться, что нашим героям не чуждо ничто че-

ловеческое. Мы увидим, как они жили и умирали, прочтем об их любовных историях и дуэлях, жестоких спорах из-за приоритета, сексуальных скандалах, пьянстве и болезнях, а по ходу дела увидим, как пробивали себе дорогу их математические идеи, изменявшие мир.

Начиная с десятого столетия до Рождества Христова и вплоть до кульминации в начале XIX века, связанной с фигурой Галуа, повествование шаг за шагом поведет нас по пути завоевания уравнений — дороге, которая в конце концов зашла в тупик, когда математики попытались победить так называемую "квинтику" — уравнение, в которое входит пятая степень неизвестного. Перестали ли их методы работать из-за того, что в уравнении пятой степени крылись какие-то фундаментальные отличия? Или же можно было найти похожие, но более мощные методы, с помощью которых удалось бы получить формулы для его решения? Застряли ли математики из-за того, что встретили настоящую преграду, или им просто отказала сообразительность?

Важно понимать, что факт существования решений уравнений пятой степени был достоверно установлен. Вопрос состоял в том, всегда ли их можно представить алгебраической формулой. В 1821 году молодой норвежец Нильс Хенрик Абель доказал, что уравнение пятой степени нельзя решить алгебраическими средствами. Его доказательство, однако, было несколько таинственным и довольно непрямым. Он доказал, что никакого общего решения быть не может, но при этом оставалось непонятно *почему*.

Именно Галуа открыл, что невозможность решения уравнения пятой степени вытекает из симметрий этого уравнения. Если эти симметрии проходят, так сказать, тест Галуа (это означает, что они устроены некоторым очень специальным образом, который я не буду объяснять прямо сейчас), то уравнение можно решить с помощью алгебраической формулы. Если симметрии не проходят тест Галуа, то никакой такой формулы нет.

Общее уравнение пятой степени нельзя решить с помощью формулы, *потому что у него неправильные симметрии*.

Это эпического масштаба открытие составляет второй сюжет данной книги — сюжет *группы*, т. е. математического "исчисления симметрий". Галуа перенял древнюю математическую традицию — алгебру — и развил ее, создав новый инструмент для изучения симметрии.

Пусть пока что слова вроде "группы" останутся необъясненным специальным жаргоном. Когда значение таких слов станет важным для нашего рассказа, я приведу все необходимые пояснения. Но иногда нам будет требоваться всего лишь подходящий термин, чтобы иметь ориентиры в нашем рассказе. Если вы наткнетесь на что-то в этом роде — на то, что выглядит как профессиональный жаргон, но непосредственно не объясняется, — отнеситесь к этому просто как к указателю на нечто полезное, чей конкретный смысл пока не играет большой роли. Иногда это значение будет проясняться по мере дальнейшего чтения. "Группа" — как раз такой случай, но мы поймем, что это такое, не раньше, чем дойдем до середины книги.

Наш рассказ также затрагивает вопрос о любопытной значимости в математике некоторых конкретных чисел. Я говорю сейчас не о фундаментальных физических постоянных, а о математических постоянных, таких как π (греческая буква пи). Скорость света, например, могла бы в принципе иметь любое значение, но так случилось, что в нашей вселенной она составляет 300 000 метров в секунду. С другой стороны, число π имеет значение, немногим большее, чем 3,14159, и ничто в мире не может его изменить.

Неразрешимость уравнений пятой степени говорит нам, что, как и π, число 5 также довольно необычно. Это наименьшее число, для которого соответствующая группа симметрии

не проходит тест Галуа. Другой занятный пример — это последовательность чисел 1, 2, 4, 8. Математики открыли серию расширений концепции обычных "вещественных" чисел — сначала строятся комплексные числа, а затем нечто, называемое кватернионами и, далее, октонионами. Они соответственно конструируются из двух экземпляров вещественных чисел, из четырех экземпляров и из восьми экземпляров. Кто же следующий? Естественная догадка — 16, но на самом деле дальнейших разумных расширений числовых систем нет. Это замечательный и глубокий факт. Он говорит нам, что число 8 — особенное, причем не в каком-нибудь поверхностном смысле, а в терминах глубинных структур самой математики.

Кроме чисел 5 и 8 в этой книге появятся некоторые другие, среди которых надо в первую очередь отметить 14, 52, 78, 133 и 248. Эти любопытные числа представляют собой размерности пяти "исключительных групп Ли", и их влияние пронизывает всю математику и значительную часть математической физики. Эти числа — главные действующие лица в математической драме, тогда как другие числа, с первого взгляда мало чем отличающиеся, — всего лишь статисты.

Математики открыли, насколько эти числа особенные, в конце девятнадцатого столетия, когда родилась современная абстрактная алгебра. Существенны не числа сами по себе, но роль, которую они играют в основаниях алгебры. С каждым из этих чисел связан математический объект, называемый группой Ли и обладающий уникальными и замечательными свойствами. Эти группы играют фундаментальную роль в современной физике, они связаны с глубокими структурами пространства, времени и материи.

Это и подводит нас к заключительному сюжету — фундаментальной физике. Физики давно задавались вопросом, почему

пространство имеет три измерения, а время — одно; иными словами, почему мы живем в четырехмерном пространстве–времени? Теория суперструн — самая современная попытка объединить всю физику в единое целое, управляемое набором взаимосогласованных законов — привела физиков к вопросу, может ли пространство–время иметь дополнительные "скрытые" измерения. Идея может показаться бредовой, но у нее имеются неплохие исторические прецеденты. Из всех свойств теории суперструн присутствие дополнительных измерений вызывает, наверное, меньше всего возражений.

Куда больше вопросов вызывает другое свойство — вера в то, что формулировка новой теории пространства и времени зависит главным образом от той *математики*, на которой основаны теория относительности и квантовая теория — два столпа, на которых покоится современная физика. Объединение этих взаимно противоречащих теорий воспринимается как математическое упражнение, а не как процесс, требующий новых революционных экспериментов. Ожидается, что математическая красота сыграет роль необходимого предварительного условия для физической истины. Это допущение может таить в себе опасность. Важно не потерять из виду физический мир, так что, какая бы теория в конце концов ни родилась из современных построений и какой бы замечательной ни была ее математическая родословная, она не освобождается от проверки экспериментами и наблюдениями.

Как бы то ни было, на данный момент имеются веские причины придерживаться математического подхода. Одна такая причина состоит в том, что до тех пор, пока по-настоящему убедительная объединенная теория не сформулирована, никто не знает, какие эксперименты осуществлять. Другая причина в том, что математическая симметрия играет фундаментальную роль как в теории относительности, так и в квантовой теории — в двух областях, демонстрирующих значительный дефицит вза-

имно согласованных позиций, — так что особую ценность приобретают любые, пусть даже совсем небольшие области, в которых такой согласованности удается добиться. Возможные структуры пространства, времени и материи определяются своими симметриями, и некоторые из наиболее важных возможностей могут быть связаны с исключительными структурами в алгебре. Может быть, пространство–время обладает теми свойствами, которые мы наблюдаем, потому что математика допускает к участию в финальном туре только небольшое число специальных форм. Если так, то вполне разумно прислушиваться к тому, что говорит математика.

Почему вселенная выглядит столь математической? На этот вопрос предлагались разнообразные ответы, но ни один из них не кажется мне достаточно убедительным. Отношения симметрии между математическими идеями и физическим миром, равно как и симметрия между нашим чувством красоты и наиболее глубокими и важными математическими формами, представляют собой глубокую и, быть может, неразрешимую загадку. Никто из нас не знает, *почему* красота есть истина, а истина — красота. Все, что нам остается, — это созерцать бесконечное разнообразие их взаимоотношений.

Глава 1
Вавилонские писцы

Через земли, занимаемые сегодня Ираком, протекают две самые знаменитые в мире реки. Им обязаны своим существованием возникшие там замечательные цивилизации. Они берут исток в горах восточной Турции, пересекают сотни миль плодородных равнин и сливаются в единый поток, устье которого выходит в Персидский залив. С юго-запада эта область ограничена сухими пустынными землями Аравийского плато, а с северо-востока — негостеприимными грядами Анти-Тауруса и Загроса. Эти две реки — Тигр и Евфрат, протекающие сегодня практически тем же курсом, что и четыре тысячи лет назад, когда они пересекали древние земли Ассирии, Аккада и Шумера.

Археологам область между Тигром и Евфратом известна как Месопотамия, что по-гречески означает "междуречье". Про нее часто — и с полным правом — говорят как про колыбель цивилизации. Реки приносили воду на равнины, которые из-за этого становились плодородными. Обильная растительность привлекала стада овец и оленей, которые в свою очередь привлекали хищников, а среди них — первобытных охотников.

Равнины Месопотамии были садами Эдема для охотников и собирателей, магнитом для кочевых племен.

Они в действительности оказались настолько плодородны, что образ жизни охотников и собирателей в конце концов уступил место гораздо более эффективной стратегии добывания пищи. Около 9000 года до Р. Х. холмы немного к северу от Плодородного Полумесяца стали свидетелями рождения революционной технологии — сельскохозяйственного производства. Почти немедленно за этим последовали два фундаментальных изменения в развитии человеческого общества: необходимость оставаться на одном и том же месте, чтобы ухаживать за посевами, и возможность прокормить значительное население. Сочетание этих факторов привело к созданию городов, и в Месопотамии археологи все еще находят останки некоторых древнейших в мире великих городов-государств: Ниневии, Нимруда, Ниппура, Урука, Лагаша, Эриду, Ура, а также превосходящего их всех Вавилона — города Висячих Садов и Вавилонской башни. Четыре тысячелетия назад сельскохозяйственная революция в этой части света с неизбежностью привела к возникновению организованного общества со всем набором сопутствующих ловушек — таких как правительство, бюрократия и армия. Между 2000 и 500 годами до Р. Х. на берегах Евфрата процветала цивилизация, которую нестрого именуют "вавилонской". Она берет свое название от главного города, но в широком смысле "вавилонская" культура включает также шумерскую и аккадскую. В действительности первое известное упоминание о Вавилоне найдено на глиняной табличке Саргона Аккадского, датируемой приблизительно 2250 годом до Р. Х., хотя корни вавилонян, весьма вероятно, восходят ко времени еще на две или три тысячи лет более раннему.

Нам очень мало известно об истоках "цивилизации" — слово это буквально означает организацию людей в устойчивые сообщества. Тем не менее похоже, что многими аспектами

нашего сегодняшнего мира мы обязаны древним вавилонянам. В частности, они были специалистами в области астрономии, и есть свидетельства того, что именно к ним восходят двенадцать зодиакальных созвездий и деление окружности на 360 градусов, равно как и часа на шестьдесят минут, а минуты — на шестьдесят секунд. Подобные единицы измерения требовались вавилонянам для занятий астрономией, так что они поневоле стали специалистами и в освященной веками служанке астрономии — математике.

Подобно нам, они изучали математику в школе.

"Что у нас сегодня?" — спросил Набу, положив узелок с завтраком рядом со своим местом. Его мать всегда следила, чтобы на завтрак у него было достаточно хлеба и мяса (как правило, козлятины). Иногда для разнообразия она добавляла еще и сыр.

"Математика, — мрачно отозвался его друг Гамеш. — Жаль, что не право, — мне больше нравится право".

Набу, хорошо успевавший по математике, никогда не мог понять, почему его соученики считали этот предмет таким сложным: "Послушай, Гамеш, разве тебе не скучно переписывать и зазубривать все эти набившие оскомину юридические формулы?"

Гамеш, сильными сторонами которого были упорство и хорошая память, засмеялся: "Нет, это легко. Там не надо думать".

"Именно поэтому мне и скучно, — сказал его друг. — А вот математика — это..."

"Это ужас, — вступил в разговор Хумбаба, только что пришедший в Дом Табличек, как всегда, с опозданием. — Я хочу сказать, Набу, что мне *с этим* делать?" Он указал на свою глиняную табличку с домашним заданием: "Умножаем число само на себя и прибавляем это число, удвоенное. Получаем 24. Каково число?"

"Четыре", — ответил Набу. "Правда?" — спросил Гамеш. А Хумбаба сказал: "Сам знаю. Но как это *получить*?"

Набу скрупулезно растолковал приятелю процедуру, которую их учитель математики объяснял им на прошлой неделе: "Прибавь половину от 2 к 24, получишь 25. Извлеки квадратный корень, который равен 5..."

Сбитый с толку Гамеш замахал руками: "Я никак не могу разобраться, что за штука эти квадратные корни, Набу".

"А! — сказал Набу. — Теперь понятно!" Оба его приятеля глядели на него как на сумасшедшего. "Твоя проблема не в решении уравнений, Гамеш. А в квадратных корнях!"

"И в том и в другом", — пробормотал Гамеш.

"Но сначала идут квадратные корни. Надо учить предмет шаг за шагом, как все время нам повторяет Отец-учитель в Доме Табличек".

"А еще он повторяет, чтобы мы не пачкали одежду, — запротестовал Хумбаба, — но мы же не обращаем на это внимания..."

"Это другое дело. Это..."

"*Без толку*! — завопил Гамеш. — Я никогда не стану писцом, и отец задаст мне такую трепку, что я не смогу сидеть, а мать будет, как всегда, жалобно смотреть на меня и говорить, чтобы я больше трудился и думал о семье. Но мне математика в голову не лезет! Вот законы я могу запомнить. Это весело! Смотри: "Если жена господина убьет своего мужа из-за другого мужчины, ее следует прямо на месте посадить на кол". Вот это по мне. А всякие глупости типа квадратных корней — нет! — он остановился, чтобы глотнуть воздуха, и замахал руками, не в силах сдержать себя. — Уравнения, числа — нам-то что за дело?"

"От них есть польза, — возразил Хумбаба. — Помнишь все эти штуки про закон насчет отрезания ушей рабам?"

"Да, — сказал Гамеш, — наказание за нападение".

"Если выбьешь простолюдину глаз, — подсказал Хумбаба, — то ты должен заплатить ему..."

"Одну серебряную *мину*", — сказал Гамеш.

"А если сломаешь рабу кость?"

"Заплатишь его хозяину компенсацию в половину цены раба".

Хумбаба захлопнул ловушку: "Вот, а если раб стоит шестьдесят шекелей, то тебе надо знать, сколько будет половина от шестидесяти. Если хочешь стать законником, тебе нужна математика!"

"Ответ — тридцать", — немедленно выпалил Гамеш.

"Видишь! — закричал Набу. — Ты соображаешь в математике!"

"Ясное дело, для такого математика вовсе *не требуется*, — будущий юрист ударил ладонью по воздуху, пытаясь выразить глубину своих чувств. — Если дело касается реального мира, Набу, то да, я соображаю в математике. Но не тогда, когда речь идет о выдуманных задачках про квадратные корни".

"Квадратные корни нужны, чтобы измерять землю", — вставил Хумбаба.

"Да, но я учусь не для того, чтобы быть сборщиком налогов: мой отец хочет, чтобы я стал писцом, как и он сам, — заметил Гамеш. — Так что не понимаю, зачем мне учить всю эту математику".

"Затем, что она полезна", — повторил Хумбаба.

"Не думаю, что дело только в этом, — тихо сказал Набу. — По-моему, вся суть в истине и красоте — в том, чтобы получить ответ и знать, что он правильный". Но выражение лиц его друзей подсказывало, что убедить их не удалось.

"Для меня — это получить ответ и знать, что он неправильный", — вздохнул Гамеш.

"Математика важна, потому что это истина и красота, — настаивал Набу. — Квадратные корни — это основа для решения уравнений. Они, может быть, и не всюду используются, но это неважно. Они важны сами по себе".

Гамеш собрался уже добавить что-то малоуместное, но тут заметил, как в класс входит учитель. Пришлось скрыть свои слова притворным приступом кашля.

"Доброе утро, мальчики", — приветливо сказал учитель.

"Доброе утро, учитель".

"Покажите мне ваше домашнее задание".

Гамеш вздохнул. Хумбаба выглядел озабоченным. На лице Набу ничего не читалось. Так было лучше.

Возможно, самое удивительное в подслушанном разговоре — если забыть, что это чистейшей воды вымысел — состоит в том, что он происходил около 1100 года до Р. Х. в легендарном Вавилоне.

То есть, я хотел сказать, *мог* происходить. У нас нет исторических свидетельств о трех мальчиках по именам Набу, Гамеш и Хумбаба, не говоря уж о записи их разговора. Но человеческая природа тысячелетиями не менялась, так что фактологическая подоплека моей истории о трех школьниках прочна как скала.

Нам на удивление много известно о культуре жителей Вавилона из-за того, что свои записи они делали на влажной глине своеобразным клинообразным шрифтом — так называемой клинописью. Когда глина затвердевала под вавилонским солнцем, эти надписи становились практически неуничтожимыми. А если в здании, где хранились глиняные таблички, случался пожар, что, конечно, бывало, то жар превращал глину в керамику, которая могла сохраняться еще дольше.

И наконец, одеяло из песка пустыни помогало сохранять записи сколь угодно долго. Таким образом Вавилон и стал тем местом, с которого начинается письменная история. Там же берет свое начало и история понимания человечеством симметрии — и ее воплощения в систематическую и количественную

теорию, "исчисление" симметрии, ни в чем не уступающее по своей мощи дифференциальному и интегральному исчислению, созданному Исааком Ньютоном и Готфридом Вильгельмом Лейбницем. Без сомнения, его истоки можно было бы проследить еще дальше вглубь веков, если бы у нас нашлась машина времени или хотя бы еще немного больше древних глиняных табличек. Но, как нам сообщает письменная история, именно вавилонские математики направили человечество на путь познания симметрии, что в свою очередь радикально повлияло на наше восприятие физического мира.

Математика основывается на числах, но не ограничивается ими. Вавилоняне использовали эффективные обозначения, которые в отличие от нашей десятичной системы (основанной на степенях числа десять), были шестидесятиричными (основанными на степенях числа шестьдесят). Вавилоняне были осведомлены о прямоугольных треугольниках и знали нечто вроде того, что мы сейчас называем теоремой Пифагора, — хотя в отличие от их греческих последователей математики Вавилона, по-видимому, не заботились о подкреплении своих эмпирических открытий логическими доказательствами. Они использовали математику для высших целей — для астрономии, для сельскохозяйственных и религиозных нужд, а также для вполне прозаических задач торговли и сбора налогов. Такая двойственная роль математического знания — выявление порядка в окружающем мире и содействие делам человеческим — неразрывной золотой нитью проходит через всю историю математики.

Самое важное из достижений вавилонских математиков — это начало понимания того, как решать уравнения.

Уравнения — это способ, которым математики находят значение некоторой неизвестной величины, исходя из косвенных

данных. "Вот список известных фактов о неизвестном числе; найдите это число". Уравнение, тем самым, есть нечто вроде головоломки, в фокусе которой — число. Нам не говорят, что это за число, а сообщают про него какие-то полезные сведения. Наша задача в том, чтобы решить головоломку, то есть найти неизвестное число. Подобное занятие может показаться несколько отдаленным от геометрической концепции симметрии, но в математике идеи, открытые в одном контексте, как правило, проливают свет и на целый ряд других контекстов. Именно наличие внутренних взаимосвязей придает математике такую интеллектуальную мощь. И именно поэтому числовая система, изобретенная для обслуживания торговых сделок, смогла заодно сообщить древним нечто полезное о движении планет и даже о так называемых неподвижных звездах.

Головоломка может оказаться легкой. "Удвоенное число равно шестидесяти; каково искомое число?" Не надо быть гением, чтобы понять, что неизвестное равно тридцати. Или немного посложнее: "Я умножил некое число на себя и прибавил 25; в результате получилось удесятеренное мое число. Каково оно?" Пробы и ошибки могут привести вас к ответу 5, но пробы и ошибки — это неэффективный метод решения головоломок или уравнений. Что, если в условии заменить 25, скажем, на 23? Или на 26? Вавилонские математики смотрели на метод проб и ошибок свысока, ибо владели секретом намного более глубоким и мощным. Им было известно правило — некоторая стандартная процедура — для решения таких уравнений. Судя по всему, они были первыми людьми, осознавшими, что такие методы существуют.

Связанная с Вавилоном таинственность отчасти проистекает из многочисленных ссылок на него, имеющихся в Библии. Всем известен рассказ о Данииле и пещере льва, место действия ко-

торого — Вавилон в правление царя Навуходоносора. Но в последующие времена Вавилон стал почти мифом — городом, давно исчезнувшим с лица земли, разрушенным без всякой надежды на восстановление, а может быть, городом, которого и вовсе никогда не было. Так, во всяком случае, казалось еще около двухсот лет назад.

На протяжении тысячелетий равнины нынешнего Ирака были усеяны странными курганами. Рыцари, возвращавшиеся из Крестовых походов, привозили с собой сувениры, которые они находили в руинах, — кирпичи, украшенные странными знаками, фрагменты не подлежащих расшифровке надписей. Курганы, без сомнения, были останками древних городов, но, кроме этого, почти ничего известно не было.

В 1811 году Клавдий Рич[1] предпринял первое научное исследование древних курганов в Ираке. Он обследовал значительный участок в шестидесяти милях к югу от Багдада по берегу Евфрата и вскоре пришел к выводу, что именно там должны находиться останки древнего Вавилона. Он нанял рабочих для раскопок руин. Среди найденного были кирпичи, клинописные глиняные таблички, прекрасно сохранившиеся цилиндрические печати, позволявшие при прокатывании по мокрой глине создавать оттиски слов и изображений, а также предметы искусства, настолько величественные, что их автор, кем бы он ни был, по праву занял бы место в одном ряду с Леонардо да Винчи и Микеланджело.

Но еще более интересными оказались разбитые клинописные таблички, которыми были завалены места раскопок. Нам очень повезло, что те первые археологи оценили их потенциальную значимость и бережно их сохранили. Как только надписи удалось расшифровать, эти таблички превратились в кладезь информации о жизни и делах вавилонян.

1 Консул Ост-Индийской компании в Багдаде. (*Примеч. перев.*)

Клинописные таблички и другие находки сообщают нам, что история древней Месопотамии была долгой и сложной, она охватывала много различных культур и государств. По отношению к ним ко всем привычно используется термин "вавилонский" — тот же, который применяется в отношении конкретной культуры, концентрировавшейся вокруг города Вавилон. Однако ядро месопотамской культуры постоянно смещалось, причем сам Вавилон временами возвышался, а временами приходил в упадок. Археологи разбивают вавилонскую историю на два основных периода. Старовавилонский период длился примерно от 2000 до 1600 года до Р. Х., а Нововавилонский период — с 625 по 539 год до Р. Х. Интервал между ними занимают Древнеассирийский, Касситский, Среднеассирийский и Новоассирийский периоды — времена пришлых правителей в Вавилоне. Затем вавилонская математика продолжала развиваться в Сирии в продолжение периода, известного как эпоха Селевкидов, еще примерно в течение пяти веков или более[1].

Культура сама по себе оказалась намного более устойчивой, чем общества, бывшие ее носителями: она оставалась по большей части неизменной на протяжении примерно 1200 лет, хотя иногда ее на время прерывали периоды политических неурядиц. Так что отдельные аспекты вавилонской культуры, не сводящиеся к конкретным историческим событиям, вероятно, возникли задолго до самого раннего из известных нам пись-

1 Государство Селевкидов существовало со времени вскоре после смерти Александра Великого (формально — с момента утверждения Селевка в Вавилоне в 312 г. до Р. Х.) и до присоединения остатков некогда обширных территорий Римом (династия окончательно отлучена от правления, даже номинального, в 63 г. до Р. Х., но государство пришло в упадок значительно раньше). Получить "пять веков" обычными арифметическими действиями не представляется возможным. Государство Селевкидов было частью эллинистического мира; в эллинистическое же время жили, в частности, Эвклид, Архимед и Аполлоний, влияние которых в любом эллинистическом государстве не могло не ощущаться. (*Примеч. перев.*)

менных свидетельств. В частности, имеются указания, что некоторые математические методы, первые дошедшие до нас записи о которых датируются примерно 600 годом до Р. Х., в действительности существовали в намного более раннюю эпоху. По этой причине главное действующее лицо в данной главе — вымышленный писец, которому я дал имя Набу-Шамаш и с которым мы уже встречались в начальной школе, в краткой виньетке о трех школьных друзьях, — неизбежно должно было жить где-то около 1100 года до Р. Х.; родился он, таким образом, в царствование Навуходоносора I.

Все другие персонажи, которые нам встретятся по мере развития нашего рассказа, — реальные исторические фигуры, и их конкретные истории хорошо задокументированы. Но среди миллиона или около того глиняных табличек, которые сохранились со времен древнего Вавилона, не так много документальных свидетельств о каких-либо конкретных людях, за исключением властителей и военных вождей. Так что Набу-Шамашу поневоле придется быть собирательным образом, основанным на правдоподобных умозаключениях, которые в свою очередь основываются на том, что нам удалось узнать о повседневной жизни вавилонян. На его счету нет никаких новых изобретений, но благодаря ему мы получим представление обо всех тех аспектах вавилонского знания, которые существенны для истории симметрии. Имеются·веские основания полагать, что все вавилонские писцы должны были получать хорошее образование, важную часть которого составляла математика.

Имя нашего вымышленного писца представляет собой комбинацию двух настоящих вавилонских имен — покровительствовавшего писцам бога Набу и бога Солнца Шамаша. В вавилонской культуре обыкновенных людей нередко называли именами богов, хотя, быть может, два таких имени и воспринимались бы как некоторый перебор. Но в силу причин нарратив-

ного характера нам приходится называть его как-то более определенно, чем просто "писец", сохраняя при этом дух того времени. Итак, когда Набу-Шамаш родился, в Вавилоне правил Навуходоносор I — наиболее значительный монарх Второй династии Исина. Это был *не* его знаменитый библейский тезка, которого обычно называют Навуходоносором II (тот был сыном Набопаласара и правил с 605 по 562 год до Р. Х.).

Правление Навуходоносора II было временем величайшего расцвета Вавилона, как в том, что касалось богатства города, так и в смысле его влияния в регионе. Вавилон процветал также и при власти его предшественника, носившего то же имя, при котором вавилонское владычество распространилось на Аккад и гористые области на севере. Однако в правление Ашшур-реш-иши и его сына Тиглатпаласара I Аккад, по сути дела, вышел из-под вавилонского контроля, так что для укрепления безопасности были предприняты военные действия против племен, живших в горах и пустынях, что окружали его с трех сторон.

Таким образом, детство Набу-Шамаша пришлось на относительно спокойный период вавилонской истории, хотя к тому времени, как наш герой превратился в юношу, звезда Вавилона начала тускнеть, а жизнь постепенно становилась все менее предсказуемой.

Набу-Шамаш родился в типичной для "высших классов" семье в вавилонском Старом Городе, недалеко от канала Либил-Хигалла и вблизи от заслуженно прославленных ворот Иштар — церемониального входа в город, — украшенных цветными керамическими кирпичами замысловатых форм — там были быки, львы и даже драконы. Дорога, проходящая через ворота Иштар, поражала своей шириной, достигавшей 20 метров; она была вымощена плитками известняка, поло-

женными на асфальтовое покрытие, которое в свою очередь покоилось на кирпичном основании. Называлась она "Да не получит враг победы" — довольно типичное название для вавилонских главных дорог — но широко известна была под именем Дороги Процессий, поскольку использовалась жрецами, проносившими через город бога Мардука, когда того требовал ритуал.

Семейный дом был построен из сделанного из земли обожженного кирпича, стены его достигали шести футов в толщину, чтобы не пропускать внутрь солнце. Во внешних стенах имелось несколько проемов — главным из которых был вход на первом этаже, — а сами стены поднимались на высоту трех этажей, причем для строительства верхнего этажа применялись более легкие материалы, главным образом дерево. Семья владела большим количеством рабов, которые занимались обычной домашней работой. Рабы жили рядом с кухней, справа от входа. Семья занимала комнаты слева: там были длинная гостиная, спальни и санузел. Во времена Набу-Шамаша ванных не существовало, хотя из других эпох до нас и дошло нечто подобное. Вместо этого рабы лили воду на голову и тело моющегося так, что получалось некоторое подобие современного душа. В центре располагался открытый дворик, а в глубине размещались кладовые.

Отец Набу-Шамаша был служащим при дворе не известного нам по имени царя, правившего перед Навуходоносором I. Обязанности его были главным образом бюрократическими: он отвечал за управление целой областью, обеспечивая поддержание там закона и порядка, должную ирригацию полей и полный сбор всех необходимых налогов. Отец Набу-Шамаша в свое время также учился на писца, потому что грамотность и владение счетом были основными требованиями, предъявляемыми к любому, кто находился на госслужбе в ее вавилонском варианте.

Согласно закону, приписываемому богу Энлилю, каждый мужчина должен продолжать род занятий своего отца, поэтому ожидалось, что Набу-Шамаш именно так и поступит. Однако профессия писца открывала и другие возможности для карьеры, в первую очередь — в качестве жреца, так что обучение в школе писцов позволяло в дальнейшем выбирать профессию.

Нам известно, из чего складывалось образование Набу-Шамаша, потому что примерно из того же периода до нас дошли многочисленные записи, сделанные по-шумерски учениками школы писцов. Из этих записей совершенно ясно, что Набу-Шамашу повезло с родителями, поскольку на поступление в такие школы могли рассчитывать только сыновья богатых людей. На самом деле качество вавилонского образования было столь высоким, что знатные иностранцы отправляли туда на обучение своих сыновей.

Школа называлась Домом Табличек, что, надо полагать, служило указанием на глиняные таблички, используемые для письма и арифметики. В ней был старший учитель, к которому обращались "Мастер" или "Отец-учитель". Имелся и классный надзиратель, основной задачей которого было следить за поведением учеников; были специальные учителя по шумерскому языку и математике. У старшего учителя имелись помощники, называемые "Братья Отца", в обязанности которых входило поддержание порядка. Как и все учащиеся, Набу-Шамаш жил дома и ходил в школу каждый день — примерно 24 дня в течение месяца из 30 дней. У него было три свободных дня для отдыха, а еще три набиралось за счет религиозных праздников.

Обучение Набу-Шамаша началось с овладения шумерским языком, в особенности его письменным вариантом. В наличии были словари и сборники упражнений по грамматике, а также длинные упражнения для переписывания — официальные

фразы, технические термины, имена. Затем Набу-Шамаш перешел к изучению математики, и именно эти его занятия особенно важны для нашего рассказа.

Что именно изучал Набу-Шамаш? Для всех, кроме философов, логиков и зануд-математиков, число есть последовательность цифр, написанных одна за другой. Так, год, в который я пишу эту фразу, обозначается числом 2006, представляющим собой последовательность из четырех цифр. Но, как не преминут заметить педанты, эта последовательность цифр есть вовсе не число, а только его обозначение, и, кстати, обозначение довольно замысловатое. В нашей привычной десятичной системе используются всего десять цифр — символы от 0 до 9, — но они позволяют представить любое, сколь угодно большое число. Некоторое расширение этой системы позволяет также представлять очень малые числа; точнее говоря, она позволяет представлять численные измерения с очень высоким уровнем точности. Так, согласно самым точным на данный момент измерениям, скорость света приблизительно равна 1079252848,8 километра в час.

Эти обозначения нам так привычны, что мы забываем, как хитро они устроены — и как трудно в них разобраться, когда мы видим их первый раз. Ключевое свойство, на котором основано все остальное, состоит вот в чем: численное значение какого-либо символа, например 8, зависит от того, где он располагается по отношению к другим символам. *Символ* "8" *не имеет постоянного значения, не зависящего от контекста.* В числе, которое выражает скорость света, цифра 8 непосредственно перед десятичной запятой действительно означает "восемь". Но другая 8 в том же числе означает "восемьсот".

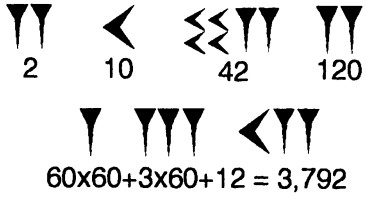
Было бы исключительно неприятно иметь систему письма, в которой значение буквы зависело бы от ее местоположения

в слове[1]. Представим себе, например, во что превратился бы процесс чтения, если бы две буквы "а" в слове "алфавит" имели бы полностью различные значения. Однако позиционная система для обозначения чисел настолько удобна и эффективна, что нам трудно себе представить, как можно пользоваться каким-либо другим способом.

Но не всегда дело обстояло таким образом. Нашим современным обозначениям не более 1500 лет, а в Европе их впервые ввели в употребление лишь немногим более 800 лет назад. Даже сегодня для одних и тех же десятичных цифр в различных культурах используются различные символы — достаточно взглянуть на любую египетскую денежную банкноту. Представители древних культур записывали числа множеством самых разнообразных и необычных способов. Вероятно, лучше всего нам известна римская система, в которой число 2006 имеет вид MMVI. В древней Греции то же число имело бы вид $\beta\zeta$. Вместо наших 2, 20, 200 и 2000 римляне писали II, XX, CC и MM, а греки — β, κ, σ и $\underline{\beta}$.

Вавилоняне были самой ранней из известных нам культур, использовавших нечто родственное нашим позиционным обозначениям. Однако с одним важным отличием. В десятичной системе при каждом смещении цифры на одну позицию влево ее численное значение умножается на десять. Так, 20 есть 2, умноженное на десять, а 200 — 20, умноженное на десять. В вавилонской же системе каждое смещение влево приводило к умножению числа на шестьдесят. Так, 20 означало бы 2 умножить на 60 (120 в наших обозначениях), а 200 — 2 умножить на

1 Зависит, и весьма часто. В русском языке, например, качество гласного звука зависит от его расстояния от ударного слога. В английском же имеется довольно явное влияние букв в слове друг на друга — например, в создании дифтонгов и в механизме открытия слогов. В ирландском языке такая согласная, как "m", имеет "полностью различные значения" — звук "м" или звук "в" — в зависимости от положения в слове (так называемые сильные и слабые позиции). (*Примеч. перев.*)



Вавилонские числительные с основанием 60.

60 умножить на 60 (7200 в наших обозначениях). Разумеется, они не использовали тот же символ "2"; число два они записывали, повторяя дважды тонкий вертикальный клинообразный символ, как показано на рисунке. Повторяя этот знак нужное число раз, они записывали числа от одного до девяти. Для чисел, превосходящих девять, они добавляли другой символ — повернутый клин, который обозначал число десять; повторяя этот символ соответствующее число раз, они записывали числа двадцать, тридцать, сорок и пятьдесят. Так, например, наше число 42 изображалось четырьмя повернутыми клиньями, за которыми шли два вертикальных клина.

По причинам, о которых остается только догадываться, эта система прекращалась на 59. Вавилоняне не рисовали шесть повернутых клиньев, чтобы составить 60. Вместо этого они снова использовали вертикальный узкий клин, который ранее обозначал единицу, но теперь ему придавалось значение "один раз по шестьдесят". Два таких клина означали 120. Но они могли также обозначать и "два". Какое именно значение имелось в виду, требовалось понимать из контекста, а также из расположения символов друг относительно друга. Например, если имелось два вертикальных клина, потом пробел, а потом снова два вертикальных клина, то первая группа означала"сто двадцать, а вторая — два, подобно тому как символы "2" в нашей записи 22 означают двадцать и два.

Этот метод распространялся и на значительно бóльшие числа. Вертикальный клин мог означать 1, или 60, или $60 \times 60 = 3600$, или $60 \times 60 \times 60 = 216\,000$, и так далее. Три нижние группы на рисунке обозначают число $60 \times 60 + 3 \times 60 + 12$, которое мы бы записали как 3792. Большая проблема здесь состоит в том, что обозначения допускают некоторые неоднозначности. Если перед вашими глазами одни только вертикальные клинья, то означают ли они 2, 60×2 или $60 \times 60 \times 2$? Означает ли повернутый клин, за которым идут два вертикальных, $12 \times 60 + 2$, или $12 \times 60 \times 60 + 2$, или даже $10 \times 60 \times 60 + 2 \times 60$? Ко времени Александра Македонского вавилоняне устранили эти неоднозначности за счет использования пары небольших диагональных клиньев для указания пустой позиции при записи числа; фактически они изобрели символ для нуля.

Почему вавилоняне использовали шестидесятиричную систему, а не привычную нам десятичную? На их выбор могло повлиять полезное свойство числа 60: у него много разных делителей. Оно нацело делится на числа 2, 3, 4, 5 и 6. Оно также делится на 10, 12, 15, 20 и 30. Это свойство оказывается довольно удобным, когда дело доходит до деления вещей, будь то зерно или земля, на нескольких людей.

Чашу весов вполне мог склонить вавилонский метод измерения времени. По-видимому, вавилонцы находили удобным делить год на 360 дней, несмотря на то что они были превосходными астрономами и знали, что число 365 выражает длину года точнее, а $365^1/_4$ — еще точнее. Их слишком сильно завораживало арифметическое соотношение $360 = 6 \times 60$. В действительности в том, что касалось указания времени, вавилоняне забывали о правиле, что перенесение символов на одну позицию налево означает умножение на шестьдесят, а вместо этого умножали на шесть, так что выражение, которое должно было бы обозначать 3600, в действительности интерпретировалось как 360.

Привязка к числам 60 и 360 дошла до наших дней — это привычные нам 360 градусов в окружности (по одному градусу на один вавилонский день), а также 60 секунд в минуте и 60 минут в часе. Старые культурные условности обладают удивительной живучестью. Меня особенно умиляет, как в наш век потрясающей компьютерной графики создатели фильмов датируют свои произведения римскими числительными.

Все это, за исключением знака "нуль", Набу-Шамаш и должен был проходить на начальных этапах своего обучения. Ему предстояло научиться ловко и быстро наносить на сырую глину тысячи маленьких клинышков. И подобно тому, как современные школьники не без усилий осваивают переход от целых чисел к обычным и десятичным дробям, так и Набу-Шамаш должен был рано или поздно встретиться с вавилонским методом записи таких чисел, как одна вторая или одна треть, или более сложных долей единицы, жесткая необходимость в которых диктовалась реальностями астрономических наблюдений.

Чтобы по полдня не выписывать клинья, исследователи представляют вавилонскую систему счисления, используя смесь старых и новых обозначений. Вместо групп из клиньев записываются десятичные числа, разделенные запятыми. Так что последняя группа на рисунке запишется как 1, 3, 12. Такое соглашение экономит массу дорогостоящего типографского набора, а при этом удобно для чтения, так что мы будем поступать так же.

Как же записал бы вавилонский писец число "одна вторая"?

В нашей арифметике эта задача решается двумя различными способами. Число или записывается как дробь $^1/_2$, или же используется знаменитая десятичная запятая, с помощью которой число представляется как 0,5. Обозначения в виде обык-

новенной дроби более интуитивны и исторически возникли раньше; десятичные же обозначения несколько сложнее охватить своим умом, однако они удобнее при вычислениях, поскольку представляют собой естественное расширение правила "позиция–значение", действующего для целых чисел. Символ 5 в числе 0,5 означает "5, деленное на 10", а в числе 0,05 — "5, деленное на 100". Перемещение символа на одну позицию влево умножает его на 10; перемещение на одну позицию вправо делит его на 10. Все очень внятно и логично.

В результате десятичная арифметика по сути такова же, как арифметика целых чисел, за исключением того факта, что нужно следить за положением десятичной запятой.

Вавилоняне использовали ту же идею, но с основанием 60. Дробь 1/2 надо было выразить как дробь 1/60, взятую некоторое число раз. Очевидно, правильное число — 30/60, так что они записывали число "одна вторая" как 0; 30, где современные исследователи применяют точку с запятой для указания на "шестидесятиричную запятую", которая в клинописных обозначениях опять же представлялась пробелом. Вавилоняне могли выполнять довольно сложные вычисления: например, известное им значение квадратного корня из 2 составляло 1;24,51,10, что отличается от истинного значения менее чем на одну стотысячную[1]. Они успешно использовали эту точность как в теоретической математике, так и в астрономии.

Самый восхитительный метод, который предстояло изучать Набу-Шамашу, коль скоро речь идет о нашей главной теме — симметрии, — это метод решения квадратных уравнений. Нам много всего известно о вавилонских методах решения уравнений. Из примерно миллиона известных вавилонских глиняных

1 Вавилонское значение вычисляется как $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}=1{,}4142129\ldots$, а $=\sqrt{2}=$ $=1{,}4142135$.
Разница составляет около шести десятимиллионных. (*Примеч. перев.*)

табличек около пятисот посвящены математике. В 1930 году востоковед Отто Нейгенбауэр понял, что запись на одной из этих табличек демонстрирует полное понимание того, что мы называем квадратными уравнениями. Это уравнения, которые содержат неизвестную величину и ее квадрат, перемешанные с различными конкретными числами. Без квадрата уравнение называлось бы "линейным", и такие уравнения решать проще всего. Уравнение, в которое входит куб неизвестного (т. е. неизвестное, умноженное на себя, а потом еще раз на себя), называется "кубическим". Вавилоняне, по-видимому, знали хитрый способ нахождения приближенных решений определенных типов кубических уравнений на основе численных таблиц. Однако все, в чем мы можем быть уверены, — это существование самих таблиц. Можно только предполагать, для чего они использовались, и наиболее вероятный кандидат — кубические уравнения. Но из табличек, которые изучал Нейгенбауэр, ясно следует, что квадратные уравнения писцы освоили полностью.

Типичное квадратное уравнение, которому около 4000 лет, формулируется так: "Найти сторону квадрата, если площадь минус сторона составляет 14, 30". Сюда входит квадрат неизвестного (площадь квадрата), а также само неизвестное. Другими словами, в задаче требуется решить квадратное уравнение. На той же табличке довольно бесцеремонно приводится решение: "Возьми половину от 1, что есть 0; 30. Умножь 0; 30 на 0; 30, что даст 0; 15. Прибавь это к 14, 30, и получишь 14, 30; 15. Это квадрат числа 29; 30. Теперь прибавь 0; 30 к 29; 30. Результат равен 30 — стороне квадрата".

Что же тут делается? Запишем все эти действия в современных обозначениях.

- Возьми половину от 1, что есть 0; 30 $^1/_2$
- Умножь 0; 30 на 0; 30, что есть 0; 15 $^1/_4$
- Прибавь это к 14, 30, и получишь 14, 30; 15 $870^1/_4$

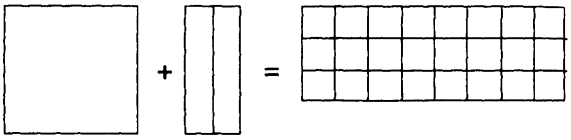
■ Это квадрат числа 29; 30	$870^1/_4 = (29^1/_2) \times (29^1/_2)$
■ Теперь прибавь 0;30 к 29; 30	$29^1/_2 + {}^1/_2$
■ Результат равен 30, стороне квадрата	30

Самый сложный шаг — четвертый, где требуется найти число (равное $29^1/_2$), квадрат которого составляет $870^1/_4$. Число $29^1/_2$ есть квадратный корень из $870^1/_4$. Квадратные корни — основное средство для решения квадратных уравнений, а когда математики попытались применить подобные же методы к решению более сложных уравнений, и родилась современная алгебра.

Ниже мы интерпретируем эту задачу, используя современные алгебраические обозначения. Но важно понимать, что вавилоняне не использовали алгебраические формулы как таковые. Вместо этого под видом типичного примера они описывали конкретную *процедуру*, которая и приводила к ответу. Но ясно, что они осознавали, что *в точности та же самая процедура сработает, если взять другие числа*.

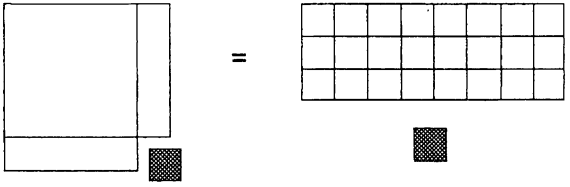
Коротко говоря, они умели решать квадратные уравнения, и именно их метод — хотя и не в том самом виде, как они его выражали — мы используем по сей день.

Как вавилоняне смогли открыть свой метод решения квадратных уравнений? Прямых свидетельств у нас нет, но кажется правдоподобным, что они натолкнулись на него, рассуждая геометрически. Возьмем более простую задачу, которая приводит к тому же рецепту. Предположим, что мы нашли табличку, на которой говорится: “Найти сторону квадрата, если площадь плюс две стороны равна 24”. В более современных терминах — квадрат неизвестного плюс удвоенное неизвестное равно 24. Это можно представлять себе так, как показано на рисунке.



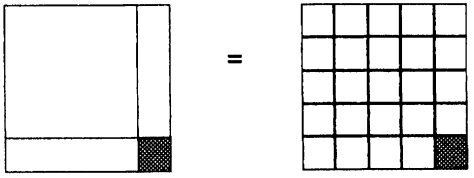
Геометрическое представление квадратного уравнения.

Здесь вертикальный размер квадрата и прямоугольника слева от знака равенства соответствует неизвестному, а малые квадраты имеют единичный размер. Если разбить высокий прямоугольник пополам и приклеить два полученных куска к квадрату, то получится фигура, имеющая вид квадрата с одним недостающим углом. Рисунок подсказывает, что надо "дополнить квадрат" путем прибавления к обеим частям уравнения недостающего угла.



Дополнение квадрата.

Теперь у нас имеется квадрат слева и 25 единичных квадратов справа. Соберем их в квадрат 5×5:



Теперь решение очевидно: неизвестное плюс один при возведении в квадрат дает квадрат числа пять. Извлекая квадратные корни, находим, что неизвестное плюс один равно пяти; не надо быть гением, чтобы найти неизвестное: оно равно четырем.

Такое геометрическое описание в точности соответствует вавилонскому методу решения квадратных уравнений. В более сложном примере из табличек используется в точности тот же рецепт. На табличке лишь приведен рецепт, но не сказано, откуда он взялся, однако геометрическая картина согласуется и с другими косвенными свидетельствами.

Глава 2
Имя на устах

Многие из величайших математиков древнего мира жили в египетском городе Александрия, расположенном между пятью крупными оазисами, выдающимися в пустыню к западу от Нила. Один из оазисов — Сива — был известен своими соляными озерами, которые наполняются за зиму и высыхают в летнюю жару. Соль проникла в почву и стала главным источником головной боли для археологов, поскольку она пропитывает древние камни, и остающийся на них соляной налет медленно разрушает остовы зданий.

Наиболее популярное туристическое место в Сиве — Агурми, в прошлом храм, посвященный богу Амону. Божественность Амона была столь велика, что основной его аспект представляет собой нечто абстрактное, но затем его стали отождествлять с более осязаемой сущностью — происхождением бога Ра, Солнцем. Построенный во времена 26-й династии храм Амона в Сиве был обителью знаменитого оракула, известного, в частности, в связи с двумя крупными историческими событиями.

Первое — это гибель армии Камбиса II, персидского царя, покорившего Египет. Передают, что в 523 году до Р. Х., намере-

ваясь использовать оракула храма Амона для утверждения своего правления, Камбис отправил в Западную пустыню военный отряд. Армия дошла до оазиса Бахарийа, но погибла в песчаной буре по дороге к Сиве. Многие египтологи склонялись к мысли, что "потеря армии Камбиса" может оказаться мифом, но в 2000 году группа исследователей из Каирского университета Хелван, занимавшаяся поисками нефти, нашла в том районе куски ткани, металла и человеческие останки, которые могли быть останками погибшей армии.

Второе событие, произошедшее двумя столетиями позже, представляет собой исторический факт — это судьбоносный визит в Сиву Александра Македонского, имевшего перед собой в точности ту же цель, что и Камбис.

Александр был сыном царя Филиппа II Македонского. Дочь Филиппа Клеопатра вышла замуж за эпирского царя Александра, причем во время свадебной церемонии Филиппа убили. Убийцей мог быть любовник Филиппа Павсаний, огорченный тем, что царь никак не реагировал на жалобы, с которыми Павсаний к нему обращался. Убийство могло оказаться и результатом персидского заговора, инспирированного Дарием III. Если это так, то персы получили сполна, поскольку македонская армия немедленно провозгласила царем Александра, и 20-летний монарх совершил знаменитый поход, завоевав бóльшую часть известного тогда мира. По пути, в 332 году до Р. Х., он без единой битвы покорил Египет.

Чтобы закрепить свою власть над Египтом, Александр провозгласил себя заодно и фараоном, а затем совершил паломничество в Сиву с целью задать оракулу вопрос, является ли спрашивающий богом. Он отправился к оракулу в одиночестве, а вернувшись, огласил его вердикт: да, оракул подтвердил, что он действительно бог. Этот ответ оракула стал основой его

власти. Позднее распространились слухи, будто оракул сообщил ему, что он — сын Зевса.

Не вполне ясно, произвело ли на египтян впечатление это несколько легковесное свидетельство, или же, с учетом размеров армии, находившейся под командованием Александра, они сочли за лучшее со всем согласиться. Возможно, они уже пресытились владычеством персов и рассматривали Александра как меньшее из двух зол — именно по этой причине его уже встречали с распростертыми объятиями в бывшей столице Египта Мемфисе. Какая бы истина ни скрывалась за этой историей, египтяне начиная с того момента почитали Александра как своего властителя.

По пути к Сиве, очарованный той частью страны, что лежит между Средиземным морем и озером, преобретшим известность под именем Мареотиса, Александр решил построить там город. Планировал строительство города, скромно названного Александрией, греческий архитектор Динократ, руководствуясь при этом набросками, сделанными самим Александром. Датой основания города иногда считается 7 апреля 331 года до Р. Х.; некоторые оспаривают достоверность этой даты, но в любом случае она должна быть близка к 334 году до Р. Х. Александру не довелось увидеть своего творения — во второй раз он прибыл в эту страну, чтобы быть там похороненным.

Так, по крайней мере, утверждает освященная временем легенда, но истина, вероятно, более сложна. Теперь представляется, что значительная часть будущей Александрии уже существовала на момент прибытия туда Александра. Египтологи давно обнаружили, что многие надписи не слишком надежны. Великий храм в Карнаке, например, изобилует орнаментами, посвященными Рамсесу II. На самом же деле значительную его часть построил отец Рамсеса Сети I, и следы — порой весьма заметные — посвященных отцу надписей можно разглядеть под теми, которые были высечены в честь сына. Подобное посяга-

тельство являлось общим местом и даже не считалось проявлением непочтительности. Другое дело — обезобразить останки предшественника, скажем, стесать лицо у статуи фараона: такой поступок весьма определенно свидетельствовал о недостатке уважения, так как из-за потери идентичности предшественник мог лишиться законного места в загробной жизни.

Имя Александра было выбито повсюду, на каждом здании в древней Александрии. Его имя было, так сказать, выбито и на самом городе. Тогда как другие фараоны присваивали разрозненные здания или памятники, Александр присвоил целый город.

Александрия превратилась в один из главных морских портов; протоки Нила и канал связывали ее с Красным морем[1], а оттуда — с Индийским океаном и Дальним Востоком. Она стала центром знания, в ней размещалась знаменитая библиотека. И там родился один из наиболее влиятельных математиков в истории — геометр Эвклид.

Об Александре нам известно намного больше, чем об Эвклиде — и это при том, что о масштабе влияния каждого из них на нашу цивилизацию на протяжении веков еще можно поспорить, и пожалуй, влияние Эвклида окажется даже больше. Если в математике есть такая вещь, как имя, которое у всех на устах, то это имя Эвклид. О жизни Эвклида нам известно мало, зато о его работах — много. На протяжении нескольких столетий слова "математика" и "Эвклид" воспринимались в Западном мире практически как синонимы.

Почему Эвклид приобрел такую известность? Ведь были математики и более великие, и более значительные. Но в течение без малого двух тысяч лет имя Эвклида было известному каж-

1 Александрия выгодно использовала торговлю с Востоком, однако для сообщения с Красным морем надо было пересечь дельту Нила и далее двигаться по суше. *(Примеч. перев.)*

дому, кто изучал математику по всей Западной Европе и (в несколько меньшей степени) в арабском мире. Он был автором одного из самых знаменитых математических текстов в истории — "Начал геометрии" (обычно сокращаемых просто до "Начал"). После изобретения книгопечатания эта работа оказалась среди самых первых книг, появившихся в печатном виде. Она была опубликована в более чем тысяче различных изданий и в этом уступает одной только Библии.

О Эвклиде нам известно чуть больше, чем о Гомере. Он родился в Александрии около 325 года до Р. Х. и умер около 265 года до Р. Х.

Сказав это, я с неудовольствием чувствую, что мне тут же надо бы взять свои слова назад. Идея, согласно которой Эвклид действительно существовал и был единственным автором "Начал", — это только одна из трех теорий. Вторая состоит в том, что он существовал, но не писал "Начала" — по крайней мере не писал их сам. Он мог возглавлять группу математиков, создавших "Начала" коллективно. Суть третьей теории — более спорной, но все еще лежащей в рамках возможного — в том, что такая группа существовала, но сильно смахивала на группу математиков — по большей части французов и по большей части молодых, — писавших в середине двадцатого столетия под именем Николя Бурбаки. Так что "Эвклид" может оказаться коллективным псевдонимом. Тем не менее наиболее убедительная версия, похоже, состоит в том, что Эвклид все же существовал и что это был один человек, который сам и написал "Начала".

Это не означает, что Эвклид сам открыл все математическое содержание, которое вы найдете на страницах его книги. Он собрал воедино и упорядочил значительную часть древнегреческого математического знания. Он заимствовал у предшественников и сам оставил богатое наследие своим последователям, а кроме того, скрепил весь предмет печатью своего авторитета.

"Начала" обычно рассматривают как книгу по геометрии, но в ней также нашлось место теории чисел и некоторым зачаткам алгебры — однако все это изложено с геометрических позиций.

О жизни Эвклида мы знаем очень немного. Позднейшие комментаторы включили в свои работы обрывочные сведения о нем, ни одно из которых современные исследователи подтвердить не могут. Они сообщают, что Эвклид преподавал в Александрии, и отсюда обычно выводят, что в этом городе он и родился, но так ли это на самом деле, нам не известно. В 450 году, более чем через семь веков после смерти Эвклида, в пространном комментарии по поводу его математики философ Прокл писал:

> "Эвклид... собрал воедино Начала, наведя порядок во многих теоремах Эвдокса, доведя до совершенства многие из теорем Теэтета, а также довел до неоспоримых доказательств те вещи, которые были лишь нестрого доказаны его предшественниками. Этот муж жил во времена первого из Птолемеев; ибо Архимед, который жил недолгое время спустя после первого Птолемея, упоминает Эвклида, а кроме того, говорят, что Птолемей однажды спросил его, имеется ли более краткий путь к изучению геометрии, чем чтение "Начал", на что тот ответил, что царского пути к геометрии нет. Поэтому он моложе, чем окружение Платона, но старше, чем Эратосфен и Архимед; ибо последние были современниками, как в одном месте говорит об этом Эратосфен. В душе он был платоником, испытывал склонность к этой философии, а посему и заключил свои Начала построением так называемых платоновых тел".

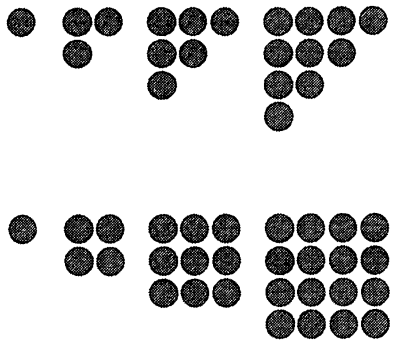
Внимательное изучение некоторых из тем в "Началах" не прямо, но убедительно свидетельствует, что Эвклид должен был в какой-то момент учиться в Платоновой Академии в Афинах. Только там, например, он мог узнать о геометрии Эвдокса и Те-

этета. Что касается его характера, то все, что у нас есть, — это некоторые фрагменты из Паппа, который сообщает, что Эвклид был "мягок и любезен со всеми, кто мог хоть в малейшей степени способствовать развитию математики, внимательно следил, чтобы никого каким-либо образом не задеть, но при этом был настоящим ученым, не превозносящим самого себя". Дошло до нас и несколько анекдотов, один из которых передает Стробей. Один из учеников Эвклида спросил его, какова будет его выгода от изучения геометрии. Эвклид позвал раба со словами: "Дай этому человеку три обола, раз он хочет извлекать прибыль из учебы".

Отношение греков к математике сильно отличалось от того, которое господствовало среди вавилонян и египтян. В тех культурах математика рассматривалась в первую очередь в практическом плане — хотя "практическое" могло означать такую ориентацию тоннеля в пирамиде, чтобы душе-*ка* умершего фараона легче было отправиться напрямую к Осирису. Для некоторых же из греческих математиков числа были не инструментами, время от времени привлекавшимися для подкрепления мистических верований, а самой сутью этих верований.

Аристотель и Платон сообщают о культе, центральной фигурой которого был Пифагор и который расцвел около 550 года до Р. Х. Согласно верованиям адептов этого культа, математика, в особенности числа, есть основа всего творения. Пифагорейцы развили мистические взгляды на гармонию вселенной, основанные отчасти на том открытии, что гармония нот на струнном инструменте связана с простыми математическими закономерностями. Если струна звучит на определенной ноте, то струна вполовину короче звучит на октаву выше, что дает наиболее гармоничный из всех интервалов. Они исследовали различные числовые закономерности, в частности "многоуголь-

ные" числа, возникающие, когда объекты выстраиваются так, чтобы образовать многоугольники. Например, "треугольные числа" 1, 3, 6 и 10 возникают из треугольников, а "квадратные числа" 1, 4, 9 и 16 — из квадратов.



Треугольные и квадратные числа.

Пифагореизм включал в себя не лишенную определенных странностей нумерологию — например, число 2 рассматривалось как мужское, а 3 как женское, — но тот взгляд, что глубинная структура природы имеет математический характер, и сегодня лежит в основе большей части теоретического знания. Хотя поздняя греческая геометрия была менее мистической, греки в целом воспринимали математику как самоцель — скорее как ветвь философии, нежели как инструмент.

Есть причины полагать, однако, что этим не все сказано. Твердо установлено, что Архимед, который мог бы быть учеником Эвклида, использовал свои математические способности для создания мощных машин и военных механизмов. Сохранилось очень немного замысловатых греческих устройств, изобретательный замысел и точность исполнения которых указывают на поддерживаемую в полной мере традицию высокого мастерства — античный вариант "прикладной матема-

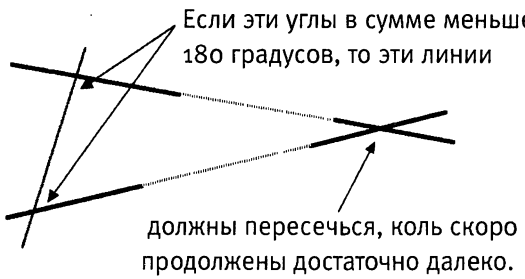
тики". Самый, возможно, известный пример — это механизм, найденный на морском дне вблизи островка Антикитера: по-видимому, он представляет собой устройство для расчета движения небесных тел, выполненное в виде шестеренок, сложным образом сцепленных друг с другом.

Эвклидовы "Начала", без сомнения, укладываются в это утонченное представление о греческой математике — потому, возможно, что это представление в значительной мере и основано на "Началах". Основной акцент в книге делается на логику доказательства, при этом нет ни намека на возможность их практического применения. Но самое важное для нашего рассказа свойство "Начал" не в том, что там говорится, а в том, чего там нет.

Эвклид осуществил два великих нововведения. Первое — это концепция доказательства. Эвклид отказывается принимать какое бы то ни было математическое утверждение как истинное, пока оно не установлено с помощью последовательности логических шагов, которые позволяют вывести данное утверждение из того, что уже известно. Второе нововведение — это осознание того факта, что процесс доказательства должен иметь начало и что эти исходные утверждения доказать нельзя. Таким образом, Эвклид формулирует пять фундаментальных предположений, на которых основываются все его дальнейшие построения. Четыре из них просты и непосредственны: две точки можно соединить прямой линией; любой конечный отрезок прямой можно продолжить; можно провести окружность с любым центром и любым радиусом; все прямые углы равны между собой.

Но пятый постулат — совсем другого рода. Он длинный и сложный, а утверждаемое в нем вовсе не столь самоочевидно. Его основное следствие состоит в существовании параллельных прямых — таких, которые никогда не пересекаются, но продолжаются без ограничения в одном и том же направлении, при

этом всегда находясь на одном и том же расстоянии друг от друга, как два тротуара по сторонам бесконечно длинной, идеально прямой дороги. В действительности Эвклид формулирует требование, чтобы при пересечении двух линий третьей первые две пересекались с той стороны, где два образованных угла дают в сумме величину, меньшую двух прямых углов. Оказывается, что это предположение логически эквивалентно существованию в точности одной линии, параллельной заданной линии и проходящей через заданную точку вне этой линии.



Пятый постулат Эвклида.

В течение столетий пятый постулат рассматривался как позорное пятно — как нечто такое, что следует устранить путем вывода его из четырех других или же заменой его на нечто более простое и столь же самоочевидное, как и остальные постулаты. К девятнадцатому столетию математики поняли, что Эвклид был абсолютно прав, когда включил в свои предположения пятый постулат: им удалось доказать, что его нельзя вывести из остальных.

Для Эвклида логические доказательства составляли существенное свойство геометрии, и доказательство поныне остается фундаментом всей математики. Утверждение, у которого нет

доказательства, воспринимается с подозрением вне зависимости от того, сколь много конкретных свидетельств говорит в его пользу и сколь важными могут оказаться его следствия. Физики, инженеры и астрономы, напротив, нередко относятся к доказательствам с пренебрежением — как к некоторому педантичному довеску, поскольку у них есть для него эффективная замена — наблюдение.

В качестве примера представим себе астронома, который пытается вычислить движение Луны. Он запишет математические уравнения, определяющие движение Луны, и тут же застрянет, поскольку не видно никакого способа решить эти уравнения точно. Тогда наш астроном может слегка схитрить, вводя в свои уравнения различные упрощающие приближения. Математика будет волновать вопрос, могут ли эти приближения серьезно повлиять на ответ, и он будет стремиться доказать, что с ними все в порядке. У астронома же есть иной способ проверить осмысленность своих действий. Он может посмотреть, действительно ли движение Луны таково, как следует из его вычислений. Если да, то этим одновременно обосновывается метод (поскольку получается правильный ответ) и проверяется теория (по той же причине). Замкнутого логического круга здесь нет, потому что если метод математически некорректен, то почти наверняка он не позволит правильно предсказать движение Луны[1].

Без доступа к роскоши наблюдений или экспериментов математикам приходится проверять свою работу, исходя из ее внутренней логики. Чем важнее следствия из некоторого утверждения, тем важнее убедиться, что это утверждение истинно. Так что доказательство становится даже еще важнее, когда всем хо-

[1] Действительно, Луна близка и хорошо видна. Ситуация приобретает несколько большую остроту в том, например, случае, когда астроном сумел сделать лишь небольшое число наблюдений над каким-либо телом и исходя из них хочет узнать характер его дальнейшего движения. *(Примеч. перев.)*

чется, чтобы данное утверждение было верным, или когда из его истинности будет вытекать огромный объем следствий.

Доказательства не могут висеть в воздухе, и их нельзя до бесконечности возводить к другим, логически им предшествующим. Где-то у них должно быть начало, и начало это по определению состоит из вещей, которые не доказываются и никогда не будут доказываться. Сегодня мы называем эти недоказываемые исходные предположения аксиомами. Для математической теории аксиомы представляют собой правила игры.

Всякий, кто возражает против аксиом, может при желании их изменить; однако результатом таких действий будет совсем другая история. Математика не утверждает, что некоторое утверждение *истинно*: она утверждает, что если принять ряд предположений, то данное утверждение должно быть их логическим следствием. Отсюда не следует, что аксиомы не подлежат изменениям. Математики могут обсуждать вопрос о том, предпочтительна ли данная система аксиом по сравнению с другими в отношении тех или иных целей, или же вопрос о том, представляет ли данная система какой-нибудь интерес сама по себе. Но эти дискуссии не касаются внутренней логики любой из выбранных систем аксиом и получаемых из них следствий. Они касаются лишь того, какие из этих систем заслуживают внимания, вызывают интерес или представляют собой хорошее развлечение.

Следствия из аксиом Эвклида — длинная, тщательно отобранная цепочка логических построений — простираются необычайно далеко. Например, он доказывает — применяя логику, которая в его дни считалась безукоризненной, — что, коль скоро вы принимаете его аксиомы, вы неизбежно должны заключить следующее.

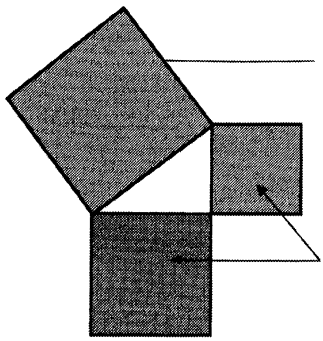
- Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон.
- Существует бесконечно много простых чисел.
- Существуют иррациональные числа — такие, которые не выражаются в виде дроби. Примером является квадратный корень из двух.
- Имеется ровно пять правильных тел: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.
- Любой угол можно точно разделить на две равные части, используя только циркуль и линейку.
- Можно построить правильные многоугольники с 3, 4, 5, 6, 8, 10 и 12 сторонами, используя только циркуль и линейку.

Я выразил эти "теоремы", как называются любые обладающие доказательством математические утверждения, на современном языке. Язык Эвклида отличался довольно сильно: Эвклид не работал непосредственно с числами. Все, что мы интерпретируем как свойства чисел, формулируется у него в терминах длин, площадей и объемов.

Содержание "Начал" разбивается на две основные категории. Имеются теоремы, говорящие нам, что некое утверждение истинно. И имеются конструкции, говорящие нам, как что-либо можно сделать.

Типичная и заслуженно знаменитая теорема — это Предложение 47 Книги I "Начал", широко известное как теорема Пифагора. Она гласит, что самая длинная сторона в прямоугольном треугольнике находится в определенной связи с двумя другими. Но без дополнительных усилий или интерпретации она не дает метода для достижения какой-либо цели.

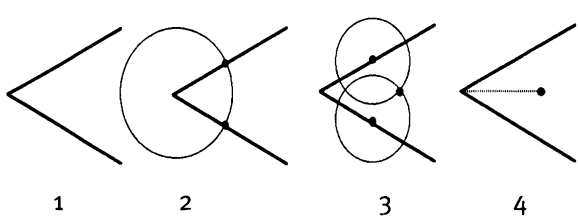
Конструкция, существенная для нашего рассказа, содержится в Предложении 9 из Книги I, где Эвклид решает задачу "бисек-



Теорема Пифагора.

ции" (деления пополам) углов. Эвклидов метод деления угла пополам прост, но остроумен, с учетом ограниченных возможностей, доступных на той ранней стадии развития. Если задан угол (1), образованный двумя отрезками прямых, поместите циркуль в точку пересечения этих отрезков (2) и проведите окружность, которая пересечет отрезки в двух точках, по одной на каждом (черные точки). Теперь проведите (3) две окружности того же радиуса с центрами в полученных точках. Они пересекутся в двух точках (отмечена только одна из них), после чего через них проводится (4) искомая биссектриса (показана точками).

Повторяя это построение, можно разделить угол на четыре равные части, на восемь, на шестнадцать — число частей удва-



Как разделить угол пополам циркулем и линейкой.

ивается на каждом шаге, так что мы получаем степени двойки: 2, 4, 8, 16, 32, 64 и так далее.

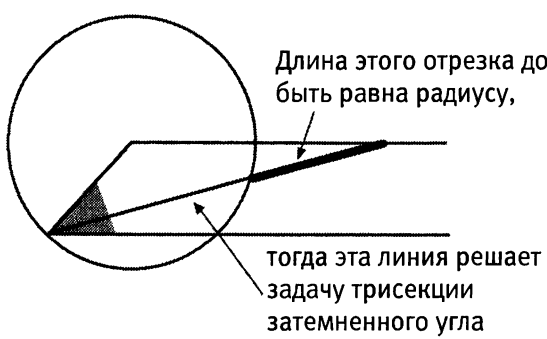
Как я уже говорил, в "Началах" основной аспект, имеющий отношение к нашему рассказу, состоит не в том, что там содержится, а в том, чего там нет. Эвклид не дал никаких методов для решения следующих задач.

- Деление угла точно на три равные части (трисекция угла).
- Построение правильного многоугольника с 7 сторонами.
- Построение отрезка, длина которого равна длине окружности заданного радиуса (выпрямление окружности).
- Построение квадрата, площадь которого равна площади круга заданного радиуса (квадратура круга).
- Построение куба, объем которого ровно вдвое больше объема заданного куба (удвоение куба).

Иногда говорится, что сами греки воспринимали эти упущения как недостатки в монументальном труде Эвклида и посвятили много сил их исправлению. Историки математики нашли очень мало свидетельств в поддержку этих утверждений. В действительности греки были в состоянии решить все перечисленные выше задачи, но для этого им приходилось использовать методы, находившиеся за пределами установленных Эвклидом рамок. Все эвклидовы построения выполнялись циркулем и линейкой без делений. Греческие геометры могли бы выполнить трисекцию угла, используя специальные кривые, называемые коническими сечениями; они могли бы квадрировать круг, используя другую специальную кривую, называемую квадратрисой. С другой стороны, они, кажется, не понимали, что если можно выполнить трисекцию угла, то можно построить и правильный семиугольник (да, я имею в виду *именно* семиугольник; девятиуголь-

ник построить несложно, а вот для семиугольника потребуется очень хитрое построение). На самом деле они, похоже, вообще не изучали следствий, вытекающих из трисекции угла. Душа их, по-видимому, не лежала к таким исследованиям.

Позднейшие математики воспринимали то, что было опущено у Эвклида, в ином свете. Вместо поисков новых средств для решения этих задач они озаботились вопросом о том, чего можно достичь, используя ограниченные средства, выбранные Эвклидом, — циркуль и линейку (причем без всякого жульничества с нанесенными на нее делениями: греки знали, что "прием вставки"[1] со скользящей линейкой с делениями позволяет эффективно и точно разделить угол на три части; один такой метод был изобретен Архимедом). Нахождение того, что можно сделать, а чего нельзя, а также доказательство этого заняли долгое время. К концу 1800-х годов стало окончательно ясно, что ни одну из приведенных выше задач нельзя решить, используя только циркуль и линейку.



Трисекция угла Архимедом.

1 Нулевое деление линейки скользит по заданной кривой, при этом линейка все время проходит через выделенную точку вне кривой. Имеется вторая кривая, и при каждом положении линейки фиксируется то деление на ней, на котором ее пересекает эта вторая кривая. При том положении линейки, когда отмеренная таким образом длина оказывается равной некоторой заданной, по линейке проводится прямая. *(Примеч. перев.)*

Это был замечательный шаг вперед. Вместо того чтобы доказывать, что какой-то конкретный метод позволяет решить конкретную задачу, математики научились доказывать противоположное, причем в очень сильной форме: никакой метод из такого-то класса не способен решить такую-то задачу. Математики начали постигать внутренние ограничения, присущие их предмету. Здесь особенно зачаровывает дополнительный штрих, состоящий в том, что, даже утверждая наличие подобных ограничений, математики смогли доказать, что это *в самом деле* настоящие ограничения.

В надежде избежать неправильного понимания я хочу отметить ряд важных аспектов задачи о трисекции угла.

Требуется *точное* построение. Это очень жесткое условие в рамках идеализированной греческой формулировки геометрии, где линии считаются бесконечно тонкими, а точки — имеющими нулевой размер. Требуется разделить угол на три совершенно равные части. Равные не с точностью во столько-то десятичных знаков, будь то сотня или миллиард, — построение должно иметь *бесконечную* точность. В том же духе, правда, нам разрешается с бесконечной точностью помещать циркуль в любую точку, которая нам задана или которая возникла в процессе построения; раствор циркуля можно с бесконечной точностью задавать равным расстоянию между любыми двумя такими точками; кроме того, можно проводить прямую линию, проходящую точно через любые две такие точки.

В нашей менее совершенной реальности все не так. Так бесполезна ли геометрия Эвклида в нашем реальном мире? Нет. Например, если вы действуете так, как предписывает Эвклид в Предложении 9, имея реальный циркуль и реальный лист бумаги, то вы получите очень неплохую бисектрису. До появления компьютерной графики чертежники именно так и делили

на чертежах угол на две части. Идеализация — не недостаток; она представляет собой основную причину, по которой математика вообще работает. В рамках идеализированной модели можно рассуждать логически, потому что точно известны свойства всех участвующих в ней объектов. Реальный мир с его элементами хаоса не таков.

Однако и идеализация имеет свои пределы, из-за которых модель может иногда стать непригодной. Бесконечно тонкие линии, например, не очень хороши в качестве разметки на дорогах[1]. Модель следует приспособить к соответствующему контексту. Модель Эвклида была приспособлена таким образом, чтобы облегчить вывод логических зависимостей между геометрическими утверждениями. В качестве бонуса она может быть полезна для понимания реального мира, хотя это ни в коей мере не занимало центрального места в рассуждениях Эвклида.

Следующее замечание связано с предыдущим, но идет в несколько ином направлении. Не составляет труда найти построения для приближенной трисекции углов. Если вам требуется точность в один процент или в одну тысячную процента, этого можно добиться. Когда ошибка составляет тысячную долю толщины линии, которую проводит ваш карандаш, она и в самом деле не слишком важна для технических чертежей. Математическая же задача ставится об *идеальной* трисекции. Можно ли произвольный угол *точно* разбить на три части? И ответ здесь — нет.

Иногда говорят, что "нельзя доказать отрицание". Математики знают, что такое утверждение — чушь. Более того, отрицание может обладать собственным очарованием, в особенности когда для доказательства невозможности чего-либо требуются новые методы. Такие методы часто оказываются более мощными и более интересными, чем положительные решения. Когда

1 Именно неидеальность линий требует специальных правил, оговаривающих "черту" в различных видах спорта. *(Примеч. перев.)*

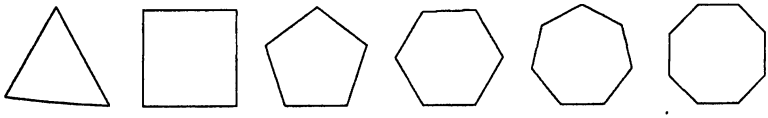
кто-то изобрел новый мощный метод, позволяющий характеризовать вещи, которые можно построить циркулем и линейкой, а также отделил их от тех, построить которые таким образом нельзя, возникает совершенно новый способ мышления. А за ним приходят новые идеи, новые задачи, новые решения — и новые математические теории и инструменты.

Нельзя использовать инструменты, которые нельзя построить. Вам не удастся позвонить другу по мобильному телефону, если мобильных телефонов не существует. Или съесть суфле из шпината, если никто не изобрел сельского хозяйства или не придумал, как пользоваться огнем. Так что создание инструментов может оказаться не менее важным, чем решение задач.

Возможность деления углов на равные части тесно связана кое с чем более милым — с построением правильных многоугольников.

Многоугольник — это замкнутая фигура, образованная отрезками прямых линий. Треугольники, квадраты, прямоугольники, ромбы типа такого ◇ — все они многоугольники. Окружность не есть многоугольник, потому что ее "сторона" представляет собой кривую, а не некоторое число отрезков. Многоугольник называется правильным, если все его стороны имеют одну и ту же длину, а каждая пара соседних сторон пересекается под одним и тем же углом. На рисунке приведены правильные многоугольники с числом сторон 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

Иногда пишут: 3-угольник, 4-угольник, 5-угольник, 6-угольник, 7-угольник и 8-угольник, — что выглядит не слишком кра-



Правильные многоугольники.

сиво, но когда дело доходит до необходимости говорить о многоугольнике с 17 сторонами, такая запись, как "17-угольник", оказывается достаточно практичной. А что касается 65537-угольника (да, такие бывают!) — полагаю, вы уловили суть.

Эвклид и его предшественники должны были много размышлять над вопросом, какие из правильных многоугольников можно построить, поскольку Эвклид дает способы построения для многих из них. Вопрос этот оказался очень увлекательным и вовсе не простым. Греки знали, как построить правильные многоугольники со следующим числом сторон:

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20.

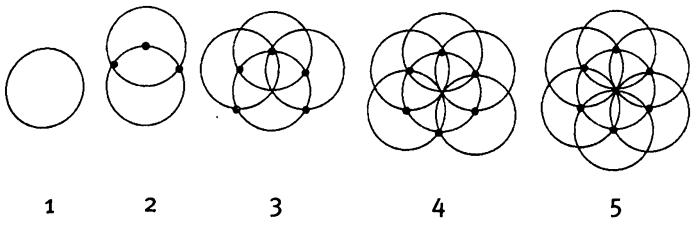
Нам теперь известно, что их *нельзя* построить, когда число сторон равно

7, 9, 11, 13, 14, 18, 19.

Как можно заметить, неучтенным в указанном интервале осталось только одно число — 17. История о 17-угольнике будет рассказана отдельно; она важна по причинам, выходящим за рамки чисто математических.

Когда речь идет о геометрии, нет никакой альтернативы рисованию на листе бумаги с использованием реального циркуля и настоящей линейки. Работа с ними позволяет ощутить единство всего этого предмета. Я хочу показать вам мою любимую конструкцию — построение правильного шестиугольника. Я почерпнул ее из книги, которую в конце 1950-х годов дал мне мой дядя, — книга называлась *Man Must Measure* ("Человек должен измерять") и была совершенно замечательной.

Фиксируем раз и навсегда раствор циркуля, так что все наши окружности будут одного же размера. (1) Начертим окружность. (2) Выберем точку на ней и проведем окружность с цен-



Как построить правильный шестиугольник

тром в этой точке. Она пересекает исходную окружность в двух новых точках. (3) Проведем окружности с центрами в этих точках и получим два новых пересечения. (4) Проведем окружности с центрами в этих точках; обе они пройдут через одну и ту же новую точку пересечения. Полученные шесть точек можно теперь соединить в правильный шестиугольник. Из эстетических соображений приятно (но математически не обязательно) дополнить картину. (5) Проведем окружность с центром в шестой точке. Тогда шесть окружностей пересекутся в центре исходной, образуя нечто вроде цветка.

Эвклид использовал очень похожий метод — более простой, хотя и не такой симпатичный — и *доказал*, что он работает. Его можно найти в Предложении 15 Книги IV.

Глава 3
Персидский поэт

Встань! Бросил камень в чашу тьмы Восток!
В путь, караваны звезд! Мрак изнемог...
И ловит башню гордую султана
Охотник-Солнце в огненный силок.

Для большинства из нас имя Омара Хайяма неразрывно связано с его исполненными иронии четверостишиями "Рубаи", а конкретнее — с их изящным переводом на английский, сделанным Эдвардом Фитцджеральдом. Однако историки математики полагают, что у Хайяма есть еще больше оснований для притязаний на славу. Он занимает видное место среди персидских и арабских математиков, подобравших брошенный греками факел и продолживших развитие новой математики после того, как знание в Западной Европе погрузилось в темные века, а ученые доказательству теорем предпочли теологические споры.

К числу великих достижений Хайяма относится решение кубических уравнений, выполненное в рамках почтенных методов греческой геометрии. Его методы по необходимости вышли

за рамки циркуля и линейки, которыми молчаливо ограничивалась геометрия Эвклида, поскольку эти средства просто не пригодны для решения данной задачи — обстоятельство, о котором греки сильно подозревали, но не могли доказать из-за отсутствия необходимого подхода, лежащего в сфере алгебры, а не геометрии. Впрочем, методы Хайяма выходят за рамки циркуля и линейки не слишком сильно. Он использовал специальные кривые, называемые "коническими сечениями" — по той причине, что их можно построить, пересекая конус плоскостью.

Народная мудрость, касающаяся правил написания научно-популярной литературы, гласит: каждая формула уменьшает продажи книги вдвое. Если так, то это очень плохая новость, потому что понять основные мотивы в данной книге никак не получится, не взглянув на несколько уравнений. Следующая глава, например, посвящена открытиям, сделанным математиками эпохи Возрождения, — открытиям формул для решения любого кубического уравнения или уравнения четвертой степени. Я могу обойтись без формулы для решения уравнений четвертой степени, но вот взглянуть на формулу для кубического уравнения нам так или иначе придется. В противном случае мы вынуждены будем ограничиться словами типа "умножаем некоторые числа на некоторые другие числа и к этому прибавляем некоторые третьи числа, а потом извлекаем квадратный корень, затем прибавляем другое число и из того, что получилось, извлекаем кубический корень; далее делаем то же самое снова, но со слегка другими числами; в конце концов складываем два результата. А, забыл! — иногда еще надо будет делить".

Некоторые авторы бросили вызов этой народной мудрости и даже написали книги *про* уравнения. Видимо, они следуют известному совету из области шоу-бизнеса: "Если у вас дере-

вянная нога, помашите ею". Так вот, в некотором смысле эта книга — об уравнениях; но подобно тому, как можно написать книгу о горах, не требуя при этом, чтобы читатели взбирались на гору, также можно написать книгу об уравнениях, не требуя, чтобы читатели их решали. Тем не менее читатели книги о горах вряд ли поймут ее, если никогда не видели гор, так что для нас и в самом деле будет полезным взглянуть на специально отобранные уравнения.

Основное соглашение, которое я предлагаю заключить, тенденциозно перекошено в пользу читателя: ключевым словом будет "показать". Я хочу, чтобы вы *посмотрели* на уравнения. Ничего *делать* с ними не требуется. По мере необходимости я буду разбирать уравнения на части и объяснять, какие их свойства существенны для нашего рассказа. Я никогда не буду просить вас решить уравнение или произвести с ним какие-либо вычисления. И я всерьез постараюсь избегать их появления — настолько, насколько это возможно.

На самом деле после знакомства с ними уравнения оказываются довольно дружелюбными созданиями — ясными, четкими, иногда даже прекрасными. Тайная истина об уравнениях состоит в том, что они представляют собой простой, ясный язык для описания целого ряда "рецептов" по вычислению разных вещей. Когда я буду в состоянии выразить такой рецепт словами или просто дать вам общее представление о том, что происходит, не вдаваясь в несущественные детали, я так и буду делать. В редких случаях, тем не менее, использование слов становится столь громоздким, что нам придется прибегнуть к символам и специальным обозначениям.

В этой книге имеются три важных типа обозначений, и два из них я упомяну прямо сейчас. Одно — это наш дружище x, то есть "неизвестное". Этот символ обозначает число, которое мы еще не знаем, но значение которого отчаянно пытаемся найти.

Обозначения второго типа — это числа, набранные более мелким шрифтом и слегка приподнятые над строкой — такие как ^{2}, ^{3} или же ^{4}. Они говорят, что некоторое другое число надо умножить само на себя указанное число раз. Так, 5^3 означает $5 \times 5 \times 5$, что равно 125, а x^2 означает $x \times x$, где x — наш символ для неизвестного числа. Читаются они как "квадрат", "куб", "четвертая степень" и так далее, а все вместе они называются *степенями* соответствующего числа.

Не имею ни малейшего понятия почему. Просто надо же их как-то называть.

Или вавилонский метод решения квадратных уравнений достался древним грекам по наследству, или же они его открыли заново. Герон, живший в Александрии где-то между 100 годом до и 100 годом от Р. Х., обсуждал типичные задачи "вавилонского" стиля, используя греческую терминологию. Около 100 года Никомах — вероятно, аравитянин из Иудеи — написал книгу под названием *Introductio Arithmetica*, в которой он отошел от греческой традиции представлять числа геометрическими величинами типа отрезков и площадей. Для Никомаха числа были самостоятельными величинами, а не длинами отрезков. Никомах был пифагорейцем, и это видно из его работы: он имеет дело только с целыми числами и их отношениями и не использует символьных обозначений. Его книга стала стандартным учебником по арифметике на последующее тысячелетие.

Символьные обозначения вошли в алгебру в работах греческого математика Диофанта примерно около 500 года[1].

[1] О Диофанте пишет около 350 года от Р. Х. Феон Александрийский. Диофантова *Arithmetica* посвящена "достопочтеннейшему Дионисию", который может быть епископом Дионисием Александрийским (середина III века от Р. Х.). Диофант мог родиться между 200 и 214, а умереть между 284 и 298 годами. *(Примеч. перев.)*

Единственное, что мы знаем о Диофанте, — это возраст, в котором он умер, да и эти сведения дошли до нас способом, вызывающим сомнения в аутентичности. Греческий сборник задач по алгебре содержит одну следующего содержания: "Диофант провел шестую часть своей жизни мальчиком. Борода его стала расти спустя еще одну двенадцатую часть. Он женился одну седьмую спустя, а его сын родился через пять лет. Сын дожил до половины возраста своего отца, а отец умер через четыре года после сына. Сколько лет было Диофанту, когда он умер?"

Используя методы, подразумевавшиеся этим древним алгебраистом, или же способы более современные, можно вычислить, что ему должно было быть 84 года. Неплохой возраст, если, конечно, задача основана на реальных фактах, что, впрочем, не очевидно.

Это все, что мы знаем о его жизни. Но из позднейших списков и ссылок на них в других документах мы знаем довольно много о его книгах. Он написал одну книгу о многоугольных числах, и часть ее сохранилась. Она организована в эвклидовом стиле, теоремы доказываются на основе логических аргументов, и в целом математическое значение книги невелико. Намного важнее тринадцать книг написанной им *Arithmetica*. Шесть из них сохранились до наших дней благодаря сделанной в тринадцатом столетии греческой копии с более раннего экземпляра. Еще четыре могли всплыть благодаря рукописи, найденной в Иране, но не все исследователи сходятся в том, что она восходит к Диофанту.

Arithmetica представлена как ряд задач. В предисловии Диофант сообщает, что написал ее в качестве задачника для своих учеников. Он использовал специальный символ для неизвестного, а также отдельные символы для его квадрата и куба; кажется, что это сокращения слов *dynamis* (мощь, сила) и *kybos* (куб). Обозначения структурированы не очень хорошо. Сложение у Диофанта записывается просто как размещение символов друг за другом (мы теперь делаем так для умножения), но он использует

специальный символ для вычитания. Есть и символ для равенства, хотя он и мог быть введен позднейшим переписчиком.

В основном *Arithmetica* посвящена решению уравнений. В первой из сохранившихся книг обсуждаются линейные уравнения; в остальных пяти рассматриваются различные виды квадратных уравнений, часто для нескольких неизвестных, а также некоторые специальные кубические уравнения. Характерная особенность состоит в том, что ответы всегда являются целыми или рациональными числами. Сегодня мы называем уравнение диофантовым, если его решения ограничены целыми или рациональными числами. Вот типичный пример из *Arithmetica*: "Найти такие три числа, что их сумма, а также сумма любых двух из них является полным квадратом". Попробуйте решить — это вовсе не просто. Ответ Диофанта: 41, 80 и 320. Сумма всех трех равна $441 = 21^2$. Попарные суммы равны $41 + 80 = 121 = 11^2$, $41 + 320 = 361 = 19^2$ и $80 + 320 = 400 = 20^2$. Неплохо придумано.

В современной теории чисел диофантовы уравнения занимают центральное место. Знаменитый пример — "последняя теорема" Ферма, которая утверждает, что два полных куба (или две степени с более высоким показателем) в сумме не могут дать ту же степень. С квадратами такое делается совсем просто и восходит к Пифагору, например, $3^2 + 4^2 = 5^2$ или $5^2 + 12^2 = 13^2$. Но с кубами, четвертыми степенями, пятыми или любыми высшими степенями такое сделать не удается. Примерно в 1650 году Пьер де Ферма небрежно набросал эту гипотезу (без доказательства — несмотря на фигурирующее в названии его имя, он этой теоремы не доказал) на полях своего личного экземпляра *Arithmetica*. Понадобилось почти 350 лет, пока Эндрю Уайлс — специалист по теории чисел, родившийся в Британии, а ныне живущий в Америке, — доказал, что Ферма был прав.

Историческая традиция в математике иногда оказывается очень долгой.

Алгебра реально появилась на математической сцене в 830 году, когда основное действие переместилось из греческого мира в арабский. В тот год астроном Мохаммед ибн Муса аль-Хваризми написал книгу, озаглавленную *"Аль-Джабр в'аль Мукабала"*, что переводится примерно как "восстановление и упрощение"[1]. Слова эти относятся к стандартным способам обращаться с уравнениями для приведения их к виду, удобному для решения. Из "аль-джабр" происходит современное слово "алгебра". Первый латинский перевод двенадцатого столетия появился под заглавием *Ludus Algebrae et Almucgrabalaeque*.

Книга аль-Хваризми несет на себе следы влияния предшественников — вавилонян и греков, а также основывается на идеях, появившихся около 600 года у Брахмагупты в Индии. Там объясняется, как решать линейные и квадратные уравнения. Непосредственные последователи аль-Хваризми поняли, как решать и некоторые специальные виды кубических уравнений. К числу этих последователей принадлежали Сабит ибн Корра — врач, астроном и философ, который жил в Багдаде и был при этом язычником, — а также египтянин по имени аль-Хасан ибн аль-Хайсам, которого в позднейшей западной литературе, как правило, называют Альхазен. Но более всех знаменит Омар Хайям.

Полное имя Омара было Гияс аль-Дин Абу'ль-Фатх Омар ибн Ибрахим аль-Нишапури аль-Хайями. Слово "аль-Хайями" буквально переводится как "палаточник", что, по мнению ряда ученых, должно указывать на род занятий его отца Ибрахима. Омар родился в Персии в 1047 году и провел бóльшую часть своей деятельной жизни в Нишапуре. Теперь этот город можно найти на карте рядом с городом Мешхед в провинции Хоросан на северо-востоке Ирана, вблизи границы с Туркменистаном.

1 Или "сокращение и сравнение", или "восстановление и противопоставление". *(Примеч. перев.)*

Легенда гласит, что в молодости Омар ушел из дома изучать ислам и Коран под руководством прославленного религиозного деятеля Имама Моваффака, жившего в Нишапуре. Там он свел дружбу с двумя другими учениками — Хасаном Сабахом и Низамом аль-Мульком. Друзья поклялись, что если кто-то из них станет богатым и знаменитым — что вполне могло случиться с теми, кто обучался у Моваффака, — то он поделится своим богатством и властью с двумя другими.

Юноши закончили обучение. Год проходил за годом; соглашение оставалось в силе. Низам отправился в Кабул. Омар, не обладавший серьезными политическими амбициями, провел некоторое время в качестве палаточника (другое возможное объяснение его имени аль-Хайями). Страстью его стали науки и математика, и он отдавал им бóльшую часть своего свободного времени. Затем вернулся Низам, который добился для себя должности в правительстве и стал управляющим делами султана Альп Арслана в его резиденции в Нишапуре.

Поскольку Низам достиг богатства и славы, Омар и Хасан напомнили ему о клятве. Низам испросил у султана дозволения помочь своим друзьям и, когда оно было получено, исполнил клятву. Хасан получил хорошо оплачиваемую работу в правительстве, но Омар пожелал просто продолжать свои научные занятия в Нишапуре, где он мог бы возносить молитвы за здоровье и благополучие Низама. Старый школьный друг организовал для Омара правительственное жалованье, дабы тот мог посвящать свое время занятиям. На том и порешили.

Хасан позднее попытался подсидеть вышестоящего чиновника и лишился своей синекуры, а Омар тихо и спокойно жил как прежде и даже получил назначение в комиссию по реформированию календаря. Персидский календарь основывался на движении Солнца, и наступление первого дня нового года нередко переносилось, что создавало большие неудобства. Работа очень подходила квалифицированному математику, и

Омар применил свои математические и астрономические знания для вычисления наступления нового года в любой наперед заданный год.

Примерно в то же время он написал "Рубайят", или "Рубаи", что довольно приблизительно переводится как "четверостишия". Это форма лирической поэзии. Рубаи состоят из четырех строк, рифмующихся определенным образом — точнее говоря, одним из двух возможных способов[1]. "Рубаи" Омара Хайяма были собранием таких стихов. Один из них ясно указывает на его деятельность по реформированию календаря:

Дни — волны рек в минутном серебре,
Песка пустыни в тающей игре.
Живи Сегодня. А Вчера и Завтра
Не так нужны в земном календаре.

Рубаи Омара носили отчетливо нерелигиозный характер. Многие из них восхваляют вино и его действие на человека. Имеются и дерзкие и лукавые посвящения вину:

Дал Нишапур нам жизнь иль Вавилон,
Льет кубок сладость или горек он? —
По капле пей немую влагу Жизни!
И жизнь по капле высохнет, как сон.

Некоторые другие стихи высмеивают религиозные верования. Интересно, что думал султан о человеке, которому он выплачивал неплохое жалованье, и какие мысли приходили в голову имаму по поводу плодов приобретенного у него образования?..

Тем временем впавший в немилость Хасан, которому пришлось уехать из Нишапура, связался с шайкой бандитов и,

1 *aaba* или *aaaa*. *(Примеч. перев.)*

пользуясь преимуществом своего образования, сделался их главарем. В 1090 году эти бандиты под предводительством Хасана захватили замок Аламут в горах Эльбурз, что прямо к югу от Каспийского моря. Они терроризировали всю область, и Хасан приобрел недобрую славу как Старец Горы. Его приспешники, известные как ассасины, или гашишины (из-за их пристрастия к гашишу — сильному наркотику, получаемому из конопли), построили шесть горных укреплений, из которых они совершали вылазки с целью убийства видных религиозных и политических деятелей. От этого их прозвища и происходит слово "assassin", то есть убийца. Таким образом, Хасан и сам смог стать богатым и знаменитым, как и подобало ученику Моваффака, хотя на тот момент он не был расположен делиться достигнутым со старыми друзьями.

Пока Омар занимался вычислением астрономических таблиц и методами решения кубических уравнений, Низам продолжал свою политическую карьеру, пока, по злой иронии изощренной судьбы, его не убили бандиты Хасана. Омар дожил до 76 лет и умер, как передают, в 1123 году. Хасан умер на следующий год в возрасте 84 лет. Ассасины продолжали сеять политическое опустошение, пока их не сокрушили монголы, в 1256 году захватившие Аламут.

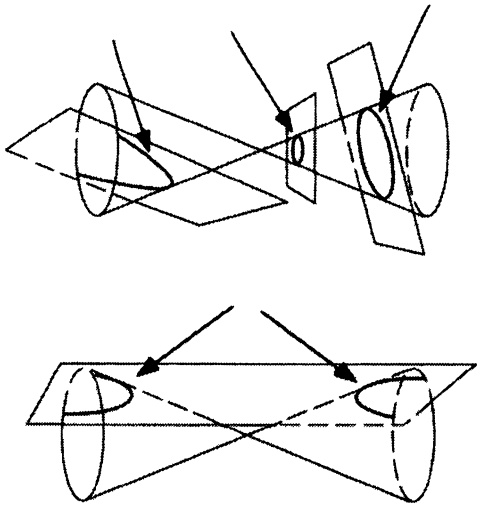
Вернемся к математике Омара. Около 350 года до Р. Х. греческий математик Менехм открыл специальные кривые, известные как конические сечения, которые, как полагают исследователи, он использовал для решения задачи об удвоении куба. Архимед развил теорию этих кривых, а Аполлоний Пергский систематизировал и обобщил эту тему в своей книге "*Конические сечения*". Что особенно интересовало Омара Хайяма — это открытие греками того факта, что конические сечения можно применить к решению определенных кубических уравнений.

Конические сечения называются так потому, что их можно получить, пересекая конус плоскостью. Точнее говоря — двойной конус, похожий на два рожка мороженого, соединенных своими острыми концами. Одинарный конус образован набором отрезков прямых линий, которые все пересекаются в одной точке и проходят через определенную окружность — "основание" конуса. Но в греческой геометрии прямолинейный отрезок всегда можно продолжить неограниченно далеко, и в результате получается двойной конус.

Три основных типа конических сечений — это эллипс, парабола и гипербола. Эллипс представляет собой замкнутую овальную кривую, которая возникает, когда секущая плоскость проходит только через одну половину двойного конуса. (Окружность является частным случаем эллипса и получается, когда секущая плоскость в точности перпендикулярна оси конуса.) Гипербола состоит из двух симметрично расположенных незамкнутых кривых, которые в принципе уходят на бесконечность; она возникает, когда секущая плоскость проходит через обе половины двойного конуса. Парабола является переходной формой — это одна незамкнутая кривая, получающаяся, когда секущая плоскость параллельна какой-либо из прямых, лежащих на поверхности конуса.

На большом расстоянии от вершины конуса кривые, составляющие гиперболу, проходят все ближе и ближе к двум прямым линиям, которые параллельны тем прямым, где конус пересекла бы параллельная плоскость, проходящая через вершину. Эти прямые называются асимптотами.

Греческие геометры широко изучали конические сечения, и в этом и состоит их основной вклад в прогресс за рамками тех идей, что были зафиксированы Эвклидом. Эти кривые жизненно важны и в современной математике, но по причинам, сильно отличным от тех, что двигали греками. С алгебраической точки зрения они представляют собой следующие по степени простоты кривые после прямых линий. Они важны и в при-



Конические сечения.

кладной науке. Орбиты планет в Солнечной системе являются эллипсами, как это заключил Кеплер на основе наблюдений Тихо Браге за Марсом. Эллиптичность орбит послужила одним из соображений, которые привели Ньютона к формулировке его знаменитого "закона обратных квадратов" для гравитации. Это в свою очередь позволило понять, что целый ряд аспектов нашей вселенной ясно проявляет математические закономерности. Это радикально отразилось на астрономии, поскольку движения планет стали поддаваться вычислениям.

Большинство сохранившихся математических работ Омара посвящены теории уравнений. Он рассматривал решения двух типов. Первые, в духе Диофанта, он называл алгебраическими решениями в целых числах; пожалуй, больше подошло бы при-

лагательное "арифметические". Решения второго вида он называл геометрическими, под чем он понимал, что решение можно построить геометрическими средствами в терминах конкретных длин, площадей или объемов.

Свободно пользуясь коническими сечениями, Омар разработал геометрические решения для всех кубических уравнений и разъяснил их в своей книге "Алгебра", законченной в 1079 году. Поскольку отрицательные числа в то время еще не получили права на существование, уравнения приходилось каждый раз устраивать таким образом, чтобы все слагаемые оказывались положительными.

Это правило привело к возникновению огромного числа различных случаев, которые в наши дни все рассматриваются как по сути дела единственный случай, если не считать знаков при числах. Омар различает *четырнадцать* различных типов кубических уравнений в зависимости от того, какие слагаемые появляются в каждой части уравнения. Его классификация кубических уравнений такова:

куб = квадрат + сторона + число,
куб = квадрат + число,
куб = сторона + число,
куб = число,
куб + квадрат = сторона + число,
куб + квадрат = число,
куб + сторона = квадрат + число,
куб + сторона = число,
куб + число = квадрат + сторона,
куб + число = квадрат,
куб + число = сторона,
куб + квадрат + сторона = число,
куб + квадрат + число = сторона,
куб + сторона + число = квадрат.

Каждое из указанных слагаемых должно иметь положительный численный коэффициент.

Вы, возможно, недоумеваете, почему в списке нет случаев типа

куб + квадрат = сторона.

Причина в том, что в этих случаях можно разделить обе части уравнения на неизвестное, в результате чего уравнение сведется к квадратному.

Омар изобрел свои решения не полностью самостоятельно, а основываясь на предшествующих греческих методах решения различных типов кубических уравнений с использованием конических сечений. Он систематически развил эти идеи и решил такими методами все четырнадцать типов кубических уравнений. Предшествующие математики, как он заметил, нашли решения в ряде случаев, но все их методы были очень специальными и каждый случай требовал отдельного построения; до Омара никто не изучал весь охват возможных случаев, не говоря уж о том, чтобы дать их решения. "Я же, напротив, никогда не ослабевал в своем желании сделать известными, притом со всей точностью, все возможные случаи и в каждом из них провести различие между возможным и невозможным". Под "невозможным" он понимал отсутствие положительного решения. Чтобы получить представление о его работе, приведем его решение случая "куб, некоторые стороны и некоторые числа равны некоторым квадратам", что мы бы записали как

$$x^3 + bx + c = ax^2.$$

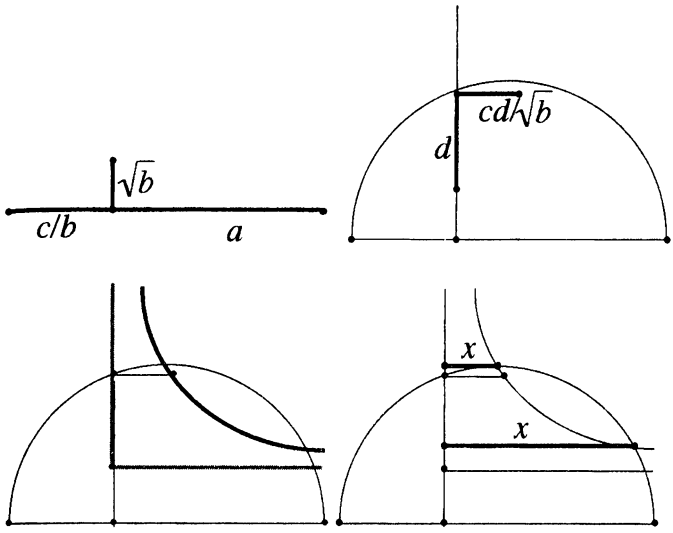
(Поскольку нас не заботит положительность или отрицательность, мы бы, скорее всего, перенесли член из правой части в левую с изменением знака, получив таким образом уравнение $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$.)

Омар снабжает своих читателей инструкциями, состоящими в следующей последовательности шагов. (1) Проводим три отрезка с длинами c/b, $\sqrt{b}$ и a так, чтобы образовался прямой угол. (2) Проводим полуокружность, диаметр которой — горизонтальный отрезок. Продолжаем вертикальные прямые до пересечения с ней. Если жирный вертикальный отрезок имеет длину d, добиваемся, чтобы отрезок жирной горизонтальной прямой имел длину $cd/\sqrt{b}$. (3) Проводим гиперболу (сплошная линия), асимптоты которой (те специальные прямые, к которым приближается гипербола) — серые прямые, проходящие через только что построенную точку. (4) Находим, где гипербола пересекает полуокружность. Тогда длины двух жирных отрезков, обозначенные как x, дают два (положительных) решения кубического уравнения.

Подробности, как всегда, не так важны, как общий стиль. Выполняем ряд эвклидовых построений циркулем и линейкой, потом прибегаем к помощи гиперболы, потом еще немного эвклидовых построений — и готово.

Омар дает аналогичные конструкции для решения каждого из своих четырнадцати случаев и доказывает, что решения верны. В его анализе есть несколько дыр: при некоторых значениях коэффициентов a, b и c требуемые в его построении точки не существуют. В приведенном выше построении, например, гипербола может вообще не пересекать полуокружность. Но если отбросить эти придирки, он выполнил впечатляющую и очень систематическую работу.

Некоторые из образов в поэзии Омара являются математическими и, как представляется, содержат аллюзии на его собственные работы, в тоне возражений самому себе, который проходит через все его творчество:



Данное Омаром Хайямом решение кубического уравнения.

Умом ощупал я все мирозданья звенья,
Постиг высокие людской души паренья,
И, несмотря на то, уверенно скажу:
Нет состояния блаженней опьяненья.

Одно особенно впечатляющее четверостишие звучит так:

Кто мы? Куклы на нитках, а кукольщик наш — небосвод.
Он в большом балагане своем представленье ведет.
Он сейчас на ковре бытия нас попрыгать заставит,
А потом в свой сундук одного за другим уберет.

Это напоминает знаменитую платоновскую аллегорию теней на стене пещеры и подходит равным образом для описания и символьных вычислений в алгебре, и человеческой натуры. Омар был талантливым летописцем и того и другого.

Глава 4
Ученый игрок

"Клянусь святым Евангелием Господа нашего и как истинный человек чести не только никогда не публиковать ваши открытия, если вы мне доверите их, но да будет моя вера истинного христианина вам порукой, что я зашифрую их так, чтобы после моей смерти никто не смог их понять". Этот торжественный обет был, как говорят, дан в 1539 году.

Италия эпохи Возрождения была колыбелью нового, и математика не составляла исключения. В иконоборческом духе того времени математики Ренессанса задались целью преодолеть ограничения древней математики. Один из них разрешил загадку кубического уравнения и теперь обвинял другого в воровстве своего секрета.

Гневающегося математика звали Никколо Фонтана по прозвищу Тарталья — Заика. В воровстве интеллектуальной собственности обвинялся математик, врач, неисправимый плут и закоренелый азартный игрок по имени Джироламо Кардано, также известный как Жером Кардан. Около 1520 года Джироламо, как истинный блудный сын, успешно растратил наследство, оставленное ему отцом. Разорившись, он обратился к азартным

играм как к источнику дохода, найдя эффективное применение своих математических способностей для оценки шансов на выигрыш. Он водился с сомнительной компанией; как-то раз, заподозрив другого игрока в нечестной игре, он полоснул его ножом по лицу.

То были суровые времена, и Джироламо был суровым человеком. А кроме того — на редкость оригинальным мыслителем и автором одного из наиболее знаменитых и влиятельных текстов по алгебре во всей истории.

О Джироламо нам известно много, потому что в 1575 году он сам рассказал нам о себе в "Книге моей жизни". Начинается она так:

> "Эту Книгу Моей Жизни я намереваюсь написать, следуя примеру Антонина Философа[1], прославленного как мудрейший и достойнейший из людей, хорошо понимая, что ни одно деяние смертных не совершенно, а еще менее того — свободно от злословия; однако сознавая при этом и то, что из всего, что человеку дано достичь, ничто другое не доставляет больше радости и не ценится сильнее, чем познание истины.
>
> Ни единого слова, спешу заверить, не было добавлено в угоду тщеславию, и ни единого для пустого приукрашивания; вместо того, насколько возможно, здесь собрано только пережитое, события, о которых мои ученики... были осведомлены или в коих они принимали участие. Эти краткие эпизоды моей истории в свою очередь записаны были мною в повествовательной форме, дабы стать частью этой книги".

[1] Марка Аврелия, римского императора с 161 по 180 г. *(Примеч. перев.)*

Как и многие математики того времени, Джироламо занимался астрологией, так что он отмечает астрологические обстоятельства, сопутствовавшие его рождению:

> "Хотя, как я слышал, напрасно пытались применить различные абортивные средства, я нормально родился в 24-й день сентября года 1500, когда первый час ночи истек уже более чем наполовину, но менее чем на две трети... Марс угрожал обоим главным светилам из-за неблагоприятного их расположения и потому, что он был в четвертном аспекте с Луною.
> ...Я легко мог родиться уродом, если бы не тот факт, что положение предыдущего соединения приходилось на 29° в Деве, где господствует Меркурий. И так как его положение не совпадало ни с местом Луны, ни с местом асцендента и он не находился в аспекте с предпоследним делением Девы, я непременно должен был бы родиться уродом, и даже легко могло случиться, что я выйду из утробы разорванным, чего едва и не произошло.
> Так был я рожден, или, скорее, исторгнут мощными силами из чрева матери; я был почти мертв. Волосы мои были темны и завиты. Меня вернули к жизни ванной из теплого вина, которая могла бы оказаться гибельной для любого другого ребенка. Моя мать провела в тяготах три полных дня, и однако же я выжил"[1].

Одна глава в "Книге моей жизни" перечисляет написанные Джироламо книги, и первой в списке идет "Великое искусст-

1 Не без некоторых потерь:
"...и Солнце, и обе зловещие планеты — Венера и Меркурий — находились в человеческих знаках, вследствие чего у меня и не обнаружилось отклонений от человеческого образа; а так как в асценденте был Юпитер и во всем гороскопе господствовала Венера, у меня обнаружились неправильности только в половых органах: случилось так, что в возрасте от 21 до 31 года я оказался не способен к совокуплению с женщинами и часто горько оплакивал свою участь, завидуя судьбе других людей". *(Примеч. перев.)*

во"[1] — один из трех упоминаемых им "трактатов по математике". Он также писал об астрономии, физике, вопросах морали, драгоценных камнях, воде, медицине, предсказаниях и теологии.

Однако для нашего рассказа важно только "Великое искусство". Подзаголовок этой книги — "Правила алгебры" — объясняет почему. В этой книге Джироламо не только собрал методы решения квадратных уравнений, известные вавилонянам, но и открыл новые решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени. В отличие от решений Хайяма, которые опирались на геометрию конических сечений, решения в "Великом искусстве" были чисто алгебраическими.

Я уже упоминал о двух типах математических обозначений, которые оба видны в таких выражениях, как x^3 для куба неизвестного. Обозначение первого типа состоит в использовании букв (в нашем случае — x) для чисел — или неизвестных, или известных, но произвольных. Обозначение второго типа — это использование приподнятых над строкой чисел для указания степени, так что верхняя 3 в данном случае обозначает куб числа x, то есть $x \times x \times x$. Теперь мы подошли к обозначениям третьего типа — последним из тех, что нам понадобятся.

Обозначение третьего типа очень милое и выглядит так: $\sqrt{}$. Этот символ означает квадратный корень. Например, $\sqrt{9}$ — квадратный корень из девяти — обозначает число, которое, будучи умножено на само себя, дает 9. Поскольку $3 \times 3 = 9$, мы видим, что $\sqrt{9} = 3$. Однако не всегда все обстоит так просто. Наиболее печально известный квадратный корень, который, согласно не слишком правдоподобной легенде, оказался причиной того, что математика, привлекшего к нему внимание, —

[1] Лат.: *Ars Magna. (Примеч. перев.)*

Гиппаса из Метапонта — выбросили с корабля за борт, — это квадратный корень из двух: $\sqrt{2}$. Его точное выражение в виде десятичной дроби требует неограниченного продолжения. Начинается оно так:

1, 41421356237309504 88...,

но не может на этом *прекратиться*, поскольку квадрат приведенного числа на самом деле равен

1,99999999999999999999952235666390743 8144,

что, очевидно, есть не вполне то же самое, что 2.

На этот раз известно, откуда взялось такое обозначение. Это искаженная буква "r", обозначающая "radix" — латинское слово "корень". Математики понимают его таким образом и читают выражение $\sqrt{2}$ как "корень из двух".

Кубические корни, корни четвертой, пятой и так далее степеней обозначаются помещением маленького приподнятого числа перед знаком "корень" — таким образом: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$

Кубический корень из данного числа — это такое число, куб которого дает исходное, и аналогично для других корней. Таким образом, кубический корень из 8 есть 2, поскольку $2^3 = 8$. Кубический же корень из 2 можно выразить в виде десятичной дроби только приближенно. Он начинается таким образом:

1, 2599210498948731648 —

и продолжается, если вы запасетесь достаточным терпением, бесконечно.

Именно это число появляется в античной задаче об удвоении куба.

Примерно к 400 г. греческая математика утратила свое место на переднем крае этой науки.

Место действия переместилось на Восток — в Аравию, Индию и Китай. Европа погрузилась в "темные века", и хотя они были не такими уж темными, какими их нередко изображают, но все же темными в достаточной мере. Распространение христианства возымело тот плачевный побочный эффект, что знание и ученость сконцентрировались в церквях и монастырях. Многие монахи переписывали работы великих математиков, таких как Эвклид, но лишь очень немногие из них понимали, *что* они переписывают. Древние греки были в состоянии с двух сторон прорыть туннель через гору так, чтобы обеспечить встречу посередине; способ же, которым ранние англосаксы проводили землемерные работы, состоял в том, чтобы разложить в поле план в масштабе 1 : 1. Даже понятие изображения, сделанного в определенном масштабе, было утеряно. Если бы англосаксы пожелали создать точное изображение Англии, им пришлось бы сделать его размером с Англию. Их карты обычного размера были крайне неточными.

К концу пятнадцатого столетия фокус математической активности снова сдвинулся в сторону Европы. На Среднем и Дальнем Востоке подошел к концу заряд креативности, а Европа включила второе дыхание, освобождаясь от объятий Римской церкви и ее страха перед всем новым. По иронии судьбы новым центром интеллектуальной активности становится Италия — по мере того как Рим ослаблял хватку в своем собственном тылу.

Это тектоническое изменение в европейской науке и математике началось с публикации в 1202 году книги под названием *Liber Abbaci*, написанной Леонардо Пизанским, который много позднее получил прозвище Фибоначчи, сына Боначчио, под которым теперь и известен, несмотря на то что имя это придумали в девятнадцатом столетии. Отец Леонардо — Гиль-

ельмо — служил на таможне в Буджии (ныне в Алжире) и в своей работе неминуемо сталкивался с людьми самых разных культур. Он обучил своего сына новомодным знакам для чисел, изобретенным индусами и арабами, — предшественникам наших десятичных обозначений от 0 до 9. Леонардо позднее писал, что "мне так нравилось обучение, что я продолжал изучать математику во время поездок по работе в Египет, Сирию, Грецию, Сицилию и Прованс и получал особое удовольствие от дебатов с учеными из тех мест". На первый взгляд заглавие книги Леонардо говорит о том, что это книга — об абаке, т. е. механическом вычислительном приспособлении, состоящем из бусинок, скользящих по проволочкам, или же из галечных камешков, передвигаемых в песчаном желобе. Но как латинское слово *calculus*, относящееся к этой *гальке*, позднее приобрело другое, более техническое значение[1], так и слово *abbaco* — рамка для счета — стало обозначать искусство вычисления. *Liber Abbaci* была первым арифметическим текстом, в котором индоарабские символика и методы были принесены в Европу. Значительная часть книги отведена новым применениям арифметики к практическим предметам, подобным обмену валют.

Одна задача — об идеализированной модели роста популяции кроликов — привела к замечательной числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и так далее, где каждое следующее число, начиная с 2, равно сумме двух предыдущих. Эта "последовательность Фибоначчи" более всего прославила Леонардо — не применительно к размножению кроликов, где следствия из нее нулевые, а за то, что она представляет собой замечательный пример математической закономерности и иг-

1 По-английски "calculus" означает "исчисление", наиболее часто — в значении "дифференциальное и интегральное исчисление". По-русски этот же предмет называется математическим анализом или, когда контекст ясен, просто анализом (откуда производится и прилагательное "аналитический"). (*Примеч. перев.*)

рает ключевую роль в теории иррациональных чисел. Леонардо и представить себе не мог, что этот маленький *jeu d'esprit*[1] затмит в глазах потомков все остальное, что он сделал в своей жизни.

Леонардо написал еще несколько книг, и его *Practica Geometriae*, появившаяся в 1220 году, содержала значительную часть "Начал" Эвклида, а также кое-что из греческой тригонометрии.

В Книге X "Начал" Эвклида обсуждаются иррациональные числа, построенные как вложенные друг в друга квадратные корни, типа $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Леонардо доказал, что эти иррациональные числа не подходят для решения кубических уравнений. Отсюда не следует, что корни кубического уравнения нельзя построить при помощи циркуля и линейки, поскольку другие комбинации квадратных корней могут в принципе приводить к решению. Но это был намек на то, что, если пользоваться лишь предлагаемыми Эвклидом инструментами, кубическое уравнение может оказаться неразрешимым.

В 1494 году Лука Пачоли свел вместе значительную часть существовавшего тогда математического знания в книге по арифметике, геометрии и пропорции. Она также включала индо-арабские числа, коммерческую арифметику, выжимки из Эвклида и тригонометрию Птолемея. Сквозной темой был элемент замысла в природе, воплощенный в пропорциях — пропорциях человеческого тела, перспективы в живописи, теории цвета.

Пачоли продолжил традицию "риторической" алгебры, используя слова, а не символы. Неизвестное было "штукой" — итальянское слово *cosa*, и в течение определенного периода практикующие алгебраисты были известны под именем *cossist*'ов. Он также использовал ряд стандартных сокращений, продолжая (но не сумев улучшить) подход, впервые намечен-

[1] Игра ума. *(Примеч. перев.)*

ный Диофантом. Моррис Клайн в своем монументальном "Математическом мышлении от Античности до современности" констатирует: "Серьезное замечание по поводу математического развития арифметики и алгебры между 1200 и 1500 годами состоит в том, что книга Пачоли едва ли содержит что-либо, выходящее за рамки *Liber Abbaci* Леонардо Пизанского. В действительности арифметика и алгебра... основывались на книге Леонардо". В конце своей книги Пачоли замечает, что относительно решения кубического уравнения понимания ничуть не больше, чем относительно квадратуры круга. Но такому положению дел скоро предстояло измениться.

Первое по-настоящему существенное продвижение произошло в городе Болонья примерно в конце первой трети шестнадцатого столетия. Внимания на это событие поначалу не обратили.

Джироламо Кардано был побочным сыном миланского юриста Фацио Кардано и молодой вдовы по имени Кьяра Микериа, у которой было еще трое детей от первого брака. Он родился в 1501 году в Павии — городе, входившем в герцогство Миланское. Когда к Милану подобралась чума, беременную Кьяру убедили уехать в деревню, где и родился Джироламо. Все трое ее старших детей, оставшиеся в городе, умерли от чумы.

Согласно автобиографии Джироламо, "отец мой носил багряную накидку — одеяние, нетипичное для нашего сообщества; его никогда не видели без маленькой черной шапочки... К пятидесяти пяти годам он лишился всех зубов. Он был хорошо знаком с работами Эвклида; надо сказать, что плечи его были сгорблены от усердных занятий... Мать мою легко было вывести из себя; она была скора на память и сообразительность и была тучной и набожной женщиной. Скоропалительность отличала обоих моих родителей".

Хотя Фацио и был юристом по профессии, он был достаточно искушен в математике, чтобы консультировать по геометрии Леонардо да Винчи. Он преподавал геометрию в университете в Павии и в благотворительном учреждении Пьятти в Милане. И еще он учил математике и астрологии своего незаконного сына Джироламо:

> "В раннем детстве отец обучил меня основам арифметики, и примерно тогда же он приобщил меня к таинствам; откуда он приобрел эти познания, мне неизвестно. Вскоре он обучил меня началам арабской астрологии... А когда мне исполнилось двенадцать, он преподал мне первые шесть книг Эвклида".

У ребенка наблюдались проблемы со здоровьем; попытка вовлечь его в семейное дело успеха не принесла. Джироламо сумел убедить находившегося в сомнениях отца позволить ему изучать медицину в университете Павии, но отец предпочитал право.

В 1494 году Карл VIII Французский вторгся в Италию, и последовавшая война продолжалась, утихая и вновь разгораясь, пятьдесят лет. Обострение военных действий привело к закрытию университета в Павии, и Джироламо перебрался в Падую, чтобы продолжать занятия. Судя по всему, он был одним из лучших студентов, и когда Фацио умер, Джироламо начал кампанию с целью стать ректором университета. Хотя многие не любили его за склонность высказываться без обиняков, он был избран с перевесом в один голос.

Тогда-то он и растратил по мелочам полученное им наследство и обратился к азартным играм, которые превратились в пагубную привычку на всю оставшуюся часть его неспокойной жизни. И не только это:

> "В очень ранний период моей жизни я начал серьезно посвящать себя занятиям фехтованием всякого рода и путем упор-

ных упражнений достиг некоторых успехов даже среди наиболее дерзких... По ночам, даже в нарушение распоряжений герцога, я вооружался и отправлялся рыскать по городу, в котором жил... Лицо мое скрывал капюшон из черной шерсти, а еще я надевал туфли из овчины... Я часто бродил всю ночь, пока не брезжил рассвет, с меня же капал пот от напряжения, с которым я исполнял серенады на своих музыкальных инструментах".

Даже подумать страшно.

В 1525 году, после присуждения ему медицинской степени, Джироламо попытался вступить в Коллегию врачей в Милане, но его не приняли — формально из-за незаконного происхождения, но на самом деле главным образом из-за печальной известности, которую он приобрел в качестве человека, лишенного такта. Так что вместо того, чтобы стать членом престижной коллегии, Джироламо устроился врачом в соседнюю деревушку Сакко. Это обеспечивало ему небольшой доход, но дело шло вяло. Он женился на Лучии Бандарини — дочери капитана милиции — и перебрался ближе к Милану в надежде увеличить свой доход, чтобы содержать семью, однако Коллегия снова его отвергла. Не в силах следовать по пути законной карьеры врача, он обратился к азартным играм, но даже его математические познания не помогли восстановить свое состояние:

"Вероятно, ни в каком отношении не достоин я похвалы; ибо насколько сильно меня привлекали излишества шахматной доски и игорного стола, настолько же я знаю, что в глазах людей я заслуживаю самого сурового порицания. Я играл и в то и в другое многие годы — в шахматы более сорока лет, а в кости — около двадцати пяти; и не только каждый год, но — сознаюсь со стыдом — каждый день, теряя при этом все — мысль, состояние и время".

Семейство поселилось в бедном доме. Мебель и драгоценности Лучии давно уже были заложены. "Я вступил на путь долгой и почетной карьеры. Но долой почести и приобретения вместе с пустым тщеславием и неумеренными наслаждениями! Мне конец! Я погиб!"

На свет появился их первый ребенок.

> "После двух выкидышей и рождения двух мертвых младенцев мужского пола, доношенных лишь до четырех месяцев, так что я... временами уже подозревал какое-то зловредное влияние, моя жена разродилась первым сыном... Он был глух на правое ухо... Два пальца на левой ноге у него... соединялись перепонкой. Сзади он был слегка горбат, но не до степени уродства. Мальчик мирно жил до своего двадцатитрехлетия. После того он влюбился... и женился на женщине без приданого Брандонии ди Серони".

В тот момент покойный уже отец Джироламо пришел ему на выручку, пусть и не совсем прямым образом. Кафедра, которую некогда занимал Фацио в университете, оставалась вакантной, и Джироламо ее получил. Кроме того, он немного врачевал на стороне, несмотря на отсутствие официального разрешения. Несколько чудесных исцелений — судя по всему, счастливых случайностей, если учесть состояние медицины в то время, — создали ему репутацию. Даже некоторые из членов коллегии обращались к нему по поводу случаев из своей практики, и в течение некоторого времени казалось, что для него наконец откроются двери этой уважаемой организации. Но снова, в который раз, склонность Джироламо высказывать вслух то, что у него на уме, свела все на нет; он опубликовал ядовитые нападки на компетенцию и характер членов коллегии. Джироламо осознавал, что ему недостает деликатности, но, судя по всему, не считал это недостатком: "При чтении лекций и в

публичных спорах я был намного более искренним и аккуратным, чем в выказывании осмотрительности". В 1537 году это отсутствие осмотрительности привело к тому, что его прошение было снова отклонено.

Однако в конце концов его репутация укрепилась настолько, что у Коллегии просто не осталось выбора, и по прошествии двух лет он стал ее членом. Жизнь стала налаживаться — особенно после опубликования двух книг о математике. Карьера Джироламо развивалась сразу на нескольких фронтах.

Примерно в то же время Тарталья добился значительного успеха — ему удалось решить широкий класс кубических уравнений. Неохотно поддавшись на уговоры, он рассказал Кардано о своем эпическом открытии. Не приходится удивляться, что, получив шесть лет спустя экземпляр текста Кардано по алгебре под названием "Великое искусство, или О правилах алгебры" и найдя там полное изложение своего секрета, Тарталья был разъярен.

Кардано не приписывал себе его авторство, поскольку сослался на Тарталью: "В наши дни Шипионе[1]-дель Ферро из Болоньи решил случай куба и первой степени, равных постоянной, — очень изящное и достойное восхищения достижение... Состязаясь с ним, мой друг Никколо Тарталья из Брешии... решил тот же случай, когда участвовал в поединке с его [дель Ферро] учеником Антонио Марио Фиором, и, подвигнутый к тому многократными мольбами, передал решение мне".

Тем не менее Тарталья был страшно раздосадован тем, что его бесценный секрет разглашен по всему свету, а еще более его уязвлял тот факт, что многие люди будут помнить автора книги, а не истинного открывателя этого секрета.

1 В традиционной транслитерации — Сципион. *(Примеч. перев.)*

Так, по крайней мере, видел события Тарталья, и этот взгляд практически целиком лег в основу всех известных свидетельств. Как указывает Ричард Уитмер в своем переводе "Великого искусства", "Мы почти полностью зависим от печатного изложения позиции Тартальи, которую ни при каком усилии воображения нельзя считать объективной". Один из слуг Кардано по имени Лодовико Феррари позднее утверждал, что присутствовал на встрече, и говорил, что там не было решено держать метод в тайне. Феррари позднее стал учеником Кардано и решил — или помог решить — уравнение четвертой степени, так что и его нельзя рассматривать как свидетеля более объективного, чем Тарталья.

Положение бедного Тартальи усугублялось тем, что дело было не просто в отказе признать его авторство. В Европе эпохи Возрождения математические секреты могли стоить немалых денег. Для этого не обязательно было играть в азартные игры — способ, который предпочитал Кардано, — а можно было участвовать в публичных состязаниях.

Часто говорят, что математика — это не спорт, где есть зрители, но в 1500-х годах дело обстояло по-другому. Математики вполне могли обеспечивать себе дополнительный заработок, вызывая друг друга на публичные поединки, в которых каждый предлагал своему оппоненту ряд задач и победителем объявлялся тот, кто получит наибольшее число правильных ответов. Эти представления захватывали меньше, чем кулачный бой или фехтовальные поединки, но зрители могли биться об заклад по поводу того, кто выиграет, даже если сами они не имели ни малейшего представления о том, что для этого требуется. Кроме призовых денег победители привлекали к себе и учеников, готовых платить за обучение, так что публичные состязания были прибыльны вдвойне.

Тарталья был не первым, кто нашел алгебраическое решение кубического уравнения.

Болонский профессор Шипионе дель Ферро открыл свое решение некоторых типов кубических уравнений где-то около 1515 года. Он умер в 1526-м, после чего и его бумаги, и его профессорскую должность унаследовал зять Аннибале дель Наве. В этом можно быть уверенным, поскольку около 1970 года благодаря усилиям Э. Бартолотти сами бумаги обнаружились в библиотеке Болонского университета. Согласно Бартолотти, дель Ферро, скорее всего, знал, как решать три типа кубических уравнений, но передал метод решения только одного из них: куб плюс вещь равно числу.

Знание об этом решении сохранил ученик дель Наве и дель Ферро по имени Антонио Марио Фиор. И именно Фиор, выбравший своей целью зарабатывать на жизнь преподаванием математики, выступил с эффектным маркетинговым ходом. В 1535 году он вызвал Тарталью на публичный поединок по решению кубических уравнений.

Ходили слухи, что метод решения кубических уравнений найден, а ничто не воодушевляет математика сильнее, чем знание, что задача имеет решение. Риск зря потратить время на неразрешимую задачу исключен; основная опасность состоит лишь в том, что можно оказаться недостаточно умным, чтобы найти ответ, факт существования которого не подлежит сомнению. Все, что требуется, — это значительная доля уверенности в себе (которой у математиков обычно в достатке — даже если она оказывается самонадеянностью).

Тарталья заново открыл метод дель Ферро, но он подозревал, что Фиору известно, как решать другие типы кубических уравнений и за счет этого он получит преимущество. Тарталья не скрывал, сколь беспокоила его такая перспектива, и в конце концов, незадолго до состязания, сумел решить остальные случаи.

Теперь преимущество было у Тартальи, и он не мешкая стер в порошок несчастного Фиора.

Информация об этом поражении стала распространяться; Кардано услышал о нем в Милане. В то время он работал над своей книгой по алгебре. Как и всякий настоящий автор, Кардано вознамерился включить в книгу самые последние открытия — без них его труд устареет еще до публикации. Поэтому Кардано обратился к Тарталье, надеясь ласковым обхождением и лестью выманить у него секрет и включить его в "Великое искусство". Тарталья отказался, говоря, что сам имеет планы написать книгу.

В конце концов, однако, настойчивость Кардано была вознаграждена, и Тарталья открыл ему секрет. Действительно ли он заставил Кардано поклясться, что тот будет хранить тайну, зная, что книга, которую тот пишет, уже почти готова? Или же он поддался на вкрадчивые уговоры со стороны Кардано, а потом жалел об этом? Нет сомнения, что он был предельно зол, когда "Великое искусство" увидело свет. В течение года после этого он опубликовал книгу "Проблемы и различные изобретения", в которой обрушился на Кардано в более чем определенных выражениях. Он включил туда всю переписку между ними, утверждая, что она воспроизведена точно.

В 1574 году Феррари пришел на помощь своему патрону, послав Тарталье картель — вызов на ученый диспут на любую тему по выбору противника. Он даже предложил награду в 200 скудо для победителя. И выразился предельно ясно: "Я сделал это, дабы стало известно, что ты написал вещи, которые ложно и недостойно клевещут... на синьора Джироламо, по сравнению с которым ты вообще не заслуживаешь упоминания".

Феррари отправил экземпляры картеля многочисленным итальянским ученым и общественным лицам. Через девять дней Тарталья ответил, представив свое изложение фактов, после чего эти два математика обменялись двенадцатью картеля-

ми за полтора года. Диспут, как представляется, должен был проходить по стандартным правилам настоящей дуэли. За Тартальей, который был оскорбленной стороной, оставался выбор оружия, т. е. темы дебатов. Но он стремился вызвать не своего обидчика Феррари, а самого Кардано.

Феррари сохранял хладнокровие и заявлял, что в любом случае начать надо с того, что решил кубическое уравнение не Тарталья, а дель Ферро. Коль скоро дель Ферро не проявлял никакой озабоченности по поводу неоправданных утверждений Тартальи об авторстве, что же тогда мешало Тарталье вести себя аналогичным образом? Это был сильный ход, и Тарталье, возможно, пришлось это признать, потому что он подумывал отказаться от участия в состязании. Однако он не стал этого делать, по всей вероятности, из-за отцов своего родного города Брешиа. Тарталья добивался там кафедры, и его местные покровители могли пожелать посмотреть, как он себя покажет.

Как бы то ни было, Тарталья согласился на участие в дебатах, которые состоялись в августе 1548 года перед большим скоплением народа в Миланской церкви. Не сохранилось никаких отчетов о происшедшем, за исключением нескольких указаний у Тартальи, который пишет, что встреча прервалась, когда приближался решающий раунд. Это может служить намеком на то, что диспут оказался не слишком захватывающим. Кажется, однако, что Феррари умело одержал победу, потому что после этого ему предложили несколько заманчивых должностей, из которых он выбрал пост руководителя налогового управления при правителе Милана и вскоре стал очень богат. Тарталья, напротив, никогда не утверждал, что выиграл дебаты, не получил работу в Брешии, и на его долю достались лишь горькие упреки и обвинения.

Тарталья не мог знать, что Кардано и Феррари заранее продумали совершенно иную линию защиты, для чего отправились в Болонью и изучили там бумаги дель Ферро. Там со-

держалось первое настоящее решение кубического уравнения, и в последующие годы оба они утверждали, что источником материала, включенного в "Великое искусство", послужил не секрет, доверенный Кардано Тартальей, а исходные записи дель Ферро. Ссылка на Тарталью включалась только для пояснения того, как именно сам Кардано узнал о работе дель Ферро.

У этой истории имеется и последний поворот сюжета. Вскоре после выхода второго издания "Великого искусства", в 1570 году, инквизиция заключила Кардано в тюрьму. Причина ареста могла быть связана с обстоятельством, ранее казавшимся совершенно невинным, — не с содержанием книги, а с ее посвящением. Кардано в свое время решил посвятить ее относительно малоизвестному интеллектуалу Андреасу Осиандеру — второстепенному деятелю Реформации, на которого, однако, пало сильное подозрение в авторстве анонимного предисловия к книге "О вращении небесных сфер" Николая Коперника — первой книге, где говорилось, что планеты движутся не вокруг Земли, а вокруг Солнца. Церковь считала эти взгляды еретическими и в 1600 году сожгла Джордано Бруно за то, что тот продолжал их отстаивать, подвесив его раздетого догола и с кляпом во рту вниз головой на столбе на рыночной площади в Риме. В 1616 году, а потом еще раз, в 1633-м, по сходным причинам она доставила немало неприятностей Галилею, однако на сей раз инквизиция удовлетворилась помещением ученого под домашний арест.

Чтобы оценить, чего же достигли Джироламо и его соотечественники, нам надо вернуться к вавилонским табличкам, которые объясняют, как решать квадратные уравнения. Если следовать их предписанию, но выразить все шаги вычисления в современных обозначениях, мы увидим, что вавилонский писец

на самом деле сообщал нам, что решение квадратного уравнения $x^2 - ax = b$ есть

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}.$$

Эта формула эквивалентна той, которую наизусть знает каждый школьник и которая в наши дни присутствует во всех справочниках.

Решение кубического уравнения, данное во времена Возрождения, выглядит похоже, но посложнее. В современных обозначениях оно имеет следующий вид. Пусть $x^3 + ax = b$. Тогда

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}}.$$

Коль скоро речь зашла о формулах, то эта среди них — относительно простая (поверьте!), однако для того, чтобы стало возможным записать ее в таком виде, потребовалось развитие большого числа алгебраических идей. Это заведомо самая сложная формула из тех, что нам встретятся в этой книге, и в ней использованы все три типа обозначений, которые я ввел: буквы, приподнятые числа и знак, причем корни здесь как квадратные, так и кубические. Понимания этой формулы от вас не требуется и определенно не требуется производить с ней никаких вычислений. Но важно понять ее общее устройство. Начнем с некоторой терминологии, которая будет нам полезна по мере продвижения вперед.

Алгебраическое выражение вида $2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 9$ называется полиномиальным выражением или, иначе говоря, многочленом. Такие выражения образованы путем сложения друг с другом различных степеней неизвестного. Числа 2, -7, -4 и 9, на которые умножаются эти степени, называются коэффициен-

тами. Старшая степень, в которой неизвестное входит в многочлен, называется степенью этого многочлена, так что приведенный выше многочлен имеет степень 4. Имеются специальные названия для многочленов младших степеней (от 1 до 3 включительно): линейный, квадратичный и кубический[1]. Решения соответствующего уравнения $2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 9 = 0$ называются корнями многочлена.

Теперь можно разобрать формулу Кардано на части. Она построена из коэффициентов a и b с использованием сложения, вычитания, умножения и деления (но только на определенные целые числа — 2, 4 и 27). Эзотерические аспекты двояки. Имеется квадратный корень — в действительности один и тот же квадратный корень встречается дважды, но один раз он прибавляется, а другой раз вычитается. Наконец, имеются два кубических корня, причем это кубические корни из величин, в которые входят квадратные корни. Так что помимо безобидных алгебраических операций (под которыми я понимаю те, что попросту перемешивают члены) "скелет" решения можно выразить так: "Берем квадратный корень, затем кубический корень; делаем это еще раз; складываем результаты".

Это все, что нам понадобится. Но без этого, я полагаю, нам не обойтись.

Чего математикам эпохи Возрождения сначала никак не удавалось ухватить, пока последующие поколения этого не поняли, так это того факта, что данная формула есть не просто решение одного типа кубических уравнений. Это — полное решение *всех* типов кубических уравнений, с точностью до простых

[1] В английском оригинале имена даются также многочленам степеней 4, 5 и 6: они произведены от соответствующих слов "квартика", "квинтика" и "секстика", которые мы также будем иногда употреблять, называя уравнения четвертой и пятой степени соответственно квартикой и квинтикой (а третьей степени заодно — кубикой). *(Примеч. перев.)*

алгебраических преобразований. Для начала, если кубический член есть, скажем, $5x^3$, а не x^3, то можно просто разделить все уравнение на 5; с этим-то математики эпохи Возрождения неплохо разобрались. Более тонкая идея, которая потребовала тихой революции во взглядах на числа, состоит в том, что если разрешить коэффициентам a и b быть при необходимости *отрицательными*, то можно избежать бесплодных разграничений между различными случаями. Наконец, имеется чисто алгебраический фокус: если в уравнение входит квадрат неизвестного, от него всегда можно избавиться — надо заменить x на x плюс специальным образом подобранная постоянная, и если все сделать правильно, то слагаемое с квадратом замечательным образом исчезает. Здесь опять же будет легче, если перестать беспокоиться о том, являются ли числа положительными или отрицательными. Наконец, математики Возрождения тревожились по поводу слагаемых, которые полностью отсутствовали в уравнении, в то время как, на наш современный взгляд, средство от их тревоги очевидно: такие слагаемые не столько отсутствуют, сколько имеют перед собой коэффициент, равный нулю. Тогда одна и та же формула применима во всех случаях.

Задача решена?

Не совсем. Я вас обманул.

Обман вот где: я сказал, что формула Кардано решает все кубики (то есть кубические уравнения). В некотором смысле это утверждение неверно, и этот факт оказался важным. С другой стороны, обман был не очень серьезным, поскольку все зависит от того, что понимать под словом "решает".

Сам Кардано заметил эту сложность — и этот факт красноречиво свидетельствует о его внимании к мелочам. Кубическое уравнение, как правило, имеет или три решения (меньше, если исключить отрицательные числа), или одно. Кардано заме-

тил, что когда имеются три решения — скажем, 1, 2 и 3, — то их никаким разумным образом не удается получить из формулы для решений. Вместо этого появляются квадратные корни из отрицательных чисел.

А именно, Кардано заметил, что кубическое уравнение $x^3 = 15x + 4$ имеет очевидное решение $x = 4$. Но, применив формулу Тартальи, он получил "ответ"

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}},$$

казавшийся бессмысленным.

Немногие среди европейских математиков тех дней были настолько отчаянными, чтобы согласиться принять отрицательные числа. Их коллеги на Востоке пришли к пониманию отрицательных величин намного раньше. В Индии последователи джайнизма развили зачатки понятия отрицательных величин уже в 400 году, а в 1200-м в китайской системе "счетных палочек" использовались красные палочки для положительных чисел и черные для отрицательных — хотя и только в определенном, ограниченном контексте.

Если уже отрицательные числа вызывали затруднение, то квадратные корни из них представляли собой затруднение куда большее. Сложность состоит в том, что квадрат как положительного, так и отрицательного числа всегда положителен — я не буду объяснять почему, но это единственный способ заставить все законы алгебры работать непротиворечивым образом. Так что, даже если вы не против использования отрицательных чисел, вам вроде бы придется признать, что разумным способом извлекать квадратные корни из них нельзя. А поэтому всякое алгебраическое выражение, содержащее квадратный корень из отрицательной величины, должно быть бессмыслицей.

И тем не менее формула Тартальи привела Кардано именно к таким выражениям. В особенности тревожил его тот факт,

что в случаях, когда было известно решение, полученное каким-то другим способом, формула как будто отказывалась его воспроизводить.

В 1539 году обеспокоенный Кардано решил обсудить вопрос с Тартальей: "Я обратился с вопросом о решении различных проблем, на которые вы не дали мне ответа; одна из них — задача о кубе, равном неизвестному плюс число. Я, без сомнения, уловил правило, но когда куб одной трети коэффициента при неизвестном превосходит квадрат половины числа, тогда, как кажется, я не могу с помощью этого правила удовлетворить мое уравнение".

Здесь Кардано в точности описывает условие, когда квадратный корень оказывается корнем из отрицательного числа. Ясно, что он превосходно ухватил всю суть вопроса и обнаружил подводный камень. Менее ясно, достиг ли Тарталья того же уровня понимания своей собственной формулы, потому что ответ его сводился к следующему: "Вы не владеете настоящим способом решения задач этого типа.... Ваши методы целиком неправильны". Возможно, Тарталья намеренно отказывал Кардано в помощи. А может быть, он просто не понимал, о чем тот говорит. Как бы то ни было, Кардано смог разглядеть трудный вопрос, которому предстояло занимать умы математиков всего мира в течение последующих 250 лет.

Даже во времена Возрождения проскальзывали намеки, что здесь происходит нечто важное. Тот же вопрос возник в другой задаче, обсуждавшейся в "Великом искусстве", — найти два числа, сумма которых равна 10, а произведение равно 40. Получалось "решение" $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$. Кардано заметил, что если не обращать внимания на вопрос о том, что же означает квадратный корень из минус пятнадцати, а просто делать вид, что перед нами обычный квадратный корень, то удается прове-

рить, что эти "числа" действительно удовлетворяют требуемому уравнению. При их сложении друг с другом квадратные корни сокращаются, а две остающиеся пятерки складываются в число 10, как того и требовало условие задачи. При умножении же получается $25-\sqrt{-15^2}$, что равно 25 + 15, т. е. 40. Кардано не знал, как понять эти странные вычисления. "Таковы, — писал он, — пути арифметической изысканности, приводящей в конце концов к вещам столь же изощренным, сколь и бесполезным".

В своей "Алгебре" 1572 года Рафаэле Бомбелли — сын болонского торговца шерстью — заметил, что подобные же вычисления, в которых с "мнимыми" корнями обращаются так, как если бы они были настоящими числами, позволяют преобразовать таинственную формулу для решения озадачившего Кардано кубического уравнения в правильный ответ $x = 4$. Книгу он написал, чтобы занять свободное время, образовавшееся у него, пока он руководил осушением болот для Апостольской палаты — папского юридического и финансового ведомства. Бомбелли заметил, что

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$$

и

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2-\sqrt{-121},$$

так что сумма двух странных кубических корней принимает вид

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right),$$

что равно 4. Бессмысленный корень каким-то образом оказался осмысленным и привел к правильному ответу. Бомбелли, возможно, был первым математиком, кто понял, что можно выполнять алгебраические действия с квадратными корнями из

отрицательных чисел и получать при этом осмысленные ответы. Это недвусмысленно намекало, что таким числам можно дать разумную интерпретацию, но у Бомбелли не было указаний на то, какую именно.

Математической вершиной книги Кардано была не кубика, а квартика. Его ученик Феррари сумел перенести методы Тартальи и дель Ферро на уравнения, содержащие четвертую степень неизвестного. Формула Феррари включает только квадратные и кубические корни — корни четвертой степени не нужны, поскольку такой корень есть просто квадратный корень квадратного корня.

"Великое искусство" не содержит решения квинтики — уравнения, в котором неизвестное появляется в пятой степени. Но ведь по мере возрастания степени уравнения метод его решения в свою очередь усложнялся, так что мало кто сомневался, что, применив достаточную изобретательность, можно будет решить и уравнение пятой степени — скорее всего, потребуется использовать корни пятой степени, так что соответствующая формула окажется весьма громоздкой.

Кардано не стал тратить время на поиски такого решения. После 1539 года он вернулся к другим своим многочисленным занятиям, в особенности к медицине. В это время его семейная жизнь начала рушиться самым ужасающим образом: "Мой [младший] сын между днем своей женитьбы и днем своего рокового конца был арестован по обвинению в попытке отравления собственной жены, пока она еще оправлялась после родов. В 17-й день февраля он был задержан, а пятьдесят три дня спустя, 13 апреля, обезглавлен в тюрьме". Кардано пытался примириться с этой трагедией, но беда не приходит одна. "Наш дом — мой дом — на протяжении нескольких дней стал свидетелем трех похорон: моего сына, маленькой внучки Диареджи-

ны и кормилицы; мой новорожденный внук также был недалек от смерти". При всем этом в силу своей природы Кардано был неисправимым оптимистом: "Тем не менее во мне еще так много благодати, что, если бы она принадлежала кому-то другому, тот бы считал себя счастливчиком".

Глава 5
Хитрый лис

Какую дорогу избрать? Какой предмет изучать? Ему нравились оба, но пришло время выбирать — ужасная дилемма. На дворе был 1796 год, а блестящий 19-летний юноша стоял перед решением, которому предстояло определить его дальнейшую жизнь. Настал момент определиться насчет жизненного пути. Карл Фридрих Гаусс происходил из обыкновенной семьи, но знал, что ему уготовано величие. Его способности были очевидны для всех, включая герцога Брауншвейгского — суверена той области, где Гаусс родился и где жила его семья. Проблема состояла в том, что способностей у него было слишком много, и сейчас предстояло выбрать между двумя пристрастиями — математикой и филологией.

Однако 30 марта все решилось помимо его воли, само собой, как результат любопытного, замечательного и совершенно беспрецедентного открытия. В тот день Гаусс нашел эвклидово построение правильного многоугольника с семнадцатью сторонами.

Это может звучать как нечто понятное лишь посвященным, но у Эвклида не было и намека на это построение. Несложно

найти способы построения правильных многоугольников с тремя, четырьмя, пятью или шестью сторонами. Можно соединить конструкции для треугольника и пятиугольника и получить таким образом многоугольник с пятнадцатью сторонами, можно удваивать число сторон, что даст восемь, десять, двенадцать, шестнадцать, двадцать...

Но семнадцать сторон не лезли ни в какие ворота. Однако же построение его было верным, и Гаусс абсолютно точно знал *почему*. Все сводилось к двум очевидным свойствам числа 17. Это число простое: оно делится нацело только само на себя и на 1. Кроме того, оно на единицу превосходит степень двойки: $17 = 16 + 1 = 2^4 + 1$.

Если бы вы были гением, как Гаусс, вам было бы понятно, почему из этих двух непритязательных утверждений следует, что существует построение правильного семнадцатиугольника с помощью циркуля и линейки. Если бы вы были любым другим из великих математиков, живших между 500 годом до Р. Х. и 1796 годом, вы бы даже не заподозрили наличия здесь связи. Мы знаем об этом потому, что они действительно ничего такого не заподозрили.

Если Гаусс и нуждался в каком-либо подтверждении своего математического таланта, то он определенно такое подтверждение получил. И решил стать математиком.

Семья Гауссов перебралась в Брауншвейг в 1740 году, когда дед Карла устроился там садовником. Один из трех его сыновей, Гебхард Дитрих Гаусс, также стал садовником, время от времени подрабатывая то тут, то там — например, на кладке кирпича или прокладке каналов; иногда он выполнял работу "фонтанных дел мастера", а также помогал купцам и был казначеем небольшой похоронной кассы. Все более прибыльные профессии контролировались гильдиями, и чужакам — даже чужакам во вто-

ром поколении — доступа туда не было. Гебхард женился во второй раз в 1776 году на Доротее Бенце — дочери каменщика, работавшей прислугой. Их сын Иоганн Фридерих Карл (сам себя всегда называвший Карлом Фридрихом) родился в 1777 году.

Гебхард был честным, упрямым, грубоватым человеком и не отличался особым умом. Доротея обладала острым умом и сильным характером — качества, которые оказались Карлу как нельзя более кстати. Когда мальчику исполнилось два года, его мать уже понимала, что у нее на руках необыкновенно одаренный ребенок, и она всей душой желала дать ему образование, которое позволило бы развить его способности. Гебхард же предпочел бы, чтобы Карл стал каменщиком. Лишь благодаря матери Карл смог исполнить предсказание своего друга — геометра Вольфганга Бойяи. Когда сыну Доротеи было 19, Бойяи сказал, что Карл станет величайшим математиком в Европе. Она растрогалась до слез.

Сын не забыл преданности матери: последние двадцать лет своей жизни она жила у него; ее зрение постепенно ухудшалось, и в конце концов она полностью ослепла. Великий математик решил, что будет сам о ней заботиться, и ухаживал за матерью до самой ее смерти в 1839 году.

Гаусс рано проявил свои способности. В трехлетнем возрасте он наблюдал, как отец, бравший в то время подряды на выполнение работ бригадой подсобных рабочих, раздавал еженедельный заработок. Заметив ошибку в расчетах, мальчик указал на нее изумленному отцу. Никто до этого не обучал его числам. Он выучил их сам.

Несколько лет спустя школьный учитель Й. Г. Бюттнер, желая немного передохнуть, задал классу, где учился Гаусс, задачу в надежде, что она займет их на несколько часов. Задача известна нам не вполне точно, но это было что-то вроде "сложить все числа от 1 до 100". Скорее всего, числа были не такие круглые, но в них содержалась скрытая закономерность: они обра-

зовывали арифметическую прогрессию, что означает, что разность между любыми двумя соседними числами была одинакова. Имеется простой, но не сразу очевидный способ сложения чисел из арифметической прогрессии, но в классе этого не проходили, так что ученикам предстоял долгий труд по сложению чисел одного за другим.

Этого, по крайней мере, ожидал Бюттнер. Он велел тем, кто выполнит задание, сразу же положить свою аспидную доску с ответом к нему на стол. Пока его одноклассники выписывали нечто вроде

$1 + 2 = 3$,
$3 + 3 = 6$,
$6 + 4 = 10$
с неизбежной ошибкой
$10 + 5 = 14$

и при этом не знали, где найти место на доске для следующего действия, Гаусс, подумав лишь мгновение, написал на своей доске мелом одно число, подошел к учителю и положил доску ему на стол ответом вниз.

"Он там", — сказал он и вернулся на свое место.

В конце урока, когда учитель собрал все доски, правильный ответ был лишь на одной — на Гауссовой.

Опять же, мы не знаем наверняка, как рассуждал Гаусс, но можно предложить правдоподобную реконструкцию. Скорее всего, Гауссу уже доводилось размышлять о суммах подобного рода, и он углядел полезный прием. (Если нет, значит, он сумел изобрести его прямо на месте.) Простой способ получить ответ состоит в том, чтобы сгруппировать числа в пары: 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98 и так далее до пары, состоящей из 50 и 51. Каждое число от 1 до 100 встречается в некоторой паре ровно один раз, поэтому сумма всех этих чисел равна сумме всех пар. Но в

каждой паре сумма равна 101. А всего пар 50. Так что ответ — $50 \times 101 = 5050$. Это (или что-то эквивалентное) Гаусс и написал на своей доске.

Смысл этой истории не в том, что Гаусс был необычно силен в арифметике, хотя так оно и было — позднее, занимаясь астрономией, он запросто выполнял громоздкие вычисления со многими десятичными знаками, работая со скоростью тех умственно неполноценных людей, единственная способность которых состоит в навыке необычайно быстрого счета. Но вычислениями с быстротой молнии его способности не ограничивались. Чем он обладал в избытке, так это даром видеть в математических задачах скрытые закономерности и использовать их для нахождения решения.

Бюттнер был настолько потрясен тем, что Гаусс так легко справился с задачей, что, к чести его будь сказано, снабдил мальчика лучшей книгой по арифметике, которую можно было купить. Через неделю Гаусс уже превзошел своего учителя.

Так случилось, что у Бюттнера был 17-летний помощник Иоганн Бартельс, в официальные обязанности которого входило чинить перья для письма и помогать мальчикам ими пользоваться. Неофициально же Бартельс был влюблен в математику. Он привязался к яркому десятилетнему ученику, и они стали друзьями на всю жизнь. Подбадривая друг друга, они стали заниматься математикой вместе.

Бартельс был на дружеской ноге с некоторыми влиятельными фигурами в Брауншвейге, благодаря чему там вскоре узнали, что у них в глуши живет безвестный гений, семья которого прозябает на грани нищеты. Один из этих господ, советник и профессор Э. А. В. Циммерман, в 1791 году представил Гаусса герцогу Брауншвейгскому Карлу-Вильгельму Фердинанду. Герцог был очарован и впечатлен настолько, что взял на себя оплату образования Гаусса (он время от времени делал такое для способных детей бедняков).

Математика была не единственным талантом мальчика. К 15 годам он достиг значительных успехов в древних языках, которые изучал в местной гимназии; обучение там также оплачивал герцог. (В старой немецкой образовательной системе гимназия была чем-то вроде школы для подготовки к поступлению в университет. Слово переводится примерно как "старшая школа", но учиться там можно было только за плату.) Многие из лучших работ Гаусса были позднее написаны на латыни. В 1792 году он поступил в Карлово училище в Брауншвейге, и снова обучение оплачивал герцог.

К 17 годам он уже доказал замечательную теорему в теории чисел, известную как квадратичный закон взаимности. В ней утверждается фундаментальная, но достаточно неординарная закономерность в свойствах делимости полных квадратов. На эту закономерность обратил внимание еще Леонард Эйлер, но Гаусс об этом не знал и сам открыл все заново. Лишь очень немногие вообще задумывались о том, чтобы поставить этот вопрос. Юноша, кроме того, глубоко размышлял о теории уравнений. На самом деле эти размышления и привели его к построению правильного 17-угольника и тем самым направили на путь, ведущий к математическому бессмертию.

Между 1795 и 1798 годами Гаусс учился, чтобы получить диплом в Геттингенском университете, причем за обучение снова платил герцог Фердинанд. У Гаусса было немного друзей, но те дружеские отношения, которые он завязал, были глубокими и долгими. В Геттингене же Гаусс встретил Бойяи — опытного геометра в эвклидовых традициях.

Математические идеи приходили к Гауссу столь быстро и в таком изобилии, что иногда, казалось, полностью поглощали его. Когда в голове у него возникала новая идея, он мог внезапно уставиться в пространство, бросив при этом все, чем зани-

мался до этого. Он сформулировал некоторые теоремы, которые были бы справедливы, "если бы истинной была не эвклидова, а другая геометрия". На переднем плане его размышлений было его главное сочинение — *Disquisitiones Arithmeticae* — и к 1798 году эта книга была в основном закончена. Однако Гаусс хотел удостовериться, что отдал должное своим предшественникам в вопросах приоритета, для чего отправился в университет Хельмштедта, где была прекрасная математическая библиотека, которую курировал Иоганн Пфафф — самый известный из немецких математиков.

В 1801 году, после огорчительной задержки в типографии, *Disquisitiones Arithmeticae* наконец вышла с изобильным и, без сомнения, искренним посвящением герцогу Фердинанду. Щедрость герцога не иссякла, даже когда Карл закончил университет. Фердинанд оплатил расходы, необходимые для издания с соблюдением всех необходимых требований диссертации Гаусса, представленной им в университете Хельмштедта. А когда Карл обеспокоился своим материальным положением после окончания университета, герцог определил ему пособие, позволявшее продолжать исследования, не слишком заботясь о деньгах.

Заслуживает упоминания и такая сторона *Disquisitiones Arithmeticae*, как ее бескомпромиссный стиль. Доказательства написаны очень тщательно и логически безупречно, однако изложение не делает читателю никаких поблажек и не дает подсказок насчет интуитивных соображений, стоящих за той или иной теоремой. Позднее Гаусс оправдывал такую позицию (которой он придерживался на протяжении всей своей карьеры) тем, что "когда строительство прекрасного здания закончено, окружавших его лесов больше не должно быть видно". Это прекрасно, если цель состоит исключительно в том, чтобы люди любовались зданием. Но не так уж прекрасно, если есть желание научить их строить самостоятельно. Карл Густав Якоб Яко-

би, работы которого по комплексному анализу основаны на идеях Гаусса, сказал о своем прославленном предшественнике, что "он как лис, который хвостом заметает свои следы на песке".

Приблизительно в то время математики постепенно подходили к осознанию того факта, что, хотя комплексные числа кажутся искусственным образованием, а их интерпретация туманна, использование их намного упрощает алгебру, позволяя решать уравнения единообразным способом. Изящество и простота — пробный камень математики, и новаторские концепции, сколь бы странными они сначала ни казались, имеют тенденцию в конце концов брать верх, если они способствуют сохранению изящества и простоты предмета.

Если работать только с традиционными "вещественными" числами, то уравнения ведут себя раздражающе беспорядочным образом. Уравнение $x^2 - 2 = 0$ имеет два решения — плюс или минус квадратный корень из двух, — но очень похожее уравнение $x^2 + 1 = 0$ вообще не имеет решений. Однако это уравнение имеет два решения в комплексных числах: i и $-i$. Символ i для обозначения $\sqrt{-1}$ был введен Эйлером в 1777 году, но появился в печати лишь в 1794-м. Теорию, выраженную лишь в терминах "вещественных" уравнений, загромождают исключения и необходимость педантичного разграничения различных случаев. Аналогичная теория комплексных уравнений оставляет в стороне все эти сложности за счет того, что с самого начала предлагается купить оптом одно-единственное усложнение — позволить комплексным числам появляться наравне с вещественными.

К 1750 году идеи, вызванные к жизни итальянскими математиками эпохи Возрождения, достигли зрелости и замкнутости. Предложенные методы решения кубики и квартики восприни-

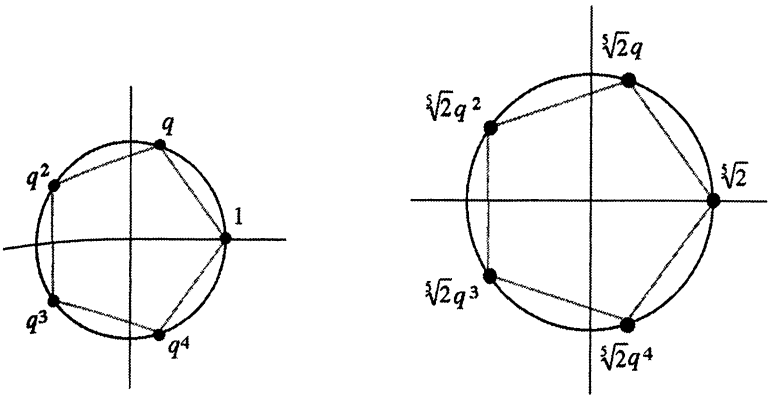
мались как естественные обобщения вавилонского решения квадратных уравнений. В достаточных подробностях была разработана связь между радикалами и комплексными числами, причем было осознано, что в этом расширении обычной числовой системы у числа имеется не один кубический корень, а три; не один корень четвертой степени, а четыре; не один корень пятой степени, а пять. Ключом к пониманию того, откуда берутся эти новые корни, стало прекрасное свойство "корней из единицы", то есть корней n-й степени из числа 1. Эти корни образуют вершины правильного n-угольника в комплексной плоскости[1], одна вершина которого лежит в точке 1. Остальные корни из единицы располагаются на равных расстояниях вдоль окружности единичного радиуса с центром в точке о. На рисунке показано расположение корней пятой степени из единицы.

В более общем виде, если дан любой конкретный корень пятой степени из некоторого числа, то можно получить еще четыре, умножая его на q, q^2, q^3 и q^4 [2]. Эти числа также располагаются по окружности с центром в о. Например, корни пятой степени из 2 показаны на рисунке справа.

Все это очень мило, но здесь же содержится намек на нечто гораздо более глубокое. Корни пятой степени из 2 можно рассматривать как решения уравнения $x^5 = 2$. Это уравнение пятой степени, и у него пять комплексных решений, причем только одно из них вещественно. Аналогичным образом уравнение $x^4 = 2$ имеет четыре решения (все корни четвертой степени из 2), уравнение на корни 17-й степени из 2 имеет 17 решений и так далее. Не обязательно быть гением, чтобы подметить правило: число решений равно степени уравнения.

1 О комплексной плоскости — плоскости комплексных чисел — рассказано на стр. 229 и далее. *(Примеч. перев.)*

2 Здесь q — комплексное число, определяемое точкой на левом рисунке, т. е. вершиной правильного n-угольника, ближайшей к 1 в направлении против часовой стрелки. Оно, конечно, зависит от выбранной степени n корня. *(Примеч. перев.)*



Слева: корни пятой степени из единицы в комплексной плоскости.
Справа: корни пятой степени из двух.

То же самое, как представлялось, выполняется не только для уравнений на корни *n*-й степени, но и *вообще для любого алгебраического уравнения*. Математики пребывали в убеждении, что в области комплексных чисел каждое уравнение имеет ровно столько решений, какова степень уравнения. (Технически это утверждение верно, только когда решения подсчитываются с учетом их "кратностей". Если это соглашение не использовать, то число решений равно степени уравнения или меньше ее.) Эйлер доказал это свойство для уравнений степеней 2, 3 и 4 и утверждал, что аналогичные методы будут работать и в общем случае. Его идеи выглядели правдоподобно, но заполнение пробелов в намеченной им схеме доказательства оказалось практически невозможным, и даже сегодня требуются серьезные усилия, чтобы довести метод Эйлера до логического конца. Тем не менее математики предполагали, что если они решают уравнение некоторой степени, то следует ожидать появления в точности стольких корней, какова эта степень.

По мере того как Гаусс развивал свои идеи в теории чисел и анализе, его все менее и менее удовлетворяло то, что никто не доказал это предположение. Характерно, что в конце концов он сам предложил доказательство. Оно было сложным и на удивление непрямым: любой квалифицированный математик мог убедиться в его верности, но никто не мог сообразить, как же Гаусс до него додумался. Математический лис мстительно вилял хвостом.

В переводе с латыни заглавие диссертации Гаусса звучало как "Новое доказательство, что каждую рациональную целую функцию одного переменного можно разложить на вещественные множители первой или второй степени". Если пробиться через профессиональные термины, принятые в то время, то заглавие утверждает, что каждый многочлен (с вещественными коэффициентами) равен произведению выражений, представляющих собой линейные или квадратичные многочлены.

Гаусс использовал слово "вещественные", чтобы ясно показать: он работает в рамках традиционной числовой системы, в которой отрицательные величины не имеют квадратных корней. В наши дни мы бы выразили теорему Гаусса в логически равносильном, но более простом виде: каждый вещественный многочлен степени n имеет n вещественных или комплексных корней. Но Гаусс тщательно подбирал выражения таким образом, чтобы его работа не опиралась на все еще несколько сбивающую с толку систему комплексных чисел. Комплексные корни вещественного многочлена всегда можно собрать в пары, что приводит к вещественным квадратичным множителям, а линейные множители отвечают вещественным корням. Сформулировав заглавие в терминах множителей этих двух типов ("множители первой или второй степени"), Гаусс обошел стороной спорный вопрос о комплексных числах.

Одно слово в заглавии не оправданно: "новое" предполагает, что имеются "старые" доказательства. Гаусс дал *первое* строгое доказательство этой фундаментальной теоремы в алгебре. Но чтобы не обижать прославленных предшественников, утверждавших, что у них имелись доказательства — которые все оказались ошибочными, — Гаусс представил свое выдающееся достижение как всего лишь самое свежее доказательство, опирающееся на новые (то есть правильные) методы.

Эта теорема получила известность как Основная Теорема Алгебры. Гаусс считал ее настолько важной, что дал в общей сложности четыре доказательства, причем последнее — когда ему было 70 лет. Лично он не испытывал никаких колебаний или сомнений по поводу комплексных чисел: они играли значительную роль в его мыслительном процессе, и впоследствии он сформировал собственное объяснение их смысла. Однако он старался избегать разногласий. С годами он стал замалчивать многие из своих оригинальных идей — неэвклидову геометрию, комплексный анализ и строгий подход к комплексным числам, — потому что не хотел вызывать то, что он называл "плачем беотийцев".

Гаусс не ограничивался чистой математикой. В начале 1801 года итальянский священник и астроном Джузеппе Пьяцци открыл новую планету или то, что ему представлялось планетой, — тусклое пятно света в телескопе, от ночи к ночи менявшее свое положение на фоне звезд, что было верным признаком принадлежности тела к Солнечной системе. Планете должным образом дали имя Церера[1], но на самом деле это оказался астероид — первый открытый астероид в истории. Не успел

[1] В честь римской богини плодородия — покровительницы Сицилии. *(Примеч. перев.)*

Пьяцци обнаружить новый мир, как тут же потерял его в блеске Солнца. Он сумел сделать так мало наблюдений, что астрономы не могли вычислить орбиту нового тела и беспокоились, что не найдут его, когда оно снова выйдет из-за Солнца.

Это была задача, достойная Гаусса, и он охотно за нее взялся. Он изобрел улучшенные способы определения орбит исходя из малого числа наблюдений и предсказал, где должна появиться Церера. Когда так и произошло, молва о Гауссе распространилась повсеместно. Путешественник и естествоиспытатель Александр фон Гумбольдт попросил Пьера-Симона де Лапласа — специалиста по небесной механике — назвать величайшего математика в Германии и получил ответ: "Пфафф". Когда недоумевающий Гумбольдт спросил: "А Гаусс?" — Лаплас ответил: "Гаусс — величайший математик в мире".

К сожалению, новоявленное светило отвлекло его от чистой математики на длинные вычисления для расчета орбиты, что можно было считать растратой его неординарных способностей. Не в том дело, что небесная механика не важна, — просто эту работу могли бы проделать и другие, менее талантливые математики. С другой стороны, из-за этого его дальнейшая жизнь полностью устроилась. Гаусс уже некоторое время искал постоянное место работы, которое оставляло бы возможность для общественного служения, с тем чтобы отдать должное своему покровителю — герцогу. Его работа о Церере привела к тому, что он стал директором Геттингенской обсерватории, и этот пост он занимал всю свою научную жизнь.

В 1805 году он женился на Иоанне Остхофф. В письме к Бойяи он так описывал свою новую жену: "Прекрасное лицо Мадонны, зерцало мира и здоровья, нежные, несколько мечтательные глаза, безупречная фигура — это одна сторона; яркий ум и развитая речь — это другая; но мягкая, безмятежная и целомудренная душа ангела, не причиняющая зла ни одному созданию, — это лучшее". Иоанна родила ему двоих детей, но в

1809 году умерла при родах, и убитый горем Гаусс "закрыл ее ангельские глаза, в которых я видел свой рай последние пять лет". Он начал страдать от одиночества, впал в депрессию, и жизнь уже никогда не была для него прежней. Он нашел новую жену — лучшую подругу Иоанны Минну Вальдек, но брак был не самым счастливым, несмотря на рождение еще троих детей. Гаусс постоянно спорил с сыновьями, а дочерям указывал, что им следует делать, и молодым людям настолько надоело это терпеть, что они уехали из Европы в Соединенные Штаты, где в дальнейшем преуспели.

Вскоре после начала своего директорства в Геттингене Гаусс вернулся к старой идее — возможности нового типа геометрии, которая удовлетворяла бы всем эвклидовым аксиомам, кроме аксиомы о параллельных прямых. В конце концов он пришел к убеждению, что логически непротиворечивые неэвклидовы геометрии возможны, но так и не опубликовал свои результаты из опасений, что их сочтут слишком радикальными. Янош Бойяи — сын его старого друга Вольфганга — позднее сделал аналогичные открытия, но Гаусс не счел возможным похвалить его работу, потому что сам предвосхитил многое из сделанного им. Еще некоторое время спустя, когда Николай Иванович Лобачевский независимо переоткрыл неэвклидову геометрию, Гаусс сделал его членом-корреспондентом Геттингенской Академии, но опять не высказал никакого публичного одобрения.

Годы спустя, по мере того как математики более подробно изучили эти новые геометрии, их стали интерпретировать как геометрии "геодезических" — кратчайших — путей на искривленных поверхностях. Если поверхность имеет постоянную положительную кривизну, как сфера, то геометрия называется эллиптической. Если кривизна постоянна и отрицательна (поверхность в каждой своей точке по форме напоминает седло), то это гиперболическая геометрия. Эвклидова геометрия соот-

ветствует нулевой кривизне — плоскому пространству. Эти геометрии можно охарактеризовать их метрикой — формулой для расстояния между двумя точками.

Эти идеи могли привести Гаусса к более общему исследованию искривленных поверхностей. Он вывел прекрасную формулу для величины кривизны и доказал, что она дает один и тот же результат в любой системе координат. В такой формулировке кривизна не обязательно должна быть постоянной: она может изменяться от точки к точке.

В зрелом возрасте Гаусс обратился к практическим применениям — вещь, нередкая среди математиков. Он консультировал несколько землемерных проектов, самым большим из которых была триангуляция области Ганновера. Он активно участвовал в полевых работах, а потом анализировал данные. Для облегчения этих работ он изобрел гелиотроп — прибор для обмена сигналами в отраженном свете. Но когда его стало подводить сердце, он прекратил занятия геодезией и решил провести оставшиеся годы в Геттингене.

В тот несчастливый для Гаусса период молодой норвежец по имени Абель написал ему о невозможности решения уравнения пятой степени в радикалах, но не получил ответа. Вероятно, Гаусс был слишком подавлен даже для того, чтобы взглянуть на статью.

Около 1833 года Гаусс заинтересовался магнетизмом и электричеством. Совместно с физиком Вильгельмом Вебером он работал над книгой, озаглавленной "Общая теория земного магнетизма", которая вышла в 1839 году. Они также изобрели телеграф, связавший Гауссову обсерваторию с физической лабораторией, где работал Вебер, но провода непрерывно рвались, и другие изобретатели предложили более практичный проект. Вебера выгнали из Геттингена вместе с шестью другими учеными из-за их отказа принести присягу новому королю Ганновера Эрнсту Августу. Гаусса это сильно расстроило, но его по-

литический консерватизм и нежелание "поднимать волну" не позволили ему выступить с каким-либо публичным протестом, хотя в кулуарах он и пытался поддержать Вебера.

В 1845 году Гаусс написал докладную записку по поводу пенсионного фонда для вдов геттингенских профессоров, в котором проанализировал возможное влияние резкого увеличения числа членов фонда. Он вкладывал деньги в правительственные фонды и железнодорожные акции и составил порядочное состояние.

После 1850 года, страдая от проблем с сердцем, Гаусс сократил объем работы. Для нашего рассказа наиболее важным событием этого времени была *Habilitation*, диссертация его ученика Георга Бернхарда Римана. (В немецкой академической системе эта диссертация — вторая степень после кандидатской[1].) Риман обобщил работу Гаусса о поверхностях в многомерных пространствах, которые он назвал многообразиями. В частности, он расширил концепцию метрики и нашел формулу для кривизны многообразия. По существу, он создал теорию искривленных многомерных пространств. Позднее эта идея оказалась основополагающей для работ Эйнштейна по гравитации.

Гаусс, за которым теперь постоянно присматривал врач, посетил публичную лекцию Римана по этому вопросу и был глубоко впечатлен. По мере того как его здоровье ухудшалось, он проводил все больше времени в постели, но продолжал писать письма, читать и управлять своим капиталом. В начале 1855 года Гаусс мирно скончался во сне. Это был величайший в мире математический ум из всех известных.

[1] Чтобы преподавать в университете (а не в школе), помимо защиты "кандидатской" диссертации требовалось получить более высокую, вторую степень, называемую *Habilitation*; для этого необходимо было подготовить текст диссертации и прочитать лекцию. *(Примеч. перев.)*

Глава 6
Расстроенный врач и больной гений

Первый значительный шаг вперед после "Великого искусства" Кардано был сделан примерно в середине восемнадцатого столетия. Хотя математики Возрождения научились решать уравнения третьей и четвертой степеней, их методы, по существу, сводились к ряду трюков. Каждый такой трюк успешно работал, но, как представлялось, скорее из-за серии совпадений, нежели по какой-либо систематической причине. Изучить и окончательно обосновать эту причину около 1770 года удалось двум математикам — Жозефу-Луи Лагранжу, уроженцу Италии, всегда считавшему себя французом, и Александру-Теофилу Вандермонду — французу вне всякого сомнения.

Вандермонд родился в Париже в 1735 году. Отец хотел, чтобы он стал музыкантом, и Вандермонд достиг совершенства в игре на скрипке и ступил на путь музыкальной карьеры, но в 1770 году заинтересовался математикой. Его первая математическая публикация была посвящена симметричным функциям корней многочлена — алгебраическим формулам типа суммы всех корней, которые не меняются, если корни поменять местами. Наиболее оригинальной частью его работы было доказа-

тельство, что уравнение $x^n - 1 = 0$, связанное с правильным n-угольником, можно решить в радикалах, если n меньше или равно 10. (На самом деле оно разрешимо в радикалах для любого n.) Великий французский аналитик[1] Огюстен-Луи Коши позднее ссылался на Вандермонда как на первого, кто осознал, что к задаче решения уравнений в радикалах можно применить симметрические функции.

В руках Лагранжа эта идея стала отправной точкой для атаки на все алгебраические уравнения.

Лагранж родился в итальянском городе Турине[2] и был наречен Джузеппе Лодовико Лагранджиа. Семья имела французские корни: прадед сначала был капитаном французской кавалерии, а потом переехал в Италию и поступил на службу к герцогу Савойскому. Еще в ранней молодости Джузеппе начал писать свою фамилию как "Лагранж", в качестве имени при этом используя Лодовико или Луиджи. Его отец был казначеем в Министерстве общественных работ и укреплений в Турине; мать Тереса Гроссо была дочерью врача. Лагранж был первым из их одиннадцати детей, лишь двоим из которых довелось дожить до зрелых лет.

Семья относилась к высшим слоям итальянского общества, однако в результате некоторых неудачных вложений Лагранжи оказались практически разорены. Было решено, что молодой Лагранж будет изучать право, и он поступил в Туринский университет. Ему нравились право и классические предметы, а математические занятия, на которых в основном преподавалась

[1] Этот слегка жаргонный термин следует понимать так, как сказано в примечании на стр. 86. *(Примеч. перев.)*

[2] Лагранж родился в 1736 году, когда Турин был частью (де факто столицей) королевства Пьемонт-Сардиния, как тогда назывались владения Савойской династии. *(Примеч. перев.)*

эвклидова геометрия, наводили на юношу тоску. Однако попавшаяся ему как-то раз книга по алгебраическим методам в оптике, написанная английским астрономом Эдмондом Галлеем, самым решительным образом переменила его мнение о математике. Лагранж направился по пути, который и стал определяющим в его ранних исследованиях, — применение математики к механике и в особенности к небесной механике.

Он женился на своей кузине Виттории Конти. "Моя жена, приходящаяся мне кузиной (и даже жившая в течение долгого времени в нашем семействе), — прекрасная хозяйка и совершенно не требовательна", — писал он своему другу, также математику, Жану ле Рон д'Аламберу. Он также доверительно сообщал ему, что вообще не собирается иметь детей — так оно и вышло.

Лагранж занял должность в Берлине, написал много научных статей и несколько раз становился обладателем ежегодной премии Французской академии: в 1772 году он получил награду вместе с Эйлером, в 1774-м был удостоен ее за работу по динамике Луны, а в 1780-м — за работу о влиянии планет на орбиты комет. Другим его пристрастием была теория чисел. В 1770 году он доказал теорему, представляющую собой классику жанра, — теорему о четырех квадратах, согласно которой всякое положительное целое число представимо в виде суммы четырех квадратов. Например, $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, $8 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$ и так далее.

Он стал членом Французской академии наук и перебрался в Париж, где и провел всю оставшуюся жизнь. Он полагал, что разумно подчиняться законам страны проживания даже в случае личного с ними несогласия, — точка зрения, которая, возможно, помогла ему избежать участи многих других интеллектуалов во время Французской революции. В 1788 году Лагранж опубликовал свой шедевр — "Аналитическую механику", где переосмыслил механику как ветвь анализа. Он гордился тем, что в его объемистой книге вообще нет рисунков; в его глазах это делало изложение логически более строгим.

В 1792 году Лагранж женился второй раз, на дочери астронома Рене-Франсуазе-Аделаиде ле Моннье. В августе 1793 года, во время Террора, Академию закрыли; единственной ее частью, не прекратившей функционировать, была Комиссия мер и весов. От работы были отстранены многие ведущие ученые — химик Антуан Лавуазье, физик Шарль Огюстен Кулон, а также Пьер Симон Лаплас. Лагранж стал новым председателем Комиссии мер и весов.

К этому моменту у него стали возникать проблемы из-за его итальянского происхождения. Революционное правительство провело закон, требовавший ареста каждого иностранца, родившегося во враждебной стране. Лавуазье, тогда еще сохранявший свое влияние, добился, чтобы Лагранжа исключили из списков тех, кто подпадал под действие нового закона. Вскоре революционный трибунал приговорил Лавуазье к смерти, и на следующий же день его гильотинировали. Лагранж заметил, что "только мгновение потребовалось, чтобы пала его голова, но сотни лет не хватит, чтобы появилась другая такая".

При Наполеоне Лагранж получил целый ряд почестей: он стал кавалером Ордена почетного легиона, в годы Империи, в 1808 году, ему был пожалован титул графа, а в 1813-м он стал кавалером Большого Креста Императорского Ордена Содружества. Через неделю после получения Большого Креста он скончался.

В 1770 году — в год открытия теоремы о четырех квадратах — Лагранж взялся за написание обширного трактата по теории уравнений, говоря при этом: "В данном мемуаре я предполагаю исследовать различные методы, найденные к настоящему моменту для алгебраического решения уравнений, свести их к общим принципам и объяснить *apriori*, почему эти методы приводят к успеху в степени три и четыре, но непригодны для стар-

ших степеней". Как выразился Жан-Пьер Тиньоль в своей книге "Теория Галуа алгебраических уравнений", Лагранж "явным образом намеревался определить не только *как*, но и *почему* эти методы работают".

Лагранж добился гораздо более глубокого понимания методов эпохи Возрождения, чем сами их изобретатели; он даже доказал, что найденную им общую схему, объяснявшую их успехи, нельзя распространить на степени пять и выше. Тем не менее он не смог сделать следующего шага — выяснить, возможно ли *какое-нибудь* решение в этих случаях. Вместо этого он сообщает нам, что его результаты "окажутся полезными для тех, кто захочет заняться решением уравнений высших степеней, поскольку снабдят их различными взглядами на этот вопрос и, главное, предохранят от большого числа ложных шагов и попыток".

Лагранж обратил внимание, что все специальные приемы, которые использовали Кардано, Тарталья и другие, основывались на одном методе. Вместо того чтобы непосредственно искать корни заданных уравнений, они пытались свести задачу к решению некоторого вспомогательного уравнения, корни которого связаны с исходными, однако отличаются от них.

Вспомогательное уравнение в случае кубического уравнения было более простым — квадратным. Эту "разрешающую квадрику" можно было решить вавилонскими методами; решение же кубического уравнения затем восстанавливалось путем извлечения кубического корня. Именно такова структура формулы Кардано. Для уравнения четвертой степени вспомогательное уравнение тоже было более простым — кубическим. Эту "разрешающую кубику" можно было решить методом Кардано; решение же уравнения четвертой степени затем восстанавливалось извлечением корня четвертой степени — другими словами, кратным извлечением квадратного корня. Именно такова структура формулы Феррари.

Можно представить себе растущее воодушевление Лагранжа. Если подобная закономерность сохранится, то уравнение пятой степени будет иметь "разрешающую квадрику", которую можно будет решить методом Феррари, а затем извлечь корень пятой степени. И процесс может продолжиться: уравнение шестой степени будет иметь разрешающую квинтику, которую можно будет решить с помощью того, что получит известность как метод Лагранжа. Он сможет решить уравнения *любой* степени.

Суровая реальность вернула его на землю. Разрешающее уравнение для уравнения пятой степени оказалось не квартикой, а уравнением *более высокой* степени — шестой. Тот самый метод, который позволил упростить кубику и квартику, привел к *усложнению* квинтики.

Достичь прогресса в математике посредством замены сложной задачи на еще более сложную невозможно. Объединенный метод Лагранжа отказал на уравнении пятой степени. Тем не менее Лагранж не доказал, что уравнение пятой степени неразрешимо, так как могли существовать и какие-то другие методы.

В самом деле, почему бы и нет?

Для Лагранжа это был риторический вопрос. Однако один из его последователей отнесся к этому вопросу серьезно и ответил на него.

Его звали Паоло Руффини, и когда я говорю, что он "ответил" на риторический вопрос Лагранжа, я слегка лукавлю. Он полагал, что ответил, и его современники не обнаружили в его ответе ничего неверного — отчасти потому, что никогда не воспринимали его работы настолько серьезно, чтобы в самом деле подвергнуть их всесторонней проверке. Руффини прожил свою жизнь в убеждении, что доказал неразрешимость уравне-

ния пятой степени в радикалах. Только после его смерти оказалось, что в его доказательстве имеется значительный пробел. Его легко было просмотреть среди многих и многих страниц запутанных вычислений; проблема состояла в некотором "очевидном" допущении — таком, что он даже не заметил, что это предположение делалось.

Как знает из собственного горького опыта каждый профессиональный математик, очень трудно заметить, что вы делаете неявное предположение, — трудно в первую очередь потому, что оно делается неявно.

Руффини родился в 1765 году в семье врача. В 1783-м он поступил в университет Модены, где изучал медицину, философию, литературу и математику. Геометрии он учился у Луиджи Фантини, а анализу — у Паоло Кассиани. Когда Кассиани переехал, чтобы занять при семействе Эсте должность управляющего их обширными владениями, Руффини — в тот момент еще студент — взял на себя курс анализа, который читал Кассиани. В 1788 году он получил степень по философии, медицине и хирургии, а степень по математике — в 1789-м. Вскоре после этого он сменил на профессорской должности Фантини, зрение которого быстро ухудшалось.

Ход его научных занятий был прерван течением мировых событий. Разбив в 1796 году войска Австрии и Сардинии, Наполеон Бонапарт обратил свой взгляд на Турин и захватил Милан. Вскоре он оккупировал Модену, и Руффини пришлось принять участие в политической деятельности. Вначале он собирался вернуться в университет в 1798 году, но по религиозным соображениям отказался приносить присягу республике. Воспоследовавшая незанятость оставила ему больше времени на исследования, и он целиком сосредоточился на все еще не урегулированном вопросе об уравнениях пятой степени.

Руффини убедил себя, что есть веская причина, по которой никому не удавалось найти решение: решения попросту не су-

ществует. А именно — нет формулы, включающей в себя только радикалы (а не что-то более эзотерическое), которая давала бы решение общего уравнения пятой степени. В своей двухтомной "Общей теории уравнений", опубликованной в 1799 году, он утверждал, что умеет это доказывать, заявляя, будто "алгебраическое решение общих уравнений степени большей четырех невозможно. Перед вами очень важная теорема, которую, как я полагаю, я, судя по всему, в состоянии доказать. Представить ее доказательство — главная цель публикации данного тома. Основы моего доказательства заложил своими высокими рассуждениями бессмертный Лагранж". Доказательство заняло более 500 страниц, в основном заполненных непривычной математикой. Другие математики нашли его несколько устрашающим. Даже в наши дни никто не горит желанием продираться через длинные технические доказательства, если только на то нет особых причин. Если бы Руффини сообщил, что нашел *решение* уравнения пятой степени, то его коллеги наверняка не поленились бы разобраться в его работе. Но можно понять их нежелание тратить сотни часов на то, чтобы вникнуть в отрицательный результат.

Особенно если учесть, что результат мог быть и неверным. Мало что раздражает так сильно, как нахождение ошибки на 499-й странице в 500-страничной книге по математике.

В 1801 году Руффини послал экземпляр Лагранжу, а по прошествии нескольких месяцев молчания — еще один экземпляр с припиской: "Если я допустил ошибку в каком-либо доказательстве, или если я утверждал что-то, что я считал новым, но оно в действительности таковым не является, или, наконец, если я написал бесполезную книгу, я умоляю вас откровенно высказаться по этому поводу". По-прежнему никакого ответа. Еще одна попытка в 1802 году. Ничего.

Несколько лет, прошедших без признания, Руффини воспринял как должное. Однако затем вместо ожидаемой славы

стали распространяться неясные слухи, намекавшие, что в его "доказательстве" были ошибки. Поскольку же никто не объявил, в чем эти ошибки могли состоять, Руффини не имел шанса оправдаться. В конце концов он пришел к выводу — без сомнения, верному, — что доказательство было слишком сложным, и задался целью найти вариант попроще. Это ему удалось в 1803 году, когда он писал: "В настоящем мемуаре я попытаюсь доказать то же предложение, используя, как я надеюсь, менее трудную для понимания аргументацию, сохраняя при этом полную строгость". Новое доказательство было воспринято не лучше. Мир не был готов ни к прозрениям Руффини, ни к последующим доказательствам, опубликованным им в 1808 и 1813 годах. Однако он не оставлял усилий добиться от математического сообщества признания своей работы. Когда Жан Деламбр, предсказавший положение на небе планеты Уран, писал отчет о развитии математики за период начиная с 1789 года, он включил туда фразу "Руффини заявляет о доказательстве того, что решение уравнения пятой степени невозможно". Руффини незамедлительно ответил: "Я не только заявил о доказательстве, но и в самом деле это доказал".

Справедливости ради надо сказать, что небольшому числу математиков доказательство Руффини нравилось. Среди них был Коши, славившийся тем, что редко воздавал кому-либо по заслугам, если только эти заслуги не были его собственными. В 1821 году он писал Руффини: "Ваш мемуар по общему решению уравнений является работой, которая всегда представлялась мне заслуживающей внимания математиков и которая, по моему суждению, полностью доказывает невозможность решения алгебраических уравнений степени выше четвертой". Но похвала эта появилась уже слишком поздно.

Около 1800 года Руффини продолжал преподавать прикладную математику в городском военном училище. Он не ос-

тавлял и медицинской практики, причем среди его пациентов были люди от самых бедных до самых богатых. В 1814 году, после падения Наполеона, он стал ректором университета Модены. Политическая ситуация оставалась крайне сложной, и, несмотря на его высочайшую квалификацию и огромное уважение, которым он пользовался, а также репутацию безупречно честного человека, ему было весьма непросто оставаться на посту ректора.

В университете Модены Руффини одновременно заведовал кафедрами прикладной математики, практической медицины и клинической медицины. В 1817 году разразилась эпидемия тифа, и Руффини продолжал лечить своих пациентов, пока сам не заразился. Он выжил, но его здоровье было подорвано, и в 1819 году он оставил кафедру клинической медицины. Однако он никогда не прекращал научной работы и в 1820 году опубликовал статью о тифе, основанную на его собственном опыте и как врача, и как пациента. Он умер в 1822 году, всего около года спустя после того, как Коши письменно высоко отозвался о его работе по уравнениям пятой степени.

Одна из причин, по которой на работу Руффини смотрели несколько косо, могла состоять в ее новизне.

Как и Лагранж, он основывал свои исследования на концепции перестановки. Перестановка — это способ переупорядочить некоторый упорядоченный список. Самый расхожий пример перестановки — это перетасовка колоды карт. Цель в этом случае обычно состоит в достижении некоторого случайного, т. е. непредсказуемого, порядка. Число различных перестановок в колоде карт поистине огромно, так что вероятность предсказать появление того или иного порядка исчезающе мала.

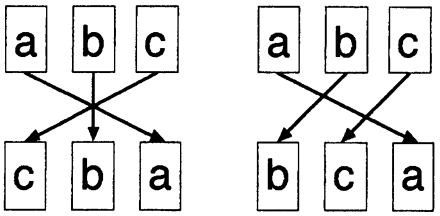
В теории уравнений перестановки возникают потому, что корни данного многочлена можно рассматривать как список.

Некоторые весьма фундаментальные свойства уравнений непосредственно связаны с эффектом перетасовки этого списка. Интуиция подсказывает, что уравнение "не знает", в каком порядке мы выписываем его корни, так что перестановка корней не должна приводить ни к каким серьезным различиям. В частности, коэффициенты уравнения должны быть полностью симметричными выражениями от корней — выражениями, которые не меняются, когда корни переставляют.

Однако, как ранее заметил и должным образом оценил Лагранж, определенные выражения от корней могут оказаться симметричными по отношению к некоторым, но не ко всем перестановкам. Эти "частично симметричные" выражения тесно связаны со всякой формулой для решения уравнения. Это свойство перестановок было известно коллегам Руффини. Гораздо менее известным было то, как систематически использовал Руффини другую идею Лагранжа — что можно "перемножить" две перестановки таким образом, что получится новая перестановка; для этого две данные перестановки надо выполнить одну за другой.

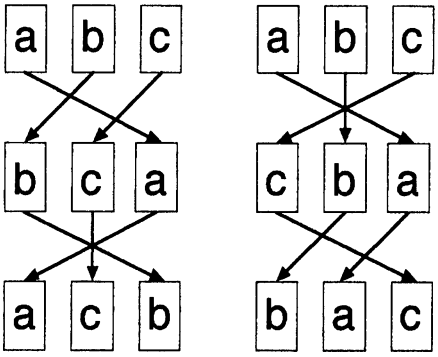
Рассмотрим три символа a, b и c. На них имеется шесть перестановок: abc, acb, bac, bca, cab и cba. Возьмем одну из них, скажем, cba. На первый взгляд это просто упорядоченный список из трех символов. Однако его можно также воспринимать как правило переупорядочения исходного списка abc. В данном случае правило выражается как "обращение порядка". И это правило можно применять не только к данному, но и вообще к любому списку. Применив его, скажем, к bca, получим acb. Так что можно придать смысл умножению $cba \times bca = acb$.

Эту идею, занимающую центральное место в нашем рассказе, можно, наверное, выразить яснее, если нарисовать некоторые диаграммы. Приведем две диаграммы для перестановок, которые переупорядочивают abc в cba и в bca, как показано на рисунке.



Две перестановки символов *a, b, c*.

Можно скомбинировать два переупорядочения в одно, разместив эти картинки одну над другой. Существуют два способа это сделать, показанные на рисунке.



Умножение перестановок. Результат зависит от того, какая перестановка берется первой.

Теперь результат "умножения" двух перестановок виден просто из нижней строки, которая в данном случае (левый рисунок!) есть *acb*. Приняв это определение "умножения" (которое не совпадает с обычным правилом умножения чисел), можно придать смысл утверждению $cba \times bca = acb$. Соглашение состоит в том, что первая перестановка в произведении располагается в нашей двухэтажной конструкции *снизу*. Это существенно, поскольку если поменять два этажа местами, то получится

другой ответ. Правая картинка показывает, что, когда перестановки перемножаются в противоположном порядке, результат есть $bca \times cba = bac$.

Суть доказательства невозможности, которое предложил Руффини, состояла в выработке условий, которым должно удовлетворять всякое уравнение пятой степени, корни которого можно выразить в радикалах. Если общее уравнение пятой степени не удовлетворяет этим условиям, то, значит, у него нет корней такого типа, и, следовательно, его нельзя решить никаким естественным обобщением методов, применимых к кубике и квартике.

Следуя Лагранжу, Руффини плотно занялся симметричными функциями корней и их связью с перестановками. Уравнение пятой степени имеет пять корней, а на пяти символах имеется 120 перестановок. Руффини осознал, что эта система перестановок должна обладать некоторыми структурными свойствами, наследуемыми из всякой гипотетической формулы для решений квинтики. Если эти свойства отсутствуют, то такой формулы быть не может. Это несколько напоминает выслеживание тигра в джунглях, растущих в густой грязи. Если тигр там действительно есть, он должен оставить ясные следы. Нет следов — нет тигра.

Используя математические закономерности этого нового вида умножения, Руффини смог доказать — по крайней мере к своему собственному удовлетворению, — что структура умножения на 120 перестановках не согласуется с симметричными функциями, которые должны существовать, если уравнение можно решить в радикалах. И он реально добился чего-то важного. До того как Руффини начал исследовать уравнения пятой степени, почти каждый математик в мире был уверен, что это уравнение можно решить — единственный вопрос со-

стоял в том, как именно. Исключение составлял лишь Гаусс, который как-то обронил намек, что, по его мнению, решения не существует, — но он также заметил, что это не очень интересный вопрос (один из тех редких случаев, когда интуиция его подвела).

После Руффини, как кажется, возникло общее ощущение, что уравнение пятой степени неразрешимо в радикалах. Лишь немногие полагали, что Руффини в самом деле это доказал, однако его работа определенно заставила многих усомниться в том, что дело может решиться в радикалах. Эта смена перспективы возымела и нежелательный побочный эффект: математики стали намного меньше интересоваться всей данной темой.

По злой иронии судьбы позднее оказалось, что работа Руффини содержала серьезный пробел, но в то время никто его не заметил. Скептицизм современников оказался в некотором роде оправданным. Но реально серьезным шагом вперед был сам метод: Руффини нашел правильную стратегию, он просто использовал не совсем правильную тактику. Данный предмет нуждался в стратеге, который был бы способен скрупулезно следить за мельчайшими тактическими моментами. И такой человек нашелся.

После многих лет усердного и смиренного служения Господу нашему в качестве пастора в одной из беднейших и наиболее удаленных областей в горах Норвегии Ханс Матиас Абель в 1784 году дождался вознаграждения. Он получил назначение в приход Йерстад, вблизи южного побережья Норвегии, недалеко от Осло-фьорда. Йерстад не был в полном смысле слова богатым приходом, но он был намного богаче тех мест, где Абель проповедовал раньше. Финансовое состояние его семьи разительно изменилось.

В духовном плане задача пастора Абеля оставалась той же: присматривать за паствой и прилагать все усилия, чтобы его подопечные были счастливы и добродетельны. Сам он происходил из обеспеченной семьи. Его прадед-датчанин был купцом, торговавшим весьма прибыльно — он осуществлял поставки для норвежской армии. Отец пастора, также купец, был альдерманом в городе Берген. Ханс был натурой гордой, но скромной, не слишком умным, но и определенно не дураком и был готов говорить начистоту, чего бы это ему ни стоило.

Чтобы помочь неимущим из своего прихода, он выращивал у себя в огороде новые виды растений: лен, из которого делали полотно, а также новый тип корнеплодов — земляные яблоки, иначе известные как картофель. Он писал стихи, не жалел времени на сбор сведений об истории края и жил в полном согласии со своей женой Элизабет. Дом его был известен тем, что там всегда хорошо кормили, а алкоголя не подавали никогда. Пьянство было одной из главных социальных проблем в Норвегии, и пастор твердо намеревался подавать своей пастве пример — впрочем, один раз он явился в церковь пьяным в стельку, дабы показать своим прихожанам, в какое унизительное состояние впадает пьяный человек. У него было двое детей — необычно мало для того времени: дочь Маргарета и сын Серен.

Маргарета ничем не выделялась, так и не вышла замуж и прожила большую часть жизни с родителями. Серен отличался от нее во всем: быстрый, обладавший острым и оригинальным умом, он тяготел к высшему обществу. Ему недоставало собранности и чувства долга, присущих его отцу, и он страдал от их отсутствия. Тем не менее в выборе профессии он пошел по стопам отца, став сначала викарием, а затем пастором; он женился на Анне-Мари Симонсен, которая была дочерью друга семьи, и отправился служить в Финней на юго-западном побережье. “Люди тут суеверны, но исполнены знания Библии, — пи-

сал он. — В поддержку каждого ошибочного мнения они приводят ссылку на неправильно истолкованный божественный авторитет". Тем не менее работа ему нравилась.

В 1801 году Серен писал другу: "Мои домашние радости недавно умножились: на третий день Рождества жена подарила мне здорового сына". То был Ханс Матиас. Его брат Нильс Хенрик появился на свет летом 1802 года. С первого своего дня Нильс страдал плохим здоровьем, и мать проводила много времени, ухаживая за ним.

Тем временем в Европе росло напряжение, и объединенное государство Норвегии и Дании оказалось зажатым между главными центрами военной силы — Англией и Францией. Наполеон желал поставить его под свои знамена, так что когда Британия заключила союз со Швецией, Норвегия–Дания внезапно стала противником Британии, немедленно предпринявшей вторжение. Через три дня Норвегия–Дания капитулировала, чтобы спасти Копенгаген от разрушения. Позднее, когда власть Наполеона стала ослабевать, его приближенный Жан-Батист Бернадотт стал королем Швеции. После того как Норвегию передали под власть Швеции, норвежский парламент — Стортинг — был вынужден признать Бернадотта своим монархом.

В 1815 году обоих мальчиков отправили в Кафедральную школу в Осло. Учитель математики по имени Петер Бадер принадлежал к тому типу учителей, которые стимулировали своих учеников посредством тяжелых физических наказаний. Тем не менее оба мальчика учились хорошо.

Затем, в 1818-м, Бадер так избил одного из своих учеников — сына депутата Стортинга, — что мальчик умер. Невероятно, но Бадера даже не отдали под суд, а просто заменили другим учителем математики по имени Бернт Холмбоэ, который до

того был ассистентом у профессора прикладной математики Кристофера Ханстеена. Это событие ознаменовало решительный поворот в математической карьере Нильса, потому что Холмбоэ позволял своим ученикам разбираться с интересными задачами, выходящими за рамки обычной программы. Нильсу разрешили взять классические учебники, среди них — некоторые книги Эйлера. "С этих пор, — писал позднее Холмбоэ, — [Нильс] Абель посвящал себя математике с максимальным рвением и желанием и добивался прогресса в своих занятиях со скоростью, изобличавшей гения". Вскоре после окончания школы Нильс убедил себя, что он решил уравнение пятой степени. Ни Холмбоэ, ни Ханстеен не смогли найти ошибки, так что они отправили его вычисления известному датскому математику Фердинанду Дегену на предмет возможной публикации работы Датской академией наук. Деген также не нашел ошибок в работе, но, обладая немалым опытом и зная, что всякое бывает, попросил Нильса подробнее провести вычисления в применении к некоторым конкретным примерам. Нильс быстро понял, что где-то закралась ошибка; он был расстроен, но испытывал облегчение оттого, что ему не дали выставить себя на посмешище, опубликовав ошибочный результат.

Честолюбие Серена в соединении с отсутствием здравого смысла привело к неприятным последствиям. Он выступил с заявлением, в котором обвинял двух членов Стортинга в несправедливом заключении в тюрьму управляющего металлургическим заводом, принадлежавшим одному из них. В результате таких нападок на их репутацию поднялся шум. Вскоре выяснилось, что управляющий не вызывал доверия, но Серен отказался извиняться. Впав в депрессию, несчастный запил и в конце концов допился до смерти. На похоронах вдова Серена Анна-Мари напилась до такого состояния, что затащила в постель своего любимого слугу. На следующее утро, когда к ней с визитом пришли официальные посетители, она принимала их в

постели, лежа рядом со своим любовником. "Бедные мальчики, мне их жаль", — писала их тетка.

В 1821 году Нильс закончил Кафедральную школу и отправился сдавать вступительные экзамен в университет Христиании (ныне Осло). Он получил максимальные оценки по арифметике и геометрии, а также хорошие оценки по остальной математике, но по всем другим предметам выступил ужасно. Он был теперь отчаянно беден, поэтому подал прошение о предоставлении ему бесплатного жилья и дров для отопления. Он также пытался получить субсидию, покрывающую расходы на проживание, и некоторые из профессоров, распознав его необычные способности, собрали деньги ему на стипендию. Получив такую поддержку, Нильс посвятил себя математике и решению уравнения пятой степени, на этот раз серьезно намереваясь обратить в успех свою неудачную первую попытку.

В 1823 году Нильс работал над эллиптическими интегралами — областью анализа, которой предстояло стать самым долговечным памятником своему создателю, превосходящим по важности даже его работы по уравнениям пятой степени. Он пытался также доказать Последнюю теорему Ферма, но не смог найти ни доказательства, ни опровержения, хотя ему удалось показать, что пример, опровергающий утверждение теоремы, может появиться только в области поистине гигантских чисел.

Летом того года он отправился на бал, познакомился там с молодой женщиной и пригласил ее на танец. После нескольких неудачных попыток начать оба они разразились смехом — ни один из них не имел ни малейшего представления о том, как танцуют. Женщину звали Кристин Кемп, но все называли ее Крелли; она была дочерью военного интенданта. Как и у Нильса, у нее не было денег, и на жизнь она зарабатывала частными уроками по всем предметам — от рукоделия до естествен-

ных наук. "Она некрасива, у нее рыжие волосы и веснушки, но она чудесная девушка", — писал Нильс. Они полюбили друг друга.

Эти события стимулировали занятия Нильса математикой. Ближе к концу 1823 года он доказал невозможность решения уравнения пятой степени — причем в отличие от прошедшего чуть мимо цели выстрела Руффини он не промахнулся. Доказательство, стратегия которого была схожа с использованной Руффини, но тактика совершеннее, не содержало пробелов. Исходно Нильс не знал о работе Руффини. Впоследствии он наверняка должен был с ней познакомиться, поскольку упоминает о ее неполноте. Но даже Нильс не смог точно указать то место, где в доказательстве Руффини таилась дыра, — и это несмотря на то, что его метод оказался ровно тем, что требовалось для заделки этой дыры.

Нильс и Крелли отпраздновали помолвку. Чтобы жениться на своей возлюбленной, Нильсу надо было получить работу, а это означало, что требовалось признание его талантов со стороны ведущих европейских математиков. Опубликовать свою теорию было бы недостаточно: медведя следовало ловить в его берлоге. А для этого требовалась некоторая сумма денег на путешествия.

После длительных переговоров университет Христиании согласился предоставить Нильсу достаточно средств, чтобы он смог отправиться с научным визитом в Париж, где ему предстояло встретиться с ведущими математиками мирового уровня. Готовясь к поездке, он решил, что ему понадобятся печатные экземпляры его лучшей работы. Он полагал, что доказательство невозможности решения уравнения пятой степени произведет впечатление на французских коллег. Но, к сожалению, все его работы были изданы по-норвежски, в малоизвестном журнале. Поэтому он решил, что необходимо частным образом издать свою работу по теории уравнений в переводе на французский. Заглавие ее звучало как "Мемуар по алгебраическим

уравнениям, в котором доказана невозможность решения общего уравнения пятой степени". Чтобы сэкономить на расходах по изданию, Нильс оставил лишь выжимку из самого существенного в своем методе, так что печатный вариант уложился всего лишь в шесть страниц. Это было куда меньше пятисот, написанных Руффини, но в математике бывают случаи, когда краткость скорее затемняет идеи. Целый ряд логических деталей — которые в этой области играли определяющую роль — пришлось оставить за бортом. Работа представляла собой набросок, а не доказательство.

Нильс открыл ее словами "Математики в целом занимались задачей нахождения общего метода для решения алгебраических уравнений, и некоторые из них предпринимали попытки доказать невозможность такого решения. Поэтому я смею надеяться, что математики благосклонно встретят эту статью, которая ставит своей целью заполнить пробел, существующий в теории уравнений". Надежда оказалась бесплодной. Хотя ему удалось посетить некоторых математиков в Париже и заручиться их согласием взглянуть на его статью, аргументация в ней была настолько сжатой, что большинство, вероятно, нашли ее непригодной для понимания. Гаусс не выбросил свой экземпляр, но так и не прочел его — когда статью нашли после его смерти, страницы в ней оставались неразрезанными.

Позднее, быть может осознав свою ошибку, Абель опубликовал два развернутых варианта своего доказательства, приведя в них больше подробностей. Узнав к этому времени о работах Руффини, он писал: "Первая попытка доказательства невозможности алгебраического решения общего уравнения была предложена математиком Руффини; но его мемуар настолько труден для понимания, что судить о верности его аргументации нелегко. Мне представляется, что его рассуждения не всегда удовлетворительны". Но, как и все остальные, он не указал, почему именно.

Руффини и Абель излагали ход своей мысли на формальном математическом языке своего времени, который не очень хорошо подходил для требовавшегося им стиля мышления. Математика имела тогда дело главным образом с конкретными, частными идеями, тогда как ключ к теории уравнений состоит в переводе рассуждений в более общие термины — те, которые относятся к структурам и процессам, а не к отдельным вещам. Таким образом, их идеи были сложны для современников по той причине, что выходили за рамки математического языка. Но даже для современных математиков использование терминологии того периода затруднило бы понимание.

К счастью, основные моменты их анализа можно ухватить, используя архитектурную метафору. Один из способов представить себе почти-доказательство Руффини, как и полное доказательство Абеля, состоит в том, чтобы представить себе строительство башни.

В этой башне по одной комнате на этаже, причем лестница связывает ее с комнатой этажом выше. В каждой комнате имеется большой мешок. Если открыть мешок, оттуда разлетаются миллионы алгебраических формул, заполняя весь этаж. На первый взгляд у этих формул нет никакой специальной структуры, и кажется, что их случайным образом понадергали из разных алгебраических текстов. Некоторые формулы короткие, некоторые длинные; некоторые простые, некоторые исключительно сложные. При более тщательном рассмотрении, однако, у них обнаруживаются родственные черты. Формулы в каждом мешке имеют массу общих свойств. У формул из мешка этажом выше другие общие свойства. Чем выше по башне мы поднимаемся, тем более сложными становятся формулы в мешках.

Мешок на первом этаже содержит все формулы, которые можно построить, взяв коэффициенты уравнения и складывая их друг с другом, вычитая, умножая, деля — снова и снова,

сколько угодно раз. В мире алгебраических формул, коль скоро вы задались коэффициентами, все эти "безобидные" комбинации прилагаются, можно сказать, практически бесплатно.

Чтобы забраться по лестнице на этаж выше, надо взять какую-нибудь формулу из мешка и использовать ее для построения *радикала*. Это может быть квадратный корень, кубический корень, корень пятой степени — какой угодно. Но формулу, корень которой берется, необходимо вынимать из того мешка. Всегда оказывается возможным взять корень p-й степени, где p — простое число, потому что более сложные корни можно построить из простых, и это простое наблюдение оказывается на удивление полезным.

Итак, вы выбрали какой-то корень; теперь, поднявшись на второй этаж, вы находите второй мешок, содержимое которого исходно совпадает с содержимым мешка на первом этаже. Но вы открываете мешок и швыряете в него новый радикал.

Формулы *размножаются*. Когда Ной причалил свой ковчег к горе Арарат, он повелел всем созданиям плодиться и размножаться. Формулы в мешке делают даже нечто большее: они не только множатся, но и складываются, вычитаются и делятся. Через несколько секунд лихорадочной активности из мешка на втором этаже начинают вылезать всевозможные "безобидные" комбинации, построенные из коэффициентов уравнения и нашего нового радикала. По сравнению с мешком на первом этаже здесь имеется много новых формул — но все они похожи друг на друга, поскольку каждая включает в качестве новой компоненты наш радикал.

Будем действовать точно так же, чтобы подняться на третий этаж. Снова выбираем некоторую формулу из нового мешка — строго одну — и строим новый радикал, извлекая корень некоторой (простой) степени из этой формулы. Тащим новый радикал по лестнице на третий этаж, засовываем его в мешок и ждем, пока формулы исполнят свои брачные игры.

И так далее. Каждый новый этаж означает новый радикал, и в новом мешке появляются новые формулы. На каждом шаге все эти формулы строятся из коэффициентов, к которым добавлен какой-либо радикал из числа тех, что были построены ранее.

Наконец мы на верхнем этаже башни. Миссия выполнена, исходное уравнение решено в радикалах — при условии, что, ощупав мешок на чердаке, мы найдем там по крайней мере один из корней нашего уравнения.

Подобных башен может быть много, в зависимости от выбираемых на каждом шаге формул и радикалов. Большинство обманывают наши ожидания и там не найти и намека на искомый корень. Но если миссия выполнима, если некоторая формула, построенная из последовательных радикалов, дает решение, то на чердаке в соответствующей башне действительно найдется корень. Ибо формула в точности говорит нам, как получить этот корень, последовательно добавляя радикалы. Другими словами, она сообщает нам, как именно построить башню.

В терминах таких башен можно интерпретировать классические решения уравнений третьей и четвертой степеней и даже вавилонское решение квадратных уравнений. Начнем с кубического уравнения, поскольку оно уже достаточно сложно, чтобы быть репрезентативным, но еще достаточно просто, чтобы оставаться наглядным.

В башне Кардано только три этажа.

Мешок на первом этаже содержит коэффициенты и все их комбинации.

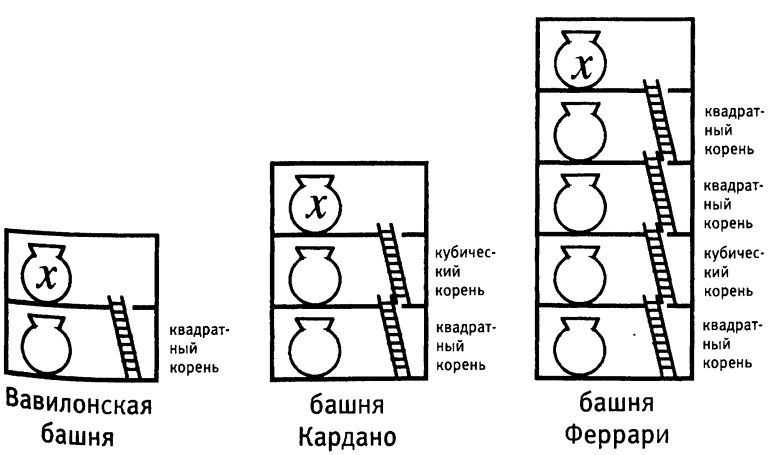
Лестница, ведущая на второй этаж, требует извлечения квадратного корня. Весьма конкретного квадратного корня из вполне определенной формулы из первого мешка. Мешок на

втором этаже содержит все комбинации этого квадратного корня и коэффициентов.

Лестница на третий этаж — на чердак — требует кубического корня, причем снова вполне конкретного. Это кубический корень из определенной формулы, включающей коэффициенты и тот квадратный корень, который уже использовался, чтобы подняться на один этаж. Содержит ли мешок на чердаке какой-либо корень нашего кубического уравнения? Да, и доказательство состоит в формуле Кардано. Подъем на башню увенчался успехом.

Башня Феррари выше — в ней пять этажей.

На первом этаже, как всегда, в мешке содержатся просто комбинации, составленные из коэффициентов. Подъем на второй этаж осуществляется с помощью образования безобидных комбинаций и последующего извлечения подходящего квадратного корня. На третий этаж ведут взятие безобидных комбинаций и, далее, извлечение подходящего кубического корня. На четвертый — составление безобидных комбинаций и, далее, извлечение подходящего квадратного корня.



Решение квадрики, кубики и квартики.

Наконец мы добираемся до пятого этажа — чердака, — составляя безобидные комбинации и беря затем подходящий квадратный корень.

И вот — мешок на чердаке действительно содержит то, что мы искали, — некий корень уравнения четвертой степени. Формула Феррари снабжает нас инструкциями по построению именно нужной башни.

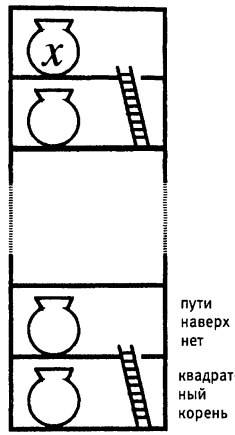
Вавилонская башня, которая решает уравнение второй степени, также подходит под эту метафору. Но она оказывается укороченной башней всего с двумя этажами. Мешок на первом этаже содержит просто комбинации коэффициентов. Единственный, тщательно выбранный квадратный корень ведет на один этаж выше — уже на чердак. Внутри этого мешка имеется корень квадратного уравнения — в действительности оба его корня. Об этом нам говорит вавилонская процедура решения квадратных уравнений — формула, которой нас учили в школе.

А что же насчет уравнения пятой степени?

Предположим, что формула для решения квинтики в радикалах на самом деле существует. Мы не знаем, как она выглядит, но тем не менее можем многое о ней сказать. В частности, она должна соответствовать некоторой башне. Назовем эту гипотетическую башню башней Абеля.

В башне Абеля могли бы быть сотни этажей, а лестницы в ней могли бы содержать всевозможные радикалы — корни 19-й степени, 37-й степени и бог знает какой еще. Все, что нам известно наверняка, — это что мешок на первом этаже содержит исключительно безобидные комбинации коэффициентов. Мы доверчиво полагаем, что на чердаке, где-то за облаками, имеется мешок, содержащий некоторый корень уравнения пятой степени.

Зададимся вопросом, как забраться вверх по башне; математика говорит нам, что имеется только один способ подняться на второй этаж. Надо взять один определенный квадратный корень. Другого пути наверх нет.



башня Абеля

Почему уравнение пятой степени неразрешимо.

Впрочем, не совсем так. Мы могли бы брать всевозможные другие корни и построить огромную, высоченную башню. Но чтобы на чердаке такой башни находился корень, необходимо, чтобы некоторый этаж соответствовал тому самому определенному квадратному корню, который я имею в виду. И ни один из предыдущих этажей не поможет нам добраться до чердака; строительство будет лишь пустой тратой времени и денег. Так что любой вменяемый строитель обязательно начнет именно с этого квадратного корня.

Что требуется, чтобы подняться по лестнице на третий этаж?

На третий этаж лестницы *нет*. Можно забраться на второй этаж, но там мы и застрянем. И если нельзя подняться на третий этаж нашей воображаемой башни, то заведомо нельзя добраться до чердака и найти там в мешке корень.

Одним словом, башни Абеля не существует. Все попытки прекращаются, когда мы упираемся в бетонный потолок на втором этаже; или, возможно, имеется некоторая более сложно организованная структура с множеством никому не нужных этажей, где мы в конце концов упираемся в бетон точно таким же образом и по той же самой причине. Это и доказал Руффини, если не считать одного технического пробела. Грубо говоря, он не сумел доказать, что если на чердаке жи-

вут безобидные комбинации радикалов, то и сами радикалы живут там же.

Доказательство Руффини и башня Абеля имеют выраженное сходство. Но, используя башни, Абель улучшил тактику Руффини и закрыл остававшуюся там дыру. Вместе они доказали, что нет *никакой* радикальной башни, позволяющей добраться от коэффициентов уравнения пятой степени к его корням. В переводе с архитектурного это значит, что нет формулы для корня уравнения пятой степени, сложность которой ограничивается радикалами. Решить уравнение пятой степени в радикалах невозможно, подобно тому как невозможно забраться на Луну, по очереди вставая друг другу на плечи.

Рождество 1828 года Абель планировал провести у своих старых друзей Катарины и Нильса Трешов во Фроланде. Он собирался навестить Крелли, жившую неподалеку. Абель не очень хорошо себя чувствовал, и его врач был против этой поездки. В письме к жене Кристофера Ханстеена Иоанне Катарина писала: "Если бы вы были в городе, он, пожалуй, согласился бы остаться. Но он старался скрыть, насколько серьезно он на самом деле болен". В середине декабря Абель направился во Фроланд, экипировавшись так, чтобы противостоять зимней стуже. Он прибыл туда 19 декабря, закутанный во всю наличествовавшую у него одежду, включая носки, которые он натянул на руки. Несмотря на приступы кашля и озноба, в математическом плане он мощно продвигался вперед; в доме Трешов ему нравилось работать в гостиной в окружении их детей. Он любил их общество.

Абель не оставлял попыток найти постоянное место работы. Даже его временная должность в Христиании была под вопросом. После Рождества он сосредоточил усилия на том, чтобы получить работу в Берлине. Посредством закулисной диплома-

тии его друг Август Крелле сумел убедить Отдел образования создать Математический институт и надеялся устроить дело таким образом, чтобы Абель стал там одним из профессоров. Он получил поддержку от такого научного светила, как Александр фон Гумбольдт, а также рекомендацию от Гаусса и еще одну от Адриена-Мари Лежандра, видного члена Французской академии. Крелле убеждал министра образования, что Абель будет рад занять должность в Берлине, но что действовать следует быстро, поскольку Абеля хотят пригласить и в другие места, в особенности в Копенгаген.

Абель собирался уехать из Фроланда в Осло 9 января, но приступы кашля и озноба усилились, и он проводил большую часть времени, оставаясь в своей комнате. Кемпы, его будущие родственники со стороны невесты, сильно обеспокоились. Утром того дня, когда он предполагал уехать, у Абеля начался очень сильный кашель с кровохарканьем. В дом немедленно вызвали семейного врача, и он прописал постельный режим и постоянный уход. Крелли стала исполнять роль медсестры, и ее заботливое внимание и различные лекарства привели к некоторому улучшению. В течение нескольких недель Абелю позволили недолгое время сидеть на стуле. Ему пришлось отказаться от всяких занятий математикой.

Лежандр написал Абелю письмо, в котором рассказывал, какое впечатление на него произвели работы норвежца по эллиптическим функциям, и побуждал молодого человека опубликовать свое решение задачи о том, когда уравнение можно решить в радикалах: "Я настаиваю на том, что эта новая теория должна появиться в печати как можно скорее. Она прославит вас и будет всегда и всеми рассматриваться как величайшее открытие, которое оставалось сделать в математике". В то время как некоторые видные математики противодействовали публикации основополагающих работ Абеля —

одни сознательно, другие — просто не придавая им большого значения, — его репутация среди других ученых быстро набирала силу.

К концу февраля 1829 года врач Абеля понял, что надежды на выздоровление нет и что лучшее, что остается делать, — это по мере возможности сдерживать развитие болезни. Врач послал бывшему учителю Абеля Бернту Холмбоэ бюллетень о состоянии здоровья молодого человека:

> "...Вскоре после прибытия на Фроландский металлургический завод он стал страдать от тяжелого приступа пневмонии, сопровождавшегося значительным отхаркиванием, которое вскорости прекратилось... Однако хронический кашель и значительная слабость вынудили его оставаться в постели, и он по-прежнему должен соблюдать постельный режим; более того, ему нельзя подвергать себя воздействию малейших изменений в окружающей температуре.
>
> Более серьезным представляется тот факт, что сухой кашель, сопровождаемый жгучей болью в грудной клетке, с большой долей вероятности указывает на скрытый грудной бронхиальный туберкулез, который вполне может привести к грудной чахотке, к чему отчасти располагает его конституция.
>
> Ввиду столь опасного состояния здоровья... крайне маловероятно, что он сможет вернуться в Осло до весны. До того времени он будет не в состоянии исполнять свои должностные обязанности даже при самом благоприятном течении болезни".

Крелле, получив в Берлине эти плохие новости, удвоил свои усилия по устройству должности для Абеля, убеждая немецкого министра, что будет полезно перевезти Абеля в более теплый климат.

8 апреля Крелле отправил своему протеже письмо с хорошими новостями:

"Отдел образования решил пригласить вас в Берлин и предоставить вам должность... В каком качестве вы будете работать и каково будет ваше жалование, я вам сказать не могу, поскольку сам этого не знаю. Я только спешу поделиться с вами главной новостью; можете быть уверены, что вы находитесь в хороших руках. Беспокоиться о своем будущем вам более нечего — доверьтесь нам и будьте уверены в успехе".

Ах, если бы все так и сложилось.

Абель был слишком болен, чтобы путешествовать. Ему пришлось остаться во Фроланде; несмотря на уход Крелли, он все более и более слабел, а кашель его становился все тяжелее. Он поднимался с кровати, только когда меняли простыни. Попытавшись немного заняться математикой, он обнаружил, что не может писать. Он стал раздумывать о прошлом, о своей бедности, но не показывал своих чувств тем, кто любил его, до самого конца стараясь доставлять им как можно меньше хлопот.

Понятно, что для Крелли было все труднее и труднее скрывать свое отчаяние от жениха. Мари или Ханна подменяли ее у его постели. Усилившийся кашель Абеля не давал ему спать, и семья наняла сиделку, которая ухаживала за ним по ночам, чтобы Крелли могла немного передохнуть.

Утром 6 апреля, прометавшись всю ночь в сильной боли, Абель умер.

Ханна писала:

"Всю ночь 5 апреля длилась его тяжелейшая агония. Ближе к утру он сделался спокойнее, а в 11 часов перед полуднем испустил свой последний вздох. Моя сестра и его невеста были с ним в эти последние мгновения и наблюдали его спокойный переход в объятия смерти".

Пять дней спустя Крелли написала сестре Катарины Ханстеен[1] Генриэтте Фридрихсен с просьбой сообщить печальную новость Катарине. “Моя драгоценная, только долг мог заставить меня просить об этом, ибо я бесконечно обязана вашей сестре, фру Ханстеен. Дрожащей рукой беру я перо, чтобы попросить вас сообщить ей, что она потеряла преданного, доброго сына, любившего ее бесконечно”.

> “Мой Абель мертв! ‹...› Я потеряла все в этом мире. Я ничего, ничего не чувствую. Простите меня, я так несчастна, что не в силах более писать. Попросите ее принять приложенную к письму прядь волос моего Абеля. Подготовить вашу сестру к этому покорнейше просит вас ваша несчастная К. Кемп”.

1 Как можно понять, Абель болел и умер в доме, где хозяйкой была Катарина *Трешов*, а *Иоанна* Ханстеен — жена его учителя Ханстеена. *(Примеч. перев.)*

Глава 7
Революционер-неудачник

Математики нечасто бывают всем довольны. Каждая успешно решенная задача только ставит новые вопросы. Вскоре после смерти Абеля данное им доказательство того, что некоторые уравнения пятой степени неразрешимы в радикалах, начало получать признание. Но работа Абеля была только началом. Хотя ни одна из предыдущих попыток решить *все* уравнения пятой степени не увенчалась успехом, некоторые особенно умные математики смогли доказать, что определенные уравнения пятой степени *можно*, тем не менее, решить в радикалах. Не только те, для которых решение очевидно, типа $x^5 - 2 = 0$, откуда $x = \sqrt[5]{2}$, но и довольно неожиданные, например, $x^5 + 15x + 12 = 0$, — хотя его решение слишком сложно, чтобы здесь его приводить.

Создалась непонятная ситуация. Если некоторые уравнения пятой степени разрешимы, а другие нет, что тогда отличает уравнения одного типа от другого? Ответ на этот вопрос изменил развитие математики и математической физики. Несмотря на то что ответ был получен более 170 лет тому назад, он про-

должает приводить к новым важным открытиям. В ретроспективе выглядит просто потрясающим, насколько далеко простираются следствия ответа на невинный вопрос о внутреннем устройстве математики. Решение уравнений пятой степени не имело, по-видимому, никаких практических применений. Если некоторая задача в инженерных науках или астрономии требовала для своего решения уравнения пятой степени, всегда находились численные методы найти ответ с любым желаемым числом знаков после запятой. Разрешимость — или неразрешимость — уравнения пятой степени в радикалах была классическим примером "чистой" математики, примером вопроса, задаваемого по причинам, которые интересовали математиков, и только их одних.

Как же сильно можно ошибаться...

Абель обнаружил препятствие к решению определенных уравнений пятой степени в радикалах. Он смог доказать, что это препятствие на самом деле не позволяет таким решениям существовать по крайней мере для некоторых уравнений пятой степени. Следующий шаг вперед — ось, вокруг которой крутится весь наш рассказ, — выпал на долю того, кто тщательно смотрел дареному коню в зубы и задавал вопросы, от которых математики не могут удержаться всякий раз, когда некоторая важная задача оказывается решена: "Да, все это очень здорово, но почему оно *на самом деле* работает?"

Такой подход может показаться несколько негативистским, но мы снова и снова убеждаемся в его ценности. Стоящая за этим философия заключается в том, что большинство математических задач слишком сложны для решения. Так что, когда кому-то удается решить нечто, что ставило в тупик всех предшественников, недостаточно просто отпраздновать великое решение. Или автору просто повезло (математики не слишком верят в везение такого типа), или же решение оказалось возможным по некоторым специальным причи-

нам. И если удается понять *причину*... что ж, множество других задач могут оказаться разрешимыми с применением подобных же методов.

Так что, в то время как Абель шлифовал ответ на конкретный вопрос "Каждое ли уравнение пятой степени разрешимо?" — ответ, суть которого сводится к ясному "нет", — еще более глубокий мыслитель боролся с гораздо более общей проблемой: какие уравнения вообще можно решить в радикалах, а какие нет? Справедливости ради скажем, что Абель начал думать в этом направлении и мог бы даже найти ответ, если бы туберкулез пощадил его.

Человеком, которому предстояло изменить ход развития математических наук, был Эварист Галуа, и история его жизни — одна из наиболее драматичных и даже наиболее трагичных в истории математики. К тому же его потрясающие открытия едва не пропали.

Если бы Галуа не появился на свет или если бы его работы все-таки пропали, кто-нибудь, без сомнения, в конце концов сделал бы те же самые открытия. Пути многих математиков пролегали через эту область науки, порой на расстоянии всего шага от открытия. В некоторой альтернативной вселенной некто, обладающий талантами и проницательностью Галуа (а быть может, некий Нильс Абель, сумевший еще несколько лет противостоять туберкулезу), в конце концов добрался бы до того же круга идей. Но в нашей вселенной это был Галуа.

Он родился 25 октября 1811 года в Бург-ля-Рен — в те дни это была деревушка неподалеку от Парижа. Сейчас это пригород в департаменте О-де-Сен, на пересечении автострады № 20 и трассы D60. Трасса D60 — это авеню Галуа. В 1792 году деревню Бург-ля-Рен переименовали в Бург-л'Эгалите, в духе политических потрясений того времени и сопутствующей им идеологии:

"Город Королевы" заменили на "Город Равенства". В 1812 году старое название вернули, но в воздухе еще чувствовалась революция.

Отец — Николя-Габриэль Галуа — был убежденным республиканцем и вождем деревенской либеральной партии — Liberté в городе Égalité, — которая видела свою основную задачу в устранении монархии. Когда в ходе наспех состряпанного компромисса 1814 года на трон вернули короля Людовика XVIII, Николя-Габриэль занял кабинет мэра города, где, учитывая его политические наклонности, ему вряд ли было комфортно.

Мать — Аделаид-Мари, урожденная Демант. Ее отец был стряпчим, то есть помощником адвоката, осуществлявшим ряд законно-правовых действий, однако без права самостоятельно вести практику; в его задачи входило формулировать мнения по поводу судебных дел. Аделаид-Мари свободно читала по-латыни и передала сыну свое классическое образование.

В течение первых двенадцати лет Эварист оставался дома, а его образованием занималась мать. Когда ему было десять, он мог поступить в коллеж в Реймсе, но мать, по-видимому, считала, что ему еще рано покидать дом. Однако в октябре 1823 года он начал посещать Коллеж Людовика Великого, который представлял собой подготовительную школу. Вскоре после того, как Эварист туда поступил, учащиеся отказались петь в школьной часовне, и юный Галуа своими глазами увидел судьбу потенциальных революционеров: добрую сотню учеников немедленно исключили. К сожалению для математики, это не послужило ему уроком.

По итогам двух лет обучения он был награжден первой премией по латыни. Однако латынь вскоре стала наводить на него тоску. В результате в школе потребовали, чтобы для улучшения успеваемости он прошел курс еще раз, но это, разумеется, навело на него тоску еще бóльшую, и ситуация изменилась от пло-

хой к худшей. От быстрой дороги к забвению Галуа спасла математика — этот предмет был в достаточной степени интеллектуально насыщен, чтобы пробудить в нем интерес. Но не любая математика: Галуа обратился прямо к классике — Лежандровым "Элементам геометрии". Это можно до некоторой степени сравнить с тем, как если бы современный студент-физик для начала принялся за чтение технических статей Эйнштейна. Но в математике имеется некоторый пороговый эффект, интеллектуальный переломный момент. Если студент в состоянии прорваться через несколько первых препятствий, вникнуть в особенности обозначений в данном предмете и проникнуться той мыслью, что лучший способ продвижения вперед — это *понимать* идеи, а не просто зазубривать их, — он или она может весело двигаться с попутным ветром в сторону все более замысловатых и манящих идей, тогда как чуть более ограниченный студент застрянет на геометрии равнобедренных треугольников.

О том, много ли приходилось Галуа трудиться над освоением основополагающей работы Лежандра, можно спорить, но, во всяком случае, эта работа его не отпугнула. Он начал читать технические статьи Лагранжа и Абеля; неудивительно, что его последующие работы находились в этой области интересов, в частности, в теории уравнений. Уравнения, похоже, были единственной вещью, владевшей вниманием Галуа. Остальная его школьная деятельность страдала в той же степени, в какой развивалось его увлечение работами математиков первой величины.

В школе Галуа был неопрятным — привычка, от которой он так никогда и не избавился. Он ставил своих учителей в тупик, решая задачи в уме вместо того, чтобы "показать, как он это сделал". Это пристрастие учителей математики, которое и сегодня огорчает многих способных молодых людей. Представьте себе, что случилось бы с подающим надежды молодым футболистом, если бы всякий раз, как он забьет гол, тренер требовал от него точной записи всех тактических шагов, которые он

предпринял, а без этого гол бы не засчитывался. Такой последовательности шагов нет. Игрок увидел свободное пространство и отправил мяч именно туда, куда, как подтвердит всякий знаток игры, его и следовало отправить.

Нечто подобное имеет место со способными молодыми математиками.

Честолюбие заставляло Галуа замахиваться на большие цели: он хотел продолжать образование в одном из наиболее престижных учреждений Франции — Политехнической Школе, гнездовье французской математики. Однако же он пренебрег советом своего учителя математики, который старался научить молодого человека работать систематически, объяснять промежуточные шаги и вообще давать возможность экзаменаторам следовать за поворотами своей мысли. Крайне недоподготовленный и пагубно самонадеянный Эварист попытался сдать вступительные экзамены и провалился.

Двадцать лет спустя влиятельный французский математик Орли Теркем, издававший престижный журнал, предложил объяснение провалу Галуа: "Кандидат с более высоким интеллектуальным уровнем теряется, когда видит, что его экзаменатор глупее него: "Раз они меня не понимают, значит. это *я* — варвар". Современный комментатор, лучше осведомленный о том, что требуется для успешного общения, не будет столь критичен и ограничится замечанием, что студент с более высоким интеллектуальным уровнем должен понять, с кем он имеет дело. Собственной бескомпромиссностью Галуа не способствовал своему успеху.

Таким образом, Галуа остался в Коллеже Людовика Великого, где удача неожиданно ему улыбнулась. Учитель по имени Луи-Поль Ришар разглядел способности молодого человека, и Галуа записался на курс продвинутой математики, который тот вел. Ришар составил мнение, что Галуа настолько способный, что его следует принять в Политехническую школу без экзаме-

нов. Весьма вероятно, Ришар примерно представлял себе, что будет, если Галуа придется сдавать экзамены. Нет свидетельств, что Ришар когда-либо высказывал свою точку зрения в Политехнической школе. Если и да, то там на нее не обратили внимания.

К 1829 году Галуа опубликовал свою первую исследовательскую работу — достаточно компетентную, но скучноватую статью о непрерывных дробях. Куда бóльшие цели он ставил перед собой в неопубликованной работе — внести фундаментальный вклад в теорию уравнений. Он оформил некоторые из своих результатов и отправил их во Французскую академию наук, чтобы там рассмотрели возможность их публикации в своем журнале. Тогда, как и сейчас, каждую посланную для публикации статью отправляли рецензенту — специалисту в соответствующей области, — и он высказывал рекомендации относительно новизны, значимости и целесообразности публикации работы. В данном случае рецензентом был Коши — в то время, вероятно, ведущий французский математик. Поскольку он сам имел публикации в области, близкой к теме статьи Галуа, его выбор в качестве рецензента представлялся естественным.

К сожалению, он был также чрезвычайно занят. Имеется широко распространенный миф, что Коши потерял рукопись Галуа; некоторые источники предполагают, что он выбросил ее в припадке уязвленного самолюбия. Истина представляется более прозаической. Имеется письмо, направленное Коши в Академию, датированное 18 января 1830 года, в котором он извиняется за непредставленный отзыв о работе "молодого Галоа"[1], объясняет, что "страдал недомоганием и не выходил из дома", а также упоминает свой собственный мемуар.

[1] Фамилия Galois у Коши написана как Galoi, что произносится так же, но тем не менее представляет собой заметную неточность в написании. *(Примеч. перев.)*

Это письмо сообщает нам несколько вещей. Во-первых, Коши не выбросил рукопись Галуа — через шесть месяцев после того, как она была отправлена, она все еще оставалась у Коши. Во-вторых, Коши, по-видимому, прочитал рукопись и решил, что она достаточно важна для привлечения к ней внимания Академии.

Однако когда Коши появился на следующем собрании Академии, он представил одну только свою статью. Что же случилось с рукописью Галуа?

Французский историк Рене Татон привел аргументы в пользу того, что идеи Галуа произвели на Коши впечатление — быть может, даже чересчур сильное. Поэтому вместо того, чтобы огласить его работу в Академии, как исходно планировалось, он посоветовал Галуа написать более развернутое и, предположительно, существенно улучшенное изложение теории, чтобы подать его на соискание премии — гран-при по математике. Получение этой премии было высочайшим отличием. В поддержку этого утверждения нет документальных свидетельств, но известно, что в феврале 1830 года Галуа отправил такой мемуар на соискание гран-при.

Невозможно точно сказать, что было в этом документе, но в общих чертах о его содержании можно судить из сохранившихся заметок самого Галуа. Ясно, что история могла бы оказаться совсем другой, если бы далекоидущие следствия из этой работы были оценены в полной мере. Вместо этого рукопись просто исчезла.

Одно возможное объяснение появилось в 1831 году в *The Globe* — журнале, основанном Сен-Симоном и издаваемом его последователями, принадлежавшими к неохристианскому социалистическому движению. В *The Globe* рассказывалось о судебном заседании, на котором Галуа обвинялся в том, что публично угрожал жизни короля. Кроме того, там говорилось, что "этот мемуар... заслуживал премии, поскольку позволял разре-

шить некоторые сложности, с которыми не смог справиться Лагранж. Коши в максимально высокой степени отозвался об авторе по поводу данного предмета. И что же? Мемуар потерян, а присуждение премии прошло без участия молодого ученого".

Большая проблема здесь состоит в том, чтобы оценить фактологические основания данной статьи. Коши бежал из страны в сентябре 1830 года, спасаясь от излишнего внимания к себе со стороны революционеров-антиинтеллектуалов, так что статья не может быть основана на его словах. Дело выглядит так, будто источником статьи был сам Галуа. У него был близкий друг Огюст Шевалье, ранее приглашавший его вступить в коммуну, которую образовали последователи Сен-Симона. Весьма вероятно, что Шевалье был репортером — сам Галуа в тот момент был занят другим делом, а именно — его привлекли к суду, где ставкой была его жизнь, — а раз так, то история должна была исходить от Галуа. Или он целиком ее выдумал, или Коши еще до этого действительно хвалил его работу.

Вернемся в 1829 год. На математическом фронте Галуа испытывает растущее разочарование, поскольку от математического сообщества, по-видимому, не приходится ждать признания, к которому он так стремился. Тогда же начала рушиться и его частная жизнь.

Дела в деревне Бург-ля-Рен шли не лучшим образом. Мэр — Николя, отец нашего Галуа — оказался замешан в грязном политическом скандале, который привел в ярость деревенского священника. Священник предпринял намеренно немилосердный шаг — распространил злобные замечания о родственниках Николя и подделал на них его подпись. В отчаянии Николя покончил с собой, повесившись.

Эта трагедия разыгралась всего за несколько дней до вступительных экзаменов в Политехническую школу — последней

возможности для Галуа туда поступить. Все прошло неудачно. По некоторым рассказам, Галуа бросил в лицо экзаменатору тряпку для стирания с доски — и даже если это в самом деле была тряпка, а не деревяшка, служащая той же цели, это вряд ли произвело на экзаменатора благоприятное впечатление. В 1899 году Ж. Бертран привел некоторые подробности, из которых следовало, что Галуа был не готов к вопросу, который ему задали, из-за чего просто потерял самообладание.

По той или иной причине Галуа провалился на вступительных экзаменах и попал в тяжелейшее положение. Поскольку он был абсолютно уверен, что поступит, — похоже, он и в самом деле был весьма заносчив — он не озаботился подготовиться к вступительным экзаменам в единственное альтернативное учебное заведение — Приготовительную школу. В наши дни это учреждение, переименованное в Нормальную школу ("Эколь Нормаль"), считается более престижным, чем Политехническая школа, но тогда оно занимало непочетное второе место. Галуа в спешке зазубрил необходимый материал, триумфально прошел по математике и физике, путался на экзамене по литературе, но был в итоге принят. Он получил диплом как по естественным, так и по гуманитарным дисциплинам в конце 1829 года.

Как я уже упоминал, в феврале 1830 года Галуа отправил мемуар по теории уравнений в Академию, на соискание гран-при. Ученый секретарь Жозеф Фурье отнес его домой, чтобы там просмотреть. Злой рок, постоянно тяготевший над карьерой Галуа, нанес новый удар: Фурье скоропостижно скончался, оставив мемуар непрочитанным. Хуже того, среди его бумаг рукопись найти не удалось. Однако оставались три других члена комитета по присуждению премии: Лежандр, Сильвестр-Франсуа Лакруа и Луи Пуансо. Быть может, его потерял один из них.

Нетрудно представить, как взбешен был Галуа. Он пришел к убеждению, что все происходившее было заговором посредст-

венных умов с целью задушить усилия гения; он быстро нашел козла отпущения в лице деспотического режима Бурбонов. И загорелся идеей сыграть свою роль в его устранении.

За шесть лет до того, в 1824 году, король Карл X взошел на французский трон в качестве наследника Людовика XVIII, однако оказался крайне непопулярен. На выборах 1827 года либеральная оппозиция получила очень неплохие результаты, а в 1830-м вообще завоевала большинство. Карл, перед которым встала неминуемая перспектива вынужденного отречения, попытался организовать переворот; 25 июля он издал указ, приостанавливающий свободу прессы. Однако он неверно оценил настроение народа, который тут же поднял восстание. Через три дня был достигнут компромисс: короля Карла заменили на герцога Орлеанского Луи-Филиппа[1].

Студенты Политехнической школы — университета, куда Галуа ранее надеялся поступить, — сыграли значительную роль в этих событиях, устраивая демонстрации на парижских улицах. А где же был архиантимонархист Галуа в это судьбоносное время? Отлученный от событий, он сидел вместе с друзьями-студентами взаперти в Приготовительной школе. Директор Гиньо выбрал заведомо наиболее безопасный способ действий.

Отказ в причитавшемся ему по праву месте в истории привела Галуа в такую ярость, что он опубиковал в *Gazette des Écoles* статейку, состоящую из злобных нападок на Гиньо:

> "Письмо, которое г-н Гиньо поместил вчера в лицее по поводу одной из статей вашей газеты, показалось мне совершенно недопустимым. Я думаю, что вы с готовностью воспользуетесь любым средством разоблачить этого человека.

[1] Компромисс в том смысле, что король был свергнут, однако монархия сохранена. *(Примеч. перев.)*

> Вот факты, которые могут засвидетельствовать сорок шесть студентов.
> Утром 28 июля, после того как некоторые студенты Нормальной школы выразили желание принять участие в сражениях, г-н Гиньо дважды заявил, что он готов вызвать полицию, чтобы восстановить в Школе порядок. Полицию — 28 июля!
> В тот же самый день г-н Гиньо сказал нам со своим обычным педантизмом: "С обеих сторон убито порядочно храбрецов. Будь я военным, я не знал бы, на что решиться. Что принести в жертву — свободу или законный порядок?"
> Вот человек, который на следующий день украсил свою шляпу трехцветной кокардой! Вот наши либеральные доктринеры!"

Редактор опубликовал это письмо, но не стал указывать фамилию автора. Однако директор все равно не мешкая исключил Галуа, сочтя его автором этого письма.

В качестве ответного действия Галуа вступил в Артиллерию Национальной гвардии — полувоенную организацию, служившую рассадником республиканских идей. 21 декабря 1830 года это подразделение — весьма вероятно, при личном участии Галуа — было размещено в окрестностях Лувра. В тот момент четверо бывших министров были отданы под суд, и общественность была настроена мрачно, требуя их казни; народ был готов к восстанию, если этого не произойдет. Но прямо перед оглашением приговора Артиллерию Национальной гвардии удалили и заменили на регулярную Национальную гвардию, усиленную солдатами, сохранявшими верность королю. Был оглашен приговор, по которому министры получили тюремное заключение, восстание так и не перешло во что-то существенное, а через десять дней Луи-Филипп распустил Артиллерию Национальной гвардии как представляющую угрозу для безопасности. Галуа-революционеру сопутствовал ничуть не больший успех, чем Галуа-математику.

И тут на первый план вышли практические, по сравнению с политикой, вопросы: надо было как-то зарабатывать себе на жизнь. Галуа устроился частным преподавателем математики, и на его курс продвинутой алгебры записались сорок учеников. Известно, что Галуа не отличался способностью к хорошему письменному изложению своих мыслей, и разумно предположить, что его педагогическая деятельность была немногим лучше. Не исключено, что его занятия включали и политические комментарии; и почти наверняка они были слишком сложными для простых смертных. Во всяком случае, ряды его учеников редели.

Галуа все еще не отказался от карьеры математика и отправил в Академию уже третий вариант своей работы, озаглавленный "Об условиях разрешимости уравнений в радикалах". После того как Коши исчез из Парижа, рецензентами были назначены Симеон Пуассон и Лакруа. По прошествии двух месяцев, не дождавшись ответа, Галуа написал письмо, в котором поинтересовался, что происходит. Ему опять никто не ответил.

К весне 1831 года Галуа повел себя еще более безрассудно. 18 апреля математик Софи Жермен, которая произвела огромное впечатление на Гаусса еще на заре своей научной карьеры в 1804 году, написала Гийому Либри о Галуа: "Говорят, он окончательно сойдет с ума, и я боюсь, что это правда". Галуа, для которого психологическая устойчивость никогда не была сильной стороной, теперь балансировал на грани настоящей паранойи.

В тот месяц из-за событий в Лувре власти арестовали девятнадцать членов Артиллерии и отдали их под суд за подстрекательство, но присяжные их оправдали. 9 мая члены Артиллерийской части устроили празднество, в ходе которого около двух сотен республиканцев собрались на банкет в ресторане "Ванданж де Бургонь". Каждый из них желал видеть Луи-Фи-

липпа низложенным. Присутствовавший там романист Александр Дюма[1] писал: "Во всем Париже трудно было бы найти две сотни людей, настроенных по отношению к правительству более враждебно, чем те, что к пяти часам пополудни собрались в длинном зале на втором этаже над садами". События все больше напоминали восстание. Видели, как Галуа держал в одной руке стакан, а в другой нож. Участники банкета истолковали этот жест как угрозу королю, от всего сердца его одобрили и отправились танцевать на улицах Парижа.

На следующее утро Галуа арестовали в доме его матери (из этого следует, что на банкете был полицейский шпион) по обвинению в подстрекательстве к покушению на жизнь короля. На этот раз, как кажется, он проявил некоторую политическую мудрость, поскольку на суде он признавал все, но только с одной поправкой: он утверждал, что предлагал произнести тост за Луи-Филиппа, а ножом размахивал со словами: "Если он окажется изменником". Его очень огорчало, что эти ключевые слова потонули в реве толпы.

Однако Галуа ясно дал понять, что он и в самом деле полагал, будто Луи-Филипп предаст французский народ. Когда обвинитель спросил, что заставляло обвиняемого думать о возможности нарушения законности со стороны короля, Галуа отвечал: "Он скоро станет изменником — если еще им не стал". Под дальнейшим давлением он раскрыл истинное значение своих слов: "Действия правительства позволяют предположить, что Луи-Филипп в один прекрасный день окажется способным на измену, даже если до сих пор он этого не совершил". Несмотря на это, присяжные его оправдали. Возможно, они чувствовали примерно то же, что и он.

15 июня Галуа вышел на свободу. Три недели спустя Академия прислала отзыв о его мемуаре. Пуассон нашел его "не под-

1 Отец. *(Примеч. перев.)*

лежащим пониманию". В отзыве говорилось: "Мы сделали все от нас зависящее, чтобы понять доказательство г-на Галуа. Его рассуждения не обладают ни достаточной ясностью, ни достаточной полнотой для того, чтобы мы могли судить об их точности, поэтому мы воздержимся от их оценки в данном отзыве. Автор заявляет, что предложение, составляющее конкретный предмет данного мемуара, представляет собой часть общей теории, обладающей многочисленными применениями. Вероятно, окажется, что различные части теории взаимно проясняют друг друга и их легче понять все вместе, нежели по отдельности. Поэтому мы склонны предложить автору опубликовать свою работу целиком, что позволило бы составить определенное мнение. Но с учетом того состояния, в котором находится представленная им в Академию часть, мы не можем дать ему одобрительную оценку".

Самым печальным в этом отзыве было, скорее всего, то обстоятельство, что он вполне отвечал истинному положению вещей. Как отмечал рецензент,

> "[мемуар] не содержит обещанного в заглавии условия разрешимости уравнений в радикалах; действительно, полагая истинным высказанное г-ном Галуа предложение, из него нельзя вывести никакого хорошего способа решить вопрос о том, разрешимо ли данное уравнение простой степени в радикалах, поскольку сначала надо было бы проверить, является ли данное уравнение неприводимым, а затем — выражается ли любой из его корней через два других в виде рациональной дроби".

Последняя фраза отсылает к прекрасному критерию разрешимости уравнений простой степени в радикалах, который был кульминацией мемуара Галуа. Действительно, неясно, как этот критерий можно применить к любому конкретному уравне-

нию, поскольку прежде, чем его применять, надо знать корни. Но если отсутствует формула, то в каком смысле можно "знать" корни? Как говорит Тиньоль, "теория Галуа не соответствовала тому, чего от нее ожидали; она была слишком новаторской, чтобы ее сразу признали". Рецензенты желали иметь некоторые условия на коэффициенты, которые отвечали бы за разрешимость; Галуа же дал им условие на корни. Требования рецензентов были непомерно высоки. Никакого простого критерия, основанного на коэффициентах, никогда не было найдено, и появление такого критерия исключительно маловероятно. Но от этих соображений, сделанных задним числом, самому Галуа не легче.

В День взятия Бастилии, 14 июля, Галуа шел со своим другом Эрнестом Дюшатле во главе республиканской демонстрации. Галуа был одет в форму распущенной Артиллерии и имел при себе нож, несколько пистолетов и заряженную винтовку. Ношение этой формы было незаконным, как и ношение оружия. На Новом Мосту обоих друзей арестовали; Галуа было предъявлено обвинение в незаконном ношении формы — наименьшее из всех возможных. Их отправили в тюрьму Сент-Пелажи, где им предстояло ожидать суда.

Находясь в тюрьме, Дюшатле нарисовал на стене своей камеры картинку, изображавшую голову короля (что подтверждалось надписью), лежащую рядом с гильотиной. Это, надо полагать, не сильно способствовало облегчению их участи.

Первым судили Дюшатле, а потом настал черед Галуа. 23 октября его судили и приговорили; апелляцию отклонили 3 декабря. К этому моменту он уже провел в тюрьме более четырех месяцев. По приговору же ему предстояло отбыть еще шесть. Некоторое время он занимался математикой, а затем, во время эпидемии холеры 1832 года, его перевели в больницу и позд-

нее освободили условно-досрочно. Вместе со свалившейся на него свободой он испытал и свое первое — и единственное — любовное приключение, объектом которого была некая Стефани Д., как можно заключить из его собственных неразборчивых записей на полях.

Начиная с этого момента интерпретация скудных исторических данных содержит в себе значительную долю догадок. В течение некоторого времени никто не знал ни фамилии Стефани, ни каких-либо других сведений о ней. Эта тайна внесла свой вклад в создание романтического образа. Галуа написал ее полное имя на одной из своих рукописей, но позднее замазал его таким образом, чтобы ничего нельзя было разобрать. После смерти Галуа историк Карлос Инфантоцци, очень тщательно изучивший рукопись, установил, что даму звали Стефани-фелиси Потрен дю Мотель. Ее отец Жан-Луи Огюст Потрен дю Мотель был практикующим врачом в местечке Сье Фолтрие, где Галуа провел последние месяцы жизни.

Нам неизвестно, что Жан-Луи думал об их отношениях, но кажется маловероятным, чтобы он одобрил тот факт, что нищий, неустроенный и болезненно впечатлительный молодой человек с экстремистскими политическими взглядами и криминальным прошлым принялся ухаживать за его дочерью.

Мы кое-что знаем о том, что думала по этому поводу сама Стефани, однако это известно только из отдельных фраз, по всей видимости, выписанных Галуа из ее писем. Немалая тайна окружает этот эпизод, сильно повлиявший на последующие события. По-видимому, Галуа был отвергнут и воспринял это очень болезненно, но подробности восстановить не удается. Был ли роман целиком плодом его воображения — любовная лихорадка, никогда не пользовавшаяся взаимностью? Или же поначалу Стефани поощряла его ухаживания, а после испугалась? Те самые черты, которые отвращали от Галуа ее отца, могли оказаться притягательными для дочери.

Как бы то ни было, со стороны самого Галуа отношения заведомо были серьезными. В мае он писал своему близкому другу Шевалье: "Как мне утешить себя, когда всего за один месяц я исчерпал до дна источник самого сладостного блаженства, отпущенного человеку?" На оборотной стороне одной из своих статей он фрагментарно скопировал два письма от Стефани. Одно из них начинается так: "Прошу вас, пожалуйста, разорвем наши отношения..." Отсюда следует, что имелось нечто, подлежащее разрыву. Но далее письмо продолжается так: "...и не думайте о вещах, которых не было и которых не могло быть", что создает прямо противоположное впечатление. Другое письмо содержит следующие фразы: "Я последовала вашему совету и обдумала случившееся... В любом случае, милостивый государь, будьте уверены в том, что ничего большего быть не могло. Ваши предположения ошибочны, а сожаления необоснованны".

Вообразил ли он себе все от начала до конца и его чувства никогда не пользовались взаимностью или же он исходно получил некое поощрение, вслед за чем был отвергнут, — в любом случае похоже, что Галуа стал жертвой наихудшего варианта неразделенной любви. Или все на самом деле обстояло еще хуже? Вскоре после разрыва со Стефани — или того, что Галуа интерпретировал как разрыв, — некто вызвал его на дуэль. Предлог состоял в том, что этот человек возражал против ухаживаний Галуа за некоей молодой дамой, однако подробности снова скрыты от нас завесой тайны.

Стандартный вариант истории — это политические интриги. Такие писатели, как Эрик Темпл Белл и Луи Коллрос, сообщают нам, что политические противники Галуа сочли, что его любовная лихорадка по отношению к мадмуазель дю Мотель есть прекрасный повод устранить своего врага, спровоцировав "дело чести". Еще одно, довольно дикое, предположение состоит в том, что Галуа пал жертвой полицейского шпиона.

Эти теории выглядят маловероятными. Дюма в своих "Мемуарах" утверждает, что убил Галуа некий Пеше д'Эрбенвиль, соратник по республиканскому делу, которого Дюма описывает как "очаровательного молодого человека, который занимается главным образом изготовлением хлопушек из шелковой бумаги и украшает их розовыми ленточками". То была ранняя версия хлопушек, которые в наши дни в ходу на Рождество. Д'Эрбенвиль был вроде как героем для простонародья, поскольку входил в число девятнадцати республиканцев, оправданных по обвинению в заговоре с целью свержения правительства. Без сомнения, он не был полицейским шпионом, потому что имена всех таких шпионов назвал в 1848 году Марк Коссидьер, возглавлявший в то время полицию.

Из полицейского отчета о дуэли можно заключить, что второй участник был одним из товарищей Галуа по революционному делу и что дуэль представляла собой именно то, что и должна была представлять. Эта теория существенно подкрепляется собственными словами Галуа:

> "Я прошу моих друзей-патриотов не упрекать меня за то, что я отдаю жизнь не на благо своей страны. Я умираю жертвой подлой кокетки. Мою жизнь гасит жалкая сплетня. О! Почему приходится умирать из-за такого пустяка, умирать ради того, что так презираешь! <...> Не вините тех, кто убил меня. Они были честны".

Или он не знал, что пал жертвой политического заговора, или же такого заговора не было.

Кажется, что Стефани и в самом деле была по крайней мере косвенной причиной дуэли. Перед тем как отправиться на поединок, Галуа оставил что-то вроде прощальных записей у себя на столе. В них содержатся слова "Une femme" — "женщина", причем второе слово вымарано. Но истинная причина остается такой же туманной, как и многое другое в этой истории.

Математическая же история намного яснее. 29 мая, накануне дуэли, Галуа описал свои открытия в письме Огюсту Шевалье. Шевалье в конце концов опубликовал это письмо в *Revue Encyclopedique*. В этой работе намечена связь между группами и полиномиальными уравнениями, формулируется необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения в радикалах.

Галуа, кроме того, упоминает свои идеи об эллиптических функциях и об интегрировании алгебраических функций, а также некоторые другие вещи, слишком загадочные, чтобы в них можно было разобраться. Нацарапанное на полях замечание "У меня нет времени" породили другой миф: что Галуа провел ночь перед дуэлью, неистово записывая свои математические открытия. Но рядом с этой фразой стоит: "Замечание автора", что противоречит такой картине; более того, письмо было объяснительной запиской по поводу отвергнутой третьей статьи Галуа, с замечанием на полях, сделанным Пуассоном.

Дуэль происходила на пистолетах. В отчете о вскрытии говорится, что стрелялись с 25 шагов, но истинная картина могла быть даже страшнее. Статья в номере *Le Precursor* от 4 июня 1832 года сообщала:

> "Париж, 1 июня. Вчера злосчастная дуэль отняла у науки юношу, подававшего самые блестящие надежды. Увы, его преждевременная известность связана только с политикой. Молодой Эварист Галуа... дрался на дуэли с одним из своих юных друзей. Оба молодых человека — члены Общества друзей народа, и оба фигурировали в одном и том же политическом процессе. Есть сведения, что дуэль была вызвана какой-то любовной историей. Противники избрали в качестве оружия пистолеты. Когда-то они были друзьями, поэтому сочли недостойным целиться друг в друга и решили положиться на судьбу. Стреляли

в упор, но из двух пистолетов заряжен был только один. Пуля ранила Галуа навылет. Его перенесли в больницу Кошен, где он умер два часа спустя. Галуа исполнилось двадцать два года, его противнику L. D. — чуть меньше".

Могло ли "L. D." означать Пеше д'Эрбенвиля? Возможно. Буква D приемлема ввиду тогдашнего разнобоя с написанием; а L могла быть ошибкой. Статья не слишком надежна в том, что касается подробностей, — в ней неправильно указаны дата дуэли, а также день смерти Галуа и его возраст. Так что инициал тоже вполне мог оказаться ошибочным.

У космолога и писателя Тони Ротмана есть более убедительная версия. Лицо, которое более всего подходит под данное описание, — это не д'Эрбенвиль, а Дюшатле, некогда арестованный вместе с Галуа на Новом Мосту. Биографы Галуа Робер Бурнь и Жан-Пьер Азра сообщают, что Дюшатле был наречен именем Эрнест, но это может оказаться неверным — или, опять же, инициал L ошибочен. Вот что пишет Ротман: "Мы приходим к очень согласованной и правдоподобной картине, когда два старых друга влюбляются в одну и ту же девушку и решают прояснить ситуацию с помощью такого чудовищного варианта русской рулетки".

Эта теория согласуется еще и с ужасающим финальным поворотом сюжета. Галуа получил рану в живот, что в то время почти наверняка означало летальный исход. Такая рана не удивительна, если противники стрелялись с расстояния в несколько метров; если же дрались на 25 шагах, то перед нами еще один пример злой судьбы, преследовавшей Галуа.

Скончался он в больнице Кошен не через два часа, как утверждал *Le Precursor*, а на следующий день, 31 мая. Причиной смерти был перитонит; умирающий отказался от услуг священника. 2 июня 1832 года Галуа был похоронен в общей могиле на Монпарнасском кладбище.

Его письмо к Шевалье заканчивалось такими словами:

> "Попросите Якоби или Гаусса публично высказать свое мнение — не о верности, а о важности этих теорем. Я надеюсь, что со временем появятся люди, которые захотят, к большой пользе для себя, расхлебать всю эту кашу".

Но что же на самом деле сделал Галуа? В чем состояла эта "каша", о которой он говорит в своем последнем письме?

Ответ на этот вопрос занимает центральное место во всем нашем рассказе, и его нелегко выразить в паре предложений. Галуа познакомил математику с новой точкой зрения, он изменил ее содержание и сделал необходимый, но непривычный шаг в сторону абстракции. В руках Галуа математика перестала быть наукой о числах и формах — арифметикой, геометрией и набором связанных с ними идей, таких как алгебра и тригонометрия. Она стала наукой о *структурах*. То, что было исследованием *вещей*, стало исследованием *процессов*.

Не следует приписывать всю заслугу в этой трансформации одному лишь Галуа. Он оказался на гребне волны, которую привели в движение Лагранж, Коши, Руффини и Абель. Но он двигался на ней с таким мастерством, что сделал ее своей собственной; он был первым, кто всерьез осознал — математические вопросы порой легче всего понять, если перенести их в область более абстрактных рассуждений.

Потребовалось некоторое время, чтобы красота и значение результатов Галуа пробили себе дорогу к широкому математическому сознанию. На самом деле их едва не потеряли. Спас их Жозеф Лиувилль, сын капитана Наполеоновской армии, ставший профессором в Коллеж де Франс. Лиувилль выступал перед французской академией — собранием, которое затеряло или отвергло три мемуара Галуа — летом 1843 года.

"Я надеюсь заинтересовать Академию, — начал он, — рассказом о том, что среди бумаг Эвариста Галуа я обнаружил решение, точность которого не уступает его глубине, такой замечательной задачи: узнать, существует или не существует решение в радикалах..."

Если бы Лиувилль не взял на себя долгий труд разбираться в бумагах неудачливого революционера, нередко неаккуратных и путаных рукописях, и не потратил бы значительное время и немалые усилия на угадывание того, что хотел сказать автор, эти рукописи, скорее всего, исчезли бы вместе с мусором, а теории групп пришлось бы ждать, пока те же идеи откроют заново. Так что математика в большом долгу перед Лиувиллем.

Понимание предложенных Галуа методов росло, рождалась новая мощная математическая концепция — концепция группы. Целая ветвь математики — исчисление симметрий, называемое теорией групп — появилась на свет и с тех пор проникла в каждый уголок математики.

Галуа работал с группами перестановок. Перестановка — это способ переупорядочить список объектов. В его случае объектами были корни алгебраического уравнения. Простейший из содержательных примеров дается кубическим уравнением общего вида, у которого имеются три корня a, b и c. Напомним, что есть шесть способов переставить эти символы и что — следуя Лагранжу и Руффини — можно перемножать любые две перестановки, выполняя их последовательно. Мы видели, например, что $cba \times bca = acb$. Действуя подобным же образом, можно построить "таблицу умножения" для шести перестановок. Чтобы было яснее видно, что происходит, припишем каждой перестановке имя, например, положим $I = abc$, $R = acb$, $Q = bac$, $V = bca$, $U = cab$ и $P = cba$. Тогда таблица умножения будет выглядеть следующим образом.

I	*U*	*V*	*P*	*Q*	*R*	
I	*I*	*U*	*V*	*P*	*Q*	*R*
U	*U*	*V*	*I*	*R*	*P*	*Q*
V	*V*	*I*	*U*	*Q*	*R*	*P*
P	*P*	*Q*	*R*	*I*	*U*	*V*
Q	*Q*	*R*	*P*	*V*	*I*	*U*
R	*R*	*P*	*Q*	*U*	*V*	*I*

Элемент этой таблицы, стоящий в строке *X* и столбце *Y*, представляет собой произведение *XY*, получаемое по правилу "сначала *Y*, потом *X*".

Галуа понял, что некое очень простое и очевидное свойство этой таблицы оказывается исключительно важным. Произведение любых двух перестановок само является перестановкой; во всей таблице содержатся только символы *I*, *U*, *V*, *P*, *Q*, *R*. Некоторые меньшие наборы, состоящие из перестановок, обладают тем же "групповым свойством" — произведение любых двух перестановок из набора также представляет собой перестановку из этого набора. Галуа назвал такой набор перестановок *группой*.

Например, набор [*I*,*U*,*V*] дает меньшую таблицу — таблицу умножения для подгруппы из трех перестановок.

I	*U*	*V*	
I	*I*	*U*	*V*
U	*U*	*V*	*I*
V	*V*	*I*	*U*

Здесь возникают только те же три символа. В такой ситуации, когда одна группа является частью другой, она называется *подгруппой*.

Другие подгруппы — а именно [*I*,*P*], [*I*,*Q*] и [*I*,*R*] — содержат только по две перестановки. Имеется также подгруппа [*I*], состоящая только из *I*. Можно доказать, что эти шесть подгрупп

исчерпывают список подгрупп в группе всех перестановок на шести символах.

Итак, говорит нам (хотя и на несколько ином языке) Галуа, если взять некоторое кубическое уравнение, можно задаться вопросом о его симметриях — тех перестановках, которые сохраняют все алгебраические соотношения между корнями. Предположим, например, что между корнями a и b имеется алгебраическое соотношение $a + b^2 = 5$. Является ли перестановка R симметрией? Ну, если следовать данному выше определению, то R оставляет a на месте, но меняет местами b и c, так что должно быть выполнено еще и условие $a + c^2 = 5$. Если оно не выполняется, то R определенно не является симметрией. Если же выполняется, то надо проверить все остальные алгебраические соотношения между корнями, которые могут иметь место, и если R пройдет *все* эти проверки, то, значит, R — симметрия.

Нахождение того, какие именно перестановки являются симметриями данного уравнения, представляет собой технически сложное упражнение. Но есть что-то, в чем можно быть уверенным вообще без всяких вычислений: набор всех симметрий любого заданного уравнения должен быть подгруппой в группе всех перестановок корней.

Почему? Предположим, например, что и P, и R сохраняют все алгебраические соотношения между корнями. Если взять некоторое соотношение и применить R, то получится верное соотношение. Если далее применить P, то снова получится верное соотношение. Но применение R, а затем P — это то же самое, что применение PR. Следовательно, PR является симметрией. Другими словами, набор симметрий обладает групповым свойством.

Этот простой факт лежит в основе всего сделанного Галуа. Он говорит нам, что с любым алгебраическим уравнением связана некая группа — его группа симметрии; сейчас она называется *группой Галуа* в честь своего изобретателя. Причем

группа Галуа любого уравнения всегда является подгруппой в группе всех перестановок его корней.

Из этого ключевого усмотрения вырастает естественная стратегия атаки. Узнаем, какие подгруппы возникают в каких обстоятельствах. В частности, если уравнение можно решить в радикалах, то группа Галуа этого уравнения должна отражать этот факт в своей внутренней структуре. Далее, задавшись любым уравнением, находим его группу Галуа и проверяем, действительно ли она обладает требуемой структурой. Таким образом мы получаем ответ на вопрос о разрешимости в радикалах.

А далее Галуа переформулировал всю задачу с совершенно иной точки зрения. Вместо построения башни с лестницами он вырастил некое дерево.

Не то чтобы он сам называл свой метод "деревом" — так же как не упоминал Абель о "башне" Кардано, однако идею Галуа можно, тем не менее, изобразить как процесс, который снова и снова ответвляется от центрального ствола. Ствол — это группа Галуа данного уравнения. Ветви, веточки и листья — различные подгруппы.

Подгруппы возникают естественным образом, как только мы задумаемся о том, как изменяются симметрии уравнений, когда мы начинаем брать радикалы. Как изменяется группа? Галуа показал, что если извлекается корень p-й степени, то группа симметрии должна разбиться на p различных блоков одинакового размера. (Здесь, как заметил Абель, всегда можно предполагать, что число p простое.) Так, например, некая группа из 15 перестановок может разбиться на 5 групп из 3 элементов каждая или на три группы из 5 каждая. Существенно важно, что блоки должны удовлетворять некоторым очень строгим условиям; в частности, один из них должен сам по себе образовывать подгруппу некоторого специального вида, из-

вестного под именем "нормальной подгруппы индекса *p*". Можно представлять себе, что ствол дерева разбился на *p* меньших веток, одна из которых соответствует нормальной подгруппе.

Нормальные подгруппы в группе всех шести перестановок на трех символах таковы: вся группа [*I,U,V,P,Q,R*], подгруппа [*I,U,V*] (таблицы умножения которых мы только что видели) и подгруппа из одной-единственной перестановки, т. е. [*I*]. Три другие подгруппы, содержащие каждая по две перестановки, не являются нормальными.

Пусть, например, мы желаем решить общее уравнение пятой степени. Имеется пять корней, так что наши перестановки будут перестановками на пяти символах. Таких перестановок ровно 120. Коэффициенты уравнения, будучи полностью симметричными, обладают группой, состоящей из всех 120 перестановок. Эту группу мы будем представлять себе как ствол дерева. Каждый отдельный корень обладает группой, которая содержит лишь одну перестановку — тривиальную. Так что у дерева 120 листьев. Наша цель состоит в том, чтобы соединить ствол с листьями, добавляя ветви и веточки, структура которых отражала бы свойства симметрии различных величин, возникающих, если начать возиться с формулой для корней, которые, по нашему предположению, выражаются в радикалах.

Пусть для удобства рассуждений первый шаг в формуле состоит в извлечении корня пятой степени. Тогда группа из 120 перестановок должна разбиться на 5 кусков, в каждом из которых содержится по 24 перестановки. Так что у дерева вырастут пять ветвей. Технически это ветвление должно соответствовать нормальной подгруппе индекса 5.

Однако Галуа смог доказать — просто изучая перестановки, — что *такой нормальной подгруппы не существует*.

Ладно, может быть, следует начать, скажем, с корня седьмой степени. Тогда 120 перестановок должны разбиться на

семь блоков одного и того же размера — что невозможно, поскольку 120 не делится на 7. Значит, корня седьмой степени нет. На самом деле нет никаких корней простой степени, за исключением 2, 3 и 5, потому что именно таковы простые делители числа 120. А мы как раз исключили 5.

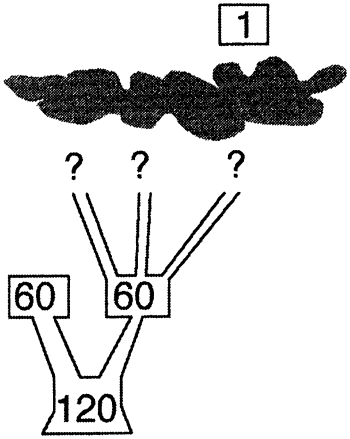
Что же тогда, начнем с кубического корня? К сожалению, не получится: группа из 120 перестановок не имеет нормальной подгруппы индекса 3.

Все, что осталось, — квадратный корень. Имеется ли в группе из 120 перестановок нормальная подгруппа индекса 2? Имеется, причем ровно одна. Она содержит 60 перестановок и называется *знакопеременной группой*. Так что, используя теорию групп Галуа, мы установили, что любая формула для решения общего уравнения пятой степени должна начинаться с квадратного корня, что приводит к знакопеременной группе. При первом ветвлении ствола появляются всего две ветви.

Но всего имеется 120 листьев, так что дерево должно и дальше как-то ветвиться. Как оно это делает? Простые делители числа 60 — это те же 2, 3 и 5. Так что каждая новая ветвь должна делиться на две, три или пять веточек. Другими словами, нам надо добавить или еще один квадратный корень, или кубический корень, или корень пятой степени. Более того, это можно сделать, если, и только если, знакопеременная группа содержит нормальную подгруппу индекса 2, 3 или 5.

Но содержит ли она такую нормальную подгруппу? Вопрос этот — целиком вопрос о перестановках на пяти символах. Исследуя такие перестановки, Галуа смог доказать, что в знакопеременной группе *вообще нет нормальных подгрупп* (за исключением всей группы и тривиальной подгруппы [*I*]). Это "простая" группа, одна из тех основных компонент, из которых можно построить все группы.

Не нашлось достаточного количества нормальных подгрупп, чтобы соединить ствол со всеми листьями при помощи

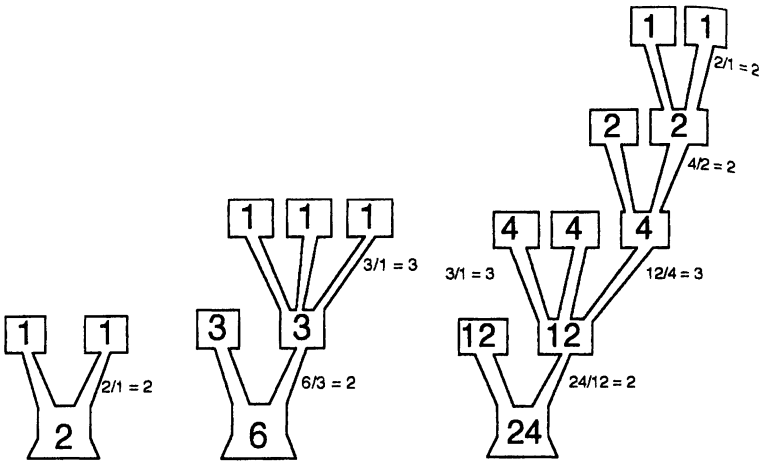


Доказательство Галуа неразрешимости уравнения пятой степени.

ветвлений на простое число веток на каждом шаге. Так что процесс решения уравнения пятой степени в радикалах натыкается на внезапную остановку после того первого шага, заключающегося в добавлении квадратного корня. *Идти больше некуда.* Нет дерева, по которому можно было бы добраться от ствола до листьев, а потому нет формулы для корней в терминах радикалов.

Та же идея работает для уравнений степени 6, 7, 8, 9 — любой степени, старшей 5. Теперь неизбежно возникает вопрос, а почему же уравнения второй, третьей и четвертой степени, тем не менее, разрешимы? Чем выделены степени 2, 3 и 4? В действительности теория групп точно говорит нам, как решить уравнения второй, третьей и четвертой степени. Я оставлю в стороне технические подробности, а вместо этого просто покажу, как выглядят деревья. Они в точности соответствуют классическим формулам.

Теперь мы начинаем видеть красоту идеи Галуа. Из нее следует не только доказательство неразрешимости общего уравне-



Использование групп для решения уравнений второй, третьей и четвертой степеней.

ния пятой степени в радикалах, но и объяснение, почему общие уравнения второй, третьей и четвертой степени все же *имеют* решения в радикалах; более того, примерно видно то, и *как* эти решения устроены. Если поработать еще немного, можно извлечь и *точный* вид этих решений. Наконец, подход Галуа позволяет отличить те уравнения пятой степени, которые нельзя решить, от тех, которые можно, и говорит нам, как решить эти последние.

Группа Галуа всякого уравнения сообщает нам все, что мы можем пожелать узнать о его решениях. Так почему же Пуассон, Коши, Лакруа и все остальные специалисты не запрыгали от радости, увидев, что же сделал Галуа?

Группа Галуа хранит ужасную тайну.

Тайна эта такого рода. Самый простой способ получить группу какого-либо уравнения состоит в использовании свойств его

корней. Но, разумеется, все дело как раз в том, что мы, как правило, не знаем, каковы эти корни. Не будем забывать, что цель состоит в решении уравнения, то есть в нахождении его корней.

Предположим, что кто-то подарит нам конкретное уравнение пятой степени, скажем

$$x^5 - 6x + 3 = 0$$

или

$$x^5 + 15x + 12 = 0,$$

и попросит использовать методы Галуа, чтобы определить, можно ли решить его в радикалах. Вполне законный вопрос.

Страшная правда состоит в том, что с использованием методов, доступных Галуа, *нет никакого способа на него ответить*. Можно утверждать, что скорее всего соответствующая группа содержит все 120 перестановок — и если это так, то тогда решить уравнение нельзя. Но мы не знаем наверняка, действительно ли появляются все 120 перестановок. Быть может, пять корней удовлетворяют некоторому специальному условию. Откуда нам знать?

Сколь бы красивой ни была теория Галуа, ей присущи жесткие ограничения. Она имеет дело не с коэффициентами, а с корнями. Другими словами — не с тем, что известно, а с тем, что неизвестно.

Сегодня можно зайти на подходящий математический вебсайт, ввести туда свое уравнение, и сайт вычислит для вас его группу Галуа. Сегодня известно, что первое из приведенных выше уравнений не разрешимо в радикалах, а второе разрешимо. Я хочу подчеркнуть здесь не то, что мы используем компьютер, а тот факт, что кто-то выяснил, какие шаги надо предпри-

нять для решения задачи. Главнейшее после Галуа продвижение в этой области состояло в разработке способов вычисления группы Галуа любого заданного уравнения.

У самого Галуа таких методов не было. Предстояло пройти целому столетию, чтобы рутинные вычисления групп Галуа стали возможны. Отсутствие же таких методов частично оправдывает реакцию Коши и Пуассона. Они могли сетовать, причем с полным основанием, что идеи Галуа не позволяли решить проблему о разрешимости в радикалах любого *данного* уравнения.

Чего они не смогли увидеть, так это того факта, что метод Галуа на самом деле решал чуть другую задачу: определить, какие свойства корней делают уравнение разрешимым. Эта задача получила изящный и глубокий ответ. Что же касается задачи, решение которой они хотели бы получить от Галуа... ну, в ней нет причин ожидать четкого ответа. Просто не существует ясного способа классифицировать разрешимые уравнения в терминах легковычисляемых свойств их коэффициентов.

До сих пор интерпретация групп как симметрий несколько отдавала метафорой. Теперь нам надо сделать ее более буквальной, и этот шаг потребует более геометрической точки зрения. Последователи Галуа быстро осознали, что соотношение между группой и симметрией намного легче понять в геометрическом контексте. На самом деле именно так этот предмет обычно и объясняют в учебных курсах.

Чтобы получить некоторое представление об этом соотношении, кратко осмотрим мою любимую группу — группу симметрий равностороннего треугольника. И зададимся наконец самым фундаментальным вопросом: что же, строго говоря, есть симметрия?

До Галуа все ответы на этот вопрос были довольно расплывчаты и включали в себя размахивание руками и апелляцию к

таким свойствам, как изящество пропорции. С концепциями такого типа настоящей математики не построишь. После Галуа — спустя недолгий период времени, на протяжении которого математический мир разбирался с общими идеями, стоящими за их очень конкретным применением, — возник простой и недвусмысленный ответ. Во-первых, слово "симметрия" надо понимать как "некая симметрия", "одна из симметрий". Объекты не обладают одной-единственной симметрией; они часто имеют много различных симметрий.

Но что же тогда такое эти симметрии? Симметрия некоторого математического объекта — это преобразование, которое сохраняет структуру объекта. Через секунду я разверну это определение в нечто большее, но прежде всего надо заметить, что симметрия представляет собой скорее процесс, нежели объект. Симметрии Галуа являются перестановками (корней уравнения), а перестановка — это некий способ переупорядочить вещи. Строго говоря, это не само переупорядочивание, а правило, которое надо применить, чтобы добиться этого переупорядочения. Не блюдо, а рецепт.

Подобное различие может показаться мелочным занудством, но именно оно лежит в основе всего предприятия.

В определении симметрии имеются три ключевых слова: "преобразование", "структура" и "сохраняет". Позвольте объяснить их, используя пример равностороннего треугольника. У такого треугольника по определению все три стороны имеют одинаковую длину, а все три угла — одну и ту же величину, а именно 60°. Из-за этих свойств трудно отличить одну сторону от другой; фразы типа "самая длинная сторона" здесь ничего не значат. Углы также неразличимы. Как мы сейчас увидим, невозможность отличить одну сторону от другой или один угол от другого является следствием симметрий равностороннего треугольника. В действительности этим его симметрии и определяются.

Рассмотрим эти три слова по очереди.

Преобразование. Нам разрешается кое-что делать с нашим треугольником. В принципе имеется масса вещей, которые с ним можно проделать: согнуть его, повернуть на некоторый угол, смять его, растянуть, как если бы он был сделан из резины, покрасить в розовый цвет. Наш выбор, однако, более узок и ограничен вторым из наших слов.

Структура. Структура нашего треугольника состоит из математических свойств, которые полагаются существенными. Структура треугольника включает такие вещи, как "у него три стороны", "стороны — прямые линии", "одна сторона имеет длину 7,32 дюйма", "он располагается на плоскости вот в этом месте" и так далее. (В других областях математики существенные свойства могут оказаться другими. В топологии, например, существенно только то, что треугольник образует один замкнутый путь, а наличие трех углов и прямолинейность сторон не имеют значения.)

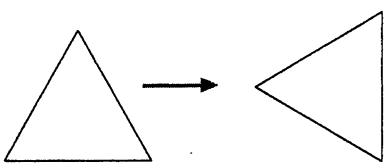
Сохраняет. Структура преобразованного объекта должна соответствовать структуре исходного. Преобразованный треугольник должен также иметь три стороны — так что сминание его исключается. Стороны должны оставаться прямыми, так что складывать нельзя. Одна сторона должна по-прежнему иметь длину 7,32 дюйма, так что растягивать треугольник тоже запрещено. Положение должно быть тем же самым, так что сдвиг на десять футов в сторону не дозволяется.

Цвет явным образом не упоминается в качестве структуры, так что окрашивание треугольника не имеет значения. Не то чтобы оно было под запретом — просто оно не составляет различия для геометрических целей.

Поворот треугольника на некоторый угол, однако, действительно сохраняет по крайней мере кое-что из структуры. Если вырезать равносторонний треугольник из картона, положить его на стол, а затем поворачивать, то он по-прежнему будет вы-

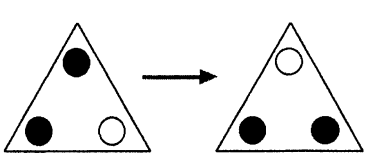
глядеть как треугольник. У него будут три стороны, причем прямые, а их длины не изменятся. Однако положение треугольника на плоскости может оказаться иным, в зависимости от угла, на который его повернули.

Если я поверну треугольник, например, на прямой угол, то результат будет отличаться от первоначального. Стороны будут смотреть в других направлениях. Если вы закроете глаза, пока я буду его поворачивать, то, открыв их, сможете определить, что треугольник был повернут.



Поворот на прямой угол не является симметрией равностороннего треугольника.

Но если я поверну треугольник на 120°, вы не заметите никакой разницы между "было" и "стало". Чтобы показать, что я имею в виду, я тайно помечу углы кружками различного типа, так что мы сможем следить за тем, что куда отправляется. Эти кружки — только для нашей ориентации, они не составляют часть структуры, которая должна быть сохранена. Если вы закрываете глаза на кружки, если наш треугольник настолько лишен свойств, насколько это полагается всякому добропорядочному эвклидову объекту, то повернутый треугольник выглядит в точности как исходный.

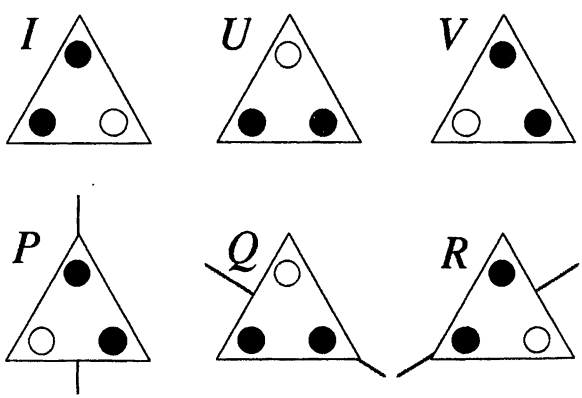


Поворот на 120° является симметрией равностороннего треугольника.

Другими словами, поворот на 120° есть симметрия равностороннего треугольника. Преобразование (поворот) сохраняет структуру (форму и расположение).

Оказывается, что у равностороннего треугольника имеется ровно шесть различных симметрий. Вторая — это поворот на 240°. Еще три — отражения, под действием которых один из углов треугольника остается на месте, а два других меняются местами. А в чем состоит шестая симметрия? *В неделании ничего*: оставьте треугольник в покое. Это тривиально, однако же удовлетворяет условиям, требуемым от симметрии. На самом деле это преобразование удовлетворяет определению симметрии вне зависимости от того, какой объект рассматривается и какое свойство должно сохраняться. Если ничего не делать, то ничего и не меняется.

Эта тривиальная симметрия называется *тождественной*. Она может показаться не очень важной, но если от нее отказаться, то вся математика пойдет вкривь и вкось. Происходящее будет похоже на выполнение сложения чисел в отсутствие нуля или умножения в отсутствие единицы. Если же мы включаем тождественное преобразование, то все хорошо.



Шесть симметрий равностороннего треугольника.

Для равностороннего треугольника можно представлять себе единичный элемент как вращение на 0°. На рисунке изображены результаты применения шести симметрий к нашему равностороннему треугольнику. Это в точности шесть различных способов, которыми вырезанный из картона и вынутый из плоскости треугольник можно наложить на его исходное положение. Пунктирные линии показывают, где надо расположить зеркало, чтобы получить требуемое отражение.

Теперь я собираюсь убедить вас в том, что симметрии — это часть алгебры. Для этого я сделаю то же, что сделал бы любой алгебраист: выражу все в символах. Обозначим шесть симметрий буквами *I*, *U*, *V*, *P*, *Q*, *R* согласно приведенному выше рисунку. Единичный элемент — это *I*; два другие вращения суть *U* и *V*, а три отражения — *P*, *Q* и *R*. Те же самые символы я использовал выше для перестановок корней кубического уравнения. Для этого есть причина, которая, более того, скоро станет явной.

Галуа по максимуму использовал "групповое свойство" своих перестановок. Если применить любые две из них по очереди, то получится какая-то другая. Отсюда следует мощный намек на то, что нам следует делать с нашими шестью симметриями. Мы попарно "перемножим" их и посмотрим, что получится. Напомним соглашение: если *X* и *Y* — два преобразования симметрии, то произведение *XY* — это то, что получается, когда сначала применяется *Y*, а потом *X*.

Пусть, например, мы желаем узнать, что такое *VU*. Это означает, что сначала к треугольнику применяется *U*, а потом *V*. И вот *U* осуществляет вращение на 120°, а *V* затем вращает получающийся треугольник на 240°. Тем самым *VU* осуществляет вращение на 120° + 240° = 360°.

Ой, мы забыли включить это вращение.

Нет, не забыли! Если повернуть треугольник на 360°, то все вернется в точности туда, где было. А в теории групп важен ко-

нечный результат, а не путь, которым к нему пришли. На языке симметрий две симметрии считаются одинаковыми, если они приводят к одному и тому же конечному состоянию объекта. Поскольку *VU* дает тот же эффект, что тождественное преобразование, мы заключаем, что $VU = I$.

В качестве второго примера рассмотрим, что делает *UQ*. Преобразования выполняются следующим образом:

Мы видим, чему равен результат перемножения симметрий: он равен *P*. Значит, $UQ = P$.

Из наших шести симметрий можно можно образовать тридцать шесть произведений, а вычисления можно свести в таблицу умножения. Получается в точности та же таблица, которая у нас была для шести перестановок корней кубического уравнения.

Обнаруженное совпадение дает пример одного из наиболее мощных методов во всей теории групп. Его истоки — в работах французского математика Камиля Жордана, до известной степени превратившего теорию групп из метода анализа решений уравнений в радикалах в самостоятельный предмет.

Около 1870 года Жордан привлек внимание к тому, что сейчас называют теорией представлений. Для Галуа группы были составлены из перестановок — способов перетасовки символов. Жордан начал задумываться о способах перетасовки более сложных пространств. Среди наиболее фундаментальных пространств в математике имеются многомерные пространства, а их самое важное свойство состоит в существовании прямых линий. Естественный способ преобразования такого пространства состоит в том, чтобы прямые линии оставались прямыми. Никаких изгибов, никаких скручиваний. Имеется много

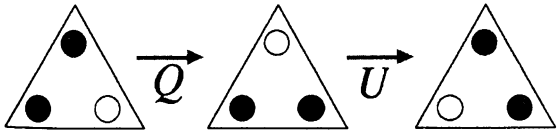
преобразований такого рода — вращения, отражения, изменения масштаба. Все они называются линейными преобразованиями.

Английский юрист и математик Артур Кэли открыл, что любое линейное преобразование можно связать с матрицей — квадратной таблицей из чисел. Любое линейное преобразование трехмерного, например, пространства можно задать, записав таблицу размером 3 на 3 из вещественных чисел. Так что преобразования можно свести к алгебраическим вычислениям.

Теория представлений позволяет начать с группы, которая не состоит из линейных преобразований, и заменить ее некоторой группой, состоящей из линейных преобразований. Преимущество конвертации группы в группу матриц состоит в том, что матричная алгебра является очень глубокой и мощной, и Жордан был первым, кто это увидел.

Взглянем на симметрии треугольника с Жордановой точки зрения. Вместо размещения разных кружков по углам треугольника я расставлю там символы a, b, c, соответствующие корням общего кубического уравнения. Тогда становится очевидным, что каждая симметрия треугольника также переставляет эти символы. Например, вращение U отправляет abc в cab.

Шесть симметрий треугольника естественно соответствуют шести перестановкам корней a, b, c. Более того, произведение двух симметрий соответствует произведению соответствующих



Как симметрии равностороннего треугольника соответствуют перестановкам.

перестановок. Но вращения и отражения в плоскости являются линейными преобразованиями — они сохраняют прямые линии. Так что мы по-другому интерпретировали группу перестановок — *представили ее* — как группу линейных преобразований, или, что то же самое, как некую группу матриц. Этой идее предстояло привести к глубоким следствиям как в математике, так и в физике.

Глава 8
Посредственный инженер и трансцендентный профессор

Симметрия перестала быть туманным ощущением скрытого порядка или художественным восприятием изящества и красоты. Она превратилась в ясную математическую концепцию со строгим логическим определением. Появилась возможность вычислять симметрии и доказывать о них теоремы. Родился новый предмет — теория групп. Погоня человечества за симметрией достигла поворотной точки. В качестве платы за вход в сообщество посвященных требовалась готовность мыслить более концептуально. Концепция группы носила абстрактный характер, на несколько шагов удаленный от традиционного "простого продукта", состоящего из чисел и геометрических форм.

Группы уже доказали, чего они стоят, когда была решена вековая загадка — вопрос о разрешимости уравнений пятой степени. Вскоре стало ясно, что тот же круг идей позволяет разобраться и с несколькими другими задачами, неразрешимыми в течение веков. При этом не всегда привлекалась именно теория групп как таковая — порой требовалось рассуждать так, как рассуждали Абель, Галуа и их последователи. И даже когда

казалось, что группы не используются, они на самом деле находились совсем рядом, под самой поверхностью вещей.

Среди нерешенных задач, доставшихся потомкам в наследство от греческих геометров, три приобрели вызывающую известность — задача о трисекции угла, задача об удвоении куба и задача о квадратуре круга. Даже сегодня трисекция угла и квадратура круга привлекают к себе внимание многочисленных любителей, которые, по-видимому, не вполне охватили своим умом то обстоятельство, что когда математики говорят "невозможно", то именно это и имеется в виду. Удвоение куба несколько отстает по уровню популярности.

Об этих трех задачах часто говорят как о "трех задачах Античности", но такое определение создает преувеличенное представление об их важности. Из-за него они как будто стоят в одном ряду с главнейшими загадками в истории, такими как Последняя теорема Ферма, на которую не удавалось дать ответ в течение более 350 лет. Однако отличие здесь в том, что все ясно сознавали: Последняя теорема Ферма — нерешенная задача, причем можно конкретно указать, когда именно она была впервые поставлена в математической литературе. Все математики были в курсе относительно не только самой задачи, но и предполагаемого ответа, а также относительно того, кто первым поставил этот вопрос.

Греческие задачи — иные. Их не найти у Эвклида в перечне нерешенных, требующих внимания задач. Они существовали главным образом по умолчанию, как очевидные попытки обобщить полученные ранее успешные результаты, но почему-то Эвклид предпочитал их не упоминать. Почему? Потому что никто не знал, как взяться за их решение. Приходило ли грекам на ум, что они могут вовсе не иметь решения? Если и так, то никто не поднимал по этому поводу шума. Без сомнения, таким лю-

дям, как Архимед, приходило в голову, что эти задачи невозможно решить, используя циркуль и линейку, поскольку он разработал альтернативные методы, однако нет никаких свидетельств, что сам по себе вопрос о возможности построения представлялся Архимеду важным.

Этот вопрос приобрел важность позднее. Отсутствие решений этих задач свидетельствовало о серьезных пробелах в достигнутом человечеством понимании геометрии и алгебры; они вошли в моду как "фольклорные" задачи, известные профессионалам через некое подобие культурного осмоса. К тому времени как было получено их решение, они приобрели ауру исторической и математической значительности. Их решение воспринималось как важнейший прорыв — в особенности это касалось квадратуры круга. И ответ во всех трех случаях был один и тот же: "невозможно". Невозможно с использованием традиционных инструментов — циркуля и линейки.

Такая ситуация может показаться достаточно негативной. На протяжении большей части жизни люди решают проблемы и преодолевают трудности с помощью самых разнообразных средств, какие только подворачиваются под руку. Если высокое здание нельзя построить из кирпича и раствора, инженеры используют стальную арматуру и железобетон. Никто не стяжал себе славы доказательством того, что кирпичи не подходят для данной стройки.

Математика устроена несколько иначе. Ограничения, присущие используемым инструментам, часто так же важны, как и успехи в их применении. Важность математического вопроса часто зависит не от ответа как такового, а от того, почему ответ оказывается правильным. Так обстояло дело и с тремя задачами Античности.

Гроза всех и вся трисекторов родился в Париже в 1814 году, а звали его Пьер Лоран Ванцель. Отец его был сначала армей-

ским офицером, а потом профессором прикладной математики в Специальной коммерческой школе. Пьер опережал в своем развитии других детей; Адемар Жан Клод Барр де Сен-Венан, который знал Ванцеля, писал, что мальчик демонстрировал "потрясающие способности к математике — предмету, о котором он читает с огромным интересом. Вскоре он превзошел даже своего учителя, который обращался за помощью к девятилетнему Ванцелю, когда испытывал трудности при решении задач".

В 1828 году Пьер поступил в Коллеж Карла Великого. В 1831-м он был первым учеником и по французскому, и по латыни, а также показал первый результат на вступительных экзаменах как в Политехническую школу, так и на естественный факультет того, что сейчас называется Нормальной школой, — ранее такого не удавалось добиться никому. Его интересовало буквально все — математика, музыка, философия, история, и ничто не привлекало сильнее, чем жаркие, ожесточенные споры.

В 1834 году он обратился к инженерному делу, посещая занятия в Школе мостов и дорог. Но вскоре признался своим друзьям, что инженер из него выйдет "не более чем посредственный". Он решил, что на самом деле хочет преподавать математику, и оставил занятия инженерным делом. Такое резкое переключение принесло свои плоды: в 1838 году он начал читать лекции по анализу в Политехнической школе, а к 1841-му стал еще и профессором прикладной механики в своей старой инженерной школе. Сен-Венан говорит нам, что Пьер "обыкновенно работал в течение вечера, не ложась спать до поздней ночи, а затем читал, оставляя себе лишь несколько часов неспокойного сна и при этом злоупотребляя кофе и опиумом, а до своей женитьбы еще и неправильно и нерегулярно питаясь". Женился он на дочери своего бывшего учителя латыни.

Ванцель изучал работы Руффини, Абеля, Галуа и Гаусса, выказывая большой интерес к теории уравнений. В 1837 году его

работа "О средствах, позволяющих установить, разрешима ли геометрическая задача с помощью циркуля и линейки" вышла в Лиувиллевском *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Вопрос о возможности построения рассматривался в ней начиная с того места, на котором остановился Гаусс. Ванцель умер в 1848 году в возрасте 33 лет — вероятно, в результате чрезмерной нагрузки из-за избытка преподавания и административных обязанностей.

В вопросах о трисекции угла и удвоении куба данные Ванцелем доказательства невозможности напоминают эпическую работу Гаусса о правильных многоугольниках, только являются намного более простыми. Я начну с задачи об удвоении куба, в которой суть дела очень наглядна. Можно ли циркулем и линейкой построить отрезок длины $\sqrt[3]{2}$?

Выполненный Гауссом анализ правильных многоугольников основан на идее, что любое геометрическое построение сводится к решению ряда квадратных уравнений. По существу, он считает это само собой разумеющимся, поскольку это алгебраически следует из свойств линий и окружностей. Некоторые не слишком сложные алгебраические выкладки позволяют заключить, что для любой допускающей построение величины ее "минимальный многочлен" — простейшее уравнение, которому она удовлетворяет — имеет степень, равную степени двойки[1]. Это уравнение может быть линейным, квадратным, иметь степень 4, 8, 16, 32, 64, ... — одну из степеней числа 2.

[1] На тот случай, если у читателя накопилось недоумение по поводу "перегрузки" слова "степень", признаем очевидное — употребительных слов в русском языке несколько меньше, чем в английском, поэтому приходится смириться с тем, что "степень" обозначает и степень уравнения (например, $x^3 + x + 1 = 0$ — уравнение третьей степени), и степень числа (например, 81 есть 3 в четвертой степени). *(Примеч. перев.)*

С другой стороны, число $\sqrt[3]{2}$ удовлетворяет кубическому уравнению $x^3 - 2 = 0$, и это[1] и есть его минимальный многочлен. Его степень равна 3, что не есть степень числа 2. Поэтому допущение о возможности удвоения куба с использованием циркуля и линейки в силу безупречной логики ведет к заключению, что 3 есть степень числа 2. Это очевидным образом неверно. Тем самым, методом *reductio ad absurdum* показано, что интересующего нас построения не существует.

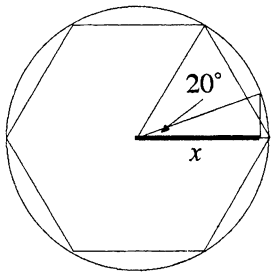
Трисекция угла невозможна по схожим причинам, однако доказательство тут немного сложнее.

Во-первых, *некоторые* углы можно точно разделить на три части. Хороший пример дается углом 180°, который при делении на три части дает 60° — угол, который можно построить при построении правильного шестиугольника. Таким образом, доказательство невозможности следует начать с выбора некоторого другого угла и с доказательства, что этот угол нельзя разбить на три равные части. Проще всего взять уже появлявшийся у нас угол 60°. Одна треть от него составляет 20°, и мы покажем, что угол 20° построить циркулем и линейкой нельзя.

Вот отрезвляющие соображения. Возьмем транспортир — инструмент для измерения углов. На нем четко нанесены углы 10°, 20° и так далее. Но эти углы не вполне точные — хотя бы из-за того, что линии, которыми они обозначены, имеют некоторую толщину. Можно отмерить угол в 20° с достаточной точностью для архитектурных или инженерных чертежей. Но, используя эвклидовы методы, нельзя построить угол, в точности равный 20°; сейчас мы это покажем.

Ключевую роль здесь играет тригонометрия — наука о количественных мерах углов. Предположим, что мы начинаем с шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 1. Там име-

1 *Левая часть* этого уравнения. *(Примеч. перев.)*



Трисекция угла 60° эквивалентна построению отрезка, длина которого обозначена буквой x.

ются углы 60°, и если мы сможем разбить один из них на три равные части, мы сможем, тем самым построить отрезок, выделенный жирным на рисунке.

Пусть его длина равна x. Тригонометрия говорит нам, что x удовлетворяет уравнению $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Как и в задаче об удвоении куба, это кубическое уравнение, и оно также представляет собой минимальный многочлен, которому удовлетворяет x. Но если бы отрезок длины x можно было построить, то степень его минимального многочлена была бы степенью числа 2. Мы пришли к тому же противоречию и к тому же выводу: данное построение невозможно.

Способ, которым я представил эти доказательства, скрывает более глубокую структуру. С более абстрактной точки зрения решения этих двух задач Античности Ванцелем сводятся к симметрийным аргументам: группы Галуа уравнений, которые отвечают геометрии, имеют "неправильную" структуру для построений циркулем и линейкой. Ванцель был хорошо знаком с группами Галуа и в 1845 году нашел новое доказательство того факта, что некоторые алгебраические уравнения нельзя решить в радикалах. Доказательство близко следовало идеям Руффини и Абеля, но позволяло упростить эти

идеи и выразить их более ясно. Во введении Ванцель пишет: "Хотя доказательство [Абеля] в итоге является верным, оно представлено в настолько сложном и неясном виде, что не получило всеобщего признания. За много лет до того Руффини... рассматривал тот же вопрос еще более туманным способом... Размышляя о работах этих двух математиков, мы пришли к доказательству, представляющемуся настолько строгим, что оно устраняет все сомнения касательно этой важной части теории уравнений".

Единственной остающейся задачей Античности была квадратура круга, сводящаяся к построению отрезка, длина которого была бы точно равна π. Доказать невозможность такого построения оказалось намного сложнее. Почему? Дело не в том, что у числа π минимальный многочлен неправильной степени, а в том, что, как оказалось, у него вообще нет минимального многочлена — нет такого полиномиального уравнения с рациональными коэффициентами, корень которого был бы равен π. Таким корнем может быть число, сколь угодно близкое к π, но невозможно получить в качестве корня точно число π.

Математики девятнадцатого столетия осознавали, что различие между рациональными и иррациональными числами можно было с пользой для себя сделать более тонким. Имелись иррациональные числа различных видов. Относительно "ручные" иррациональности, подобные $\sqrt{2}$, нельзя точно выразить в виде дроби (т. е. записать как рациональное число), но их можно представить, *используя* рациональные числа. Они удовлетворяют уравнениям, коэффициенты которых — рациональные числа; в случае числа $\sqrt{2}$ это уравнение $x^2 - 2 = 0$. Про такие числа говорят, что они алгебраические. Но математики осознали, что в принципе могут существовать иррациональные числа, не являющиеся алгебраическими, связь которых с ра-

циональными числами намного менее прямая, чем для алгебраических чисел. Они во всем выходили за границы царства рациональности.

Самый первый вопрос состоял в том, действительно ли такие "трансцендентные" числа существуют[1]? Греки полагали, что все числа могут быть рациональными, пока Гиппас не развеял эти иллюзии, а Пифагор, как говорят, пришел в такое негодование, что велел выбросить за борт гонца, принесшего эту весть. (Более вероятно все же, что Гиппаса просто изгнали из пифагорейской школы.) Математикам девятнадцатого столетия было известно, что всякая вера в то, что все числа являются алгебраическими, равным образом должна была привести к трагедии, но в данном случае они довольно долго не могли найти своего Гиппаса. Все, что требовалось, — это доказать, что некоторое конкретное вещественное число — разумным кандидатом было число π — не является алгебраическим. Но уже достаточно трудно доказать, что некоторое число — например, π — иррационально, для чего надо убедиться в том, что не существует ни одной пары целых чисел, которая давала бы π в результате деления одного числа на другое. Чтобы доказать, что некоторое число не является алгебраическим, надо заменить эти гипотетические целые числа на все возможные уравнения любой степени, а затем прийти к противоречию. Дело сильно запутывается.

Первый значительный прогресс был достигнут немецким математиком и астрономом Иоганном Ламбертом в 1768 году. В работе о трансцендентных числах он доказал, что π иррационально, и его метод проложил дорогу всем последующим исследователям. Ламберт существенно использовал идеи из анализа, в особенности концепцию интеграла. (Интеграл за-

[1] Название "трансцендентные" указывает на вещи, которые "выходят за пределы", "переступают границы", "не поддаются включению". *(Примеч. перев.)*

данной функции представляет собой функцию, скорость изменения которой есть исходная функция.) Исходя из предположения, что π в точности равняется некоторой дроби, Ламберт предложил вычислить достаточно сложный интеграл[1], изобретенный им специально для этой цели, куда входили не только многочлены, но и тригонометрические функции. Имеются два разных способа вычисления этого интеграла. Один из них дает в ответе нуль. Другой показывает, что ответ *не* равен нулю.

Если π — не дробь, то ни один из способов вычисления не применим, так что никаких проблем не возникает. Но если π — дробь, то, следовательно, нуль равен чему-то, что нулю не равно. Приехали.

Подробности доказательства Ламберта носят технический характер, но способ, которым оно работает, оказывается очень информативным. Для начала ему пришлось соотнести π с чем-то более простым, и на помощь в этом деле пришла тригонометрия. Следующая задача состояла в том, чтобы сконструировать такую ситуацию, в которой при рациональном π случилось бы нечто особенное. Именно тут в дело вступили многочлены — при поддержке умной мысли о том, что надо использовать некоторый интеграл. Затем доказательство свелось к сравнению двух различных методов вычисления этого интеграла и демонстрации того факта, что эти методы приводят к разным ответам. Это достаточно техническая и громоздкая часть доказательства, однако для специалиста она не представляет никаких сложностей.

Доказательство Ламберта было значительным шагом вперед. Однако же великое множество иррациональных чисел построить можно; наиболее очевидным примером такого числа является $\sqrt{2}$ — диагональ единичного квадрата. Таким обра-

1 Что означает "интеграл от достаточно сложной функции". *(Примеч. перев.)*

зом, доказательство иррациональности числа π не означало, что построить его нельзя. Оно означало лишь, что бессмысленно было пытаться точно выразить π в виде дроби, но это совсем другая постановка вопроса.

Математики здесь встретились с необычной дилеммой. Они научились проводить различие между алгебраическими и трансцендентными числами и полагали, что это важно. Но они все еще не знали, существует ли хоть какое-нибудь трансцендентное число. В практическом плане предполагаемое различие могло оказаться бессодержательным.

Потребовалось время. Существование трансцендентных чисел было доказано лишь в 1844 году. Решающего прорыва в этой области добился Лиувилль. Ранее он извлек на свет божий из кипы академического хлама работы Галуа, а теперь сумел изобрести трансцендентное число. Оно выглядело следующим образом:

0,11000100000000000000000001000..., —

где все более и более длинные последовательности нулей разделены отдельными единицами. Важное обстоятельство состоит в том, что количество нулей в этих последовательностях должно очень быстро возрастать.

Числа такого типа являются "почти" рациональными. Для них существуют необычайно точные рациональные приближения — главным образом из-за наличия длинных отрезков, состоящих из нулей. Например, в приведенном выше числе более длинный из таких отрезков состоит из 17 последовательных нулей, а это означает, что число, которое стоит перед этим, — то есть 0,110001 — служит намного лучшим приближением к числу Лиувилля, чем обычно получается для выбран-

ной наугад десятичной дроби. Конечно, 0,110001, как и любая конечная десятичная дробь, рациональна — она равна $\frac{110001}{1000000}$. Вместо точности в 6 десятичных знаков она дает точность в 23 десятичных знака. Следующая ненулевая цифра — это 1 на 24-м месте.

Лиувилль понял, что алгебраические числа, не являющиеся при этом рациональными, всегда довольно плохо приближаются рациональными. Дело не только в том, что такие числа иррациональны; для получения хорошего рационального приближения приходится использовать очень большие числа, чтобы записать близкую по величине дробь. Поэтому Лиувилль специально определил число, обладающее исключительно хорошими рациональными приближениями — слишком хорошими для того, чтобы это число могло быть алгебраическим. Поэтому оно должно было быть трансцендентным.

Единственное, за что можно критиковать эту умную идею, — это то, что число Лиувилля является очень искусственным. Не видно его связи с чем бы то ни было еще в математике. Оно взято из воздуха с единственной целью получить очень хорошие приближения рациональными числами. Оно было бы никому не интересно, если бы не это его единственное замечательное свойство: про него удается доказать, что оно трансцендентно. Математики, таким образом, убедились в существовании трансцендентных чисел.

Оставался вопрос, существуют ли *интересные* трансцендентные числа, но по крайней мере теория трансцендентных чисел приобрела смысл. Дело было за тем, чтобы наполнить ее *интересным* смыслом. Прежде всего, трансцендентно ли π? Если да, то вопрос с древней задачей о квадратуре круга решается нокаутом. Все числа, допускающие построение, являются алгебраическими, следовательно, трансцендентные построить невозможно. Если π трансцендентно, то квадратура круга невозможна.

число π вполне заслуженно знаменито из-за своей связи с окружностями и сферами. Кроме него математика содержит и другие замечательные числа, наиболее важное из которых — вероятно, даже более важное, чем π — известно как e. Его численное значение приближенно равняется 2,71828, и, как и π, оно иррационально. Это число появилось в 1618 году, на заре истории логарифмов; оно правильно определяет банковский процент, если вычислять сложные проценты по все более и более коротким отрезкам времени. В письме Лейбница к Гюйгенсу от 1690 года оно было обозначено буквой b. Обозначение e было введено Эйлером в 1727 году и впервые появилось в печати в "Механике" в 1736-м.

Используя комплексные числа, Эйлер открыл замечательное соотношение между e и π, которое часто называют самой прекрасной формулой во всей математике. Эйлер доказал, что $e^{i\pi} = -1$. (Эта формула допускает интуитивное объяснение, но там используются дифференциальные уравнения.) После сделанного Лиувиллем открытия следующий шаг к доказательству трансцендентности π занял еще 29 лет, и доказательство относилось к числу e. В 1873 году французский математик Шарль Эрмит доказал, что e трансцендентно. Жизненный путь Эрмита удивительно похож на жизненный путь Галуа — он поступил в Коллеж Людовика Великого, его учил Ришар, он пытался доказать неразрешимость уравнения пятой степени и хотел учиться в Политехнической школе. Но в отличие от Галуа, буквально цепляясь зубами, он туда все же попал.

Один из учеников Эрмита, знаменитый математик Анри Пуанкаре, заметил, что мозг Эрмита работал необычным образом: "Назвать Эрмита логиком! Ничто, на мой взгляд, не лежит дальше от истины. Создавалось впечатление, что методы возникают у него в голове каким-то непостижимым образом". При доказательстве трансцендентности числа e это сослужило Эрмиту добрую службу. Доказательство представляло собой развитое обоб-

щение данного Ламбертом доказательства иррациональности числа π. В нем также использовался анализ; предлагалось вычислить некий интеграл двумя способами; и если бы e было алгебраическим, то два полученных ответа не совпадали бы: один равнялся бы нулю, а другой нет. Трудный шаг состоял в том, чтобы найти, какой именно интеграл надо вычислить.

Доказательство как таковое занимает около двух печатных страниц. Но что это за чудесные страницы! Можно было бы искать всю жизнь и не найти правильный интеграл.

Число e, по крайней мере, представляет собой "естественный" объект в математических исследованиях. Оно присутствует в математике повсеместно, и оно жизненно важно, в особенности в комплексном анализе и в теории дифференциальных уравнений. Хотя Эрмит и не продавил задачу о числе π, он по крайней мере продвинулся вперед по сравнению с достаточно искусственным примером Лиувилля. Теперь математики знали, что вполне обыденные математические операции естественным образом приводят к числам, которые оказываются трансцендентными. Один из последователей Эрмита вскоре использовал его идеи, чтобы доказать, что среди этих чисел есть и число π.

Карл Луис Фердинанд фон Линдеманн родился в 1852 году в семье филолога Фердинанда Линдеманна и дочери директора школы Эмили Крузиус. Фердинанд переходил с одного места работы на другое и, в частности, побывал директором газового завода.

Как и многие студенты в Германии в конце девятнадцатого столетия, Линдеманн-младший переезжал из одного университета в другой — из Геттингена в Эрланген, оттуда в Мюнхен. В Эрлангене он защитил диссертацию по неэвклидовой геометрии под руководством Феликса Клейна. Он путешествовал за границу, в Оксфорд и Кембридж, а затем в Париж, где познако-

мился с Эрмитом. В 1879 году, защитив диссертацию, дающую право преподавать в высшем учебном заведении, он стал профессором в университете Фрайбурга. Четыре года спустя он перебрался в Кенигсбергский университет, где встретил свою будущую жену Элизабет Кюсснер — дочь преподавателя, игравшую в театре. Десять лет спустя он стал полным профессором в Мюнхенском университете[1].

В 1882 году, на полпути между поездкой в Париж и своим назначением в Кенигсберг, Линдеманн понял, как распространить метод Эрмита на доказательство трансцендентности числа π. Именно это и принесло ему славу. Некоторые историки полагают, что Линдеманну просто повезло — что он просто случайно наткнулся на правильное обобщение блестящей идеи Эрмита. Но, как однажды заметил гольфист Гари Плеер, "чем лучше я играю, тем больше мне везет". Так же, по-видимому, обстояло дело и с Линдеманном. Если могло повезти *кому-то*, то почему не повезло Эрмиту? Позднее Линдеманн обратился к математической физике, занявшись исследованиями электрона. Наиболее известным из его учеников был Давид Гильберт.

Данное Линдеманном доказательство трансцендентности числа π опиралось на метод, впервые использованный Ламбертом и развитый Эрмитом: придумать подходящий интеграл, вычислить его двумя способами и показать, что если число π алгебраическое, то ответы не согласуются. Интеграл был очень тесно связан с тем, который использовал Эрмит, только еще более сложту. Связь между e и π выражалась в прекрасном соотношении, открытом Эйлером. Если бы π было алгебраическим, то e приобрело бы некоторые новые неожиданные свойства — похожие на свойства алгебраических чисел, но все же отлича-

[1] В немецкой системе "полный профессор" (если использовать уже утвердившееся у нас англосаксонское выражение) назывался ординарным профессором. Предыдущая должность — это *Assistant Professor*, или "экстраординарный профессор", — примерно наш доцент. *(Примеч. перев.)*

ющиеся от них. Ядро доказательства Линдеманна относилось к числу e, а не к π.

С появлением доказательства Линдеманна эта глава математики пришла к своему первому действительно важному выводу. Невозможность квадратуры круга оказалась не более чем побочным эффектом. Гораздо важнее для математиков было понять, почему так происходит. Теперь они могли двигаться вперед и развивать теорию трансцендентных чисел, которая сегодня представляет собой активную (и дьявольски сложную) область исследований. Даже наиболее очевидные и на вид правдоподобные гипотезы о трансцендентных числах остаются по большей части недоказанными.

Вооруженные достижениями Абеля и Галуа, мы можем вернуться к задаче о построении правильных многоугольников. Для каких чисел n можно построить правильный n-угольник циркулем и линейкой? Ответ на этот вопрос весьма необычен.

В *Disquisitiones Arithmeticae* Гаусс сформулировал необходимые и достаточные условия на целое число n, но доказал только их достаточность. По его утверждению, у него было доказательство, что те же условия являются и необходимыми, но, как и бóльшая часть его результатов, оно осталось неопубликованным. Гаусс в действительности выполнил сложную часть работы, а Ванцель привел недостающие подробности в своей статье 1837 года.

Чтобы лучше понять данный Гауссом ответ, рассмотрим правильный 17-угольник. Что есть такого в числе 17, что позволяет построить правильный многоугольник с 17 сторонами? Почему это невозможно, скажем, для чисел 11 или 13? Заметим, что все эти три числа — простые. Легко показать, что если правильный n-угольник допускает построение, то можно построить правильный p-угольник для каждого простого числа p, на которое делится n. Надо просто взять каждый $\frac{n}{p}$-й угол. Например, если

взять каждую третью вершину в правильном 15-угольнике, получим правильный 5-угольник. Так что имеет смысл рассматривать простое число сторон, а затем получить полное решение, используя результаты для простых чисел.

Число 17 простое, что для начала уже неплохо. Выполненный Гауссом анализ, переформулированный в более современных терминах, основан на том факте, что решения уравнения $x^{17} - 1 = 0$ образуют вершины правильного 17-угольника на комплексной плоскости. У этого уравнения имеется один очевидный корень $x = 1$. Остальные 16 — это корни многочлена 16-й степени, и можно показать, что этот многочлен есть $x^{16} + x^{15} + x^{14} + \ldots + x^2 + x + 1$. 17-угольник строится путем решения цепочки квадратных уравнений, а это оказывается возможным потому, что 16 есть степень числа 2: $16 = 2^4$.

Аналогично в более общем случае аргументы того же типа показывают, что когда p — нечетное простое число, правильный p-угольник допускает построение, если и только если $p - 1$ есть степень числа 2. Такие нечетные простые числа называются (простыми) числами Ферма, потому что Ферма первым взялся их исследовать. Грекам было известно о построении правильного 3-угольника и правильного 5-угольника. Заметим, что $3 - 1 = 2$ и $5 - 1 = 4$ суть степени числа 2. Результаты греков, таким образом, согласуются с критерием Гаусса, а 3 и 5 — первые два из чисел Ферма. С другой стороны, $7 - 1 = 6$, что не есть степень двойки, так что правильный 7-угольник не допускает построения циркулем и линейкой.

Затратив еще немного труда, можно получить характеризацию Гаусса: правильный n-угольник допускает построение, если, и только если, n является степенью двойки или же степенью двойки, умноженной на *различные* простые числа Ферма.

Остается выяснить, каковы же числа Ферма. Следующим после 3 и 5 идет Гауссово 17. Следующее — 257, а за ним — уже довольно большое число 65 537. Это единственные известные

простые числа Ферма. Никто не доказал, что дальнейшие числа Ферма существуют — но никто не доказал и того, что их нет. Насколько нам известно на данный момент, может существовать абсолютно гигантское простое число Ферма, пока не известное человечеству. Согласно знаниям, имеющимся на сегодняшний день, это число составляет по меньшей мере $2^{33554432} + 1$, и этот монстр и в самом деле может оказаться следующим простым числом Ферма. (Показатель степени 33 554 432 сам есть степень числа 2, а именно 2^{25}. Все числа Ферма на единицу превосходят двойку, возведенную в степень, являющуюся степенью двойки.) Это число имеет более десяти миллионов знаков. Даже после сделанных Гауссом великих открытий мы все равно не знаем в точности, какие именно правильные многоугольники можно построить, но единственным пробелом в наших знаниях остается вопрос о существовании очень больших чисел Ферма.

Гаусс доказал, что правильный 17-угольник допускает построение, но в действительности не дал описания самого построения, хотя и заметил, что основной шаг состоит в построении отрезка, длина которого равна

$$\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right).$$

Поскольку квадратные корни можно построить всегда, искомое построение скрыто в этом замечательном числе. Первое явное построение осуществил Ульрих фон Югэнен в 1803 году. В 1893 году Герберт Уильям Ричмонд нашел более простой вариант[1].

В 1832 году Ф. Ж. Ришло опубликовал ряд статей о построении правильного 257-угольника под заголовком *De resolutione*

1 На анимированное построение правильного 17-угольника можно посмотреть по адресу http://en.wikipedia.org/wiki/Heptadecagon. *(Примеч. перев.)*

algebraica aequationis $x^{257} = 1$, *sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata*, который сам уже производит не меньшее впечатление, чем число сторон его многоугольника.

Имеется апокрифическая байка[1] о том, как сверхстарательному аспиранту было предложено построить в своей диссертации 65 537-угольник, после чего тот появился вновь лишь двадцать лет спустя. Реальность почти столь же курьезна: Ж. Эрмес из Лингенского университета посвятил этой задаче десять лет, закончив ее в 1894 году; его неопубликованная работа хранится в Геттингенском университете. К сожалению, Джон Хортон Конуэй — быть может, единственный из математиков нашего времени, когда-либо взглянувший на эти документы, — сомневается, что там все верно.

[1] Вероятно, придумана Дж. Литлвудом. *(Примеч. перев.)*

Глава 9
Пьяный вандал

Уильям Роуэн Гамильтон[1] был величайшим математиком из всех, когда-либо рожденных Ирландией. Он появился на свет, когда часы отбивали полночь с 3 на 4 августа 1805 года, и впоследствии так и не смог окончательно решить, какой же из дней считать днем своего рождения. По большей части он склонялся к 3-му, но на его надгробии указана дата "4 августа", потому что ближе к концу жизни он перешел на эту дату по сентиментальным причинам. Он был блестящим лингвистом, математическим гением и алкоголиком. Он задался целью изобрести алгебру в размерности три, но вместо этого во вспышке озарения, которое вылилось в акт вандализма по отношению к мосту, реализовал то, к чему стремился, в размерности четыре.

1 Ничего не поделаешь; однофамильцем нашего Гамильтона является, например, Л. Хэмилтон — британский обладатель чемпионского титула в гонках класса "Формула 1", — но традиционное написание есть традиционное написание (плюс к тому в физике и математике укоренилось немало производных от имени Гамильтона, например, "гамильтониан"). Других примеров традиционного русского написания в этой книге немало. Скажем, все "простые" французы по имени Charles — Шарли, но короли, носящие *то же* имя, — Карлы; *Исаак* Ньютон, но *Айзек* Азимов и т. д. *(Примеч. перев.)*

Он навсегда изменил взгляды человечества на алгебру, пространство и время.

Уильям родился в богатой семье — он был третьим сыном Арчибальда Гамильтона, юриста, голова которого была устроена подходящим для бизнеса образом. У Уильяма была также сестра по имени Элиза. Отец любил пропустить пару-тройку стаканчиков, поэтому некоторое время с ним приятно было находиться в одной компании, однако ближе к вечеру дело поворачивалось обратной стороной медали. Арчибальд ясно выражал свои мысли, был умен и религиозен, и его младший сын унаследовал все его отличительные черты, включая пристрастие к алкоголю. Мать Уильяма Сара Хаттон в умственном отношении не уступала мужу — она происходила из семьи, несшей на себе знаки интеллектуального отличия, однако ее влияние на маленького Уильяма ограничилось по большей части передачей ему своих генов — в трехлетнем возрасте мальчик был отдан в обучение к дяде Джеймсу. Джеймс был викарием и превосходным лингвистом, и его интересы определили основные направления образования Уильяма.

Результаты последовали впечатляющие, хотя и на довольно узком поприще. В пятилетнем возрасте Уильям свободно владел греческим, латынью и древнееврейским. К восьми годам он говорил по-французски и по-итальянски. Два года спустя к списку добавились арабский и санскрит; позднее — персидский, сирийский, хинди, малайский, маратхи и бенгальский. Попытка овладеть китайским провалилась из-за отсутствия подходящих текстов. Джеймс жаловался, что ему "стоило немалых денег поддерживать его из Лондона, но, похоже, деньги были потрачены не зря". Математик и квазиисторик Эрик Темпл Белл ("квази", потому что он никогда не позволял неудобному факту испортить хорошую историю) вопрошал: "Для *чего* все это было нужно?"

Однако естественным наукам и математике повезло. Уильям, совсем уже было собравшийся посвятить свою жизнь изу-

чению как можно большего числа существующих в мире языков, познакомился с американским вундеркиндом по имени Зира Колберн. Это был один из тех странных людей, чья голова работает как карманный калькулятор; он обладал способностью быстро и точно выполнять вычисления. Если бы вы спросили Колберна, чему равен кубический корень из 1 860 867, он ответил бы — 123, не моргнув глазом.

Такие способности — не то же самое, что склонность к математике, подобно тому как способность к грамотному письму не сделает из вас хорошего романиста. За исключением Гаусса, в записных книжках и рукописях которого остались многочисленные объемные вычисления, очень мало кто из великих математиков был выдающимся вычислителем. Большинство были просто толковыми вычислителями, каковыми в то время и требовалось быть, но в среднем не более выдающимися, чем обычный квалифицированный бухгалтер. Даже в наши дни компьютеры не полностью вытеснили вычисления ручкой на бумаге или в уме; часто можно получить хорошее представление о математической задаче, делая вычисления руками и следя за тем, как на бумаге выстраиваются символы. Но, разумеется, при наличии хорошей программы (по большей части созданной математиками) кто угодно сможет после часа тренировки проводить вычисления на уровне, которому возможности Колберна и в подметки не годятся.

И не думайте, что нечто подобное сделает вас хоть сколько-нибудь похожим на Гаусса.

Колберн не мог толком объяснить, какие приемы он использует, хотя и понимал, что немалую роль здесь играет память. Его познакомили с Гамильтоном в надежде, что юный гений прольет свет на эти таинственные приемы. Уильям так и сделал и даже предложил некоторые усовершенствования. Ко времени отъезда Колберна Гамильтон наконец нашел предмет, достойный потрясающей мощи своего ума.

К семнадцати годам Гамильтон прочитал целый ряд трудов, написанных корифеями математики, и знал достаточно математической астрономии, чтобы вычислять затмения. Он по-прежнему проводил больше времени за "классическими" штудиями, чем за математикой, но все же именно математика стала его настоящей страстью. Вскоре он начал делать первые открытия. Гаусс открыл построение правильного 17-угольника, когда ему было 19 лет, а молодой Гамильтон совершил равно беспрецедентный прорыв, сформулировав аналогию — выражаясь математически, тождество — между механикой и оптикой, наукой о свете. Он впервые упомянул о своих идеях по этому поводу в зашифрованном письме к сестре Элизе, но нам вполне достоверно известно о характере этих идей из его последующего письма кузену Артуру.

Это было удивительное открытие. Механика — наука о движущихся телах: пушечные ядра летят по дуге параболы, маятники регулярным образом раскачиваются из стороны в сторону, планеты движутся по эллипсам вокруг Солнца. Оптика же представляет собой геометрию световых лучей, отражение и преломление, радуги, призмы и телескопические линзы. Связь между ними оказалась неожиданной; в то, что они представляют собой *одно и то же*, поверить было невозможно.

Но тем не менее так оно и было. И это непосредственно привело к формализму, который в наши дни используется в математике и математической физике (не только в механике и оптике, но и в квантовой теории), — так называемому формализму гамильтоновых систем. Их основное свойство состоит в том, что уравнения движения механической системы выводятся из единой величины — полной энергии, ныне называемой *гамильтонианом* системы. Получающиеся уравнения оперируют не только с положениями различных частей системы, но и с тем, сколь быстро они движутся, — с *импульсом* системы. И еще одно прекрасное свойство этих уравнений состоит в том, что они не зависят от выбора координат. Красота является исти-

ной, по крайней мере в математике. А здесь физика одновременно и прекрасна, и истинна.

Гамильтону повезло больше, чем Абелю или Галуа, в том отношении, что на его необычные способности обратили внимание в раннем детстве. Поэтому вполне естественно, что в 1823 году он поступил в ведущий ирландский университет — дублинский Тринити Колледж. Равным образом неудивительно, что он шел первым в списке из сотни кандидатов. Во время учебы в Тринити он получил все возможные награды. И, что еще важнее, он закончил первый том своего основополагающего труда по оптике.

Весной 1825 года Гамильтон открыл для себя притяжение прекрасного пола, представшего перед ним в лице Кэтрин Дизни. Наверное, он поступил не слишком мудро, ограничив свои знаки внимания написанием стихов, потому что его потенциальная возлюбленная недолго думая вышла замуж за священника старше ее на пятнадцать лет, который был способен на несколько менее литературный подход к порядочным девицам. Сердце Гамильтона было разбито; несмотря на свою твердую приверженность религиозным заповедям, он подумывал о том, чтобы утопиться, то есть совершить смертный грех. Однако здравомыслие одержало верх, и он излил свою разочарованную душу еще в одной поэме.

Гамильтон любил поэзию, и круг его друзей включал самых видных литераторов. Уильям Вордсворт стал его близким другом; он также часто встречался с Сэмюелем Тейлором Колриджем и другими писателями и поэтами. Вордсворт оказал Гамильтону ценнейшую услугу, деликатно намекнув ему, что его таланты лежат *не* в сфере поэзии:

> "Вы засыпали меня градом ваших стихов, которые я прочитал с великим удовольствием... Однако же нас не оставляет опасение, что подобная стезя может отвратить вас от научного пу-

ти... Я не решаюсь вам советовать, но не найдет ли поэтическая часть вашей натуры более благодарного для себя поля в области прозы..."

Гамильтон ответил в том смысле, что его истинной поэзией была математика, и мудро переключился на научное поприще. В 1827 году, еще в бытность его студентом, Гамильтона единогласно избрали профессором астрономии в Тринити после того, как занимавший эту должность Джон Бринкли подал в отставку, а точнее, стал епископом Клойна. Гамильтон начал сразу с громкого успеха, опубликовав свою книгу по оптике — предмету, важному для астрономии, поскольку оптика лежит в основании устройства большинства астрономических инструментов.

Связь с механикой там присутствовала лишь в зачаточной форме. Основной фокус книги, если можно так выразиться, заключался в геометрии световых лучей — как они изменяют направление при отражении в зеркале или как преломляются в линзе. "Геометрическая оптика" позднее уступила место "волновой оптике", в которой свет рассматривается как волны. Волны обладают целым набором дополнительных свойств, самое заметное из которых — дифракция. Интерференция волн может приводить к размытию краев изображения и даже к эффекту, который выглядит как огибание светом угла (фокус, невозможный для лучей).

Геометрия световых лучей не была новым предметом; ее интенсивно изучали математики и до этого, начиная с Ферма и даже с греческого философа Аристотеля. Гамильтон сделал в оптике нечто подобное прославленному достижению Лежандра в механике: он избавился от геометрии и заменил ее алгеброй и анализом. А именно — заменил основанные на рисунках чисто геометрические рассуждения на абстрактные вычисления.

Это было существенным шагом вперед, поскольку неточные картинки, тем самым, заменялись строгим анализом. Позднее

математики предприняли энергичные усилия, чтобы пройти путь, намеченный Гамильтоном, в обратном направлении и снова ввести в обиход наглядные образы. Но формальный алгебраический подход стал к тому моменту неотъемлемой частью математического мышления и мог оставаться естественным спутником более наглядных аргументов. Колесо моды сделало полный оборот, но на более высоком уровне, подобно спиральной лестнице.

Великим вкладом Гамильтона в оптику было объединение. Все огромное многообразие известных результатов он свел к одному фундаментальному методу. Вместо системы световых лучей он ввел одну-единственную величину, "характеристическую функцию" системы. С ее помощью любая оптическая конфигурация представлялась одним уравнением. Более того, это уравнение можно было решить единообразным способом, что давало полное описание всей системы лучей и ее поведения. Метод Гамильтона основывался на одном фундаментальном принципе: световые лучи, проходящие через любую систему зеркал, призм и линз, выбирают путь, распространение по которому до цели занимает наименьшее время.

Ферма еще ранее обнаружил некоторые специальные случаи этого принципа, назвав его принципом наименьшего времени. Простейший пример, позволяющий объяснить его работу, — это отражение света от плоского зеркала. Левый рисунок показывает, как световой луч, выходя из одной точки и отражаясь от зеркала, достигает второй точки. Одним из великих открытий на заре оптики был закон отражения, который гласит, что две части светового луча составляют с зеркалом равные углы[1].

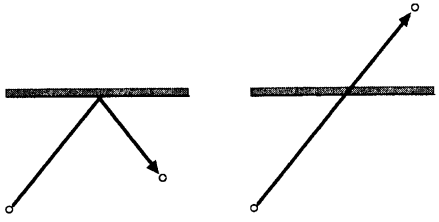
1 Читатель мог встречать следующую распространенную формулировку этого утверждения: угол падения равен углу отражения. *(Примеч. перев.)*

ферма придумал изящный прием: отразить в зеркале второй участок луча, а заодно и вторую точку, как показано на правом рисунке. Благодаря Эвклиду условие "равных углов" — это то же самое, что утверждение, что в этой "отраженной" картине путь от первой точки до второй является прямой линией. Но Эвклид доказал тот знаменитый факт, что прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками. Поскольку скорость света в воздухе постоянна, кратчайшее расстояние означает то же самое, что наименьшее время.

Возвращаясь к геометрии на левом рисунке, мы видим, что выполнено то же самое утверждение. Таким образом, условие равных углов логически эквивалентно тому факту, что световой луч выбирает путь с наименьшим временем распространения из первой точки во вторую при условии, что по дороге надо отразиться от зеркала.

Связанный с этим принцип — закон преломления Снеллиуса — говорит о том, как "ломается" луч при переходе из воздуха в воду и вообще из одной среды в другую. Этот закон можно вывести подобным же образом, если учесть, что свет распространяется в воде медленнее, чем в воздухе. Гамильтон пошел еще дальше, утверждая, что тот же принцип минимизации времени применим ко всем оптическим системам, и воплотив эту мысль в едином математическом объекте — характеристической функции.

Использованная здесь математика впечатляла, но в руках Гамильтона она привела к немедленной экспериментальной отда-



Как принцип наименьшего времени приводит к закону отражения.

че. Гамильтон заметил, что из его метода следовало существование "конического преломления", когда один луч света при попадании на подходящий кристалл выходит из него в виде целого конуса лучей. В 1832 году это предсказание, неожиданное для всех, кто работал в оптике, получило прочное экспериментальное подтверждение, когда Хэмфри Ллойд использовал кристалл арагонита. На следующее утро Гамильтон проснулся знаменитым.

К 1830 году Гамильтон озаботился тем, чтобы обзавестись семьей; он подумывал жениться на Элен де Вер, умом которой, как он говорил Вордсворту, он восхищался. Ей он тоже писал письма в стихах и был готов уже сделать предложение, когда она заявила ему, что никогда не уедет из своей родной деревни Карра[1]. Он воспринял это как тактичный отказ — весьма вероятно, что обоснованно, поскольку через год она вышла за кого-то замуж и все же уехала.

В конце концов он женился на Элен Бейли — местной девушке, жившей неподалеку от обсерватории. Гамильтон описывал ее как "далеко не блестящую". Медовый месяц был ужасен: Гамильтон занимался оптикой, а Элен болела. В 1834 году у них родился сын Уильям Эдвин. Затем Элен уехала на бóльшую часть года. Второй сын Арчибальд Хенри появился на свет в 1835-м, но брак уже трещал по швам.

В глазах потомства величайшим открытием Гамильтона была сформулированная им оптико-механическая аналогия. Но сам он до самой смерти — причем с все возрастающим упорством — отдавал пальму первенства вещи совершенного другого сорта — кватернионам.

Кватернионы представляют собой некоторую алгебраическую структуру, находящуюся в близком родстве с ком-

1 Curragh, графство Килдейр (Kildare, Chill Dara). *(Примеч. перев.)*

плексными числами. Гамильтон был убежден, что они содержат в себе ключ к глубочайшим областям физики, а на склоне жизни убедил себя, что в них содержится ключ буквально ко всему. История, похоже, не согласилась с этой оценкой, и в течение следующего столетия кватернионы медленно тускнели, пропадая из поля общественного интереса, превратившись в тихую заводь абстрактной алгебры без серьезных применений.

Совсем недавно, однако, кватернионы пережили возрождение. И даже если они никогда не займут того положения, которое прочил им Гамильтон, их чем дальше, тем больше рассматривают как значимый источник важных математических структур. Кватернионы оказались очень специальным явлением — как раз настолько специальным, насколько этого требуют современные физические теории.

Сразу после открытия кватернионы произвели мощный переворот в алгебре. Они нарушили одно из важных алгебраических правил. На протяжении периода в двадцать лет чуть ли не все правила алгебры нарушались одно за другим, что иногда приносило богатейшие плоды, но ничуть не реже приводило в бесплодные тупики. То, что математики середины 1850-х годов воспринимали как не подлежащие изменениям правила, оказалось просто набором удобных допущений, облегчавших жизнь алгебраистам, но не всегда отвечавших более глубоким потребностям самой математики.

В этом прекрасном новом "постгалуавском" мире алгебра уже не сводилась к простому использованию в уравнениях букв вместо чисел. Алгебра имела дело с глубокой структурой уравнений — не с числами, а с процессами, преобразованиями, симметриями. Эти радикальные перемены изменили лицо математики. Она стала более абстрактной, но одновременно и более общей, и более мощной. А также приобрела зачаровывающую, порой сверхъестественную красоту.

До того как болонские математики эпохи Возрождения задались вопросом о том, имеется ли смысл в квадратном корне из минус единицы, все появляющиеся в математике числа принадлежали одной системе. Даже сегодня, в качестве наследия исторической путаницы во взаимоотношениях математики и реальности, эта система известна как *вещественные* числа. Название не слишком удачное, потому что оно предполагает, что эти числа некоторым образом принадлежат к ткани вселенной, а не порождены человеком в попытке понять ее структуру. Но это не так. Эти числа не более вещественны, чем любые другие "числовые системы", созданные человеческим воображением за последние 150 лет. Правда, они имеют более непосредственное отношение к реальности, чем большинство новых систем. Они очень точно соответствуют идеализированному измерению.

Вещественное число по сути представляет собой десятичную дробь. Дело не в конкретной выбранной системе записи — которая создана просто для удобства вычислений с числами, — а в тех более глубоких свойствах, которые присущи десятичным дробям. Вещественные числа произошли от предшественников попроще, с меньшими амбициями. Сначала человечество тащилось по направлению к системе "натуральных чисел" 0, 1, 2, 3, 4 и так далее. Я сказал "тащилось", потому что на начальном этапе некоторые из этих чисел числами вовсе не считались. Было время, когда древние греки отказывались считать 2 числом; оно было слишком маленьким, чтобы демонстрировать "численность", типичную для других чисел. Числа тогда начинались с 3. В конце концов было осознано, что 2 — число в той же мере, что и 3, 4 или 5, но затем камнем преткновения оказалась единица. В самом деле, если кто-то говорит про себя, что у него имеется "некоторое число коров", а вы обнаруживаете, что у него одна-единственная корова, то не будет ли он повинен в вопиющем преувеличении? "Число", без сомнения, означало "множественность", в которой нет места единичности.

Но по мере развития систем обозначений стало кристально ясно, что единица — ровно в той же мере часть системы вычислений, что и ее старшие братья. Таким образом, единица стала числом — правда, специальным, очень маленьким. В некотором смысле оно оказалось самым важным из всех, поскольку именно там, в единице, числа начинались. Прибавлением друг к другу большого числа единиц можно получить все остальное — и в течение некоторого времени обозначения буквально выражали эту идею, например, число семь записывалось в виде семи черточек — как |||||||.

Много позднее индийские математики поняли, что есть даже более важное число, *предшествующее* единице. На самом деле числа начинались не там. Они начинались в нуле, который теперь изображается символом 0. Еще позднее оказалось полезным ввести в обиход отрицательные числа — числа, *меньшие чем* ничто. Таким образом, с присоединением отрицательных, человечество изобрело систему целых чисел: ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ... Но этим дело не закончилось[1].

Проблема с целыми числами состоит в том, что они не позволяют представить целый ряд полезных величин. Фермер, продающий зерно, например, может пожелать указать количество пшеницы как нечто между 1 мешком и 2 мешками. Если это будет примерно посередине между этими двумя мерами, то желаемое количество мешков равно $1^1/_2$. Или несколько меньше — $1^1/_4$, или, наоборот, больше — $1^3/_4$. Таким образом (с использованием самых разнообразных систем для их обозначения) были изобретены дроби. Дроби интерполируют между целыми числами.

Достаточно сложные дроби могут интерполировать с исключительной точностью, в чем мы уже могли убедиться, рас-

[1] Читателя может заинтересовать взгляд на излагаемый здесь ход событий как на "подложную историю чисел", изложенный в книге Дж. Дербишира "Простая одержимость", которая выйдет в издательстве Corpus. *(Примеч. перев.)*

сматривая вавилонскую арифметику. Крепла уверенность, что любую величину можно представить в виде дроби.

Но тут на сцену выходят Пифагор и носящая его имя теорема. Немедленное следствие этой теоремы состоит в том, что длина диагонали единичного квадрата представляет собой число, квадрат которого равен в точности 2. Иными словами, диагональ имеет длину, равную квадратному корню из 2. Такое число обязано существовать, поскольку каждый может нарисовать квадрат, а у него, разумеется, есть диагональ, а она, без сомнения, имеет длину. Но, как осознал на свою беду Гиппас, чем бы ни был квадратный корень из 2, он не может точно выражаться в виде дроби. Это число *иррациональное*. Таким образом, потребовалось еще больше чисел для заполнения невидимых дыр между всеми возможными дробями.

В конце концов этот процесс вроде бы достиг конечной остановки. Греки предпочитали числовым схемам геометрию, но в 1585 году Вильгельм Молчаливый[1] назначил фламандского математика и инженера Симона Стевина из Брюгге учителем своего сына Морица Оранского. Стевин занимал должности инспектора плотин, начальника снабжения армии, а также министра финансов. Эти должности, в особенности две последние, убедили его в важности ведения бухгалтерского учета, и он позаимствовал системы, использовавшиеся в итальянских конторах. В поисках такого способа представлять дроби, который соединял бы в себе гибкость индо-арабских позиционных обозначений и высокую точность вавилонских шестидесятеричных

1 Willem van Oranje (1533–1584) — принц Оранский, граф Нассауский, первый статхаудер Голландии и Зеландии, один из лидеров Нидерландской революции. *(Примеч. перев.)*

дробей, Стевин предложил аналог вавилонской системы, но с основанием 10 вместо основания 60, — то есть десятичные дроби.

Стевин опубликовал очерк, описывающий его новую систему обозначений. Он в достаточной мере осознавал проблемы маркетинга и включил утверждение, что его идеи успешно прошли "тщательные испытания людьми практической закалки, которые нашли их настолько полезными, что они добровольно отказались от своих собственных усовершенствований в пользу данного". Далее он утверждал, что его десятичная система "учит нас, что все вычисления, которые встречаются при ведении бизнеса, можно выполнить в одних только целых числах, не прибегая к помощи дробей". В обозначениях Стевина не использовалась современная десятичная запятая, но там было нечто близкое. Там, где мы пишем "3,1416", Стевин писал бы 3 ⓪ 1 ① 4 ② 1 ③ 6 ④. Символ ⓪ указывал на целое число, ① — на десятые, ② — на сотые и т. д. По мере того как люди привыкли к этой системе, они перестали писать ①, ② и т. д., оставив только знак ⓪, который мутировал в десятичную запятую.

На самом деле с использованием десятичных дробей записать квадратный корень из двух нельзя — если только в ваши планы не входит продолжать эту запись без конца. Но равным образом нельзя записать в виде десятичной дроби и 1/3. Близким к 1/3 значением будет 0,33, но еще ближе 0,333, а сверх того лучше 0,3333 и так далее. Точное представление существует — тут мы употребим это слово новым для себя способом, — только если рассматривать бесконечную последовательность троек. Но если такое приемлемо, то можно в принципе точно записать и квадратный корень из двух. В том, как там устроены десятичные знаки, не видно никакого порядка, но, взяв достаточно большое количество этих знаков, можно получить число, квадрат которого настолько близок к числу 2, насколько поже-

лаете. Идея в том, что если взять *все* десятичные знаки, получится число, квадрат которого равен точно 2.

После принятия "бесконечных десятичных дробей" система вещественных чисел стала полной. В ней оказалось возможным представить любое число, которое может потребоваться бизнесмену или математику, с любой желаемой точностью. Всякое измерение, которое только можно себе вообразить, давало результат, выразимый десятичной дробью. Если требовалось записать отрицательные числа, десятичная система с легкостью справлялась с этой задачей. Нужды ни в каких числах какого-либо другого сорта не возникало. Не осталось никаких пробелов, которые надо было бы заполнить.

Если не считать ....

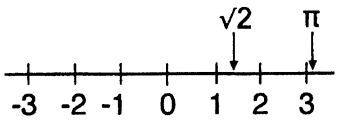
Те странные формулы Кардано для корней квадратного уравнения, казалось, пытались нам что-то сообщить, но что именно — оставалось крайне неясным. Если начать с совершенно, казалось бы, безобидного уравнения третьей степени — такого, где корень нам известен, — то формула не дает этот ответ в явном виде. Вместо этого она предлагает громоздкое предписание, включающее извлечение кубического корня из чего-то даже еще более громоздкого, и при этом требуется, казалось бы, невозможное — извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Пифагорейцев ставил в тупик квадратный корень из двух, но квадратный корень из минус единицы казался еще более непостижимым.

На протяжении нескольких сотен лет возможность придания разумного смысла квадратному корню из минус единицы периодически то посещала коллективное математическое сознание, то покидала его. Никто не понимал, могут ли такие числа существовать. Постепенно, однако, зрело осознание, что если бы они существовали, то были бы исключительно полезны.

Первоначально такие "мнимые" величины использовались ровно для одной цели: указывать на задачи, не имеющие решения. Если вы желали найти число, квадрат которого равен минус единице, то формальное решение "квадратный корень из минус единицы" было мнимым — в смысле воображаемым, — поскольку такого решения не существовало. Не кто иной, как мыслитель Рене Декарт, именно так и утверждал. В 1637 году он проводил различие между "вещественными" числами и "мнимыми", настаивая, что присутствие мнимых величин означает отсутствие решения. Ньютон говорил то же самое. Но оба эти светила не принимали во внимание сделанное столетиями раньше наблюдение Бомбелли о том, что иногда мнимые величины указывают на наличие решения, — но только сигнал, который они подают, нелегко расшифровать.

В 1673 году английский математик Джон Валлис — родившийся в Эшфорде, примерно в пятнадцати милях от моего родного города в графстве Кент — добился фантастического продвижения. Он обнаружил, что простой способ представления мнимых чисел — и даже "комплексных" чисел, которые соединяют в себе вещественные и мнимые — состоит в том, чтобы использовать точки на плоскости. Первым шагом является ныне вполне привычная концепция вещественной "числовой прямой" — прямой линии, простирающейся до бесконечности в обоих направлениях, с отметкой о посередине, направо от которой уходят вдаль положительные вещественные числа, а налево — отрицательные.

Каждое вещественное число можно поместить на числовую прямую. Каждый следующий десятичный знак требует деления единицы длины на десять, затем на сто, тысячу и т. д. равных частей, но это не проблема. Положение чисел, подобных $\sqrt{2}$, можно указать с любой желаемой степенью точности — в данном случае где-то между 1 и 2, немного слева от 1,5. Число π живет немного справа от 3, и т. д.

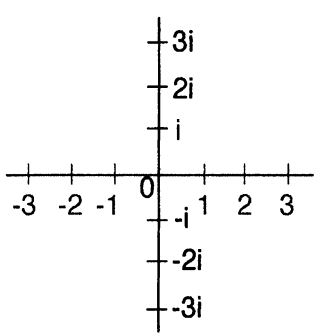


Вещественная числовая прямая.

Но куда же отправить $\sqrt{-1}$? Места на вещественной числовой прямой для этого числа нет. Это число ни положительно, ни отрицательно, поэтому ему не место ни справа, ни слева от точки 0.

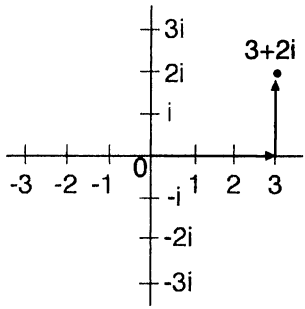
Валлис поместил его где-то еще. Он ввел вторую числовую прямую, чтобы разместить на ней мнимые числа, т. е. числа, кратные i,[1] и расположил ее под прямым углом к вещественной числовой прямой. Это был в буквальном смысле образец "широкого подхода к делу".

Две числовые прямые, вещественная и мнимая, должны пересекаться в точке 0. Совсем не сложно доказать, что если числа вообще имеют смысл, то 0 умножить на i должно равняться 0, так что начало отсчета на вещественной и мнимой прямых одно и то же.



Два экземпляра вещественной числовой прямой, расположенные под прямым углом.

1 Здесь i обозначает $\sqrt{-1}$ (см. стр. 113). Под "кратными" понимаются числа вида $i\cdot$ (вещественное число). *(Примеч. перев.)*



Комплексная плоскость, согласно Валлису.

Комплексное число состоит из двух частей: одна вещественная, другая мнимая. Чтобы указать положение заданного числа на плоскости, Валлис предложил своим читателям отмерить вещественную часть вдоль горизонтальной "вещественной" прямой, а затем отмерить мнимую часть вдоль вертикального направления, то есть параллельно мнимой прямой.

Это предложение полностью решило вопрос о придании смысла мнимым и комплексным числам. Оно было простым, но эффективным — настоящей работой гения.

Оно было целиком и полностью проигнорировано.

Несмотря на отсутствие общественного признания, открытие Валлиса, должно быть, как-то просочилось в математическое сознание, поскольку математики бессознательно начали использовать образы, непосредственно связанные с основной идеей Валлиса: комплексные числа живут не на прямой, а на комплексной *плоскости*.

По мере того как математика становилась более разнообразной, математики переходили к вычислению все более

сложных вещей. В 1702 году Иоганн Бернулли, решая некоторую задачу из анализа, столкнулся с проблемой вычисления логарифма комплексного числа. К 1712 году Бернулли и Лейбниц воевали по поводу следующего ключевого вопроса: чем является логарифм отрицательного числа? Если бы этот вопрос удалось решить, можно было бы найти логарифм любого комплексного числа, потому что логарифм квадратного корня из заданного числа равен просто половине его логарифма. Таким образом, логарифм числа *i* составляет половину логарифма числа –1. Но чему равен логарифм –1? Вопрос стоял просто. Лейбниц полагал, что логарифм числа –1 должен быть комплексным. Бернулли говорил, что вещественным. Бернулли основывал свое заключение на несложных выкладках из математического анализа; Лейбниц возражал, что ни сам метод, ни полученный ответ не имеют смысла. В 1749 году Эйлер разрешил это противоречие, всецело встав на сторону Лейбница. Бернулли, по его наблюдению, упустил кое-что из виду. Его выкладки из анализа носили такой характер, что ответ включал в себя добавление "произвольной постоянной". Полностью сосредоточившись на комплексном анализе, Бернулли молчаливо предполагал, что эта постоянная равнялась нулю. А она нулю не равнялась. Она была мнимой. Это упущение объясняло расхождение между ответами Бернулли и Лейбница.

Темпы "комплексификации" математики нарастали. Все больше идей, появившихся при изучении вещественных чисел, распространялись на комплексные числа. В 1797 году норвежец по имени Каспар Вессель опубликовал метод представления комплексных чисел точками на плоскости.

Каспар происходил из семьи священника и был шестым из четырнадцати детей. В то время в самой Норвегии университетов не было, но она находилась в унии с Данией, так что в 1761 году он отправился в Копенгагенский университет. Он и

его брат Оле изучали право, причем Оле, чтобы пополнить семейный бюджет, подрабатывал землемером. Позднее Каспар стал помощником Оле.

Работая землемером, Каспар изобрел способ представления геометрии на плоскости — в особенности линий и их направлений — в терминах комплексных чисел. В ретроспективе мы видим, что его идеи означали представление комплексных чисел в терминах геометрии на плоскости. В 1797 году он представил свою работу — первую и единственную свою научную статью по математике — Датской Королевской Академии.

Едва ли кто-нибудь из ведущих математиков читал по-датски, и работа влачила "непрочитанное существование", пока через 100 лет ее не перевели на французский. Тем временем французский математик Жан-Робер Арган независимо предложил ту же идею и опубликовал ее в 1806 году. В 1811 году та же мысль, что комплексные числа можно рассматривать как точки на плоскости, — снова независимо — пришла в голову Гауссу. Названия "диаграмма Аргана", "плоскость Весселя" и "Гауссова плоскость" стали входить в обиход. Представители различных наций склонялись к использованию различных способов выражения.

Завершающий шаг предпринял Гамильтон. В 1837 году, почти через триста лет после того, как из формул Кардано стала видна возможная польза от мнимых чисел, Гамильтон устранил геометрический элемент и свел комплексные числа к чистой алгебре. Его идея была проста; она неявно следовала из предложения Валлиса и в эквивалентной форме содержалась у Весселя, Аргана и Гаусса. Но никто из них не сделал ее явной.

Алгебраически, утверждал Гамильтон, точку на плоскости можно отождествить с парой вещественных чисел — ее координатами (x, y). Если посмотреть на диаграмму Валлиса (или Весселя, или Аргана, или Гаусса), то станет ясно, что x есть вещественная часть числа, а y — его мнимая часть. Комплексное число $x + iy$ "на самом деле" есть лишь пара (x, y) вещественных чисел. Мож-

но даже выписать правила для сложения и умножения таких пар, причем основной шаг состоит в наблюдении, что поскольку число i соответствует паре (0, 1), произведение (0, 1) × (0, 1) должно равняться (–1, 0). По данному вопросу Гаусс также сообщает в письме к венгерскому геометру Вольфгангу Бойяи, что в точности та же мысль пришла ему в голову в 1831 году. Лис снова замел свои следы — причем опять никто ничего не заметил.

Задача решена. Комплексное число — это в точности пара вещественных чисел, оперировать которыми надо согласно списку простых правил. Поскольку пара вещественных чисел уже заведомо столь же "вещественна", сколь и одно вещественное число, вещественные и комплексные числа равным образом связаны с реальностью, а название "мнимые" только сбивает с толку.

Сегодняшние взгляды несколько отличаются от этого: сбивает с толку слово "вещественный". Как вещественные, так и мнимые числа равным образом представляют собой продукт человеческого воображения.

Реакцией на данное Гамильтоном решение задачи, стоявшей до этого в течение трех сотен лет, была полная тишина. Коль скоро математики уже включили понятие комплексных чисел в мощную последовательную теорию, страхи касательно существования комплексных чисел потеряли актуальность. Тем не менее использование пар чисел, как предлагал Гамильтон, оказалось очень важным. Хотя вопросу о комплексных числах перестал сопутствовать ажиотаж, идея о построении новых числовых систем из старых укоренилась в математическом сознании.

Комплексные числа оказались полезны не только в алгебре и основах анализа. Они позволили сформулировать мощный метод решения задач о потоке жидкости или тепла, о гравитации и звуке — почти в каждой области математической физики. Но у них было одно существенное ограничение: с их помощью

эти задачи решались в двумерном пространстве, тогда как мы живем в трехмерном. Некоторые задачи, такие как задача о движениях мембраны барабана или о течении тонкого слоя жидкости, можно свести к размерности два, что совсем не так уж плохо. Но математиков все больше раздражало, что их методы, основанные на комплексных числах, не удавалось распространить с плоскости на трехмерное пространство.

Могли ли существовать еще не открытые расширения числовой системы на трехмерное пространство? Данная Гамильтоном формализация комплексных чисел как пары вещественных подсказывала подход к этой проблеме: постараться организовать числовую систему, основанную на *тройках* чисел (x, y, z). Проблема состояла в том, что до тех пор никто не работал с алгеброй, образованной тройками чисел. Гамильтон решил попробовать.

Сложение троек не составляло проблемы: подсказка со стороны комплексных чисел состоит в том, что надо просто складывать соответствующие координаты. Такого типа арифметика, ныне известная как векторное сложение, подчиняется весьма симпатичным правилам, и имеется только один разумный способ ее реализации.

Настоящей проблемой было умножение. Уже для комплексных чисел умножение устроено вовсе не как сложение: пары вещественных чисел *не* умножаются друг на друга путем раздельного перемножения первых и вторых компонент. Если вы все же захотите определить умножение таким образом, то произойдет масса неприятных вещей — но, главное, две фатальных неприятности.

Первая состоит в том, что больше не будет квадратного корня из минус единицы.

Вторая же состоит в том, что можно будет взять умножение ненулевых чисел и получить нуль. Такие "делители нуля" превращают в ад все обычные алгебраические методы, например методы решения уравнений.

Для комплексных чисел подобные неприятности преодолеваются за счет выбора менее очевидного правила умножения в соответствии с рецептом Гамильтона. Но когда он попытался сделать нечто подобное для троек чисел, он испытал страшное потрясение. Несмотря на все свои усилия, он не мог избежать некоторых фатальных дефектов. Получить квадратный корень из минус единицы удавалось, но только ценой появления делителей нуля. Избавиться от делителей нуля представлялось решительно невозможным, что бы он ни делал.

Если вам кажется, что все это звучит несколько в духе попыток решить уравнение пятой степени, то кое-что вы ухватили правильно. Когда многие способные математики пытаются сделать нечто, но терпят неудачу, вполне может оказаться, что задача не имеет решения. Если и есть что-то главное, чему научила нас математика, то это факт, что многие задачи не имеют решений. Нельзя найти дробь, квадрат которой равен 2. Нельзя разделить угол на три части, используя циркуль и линейку. Нельзя решить уравнение пятой степени в радикалах. Математика имеет свои пределы. Быть может, невозможно построить трехмерную алгебру, обладающую всеми хорошими свойствами, которых мы от нее хотим.

Если вы всерьез задумали разобраться, действительно ли дело обстоит таким образом, перед вами открывается программа исследований. Сначала надо указать свойства, которыми ваша трехмерная алгебра должна обладать. Потом следует проанализировать следствия этих свойств. Если из этого извлечь достаточное количество информации, то можно искать некие свойства, которые должна иметь данная алгебра, если она действительно существует, и причины, по которым она может не существовать.

Так, по крайней мере, обстояло бы дело в наши дни. Подход Гамильтона был не столь систематическим. Он молчаливо пред-

полагал, что его алгебра должна иметь "все" разумные свойства, а потом внезапно понял, что с одним из них, возможно, придется расстаться. Более важно то, что он осознал, что алгебры размерности три в колоде нет. Самое близкое, что получалось, — это четыре. Четверки, а не тройки чисел.

Добавим еще два слова по поводу этих ускользающих алгебраических правил. Когда математики выполняют алгебраические вычисления, они организуют свои символы систематическим образом. Вспомним, что исходное арабское название "аль-джабр" означает "восстановление" — действие, про которое теперь мы сказали бы "перенесите слагаемое в другую часть уравнения с другим знаком". Лишь в течение последних 150 лет математики озаботились составлением явных списков правил, стоящих за всякими подобными действиями, — списков, из которых все остальные хорошо известные правила получаются как логические следствия. Такой аксиоматический подход играет для алгебры роль, подобную той, которую Эвклид сыграл для геометрии, и математикам понадобилось всего две тысячи лет, чтобы овладеть этой идеей.

Чтобы было понятно, о чем мы говорим, можно сфокусироваться на трех из этих правил, которые все связаны с умножением. (Со сложением дело обстоит похожим образом, но проще; умножение — это как раз то место, где все начинает идти наперекосяк.) Дети, изучающие таблицу умножения, в конце концов замечают возможность сэкономить половину усилий. Не только трижды четыре дает двенадцать, но и четырежды три тоже. Если перемножить два числа, то результат не меняется от того, какое из чисел было взято первым. Этот факт называется законом коммутативности, и в символьной форме он говорит нам, что $ab = ba$ для любых чисел a и b. Это правило выполнено также в расширенной системе комплексных чисел. Это можно доказать, рассматривая формулы Гамильтона для умножения пар.

Тонким законом является закон ассоциативности, который гласит, что при перемножении трех чисел в одном и том же порядке не имеет значения, с какого умножения начать. Допустим, нам надо перемножить $2 \times 3 \times 5$; можно начать с умножения 2×3, что дает 6, а далее умножить 6 на 5. Альтернативным образом можно сначала перемножить 3×5, что есть 15, а далее умножить 2 на 15. Оба способа действий приводят к одному и тому же результату — числу 30. Закон ассоциативности утверждает, что так происходит всегда; в символьной форме он говорит нам, что $(ab)c = a(bc)$, где скобки показывают очередность, в которой надо выполнять умножение. Это свойство снова выполнено и для вещественных, и для комплексных чисел, и доказать это можно, используя формулы Гамильтона.

Последнее, очень полезное правило — назовем его законом деления, хотя в учебниках вы найдете его под именем "существование мультипликативного обратного" — утверждает, что всегда можно поделить любое число на любое ненулевое число. Имеются веские основания для запрета деления на нуль; основная причина состоит в том, что это действие редко бывает осмысленным.

Мы уже видели, что можно соорудить алгебру троек чисел, используя "очевидное" умножение. Эта система удовлетворяет законам коммутативности и ассоциативности. Но не закону деления.

Великий взлет мысли Гамильтона, произошедший после долгих часов бесплодных поисков и вычислений, привел к следующему осознанию: можно образовать новую числовую систему, в которой и закон ассоциативности, и закон деления выполнены, но необходимо пожертвовать законом коммутативности. Но даже тогда подобное нельзя сделать с тройками вещественных чисел. Надо использовать четверки. Нет "разумной" трехмерной алгебры, но имеется довольно приемлемая четырехмерная. Это единственная алгебра такого типа, и до идеала ей не хватает только одного — закона коммутативности.

Важно ли это? Ход мыслей Гамильтона был надолго заблокирован твердым убеждением в необходимости закона коммутативности. Все изменилось в одно мгновение, когда, чем-то внезапно вдохновленный, он понял, как перемножать четверки чисел. На календаре было 16 октября 1843 года. Гамильтон шел с женой по тропинке вдоль Королевского Канала, направляясь на собрание престижной Королевской Ирландской академии в Дублине. Его бессознательное, должно быть, кружило вокруг задачи о трехмерной алгебре, потому что внезапно его пронзило озарение. "Там и тогда я почувствовал гальванизирующий ток от приближающейся мысли, — писал он позднее в письме, — и искры, произведенные им, представляли собой *фундаментальные уравнения между i, j, k, причем в точности такие*, какие я с той поры всегда и использую".

Гамильтон находился под таким впечатлением, что немедленно нацарапал формулы на каменной кладке моста Брумбридж. Мост сохранился до наших дней, но нацарапанное на нем — нет, хотя там и имеется памятная доска[1]. Формулы

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

также пережили своего создателя.

1 На массивной каменной основе моста, со стороны, обращенной к каналу, укреплена каменная плита со словами:
"Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowen Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ij\,k = -1$
& Cut It On A Stone Of This Bridge"

Последняя строка читается не без некоторого труда из-за сколов на камне. Кладка моста весьма грубая, так что называть вандалом того, кто нацарапал на ней нечто осмысленное, можно лишь с довольно большой натяжкой. (*Примеч. перев.*)

Это очень симпатичные формулы, обладающие высокой симметрией. Но читателю, должно быть, не терпится спросить — при чем же здесь *четверки* чисел?

Комплексные числа можно записать как пары (x, y), хотя обычно их записывают в виде $x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$. В том же духе числа, о которых говорил Гамильтон, можно записывать или в виде четверок (x, y, z, w), или как комбинацию $x + iy + jz + kw$. Формулы Гамильтона относятся ко второму способу обозначений; если же у вас формальное умонастроение, то вы, возможно, этой записи предпочтете представление в виде четверок чисел.

Гамильтон назвал свои новые числа кватернионами. Он доказал, что они подчиняются закону ассоциативности и — замечательным, как стало ясно позднее, образом — закону деления. Но не закону коммутативности. Из правил умножения кватернионов следует, что $ij = k$, но $ji = -k$.

Система кватернионов содержит экземпляр комплексных чисел — кватернионы вида $x + iy$. Из формул Гамильтона видно, что -1 имеет не просто два квадратных корня i и $-i$, а кроме того, еще и j, $-j$, k и $-k$. На самом деле в кватернионной системе имеется бесконечно много различных квадратных корней из минус единицы.

Таким образом, вместе с потерей закона коммутативности мы также потеряли правило, что квадратное уравнение имеет два решения. По счастью, ко времени изобретения кватернионов основное внимание в алгебре сместилось в сторону от решения уравнений. Преимущества кватернионов существенно перевесили их недостатки. К ним просто требовалось привыкнуть.

В 1845 году Томас Дизни заехал к Гамильтону вместе со своей дочерью Кэтрин — юношеским увлечением Уильяма. К тому моменту она успела потерять первого мужа и выйти замуж вто-

рично. Встреча разбередила старую рану, и зависимость Гамильтона от алкоголя сделалась более серьезной. Один раз он напился и выставил себя таким полным дураком на научном обеде в Дублине, что после этого зарекся пить и в течение последующих двух лет пил только воду. Однако когда астроном Джордж Эйри начал посмеиваться по поводу его воздержания, Гамильтон принялся в ответ поглощать алкоголь в усиленных количествах. С того времени он стал хроническим алкоголиком.

Два его дяди скончались, а друг и коллега совершил самоубийство; затем Кэтрин принялась писать ему письма, что только усугубило его депрессию. Она быстро поняла, что ее действия не подобают респектабельной замужней женщине, и вяло попыталась покончить с собой, а затем разъехалась с мужем и перебралась к матери.

Гамильтон продолжал отправлять Кэтрин письма через ее родственников. В 1853 году она решила возобновить общение, послав ему небольшой подарок. Ответный шаг Гамильтона состоял в том, что он отправился к ней с визитом, захватив экземпляр своей книги о кватернионах. Две недели спустя она умерла. Гамильтон был убит горем. Его жизнь становилась все более и более беспорядочной; после его смерти, последовавшей в 1865 году (как полагали, от подагры, которой часто страдают тяжелые пьяницы), его математические статьи были найдены вперемешку с мусором и объедками.

Гамильтон был убежден в том, что кватернионы — это Святой Грааль алгебры и физики, истинное обобщение комплексных чисел на высшие размерности, а также ключ к геометрии и физике в пространстве. Разумеется, пространство имеет размерность три, тогда как кватернионы — четыре, но Гамильтон обратил внимание на естественную подсистему размерности три.

Это "мнимые" кватернионы вида $bi + cj + dk$. Геометрически символы i, j, k можно интерпретировать как вращения вокруг трех взаимно перпендикулярных пространственных осей, хотя и здесь есть тонкости: дело в том, что при этом приходится работать в такой геометрии, где полная окружность содержит 720°, а не 360°. Если оставить в стороне этот выверт, можно понять, почему Гамильтон считал кватернионы полезными для геометрии и физики.

Оставшиеся "вещественные" кватернионы вели себя в точности как вещественные числа. Их нельзя было выкинуть вовсе, потому что они имеют тенденцию возникать всякий раз, когда с кватернионами выполняются какие-либо алгебраические вычисления, даже если начать с мнимых кватернионов[1]. Если бы было возможным оставаться исключительно в области мнимых кватернионов, то существовала бы разумная трехмерная алгебра, и первоначальная задача Гамильтона увенчалась бы успехом. Четырехмерная система кватернионов была лучшей из возможных, а естественная трехмерная система, весьма аккуратно в них вложенная, вполне заменяла ту несуществующую чисто трехмерную алгебру.

Гамильтон посвятил остаток жизни кватернионам, развивая их математику и разрабатывая их приложения к физике. Несколько посвященных последователей воздавали хвалы. Они основали школу кватернионистов, а после смерти Гамильтона бразды правления перешли к Питеру Тейту в Эдинбурге и Бенджамину Пирсу в Гарварде.

Другие, однако, недолюбливали кватернионы — частью из-за их искусственности, но главным образом потому, что, по их мнению, нашли нечто получше. Наиболее значительными представителями лагеря несогласных были Герман Грассман из Пруссии и американец Джозайа Уиллард Гиббс, ны-

1 В самом деле, об этом ясно говорят формулы на стр. 237. *(Примеч. перев.)*

не общепризнанные создатели "векторной алгебры". Оба они изобрели полезные типы алгебр в любом числе измерений. В их работах не было ограничений типа четырехмерности или же трехмерности подмножества мнимых кватернионов. Алгебраические свойства этих векторных систем были не столь изящны, как у Гамильтоновых кватернионов. Например, нельзя было делить один вектор на другой. Но Грассман и Гиббс отдавали предпочтение общим работоспособным концепциям, даже если в них отсутствовали некоторые из обычных свойств чисел. Пусть нельзя разделить один вектор на другой, ну и что?

Гамильтон же, сходя в могилу, верил, что кватернионы составляли его самый главный вклад в естественные науки и математику. На протяжении следующей сотни лет мало кто, за исключением Тейта и Пирса, с ним бы согласился, и кватернионы оставались позабытой тихой заводью викторианской алгебры. Если вам требовался пример бесплодной самодовлеющей математики, то кватернионы были пропуском в этот клуб. Даже в университетских курсах чистой математики кватернионы никогда не появлялись; их даже не показывали в качестве курьеза. Согласно Беллу, "глубочайшей трагедией Гамильтона были не алкоголь и не неудачный брак, а его упрямая вера в то, что кватернионы содержат в себе ключ к математике и физике вселенной. История показала, что Гамильтон трагически обманывал себя, когда продолжал утверждать: "Я по-прежнему определенно заявляю, что это открытие представляется мне настолько же важным для середины девятнадцатого столетия, насколько открытие флюксонов было важным для семнадцатого столетия". Никогда еще великий математик столь отчаянно не ошибался".

В самом деле?

Кватернионы, быть может, развивались не вполне тем способом, какой предначертал Гамильтон, но их значимость растет

с каждым годом. Они стали абсолютно фундаментальными для математики, и мы также увидим, что кватернионы и их обобщения играют фундаментальную роль и в физике. Одержимость Гамильтона открыла широкую дорогу современной алгебре и математической физике.

Никогда еще квазиисторик столь отчаянно не ошибался.

Гамильтон, возможно, преувеличивал практическую роль кватернионов и выжимал из них фокусы, к которым они в действительности были малопригодны, но его вера в их важность начинает получать серьезные подтверждения. Кватернионы возымели странную привычку возникать в таких местах, где их появление менее всего ожидается. Одна из причин состоит в их единственности. Их можно охарактеризовать несколькими разумными и относительно простыми свойствами — некоторой выборкой из "законов арифметики", опустив всего один важный закон, — и они составляют единственную математическую систему, обладающую этим списком свойств.

Это утверждение требует пояснений.

Единственная числовая система, с которой знакома большая часть населения нашей планеты, — это вещественные числа. Их можно складывать, вычитать, умножать и делить, причем результат всегда будет вещественным числом. Разумеется, деление на нуль не допускается, но помимо этого необходимого ограничения можно применять весь набор арифметических операций, никогда при этом не покидая систему вещественных чисел.

Математики называют такую систему *полем*. Имеется много других полей, таких как поле рациональных чисел и поле комплексных чисел, но поле вещественных чисел является специальным. Это единственное поле с еще двумя свойствами: оно упорядочено и полно.

"Упорядочение" означает, что числа выстраиваются в соответствии с линейным порядком. Вещественные числа расположены вдоль прямой линии — отрицательные слева, а положительные справа. Имеются и другие упорядоченные поля, например поле рациональных чисел, но в отличие от других упорядоченных полей вещественное поле является также полным. Это дополнительное свойство (полная формулировка которого носит довольно технический характер) ответственно за существование таких чисел, как $\sqrt{2}$ и π. По сути свойство полноты говорит нам, что бесконечные десятичные дроби имеют смысл.

Можно доказать, что вещественные числа составляют единственное полное упорядоченное поле. Этим и определяется их центральная роль в математике. Они дают единственный контекст, в котором можно выполнять арифметические операции, сравнение "больше чем", а также основные операции анализа.

Комплексные числа представляют собой расширение вещественных за счет включения чисел нового типа — квадратного корня из минус единицы. Но цена за возможность извлекать квадратные корни из отрицательных чисел состоит в потере упорядочения. Комплексные числа являются полной системой, но они заселяют плоскость, а не выстраиваются в единую упорядоченную последовательность.

Плоскость двумерна, а 2 — конечное целое число. Комплексные числа — это единственное поле, которое содержит вещественные числа и имеет конечную размерность (и которое при этом отлично от самих вещественных чисел, имеющих размерность единица). Это говорит о том, что и комплексные числа тоже единственны. Для многих важных целей комплексные числа оказываются единственным средством, которое позволяет добиться желаемого. Их единственность делает их незаменимыми.

Кватернионы возникают при попытке расширить комплексные числа за счет увеличения размерности (оставляя ее, тем не менее, конечной) с сохранением при этом максимально возможного числа законов алгебры. Законы, которые мы хотим оставить, — это обычные свойства сложения и вычитания, большая часть свойств умножения и возможность деления на все, кроме нуля. На этот раз жертву приходится приносить более серьезную; это-то и доставило Гамильтону столько терзаний. Надо выкинуть закон коммутативности умножения. Этот брутальный факт надо просто принять — и двигаться дальше. Когда вы к нему привыкнете, вы зададитесь вопросом, а почему вообще вы ожидали, что закон коммутативности будет выполнен во всех случаях, а одновременно начнете воспринимать тот факт, что он выполнен для комплексных чисел, как небольшое чудо.

Любая система с таким набором свойств, неважно, коммутативная или нет, называется *алгеброй с делением*.

Вещественные числа и комплексные числа — тоже алгебры с делением, потому что мы не настаиваем на отказе от коммутативности умножения, мы просто не требуем выполнения этого свойства. Каждое поле является алгеброй с делением. Но некоторые алгебры с делением не являются полями, и первыми из таких объектов были открыты кватернионы. В 1898 году Адольф Гурвиц доказал, что система кватернионов также единственна. Кватернионы являются единственной конечномерной алгеброй с делением, которая содержит вещественные числа и не совпадает с вещественными или комплексными числами.

Здесь просматривается любопытная закономерность. Размерности вещественных чисел, комплексных чисел и кватернионов равны 1, 2 и 4. Это подозрительно похоже на начало последовательности степеней двойки. Естественным продолжением были бы 8, 16, 32 и т. д.

Имеются ли интересные алгебраические системы в этих размерностях?

И да и нет. Но нам придется немного подождать, чтобы узнать почему, поскольку история симметрии вступает здесь в новую фазу: связь с дифференциальными уравнениями, представляющими собой наиболее широко используемую модель физического мира, и язык, на котором сформулировано большинство физических законов природы.

И снова наиболее глубокие аспекты теории сводятся к симметрии, правда, с новым поворотом сюжета. Теперь группы симметрии будут не конечными, а "непрерывными". Математике предстояло обогатиться одной из наиболее влиятельных программ исследований из всех когда-либо предпринятых.

Глава 10
Несостоявшийся солдат и хилый книжный червь

Мариус Софус Ли занялся наукой только потому, что из-за плохого зрения был не годен ни к одной из военных профессий. Когда в 1865 году Софус (имя, под которым он обрел известность) закончил университет Христиании, он имел в своем багаже несколько математических курсов, включая и курс по теории Галуа, читавшийся норвежским математиком Людвигом Силовом, однако Софус не выказывал каких-либо особых способностей в этом предмете. В течение некоторого времени он колебался, осознавая свое стремление к академической карьере, но колеблясь, к какой из областей науки себя применить — к ботанике, зоологии, или, быть может, астрономии.

Записи в университетской библиотеке показывают, что он начал брать все больше и больше книг по математике. А в 1867 году посреди ночи его посетило видение дела всей его жизни. Друг Софуса Эрнст Мотцфелд был немало удивлен, когда посреди ночи его разбудил возбужденный Ли, кричавший: "Я понял! Это совсем просто!" А понял он, как по-новому смотреть на геометрию.

Ли взялся за изучение работ великих геометров, таких как немец Юлиус Плюккер и француз Жан-Виктор Понселе. От Плюккера он перенял идею геометрий, основанных не на хорошо всем знакомых точках, как у Эвклида, а на других объектах — линиях, плоскостях, окружностях. В 1869 году он на собственные средства опубликовал статью, кратко излагающую его основную идею. Подобно своим предшественникам Галуа и Абелю, он обнаружил, что его идеи слишком революционны для старой гвардии, так что обычные журналы не желали публиковать его исследования. Но Эрнст отказал своему другу в праве на уныние и поощрял его продолжать работы по геометрии. В конце концов одна из статей Ли была опубликована в престижном журнале и получила благосклонный прием.

Это принесло Ли стипендию. Теперь у него были деньги, чтобы путешествовать, посещать ведущих математиков и обсуждать с ними свои идеи. Он отправился туда, где взращивался весь цвет прусской и немецкой математики, — в Геттинген и Берлин, где беседовал с алгебраистами Леопольдом Кронеккером и Эрнстом Куммером и аналитиком Карлом Вейерштрассом. На него произвел большое впечатление подход Куммера к математике и несколько меньшее — подход Вейерштрасса.

Наиболее важная встреча, однако, состоялась в Берлине — с Феликсом Клейном, который, так случилось, учился ранее у Плюккера, которым Ли глубоко восхищался и которому стремился подражать. У Ли и Клейна было очень схожее математическое образование, но совершенно разные вкусы. Клейн, по существу, алгебраист с геометрическим уклоном, обожал работать над специальными проблемами, обладающими внутренней красотой; Ли же был аналитиком, которому импонировал широкий охват общих теорий. По иронии судьбы именно общие теории Ли дали математике некоторые из наиболее важных специальных структур, которые и были, и до сих пор остаются изумительно красивыми, необычайно глубокими и по

большей части алгебраическими. Открытие этих структур могло бы вообще не состояться, если бы не стремление Ли к общности. Если вы пытаетесь понять все возможные математические объекты некоторого типа и если вам это удалось, то вы неизбежно найдете среди них много объектов с необычными свойствами.

В 1870 году Ли и Клейн снова встретились в Париже. Именно там Жордан обратил Ли в дело теории групп. В то время росло осознание, что геометрия и теория групп выражают две стороны одной медали, но законченное оформление этих мыслей требовало времени. Ли и Клейн написали несколько совместных работ, пытаясь сделать связь между группами и геометрией более явной. В конце концов мысли Клейна кристаллизовались в его "эрлангенской программе" 1872 года, согласно которой геометрия и теория групп тождественны друг другу.

На современном языке эта идея звучит столь просто, что, казалось бы, она должна была всегда представляться совершенно очевидной. Группа, отвечающая любой заданной геометрии, — это группа симметрий данной геометрии. Наоборот, геометрия, соответствующая какой-либо группе, доставляется любым объектом, группой симметрии *которого* является данная группа. Другими словами, геометрия определяется тем, что остается инвариантным под действием группы.

Например, симметрии эвклидовой геометрии — это те преобразования плоскости, которые сохраняют длины, углы, линии и окружности. Они составляют группу всех движений плоскости без деформаций. Наоборот, что-нибудь, инвариантное относительно таких движений, естественно попадает в сферу действия эвклидовой геометрии. Неэвклидовы геометрии просто используют иные группы преобразований.

Зачем же тогда трудиться, чтобы конвертировать геометрию в теорию групп? Дело в том, что это дает два разных спосо-

ба думать о геометрии, а также два разных способа думать о группах. Иногда вещи легче понять одним способом, иногда другим. Две точки зрения лучше одной.

Отношения между Францией и Пруссией быстро ухудшались. Император Наполеон III рассчитывал поддержать свою падающую популярность, начав войну с Пруссией. Бисмарк отправил французам телеграмму провокационного содержания, и 19 июля 1870 года была объявлена Франко-Прусская война. Клейн — пруссак в Париже — счел за лучшее вернуться в Берлин.

Однако Ли был норвежцем и очень ценил свое пребывание в Париже, поэтому решил там остаться. Потом, правда, осознав, что Франция проигрывает войну и немецкая армия движется на Метц, он передумал: хотя он и был гражданином нейтральной страны, оставаться в потенциальной зоне боевых действий было небезопасно.

Ли решил отправиться в путешествие пешком и направил свои стопы в Италию. Ушел он, однако, недалеко; французские власти схватили его у Фонтенбло, примерно в 25 милях к юго-востоку от Парижа; при нем находилось некоторое количество документов, испещренных нечитабельными символами. Поскольку они, очевидно, представляли собой шифр и было совершенно ясно, что Ли шпионил в пользу немцев, его поместили под арест. Потребовалось вмешательство ведущего французского математика Гастона Дарбу, чтобы убедить власти в математическом содержании записок. Ли был отпущен из тюрьмы, французская армия сдалась, немцы начали осаду Парижа, а Ли снова отправился в Италию — на этот раз успешно. Оттуда он вернулся в Норвегию. По пути он случайно повстречался с Клейном, отсиживавшимся в Берлине.

В 1872 году Ли защитил диссертацию. Норвежская академическая среда была настолько потрясена его работами, что университет Христиании в том же году специально для него создал новую должность. Со своим бывшим учителем Людвигом Силовом они взялись за издание собрания сочинений Абеля. В 1874 году Ли женился на Анне Бирх; всего у них было трое детей.

Теперь Ли сосредоточился на конкретной задаче, представлявшейся ему заслуживающей внимания. В математике имеется много видов уравнений но особенно важны два. Первый — это алгебраические уравнения типа тех, что так эффективно изучали Абель и Галуа. Второй вид — это дифференциальные уравнения, введенные Ньютоном в его работе о законах природы. Такие уравнения включают в себя концепции из анализа и оперируют не самими физическими величинами, а тем, как эти величины изменяются с течением времени. Более точно — они задают скорость изменения величин. Например, наиболее важный закон движения Ньютона гласит, что ускорение тела пропорционально полной силе, действующей на него. Ускорение есть скорость изменения скорости. Вместо того чтобы непосредственно сообщить нам, какова скорость тела, закон говорит, какова скорость изменения скорости. Аналогичным образом другое уравнение, выведенное Ньютоном для объяснения того, как изменяется температура тела при остывании, говорит, что скорость изменения температуры пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды.

Наиболее важные уравнения в физике — те, что имеют дело с потоками жидкости, действием гравитации, движением планет, переносом тепла, распространением волн, действием магнетизма, распространением света и звука — это дифференциальные уравнения. Как впервые понял Ньютон, закономерности природы, как правило, принимают более

простой вид и их легче сформулировать, если смотреть на скорости изменения величин, а не на сами интересующие нас величины[1].

Ли задал себе фундаментальный вопрос. Имеется ли для дифференциальных уравнений теория, аналогичная теории Галуа для алгебраических уравнений? Есть ли способ установить, когда дифференциальное уравнение можно решить заданными методами?

Ключевую роль здесь снова сыграла симметрия. Ли осознал, что некоторые из его результатов по геометрии можно было реинтерпретировать в терминах дифференциальных уравнений. К заданному решению конкретного дифференциального уравнения Ли мог применить преобразование (из конкретной группы) и доказать, что результат также является решением. Из одного решения получается много, причем все они связаны группой. Другими словами, группа состоит из симметрий данного дифференциального уравнения.

Здесь содержался прозрачный намек, что нечто прекрасное ожидало своего открытия. Вспомним о применениях симметрий, которые Галуа реализовал для алгебраических уравнений! А теперь представим себе нечто подобное для куда более важного класса дифференциальных уравнений!

Все группы, которые изучал Галуа, были конечными. Это значит, что число преобразований из группы — некоторое целое число[2]. Группа всех перестановок на пяти корнях уравнения пятой степени, например, содержит 120 элементов. Однако

[1] Дифференциальные *уравнения* — это выражение того, как связаны эти скорости изменения с разнообразными действующими факторами. *Решение* же дифференциального уравнения как раз должно восстановить отсюда (и из начальных условий) поведение самой величины. *(Примеч. перев.)*

[2] "Положительное целое", — не удержится и уточнит математик. *(Примеч. перев.)*

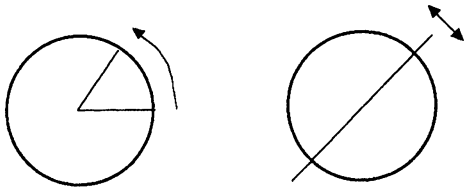
многие разумные группы бесконечны, и среди них — группы симметрий дифференциальных уравнений.

Одна распространенная бесконечная группа представляет собой группу симметрии окружности; она содержит преобразования, которые поворачивают окружность на любой — какой угодно — угол. Поскольку имеется бесконечно много возможных углов, группа вращений окружности бесконечна. Обозначение для этой группы — SO(2). Здесь O означает "ортогональный" — это указывает, что преобразования являются движениями плоскости без деформаций, а S означает "специальный" и указывает на вращения, которые не переворачивают плоскость.

Окружности имеют, кроме того, бесконечно много осей отражательной симметрии. Если отразить окружность относительно любого диаметра, то получится та же самая окружность. Добавление отражений приводит к большей группе O(2).

Группы SO(2) и O(2) бесконечны, но это некоторый ручной вид бесконечности. Различные вращения можно задавать, указывая одно число — угол вращения. Когда два вращения выполняются одно за другим, соответствующие углы просто складываются. Ли назвал поведение такого типа "непрерывным", и в его терминологии SO(2) — непрерывная группа. А из-за того, что для указания угла требуется только одно число, группа SO(2) одномерна. То же имеет место и для O(2), поэтому все, что нам требуется, — это некоторый способ отличать отражения от вращений, а с этой задачей в алгебре справляются знаки плюс и минус.

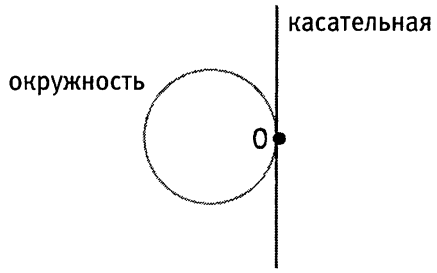
Группа SO(2) представляет собой простейший пример *группы Ли*. Группа Ли соединяет в себе структуры двух типов: это и группа, и одновременно многообразие — некоторое многомерное пространство. В случае SO(2) многообразием является окружность, а групповая операция на двух точках окружности сводится к сложению соответствующих углов.



Окружность обладает бесконечным числом вращательных симметрий (слева) и бесконечным числом отражательных симметрий (справа).

Ли открыл прекрасное свойство групп Ли: групповую структуру можно "линеаризовать". Это означает, что лежащее в основе группы искривленное многообразие можно заменить плоским эвклидовым пространством. Это касательное к многообразию пространство. Как это выглядит для SO(2), показано на рисунке.

Когда групповая структура линеаризована подобным образом, на касательном пространстве возникает своя собственная алгебраическая структура, которая представляет собой некую "инфинитезимальную" версию групповой структуры и описывает, как ведут себя преобразования, очень близкие к тождественному. То, что получается, называется алгеброй Ли данной группы. У нее такая же размерность, как и у группы, но ее геометрия значительно упрощается, становясь плоской.



От группы Ли к алгебре Ли: касательное пространство к окружности.

Разумеется, за эту простоту приходится кое-чем заплатить: алгебра Ли ухватывает многие важные свойства соответствующей группы, но некоторые тонкие детали ускользают. А те свойства, которые не теряются, подвергаются тонким изменениям. Тем не менее массу всего о группе Ли можно узнать, переходя к ее алгебре Ли, и на бóльшую часть вопросов легче ответить в формализме алгебр Ли.

Оказывается — и в этом и состояло одно из великих усмотрений, сделанных Ли, — что естественная алгебраическая операция на алгебре Ли дается не произведением AB, а разностью $AB - BA$, называемой коммутатором. Для таких групп, как SO(2), где $AB = BA$, коммутатор равен нулю. Но для таких групп, как SO(3) — группы вращений в трехмерном пространстве, — выражение $AB - BA$ не равняется нулю, за исключением того случая, когда A и B или совпадают, или являются вращениями на прямой угол[1]. Таким образом, геометрия групп проявляет себя в поведении коммутаторов.

В начале 1900-х годов, с рождением теории "дифференциальных полей", была наконец реализована мечта Ли о некоей "теории Галуа" дифференциальных уравнений. Но теория групп Ли оказалась намного более важной, чем ожидал он сам, и у нее возникли более широкие приложения. Теория групп Ли и алгебр Ли оказалась не просто средством для выяснения вопроса о том, какие дифференциальные уравнения можно решить конкретными способами, — она проникла практически во все области математики. Теория Ли вырвалась из-под власти своего создателя и стала могущественней, чем он мог вообразить.

При взгляде из дня сегодняшнего видно, что все дело в симметрии. Симметрия глубоко встроена в каждую область мате-

1 И, конечно, того случая, когда A и B суть вращения вокруг одной и той же оси (т. е. *в одной и той же плоскости*); для них коммутатор равен нулю точно так же, как коммутатор в группе SO(2). *(Примеч. перев.)*

матики, и на ней базируется большинство основных идей математической физики. Симметрии выражают фундаментальную регулярность нашего мира, а это то, что двигает вперед физику. Непрерывные симметрии, такие как вращения, тесно связаны с природой пространства, времени и материи; из них вытекают различные законы сохранения, такие как закон сохранения энергии, который утверждает, что замкнутая система не может ни потерять, ни приобрести энергию. Эта связь была разработана Эмми Нетер, ученицей Гильберта[1].

Следующий шаг, разумеется, должен был состоять в том, чтобы разобраться с возможными группами Ли, подобно тому как Галуа и его последователи навели порядок со многими свойствами конечных групп. Здесь к охоте присоединяется второй математик.

Анна Катарина переживала за своего сына.
Врач считал, что маленький Вильгельм "сильно ослаблен и, кроме того, очень застенчив", "постоянно возбужден", но при этом он "совершенно непрактичный книжный червь". Здоровье Вильгельма улучшалось по мере взросления, но склонность быть книжным червем не убывала. Накануне своего 39-летия он опубликовал математическое исследование, обоснованные отзывы о котором говорят, что это "величайшая математическая работа всех времен". Такие утверждения, конечно, субъективны, однако работа, без сомнения, достойна высочайшего места во всяком подобном списке.

Вильгельм Карл Йозеф Киллинг был сыном Йозефа Киллинга и Анны Катарины Кортенбах. У него были брат Карл и сестра

[1] Пауля Гордана. Гильберт, впрочем, оказал значительное влияние на Нетер — уже сформировавшегося математика, — когда та в 1916 году переехала в Геттинген. *(Примеч. перев.)*

Хедвиг. Йозеф-старший был служащим в юридической конторе, а Анна — дочерью аптекаря. Обвенчались они в Бурбахе, в восточной части центральной Германии, и вскорости переехали в Медебах, где Йозеф-старший стал мэром. После этого он стал мэром Винтенберга, а еще позднее — мэром Рутена.

Семейство было хорошо обеспечено и могло позволить себе нанять частного преподавателя для подготовки Вильгельма к гимназии. Родители выбрали для сына гимназию в Брилоне, в 50 милях от Дортмунда. В школе Вильгельму нравилось заниматься классическими языками — латынью, древнееврейским, греческим. Учитель по фамилии Харнишмахер познакомил его с математикой; Вильгельм проявил большие способности к геометрии и решил стать математиком. Он поступил в то, что теперь носит имя Вестфальский Университет Вильгельма в Мюнстере, а тогда называлось просто Королевской Академией[1]. В Академии не преподавали продвинутую математику, так что Киллинг учился сам. Он прочел геометрические работы Плюккера и попытался самостоятельно вывести некоторые новые теоремы. Кроме того, он читал *Disquisitiones Arithmeticae* Гаусса.

После двух курсов Королевский Академии он переехал в Берлин, где уровень математического образования был намного выше. Там на него повлияли Вейерштрасс, Куммер, а также Герман фон Гельмгольц — математический физик, прояснивший связь между сохранением энергии и симметрией. Киллинг защитил диссертацию по геометрии поверхностей, основываясь на некоторых идеях Вейерштрасса, и начал преподавать математику и физику, а заодно понемногу греческий и латынь.

1 Университет в Мюнстере стал в 1805 году Прусским университетом Вестфалии; *с 1907 года* он называется Westfälische Wilhelms-Universität по имени кайзера Вильгельма II. *(Примеч. перев.)*

В 1875 году он женился на дочери преподавателя музыки Анне Коммер. Первые двое их детей — оба мальчики — умерли в младенчестве; следующие двое — дочери Мария и Анка — росли и благоденствовали. Позднее Киллинг стал отцом еще двух сыновей.

К 1878 году он вернулся в свою старую школу, но на этот раз в качестве учителя. У него была большая нагрузка — около 36 учебных часов в неделю, но каким-то образом он находил время продолжать математические штудии (самым великим такое всегда удается). Он опубликовал ряд важных статей в ведущих журналах.

В 1882 году Вейерштрасс обеспечил для Киллинга должность профессора в Лицее Хозианум в Браунсберге, где Киллинг и провел последующие десять лет. В Браунсберге не было значительной математической традиции и не с кем было обсуждать свои исследования, но Киллингу, по-видимому, такие стимулы и не требовались. Ибо именно там он сделал одно из наиболее важных открытий во всей математике, принесшее ему изрядную долю разочарования.

Цель, которую он исходно перед собой ставил, была невероятно амбициозна: описать все возможные группы Ли. Лицей не приобретал журналы, в которых публиковался Ли, и Киллинг имел очень ограниченное представление о его работах, но в 1884 году независимо открыл роль алгебр Ли. Таким образом, Киллинг знал, что каждая группа Ли связана с алгеброй Ли, и быстро понял, что исследовать алгебры Ли должно быть проще, чем группы Ли, поэтому его задача свелась к классификации всех возможных алгебр Ли.

Эта задача оказалась безнадежно сложной — теперь мы знаем, что скорее всего у нее просто нет внятного ответа в том смысле, что нет простой конструкции, которая произвела бы все алгебры Ли в рамках единообразной и прозрачной процедуры. Поэтому Киллингу пришлось согласиться на нечто менее

амбициозное: описать основные "кирпичики", из которых можно собрать все алгебры Ли. Это несколько похоже на желание описать все возможные архитектурные стили, но придерживаться при этом некоторого списка из допустимых форм и размеров кирпича.

Эти "кирпичики" известны как *простые* алгебры Ли. Они выделены свойствами, очень похожими на идею Галуа о простой группе — группе без нормальных подгрупп, не считая тривиальных. На самом деле простые группы Ли имеют простые алгебры Ли, и обратное тоже почти верно. Потрясающе, что Киллинг преуспел в перечислении всех возможных простых алгебр Ли. Математики называют подобные теоремы классификацией.

В глазах Киллинга эта классификация была предельной версией чего-то гораздо более общего, и его огорчал ряд ограничительных предположений, которые ему пришлось сделать, чтобы добиться хоть какого-то результата. Особенно ему докучала необходимость предполагать простоту, что заставило его перейти к алгебрам Ли над комплексными числами, а не над вещественными. Первые ведут себя лучше, но менее прямым образом связаны с геометрическими проблемами, владевшими воображением Киллинга. Из-за этих, им же наложенных, ограничений он не считал, что его работа заслуживает опубликования.

Ему удалось установить контакт с Ли, который, впрочем, оказался не слишком плодотворным. Сначала Киллинг написал Клейну, который свел его с помощником Ли Фридрихом Энгелем, в то время работавшим в Христиании. Киллинг и Энгель сразу нашли общий язык, и Энгель превратился в активного сторонника его деятельности, помог ему преодолеть некоторые сложности и призывал развивать свои идеи и дальше. Без Энгеля Киллинг мог бы и забросить это дело.

Сначала Киллинг полагал, что знает полный список простых алгебр Ли и что это алгебры $so(n)$ и $su(n)$, соответствующие

двум бесконечным семействам[1] групп Ли — специальным ортогональным группам $SO(n)$, состоящим из всех вращений в n-мерном пространстве, и их аналогам $SU(n)$ для комплексных n-мерных пространств, так называемых специальных унитарных групп. Историк Томас Хокинс представлял себе

> "изумление, с которым Энгель читал письмо Киллинга, содержащее эти смелые предположения. Какой-то малоизвестный профессор из Лицея, посвятившей себя образованию лиц духовного звания в глухом углу Восточной Пруссии, поддерживает общение с авторитетнейшими учеными и высказывает гипотезы о глубоких теоремах из разработанной Ли теории групп преобразований".

Летом 1886 года Киллинг посетил Лейпциг, где работали Ли и Энгель. К сожалению, между Ли и Киллингом возникли трения; Ли никогда не отдавал должного работам Киллинга и старался принизить их значимость.

Киллинг быстро обнаружил, что его исходное предположение о простых алгебрах Ли было неверным, ибо он открыл новую алгебру, которой соответствует группа Ли, известная сейчас как G_2. Ее размерность равнялась 14, и она, в отличие от специальных линейных и ортогональных алгебр Ли, судя по всему, не принадлежала к какому-либо бесконечному семейству. Она представляла собой одинокое исключение.

Если это казалось странным, то еще более странной была окончательная классификация, которую Киллинг получил зимой 1887 года. К двум бесконечным семействам Киллинг добавил третье — алгебры Ли $sp(2n)$, соответствующие тому, что сейчас известно как симплектические группы $Sp(2n)$. (В наше

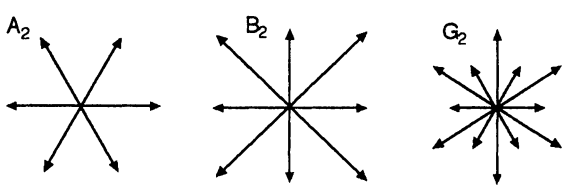
[1] *Семействам* потому, что при каждом $n = 2, 3, \ldots$ имеется своя алгебра Ли каждого вида. *(Примеч. перев.)*

время ортогональные группы разбивают на два различных подсемейства в зависимости от того, действует ли группа на пространстве четной или нечетной размерности, что приводит к наличию четырех семейств; на то есть веские причины.) А исключительная группа G_2 приобрела пятерых спутников: двух с размерностью 56, а также короткое семейство, быстро подходящее к концу, с размерностями 78, 133 и 248.

Классификация Киллинга была получена с применением длинных алгебраических рассуждений, с помощью которых всю проблему удалось свести к прекраснейшей задаче из геометрии. Из гипотетических простых алгебр Ли он сумел извлечь конфигурацию точек в многомерном пространстве, известную теперь как *система корней*. Ровно для трех простых алгебр Ли система корней живет в двумерном пространстве. Эти корневые системы показаны на рисунке.

Эти диаграммы обладают высокой степенью симметрии. Они несколько похожи на узоры, которые видны в калейдоскопе, где два зеркала, расположенные под углом друг к другу, создают множественные отражения. Эта схожесть неслучайна, потому что системы корней имеют чудесные, изящные группы симметрии. Известные ныне как группы Вейля (что несправедливо, потому что изобрел их Киллинг), они представляют собой многомерные аналоги узоров, образованных отражаемыми объектами в калейдоскопе.

Структура в основе доказательства Киллинга состоит в том, что поиск всех возможных простых алгебр Ли можно вести,



Системы корней в размерности два.

разбивая алгебры на симпатичные куски, аналогичные структурам, обнаруженным в $su(n)$. Тогда классификация сводится к геометрии этих кусков с использованием их чудесных симметрий. Разобравшись с геометрией этих кусков, можно привязать результаты к задаче, которую на самом деле требовалось решить, — задаче нахождения возможных простых алгебр Ли.

Киллинг выразил это таким образом: "Корни простой системы соответствуют простой группе. Обратно, можно рассматривать корни простой группы как порожденные некоторой простой системой. Таким образом получаются простые группы. Для каждого l имеются четыре структуры, а при $l = 2, 4, 6, 7, 8$ к ним добавляются исключительные простые группы". Здесь слово "группа" используется как сокращение выражения "инфинитезимальная группа", что в наши дни называется алгеброй Ли, а l — размерность системы корней.

Четыре структуры, о которых говорит Киллинг, — это алгебры Ли $su(n)$, $so(2n)$, $so(2n + 1)$ и $sp(2n)$, соответствующие семействам групп $SU(n)$, $SO(2n)$, $SO(2n + 1)$ и $Sp(2n)$ — унитарным группам, ортогональным группам в пространстве четной размерности, ортогональным группам в пространстве нечетной размерности и симплектическим группам в пространстве четной размерности.

Симплектические группы служат симметриями переменных "координата–импульс", введенных Гамильтоном в его формулировке механики, и число размерностей всегда четно, потому что переменные координата–импульс объединены в пары. Помимо этих четырех семейств Киллинг утверждал существование в точности шести других простых алгебр Ли.

Он был почти прав. В 1894 году французский геометр Эли Картан заметил, что две Киллинговы 56-мерные алгебры — это на самом деле одна и та же алгебра, рассматриваемая двумя различными способами. Это означает, что имеется только пять

исключительных простых алгебр Ли, соответствующих пяти исключительным простым группам Ли: старая знакомая Киллинга G_2 и четыре других, которые сейчас называются F_4, E_6, E_7 и E_8.

Это на редкость любопытный ответ. Бесконечные семейства в целом понятны — они связаны с различными геометриями естественных типов в произвольном числе размерностей. Но пять исключительных групп Ли, по видимости, не связаны ни с чем геометрическим, и их размерности не следуют никакому правилу. Чем выделены пространства размерностей 14, 56, 78, 133 и 248[1]? Что стоит за этими числами? Представьте себе, что требуется перечислить все формы, которые может иметь кирпич, а ответ оказывается чем-то вроде такого:

- вытянутые параллелепипеды размеров 1, 2, 3, 4, ...,
- кубы размеров 1, 2, 3, 4, ...,
- плиты размеров 1, 2, 3, 4, ...,
- пирамиды размеров 1, 2, 3, 4, ...

Само по себе это выглядит прекрасно, но далее список продолжается так:

- тетраэдры размера 14,
- октаэдры размера 52,
- додекаэдры размера 78,
- додекаэдры размера 133,
- додекаэдры размера 248.

И все, больше ничего нет.

Почему существуют кирпичи этих странных форм и размеров? *Для чего* они?

1 Пожалуй, современный ответ на этот вопрос — тем, что это размерности исключительных алгебр Ли. *(Примеч. перев.)*

Это казалось совершенно безумным.

Настолько безумным, что Киллинга огорчал факт существования исключительных групп, и некоторое время он надеялся, что это ошибка, которую ему удастся устранить. Они нарушали элегантность его классификации. Но они в ней присутствовали, и мы начинаем в конце концов понимать *почему*.

Во многих отношениях эти пять исключительных групп Ли кажутся теперь гораздо более интересными, чем четыре бесконечных семейства. Они представляются важными в физике частиц, как мы увидим позже; они определенно важны и в математике. И у них есть тайное единство, до конца не проясненное, роднящее их с кватернионами Гамильтона и даже с еще более любопытным их обобщением — октонионами. Но об этом — в свое время.

За всем этим стоит ряд чудесных идей, автор которых — Киллинг. Строго говоря, в его работах содержалось несколько ошибок — некоторые доказательства на самом деле не вполне работали. Но все эти ошибки давным-давно исправлены.

Вот так обстояло дело с величайшей математической работой всех времен. А что по ее поводу думали современники Киллинга?

Не слишком много. Признанию не способствовало то, что труд жизни Киллинга облил презрением сам Ли. Киллинг пришелся ему не по душе — по неизвестным причинам. По мнению Ли, Киллинг не сделал вообще ничего важного. Хуже того — разумеется, Ли сам мечтал бы доказать такую теорему. Когда он понял, что его обошли, он прибег к старому как мир приему "кислого винограда". Все, что угодно, сделанное в данной области, но не самим Ли, утверждал Ли, было ерундой. Хотя и не заявлял об этом совсем уж откровенно.

Еще менее помогала делу недооценка доказанной им теоремы со стороны самого Киллинга. Для него она была

бледной тенью чего-то намного более важного, достичь чего ему не удалось, — классификации всех групп Ли. Киллинг был человеком скромным, а Ли сделал все, чтобы он таким и остался.

Во всяком случае, Киллинг опередил свое время. Очень немногие математики понимали, насколько важной вскоре станет теория Ли. Для большинства она казалась довольно техническим отделом геометрии, связанным с дифференциальными уравнениями.

Наконец, Киллинг был убежденным католиком с развитым чувством долга и смирения. Он взял себе за образец св. Франциска Ассизского, и в возрасте 39 лет они с женой вступили в Третий Орден францисканцев. По-видимому, он был глубоко порядочным человеком и, не жалея себя, трудился на благо своих учеников. Он был консерватором и патриотом, которого глубоко печалила социальная катастрофа Германии после Первой мировой войны. Печаль его усугубила смерть двух его сыновей в 1910 и 1918 году.

Истинная ценность исследований Киллинга открылась в 1894 году, когда Эли Картан в своей диссертации заново вывел всю его теорию, а также сделал значительный шаг вперед в классификации не только простых алгебр Ли, но и их представлений в терминах матриц. Картан проявил щепетильность и воздал Киллингу по заслугам практически за все его идеи; сам он лишь привел все в порядок, заполнил несколько пробелов (некоторые из них были весьма серьезными) и модернизировал терминологию. Однако быстро распространился миф о том, что работа Киллинга изобиловала дырами и что по-настоящему все сделал Картан. Математики нечасто оказываются хорошими историками, а потому они стремятся цитировать скорее известные им работы, нежели те, которые лежат в их основании. Таким образом имя Картана оказалось связанным со многими из идей Киллинга.

Любой, кто прочитает статьи Киллинга, быстро обнаружит, что миф — это всего лишь миф. Идеи Киллинга ясно и хорошо сформулированы, доказательства, возможно, несколько старомодны, но почти все правильны. Что более важно, общий охват его идей прекрасно выбран для того, чтобы получить желаемый результат. Все это — математика высшего порядка, и сделана она именно им.

К сожалению, статей Киллинга почти никто не читал. Все читали Картана и не обращали внимания на реверансы в адрес Киллинга. В конце концов, однако, работа Киллинга начала получать должное признание. В 1900 году он получил премию Лобачевского, присуждаемую Казанским физико-математическим обществом. То был второй раз, когда присуждалась эта премия; в первый раз награжден был Ли.

Киллинг умер в 1923 году. Даже сегодня его имя известно не так хорошо, как оно того заслуживает. Он был одним из величайших когда-либо живших математиков. По крайней мере, его наследие бессмертно.

Глава 11
Служащий бюро патентов

К началу двадцатого столетия группы начали проявлять себя в фундаментальной физике — области знания, которой в силу этого предстояло претерпеть не меньшую трансформацию, чем та, что произошла из-за появления групп в собственно математике.

В золотой 1905 год человек, ставший затем величайшим ученым своего времени, опубликовал три статьи, каждая из который произвела переворот в одном из разделов физики. Он не был в то время профессиональным ученым. За плечами у него был университет, но никакой преподавательской должности ему получить не удалось, и работал он в бюро патентов в швейцарском Берне. Звали его, разумеется, Альберт Эйнштейн.

Если какой-то один человек и олицетворяет собой современную физику, то это Эйнштейн. Для многих он олицетворяет также и математический гений, хотя в действительности он был просто квалифицированным математиком, а не первопроходцем уровня Галуа или Киллинга. Творческие способности Эйнштейна лежали не в области создания новой мате-

матики, а в феноменально глубокой интуиции относительно структуры физического мира, которую ему удалось выразить, замечательным образом используя существующую математику.

У Эйнштейна были также вкус и склонность к правильной философской точке зрения. Он извлекал радикальные теории из простейших принципов, причем направляло ход его мыслей представление об изяществе, а не всестороннее знание экспериментальных фактов. Важные наблюдения, по его убеждению, всегда можно отфильтровать в несколько ключевых принципов. Дорога к истине пролегает через красоту.

Неисчислимое множество страниц и дело всей жизни многих исследователей посвящены изучению жизни и работ Эйнштейна. Одна-единственная глава меркнет в сравнении с ними в отношении широты и глубины охвата. Но Эйнштейн — ключевая фигура в истории симметрии, потому что именно он более чем кто-либо другой запустил цепочку событий, превративших математику симметрии в фундаментальную физику. Я не думаю, что сам Эйнштейн воспринимал это именно так; для него математика была служанкой физики — временами не слишком послушной. Только позднее, следуя намеченному Эйнштейном пути и разбираясь в запутанных, разобщенных ростках, которые появились на этом пути в результате его пионерских усилий, следующее поколение смогло оценить изящные и глубокие математические концепции, на которых основывалось сделанное им.

Так что нам предстоит кратко обрисовать потрясающий взлет к славе этого патентного служащего невысокого уровня — строго говоря, технического эксперта третьего класса, да к тому же на испытательном сроке. Но поскольку он составляет только часть нашего рассказа, я приведу лишь самые существенные события. Желающим познакомиться с исчерпывающим и беспристрастным описанием жизненного пути Эйн-

штейна следует обратиться к книге Абрахама Пейса "Господь изощрен...".

Изощрен — да, но, как однажды заметил Эйнштейн, не злонамерен.

Эйнштейн, мало интересовавшийся религией, посвятил свою жизнь обоснованию того принципа, что вселенная постижима и ведет себя математически. Во многих своих наиболее знаменитых высказываниях он упоминает божество, но как символ упорядоченности вселенной, а не как сверхъестественное существо, сующее свой нос в дела людские. Эйнштейн не почитал никакого бога и не практиковал каких-либо религиозных обрядов.

Эйнштейна часто воспринимают как естественного преемника Ньютона. До Эйнштейна ученые уже внесли вклад в развитие ньютоновой "системы мира" (если использовать подзаголовок его "Математических начал натуральной философии"), но Эйнштейн был первым, кто внес в эти представления существенные изменения. Наиболее значительное место из предшествовавших теоретиков принадлежит Джеймсу Клерку Максвеллу, сформулированные которым уравнения электромагнетизма перевели магнитные и электрические явления и в особенности свет в область ньютоновской юрисдикции. Эйнштейн пошел значительно дальше, осуществив несколько решающих изменений. По иронии судьбы изменения, которые привели к пересмотру теории гравитации, возникли как следствие максвелловской теории электромагнитных волн — света и его родственников. Еще бóльшая ирония состояла в том, что фундаментальное свойство этой теории — волновая природа света — сыграло ключевую роль, хотя Ньютон и отрицал, что свет может быть волной. Венцом же является то обстоятельство, что наиболее изящные эксперименты, ныне ис-

пользуемые для демонстрации волновой природы света, выполнил именно Ньютон.

Научный интерес к свету восходит по крайней мере к Аристотелю, который, даром что был философом, задался вопросом такого типа, который должен показаться естественным скорее ученым. *Как мы видим*? Аристотель предположил, что, когда мы смотрим на некоторый объект, этот объект воздействует на среду между собой и смотрящим глазом. (Мы в наши дни называем эту среду "воздух".) Глаз фиксирует эти изменения в среде, и в результате возникает ощущение зрительного восприятия.

В Средние века объяснение изменили на противоположное. Полагали, что наш глаз испускает некоторые лучи, которые освещают все, на что мы смотрим. Не объект посылает в глаз сигналы, а глаз оставляет следы по всему объекту.

В конце концов было осознано, что мы видим объекты в отраженном свете и что в обычной жизни основным источником света служит Солнце. Эксперименты показали, что свет перемещается по прямым линиям, образуя лучи. Отражение происходит, когда луч отскакивает от некоторой поверхности. Так что Солнце посылает световые лучи на все, что не скрыто в тени какого-либо другого объекта, лучи отовсюду отскакивают, причем некоторые из них попадают в глаз наблюдателя, и глаз получает сигнал с соответствующей стороны, мозг обрабатывает поступающую из глаза информацию, и мы видим то, от чего отразился луч.

Основной вопрос состоял в том, что же такое свет. Свет обладает рядом интригующих свойств. Он не только отражается; он может еще и преломляться — внезапно изменять направление на границе двух различных сред, например воздуха и воды. Именно поэтому палка, опущенная в пруд, выглядит изломанной; на этом же основана работа линзы.

Но еще более интригующим оказывается явление дифракции. В 1664 году ученый и всесторонне образованный человек

Роберт Гук, не раз за свою карьеру имевший столкновения с Ньютоном, открыл, что если поместить линзу сверху на плоское зеркало, то при взгляде через линзу видны тонкие концентрические цветные кольца.

Эти кольца известны сейчас как Ньютоновы кольца, потому что Ньютон первым проанализировал их возникновение. Сегодня этот опыт считается ясной демонстрацией того факта, что свет — это волна: кольца возникают в результате интерференции из-за того, что волны при наложении одна на другую или гасят, или не гасят друг друга. Но Ньютон не верил, что свет — волна. Поскольку свет распространяется по прямым линиям, он полагал, что это должен быть поток частиц. Согласно его "Оптике", законченной в 1705 году, "Свет составлен из мельчайших частиц, или корпускул, испускаемых светящимися телами". В рамках теории частиц отражение объяснялось очень просто: частица отскакивает при ударе об (отражающую) поверхность. В этой теории возникли трудности с объяснением преломления, и она, по существу, рассыпалась, когда дело дошло до дифракции.

Размышляя о том, что же может заставить световые лучи изменять направление, Ньютон решил, что корень проблемы должен быть не в свете, а в среде. Это привело его к предположению о существовании некоей "эфирной среды", которая передает колебания *быстрее, чем свет*. Он убедил себя, что излучение тепла подтверждает наличие этих колебаний, потому что, согласно его наблюдениям, тепловое излучение проходит через пустоту. В пустоте должно быть нечто, что переносит тепло и вызывает преломление и дифракцию. Ньютон писал:

> "Разве Тепло передается из теплой Комнаты через Пустоту не за счет Вибраций некоторой более тонкой Среды, чем Воздух, остающейся в Пустоте после удаления Воздуха? И не является

ли эта Среда той самой, в которой Свет преломляется и отражается и посредством Вибраций которой Свет передает Тепло Телам, а также легко претерпевает Отражение и легко переносится?"

Читая эти слова, я не могу не вспомнить моего друга Терри Пратчетта, написавшего целый ряд книг, действие которых происходит в Плоском Мире, представляющем собой пародию на наш мир. С помощью массы населяющих его разнообразных волшебников, ведьм, троллей, гномов и людей Пратчетт подтрунивает над человеческими слабостями. Свет в Плоском Мире распространяется примерно со скоростью звука — именно по этой причине можно видеть, как при восходе солнца свет идет через поля. Свету необходима и противоположная, дополняющая его сторона — темнота (практически все в Плоском Мире реализовано в конкретном воплощении), причем темнота, понятно, распространяется быстрее света, ибо должна же она успеть убраться у него с дороги. Все это полностью осмысленно, даже в применении к нашему миру, если не считать того огорчительного факта, что ничто из этого не верно.

Ньютонова теория света страдает от того же недостатка. Ньютон вовсе не говорил заведомых глупостей; его теория, казалось, отвечала на целый ряд важных вопросов. К сожалению, эти ответы основывались на фундаментальном недопонимании: он полагал, что тепловое излучение и свет — это два разных явления. Он считал, что, когда свет падает на поверхность, он возбуждает тепловые колебания. Они являются разновидностью тех колебаний, которые, по его мнению, приводят к преломлению и дифракции света.

Таким образом возникла концепция "светоносного эфира", оказавшаяся необычайно стойкой. Действительно, когда позднее выяснилось, что свет — это волна, эфир оказался как

раз подходящей средой, чтобы в ней эта волна распространялась. (Мы теперь полагаем, что свет — это не волна и не частица, а нечто, что содержит в себе элементы и того и другого. Но я забегаю вперед.)

Что же, однако, представлял собой этот эфир? Ньютон на эту тему высказался с максимальной откровенностью: "Я не знаю, чем является Эфир". Он рассуждал таким образом: если эфир также состоит из частиц, то они должны быть намного меньше и легче, чем частицы воздуха и даже частицы света — по существу, по той причине, вполне в духе Плоского Мира, что они должны обладать способностью убраться у света с дороги. "Чрезвычайная малость этих Частиц, — говорит Ньютон об эфире, — может давать вклад в значительную величину той силы, из-за которой данные Частицы могут избегать столкновений друг с другом и за счет этого образовать Среду, намного превосходящую Воздух по разреженности и упругости, а вследствие того оказывающую намного меньшее сопротивление движению Частиц, а также неизмеримо бóльшую способность оказывать давление на крупные тела при своем расширении".

Еще до того, в "Трактате о Свете", написанном в 1678 году, голландский физик Христиан Гюйгенс предложил другую теорию: свет — это волна. Эта теория четко объясняла отражение, преломление и дифракцию, ведь те же явления можно наблюдать, например, с волнами на воде. Эфир играл для света ту же роль, что вода — для волн в океане, т. е. роль того, что остается, когда волна прошла. Но Ньютон счел нужным на это возразить. Спор принял крайне запутанный характер, поскольку оба ученых мужа делали неверные допущения о природе обсуждавшихся волн.

Все изменилось, когда в дело вмешался Максвелл. И он стоял на плечах еще одного гиганта.

Электрические нагреватели, освещение, радио, телевидение, кухонные комбайны, микроволновые печи, холодильники, пылесосы и бесконечное количество промышленных машин и механизмов — все это возникло благодаря открытиям одного человека — Майкла Фарадея. Фарадей родился в 1791 году в Ньюингтон Батс в предместье Лондона (ныне — Слон и Замок). Он был сыном кузнеца и достиг высокого положения в науке в викторианскую эпоху. Отец его был сандеманианцем — членом небольшой протестантской секты.

В 1805 году Фарадей стал помощником переплетчика и принялся проводить научные опыты, в особенности по химии. Его интерес к науке заметно возрос, когда в 1810 году он вступил в городское Философское общество, представлявшее собой группу молодых людей, собиравшихся с целью поговорить о науке. В 1812 году ему достали приглашение на заключительные лекции, которые читал в Королевском Институте самый крупный британский химик сэр Гэмфри Дэви. Вскоре после того он обратился к Дэви на предмет работы; он получил аудиенцию, но вакансии в наличии не было. Однако после того, как ассистента Дэви, помогавшего ему в химической лаборатории, уволили за затеянную им драку, место досталось Фарадею.

С 1813 по 1815 годы Фарадей ездил по Европе с Дэви и его женой. Наполеон успел выдать Дэви паспорт, в который был вписан камердинер, так что Фарадею пришлось принять эту роль. Определенное беспокойство ему доставлял тот факт, что жена Дэви Джейн воспринимала эту должность буквально и требовала, чтобы он выполнял обязанности ее слуги. В 1821 году судьба повернулась к Фарадею лицом: его повысили, и он женился на Саре Барнард, дочери видного сандеманианца. Более того, его исследования по электричеству и магнетизму начали приносить интересные результаты. Развивая более ранние исследования датского ученого Ханса Эрстеда, Фарадей от-

крыл, что электричество, протекающее через виток проволоки вблизи магнита, создает силу[1]. На этом основана работа электрического двигателя.

Интенсивность его исследований несколько уменьшилась в силу свалившихся на него административных и преподавательских обязанностей, хотя в том была и положительная сторона: в 1826 году он организовал чтение вечерних лекций по науке, а также учредил Рождественские лекции для молодежи; и те и другие продолжаются и поныне. В наши дни Рождественские лекции передают по телевидению, которое само по себе составляет еще одно благо, в конечном счете ставшее возможным благодаря открытиям Фарадея. В 1831 году, вернувшись к своим опытам, он открыл электромагнитную индукцию. Это открытие изменило промышленный ландшафт девятнадцатого столетия, потому что привело к созданию электрических трансформаторов и генераторов. Эксперименты привели Фарадея к выводу, что электричество должно быть не флюидом, как это тогда считалось, а некоторой силой, действующей между частицами материи.

Известность в науке, как правило, сопряжена с честью занятия какой-либо административной должности, что немедленно убивает ту самую научную активность, признанием которой эта должность и явилась. Фарадей стал научным советником в Тринити Хаус, основной задачей которого было следить за безопасностью британских морских путей для судоходства. Он

1 В этой фразе неразделимо и неразличимо соединены два фундаментальных факта. 1. Эрстед открыл, что электрический ток, выражаясь современным языком, создает магнитное поле. 2. Основное "электромагнитное" достижение Фарадея — открытие в некотором роде обратного эффекта: при *изменении* потока магнитного поля, пронизывающего замкнутый контур, в этом контуре возникает электрический ток. Это явление называется электромагнитной индукцией; его "двойственный" вариант состоит в том, что виток с переменным током испытывает силу со стороны магнитного поля, что и составляет принцип работы электродвигателя. *(Примеч. перев.)*

изобрел новую, более эффективную масляную лампу, которая давала более яркий свет.

В 1840 году он стал старостой в сандеманианской секте, но здоровье его начало ухудшаться. В 1858 году ему предоставили бесплатное проживание в бывшем королевском дворце Хэмптон Корт — "Красе и Гордости" Генриха VIII.

Фарадей умер в 1867 году и похоронен на кладбище Хайгейт.

Изобретения Фарадея произвели революцию в викторианском мире, но (быть может, из-за отсутствия должного начального образования) Фарадей был не силен в теории, и его объяснения изобретений основывались на забавных механических аналогиях. В 1831 году — в год, когда Фарадей открыл, как превратить магнетизм в электричество — в семье шотландского юриста родился сын (как оказалось, единственный). Юрист главным образом интересовался управлением своими земельными владениями, однако же достаточно серьезно отнесся к образованию молодого Джеймси, официально известного как Джеймс Клерк Максвелл.

Джеймси был смышленым мальчиком, которого занимали механизмы. "Как это? — постоянно спрашивал он. — Как оно такое делает?" Другим вопросом был "Какая от этого польза?" Его отец, разделявший подобные пристрастия, изо всех сил старался дать объяснение. И если это объяснение не вполне удовлетворяло Джеймси, то он задавал дополнительный вопрос: "Какая *именно* от этого польза?"

Мать Джеймса умерла от рака, когда мальчику было девять; потеря сблизила отца и сына. Мальчика отдали в Эдинбургскую Академию, которая специализировалась по классическим дисциплинам и где от учеников требовалось быть аккуратными и подтянутыми, хорошо знать стандартные предметы и ни в коем случае не позволять себе никаких оригинальных мыслей, пото-

му что таковые нарушали ровное течение образовательного процесса. Джеймси не вполне соответствовал пожеланиям учителей; не помогло даже то, что его отец, одержимый идеей практичности, придумал сыну специальные одежду и обувь, включая сборчатую тунику, украшенную тесьмой. Дети прозвали Джеймса Дуралей. Но Джеймс отличался упорством и добился уважения к себе, хоть и продолжал порой вызывать недоумение у своих сверстников.

По крайней мере одно в школе положительно повлияло на Джеймса: у него возник интерес к математике. В письме к отцу он сообщает, что сделал "тетра эдр, додека эдр и еще два других эдра, которые я точно не знаю как называются". (Надо полагать, окта и икоса.) К 14 годам он получил премию за независимое изобретение определенного класса математических кривых, известных как Декартовы овалы — по имени их первооткрывателя Декарта. Его статью прочли на заседании Эдинбургского Королевского Общества.

Джеймс, кроме того, писал стихи, но математические способности все же превалировали. В возрасте 16 лет он поступил в Эдинбургский университет, а потом продолжил обучение в Кембриджском университете — лучшем университете в Британии в том, что касалось математики. Уильям Хопкинс, готовивший его к экзаменам, говорил, что Джеймс был "самым необыкновенным человеком из всех, кого мне доводилось встречать".

Джеймс получил диплом и остался в Кембридже в аспирантуре, занимаясь опытами со светом. Там он прочитал "Экспериментальные исследования" Фарадея и начал изучать электричество. Если отбросить все подробности, то в конце концов он взял фарадеевы механические модели электромагнитных явлений и к 1864 году отфильтровал их в систему из четырех математических законов. (В применявшихся тогда обозначениях их число было больше четырех, но в используемых в наши дни векторных обозначениях их четыре. Есть варианты формализма, в которых

все сводится к одной формуле.) Эти законы описывают электричество и магнетизм в терминах двух "полей" — электрического и магнитного, — которые пронизывают все пространство. Эти поля описывают не просто интенсивность электричества или магнетизма в каждой конкретной точке, но и их направления.

Четыре уравнения имеют простой физический смысл. Два из них говорят нам, что электричество и магнетизм нельзя ни создать, ни уничтожить. Третье описывает, как изменяющееся во времени магнитное поле создает окружающее электрическое поле; это уравнение в математическом виде воплощает открытие индукции Фарадеем. Четвертое описывает, как изменяющееся во времени электрическое поле воздействует на окружающее магнитное поле. Даже будучи просто выражены в словах, эти уравнения не лишены изящества.

Простые математические действия с четырьмя уравнениями Максвелла подтвердили то, что Максвелл уже давно подозревал: свет представляет собой электромагнитную волну — распространяющееся возмущение электрического и магнитного полей.

Математическая причина состояла в том, что из уравнений Максвелла легко следует нечто, что каждый математик распознает в одно мгновение: "волновое уравнение", которое, как подсказывает его название, описывает распространение волн[1]. Уравнения Максвелла дают и предсказание относительно скорости этих волн — они должны распространяться со скоростью света.

[1] Для "истории симметрии" небезынтересен тот факт, что, когда Максвелл сформулировал на математическом языке все известные к тому времени экспериментальные сведения об электричестве и магнетизме, полученные уравнения оказались *внутренне противоречивыми* — из них следовало нечто типа "равенства" $1 = 0$. Руководствуясь внутренней симметрией уравнений, Максвелл "руками" добавил в одно из них дополнительное слагаемое, так что уравнения стали более симметричными, а вместо противоречивого равенства из них получалось волновое уравнение. *(Примеч. перев.)*

Только одна вещь распространяется со скоростью света.

В те дни считалось, что волны непременно должны быть волнами *в* чем-нибудь. Требовалась среда, чтобы их переносить; волны тогда оказывались колебаниями такой среды. Очевидной средой для световых волн был эфир. Математика говорит, что световые волны должны совершать колебания в направлении под прямым углом к направлению своего распространения. Это объясняет глубокие затруднения Ньютона и Гюйгенса: они считали, что колебания происходят вдоль направления распространения волны.

Из теории следовало и еще одно предсказание: длина волны электромагнитного излучения — расстояние от одной волны до другой — могла быть любой. Длина световой волны чрезвычайно мала, но должны существовать электромагнитные волны с намного большей длиной. Теория оказалась достаточно хороша для того, чтобы подтолкнуть Генриха Герца к созданию таких волн, называемых ныне радиоволнами. Вскоре вслед за тем Гульельмо Маркони практически реализовал передатчик и приемник — и мы внезапно начали разговаривать друг с другом, практически мгновенно обмениваясь информацией с любыми точками планеты. Сегодня мы тем же способом посылаем изображения, наблюдаем за небом с помощью радаров, а также определяем местоположение с помощью системы глобального позиционирования.

К сожалению, концепция эфира не была свободна от проблем. Если эфир существует, то Земля, вращаясь вокруг Солнца, должна двигаться и относительно эфира. Тогда должна иметься возможность наблюдать это движение экспериментально — иначе от самой концепции эфира пришлось бы отказаться как от не согласующейся с экспериментом.

Решение этой проблемы полностью изменило облик физики.

Летом 1876 года в фирме Израэля и Леви, управляемой двумя торговцами-евреями в городе Ульм в королевстве Вюртемберг, появился новый партнер Герман Эйнштейн. В молодости Герман выказывал значительные способности к математике, но его родители не могли позволить себе отправить сына в университет. Теперь он стал партнером в фирме, продававшей перины.

В августе Герман женился на Паулине Кох из Канштадской синагоги, и семья в конце концов осела на Банхоф-штрассе — Вокзальной улице. Менее восьми месяцев спустя на свет появился их первый ребенок. Согласно свидетельству о рождении, "ребенок мужского пола, получивший имя Альберт, был рожден в Ульме, в доме [Германа], его женой Паулиной Эйнштейн, урожденной Кох, иудейского вероисповедания". Пять лет спустя родилась сестра Альберта Мария; брат и сестра были сильно привязаны друг к другу.

Родители Альберта были достаточно равнодушны к своей религии и старались интегрироваться в культурную среду страны, где жили. В то время многие немецкие евреи были "ассимиляционистами" — они стремились не подчеркивать свои культурные традиции и таким образом налаживать хорошие взаимоотношения с представителями других вероисповеданий. Имена, которые Герман и Паулина избрали для своих детей, не были традиционно еврейскими, хотя родители и утверждали, что Альберта назвали "в честь" его деда Авраама. Вопросы религии нечасто обсуждались в доме Германа, и Эйнштейны не соблюдали традиционных еврейских ритуалов.

Воспоминания Марии о детстве, опубликованные в 1924 году, служат основным источником информации о ранних годах жизни и личности Альберта. Похоже, что при рождении он испугал свою мать тем, что затылок его был странно угловатым и необычно большим. "Слишком тяжелый! Слишком тяжелый!" — вскричала она, впервые увидев своего ребенка. Маль-

чик долгое время не мог начать говорить, и родители стали всерьез опасаться, что он окажется умственно неполноценным. Однако в действительности Альберт просто хотел сначала научиться делать это осознанно. Позднее он упоминал, что начал говорить только тогда, когда ему стали подвластны законченные предложения. Он проговаривал их в уме, и только потом, убедившись, что все слова правильные, произносил вслух.

Мать Альберта замечательно играла на пианино. Между шести- и тринадцатилетним возрастом Альберту давал уроки скрипки учитель по фамилии Шмид. Взрослый Эйнштейн обожал играть на скрипке, но в детстве эти занятия наводили на него тоску.

Когда перинный бизнес лопнул, Герман вместе со своим братом Якобом решил заняться газо- и водоснабжением. Якоб был инженером и предпринимателем, и братья Эйнштейны смело взялись за новое дело. Затем Якоб решил расширить бизнес за счет электричества — его привлекала не организация электроснабжения, но производство оборудования для электростанций. Компания была официально создана в 1885 году при финансовой поддержке отца Паулины и других членов семьи, и братья съехались в один дом в Мюнхене. Сначала бизнес шел хорошо, и *Elektronische Fabrik J. Einstein und Co.* продавала электротехническое оборудование от Мюнхена до Италии.

Эйнштейн вспоминает, что его интерес к физике проявился, когда отец показал ему компас. Ему тогда было четыре или пять лет, и Альберта заворожила способность компаса указывать одно и то же направление, как бы его ни поворачивали. В эти мгновения перед ним впервые промелькнули скрытые чудеса физической вселенной. Это переживание имело для него почти мистический характер.

В школе Альберт был толковым учеником, но в младших классах особенно не блистал. Он был медлительным и мето-

дичным, получал хорошие оценки, при этом был очень замкнутым, почти всегда предпочитая собственное общество. Особенно ему нравилось строить карточные домики. Спорт его не привлекал. В 1888 году он перешел в гимназию и проявил такие способности к латыни, что до пятнадцатилетнего возраста неизменно был первым в классе по латыни и математике. Развитию его математических способностей способствовал дядя Якоб, по образованию инженер, который в свое время должен был достаточно серьезно познакомиться с высшей математикой. Якоб задавал юному Альберту математические задачи, а тот испытывал подлинное счастье, когда справлялся с ними. Друг семьи Макс Талмуд также оказал значительное влияние на образование Альберта. Талмуд был задавленным бедностью студентом-медиком, и Герман и Паулина каждый четверг кормили его обедом. Он дал Альберту несколько популярных книг о науке; потом он познакомил молодого человека с философскими произведениями Иммануила Канта. Вдвоем они могли часами обсуждать философию и математику. Талмуд писал, что он никогда не видел, чтобы Эйнштейн играл с другими детьми, и что читал он всегда серьезные книги, ничего легковесного. Его единственным отдохновением была музыка. Он исполнял сонаты Бетховена и Моцарта; аккомпанировала ему Паулина.

Увлечение Альберта математикой получило поддержку в 1891 году, когда он приобрел экземпляр Эвклида, о котором позднее говорил как о своей "священной книге по геометрии". Наибольшее впечатление на него произвела логическая ясность, с которой Эвклид организовал свои рассуждения. Одно время Альберт страстно увлекся религией, что было результатом обязательных школьных уроков закона Божия (католического, разумеется, — выбора у него не было) и домашних наставлений в еврейской вере. Но все это было отброшено прочь, стоило ему только познакомиться с на-

укой. Обучение древнееврейскому и успехи в подготовке к бар-мицве внезапно затормозились; Альберт внял другому призыву.

В начале 1890-х годов дела в *Elektronische Fabrik J. Einstein und Co* пошли заметно хуже. Продажи в Германии упали, и итальянский агент компании Лоренцо Гарроне предложил перебраться в Италию. В июне 1894 года немецкую компанию ликвидировали, семейный дом выставили на продажу, и Эйнштейны переехали в Милан — все, кроме Альберта, которому надо было закончить школу. "Эйнштейн и Гарроне" открыли магазин в Павии, куда семья потом и переехала, а Альберта оставили одного в Мюнхене.

Такое положение вещей его расстраивало — ему совсем не нравилось жить вдали от семьи. Кроме того, над ним нависла опасность военной службы. Не предупредив родителей, он решил приехать к ним в Италию. Он убедил семейного врача написать ему справку, что он страдает от нервного расстройства — вполне возможно, это была правда. Получив разрешение досрочно закончить занятия, он без предупреждения появился в Павии весной 1895 года. Его родители пришли в такой ужас, что он тут же пообещал продолжить учебу, чтобы потом сдать вступительные экзамены в цюрихский *ETH (Eidgenossische Technische Hochschule)*[1] — в то время, как и сейчас, главное высшее учебное заведение Швейцарии.

Альберт процветал под итальянским солнцем. В октябре он приступил к сдаче вступительных экзаменов в *ETH* — и провалился. Он легко прошел по математике, физике и химии, но

1 Краткое название этого института — "Высшей технической школы" — традиционно переводится на русский как "Политехникум", однако в современном употреблении чаще используется оригинальная аббревиатура *ETH*. *(Примеч. перев.)*

завалил гуманитарные дисциплины. Сочинение его также оказалось далеко не блестящим. Однако выяснилось, что попасть в *ETH* можно и другим способом: нужно поступить в выпускной класс и получить там аттестат зрелости, наличие которого дает право на зачисление в институт. Эйнштейн отправился в кантональную школу в Аарау, где снимал жилье в семье Винтлеров. У Винтлеров было семеро детей, и Альберту нравилось их общество; он на долгое время сохранил привязанность к этой "приемной" семье. Он похвально отзывался о "либеральном духе" в школе и о превосходных учителях — специально при этом отметив, что учителя не кланялись посторонним авторитетам.

Впервые в жизни школа доставляла ему радость. В нем окрепла уверенность в себе, и он стал высказывать свою точку зрения. В одном из его сочинений, написанном по-французски, были изложены его планы на будущее, которое он видел в изучении математики и физики.

В 1896 году Эйнштейн поступил в *ETH*, отказавшись от своего вюртембергского гражданства и став человеком без гражданства. Он откладывал пятую часть своего месячного содержания, чтобы в будущем оплатить натурализацию в качестве гражданина Швейцарии. Но именно в этот момент электрическая фабрика, принадлежавшая отцу и дяде Якобу, обанкротилась, унеся с собой значительную часть семейного достояния. Якоб просто устроился на работу в одной большой компании, но Герман был полон решимости начать еще одно дело. Он проигнорировал совет Альберта не делать этого, открыл дело в Милане, однако всего через два года и это предприятие также потерпело фиаско. Альберт тяжело переживал неудачи, выпавшие на долю его семьи; отец наконец последовал примеру Якоба и устроился на работу по установке электрооборудования.

Во время учебы в *ETH* Альберт проводил немало времени в физической лаборатории, выполняя там различные опыты. На

своего профессора Генриха Фридриха Вебера он впечатления не произвел. "Вы сообразительный юноша, Эйнштейн, очень сообразительный, — говорил он молодому человеку. — Но у вас один огромный недостаток: вы ни от кого ничего не желаете слышать". Вебер негативно отнесся к попытке Альберта провести эксперимент с целью определить, движется ли Земля относительно эфира — гипотетического всепроникающего флюида, который, как предполагалось, должен был переносить электромагнитные волны[1].

В свою очередь Вебер тоже не произвел на Эйнштейна большого впечатления; его лекции он счел старомодными. Особенно его разочаровало, что там недостаточно говорилось о максвелловской теории электромагнетизма; поэтому Эйнштейн выучил ее сам по немецкому тексту 1894 года. Он ходил на лекции двух знаменитых математиков — Гурвица и Германа Минковского. Минковский — блестящий и оригинальный мыслитель — ввел новые фундаментальные методы в теории чисел, а позднее ему предстояло внести важный математический вклад в теорию относительности. Альберт также читал некоторые из работ Чарльза Дарвина по эволюции.

Чтобы остаться в *ETH*, ему надо было стать там ассистентом преподавателя и за счет этого оплачивать свое дальнейшее обучение. Вебер намекнул, что мог бы предложить Альберту такую позицию, но потом "забыл" о своем предложении, и Альберт так никогда его и не простил. Он написал письмо Гурвицу с вопросом, не предвидится ли для него такой вакансии, и получил, по-видимому, положительный ответ, но и на этот раз ничего конкретного не последовало. К концу 1900 года он оказался без работы. Тем не менее в это же время он опубликовал свою первую научную статью — о силах, действующих между молекулами. Вскоре после этого он получил швейцарское

1 Об эфире подробнее говорится на стр. 271. *(Примеч. перев.)*

гражданство, которое он сохранил на всю жизнь, даже после переезда в Соединенные Штаты.

В течение всего 1901 года Альберт не оставлял попыток найти работу в каком-либо университете, для чего писал письма и рассылал экземпляры своей статьи, подавая на все возможные вакансии. Но тщетно. В отчаянии он временно устроился школьным учителем. К своему удивлению, он обнаружил, что ему нравится преподавать; кроме того, это оставляло ему достаточно свободного времени для продолжения исследований по физике.

Он сказал своему друг Марселю Гроссманну, что работает над теорией газов и — снова! — проблемой движения материи через эфир. Он перешел в другую школу, тоже в качестве временного преподавателя.

На помощь Альберту пришел Гроссманн: он уговорил своего отца Марселя порекомендовать Альберта директору Федерального бюро патентов в Берне. Когда вышло официальное объявление об открывшейся вакансии, Эйнштейн подал заявление в качестве соискателя на эту должность. Он оставил школьное преподавание и переехал в Берн в начале 1902 года, хотя официально еще не был принят. Возможно, он узнал об этом неофициально или же просто был очень уверен, что все сложится хорошо.

Его официальное зачисление произошло в июне 1902 года. То не была академическая должность, к которой он так стремился, но она приносила достаточно денег — 3500 швейцарских франков в год, — чтобы обеспечить пропитание, одежду и жилье. И она оставляла достаточно времени для физики.

Еще в *ETH* он встретил молодую студентку Милеву Марич, которая проявляла сильный интерес к наукам — и к Альберту. Они полюбили друг друга. К сожалению, Паулине Эйнштейн потенциальная невестка не понравилась, и это вызвало неприязнь. У Германа в то же самое время развилось крайне серьез-

ное сердечное заболевание. На смертном одре он наконец согласился на брак Альберта и Милевы, а затем попросил всех членов семьи удалиться, чтобы умереть в одиночестве. Альберт испытывал чувство вины всю свою оставшуюся жизнь. В январе 1903 они с Милевой поженились; их единственный сын Ханс Альберт родился в мае 1904 года[1].

Работа в бюро патентов устраивала Эйнштейна. Он исполнял свои обязанности настолько эффективно, что ближе к концу 1904 года его должность сделали постоянной — однако начальник предупредил его, что дальнейшее продвижение будет зависеть от того, овладеет ли он техническими дисциплинами. Продвигались и работы Эйнштейна по физике в области статистической механики.

Так и наступил "золотой 1905 год", когда служащий бюро патентов написал статью, которая в итоге принесла ему Нобелевскую премию. В том же году он защитил диссертацию в Цюрихском университете. Кроме того, его повысили до технического эксперта второго класса, прибавив жалованье на 1000 швейцарских франков в год, — похоже, он сумел освоить технические дисциплины.

Даже став знаменитым, Альберт всегда питал благодарность к Гроссманну, способствовавшему его трудоустройству в бюро патентов. Именно это больше, чем что-либо другое, говорил Эйнштейн, дало ему возможность заниматься физикой. Это была гениальная комбинация, идеальная работа, и он никогда об этом не забывал.

1 Их дочь Лизерль родилась в январе 1902 года; упоминания о ней после 1903 года отсутствуют. В июле 1910 года родился их второй сын Эдуард. А. Пейс пишет, что "от отца Эдуард унаследовал черты лица и музыкальность, от матери — склонность к меланхолии. Позднее Эдуард увлекся искусством — писал стихи. Он хотел стать психиатром и изучал медицину, но цели своей не достиг", и добавляет: "Эйнштейн довольно скоро заметил у младшего сына признаки раннего слабоумия. После многих злоключений Эдуард попал в цюрихскую лечебницу, где и умер в 1965 г.". *(Примеч. перев.)*

В тот замечательный год в истории физики Эйнштейн опубликовал три важнейших научных статьи.

Первая была посвящена броуновскому движению — случайным перемещениям очень маленьких частиц, взвешеных в жидкости. Это явление названо именем своего первооткрывателя ботаника Роберта Брауна[1]. В 1827 году Браун разглядывал в микроскоп плавающие в воде зерна цветочной пыльцы. Внутри полостей в пыльце он заметил еще меньшие, беспорядочное дергающиеся частицы. Математическую модель движения такого типа разработал в 1880 году Торвальд Тиле, а в 1900-м независимо — Луи Башелье. Башелье интересовался в первую очередь не броуновским движением как таковым, но такими же случайными флуктуациями фондового рынка; их математика оказалась тождественной.

Физическая же природа этого движения еще ждала своего объяснения. Эйнштейн и независимо от него польский ученый Мариан Смолуховский осознали, что броуновское движение может подтверждать еще не доказанную на тот момент теорию, что материя состоит из атомов, комбинации которых образуют молекулы. Согласно так называемой кинетической теории молекулы в газах и жидкостях постоянно соударяются, в результате совершая, по существу, случайное движение. Эйнштейн разработал математические аспекты такого процесса, что позволило ему показать, что процесс соответствует экспериментальным наблюдениям броуновского движения[2].

Вторая статья была посвящена фотоэлектрическому эффекту. Александр Беккерель, Уиллоуби Смит, Генрих Герц и некоторые другие уже обнаружили, что определенные металлы

[1] Название "броуновское" относится к числу традиционно установившихся терминов, и лишь немногие говорят (и почти никто не пишет) "брауновское". *(Примеч. перев.)*

[2] Закон броуновского движения Эйнштейна был экспериментально подтвержден в 1908 году Ж. Перреном. *(Примеч. перев.)*

производят электрический ток под действием света. Эйнштейн исходил из квантово-механического предположения, что свет состоит из мельчайших частиц. Его вычисления показали, что это предположение очень хорошо согласуется с экспериментальными данными. Это было одним из первых серьезных свидетельств в поддержку теории квантов.

Любая из этих двух статей сама по себе составляла значительное открытие. Но третья оставила первые две далеко позади. Это была статья о специальной теории относительности — теории, которая выходила за рамки ньютоновской физики и перевернула наши взгляды на пространство, время и материю.

Наше повседневное восприятие пространства ничем не отличается от восприятия Эвклида и Ньютона. Пространство имеет три измерения — три независимых взаимно перпендикулярных направления, как на углу здания: на север, на восток и вверх. Структура пространства одна и та же во всех точках, хотя материя, которую оно вмещает, может от точки к точки меняться. Объекты в пространстве можно передвигать различными способами: их можно вращать, отражать как в зеркале или переносить параллельно самим себе без вращений.

Если рассуждать более абстрактно, то можно считать, что эти преобразования применяются к пространству самому по себе (изменение "системы отсчета"). Структура пространства, а также физические законы, которые выражают эту структуру и оперируют с ней, симметричны относительно этих преобразований. Другими словами, законы физики одинаковы во всех местоположениях и во все моменты времени.

При ньютоновском взгляде на физику время образует еще одно "измерение", которое не зависит от пространственных. Время одномерно, и его преобразования симметрии очень просты. Время можно сдвигать (добавлять фиксированный

промежуток к каждому наблюдению) или отражать (пустить в обратном направлении — хотя и только в рамках мысленного эксперимента). Физические законы не зависят от того момента, когда вы начали делать измерения, так что они должны быть симметричны относительно сдвигов по времени. Наиболее фундаментальные физические законы — хотя и не все, что представляется некоторой загадкой, — симметричны также относительно обращения времени.

Но когда математики и физики начали размышлять о недавно открытых законах электричества и магнетизма, оказалось, что ньютоновские представления неадекватны. Преобразования пространства и времени, которые оставляют законы неизменными, не были простыми "движениями" — сдвигами, вращениями и отражениями; более того, оказалось невозможно применять эти преобразования к пространству или времени по отдельности. При изменениях в одном только пространстве уравнения перекашивались. Следовало выполнить компенсирующее преобразование времени[1].

До некоторой степени эту проблему можно было игнорировать, например, если рассматриваемые системы не движутся. Но во

1 Здесь и далее изложение грешит смешением двух понятий. При сдвигах или поворотах, о которых только что говорилось, как и при сдвигах по времени (изменениях "начального" момента), уравнения Максвелла — "недавно открытые законы электричества и магнетизма" — сохраняют свой вид, причем довольно банальным образом. Интересные же явления — такие как вовлечение времени в преобразования — начинают происходить при *движении* одного наблюдателя относительно другого. Математически уравнения Максвелла и законы Ньютона обладают *разными симметриями* — преобразованиями, которые надо сделать для согласования описаний, получаемых двумя наблюдателями, движущимися друг относительно друга с постоянной скоростью. Суть проблемы в том, что уравнения Максвелла сохраняют свой вид для всех таких наблюдателей, если соответствующие преобразования *другие*, чем в ньютоновской механике. Об этом будет явно сказано на стр. 298. *(Примеч. перев.)*

всей остроте встала проблема математического описания движущейся электрически заряженной частицы (например, электрона); в физике конца девятнадцатого столетия эта проблема была центральной. Невозможно было долго игнорировать сопровождавшую ее озабоченность насчет симметрии.

В годы, предшествовавшие 1905-му, целый ряд физиков и математиков был озадачен этим странным свойством уравнений Максвелла.

Если выполнить какой-нибудь эксперимент с электричеством и магнетизмом в лаборатории и в движущемся поезде, то как согласовать результаты? Разумеется, немногие экспериментаторы работают в движущихся поездах, но все они работают на движущейся Земле. Для многих целей Землю можно считать неподвижной, поскольку экспериментальные приборы движутся вместе с ней, так что движение не создает никаких реальных отклонений. Ньютоновы законы движения, например, остаются в точности теми же в любой "инерциальной" системе отсчета — такой, которая движется с постоянной скоростью по прямой линии. Скорость Земли с неплохой точностью постоянна, но она вращается вокруг своей оси и обращается вокруг Солнца, так что ее движение относительно Солнца не является прямолинейным. Тем не менее путь, по которому движется прибор, почти прямой; имеет ли кривизна какое-либо значение, зависит от эксперимента, причем часто она никакого значения не имеет.

Никто бы не забеспокоился, если бы уравнения Максвелла принимали другой вид во вращающейся системе отсчета. Но открыто было нечто более тревожное: уравнения Максвелла выглядят по-разному в различных инерциальных системах отсчета. Электромагнетизм в движущемся поезде отличается от электромагнетизма в неподвижной лаборатории, даже когда поезд движется по прямой линии с постоянной скоростью.

Имелось и дополнительное усложнение: пожалуйста, пусть поезд или даже Земля движутся, но сама концепция движения является относительной. По большей части мы не замечаем движения Земли. Восход Солнца по утрам и закат по вечерам *объясняются* вращением Земли. Но мы не *чувствуем* этого вращения, мы установили его непрямыми методами.

Если вы сидите в поезде и смотрите в окно, у вас может сложиться впечатление, что вы неподвижны, а весь ландшафт проносится мимо вас. А наблюдательница, стоящая в поле и глядящая на ваш поезд, сделает противоположное наблюдение — что она сама неподвижна, а поезд движется. Когда мы говорим, что Земля летит вокруг Солнца, а не Солнце вокруг Земли, мы проводим тонкое различие, потому что оба описания верны — в зависимости от того, какая система отсчета выбирается. Если система отсчета движется вместе с Солнцем, то Земля движется относительно этой системы отсчета, а Солнце неподвижно. Но если система отсчета движется вместе с Землей — как все обитатели планеты, — то тогда движущимся объектом является Солнце.

К чему же тогда все переживания по поводу гелиоцентрической системы, согласно которой Земля вращается вокруг Солнца, а не наоборот? Несчастного Джордано Бруно сожгли за то, что он говорил, будто верно одно описание, в то время как Церковь предпочитала второе. Получается, что он погиб из-за простого недоразумения?

Не совсем. Бруно высказывал целый ряд утверждений, которые Церковь считала еретическими, — всякие мелочи типа несуществования Бога. Его судьба сложилась бы примерно так же, даже если б он никогда и не заикнулся о гелиоцентрической системе. Однако имеется важный смысл, в котором высказывание "Земля обращается вокруг Солнца" лучше высказывания "Солнце обращается вокруг Земли". Важное различие состоит в том, что математическое описание движения планет

относительно Солнца намного проще, чем описание их движения относительно Земли. Теория, согласно которой в центре находится Земля, возможна, но очень сложна. Красота важнее, чем истина сама по себе. Многие точки зрения приводят к истинным описаниям природы, но некоторые позволяют глубже понять происходящее.

А если все движение относительно, то ничто не может находиться в абсолютном "покое". Ньютонова механика согласована со следующим по простоте предположением: все инерциальные системы отсчета эквивалентны. Но для уравнений Максвелла это не верно[1].

По мере того как девятнадцатое столетие приближалось к концу, надо было рассмотреть еще одну интригующую возможность. Поскольку свет считался волной, распространяющейся через эфир, возможно, в покое находился эфир. Вместо относительности всех движений можно было бы считать движения относительно эфира абсолютными. Однако это по-прежнему не объясняло, почему уравнения Максвелла не одни и те же во всех инерциальных системах отсчета.

Связующее звено здесь — симметрия. Переход от одной системы отсчета к другой есть операция симметрии на пространстве–времени. Инерциальные системы отсчета имеют дело с трансляционными симметриями, вращающиеся системы отсчета — с вращательными симметриями. Сказать, что законы Ньютона одни и те же во всякой инерциальной системе отсчета, — это все равно что сказать, что эти законы симметричны относительно трансляций с постоянной скоростью. По некоторым причинам

1 *Верно*, если для согласования описаний в разных инерциальных системах отсчета применять не ньютоновские преобразования. Проблема состояла именно в наличии двух разных симметрий. *(Примеч. перев.)*

уравнения Максвелла не обладают этим свойством. Отсюда вроде бы должно получаться, что некоторые инерциальные системы отсчета более инерциальны, чем другие. И если какие-либо инерциальные системы отсчета чем-то выделены, то это наверняка должны быть те, которые неподвижны относительно эфира.

Суть проблемы формулировалась в двух вопросах, одном — физическом, а другом — математическом. Физический вопрос был в том, можно ли движение относительно эфира наблюдать в эксперименте. Математический вопрос состоял в том, каковы симметрии уравнений Максвелла.

Ответ на первый вопрос нашли Альберт Майкельсон — американский военно-морской офицер, оставивший службу, чтобы изучать физику под руководством Гельмгольца, — и химик Эдвард Морли. Они построили чувствительный прибор для измерения тонких различий в скорости света при его распространении в различных направлениях и пришли к выводу, что таких различий нет. Или Земля находится в покое относительно эфира — что сомнительно, коль скоро Земля обращается вокруг Солнца, — или же никакого эфира нет, а свет не подчиняется обычным правилам, применимым к случаю относительного движения.

Эйнштейн рассмотрел проблему с математической точки зрения. В своих статьях он не упоминает опыт Майкельсона–Морли, но позднее он говорил, что знал о нем и что этот опыт повлиял на ход его мыслей. Вместо ссылки на эксперимент он вывел некоторые симметрии уравнений Максвелла, которые обладали неожиданным свойством — они перемешивали пространство и время[1]. (У Эйнштейна роль симметрии не обсуждает-

[1] Симметрии уравнений Максвелла были известны до Эйнштейна. Также до Эйнштейна делались разнообразные попытки примирить эти симметрии с симметриями ньютоновской механики. Ключевой шаг, сделанный Эйнштейном, состоял в провозглашении того *физического* принципа, что это примирение не требуется, поскольку ньютоновская механика перестает быть верной при больших скоростях движения. *(Примеч. перев.)*

ся явно, но находится совсем неглубоко под поверхностью.) Одно из следствий из этих необычных симметрий состоит в том, что равномерное движение относительно эфира (если предполагать, что такая среда существует) ненаблюдаемо.

Теория Эйнштейна получила название "теория относительности", потому что в ней делались неожиданные предсказания об относительном движении и электромагнетизме.

"Теория относительности" — очень неудачное название. Оно вводит в заблуждение, потому что наиболее важное свойство теории Эйнштейна состоит в том, что некоторые вещи не являются относительными. Скажем, скорость света абсолютна. Если вы направляете луч света на наблюдательницу, стоящую в поле, и на наблюдателя в движущемся поезде, то оба измерят *одну и ту же* скорость света.

Это целиком и полностью противоречит интуиции и на первый взгляд представляется абсурдным. Скорость света составляет примерно 186 000 миль в секунду[1]. Ясно, что эту скорость должна измерить наблюдательница в поле. А что насчет человека в поезде? Пусть поезд едет со скоростью 50 миль в час. Сначала представим себе, что по параллельному пути едет другой поезд, также со скоростью 50 миль в час. Вы выглядываете в окно и смотрите на него. Какой вывод вы сделаете о его скорости движения? Если он едет в одном направлении с вами, то ответ — 0 миль в час. Второй поезд будет ехать вровень с вашим, он будет находиться рядом, и его движение относительно вашего поезда не будет заметно. Если же он едет во встречном направлении, то он пронесется мимо со скоростью 100 миль в час, потому что скорость вашего поезда в 50 миль в час, по существу, складывается со скоростью встречного поезда.

1 Чуть меньше, чем 300 000 километров в секунду. *(Примеч. перев.)*

Если вы выполните измерения с поездами, именно это вы и получите.

Теперь вместо второго поезда возьмем луч света. Скорость света, выраженная в подходящих единицах, составляет 670 616 629 миль в час. Если бы ваш поезд удалялся от источника света, то, согласно вашим ожиданиям, должна быть измерена скорость 670 616 629 – 50 = 670 616 579 миль в час, потому что свету придется "догонять" поезд. Наоборот, если ваш поезд движется по направлению к источнику света, то, согласно вашим ожиданиям, скорость света относительно поезда должна быть равна 670 616 629 + 50 = 670 616 679 миль в час, потому что движение поезда вносит свой вклад в наблюдаемую скорость света.

Согласно Эйнштейну, оба числа неправильны. В обоих случаях вы получите из наблюдений, что свет распространяется со скоростью 670 616 629 миль в час — точно с той же скоростью, которую зафиксирует наблюдательница в поле.

Звучит дико. Если ньютоновы правила для относительного движения применимы к поездам, то почему они не работают для света? Ответ Эйнштейна состоит в том, что для очень быстро движущихся объектов законы физики отличаются от ньютоновских.

Или, еще точнее, законы физики отличаются от ньютоновских. Точка. Но различие делается заметным, только когда объекты движутся со скоростями, очень близкими к скорости света. На малых скоростях, таких как 50 миль в час, законы Ньютона дают такое хорошее *приближение* к более общим законам, предложенным Эйнштейном, что никаких отличий не заметно. Но при увеличении скоростей различия становятся достаточно большими, чтобы стать наблюдаемыми.

Основной физический момент здесь состоит в том, что симметрии уравнений Максвелла сохраняют не только эти уравнения; они сохраняют и скорость света. Действительно, скорость

света встроена в эти уравнения. Так что скорость света должна быть абсолютной.

Лишь по иронии судьбы эта идея выражается словами "теория относительности". Эйнштейн в действительности хотел назвать ее *Invariantentheorie* — теория инвариантов. Но название "теория относительности" укоренилось, и, во всяком случае, уже существовала область математики, называемая теорией инвариантов, так что первоначально задуманное Эйнштейном название могло бы создать путаницу. Хотя и вдвое меньшую, чем та, которую порождает использование слов "теория относительности" для описания инвариантности скорости света во всех инерциальных системах отсчета.

Следствия из "теории относительности" довольно причудливы. Скорость света является предельной скоростью. Нельзя путешествовать быстрее света, нельзя послать сообщение быстрее света. Никаких гипердвижков из "*Звездных войн*". При приближении к скорости света длины сокращаются, время замедляется до черепашьего шага, а масса увеличивается без предела. Но — что и замечательно — вы этого не замечаете, потому ваши измерительные инструменты *тоже* сокращаются в длине, испытывают замедление (в том смысле, что время течет медленнее) или делаются тяжелее. Поэтому-то, согласно измерениям наблюдательницы в поле и наблюдателя в поезде, скорость света одна и та же, несмотря на относительное движение: изменения в длине и времени точно компенсируют ожидаемые эффекты относительного движения. Вот почему Майкельсон и Морли не смогли зафиксировать движение Земли относительно эфира.

Когда вы движетесь, все выглядит для вас точно так же, как когда вы не двигались. Законы физики не могут сказать вам, движетесь вы или находитесь в состоянии покоя. Они могут

сказать вам, ускоряетесь вы или нет, но не могут сообщить, сколь быстро вы движетесь, если только ваша скорость постоянна.

Это все еще может показаться странным, однако эксперименты подтверждают теорию в самых тонких деталях. Другое следствие — это знаменитая формула Эйнштейна $E = mc^2$, связывающая массу с энергией; эта формула непрямым способом привела к атомной бомбе, хотя роль первой в создании последней часто преувеличивают.

Свет настолько нам привычен, что мы редко задумываемся о том, насколько загадочным он является. Он, как кажется, ничего не весит, он проникает всюду и позволяет нам видеть. Что же такое свет? Это электромагнитные волны. Волны в чем? В пространственно-временном континууме, что представляет собой хитрый способ сказать: "Мы не знаем". В начале двадцатого столетия считалось, что среда для этих волн — светоносный эфир. После Эйнштейна стала понятна одна вещь по поводу эфира: его нет. Эти волны — не волны *в* чем-то.

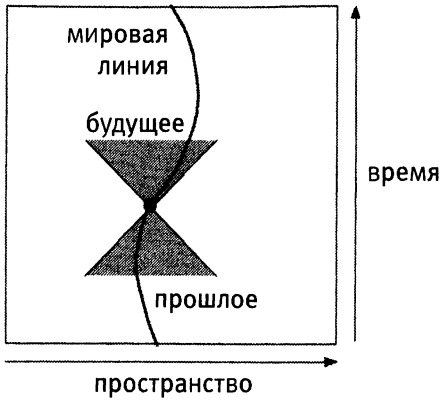
Квантовая механика, как мы увидим, пошла еще дальше. Не только световые волны не являются волнами *в* чем бы то ни было, но и вообще *все* вещи — волны. Вместо среды, переносящей волны, — ткани пространства–времени, по которой бегут складки при прохождении волны, — сама ткань состоит из волн.

Эйнштейн был не единственным, кто заметил, что симметрии пространства–времени, возникающие из уравнений Максвелла, не совпадают с очевидными ньютоновскими симметриями. В рамках ньютоновских представлений пространство и время отделены друг от друга и различны. Симметрии законов физики даются комбинациями движений пространства без деформаций и независимых сдвигов по времени. Но, как я упомянул, эти преобразования не оставляют уравнения Максвелла инвариантными.

Размышляя об этом, математики Анри Пуанкаре и Герман Минковский пришли к новому взгляду на симметрии пространства и времени на чисто математическом уровне. Если бы они дали описание этих симметрий в физических терминах, то опередили бы эйнштейновскую теорию относительности, но они воздержались от высказываний о физической природе. Они поняли, что симметрии законов электромагнетизма не действуют на пространство и время независимо, а перемешивают их. Математическая схема, описывающая эти переплетающие замены, известна как группа Лоренца, названная по имени физика Хендрика Лоренца.

Минковский и Пуанкаре рассматривали группу Лоренца как абстрактное выражение определенных свойств законов физики, и описания типа "время течет медленнее" или "объекты уменьшаются в длине по мере увеличения их скорости" воспринимались как расплывчатые аналогии, а не как что-то реальное. Но Эйнштейн утверждал, что эти преобразования имеют настоящий физический смысл. Объекты, а также время действительно ведут себя подобным образом. Он пришел к формулировке физической теории — специальной теории относительности, — которая включала математическую схему группы Лоренца в физическое описание не пространства и времени по отдельности, а объединенного пространства–времени.

Минковский предложил геометрическую картину для этой не-ньютоновской физики, называемую теперь пространством–временем Минковского. В ней пространство и время представлены как независимые координаты, а движущаяся частица по мере течения времени описывает кривую, которую Эйнштейн назвал *мировой линией* этой частицы. Поскольку частица не может двигаться быстрее света, наклон мировой линии не может превышать 45° от временно́го направления. Прошлое и будущее частицы всегда лежат внутри двойного конуса — светового конуса.



Геометрия пространства–времени Минковского.

Таким образом решился вопрос с электричеством и магнетизмом — двумя фундаментальными силами в природе. Но одна фундаментальная сила по-прежнему не была включена в описание — *гравитация*. Пытаясь развить более общую теорию, включающую гравитацию, и снова опираясь на тот принцип, что законы природы должны быть симметричны, Эйнштейн пришел к общей теории относительности — к идее, что само пространство–время искривлено и что его кривизна соответствует массе. Из этих идей выросла наша современная космология Большого Взрыва, согласно которой вселенная возникла из крошечной крупинки около 13 миллиардов лет назад, а также замечательная концепция черных дыр — объектов столь массивных, что свет не может вырваться из их гравитационного поля.

Общая теория относительности восходит к ранним работам по неэвклидовой геометрии, которые привели Гаусса к идее "метрики" — формулы для расстояния между любыми двумя точками. Новые геометрии возникают, когда эта формула не являет-

ся классической эвклидовой формулой, отвечающей теореме Пифагора. Коль скоро такая формула подчиняется нескольким простым правилам, она определяет осмысленную концепцию "расстояния". Основное правило состоит в том, что расстояние от одной точки *A* до другой точки не может стать меньше, если по дороге пройти через какую-то промежуточную точку *B*. Другими словами, расстояние от *A* до *C* меньше чем или равно сумме расстояний от *A* до *B* и от *B* до *C*. Это — "неравенство треугольника", называемое так потому, что в эвклидовой геометрии оно утверждает: любая сторона треугольника короче, чем сумма двух других его сторон.

Пифагорова формула выполнена в эвклидовой геометрии, то есть там, где пространство является "плоским". Так что когда метрика отличается от эвклидовой, можно приписать это различие некоторой "кривизне" пространства. Это можно представлять себе как изгибание пространства, но на самом деле это не идеальная картина, потому что тогда потребуется большее пространство, в котором исходному предстоит изогнуться. Лучше думать о "кривизне" таким образом, как будто области пространства или сжаты, или растянуты, так что изнутри кажется, что они вмещают меньше (или больше), чем снаружи. (Фанаты британского телесериала *Doctor Who* вспомнят Тардис — космический корабль и машину времени, которая изнутри больше, чем снаружи.) Блестящий ученик Гаусса Риман обобщил идею метрики с размерности два на любое число измерений и модифицировал идею таким образом, что расстояния стало возможно определять локально — для точек, расположенных очень близко друг к другу. Такая геометрия называется Римановым многообразием, и она представляет собой наиболее общий вид искривленного пространства.

Физика происходит не в пространстве, а в пространстве–времени, где, согласно Эйнштейну, естественная "плоская" геометрия есть не геометрия Эвклида, а геометрия Минковско-

го. Время входит в формулу для "расстояния" иначе, нежели пространство. Такое геометрическое устройство представляет собой искривленное пространство–время. Оно оказалось именно тем, что заказывал патентный служащий.

Эйнштейн долго бился, изобретая свои уравнения общей теории относительности. Сначала он исследовал, как свет распространяется в гравитационном поле, и это привело его к мысли положить в основу единый фундаментальный принцип — *принцип эквивалентности*. В ньютоновской механике гравитация проявляет себя как сила, притягивающая все тела друг к другу. Силы вызывают ускорение. Принцип эквивалентности утверждает, что ускорение всегда неотличимо от эффектов, вызванных подходящим гравитационным полем. Другими словами, способ включить гравитацию в теорию относительности состоит в том, чтобы понять ускорение.

К 1912 году Эйнштейн убедился, что теория гравитации не может быть симметричной относительно всех преобразований Лоренца; симметрия такого вида применима *точно* и *повсюду*, только когда отсутствует материя, гравитация нулевая, а пространство–время является пространством–временем Минковского. Отбросив это требование "лоренцевой инвариантности", он избежал массы бесплодных усилий. "Единственная вещь, в которую я твердо верил, — писал он в 1950 году, — состояла в том, что в фундаментальные уравнения надо было включить принцип эквивалентности". Но он осознавал и пределы этого принципа: он должен быть верен только локально, как некое инфинитезимальное приближение к истинной теории[1].

[1] "Истинная теория" в данной фразе ничего не значит. Принцип эквивалентности верен локально (т. е. в малом). Именно таков фундаментальный постулат эйнштейновской теории гравитации. *(Примеч. перев.)*

В 1907 году друг Эйнштейна Гроссманн стал профессором геометрии в *ETH*, и Альберт также согласился занять там пост. Ненадолго — через год он уехал в Берлин, а позднее в Прагу. Но он не прерывал контакта с Гроссманном, и это принесло щедрые плоды. В 1912 году Гроссманн помог Эйнштейну осознать, какого типа математику ему следовало искать: "Эта задача оставалась для меня неразрешимой, пока я внезапно не понял, что Гауссова теория поверхностей содержит ключевой элемент для разгадки тайны... Однако я в то время не знал, что Риман исследовал основания геометрии даже на еще более глубоком уровне. Когда я вернулся из Праги в Цюрих, там был мой дорогой друг математик Гроссман. От него я впервые узнал о Риччи, а затем о Римане. Так что я спросил своего друга, можно ли решить мою задачу, применяя теорию Римана".

Риччи — это Грегорио Риччи-Курбастро, который вместе со своим студентом Туллио Леви-Чивитой изобрел анализ на римановых многообразиях. Тензор Риччи дает более простую меру кривизны, чем исходная концепция Римана.

Согласно другим источникам, Эйнштейн сказал Гроссманну: "Ты должен мне помочь, а не то я сойду с ума!" — и Гроссманн исполнил это требование. Как позднее писал Эйнштейн, он "не только избавил меня от изучения соответствующей математической литературы, но и поддержал меня в моем поиске полевых уравнений гравитации". В 1913 году Эйнштейн и Гроссманн опубликовали первые результаты своих совместных усилий, закончив гипотезой о виде искомых полевых уравнений: тензор энергии–импульса должен быть пропорционален... чему-то.

Чему?

Ответа на этот вопрос они пока не знали. Там должен был стоять некий другой тензор, дающий другое измерение кривизны.

Здесь они оба сделали математические ошибки, которые увели их в долгую погоню за несбыточным. И Эйнштейн, и Гроссман были убеждены (вполне справедливо), что их теория

должна давать ньютоновскую гравитацию в соответствующем предельном случае — случае плоского пространства–времени, слабой гравитации. Отсюда они получили некоторые технические требования на искомые уравнения, т. е. требования к природе этого самого "чего-то". Но их аргументация была ошибочной, и эти требования на самом деле не следовало предъявлять.

Эйнштейн был уверен, что правильные полевые уравнения должны определять математический вид метрики — формулы для расстояния в пространстве–времени, которая определяет все его геометрические свойства — единственным образом, однозначно. Это было попросту неверно: изменения системы координат могут изменить данную формулу, не оказывая при этом никакого влияния на *внутреннюю* кривизну пространства. Но Эйнштейн не знал о так называемых тождествах Бьянки, которые проясняют отсутствие единственности; по-видимому, не знал о них и Гроссманн.

Такое состояние — сущий кошмар для каждого ученого: по видимости неопровержимая идея, которая вроде бы ведет в правильном направлении, на деле заводит в ужасные дебри. Устранить такую ошибку отчаянно трудно, ведь вы уверены, что никакой ошибки нет. Часто даже не удается понять, какие именно допущения вы незаметно сделали.

К концу 1914 года Эйнштейн наконец осознал, что полевые уравнения не могут определять метрику единственным образом, потому что имеется возможность выбора различных систем координат: это не влияет на физику, но меняет формулу для метрики. Он все еще не знал о тождествах Бьянки, но теперь они ему были не нужны. Он наконец понял, что имеется свобода в выборе любых координат из соображений удобства.

18 ноября 1914 года Эйнштейн открыл новый фронт в войне с уравнениями гравитационного поля. Он подобрался достаточно близко к окончательной формулировке, чтобы сделать

два предсказания. Одно из них — на самом деле скорее "послесказание", в том смысле, что оно было сделано после события. Оно состояло в объяснении тончайших изменений, к тому времени уже наблюдавшихся в орбите Меркурия. Положение перигелия — ближайшего к Солнцу положения планеты — медленно изменяется. Из новой теории гравитации Эйнштейн смог вывести, насколько быстро должен двигаться перигелий, — и результат его вычисления совпал с результатами наблюдений.

Второе предсказание требовало для своего подтверждения или опровержения новых наблюдений; то была прекрасная новость, поскольку новые наблюдения — это лучшая проверка новых теорий. Согласно теории Эйнштейна, гравитация должна изгибать свет.

Геометрия этого эффекта проста и имеет дело с геодезическими — кратчайшими — путями между двумя точками. Если растянуть струну и приподнять ее, она примет вид прямой линии; это происходит потому, что в эвклидовом пространстве прямая линия является геодезической. Если, однако, два конца струны прижать к поверхности футбольного мяча, сильно ее при этом натянув, то она примет форму кривой, лежащей на поверхности мяча. Геодезические линии на искривленном пространстве — мяче — сами искривлены. То же происходит и в искривленном пространстве–времени, хотя подробности слегка отличны.

Физические обстоятельства, в которых этот эффект может проявиться, также "прямолинейны". Звезда, подобная Солнцу, будет изгибать любой свет, проходящий мимо нее. Единственным в то время способом наблюдать этот эффект было дождаться солнечного затмения, когда свет Солнца более не забивает свет от звезды, расположенной на небосводе близко к краю солнечного диска. Если Эйнштейн был прав, то кажущиеся по-

ложения таких звезд должны были слегка сдвинуться по сравнению с их положениями, когда они не находятся на одной линии с Солнцем.

Количественный анализ этого явления куда менее прямолинеен. Первая попытка Эйнштейна, предпринятая в 1911 году, предсказывала сдвиг в пределах угловой секунды. Ньютон предсказал бы близкое число, основываясь на своем убеждении, что свет состоит из мельчайших частиц: сила гравитации должна притягивать частицы, вызывая изгиб их траектории. Но в 1915 году Эйнштейн получил результат, в соответствии с которым в его новой теории свет должен отклониться на вдвое больший угол — на 1,74 угловой секунды.

Перспектива выбора между Ньютоном и Эйнштейном стала реальностью. 25 ноября 1914 года Эйнштейн записал свои полевые уравнения в их окончательном виде. Эти *уравнения Эйнштейна* составляют основу общей теории относительности — релятивистской теории гравитации. Они записываются в математическом формализме, известном как *тензоры* (некоторым образом нагроможденные друг на друга матрицы). Уравнения Эйнштейна говорят нам, что тензор Эйнштейна пропорционален скорости изменения тензора энергии–импульса[1]. Другими словами, кривизна пространства–времени пропорциональна степени присутствия материи. Эти уравнения подчиняются некоторому принципу симметрии, но он сугубо локален. В малых областях пространства–времени у них те же симметрии, что в специальной теории относительности, при условии, что во внимание принимается локальное влияние кривизны.

[1] Ошибка автора. Скорость изменения здесь ни при чем. Тензор Эйнштейна *пропорционален* тензору энергии–импульса, и все. Кстати, тензор Эйнштейна — это "почти" упоминавшийся выше тензор Риччи, отсюда и его связь с кривизной, упомянутая в следующей фразе. *(Примеч. перев.)*

Эйнштейн заметил, что сделанные им второстепенные изменения не повлияли на его вычисления движения перигелия Меркурия и отклонения света звезд. Он представил свои уравнения Прусской Академии — и выяснил, что математик Давид Гильберт уже демонстрировал в точности такие же уравнения, но только утверждал, что это нечто намного большее, чем теория гравитации. На самом деле он утверждал, что они включают в себя электромагнитные уравнения, а это было ошибкой. Снова потрясает тот факт, что ведущие математики были предельно близки к тому, чтобы обойти Эйнштейна на финишной прямой.

Было предпринято несколько попыток проверить предсказание Эйнштейна об отклонении света гравитационным полем Солнца. Первой попытке — в Бразилии — помешал дождь. В 1914 году немецкая экспедиция отправилась наблюдать затмение в Крым, но началась Первая мировая война, и им было приказано возвращаться домой, и побыстрее. Некоторые вернулись, других арестовали, но в конце концов все добрались домой целыми и невредимыми. Естественно, никаких наблюдений провести не удалось.

Война не дала провести наблюдения и в Венесуэле в 1916 году. Американцы предприняли еще одну попытку в 1918-м, но с неубедительными результатами. Наконец, британская экспедиция, которую возглавил Артур Эддингтон, добилась успеха в мае 1919 года, но они не объявляли о своих результатах до ноября.

Когда же результаты были объявлены, вердикт был в пользу Эйнштейна, а не Ньютона. Отклонение имелось, оно было слишком большим, чтобы соответствовать ньютоновской модели, и оно прекрасно укладывалось в модель Эйнштейна.

Задним числом можно сказать, что результаты эксперимента были не столь уж решающими, как могло показаться. Экспериментальная ошибка была довольно велика, и лучшее, что

удавалось заключить, — это что Эйнштейн, *по всей видимости*, прав. (Более свежие наблюдения с применением более совершенных методов и оборудования подтвердили теорию Эйнштейна.) Но в то время их представили как совершенно определенные, и средства массовой информации буквально взорвались. Человек, способный доказать неправоту Ньютона, определенно был гением. Тот, кому удалось открыть радикально новую физику, должен был быть величайшим из живущих ученых.

Так родилась легенда. Эйнштейн написал о своих идеях в *Times of London*. Через несколько дней на редакционной странице появился отклик:

> "Это по-настоящему шокирующая новость, и она заставляет усомниться даже в том, что наша вера в таблицу умножения так уж обоснованна. Потребуется не менее двух председателей двух Королевских Обществ, чтобы заявления о наличии веса у света и пределов у пространства приобрели некоторое правдоподобие — чтобы о подобном вообще можно было подумать. Это не так по определению — и дело с концом. Таким образом, во всяком случае, обстоит дело для обычных людей, как бы оно ни обстояло для высокоученых математиков".

Но высокоученые математики оказались правы. Вскоре *Times* сообщила миру, что "только двенадцать людей в состоянии понять теорию "внезапно ставшего знаменитым д-ра Эйнштейна" — миф, который продолжал циркулировать, даже когда многочисленные студенты-физики уже рутинно изучали эту теорию.

В 1920 году у Гроссманна появились первые признаки рассеянного склероза. Он написал свою последнюю статью в 1930-м, а в 1936-м умер. Эйнштейн стал наиболее превозносимым физиком двадцатого столетия. Позднее в жизни он свыкся со

своей славой, находя ее довольно занятной. На ранних этапах ему, по-видимому, нравилось общаться со средствами массовой информации.

Но здесь мы должны оставить Эйнштейна — заметив только, что после 1920 года его усилия в физике были посвящены бесплодному поиску путей сведения теории относительности и квантовой механики в единую объединенную теорию поля. Он продолжал работать над этой проблемой за день до своей смерти в 1955 году.

Глава 12
Квантовый квинтет

"Почти все уже открыто, и все, что остается, — это заполнить несколько пробелов" — не слишком обнадеживающая новость для одаренного молодого человека, намеревающегося изучать физику, в особенности когда такая новость исходит от специалиста, который по долгу службы обязан быть в курсе дела, — в данном случае от профессора физики Филипа фон Йолли.

Дело происходило в 1874 году, и взгляды фон Йолли отражали то, во что верило большинство физиков того времени: физика закончилась. В 1900 году не кто иной, как знаменитый лорд Кельвин, сказал: "В физике нет ничего нового, подлежащего открытию. Остается лишь выполнять все более и более точные измерения".

Заметим, что он также сказал: "Я твердо заявляю, что летающие машины тяжелее воздуха невозможны" и "Высадка на Луну связана со столь сложными проблемами для людей, что их решение может занять еще 200 лет". Биограф Кельвина пишет, что первую половину своей карьеры он был во всем прав, а всю вторую — не прав.

Но он был не совсем не прав. В лекции 1900 года "Тучи XIX столетия над динамической теорией теплоты и света" он

указал на два наиболее существенных пробела в современном ему понимании физической вселенной: "Красота и ясность динамической теории, которая утверждает, что теплота и свет являются формами движения, омрачены в настоящее время двумя тучами. Первая — это вопрос о том, как Земля движется через упругое тело, каковым по сути является светоносный эфир. Вторая — это доктрина Максвелла–Больцмана о распределении энергии". Первая туча оказалась предвестницей теории относительности, вторая — предвестницей квантовой теории.

По счастью, молодого адресата рекомендация фон Йолли не отпугнула. Он заявил, что у него нет желания открывать новое — все, чего он хочет, сводится к развитию лучшего понимания известных оснований физики. В поисках такого понимания он произвел одну из двух величайших революций в физике двадцатого столетия и развеял второе из Кельвиновых облаков. Этого человека звали Макс Планк.

Юлиус Вильгельм Планк был профессором права в Киле и Мюнхене. И его отец, и мать были профессорами теологии, а брат — судьей. Так что, когда его вторая жена Эмма Патциг осчастливила его сыном — шестым ребенком, — было заранее ясно, что мальчику предстоит вырасти в интеллектуальной среде. Макс Карл Эрнст Людвиг Планк появился на свет 23 апреля 1858 года.

Европа, как обычно, находилась в состоянии политических неурядиц, и в самых ранних воспоминаниях мальчика сохранился вступление в Киль прусских и австрийских войск во время Датско-Прусской войны 1864 года.

К 1867 году Планки перебрались в Мюнхен, где образование Макса проходило под руководством математика Германа Мюллера в Школе короля Максимилиана. Мюллер учил мальчика астрономии, механике, математике и основам физики, в частности — закону сохранения энергии. Планк был превосход-

ным учеником и закончил учебу необычно рано, в шестнадцатилетнем возрасте.

Кроме того, он был еще и способным музыкантом, однако, несмотря на высказанный с самыми добрыми намерениями совет Йолли, все же решил изучать физику. Планк занимался под руководством Йолли кое-какими экспериментами, но быстро переключился на теоретическую физику. Он познакомился с несколькими физиками и математиками, занимавшими ведущее положение в мире, и в 1877 году переехал в Берлин, где продолжил свое обучение у Гельмгольца, Густава Кирхгоффа и Вейерштрасса. В 1878 году он успешно сдал свои первые экзамены, а в 1879-м защитил диссертацию по термодинамике. В течение некоторого времени он преподавал математику и физику в своей старой школе. В 1880 году он защитил диссертацию на право преподавания в университете, темой которой были равновесные состояния тел при различных температурах, и перед ним открылись перспективы академической карьеры. Со временем он получил соответствующую должность, однако это произошло лишь в 1885 году, когда он стал доцентом в университете в Киле. Его научные интересы были сосредоточены на термодинамике, в особенности на концепции энтропии.

Макс познакомился с Мари Мерк, сестрой одного из своих друзей, и в 1887 году они поженились и стали снимать квартиру. Всего у них было четверо детей: Карл, близнецы Эмма и Грета, а также Эрвин.

В 1889 году — в том самом году, когда родились близнецы — Макс получил в Берлине должность, которую ранее занимал Кирхгофф, а в 1892 году стал полным профессором. Семейство переехало на виллу в берлинском районе Грюневальд, по соседству с другими выдающимися представителями академической среды. Один из них, теолог Адольф фон Харнак, стал близким другом Планков. Планки были общительной семьей, и дома у них регулярно бывали знаменитые интеллектуалы,

включая Эйнштейна и физиков Отто Гана и Лизе Майтнер, которые позднее совершили фундаментальные открытия в области деления атомного ядра, послужившие частью долгого пути к созданию атомной бомбы и атомных электростанций. Когда в доме Планков бывали гости, там по заложенной Гельмгольцем традиции исполнялась музыка.

В течение некоторого времени жизнь была безоблачна; но Мари заразилась легочной инфекцией — возможно, туберкулезом — и умерла в 1909 году. Через полтора года, в возрасте пятидесяти двух лет, Макс снова женился — его супругой стала Марга фон Хесслин, родившая ему третьего сына — Германа.

В 1894 году местная электрическая компания пыталась разработать более эффективную лампочку накаливания, так что Макс занялся некоторыми исследованиями по контракту для промышленности. В принципе анализ лампы накаливания представлял собой стандартную физическую задачу, известную как "излучение черного тела", — задачу о том, как излучался бы свет, испущенный полностью неотражающим телом. Такое тело при нагревании излучает свет на всех частотах, но интенсивность света, или, что эквивалентно, его энергия, зависит от частоты. Спрашивалось, как частота влияет на интенсивность. Без ответа на этот фундаментальный вопрос трудно было бы изобрести более эффективную лампочку.

Имелись твердо установленные экспериментальные результаты, а также один теоретический — закон Релея–Джинса, полученный из основополагающих принципов классической физики. К сожалению, этот закон не согласовывался с результатами экспериментов, проводимых для высокочастотного излучения. Он даже предсказывал нечто невозможное: по мере возрастания частоты света его энергия должна становиться бесконечно большой. Этот невозможный результат получил известность как "уль-

трафиолетовая катастрофа". Дальнейшие эксперименты привели к формулировке нового закона, который был получен подгонкой под наблюдения за высокочастотным излучением и известен как закон Вина по имени его открывателя Вильгельма Вина.

Однако закон Вина был непригоден для *низко*частотного излучения.

Физикам приходилось иметь дело с двумя законами: один из них работал на низких частотах, но не работал на высоких, а другой — в точности наоборот. Планк задался идеей построить интерполяцию между ними — другими словами, записать математическое выражение, которое на низких частотах переходило бы в закон Релея–Джинса, а на высоких — в закон Вина. В результате возникла формула, которую теперь называют законом Планка для излучения черного тела.

Этот новый закон был сознательно устроен таким образом, чтобы прекрасно отвечать экспериментальным наблюдениям во всем спектре электромагнитного излучения[1], однако он был чисто эмпирическим — т. е. выведенным из эксперимента, а не из каких-либо фундаментальных физических принципов. Планка, действовавшего в согласии со своим намерением лучше понять известные законы физики, это не устраивало, и он потратил значительные усилия на поиск физических принципов, которые могли бы привести к написанной им формуле.

В 1900 году Планк наконец заметил любопытное свойство своей формулы. Ее можно было вывести, практически повторяя вычисления, которые приводили к закону Релея–Джинса, если только сделать там одно маленькое изменение. В классическом выводе предполагалось, что для любой заданной частоты энергия электромагнитного излучения может в принципе принимать любое — какое угодно — значение. В частности, она

[1] Чуть выше речь шла о свете, а теперь — об электромагнитном излучении. Эти слова в данном контексте надо воспринимать как синонимы. *(Примеч. перев.)*

может приближаться к нулю сколь угодно близко. Планк осознал, что именно это предположение и было причиной ультрафиолетовой катастрофы и что если бы было сделано другое предположение, то проблемы с появлением бесконечности в вычислениях не возникало бы.

Правда, спасительное предположение носило радикальный характер. Требовалось, чтобы энергия излучения на заданной частоте складывалась только из целого числа "пакетов" фиксированного размера. При этом требовалось, чтобы размер каждого пакета был пропорционален частоте, другими словами — равным частоте, умноженной на некоторую постоянную величину; эту постоянную мы сейчас называем постоянной Планка и обозначаем символом h.

Эти пакеты энергии получили название квантов. Планк проквантовал свет.

Отлично, но почему же экспериментаторы никогда не замечали, что энергия выражается целым числом квантов? Путем сравнения своих вычислений с наблюдаемыми энергиями Планк сумел определить величину своей постоянной. Она оказалась очень — *очень* — маленькой. В действительности h примерно равняется 6×10^{-34} джоуль-секунд. Грубо говоря, чтобы заметить "дырки" или "скачки" в возможных значениях энергии — т. е. значения, которые классическая физика разрешает, а квантовая физика запрещает, — требуется выполнить наблюдения с точностью до 34-го десятичного знака[1]. Даже сегодня

1 Бессмыслица. Постоянная Планка очень мала, но минус тридцать четвертая степень определяется тем, *в каких единицах она выражается*. Например, если вместо джоулей использовать килоджоули, то показатель степени будет равен не −34, а −37. А если вместо секунд использовать часы, то величина постоянной Планка будет выражаться числом, в 3600 раз большим. Пожалуй, в данном абзаце верно лишь то бесспорное утверждение, что да, постоянная Планка чрезвычайно мала по сравнению со всеми измеряемыми в джоуль-секундах величинами, с которыми мы *обычно* сталкиваемся. (Об этих величинах говорят как о *макроскопических.*) *(Примеч. перев.)*

очень немногие физические величины можно измерять с точностью до шести или семи десятичных знаков, а в те дни и три знака были серьезным требованием. Прямое наблюдение кванта требует невероятного уровня точности.

Может показаться странным, что математическое различие, столь тонкое, что его нельзя увидеть, оказывает такой радикальный эффект на закон излучения. Но вывод этого закона включает в себя суммирование по вкладам, вносимым в энергию всеми возможными частотами. Результат представляет собой коллективный эффект всех возможных квантов. Глядя с Луны, нельзя разглядеть отдельную песчинку на Земле. Но Сахара очень даже заметна. Когда складывается вместе достаточно много маленьких вкладов, результат может оказаться огромным.

Планковская физика процветала, но личная жизнь Планка оказалась исполненной трагизма. Его сын Карл погиб на фронте во время Первой мировой войны. Дочь Грета умерла при родах в 1917 году, а Эмма разделила ее судьбу в 1919-м, после того как вышла замуж за овдовевшего мужа сестры. Много позднее Эрвин был казнен нацистами за участие в неудавшемся покушении на Адольфа Гитлера в 1944 году.

К 1905 году появились новые свидетельства, поддерживающие радикальное предложение Планка; они содержались в работе Эйнштейна о фотоэлектрическом эффекте. Напомним, что суть эффекта состоит в том, что свет можно превратить в электричество[1].

Эйнштейн знал, что электричество существует в виде дискретных пакетов. Действительно, к тому времени физики выяс-

[1] Фотоэффект есть испускание веществом *электронов* под действием света. *(Примеч. перев.)*

нили, что электричество представляет собой движение мельчайших частиц, называемых электронами. Из фотоэлектрического эффекта Эйнштейн вывел, что то же должно быть верно и в отношении света. Это не только подтверждало идеи Планка о квантах света, но и объясняло, что же такое эти кванты: световые волны, подобно электронам, должны быть частицами.

Как волна может быть частицей? И тем не менее таков был однозначный вывод из экспериментов. Открытие частиц света, или фотонов, быстро привело к квантовой картине мира, в которой частицы являются на самом деле волнами, ведущими себя иногда одним способом, а иногда другим.

Физическое сообщество начало относиться к квантам более серьезно. Великий датский физик Нильс Бор выдвинул квантованную модель атома, в которой электроны движутся вокруг центрального ядра по орбитам, представляющим собой окружности, причем размеры окружностей подчинены дискретности квантов. Из того, что фотоны могут быть и волнами, и частицами, а электроны испускаются соответствующими металлами при попадании на них фотонов, французский физик Луи де Бройль заключил, что и электроны также должны быть и волнами, и частицами. На самом деле вся материя должна демонстрировать эту двойственную природу — быть иногда твердыми частицами, а иногда — колеблющимися волнами. Вот почему в эксперименте можно обнаружить то одно, то другое.

На исключительно малых масштабах материю в действительности не описывают ни "частица", ни "волна". Элементарные составные части материи являются немного и тем и другим — частицами–волнами. Де Бройль изобрел формулу для описания частиц–волн.

Далее произошло важнейшее для нашего рассказа событие. Эрвин Шредингер взял формулу де Бройля и превратил ее в уравнение, описывающее движение частиц–волн. Подобно

тому как законы движения Ньютона имели фундаментальное значение для классической механики, так и уравнение Шредингера стало фундаментом механики квантовой.

Эрвин Шредингер родился в Вене в 1886 году в результате смешанного брака. Его отец Рудольф Шредингер занимался производством погребальных одежд — навощенных одеяний, используемых на саваны для умерших; он, кроме того, был ботаником. Рудольф был католиком, а мать Эрвина Георгина Эмилия Бренда — лютеранкой. С 1906 по 1910 год Эрвин изучал физику в Вене под руководством Франца Экснера и Фридриха Хазенорля, ставшего ассистентом Экснера в 1911 году. Он защитил диссертацию на право преподавания в 1914-м, в момент начала Первой мировой войны, и провел войну в качестве офицера австрийской артиллерии. Два года спустя после окончания войны он женился на Аннемари Бертель. В 1920 году он занял соответствующую доценту должность в Штутгарте, а с 1921-го стал полным профессором в Бреслау (ныне Вроцлав в Польше).

Уравнение, носящее теперь его имя, Шредингер опубликовал в 1926 году в статье, где показал, что из этого уравнения можно получить правильные уровни энергии для спектра атома водорода[1]. За ней в скором времени последовали три другие ключевые статьи по квантовой теории. В 1927 году он приехал к Планку в Берлин, но в 1933-м из-за антисемитизма нацистов уехал из Германии в Оксфорд, где его приняли в Колледж Магдалины. Вскоре после этого он вместе с Полем Дираком был удостоен Нобелевской премии по физике.

[1] Несколько перегруженное высказывание. Речь может идти об уровнях энергии в *самом* атоме водорода; спектр же — то есть излучаемые атомом волны определенной длины — есть лишь *свидетельство* об этих уровнях энергии (или способ экспериментального доступа к ним) *(Примеч. перев.)*

Шредингер вел вызывающий образ жизни, живя одновременно с двумя женщинами, что, конечно, задевало тонкие, чувствительные натуры оксфордских донов[1].

Не прошло и года, как он снова переехал, на этот раз в Принстон, где ему предложили постоянную работу, но он не стал принимать этого предложения — возможно, из-за того, что его желание жить одной семьей и с женой, и с любовницей вызывало в Принстоне взгляды ничуть не более благосклонные, чем в Оксфорде. В конце концов в 1936 году он осел в австрийском Граце, не обращая внимания на пуританскую нетерпимость австрийцев.

Присоединение Австрии Гитлером создало для Шредингера немалые сложности из-за его известной неприязни к нацистам. Он публично отрекся от своих взглядов (и много лет спустя извинялся за это перед Эйнштейном). Но уловка не сработала: он лишился работы, поскольку считался политически неблагонадежным, и ему пришлось бежать в Италию.

В конце концов Шредингер поселился в Дублине[2]. В 1944 году вышла его книга "Что такое жизнь?" — захватывающая, но неудачная попытка применить квантовую физику к живым организмам. Его идеи основывались на концепции "негэнтропии" — тенденции живого не подчиняться второму закону термодинамики (или как-то обходить его действие). Шредингер подчеркивал, что гены живых существ должны представлять собой некие сложные молекулы, содержащие закодированные инструкции. Эти молекулы теперь называются ДНК, но их структура была открыта только в 1953 году Фрэнсисом Криком и Джеймсом Уотсоном, вдохновленными — отчасти — Шредингером.

1 Дон — преподаватель, член совета колледжа в Кембридже или Оксфорде. *(Примеч. перев.)*

2 Быть может, уместно напомнить, что Республика Ирландия (столица — Дублин; англ. Dublin, ирл. Baile Átha Cliath) придерживалась *нейтралитета* во Второй мировой войне. *(Примеч. перев.)*

В Ирландии Шредингер не изменял своему свободному отношению к сексуальности, вступая в связи со студентками и став отцом двух детей от разных матерей.

Он умер в Вене от туберкулеза в 1961 году.

Более всего Шредингер известен благодаря своему коту. Не настоящему коту, а тому, который участвует в мысленном эксперименте. Его нередко интерпретируют как причину, по которой шредингеровские волны[1] нельзя рассматривать как нечто реально физическое, а надо воспринимать как некое завуалированное описание, которое само по себе проверить невозможно, но из которого проистекают верные следствия. Однако эта интерпретация не вполне последовательна — если волны не существуют, то почему выводимые из них следствия столь хорошо применимы?

Как бы то ни было, вернемся к коту. Согласно квантовой механике, частицы–волны могут интерферировать друг с другом, налагаясь одна на другую и при этом усиливая друг друга в тех случаях, когда пик одной волны попадает на пик другой, или же гася друг друга, когда пик накладывается на провал. Поведение такого типа называется суперпозицией, так что квантовые частицы–волны могут создавать суперпозиции, накладываясь друг на друга, — откуда следует, что они потенциально содержат множество возможных состояний, но при этом не находятся ни в одном из них самом по себе. Согласно Бору и знаменитой "копенгагенской интерпретации" квантовой тео-

[1] Будем считать, что под *шредингеровскими волнами* понимаются решения уравнения Шредингера. Как указывал автор, это уравнение играет фундаментальную роль в квантово-механическом описании материи, однако это описание носит не вполне непосредственный характер, а потому имеются вопросы (обсуждаемые до сих пор) о том, "что же значат" эти решения "сами по себе", то есть об их интерпретации. *(Прим. перев.)*

рии, в этом-то и состоит естественное положение вещей. Только тогда, когда мы производим наблюдение какой-либо физической величины, мы заставляем ее выйти из некоторой квантовой суперпозиции и оказаться в каком-то единственном "чистом" состоянии.

Такая интерпретация хорошо работает для электронов, однако Шредингер задался вопросом о том, что она будет означать для кота. В его мысленном эксперименте запертый в ящике кот может находиться в суперпозиции состояний жизни и смерти. Когда вы открываете ящик, вы совершаете наблюдение над котом и тем самым заставляете его оказаться или в одном состоянии, или в другом[1]. Как заметил в "Маскараде" Терри Пратчетт, коты устроены не так. Кот-супермачо Грибо появляется из ящика в третьем состоянии — до чертиков разъяренным.

Шредингеру тоже было известно, что коты устроены иначе, хотя и по другим причинам. Электрон — микроскопическая вещица и ведет себя тем или иным образом на квантовом уровне. Он обладает (когда мы потрудимся сделать соответствующее измерение) определенной координатой, или скоростью, или спином, описать которые относительно несложно[2]. Кот

1 Кот помещен в закрытый ящик, где имеется механизм, содержащий радиоактивное ядро и емкость с ядовитым газом. Вероятность распада ядра в течение часа составляет 50%. Если ядро распадается, то открывается емкость с газом и кот умирает. Согласно квантовой механике, пока над ядром не производится наблюдения, его состояние описывается суперпозицией двух состояний — распавшегося ядра и нераспавшегося ядра, следовательно, кот в ящике и жив, и мертв одновременно. Но, когда ящик открывают, экспериментатор увидит только какое-нибудь одно конкретное состояние — "ядро распалось, кот мертв" или "ядро не распалось, кот жив". *Когда* же кот умирает? См. также http://ru.wikipedia.org/wiki/Кот_Шрёдингер. *(Примеч. перев.)*

2 Квантово-механическая сложность при описании микроскопических частиц состоит в том, что частица (скажем, электрон) обладает *или* определенной координатой, *или* определенной скоростью (см. о принципе неопределенности ниже). Кот же, как мы знаем, обладает этими двумя характеристиками одновременно. *(Примеч. перев.)*

же — существо макроскопическое, и с ним все по-другому. Можно устроить суперпозицию состояний электрона, но не кота. У нас с женой две кошки, и когда они пытаются устроить суперпозицию, результат состоит из летящей шерсти и двух крайне негодующих кошек. Жаргонное слово здесь — это "декогеренция", которая объясняет, почему в повседневной жизни большие квантовые системы, подобные котам, выглядят как привычные "классические" системы. Декогеренция говорит нам, что кот состоит из столь большого числа частиц–волн, что они все перепутываются и разрушают суперпозицию за время, меньшее, чем свет затрачивает на прохождение расстояния, равного диаметру электрона. Таким образом, коты, являясь макроскопическими системами, состоящими из очень большого числа квантовых частиц, ведут себя как коты. Они могут быть или живыми, или мертвыми, но не могут находиться в обоих этих состояниях сразу.

Тем не менее на достаточно малых масштабах — а мы говорим о вещицах по-настоящему малых, а вовсе не таких, которые можно разглядеть в обычный микроскоп, — вселенная ведет себя в точности так, как ей велит квантовая физика, и ей удается делать две разные вещи в один момент времени. И это все меняет.

Насколько странным должен быть квантовый мир, стало ясно из работ Вернера Гайзенберга. Гайзенберг был блестящим физиком-теоретиком, но его знакомство с экспериментом было столь ничтожным, что на экзамене, необходимом для защиты диссертации, он не смог ответить на простые вопросы о телескопах и микроскопах. Он даже не знал, как работает аккумуляторная батарея.

Август Гайзенберг женился на Анне Велайн в 1899 году. Он был лютеранином, а она — католичкой, и ей пришлось перейти

в его религию, для того чтобы их брак состоялся. У них было много общего: он был преподавателем и специалистом по Античности, специализирующимся в древнегреческом, она же была дочерью преподавателя и специалиста по греческим трагедиям. Их первый сын Эрвин родился в 1900 году и стал химиком. Второй — Вернер — родился в 1901-м и изменил мир.

Германия в то время еще была монархией, и профессия преподавателя означала высокий социальный статус, так что Гайзенберги жили в финансовом отношении благополучно и могли отдать своих детей в хорошие школы. В 1910 году Август стал профессором средневекового и современного греческого языка в Мюнхенском университете, и семья переехала в этот город. В 1911 году Вернер начал обучение в Школе короля Максимилиана в Мюнхене, где до этого учился и Планк. Дед Вернера Николаус Велайн был директором школы. Мальчик рос сообразительным и живым, отчасти из-за того, что его отец побуждал его соперничать со старшими, и демонстрировал замечательные способности к математике и естественным наукам. Он был, кроме того, одарен еще и музыкально и освоил фортепиано столь хорошо, что в 12-летнем возрасте выступал на школьных концертах.

Позднее Гайзенберг писал, что его "интерес и к языкам, и к математике проснулся достаточно рано". Он получал высшие оценки по греческому и латыни и хорошо учился по математике, физике и религии. Худшими для него предметами были физкультура и немецкий. У него был превосходный учитель математики по имени Кристоф Вольф, который развивал способности Вернера, давая ему решать специальные задачи. Скоро ученик превзошел учителя, и в школьной характеристике Гайзенберга было сказано: "Его независимая работа в области математики и физики далеко выходит за школьные требования". Он самостоятельно изучил теорию относительности, отдавая предпочтение ее математическому содержанию перед физиче-

скими следствиями. Когда родители попросили его позаниматься со студенткой из местного колледжа, чтобы подготовить ее к экзаменам, он самостоятельно освоил математический анализ — предмет, не входящий в школьную программу. В нем развился интерес к теории чисел, про которую он говорил, что "она понятна, там все устроено так, что можно понять все до самого конца".

Чтобы помочь Вернеру совершенствоваться в латыни, отец принес ему кое-какие старые статьи по математике, написанные на этом языке. Среди них была диссертация Кронеккера, посвященная некоторому разделу ("комплексные единицы") алгебраической теории чисел. Кронеккер — мирового уровня специалист по теории чисел — знаменит своей верой, что "Господь сотворил целые числа, а все остальное — дело рук человека". Гайзенберг так воодушевился, что даже предпринял попытку доказательства Последней теоремы Ферма. Проведя в школе девять лет, он закончил ее первым учеником в своем классе и поступил в Мюнхенский университет.

Когда разразилась Первая мировая война, союзники блокировали Германию. Еды и топлива не хватало; школу пришлось закрыть, потому что ее нечем было отапливать, и как-то раз Вернер так ослабел от голода, что свалился с велосипеда в канаву. Отец и учителя сражались на фронте; молодые люди, остававшиеся в тылу, проходили военную подготовку и подвергались националистической обработке. Конец войны принес с собой и конец немецкой монархии, и Бавария на короткое время приобрела социалистическое правительство в советском духе, но в 1919 году пришедшие из Берлина немецкие войска выбили социалистов и восстановили более умеренную социальную демократию.

Как и бóльшая часть его поколения, Вернер расстался с иллюзиями после поражения Германии и обвинял старших в военной неудаче. Он стал вожаком группы, связанной с Новой

Молодежью — экстремистской организацией правого толка, которая ставила своей целью восстановление монархии и мечтала о Третьем Рейхе. Многие отряды Новой Молодежи были антисемитскими, но в группу Вернера входило несколько еврейских мальчиков. Он проводил много времени с этими ребятами, устраивая с ними походы и экскурсии и в целом пытаясь воссоздать романтическое представление о Германии, какой она некогда была, но эти мероприятия прекратились в 1933 году, когда когда Гитлер запретил все молодежные организации, кроме учрежденных им самим.

В 1920 году Вернер прибыл в Мюнхенский университет, намереваясь стать чистым математиком, пока собеседование с одним из профессоров чистой математики не отвратило его от этой идеи. Вместо этого он решил изучать физику под руководством Арнольда Зоммерфельда. Мгновенно оценив способности Вернера, Зоммерфельд позволил ему посещать лекции для старшекурсников. Вскоре Вернер выполнил оригинальное исследование, посвященное квантовому подходу к строению атома. Диссертацию он защитил в 1923 году, побив университетский рекорд скорости. В том же году Гитлер предпринял попытку свергнуть правительство Баварии, получившую название "пивной путч" и задуманную как прелюдия марша на Берлин, однако попытка эта провалилась. Свирепствовала безудержная гиперинфляция, Германия рассыпалась.

Вернер продолжал работать. Он сотрудничал со многими ведущими физиками — все они размышляли о квантовой теории, поскольку именно в этой области и происходило все самое главное. Он работал ассистентом Макса Борна, пытаясь создать улучшенную теорию атома. Гайзенбергу пришло в голову представлять состояния атома в терминах частот, наблюдаемых в его спектре, — т. е. в терминах того вида света, который мог испускаться атомом. Идею эту он развил до уровня некоторой занятной математики, оперирующей списками чисел. Борн в

какой-то момент осознал, что списки такого типа представляют собой нечто вполне добропорядочное; математики называют их матрицами. Обрадованный тем, что его идеи оказались осмысленными, Борн отправил статью в печать. По мере своего развития эти идеи вызревали в новую, последовательную математику квантовой теории — матричную механику. Она воспринималась как конкурент шредингеровской волновой механики.

Кто же был прав? Оказалось, что две теории тождественны друг другу. Это в 1926 году обнаружил Шредингер. Они были просто двумя различными математическими представлениями одних и тех же базисных концепций, подобно тому как эвклидовы методы и алгебра дают два эквивалентных способа смотреть на геометрию. Сначала Гайзенберг не мог этому поверить, поскольку суть его матричного подхода состояла в нарушении непрерывности — в существовании прыжков, которыми электрон изменяет свое состояние. Элементы в его матрицах[1] были связаны с изменениями энергии. Он никак не мог понять, как волны — непрерывные сущности — могут моделировать скачки (т. е. разрывы). В письме к австро-швейцарскому физику Вольфгангу Паули он писал: "Чем больше я думаю о физической части теории Шредингера, тем более отталкивающей я ее нахожу... То, что Шредингер пишет о возможности наглядного представления своей теории — "вероятно, не совсем верно", — другими словами — чушь". В действительности эти разногласия были частью гораздо более давнего спора, в котором Бернулли и Эйлер расходились по вопросу о решениях волнового уравнения. У Бернулли была формула для решений, но

[1] Т. е. те самые числа, которые и составляют *список* (лучше — таблицу), называемый матрицей. *(Примеч. перев.)*

Эйлер не мог понять, как эта формула, выглядевшая непрерывной, иногда умудрялась давать разрывные решения. Тем не менее Бернулли был прав — как и Шредингер. Пусть его *уравнения* непрерывны, но многие свойства их решений могут оказаться дискретными — случай, к которому относятся и уровни энергии.

Большинство физиков высказывались в пользу картины волновой механики, потому что она более понятна интуитивно. Матрицы же были немного слишком абстрактными. Гайзенберг по-прежнему предпочитал свои списки, потому что они были составлены из наблюдаемых величин, тогда как экспериментально зарегистрировать какую-нибудь шредингеровскую волну не представлялось возможным. В действительности копенгагенская интерпретация квантовой теории, драматизированная участием в ней шредингеровского кота, утверждала, что всякая попытка зарегистрировать шредингеровскую волну приведет к "коллапсу" волны в уединенный пик. Так что Гайзенберг проявлял все бóльшую и бóльшую озабоченность тем, как и какие аспекты квантового мира можно измерять. Каждый элемент из его списков можно измерить. С одной шредингеровской волной этого сделать нельзя. Гайзенберг воспринял это различие как серьезнейшую причину сделать выбор в пользу матриц.

Следуя такой логике рассуждений, он обнаружил, что в принципе можно измерить координату частицы с любой желаемой точностью — но за это придется заплатить высокую цену, потому что чем более точно мы знаем координату частицы, тем менее точно мы можем знать ее импульс. И наоборот, если удалось измерить импульс с очень высокой точностью, то теряется информация о координате. Тот же баланс имеет место в отношении энергии и времени. Можно измерить или одно, или другое, но не то и другое вместе — если, конечно, нужны высокоточные измерения.

И проблема лежала вовсе не в области применяемых экспериментальных процедур; таково свойство, внутренне присущее квантовой теории. Гайзенберг изложил свою аргументацию в письме к Паули в феврале 1927 года. Письмо в конце концов переросло в статью, и идея Гайзенберга получила название принципа неопределенности. Этот принцип представлял собой один из первых примеров внутренних ограничений, присущих физике. Другой пример — это утверждение Эйнштейна о том, что ничто не может двигаться быстрее света.

В 1927 году Гайзенберг стал самым молодым в Германии профессором, и произошло это в Лейпцигском университете. В 1933 году — том самом, когда Гитлер пришел к власти — Гайзенберг получил Нобелевскую премию по физике. Это сделало его чрезвычайно влиятельной фигурой, а его желание остаться в Германии во времена нацистского режима заставило многих думать, что Гайзенберг и сам был нацистом. Насколько можно судить, это не так. Но он был патриотом, и это привело его к связи с нацистами и к невольному соучастию во многих их действиях. Имеются свидетельства, что Гайзенберг пытался помешать властям, когда они принялись изгонять евреев с университетских должностей, но эффекта его попытки не возымели. В 1937 году о нем отзывались как о "белом еврее", и он находился под угрозой отправиться в концентрационный лагерь, но через год с него снял подозрения Генрих Гиммлер — глава СС. В том же 1937 году Гайзенберг женился на Элизабет Шумахер, дочери экономиста. Их первыми отпрысками были близнецы; всего они произвели на свет семерых детей.

Во время Второй мировой войны Гайзенберг был одним из главных физиков, занимавшихся созданием в Германии ядерного оружия — атомной бомбы. Он работал на ядерных реакторах в Берлине, в то время как жена и дети отправились в Баварию, в летний дом их семьи. Роль Гайзенберга в немецком атомном проекте оказалась весьма неоднознач-

ной. Когда война закончилась, его арестовали британцы и в течение шести месяцев допрашивали в сельском доме недалеко от Кембриджа. Протоколы его допросов, недавно ставшие доступными, лишь углубили полемику. Гайзенберг заявляет, что его интересы ограничивались созданием ядерного реактора ("engine"), и он не собирался участвовать в создании бомбы: "Я бы сказал, что у меня не вызывала сомнений наша способность создать урановый реактор, но я никогда не думал, что мы сделаем бомбу, и в глубине своего сердца я даже был рад, что речь шла о реакторе, а не о бомбе. Должен это признать". Правдивость этого заявления до сих пор горячо дебатируется.

После войны, отпущенный из британского заключения, Гайзенберг вернулся к работам по квантовой теории. Он умер от рака в 1976 году.

Немецкие создатели квантовой теории в большинстве своем происходили из интеллектуальной среды — они были детьми врачей, юристов, ученых или представителей других подобных профессий. Они жили в дорогих домах, играли на музыкальных инструментах и участвовали в текущей социальной и культурной жизни. Великому английскому создателю квантовой механики выпало совсем иное и куда более печальное детство — деспотичный и определенно неуравновешенный отец, оторванный от собственных родителей, да и от всей своей семьи, и мать, настолько забитая и запуганная, что она с двумя детьми ела на кухне, пока муж и младший сын в полном молчании обедали в столовой.

Отец — Шарль (Чарльз) Адриен Ладислас Дирак — родился в швейцарском кантоне Вале в 1866 году и в 20-летнем возрасте сбежал из дома. Чарльз прибыл в Бристоль в 1890 году, но стал британским подданным лишь в 1919-м. В 1899 году он же-

нился на дочери морского капитана Флоренс Ханне Холтен, и на следующий год появился на свет их первенец Реджинальд. Два года спустя к семейству прибавился Поль Адриен Морис; еще через четыре года родилась дочь Беатрис.

До 1905 года (когда он поехал навестить мать в Швейцарии — через десять лет после смерти отца) Чарльз не сообщал родителям ни о своей женитьбе, ни о том, что у них есть внуки.

Чарльз преподавал в Торгово-Техническом колледже в Бристоле. В целом он считался неплохим преподавателем, но, кроме того, славился полным отсутствием человеческих чувств и чрезвычайной строгостью и требовательностью. Он был ревнителем строжайшей дисциплины и муштры, но такими были тогда многие преподаватели.

Поль — интроверт от природы — стал еще более выраженным интровертом в силу странной отчужденности отца и отсутствия всякого общения. Чарльз требовал, чтобы Поль говорил с ним только по-французски, расчитывая таким образом подтолкнуть ребенка к изучению этого языка. Поскольку Поль говорил по-французски очень плохо, он предпочитал не говорить вовсе. Вместо этого он проводил долгие часы, размышляя о мире природы. Не способствующее общению устройство трапез в доме Дираков также, по-видимому, проистекало из правила, что разговор должен вестись исключительно по-французски. Так и осталось неясным, активно ли ненавидел Поль своего отца или же просто недолюбливал, но когда Чарльз умер, главное ощущение Поля выражалось словами: "Теперь я чувствую себя намного свободнее".

Чарльз гордился интеллектуальными способностями Поля и питал немалые амбиции в отношении своих детей — имея при этом в виду, что они будут делать в жизни то, что он для них распланировал. Когда Реджинальд сказал, что хочет быть врачом, Чарльз настоял, чтобы он стал инженером. В 1919 году Реджинальд с трудом получил диплом инженера; через пять лет,

работая над инженерным проектом в Вулверхэмптоне, он покончил с собой.

Поль жил дома с родителями и также изучал инженерное дело — в том же колледже, что и его брат. Его любимым предметом была математика, но он решил не посвящать себя ее изучению. Возможно, он не хотел идти против воли отца; но, помимо этого, он находился под воздействием ложного впечатления — достаточно распространенного до сих пор, — что единственное, к чему может привести карьера математика, — это преподавание в школе. Никто не сказал ему, что существуют и другие возможности, и одна из них — исследовательская работа.

Спасение явилось в форме газетного заголовка. Первая страница *Times* за 7 ноября 1919 года пронзительно возглашала: РЕВОЛЮЦИЯ В НАУКЕ. НОВАЯ ТЕОРИЯ ВСЕЛЕННОЙ. ИДЕИ НЬЮТОНА НИСПРОВЕРГНУТЫ. Посередине второй колонки красовался подзаголовок ПРОСТРАНСТВО "ПОКОРОБИЛОСЬ". Внезапно все стали говорить о теории относительности.

Напомним, что, согласно одному из предсказаний общей теории относительности, гравитация искривляет траекторию распространения света, причем на величину, вдвое превышающую ту, что предсказывается ньютоновскими законами. Фрэнк Дайсон и сэр Артур Стенли Эддингтон предприняли экспедицию на остров Принсипе у побережья Западной Африки, где предстояло наблюдать солнечное затмение.

Одновременно Эндрю Кроммлин из Гринвичской обсерватории возглавил вторую экспедицию в Собрал в Бразилии[1]. Оба отряда наблюдали звезды вблизи края солнечного диска во время полного солнечного затмения и обнаружили легкие

1 Об экспедиции Эддингтона говорится на стр. 306. "Популяризировал" теорию относительности именно Эддингтон. Измерения же в Собрале оказались как раз ближе к предсказанию ньютоновской теории, однако эти данные были отвергнуты из-за обнаруженного в телескопах дефекта. *(Примеч. перев.)*

сдвиги в кажущихся положениях звезд, согласующиеся с предсказанием Эйнштейна, но не с предсказанием ньютоновской механики.

Эйнштейн, проснувшийся знаменитым, послал своей матери открытку такого содержания: "Дорогая мама, сегодня радостная новость. Х. А. Лоренц телеграфировал, что английские экспедиции действительно доказали отклонение света Солнцем". Дирак заглотил наживку: "Меня захватило всеобщее возбуждение, вызванное теорией относительности. Мы постоянно об этом говорили. Студенты обсуждали ее между собой, однако имелось слишком мало точной информации для того, чтобы двигаться дальше". Общественное знание о теории относительности по большей части сводилось к словам; философы утверждали, что они уже многие годы знали, что "все на свете относительно", и выказывали пренебрежение к новой физике, как к старой шляпе. К сожалению, они лишь выставляли напоказ свое невежество и легковерность, с которой они переняли некорректную терминологию.

Поль сходил на несколько лекций по теории относительности, прочитанных Чарли Броудом, который в то время был профессором философии в Бристоле, но математическое содержание этих лекций его не удовлетворило. В конце концов он купил экземпляр эддингтоновской книги "Пространство, время и тяготение" и самостоятельно освоил необходимые разделы математики и физики. Еще до своего отъезда из Бристоля он досконально изучил и специальную, и общую теории относительности.

Полю хорошо давалась теория, зато лабораторные работы были для него кошмаром. Позднее физики стали говорить об "эффекте Дирака": стоило только ему войти в лабораторию, как

все эксперименты там начинали выходить из-под контроля. Мир инженерных наук для него означал бы катастрофу. Он получил блестящий диплом, но некоторое время оставался безработным, поскольку это было время послевоенной экономической депрессии. По счастью, ему представилась возможность изучать математику в Бристольском университете, причем за обучение уже было заплачено, и он ухватился за этот шанс. Его специализацией стала прикладная математика.

В 1923 году Поль стал аспирантом в Кембриджском университете, где столкнулся с серьезными проблемами из-за своей застенчивости. Он не интересовался никакими видами спорта, неохотно заводил друзей и всячески избегал женщин. Время он проводил главным образом в библиотеке. Еще в 1920 году он проработал все лето на той же фабрике, что и его брат Реджинальд. Два брата периодически встречались на улице, но часто проходили друг мимо друга, не останавливаясь, чтобы перекинуться парой слов, — настолько укоренилась семейная привычка к молчанию.

Поль быстро стал заметной фигурой; за шесть месяцев исследований он написал свою первую научную работу. Бурным потоком за ней последовали другие. Именно тогда, в 1925 году, он и столкнулся с квантовой механикой. Во время одной из долгих осенних прогулок по окрестностям Кембриджа он вдруг задумался о гайзенберговских "списках". Они представляют собой матрицы, а матрицы не коммутируют[1] — обстоятельство, которое изначально не давало покоя Гайзенбергу. Дираку была известна идея Ли, что в такой ситуации важную роль играет не произведение AB, а коммутатор $AB - BA$, и он всерьез заинте-

1 Матрицы можно перемножать друг с другом определенным способом, который снова дает матрицу и при этом обобщает умножение чисел в том смысле, что если матрицы состоят из одного-единственного числа каждая, то умножение совпадает с обычным умножением; но в общем случае результат произведения двух матриц, в отличие от произведения чисел, зависит от порядка сомножителей. *(Примеч. перев.)*

ресовался захватывающей идеей, что некий весьма похожий объект имеется в гамильтоновом формализме описания механики, где он называется скобкой Пуассона. Но Дирак никак не мог вспомнить соответствующую формулу.

Мысли об этом занимали его почти всю ночь, а на утро он "поспешил в одну из библиотек, прямо к моменту ее открытия, и там посмотрел в уиттекеровской "Аналитической динамике", как выглядит скобка Пуассона; оказалось, это было именно то, что требовалось". Его открытие состояло вот в чем: коммутатор двух квантовых матриц равен скобке Пуассона соответствующих классических переменных, умноженной на постоянную, равную $ih/(2\pi)$. Здесь h — постоянная Планка, i — это $\sqrt{-1}$, а π — ну, это, конечно, π.

Это было впечатляющее открытие. Оно говорило физикам, как надо превращать классические механические системы в квантовые. Стоящая за этим математика была необычайно элегантна — она соединяла две глубокие, но до того момента никак не связанные теории. На Гайзенберга это произвело впечатление.

Вклад Дирака в квантовую теорию разнообразен, и я выберу лишь одно из высших его достижений — релятивистскую теорию электрона, создание которой относится к 1927 году. К тому времени теоретики, занимавшиеся квантовой физикой, знали, что электроны обладают спином, который представляет собой нечто аналогичное моменту вращения мячика вокруг своей оси, однако характеризуется некоторыми весьма странными свойствами, которые делают эту аналогию далеко не полной. Если взять вращающийся мячик и повернуть систему на полные 360°, то и мяч, и момент его вращения окажутся в тех же положениях, которые они занимали до поворота. Однако если вы сделаете то же самое с электроном, то спин его изменит свой знак. Чтобы спин вернулся в первоначальное положение, поворачивать надо на 720°.

Это в действительности довольно сильно напоминает кватернионы, интерпретация которых как "вращений" пространства включает тот же выверт. На математическом языке, вращения пространства образуют группу SO(3), но соответствующая группа в случае кватернионов, как и в случае электронов, есть SU(2). Эти две группы почти одинаковы, только SU(2) "в два раза больше" — она в некотором смысле построена из двух экземпляров группы SO(3). Такое явление называется "двулистным накрытием", из-за чего вращение на 360° и отвечает вращению на удвоенный угол.

Дирак не использовал кватернионы, да и группами не пользовался. Но в конце 1927 года, к наступлению Рождества, он предложил свои спиновые матрицы, которые играют ту же самую роль. Позднее математики обобщили матрицы Дирака на спиноры, которые оказались очень важными в теории представлений групп Ли.

Спиновые матрицы позволили Дираку сформулировать релятивистскую квантовую модель электрона. Из модели получалось все, ради чего она создавалась, и даже немного больше. Наряду с ожидаемыми решениями с положительной энергией она предсказывала решения с отрицательной энергией. Анализируя это парадоксальное свойство, Дирак в конце концов, отбросив несколько неудачных идей, пришел к концепции "антиматерии" — т. е. к идее о том, что всякая частица имеет соответствующую античастицу с той же массой, но с противоположным зарядом. Античастица электрона представляет собой позитрон; он не был известен, пока Дирак не предсказал его существование.

Законы физики остаются (почти) неизменными, если заменить каждую частицу на ее античастицу — такая операция является симметрией природы. Дирак, на которого теория групп никогда не производила особенно большого впечатления, открыл одну из наиболее пленительных групп симметрии в природе.

После 1935 года и до момента своей смерти (в Таллахаси в 1984 году) Дирак придавал огромное значение математическому изяществу физических теорий и в своей работе использовал этот принцип в качестве основополагающего. То, что не является прекрасным, считал он, не может быть верным. В 1956 году, во время посещения Московского государственного университета, следуя традиции записывать мудрые слова на доске, дабы они сохранились для потомства, он написал: "Физический закон должен обладать математической красотой". И он говорил о "высоком математическом качестве" природы. Однако похоже, что теорию групп он никогда не считал прекрасной, быть может, из-за того, что подход физиков к группам, как правило, включает в себя громоздкие вычисления. Лишь математики, как представляется, оказались настроенными на изысканную красоту групп Ли.

Прекрасна она или нет, но благодаря сыну одного кожевника теория групп вскоре заняла свое место среди основных предметов, которые следовало изучать всякому подающему надежды квантовому теоретику.

На рубеже двадцатого столетия кожевенное дело было серьезным занятием (да, собственно, таким и остается). В те дни, однако, даже небольшое предприятие по дублению и продаже кожи могло приносить своему хозяину очень неплохой доход. Хорошим примером такого хозяина был Антал Вигнер, возглавлявший сыромятную мастерскую. Он и его жена Эрсебет были еврейского происхождения, однако не практиковали иудаизм. Они жили в государстве, которое тогда называлось Австро-Венгрией, в городе Пешт. После соединения с соседней Будой он превратился в современный Будапешт — столицу Венгрии.

Второй из трех их сыновей, Йена Паал Вигнер, родился в 1902 году и в возрасте от пяти до десяти лет обучался дома, у

частного учителя. Вскоре после начала школьных занятий у Йены обнаружили туберкулез и отправили на лечение в австрийский санаторий. Он пробыл там шесть недель, прежде чем выяснилось, что диагноз неверный. (Окажись он правильным, мальчик, скорее всего, не дожил бы до зрелого возраста.)

Поскольку мальчика заставляли почти постоянно лежать, он занимал себя решением математических задач, просто чтобы убить время. "Мне приходилось дни напролет лежать в шезлонге, — писал он позднее, — и я отчаянно пытался придумать, как построить треугольник по трем заданным высотам". Высоты треугольника — это три линии, которые проходят через вершину и пересекают противоположную сторону под прямым углом. Если треугольник дан, то найти его высоты легко. Решить обратную задачу определенно труднее.

После выписки из санатория Йена продолжал размышлять о математике. В 1915 году он поступил в Лютеранскую гимназию в Будапеште, где в то время уже учился другой мальчик, которому предстояло стать одним из ведущих мировых математиков, — Янош (позднее — Джон) фон Нейман. Однако из знакомство оставалось лишь весьма поверхностным, поскольку фон Нейман предпочитал держаться особняком.

В 1919 году Венгрию наводнили коммунисты, и Вигнеры бежали в Австрию, вернувшись в Будапешт позднее, в том же году, когда коммунистов оттуда выбили. Все семейство перешло в лютеранство, но на Йену это большого влияния не оказало — как он говорил позднее, потому что он был "лишь умеренно религиозен". В 1920 году Йена закончил школу одним из лучших в классе. Он намеревался стать физиком, но отец хотел, чтобы он вступил в семейный кожевенный бизнес. Поэтому вместо того, чтобы получить диплом по физике, Йена стал изучать химическую инженерию: отец полагал, что она будет способствовать бизнесу. Он поступил на первый курс Будапештского технического института, а потом перешел в Высшую техническую

школу в Берлине. В конце концов он стал проводить бóльшую часть ценного времени в химической лаборатории, где ему нравилось, и меньшую часть — на теоретических занятиях.

Тем не менее Йена не оставлял мыслей о физике. Берлинский университет находился неподалеку, а кого там можно было увидеть, как не Планка и Эйнштейна вкупе с другими знаменитостями? Йена не преминул воспользоваться этой географической близостью и стал ходить на лекции бессмертных. Он закончил свою диссертацию об образовании и распаде молекул и, как и планировалось, начал работать на кожевенном заводе. Как и следовало ожидать, идея оказалась не слишком удачной. "Дела мои в дубильне шли не очень хорошо... Я чувствовал себя там не в своей тарелке... У меня не было ощущения, что это моя жизнь". Его жизнью были математика и физика.

В 1926 году с ним связался кристаллограф из Института Кайзера Вильгельма, которому требовался ассистент. Обязанности соединяли в себе в химическом контексте оба основных интереса Вигнера. Эта работа оказала огромное влияние на его карьеру, а тем самым и на развитие ядерной физики, поскольку познакомила Вигнера с теорией групп — математикой симметрии.

Первые существенные применения теории групп к физике состояли в классификации всех 230 возможных кристаллических структур. Вигнер писал: "Я получил письмо от кристаллографа, который хотел найти ответ на вопрос, почему положения, которые занимают атомы в кристаллической решетке, соответствуют осям симметрии. Кроме того, он сказал мне, что это должно иметь отношение к теории групп и что мне следует прочитать книгу по теории групп, а после этого найти ответ и сообщить ему".

Возможно, Антал Вигнер был в не меньшем ужасе, чем его сын, от сомнительных успехов последнего в области кожевенного дела, а потому позволил ему стать асситентом кристалло-

графа. Йена начал с чтения нескольких статей Гайзенберга по квантовой теории и развил теоретический метод вычисления спектра атома с тремя электронами. Он также понял, что этот метод может стать невероятно сложным, когда число электронов превысит три. В этот момент он обратился за советом к своему старому знакомому фон Нейману, который предложил ему почитать о теории представлений групп. Эта область математики в избытке содержала известные в то время алгебраические концепции и сложные методы, в особенности — матричную алгебру. Однако благодаря своим занятиям кристаллографией и близкому знакомству с основным на тот момент учебником по алгебре — *Lehrbuch der Algebra* Генриха Вебера — Вигнер преодолел матрицы без проблем.

Совет фон Неймана оказался очень хорош. Если атом обладает некоторым числом электронов, то, поскольку все электроны тождественны, атом "не знает", какой электрон какой. Другими словами, уравнения, описывающие излучение, испущенное данным атомом, должны быть симметричны относительно всех перестановок его электронов. Используя теорию групп, Вигнер разработал теорию спектра атомов с любым числом электронов.

До этого момента его работа шла в традиционном русле классической физики. Но все по-настоящему захватывающее творилось в квантовой теории. Тогда Вигнер и принялся за главный труд своей жизни — применение теории представлений групп к квантовой механике.

Занятно, что занимался он этим несмотря на свою новую работу, а не благодаря ей. Мэтр немецкой математики Давид Гильберт выказывал живой интерес к математическим принципам, лежащим в основе квантовой теории, и ему в работе требовался ассистент. В 1927 году Вигнер отправился в Геттинген и был принят там в возглавляемую Гильбертом исследовательскую группу. По идее, его роль должна была состоять в том, что-

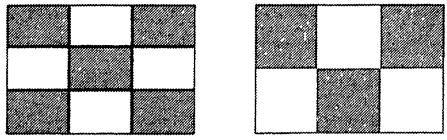
бы поддерживать связь с физикой, которая подпитывала бы обширные математические таланты Гильберта. На деле же получилось не совсем так, как задумывалось. Гильберт и Вигнер виделись за год всего пять раз. Гильберт был уже стар, утомлен и все более склонялся к уединению. Так что Вигнер вернулся в Берлин, прочитал лекции по квантовой механике и продолжил работу над своей самой знаменитой книгой "Теория групп и ее применения к квантовой механике атомных спектров".

Его частично предвосхитил Герман Вейль, также написавший книгу о группах в квантовой теории. Но основной интерес Вейля концентрировался на фундаментальных вопросах, тогда как целью Вигнера было решение конкретных физических задач. Вейль гнался за красотой, а Вигнер искал истину.

Подход Вигнера к теории групп можно понять в простом классическом контексте — на примере колебаний барабана. Музыкальные барабаны, как правило, округлые, но в принципе могут быть любой формы. При ударе палочкой мембрана барабана начинает вибрировать и создает звук. Барабаны различных форм производят различные звуки. Полоса частот, которые может создать данный барабан, называемая его спектром, сложным образом зависит от его формы. Если барабан симметричен, то можно ожидать, что симметрия появится и в его спектре. Она там и появляется, но довольно тонким образом.

Представим себе прямоугольный барабан — из числа тех, какие нечасто увидишь за пределами математических факультетов. Типичные колебания такого барабана разбивают его поверхность на некоторое число меньших прямоугольников, как, например, показано на рисунке.

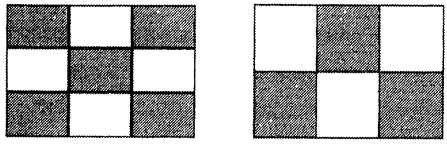
На рисунке мы видим различные картины колебаний с двумя различными частотами. Это мгновенные снимки этих колебаний. Темные области смещены вниз, а светлые — вверх.



Две картины колебаний прямоугольного барабана.

Из симметрий барабана вытекают следствия для картин колебаний, поскольку любое преобразование симметрии барабана можно применить к любой возможной картине колебаний, что даст другую возможную картину колебаний. Таким образом, каждая картина колебаний включается в набор других, связанных с ней в соответствии с симметрией. Однако каждая отдельная картина колебаний не обязана иметь те же симметрии, что и барабан. Например, прямоугольник симметричен относительно вращения на 180°. Если применить это преобразование симметрии к двум приведенным выше картинам, они примут вид, показанный на рисунке.

Левая картина не изменилась, так что она, как и барабан, обладает симметрией относительно данного вращения. Но на правой темные и светлые области поменялись местами. Этот эффект называется спонтанным нарушением симметрии, и он очень распространен в физических системах: он возникает, когда в симметричной системе имеются состояния с более низкой симметрией. Левая картина не наруша-



Те же две картины колебаний прямоугольного барабана после поворота барабана на 180°.

ет симметрии, а правая — нарушает. Посмотрим внимательно на правую картину и разберемся, что следует из ее нарушенной симметрии.

Хотя исходная картина и результат ее поворота не совпадают, обе осуществляют колебания на одной и той же частоте, поскольку поворот является симметрией барабана, а следовательно, и тех уравнений, которые описывают его колебания. Поэтому спектр колебаний барабана содержит данную конкретную частоту "два раза". Может показаться, что это трудно наблюдать экспериментально, но если слегка модифицировать барабан, так, чтобы нарушить его вращательную симметрию — скажем, сделать небольшую вмятину вдоль одного из краев, — то две данные частоты начнут слегка отличаться друг от друга, и тогда мы сможем заметить наличие двух очень близких частот. Такого не случилось бы, если бы данная частота содержалась в симметричном барабане только один раз.

Вигнер понял, что тот же эффект возникает для симметричных молекул, атомов и атомных ядер. Звуки, издаваемые барабаном, становятся здесь колебаниями молекул, а спектр звуков заменяется на спектр испущенного или поглощенного света. В квантовом мире спектр создается переходами между состояниями с различными энергиями, и атом излучает фотоны, энергия которых (а потому, как учит нас Планк, и частота) соответствует разнице этих энергий. А спектр можно детектировать, используя спектроскоп. И опять же, некоторые из частот — наблюдаемые в виде спектральных линий — могут оказаться двойными (или имеющими более высокую кратность) в силу симметрии, которой обладают молекула, атом или ядро.

Как детектировать это кратности? В отличие от барабана в молекуле нельзя сделать вмятину. Но можно поместить молекулу в магнитное поле. Оно также разрушает исходную симметрию и приводит к расщеплению спектральных линий. Далее

можно использовать теорию групп — точнее, теорию представлений групп — для вычисления частот и того, как они расщепляются.

Теория представлений — одна из самых прекрасных и мощных математических теорий, но она также предъявляет высокие технические требования и содержит множество скрытых ловушек. Вигнер превратил ее в высокое искусство. Другие пытались следовать за ним по пятам.

В 1930 году американский Институт высших исследований в Принстоне предложил Вигнеру работу по совместительству, и он начал курсировать между Принстоном и Берлином. В 1933 году нацисты провели закон, запрещавший евреям работать в университетах, так что Вигнер перебрался в Соединенные Штаты на постоянное жительство — собственно в Принстон, где он поменял свое имя на англизированный вариант — Юджин Пол. Его сестра Маргит приехала к нему в Принстон и познакомилась с Дираком, находившимся там с визитом. В 1937 году, к изумлению многих, они поженились.

С браком Маргит все было хорошо, зато с работой Юджина — нет. В 1936 году Вигнер писал: "Из Принстона меня выгнали. Никто не объяснил почему. Трудно представить, насколько я зол". В действительности Вигнер сам написал заявление об уходе — по-видимому, потому, что его карьерный рост происходил недостаточно быстро. Можно предположить, что отказ Принстонского института продвигать его дальше был им воспринят как завуалированное предложение подать в отставку, так что он верил в то, что его выгнали.

Он быстро нашел новую работу в университете Висконсина, принял гражданство США и познакомился со студенткой-физиком по имени Амелия Франк. Они поженились, но в течение года Амелия умерла от рака.

В Висконсине Вигнер переключился на исследование ядерных сил и обнаружил, что ими управляет группа симметрии SU(4). Он также сделал фундаментальное открытие, относящееся к группе Лоренца, опубликовав его в 1939 году.

Однако в то время теория групп не была стандартной частью образования физика, и ее основными применениями оставались довольно специальные области кристаллографии. Для большинства физиков теория групп выглядела и сложной, и непривычной — сочетание достаточно фатальное. Квантовые физики, пришедшие в ужас от того, что свалилось им на голову, описывали происходящее как *Gruppenpest*, т. е. групповую заразу. Вигнер вызвал эпидемию, а его коллеги не желали заражаться. Однако взгляды Вигнера оказались пророческими. Теоретико-групповые методы заняли доминирующее положение в квантовой механике, поскольку влияние симметрии оказалось всепроникающим.

В 1941 году Вигнер женился во второй раз, на учительнице по имени Мари Эннетт. У них родились двое детей, Дэвид и Марта. Во время войны Вигнер, как и фон Нейман, вместе со многими ведущими математическими физиками работал над Манхэттенским проектом — созданием атомной бомбы. Ему была присуждена Нобелевская премия по физике в 1963 году.

Несмотря на долгие годы жизни в США, Вигнер неизменно скучал по своей родине. "После 60 лет в Соединенных Штатах, — писал он в старости, — я все еще более венгр, нежели американец. Американская культура по большей части от меня далека". Он умер в 1995 году. Физик Абрахам Пейс описывал его как "очень странного человека... одного из гигантов физики двадцатого столетия". Развитые им подходы заодно произвели революцию и в двадцать первом столетии.

Глава 13
Пятимерный человек

К исходу двадцатого столетия физика добилась необыкновенных успехов. Крупномасштабная структура, похоже, прекрасно описывалась общей теорией относительности. Замечательные предсказания, такие так существование черных дыр — областей пространства–времени, из которых свет не может выйти наружу, возникающих в результате коллапса массивных звезд под действием их собственной гравитации, — получили наблюдательные подтверждения. С другой стороны, структура вселенной на малых масштабах необычайно подробно и чрезвычайно точно описывалась квантовой теорией в ее современной форме, называемой квантовой теорией поля и включающей специальную (но не общую) теорию относительности.

Два змея, тем не менее, пребывали в этом раю для физиков. Один змей был "философским": две указанные выше теории, каждая из которых добилась большого успеха сама по себе, не согласовывались друг с другом. Содержавшиеся в них предположения о структуре физического мира противоречили друг другу. Общая теория относительности является детерми-

нистской — в ее уравнениях нет места случайности. Квантовая же теория содержит внутреннюю неопределенность, выражаемую принципом неопределенности Гайзенберга, и многие события, такие как распад радиоактивного атома, происходят случайным образом. Другой змей был "физическим": квантовая в своей основе теория элементарных частиц оставляла нерешенным целый ряд важных вопросов — таких как вопрос о том, почему частицы обладают именно такими массами и почему, собственно, они вообще имеют массу[1].

Многие физики полагают, что оба змея должны быть изгнаны из райских кущ одним смелым действием — объединением теории относительности и квантовой теории. Другими словами, созданием новой логически непротиворечивой теории, которая переходила бы в теорию относительности на больших масштабах и в квантовую теорию на малых. Именно этим и занимался в течение всей второй половины своей жизни Эйнштейн — и потерпел неудачу. С типичной для них скромностью физики назвали это объединение Теорией Всего. Надежда состояла в том, что всю физику удастся свести к некоторой системе уравнений, к тому же достаточно простой, чтобы она поместилась на футболке.

И это не такая уж безумная идея. Вне всякого сомнения, можно напечатать на футболке уравнения Максвелла, и лично у меня как раз сейчас есть такая — с уравнениями специальной теории относительности и заодно с надписью "Да будет Свет" на иврите. Приятель купил мне ее в тель-авивском аэропорту. Если говорить чуть серьезнее, то основные объединительные усилия с виду не сходных друг с другом физических теорий уже увенчались успехом. Теория Максвелла объединяет магнетизм и элек-

[1] Мир, в котором все частицы были бы безмассовыми (подобно фотону), был бы *более симметричен*, чем мир с массивными частицами. К тому же массы элементарных частиц порой различаются достаточно сильно — для чего тоже хотелось бы найти какую-нибудь причину. *(Примеч. перев.)*

тричество — которые некогда воспринимались как совершенно различные природные явления, питаемые полностью различными природными силами — в единое явление, электромагнетизм. Слово, возможно, слегка неказистое, но оно точно выражает процесс объединения. Более современным примером, несколько менее известным за пределами физического сообщества, является электрослабая теория, объединяющая электромагнетизм со слабыми ядерными силами (см. ниже). Следующее объединение с сильными ядерными силами оставило в стороне лишь одну вещь — гравитацию.

Ввиду этой истории представляется вполне разумным надеяться, что эту "последнюю" из имеющихся в природе сил удастся поставить на одну доску со всей остальной физикой. К сожалению, гравитация обладает рядом столь "нескладных" свойств, что такое объединение очень сложно.

Возможно, никакую Теорию Всего сформулировать невозможно. Хотя до сих пор математические уравнения — "законы природы" — с большим успехом объясняли наш мир, нет, тем не менее, гарантии, что этот процесс продолжится. Возможно, вселенная несколько менее математична, чем это представляется физикам.

Математические теории могут давать очень хорошее приближение к природе, но при этом не очевидно, что всякий раздел математики будет точно отображать реальность. Если нет, то тогда лоскутное одеяло взаимно не согласованных теорий будет давать вполне работоспособные приближения, пригодные в различных областях, — и при этом может не найтись единого управляющего всем этим принципа, который соединял бы в себе все эти приближения и работал всюду.

Разумеется, речь не идет о тривиальном списке правил типа "если — то": "Если скорости малы, а масштабы велики, то используйте ньютоновскую механику; если скорости велики и масштабы

велики, то используйте специальную теорию относительности" и т. д. Такая "наструганная" теория ужас как уродлива; если красота есть истина, то теория из кусков может быть только ложной. Но, быть может, в основе своей вселенная все-таки уродлива. Возможно, подобной "основы" нет вовсе. Мысли такого сорта не относятся к разряду самых приятных, но кто мы такие, чтобы подходить к космосу с нашей доморощенной эстетикой?

Взгляд, согласно которому Теория Всего должна существовать, заставляет вспомнить монотеистическую религию, в которой по мере течения тысячелетий различные компании богов и богинь, каждый со своей собственной областью юрисдикции, уступили место одному богу, в юрисдикции которого находится, строго говоря, все. Этот процесс обычно воспринимается как прогресс, но в нем есть что-то близкое стандартной философской ошибке, известной как "уравнивание неизвестностей", когда одна и та же причина объявляется ответственной за все необъянимые явления. Как выразился писатель-фантаст Айзек Азимов, если вас беспокоят летающие тарелки, телепатия и привидения, то очевидное объяснение состоит в том, что летающими тарелками управляют сидящие в них телепатические привидения. "Объяснения", подобные этому, создают ложное ощущение прогресса — у нас было три таинственных явления, которые требовалось объяснить, а стало одно. Но новое загадочное явление соединяет в себе три отдельных, *каждое из которых вполне может иметь свое собственное, целиком отличное от других объяснение*. Соединяя их вместе, мы упускаем из виду эту возможность.

Когда в качестве объяснения Солнца вы предлагаете солнце-бога, а для объяснения дождя — дождь-бога, вы можете наделить каждого из понравившихся вам богов своими собственными специальными свойствами. Но если вы утверждаете, что и Солнце, и дождь управляются одним и тем же богом, то может оказаться, что вы втискиваете две различные вещи в одну и ту же смиритель-

ную рубашку. Так что, в некотором роде, фундаментальная физика до определенной степени является фундаменталистской физикой. Уравнения на футболке заменяют собой имманентное божество, а развертывание следствий из этих уравнений заменяет божественное вмешательство в повседневную жизнь.

Несмотря на все эти оговорки, сердцем я заодно с физическими фундаменталистами. Я хотел бы увидеть Теорию Всего и был бы в восторге, если бы она оказалась математической, прекрасной и истинной. Полагаю, что и люди религиозные высказали бы свое одобрение, поскольку они могли бы интерпретировать ее как доказательство наличия изысканного вкуса и развитости мышления их божества.

Сегодняшние поиски Теории Всего уходят корнями в первые попытки объединить электромагнетизм и общую теорию относительности, в то время заключавшие в себе всю известную физику. Эта попытка была предпринята всего через четырнадцать лет после первой статьи Эйнштейна о специальной теории относительности, восемь лет после его предсказания, что гравитация отклоняет лучи света, и через четыре года после того, как законченная общая теория относительности была представлена замершему в напряженном ожидании миру. Попытка эта была столь хороша, что вполне могла бы перенаправить развитие физики на совершенно новый путь, однако, к несчастью для ее автора, его работа совпала по времени с тем, что *направило* развитие физики на новый путь, — с квантовой механикой. В последовавшей затем "золотой лихорадке" физики потеряли интерес к объединенным теориям поля; мир квантов обещал куда более богатый урожай и гораздо более высокие шансы совершить значительное открытие. Потребовалось шестьдесят лет, чтобы идея, лежавшая в основе той первой попытки, вернулась к жизни.

Все началось в Кенигсберге, в то время — столице немецкой провинции Восточная Пруссия. Кенигсберг — ныне Калининград, административный центр российского анклава, лежащего между Польшей и Литвой. Необычное влияние этого города на развитие математики началось с головоломки. Через Кенигсберг протекает река Прегель (ныне — Преголя), и семь мостов некогда соединяли два берега реки друг с другом и с двумя островами[1]. Существует ли такой путь, который позволил бы жителям Кенигсберга пройти по всем мостам, одному за другим, но при этом не прошагать ни по одному мосту дважды? Леонард Эйлер разработал общую теорию таких задач (из которой следовало, что в данном случае ответ — "нет"), тем самым сделав один из первых шагов в области математики, сейчас называемой топологией. Топология занимается геометрическими свойствами, которые остаются неизменными, когда форма подвергается изгибам, скручиванию, сдавливанию, сплющиванию и всякого рода деформации, лишь бы она оставалась непрерывной — запрещается только делать разрывы и разрезы и склейки.

Топология стала одной из наиболее мощных областей в современной математике со множеством применений в физике. Она сообщает нам о возможных формах многомерных пространств, что становится все более важным как в космологии, так и в физике частиц. В космологии желательно знать форму пространства–времени на максимально больших масштабах, т. е. на масштабах всей вселенной. В физике частиц желательно знать форму пространства и времени на малых масштабах. Можно подумать, что ответ очевиден, однако физики более так не считают. И их сомнения также родились в Кенигсберге.

1 Лавочный мост (Krämerbrücke), Зеленый мост (Grüne Brücke), Рабочий мост (Koettelbrücke), Кузнечный мост (Schmiedebrücke), Деревянный мост (Holzbrücke), Высокий мост (Hohe Brücke) и Медовый мост (Honigbrücke). *(Примеч. перев.)*

В 1919 году никому не известный математик из Кенигсбергского университета Теодор Калуца выдвинул очень странную идею. Он записал ее и послал Эйнштейну, который, по-видимому, при получении письма потерял дар речи. Калуца нашел способ соединить гравитацию и электромагнетизм в рамках одной последовательной "объединенной теории поля" типа той, которую в течение многих лет пытался, но без особого успеха, построить Эйнштейн. Теория Калуцы была очень изящна и естественна. Беспокойство вызывало только одно обстоятельство: объединение требовало, чтобы у пространства–времени было не четыре измерения, а пять. Время, как всегда, оставалось временем, но пространство некоторым образом приобретало четвертое измерение.

Калуца не ставил своей целью объединить гравитацию и электромагнетизм. По какой-то причине, о которой лучше всего было бы спросить у него самого, он возился с пятимерной гравитацией в качестве некой математической разминки, пытаясь понять, как будут выглядеть полевые уравнения Эйнштейна, если пространство приобретет эту нелепую дополнительную размерность.

В размерности четыре уравнения Эйнштейна содержат десять компонент — в том смысле, что они сводятся к десяти отдельным уравнениям, описывающим десять различных чисел. Эти числа все вместе составляют метрический тензор, который описывает кривизну пространства–времени. В размерности пять имеются пятнадцать компонент и, таким образом, пятнадцать уравнений. Десять из них воспроизводят стандартную четырехмерную теорию Эйнштейна, что и неудивительно; четырехмерное пространство–время вкладывается в пятимерное пространство–время, так что естественно было бы ожидать, что четырехмерный вариант гравитации вкладывается в пятимерный. А что насчет оставшихся пяти уравнений? Они могли бы оказаться какой-нибудь вещью в себе, не имеющей никакой ценности для нашего мира. Но дело обстоит по-другому. Они

оказались нашими давними знакомыми, что и изумило Эйнштейна. Четыре из оставшихся уравнений Калуцы были в точности уравнениями Максвелла для электромагнитного поля — теми самыми, которые выполнены в нашем четырехмерном пространстве–времени.

Одно остающееся уравнение описывало частицы очень простого вида, игравшие незначительную роль. Но никто, и менее всех Калуца, не ожидал, что и теория гравитации Эйнштейна, и теория электромагнетизма Максвелла сами собой возникнут из пятимерного аналога одной только гравитации. Вычисления Калуцы, казалось, говорили, что свет представляет собой колебания в дополнительном, скрытом измерении пространства. Гравитацию и электромагнетизм оказалось возможным соединить друг с другом таким образом, что не было заметно никаких швов, — но только ценой предположения, что пространство на самом деле четырехмерно, а пространство–время пятимерно.

Эйнштейн никак не мог принять решения по поводу статьи Калуцы, поскольку не было никаких причин считать, что пространство–время имеет дополнительное измерение. Но в конце концов он счел, что, сколь бы странной эта идея ни казалась, она была красива и потенциально обладала столь далеко идущими следствиями, что ее стоило опубликовать. После двух лет колебаний Эйнштейн рекомендовал статью Калуцы к публикации в ведущем физическом журнале. Статья называлась "О единстве физических проблем"[1].

[1] В письме Калуце от 21 апреля 1919 года Эйнштейн подтвердил, что несколько дней назад получил его статью. 29 мая 1919 года Эйнштейн написал Калуце письмо с пожеланием, чтобы тот устранил некоторые неясности в своей объединенной теории, и посоветовал направить работу для публикации в *Mathematische Zeitschrift*, предложив, кроме того, "замолвить слово" перед редакторами этого журнала. Калуца занялся тем, на что указал Эйнштейн, но в конце концов оставил эти попытки, признав, что не может полностью прояснить проблему, и в окончательном варианте статьи отозвался о ней как о "серьезной трудности". *(Примеч. перев.)*

Все эти разговоры про дополнительные размерности должны, наверное, звучать как нечто не вполне ясное и довольно мистическое. Это ли не концепция викторианских спиритуалистов, которые привлекали спасительное четвертое измерение всякий раз, как что-нибудь не складывалось в привычных трех? Где обитают духи? В четвертом измерении. Откуда берется эктоплазма? Из четвертого измерения. Теологи совсем уже было поместили там Бога и ангелов Его, когда осознали, что хотя пять — это хорошо, тем не менее шесть еще лучше и, в конце концов, бесконечная размерность подойдет для Всемогущего и Вездесущего.

Прекрасно, конечно, однако не слишком научно. Поэтому, быть может, стоит задержаться на некоторое время, чтобы прояснить относящуюся сюда математику. Основное положение состоит в том, что "размерность" чего-то в математике или физике — это число различных переменных, необходимых для его описания.

Ученые провели немало времени, размышляя о *переменных* — величинах, которые подвержены изменениям. Еще больше времени провели ученые-экспериментаторы за измерением значений этих величин. "Размерность" как геометрический способ указания на такие переменные оказалась настолько полезной, что прочно вошла в аппарат и язык естественных наук и математики, где считается чем-то весьма прозаичным и ничем не примечательным.

Время представляет собой непространственную переменную, так что оно дает нам *возможную* четвертую размерность, однако то же самое можно сказать про температуру, скорость ветра или продолжительность жизни термитов в Танзании. Координаты точки в трехмерном пространстве определяются тремя переменными — ее расстояниями к востоку, северу и вверх относительно некоей выбранной выделенной точки (отрицательные числа используются для противоположных направле-

ний). Аналогично все, что зависит от четырех переменных, живет в четырехмерном "пространстве", а все зависящее от 101 переменной — в 101-мерном.

Любая сложная система по необходимости многомерна. Погодные условия у вас на заднем дворе зависят от температуры, влажности, трех компонент скорости ветра, барометрического давления, интенсивности осадков — что уже составляет семь размерностей, а можно было включить еще множество других. Могу поспорить, вы и не подозревали, что у вас семимерный задний двор. Состояние всех девяти (ладно, восьми; увы бедному Плутону!) планет в нашей солнечной системе определяется шестью переменными для каждой — тремя координатами и тремя компонентами скорости. Таким образом, наша Солнечная система является 54- (я хотел сказать, 48-) мерным математическим объектом; и гораздо более многомерным, если вы учтете спутники и астероиды. Экономика, в которой присутствуют миллионы различных объектов купли-продажи, каждый со своей собственной ценой, живет в миллиономерном пространстве. В сравнении с этим электромагнетизм, требующий всего шести дополнительных чисел, чтобы охарактеризовать локальные состояния электрического и магнитного полей, — сущее дитя[1]. Подобные примеры имеются в изобилии. По мере того как наука стала интересоваться системами с большим числом переменных, ей пришлось примириться с появлением экстравагантно многомерных пространств.

Формальная математика многомерных пространств носит чисто алгебраический характер и основана на "очевидных" обобщениях того, что имеет место в пространствах более

[1] Не будем забывать, что электромагнетизм требует шести чисел *в каждой точке пространства*. Если в данной точке эти числа такие-то, то в соседней, вообще говоря, уже другие. Поэтому электромагнетизм — как и всякая теория поля — требует *бесконечного* числа переменных. *(Примеч. перев.)*

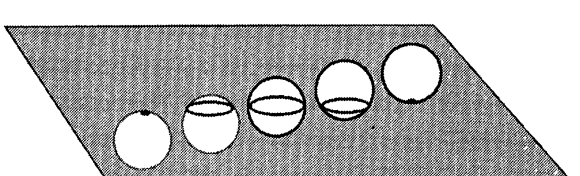
низких размерностей. Например, каждую точку на плоскости (т. е. в двумерном пространстве) можно задать двумя координатами, а каждую точку в трехмерном пространстве — тремя. Сделаем небольшой шаг вперед и определим точку в четырехмерном пространстве как список из четырех координат; и, более общим образом, определим точку в n-мерном пространстве как список из n координат. Тогда само n-мерное пространство есть просто множество всех таких точек.

Подобные алгебраические манипуляции позволяют определить в n-мерном пространстве расстояние между любыми двумя точками, угол между любыми двумя линиями и так далее. Далее дело за воображением: большинство разумных геометрических форм, имеющихся в размерности два или три, допускают непосредственные аналоги в размерности n — чтобы определить их, надо описать привычные геометрические формы, используя координатную алгебру, а потом распространить это описание на n координат.

Чтобы получить представление об n-мерном пространстве, нам надо запастись n-мерными очками. Можно позаимствовать прием английского священника и школьного учителя Эдвина Эббота Эббота, написавшего в 1884 году небольшую книжку "Флатландия". Книга рассказывает о приключениях А. Квадрата, который живет в двумерном пространстве эвклидовой плоскости. Эббот не сообщает нам, что означает первое "А"; я же уверен, что это "Альберт", по причинам, объясненным в написанном мною продолжении "Флаттерландия", и именно из этого допущения я и буду далее исходить. Альберт Квадрат — рассудительный малый — не верил во всякую чушь о третьем измерении, до тех пор пока в один судьбоносный день через его плоскую вселенную не прошла сфера, с головой окунув его в реализм, в этой голове не умещавшийся.

"Флатландия" представляла сатирический взгляд на викторианское общество — вложенный в параболу четвертого измерения, основанную на трансразмерной аналогии. Нас здесь интересует как раз аналогия, а не сатира. Успешно представив себя живущим в плоскости двумерным существом, пребывающим в блаженном неведении относительно большего 3-мерного пространства, не так сложно уже представить себя трехмерным существом, живущим в 3-мерном пространстве, блаженно неосведомленным о реальности большего 4-мерного пространства. Представим себе, что Альберт Квадрат, счастливо пребывающий в своей Флатландии, желает "визуализировать" сферу (заполненную трехмерную сферу, так что скорее даже шар). Эббот достиг этого, заставив сферу проходить сквозь плоскость Флатландии, двигаясь при этом перпендикулярно ей таким образом, чтобы Альберт видел ее сечения этой плоскостью. Сначала он видит точку, которая разрастается в ограниченный окружностью диск. Диск расширяется до тех пор, пока глазам Альберта не предстанет экватор сферы, после чего диск уменьшается в размерах, в конце концов снова превращаясь в точку и исчезая.

На самом деле Альберт видит этот диск с ребра, в качестве отрезка линии с неоднородной освещенностью, однако его зрительное восприятие интерпретирует этот образ как диск, подобно тому как наше пространственное восприятие интерпретирует плоское изображение как объемное.



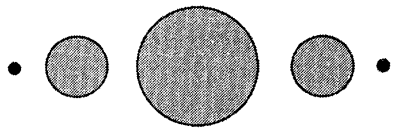
Сфера пересекает Флатландию.

Применяя аналогичные рассуждения, можно "видеть" "гиперсферу" — четырехмерный аналог сферы в трехмерном пространстве — в качестве точки, которая разрастается и принимает форму сферы, расширяющейся, пока не будет пройден "экватор", а далее сжимающейся снова в точку прямо перед тем, как исчезнуть.

Могло бы пространство на самом деле иметь более трех измерений? Не изысканных математических фикций, отвечающих непространственным переменным, а *реальных физических размерностей*? Как, собственно говоря, разместить четвертое измерение? Все ведь уже заполнено.

Если вы так думаете, то, значит, не прислушивались к Альберту Квадрату, который точно так же готов был рассуждать о плоскости. Если оставить наши доморощенные предубеждения, то представляется, что пространство могло бы в принципе быть четырехмерным, миллиономерным или сколько-угодномерным. Тем не менее все без исключения наблюдения продолжают снабжать нас информацией о том, что в нашей конкретной вселенной Господь в Своей доброте установил три измерения для пространства и одно для времени.

Или Он все же сделал по-другому? Если физика чему-то нас и учит, так это относиться к повседневным наблюдениям с опаской. Стул представляется нам твердым, но по большей части он состоит из пустого пространства. Пространство выглядит плоским, но согласно теории относительности оно искривлено. Квантовые физики думают, что на очень малых масштабах пространство представляет собой нечто вроде квантовой пены, по большей части дыр. А горячие сторонники интерпретации квантовой неопределенности в рамках "многих миров" полагают, что наша вселенная — лишь одна из бесконечного многообразия сосуществующих вселенных и что мы занимаем лишь тончайший слой обширной мультивселенной. Если уж здравый смысл может подводить нас в таких вещах, то не приведет ли



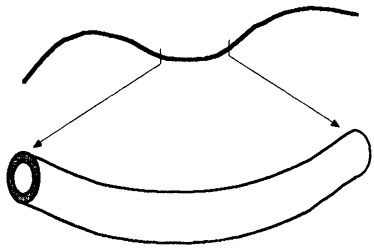
Гиперсфера пересекает Спейсландию.

он к ошибке в отношении размерности пространства или времени?

У Калуцы было простое объяснение дополнительного измерения, которое в его теории приписывалось пространству–времени. Традиционные размерности вытянуты вдоль прямых линий, достаточно длинных, чтобы их можно было наблюдать, — на самом деле длиной в миллиарды световых лет. Новое измерение, предложенное Калуцей, устроено совсем по-другому: оно скручено в маленькую окружность размером много меньше атома. Световые волны, подобно ряби на воде, могут бегать вдоль такой окружности, потому что они тоже маленькие, много меньше атома, но материя не в состоянии продвигаться в этом направлении, потому что там нет для нее места.

Это не такая уж глупая идея. Если посмотреть на водяной шланг издалека, он будет выглядеть как линия, т. е. будет казаться одномерным. Но при ближайшем рассмотрении становится ясно, что шланг в действительности трехмерен и имеет маленькие круглые сечения.

Эта скрытая структура нового измерения объясняет кое-что из того, что *можно* наблюдать с большого расстояния, а именно то, как шлангу удается подавать воду. Для этого сечения должны быть соответствующей формы, с полостью посередине. Теперь представим себе, что толщина шланга меньше, чем размер атома. Чтобы заметить дополнительные размерности, в этом случае потребовалось бы разглядывать шланг необычайно скрупулезно. Такой невероятно тонкий шланг не смог бы по-



С далекого расстояния (как показано сверху) шланг выглядит одномерным. При ближайшем рассмотрении (внизу) он обнаруживает два дополнительных измерения.

давать воду, но достаточно маленькие объекты все же смогли бы по нему путешествовать.

Таким образом, удается заметить влияние дополнительных измерений, не наблюдая при этом их самих. Это означает, что скрытые размерности пространства–времени представляют собой полностью научное предположение: их присутствие можно в принципе проверить, пусть только исследуя результат их влияния, а не непосредственно воспринимая их органами чувств. Большинство проверок в науке основаны на изучении влияния — если бы мы могли непосредственно видеть причины какого-либо явления, нам не требовались бы ни теория, ни эксперимент. Например, никто никогда не видел электромагнитного поля. То, что удается увидеть, — это искры и отклонение стрелки компаса к северу, откуда (если наблюдения выполняют ученые) делается вывод о том, что за это ответственно некоторое поле.

Теория Калуцы приобрела определенную популярность, потому что она оставалась единственной известной идеей, поддерживающей надежду на существование объединенной теории поля. В 1926 году другой математик, Оскар Клайн, усовершенствовал теорию Калуцы, предположив, что квантовая меха-

ника, возможно, в состоянии объяснить, почему пятое измерение скручивается в нечто столь маленькое. В действительности его размер должен иметь порядок величины, близкий к постоянной Планка, — должен иметь порядок "планковской длины" 10^{-35} метров[1].

Теория Калуцы–Клайна, как ее стали называть, привлекала физиков в течение некоторого времени. Но невозможность непосредственно убедиться в присутствии дополнительного измерения отравляла им всю радость. По определению теория Калуцы–Клайна находилась в согласии со всеми известными явлениями в гравитации и электромагнетизме[2]. Ее невозможно было отвергнуть на основе стандартных экспериментов. Но она ничего на самом деле и не добавляла — не предсказывала ничего такого, что можно было бы проверить. От той же проблемы страдают многие попытки объединить существующие законы. Все то, что в них можно проверить, уже известно, а новое проверке не подлежит. Первоначальный энтузиазм пошел на спад.

Роковой удар по теории Калуцы–Клайна — не в отношении ее верности, а в отношении того, стоит ли тратить на нее драгоценное время исследований — был нанесен ошеломляющим ростом гораздо более привлекательной теории, в которой можно было делать новые предсказания и экспериментально их

1 Постоянная Планка и так называемая планковская длина измеряются в различных единицах, а потому их нельзя непосредственно сравнивать. (Постоянная Планка измеряется в Дж / с, а планковская длина, как и полагается длине, в метрах.) Планковская длина, однако, "содержит" в себе постоянную Планка: она построена из фундаментальных физических констант (самой постоянной Планка, а также скорости света и гравитационной постоянной) таким образом, чтобы получилась именно длина. Известные численные значения фундаментальных констант и дают значение 10^{-35} м. "Малость" этой величины определяется в том числе и малостью постоянной Планка. *(Примеч. перев.)*

2 Если не считать осложнений с той последней, пятнадцатой, компонентой, оставшейся неучтенной (см. стр. 351). Ее некуда было пристроить. (*Примеч. перев.*)

проверять. Это была квантовая теория, переживавшая тогда пору своей цветущей молодости.

К 60-м годам двадцатого века, однако, квантовая механика начала сбавлять обороты. Первоначальный прогресс уступил место глубоким парадоксам и необъяснимым наблюдениям. Успех квантовой теории не подлежал сомнению, и на этой основе вскоре возникла "стандартная модель" фундаментальных частиц. Но становилось все труднее найти новые вопросы, на которые был бы хоть какой-нибудь шанс получить ответ. По-настоящему новые идеи трудно было проверить; те идеи, которые допускали проверку, были лишь развитием уже существующих.

Из всех этих исследований возник один весьма изящный основополагающий принцип: ключевую роль в отношении структуры материи на очень малых масштабах играет симметрия. Но важные симметрии фундаментальных частиц — это ни обычные движения эвклидова пространства без деформаций, ни даже лоренцевы преобразования релятивистского пространства–времени. Они включают в себя калибровочные симметрии и суперсимметрии. Кроме того, имеются и другие виды симметрии (вполне в духе тех, что изучал Галуа), действующие перестановками на дискретном множестве объектов.

Каким образом могут существовать различные типы симметрий?

Симметрии всегда образуют группу[1], но имеется много различных способов, которыми группа может действовать. Она может действовать параллельными переносами или вращениями, перестановками компонент или же обращением направления времени. Физика частиц привела к открытию нового

1 Наука не стоит на месте. Есть — и используются — также симметрии с более хитрой алгебраической структурой. *(Примеч. перев.)*

способа, каким могут действовать симметрии, названные *калибровочными*. Выбранное название — историческая случайность (лучше было бы называть их локальными симметриями).

Представьте себе, что вы отправились в другую страну — назовем ее Дупликатия, — и там вам понадобились деньги. Валютой в Дупликатии является пфуннинг, а обменный курс — два пфуннинга за доллар. Сначала это вас слегка смущает, но потом вы обращаете внимание, что имеется очень простое и очевидное правило для перевода всех транзакций из долларов в пфуннинги: в пфуннингах все стоит ровно в два раза больше, чем вы бы заплатили в долларах.

Тут действует некий вид симметрии. "Законы" денежных транзакций остаются неизменными, если удвоить все числа. При этом, чтобы компенсировать численное удвоение, вам приходиться платить в пфуннингах, а не в долларах. Эта "инвариантность относительно монетарного масштаба" представляет собой глобальную симметрию правил, действующих для денежных транзакций. Если везде произвести одно и то же изменение, то правила останутся инвариантными.

Так, а, допустим, прямо через границу, в соседней Трипликатии, местной валютой является будл, причем их дают три за доллар. Когда вы отправитесь в Трипликатию, соответствующая симметрия потребует умножения всех сумм на три. Но законы коммерции по-прежнему остаются инвариантными.

Таким образом, перед нами "симметрия", которая изменяется в зависимости от места. В Дупликатии надо умножать на два, в Трипликатии — на три. Скорее всего, вы не удивитесь, когда, приехав в Квинтапликатию, узнаете, что там доллар надо умножать на пять. Все эти операции симметрии можно применять одновременно, но каждая пригодна только в соответствующей стране. Законы коммерции остаются инвариантными, надо только интерпретировать числа в соответствии с местной валютой.

Это локальное масштабное преобразование денежных операций является калибровочной симметрией законов коммерции. В принципе обменный курс мог бы быть различным в каждой точке пространства и времени, а законы все равно оставались бы инвариантными — при условии, что все транзакции интерпретируются в терминах локального значения "валютного поля".

Квантовая электродинамика соединяет в себе специальную теорию относительности и теорию электромагнетизма. Она явилась первым физическим объединением после Максвелла, и основана она на калибровочной симметрии электромагнитного поля[1].

Как мы видели, теория электромагнетизма симметрична относительно группы Лоренца — группы преобразований специальной теории относительности. Эта группа состоит из глобальных симметрий пространства–времени, то есть ее преобразования надо применять одновременно ко всей вселенной, чтобы сохранить уравнения Максвелла в неизменности. Однако Максвеллов электромагнетизм обладает также калибровочной симметрией, которая играет ключевую роль в квантовой электродинамике. Эта симметрия заключается в изменении фазы света.

Всякая волна состоит из регулярных всплесков. Максимальный размер всплеска — это амплитуда волны. Момент времени, в который волна попадает в этот максимум, называ-

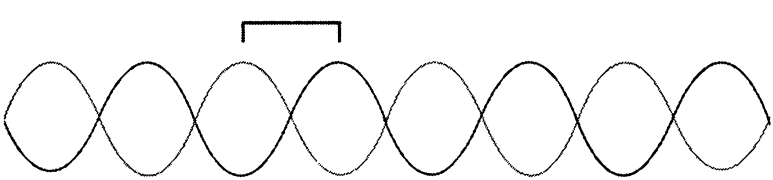
1 Квантовая электродинамика, как видно уже из названия, соединяет в себе идею о квантовании и электродинамику. Про теорию относительности она ничего нового не говорит, поскольку "относительность" уже встроена внутрь максвелловской (т. е. неквантовой, классической) электродинамики именно в виде симметрии относительно группы Лоренца, о которой говорится в следующем абзаце. В классической электродинамике имеются и Лоренцева, и калибровочная симметрии. Задача квантовой электродинамики, повторимся, состояла в перенесении описания электромагнетизма (с сохранением данных симметрий) в квантовую область. *(Примеч. перев.)*

ется фазой волны; фаза говорит нам о том, когда и где достигаются пиковые значения. Что важно, это не абсолютная фаза какой-либо волны, а разность фаз между двумя отдельными волнами. Например, если разность фаз двух (в остальном тождественных) волн составляет половину периода (времени между максимальными высотами), то одна волна будет попадать в максимумы как раз "не в ногу" с другой, так что пики одной совпадут со впадинами другой.

Когда вы идете по улице, ваша левая нога на полпериода отстает по фазе от правой ноги. Когда слон идет по улице, его ноги одна за другой касаются земли в фазах, равных 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ полного периода; сначала левая задняя, потом левая передняя, потом правая задняя и затем правая передняя. Стоит заметить, что, начав считать от 0 с какой-нибудь другой ноги, мы получили бы некоторые другие числа, но соответствующие *разности* фаз все равно составляли бы те же 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$. Таким образом, относительная фаза корректно определена и физически осмысленна.

Рассмотрим световой луч, проходящий через некоторую сложную систему линз и зеркал. Поведение луча оказывается не зависящим от общей фазы. Изменение фазы эквивалентно малой временно́й задержке в наблюдениях, или, что то же самое, некоторой перестановке часов наблюдателя.

На геометрию системы или путь света это не влияет. Даже если две световые волны пересекаются, ничто не меняется —



Эффект фазового сдвига волны.

при условии, что фазы обеих волн сдвигаются на одну и ту же величину.

Эти сдвиги фаз до сих пор представляли собой глобальную симметрию. Но если внеземной экспериментатор где-нибудь в галактике Андромеда изменит фазу света в одном из своих экспериментов, то в земной лаборатории не последует никакого эффекта. Таким образом, фазу света можно изменять произвольным образом в каждом данном месте пространства и времени, и законы физики должны оставаться инвариантными. Возможность произвольного изменения фазы в каждой точке пространства–времени без глобального требования, чтобы фаза была повсюду одинакова, представляет собой калибровочную симметрию уравнений Максвелла, и эта симметрия сохраняется в квантовом варианте этих уравнений — квантовой электродинамике[1].

Фазовый сдвиг на полный период колебаний есть то же самое, что отсутствие фазового сдвига, а отсюда следует, что рассматриваемое абстрактно изменение фазы является вращением. Таким образом, относящаяся сюда группа симметрии — калибровочная группа — есть группа вращений двумерного пространства SO(2). Однако физики любят, чтобы квантовые координатные преобразования были у них "унитарными", т. е. определялись не действительными числами, а комплексными. К счастью, SO(2) имеет и другое воплощение — в виде унитар-

1 Серьезная путаница. При калибровочных преобразованиях фаза световой (электромагнитной) волны *остается неизменной*. Фазовые преобразования в электродинамике относятся не к свету, а к полю, описывающему частицы, которые излучают и поглощают свет (например, электроны и позитроны). Имеющуюся в этом поле "фазу" роднит с фазой электромагнитной волны лишь название. Смысл же калибровочной инвариантности состоит в том, что если в каждой точке пространства произвольным образом изменить фазу электрон–позитронного поля, то найдется *компенсирующее преобразование* электромагнитного поля. (Этот факт *не* может, кроме того, следовать из аргументов, неожиданно привлекающих к рассмотрению галактику Андромеда.) *(Примеч. перев.)*

ной группы U(1), представляющей собой группу вращений в комплексной плоскости.

Коротко говоря, квантовая электродинамика обладает калибровочной U(1)-симметрией.

Калибровочные симметрии оказались ключом к двум следующим объединениям в физике — электрослабой теории и квантовой хромодинамике[1]. Взятые вместе, они составляют Стандартную Модель — на данный момент общепринятую теорию всех фундаментальных частиц. Прежде чем мы увидим, как в ней обстоят дела, надо точно объяснить, что же именно объединяется: не теории, а силы.

Современная физика выделяет четыре различных вида сил в природе — гравитацию, электромагнетизм, слабые ядерные силы и сильные ядерные силы. Все они обладают очень различными характеристиками: они действуют на разных масштабах пространства и времени, некоторые из них заставляют частицы притягиваться, некоторые — отталкиваться, некоторые — делать и то и другое в зависимости от частиц и, наконец, некоторые — делать и то и другое в зависимости от того, на каком расстоянии друг от друга частицы находятся.

На первый взгляд каждая сила мало напоминает остальные. Но в глубине под поверхностью вещей имеются указания, что эти различия на самом деле не так велики, как кажется. Физики смогли получить свидетельства глубокого единства, подсказывающего, что все четыре силы имеют общее объяснение.

Следствия гравитации мы ощущаем на себе постоянно. Когда мы роняем тарелку и она разбивается об пол в кухне, мы наблюдаем, как гравитация тянет ее по направлению к центру Земли, а пол встает у нее на пути. Поросята на дверце холодильника (у нас дома, по крайней мере, это именно поросята)

1 Квантовая хромодинамика сама по себе *не* является какой-либо объединенной теорией. Она описывает сильные взаимодействия. *(Примеч. перев.)*

держатся там благодаря магнитной силе, относительно которой Максвелл установил, что она есть всего лишь один аспект объединенной электромагнитной силы. Ее электрическое проявление обеспечивает работу холодильника. Менее очевидным образом, разбившаяся тарелка также демонстрирует проявления электромагнитной силы, потому что именно она в основном действует в химических связях, удерживающих вместе куски материи. Когда напряжение в тарелке становится настолько велико, что электромагнитная сила больше не может удерживать молекулы вместе, тарелка бьется.

Две оставшиеся силы, действующие на уровне атомного ядра, проявляются не так непосредственно; но без них не было бы вообще никакой материи, потому что благодаря им атомы представляют собой единое целое[1]. Они — причина, по которой тарелки, поросята, холодильник, пол и кухня существуют.

Силы других типов могли бы в принципе породить вселенную иного типа, и нам о таких возможностях не известно практически ничего. Нередко утверждается, что без наших конкретных сил жизнь была бы невозможна, что как бы доказывает, что наша вселенная на удивление хорошо подогнана к тому, чтобы жизнь в ней была возможна. Этот неверный аргумент — колоссальное преувеличение, основанное на определенном взгляде на то, что составляет жизнь. Жизнь, подобная нашей, была бы невозможна, но верхом самонадеянности было бы считать, что жизнь нашего типа — это единственно возможный вид сложной организации, который мог бы существовать. Логическая ошибка состоит здесь в сме-

1 Все же *атомы* представляют собой единое целое благодаря *электромагнитному* притяжению между электронами и находящимися в ядре протонами. Атомные *ядра* существуют — являются стабильными или квазистабильными образованиями — благодаря *сильным* взаимодействиям между протонами и нейтронами. Деление ядер высвобождает часть энергии сильных взаимодействий, которые в случае реализации цепной реакции имеют в качестве довольно *непосредственных* проявлений атомную бомбу и Солнце. *(Примеч. перев.)*

шении достаточных условий для жизни (те аспекты нашей вселенной, от которой зависит жизнь нашего типа) с необходимыми.

Первой из четырех была научно сформулирована сила гравитации. Согласно Ньютону, это притягивающая сила: любые две частицы во вселенной, утверждал он, притягивают друг друга гравитационно. Гравитационная сила — дальнодействующая: она спадает с расстоянием достаточно медленно. С другой стороны, гравитационная сила намного слабее остальных трех: малюсенький магнитик может крепко удерживать поросенка на холодильнике, несмотря на то что вся Земля пытается притянуть его к себе за счет гравитационной силы.

Следующим по очереди среди фундаментальных сил был осознан электромагнетизм, за счет которого частицы могут или притягивать, или отталкивать друг друга. Тот или иной случай реализуется в зависимости от того, имеют ли частицы электрические заряды одного знака и одну и ту же магнитную полярность. Если да, то сила оказывается отталкивающей; если нет — притягивающей. И эта сила также дальнодействующая.

Ядра в атоме составлены из меньших частиц — протонов и нейтронов. Нейтроны, как можно заключить уже из их названия, не несут электрического заряда, но все протоны имеют положительный заряд. Электромагнитное отталкивание между протонами должно бы вызвать распад ядра. Что же удерживает ядро в виде одного целого? Гравитация слишком слаба — вспомните о поросятах на холодильнике. Должна существовать некая другая сила — которую физики назвали сильным ядерным взаимодействием.

Но если сильное взаимодействие может преодолеть электрическое отталкивание, то почему же все протоны во вселенной не слиплись в одно гигантское атомное ядро? Дело в том, что влияние сильного взаимодействия быстро спадает с расстоянием, как только расстояние превышает размер ядра. Итак, сильное взаимодействие является короткодействующим.

Сильное взаимодействие не объясняет явление радиоактивного распада, когда атомы определенных элементов "выплевывают" частицы и излучение, превращаясь при этом в атомы других элементов. Уран, например, является радиоактивным и в конце концов превращается в свинец. Таким образом, должна существовать еще одна субатомная сила. Ею оказывается слабое взаимодействие; оно даже еще более короткодействующее, чем сильное взаимодействие: оно действует только на расстояниях в одну тысячную размера протона[1].

Физика была неизмеримо проще, когда единственными "кирпичиками" материи считались протоны, нейтроны и электроны. Эти "элементарные частицы" составляли атомы, которые, как стало ясно, на самом деле могут распадаться, хотя само название означает "неделимый". В ранней модели Нильса Бора атом представлялся как тесное собрание протонов и нейтронов, вокруг которых вращались гораздо более легкие, удаленные от них электроны. Протон несет фиксированный положительный электрический заряд, электрон несет то же количество отрицательного заряда, а нейтрон электрически нейтрален.

Позднее, по мере развития квантовой теории, этот образ в духе представлений о солнечной системе уступил место более хитрому устройству. Электроны не вращаются вокруг ядра в качестве четко определенных частиц, но некоторым образом размазаны вокруг ядра в виде облаков довольно замысловатых форм. Эти облака лучше всего интерпретируются как облака вероятности[2]. Если смотреть на электрон, то вероятнее всего

1 Около 10^{-18} м, что примерно в 1000 раз меньше диаметра *атомного ядра*. Для "истории симметрии" может показаться интересным, что при ядерных превращениях, обусловленных слабым взаимодействием, *нарушается зеркальная симметрия* — симметрия между правым и левым. *(Примеч. перев.)*

2 Сама идея о "размазанности" электрона — это уже интерпретация некоторого квантово-механического факта, имеющего отношение к вероятности. А не наоборот. *(Примеч. перев.)*

найти его там, где плотность облаков максимальна, и наоборот, он будет реже встречаться в областях, где облако "разрежено".

Физики изобрели новые способы изучать структуру атома, "разбирая" его на части и исследуя внутреннюю структуру этих частей[1]. Основной метод, которым до сих пор продолжают пользоваться, состоит в том, чтобы ударить по атому другим атомом или частицей и посмотреть, что вылетит из области соударения. Постепенно — эта история слишком сложная, чтобы излагать ее подробно — обнаруживались все новые и новые частицы. Это было нейтрино, которое обладает способностью пройти миллионы километров через свинец, не претерпев столкновения, в силу чего его нелегко детектировать. Далее, это был позитрон, который похож на электрон, но несет противоположный электрический заряд и который был предсказан дираковской симметрией между материей и антиматерией.

Когда число "элементарных" частиц перевалило за шестьдесят, физики стали искать более глубокие классифицирующие принципы. "Кирпичики" материи оказались слишком многочисленными, чтобы быть фундаментальными. Частица каждого типа характеризуется рядом свойств: массой, зарядом, тем, что называется "спином" и представляет собой некое подобие вращения вокруг некоторой оси (за исключением того факта, что это старомодное представление и, чем бы спин ни был, он не сводится к вращению)[2]. Частицы вращаются не в пространстве (как это делают Земля или крутящийся волчок), а в некоторых более экзотических измерениях.

Как и все в квантовом мире, большая часть этих свойств выражается целыми кратными базовых, очень маленьких количеств — квантов. Все электрические заряды выражаются как це-

1 Речь идет главным образом об атомных *ядрах*, а не о самих атомах. *(Примеч. перев.)*

2 Это обсуждалось на стр. 334. *(Примеч. перев.)*

лые кратные заряда протона. Все спины суть целые кратные спина электрона. Отсутствовала ясность по поводу того, квантуется ли аналогичным образом масса; массы фундаментальных частиц представляли собой мешанину, лишенную всякой структуры.

Стали проявляться и некоторые общие семейные черты. Важное различие потребовалось провести между частицами, спин которых есть нечетное кратное спина электрона, и частицами, спин которых — четное кратное. Причина состоит в свойствах симметрии; спины (живущие в своих экзотических пространствах) вели себя по-разному, если заставить частицу вращаться в обычном пространстве. Некоторым образом, экзотические спиновые и прозаические пространственные измерения оказались связаны.

Нечетные частицы получили название фермионов, а четные[1] — бозонов, по именам двух гигантов физики частиц, Энрико Ферми и Сатьендраната Бозе. По причинам, которые некогда представлялись разумными, спин электрона определен равным $\frac{1}{2}$. Таким образом, бозоны имеют целочисленные спины (четные кратные $\frac{1}{2}$ являются целыми), а фермионы — спины $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ и т. д., а также противоположные им $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$[2].

Фермионы подчиняются принципу запрета Паули, который гласит, что в любой заданной квантовой системе две различные частицы не могут находиться в одном и том же состоянии в один и тот же момент времени. Бозоны не подчиняются принципу Паули.

К фермионам относятся все хорошо знакомые частицы — фермионами являются протоны, нейтроны и электроны. Кроме того, к фермионам относятся и более экзотические частицы, такие как мюон, тау-лептон, лямбда, сигма, кси и омега, — их

1 "Нечетные" — частицы со спином, выражающимся как нечетное кратное спина электрона; "четные" — со спином, выражающимся как четное кратное спина электрона. *(Примеч. перев.)*

2 Часть фразы про отрицательные спины лучше всего полностью проигнорировать. *(Примеч. перев.)*

имена представляют собой буквы греческого алфавита. Фермионами также являются три типа нейтрино, связанные с электронами, мюонами и тау-лептонами.

У бозонов более загадочные имена, такие как пион, каон и эта.

Специалисты по физике частиц знали, что все эти частицы существуют, и научились измерять их физические свойства. Задача состояла в том, чтобы найти смысл в кажущейся мешанине. Построена ли наша вселенная из чего-то, что случайно подвернулось под руку? Или же имелся некий скрытый план?

Итог подобных размышлений состоял в том, что многие казавшиеся элементарными частицы в действительности оказались составными. Все они построены из *кварков*. Кварки (слово, заимствованное из "Поминок по Финнегану"[1]) организованы в шесть различных ароматов, получивших условные названия up, down, strange (странный), charm (очарованный), top и bottom. Все они — фермионы со спином $\frac{1}{2}$. У каждого имеется свой антикварк.

Есть два способа складывать кварки вместе. Один — это использовать три обыкновенных кварка, и в таком случае получается фермион. Протон, например, состоит из двух up-кварков и одного down-кварка, а нейтрон — из двух down и одного up. Необычная частица, названная омега-минус, составлена из трех странных кварков. Второй способ состоит в том, чтобы использовать кварк и какой-нибудь антикварк, что в результате дает бозон. Они не аннигилируют друг с другом, потому что ядерные силы удерживают их на расстоянии друг от друга[2].

1 Шифрованный роман Джеймса Джойса. *(Примеч. перев.)*

2 Подразумевается, что кварки участвуют в сильном взаимодействии. Причина же, по которой кварк и антикварк не аннигилируют, состоит вовсе не в этом, а просто в том, что складывающиеся из них частицы включают кварки и *антикварки другого аромата*, которые просто не являются античастицами друг для друга, а потому и не аннигилируют. *(Примеч. перев.)*

Чтобы все получилось правильно с электрическим зарядом, заряды кварков не могут быть целочисленными[1]. У одних кварков заряд $\frac{1}{3}$, а у некоторых $\frac{2}{3}$. Кварки организованы в три различных "цвета". Таким образом, всего имеется 18 типов кварков плюс еще 18 антикварков. Ах да, есть кое-что еще. Надо добавить некоторое количество частиц, "переносящих" сильные ядерные взаимодействия, которые удерживают кварки вместе. Получающаяся теория обладает немалой математической элегантностью, несмотря на некоторое размножение числа частиц, и известна как квантовая хромодинамика.

Квантовая теория объясняет все физические силы в терминах обмена частицами. Подобно тому как теннисный мячик удерживает вместе двух игроков на противоположных сторонах корта, пока продолжается игра, так и различные частицы переносят электромагнитные, сильные и слабые взаимодействия. Электромагнитное взаимодействие переносят фотоны. Сильное взаимодействие переносят глюоны, а слабое — промежуточные векторные бозоны. (Не ругайте меня — не я изобрел эти названия: по большей части они возникли в результате исторических случайностей.) Наконец, широко распространено предположение, что гравитацию должны переносить гипотетические частицы, названные гравитонами. Обнаружить гравитон пока не удалось.

Крупномасштабный эффект всех этих частиц-переносчиков состоит в том, что вселенная заполнена "полями"[2]. Гравитационные взаимодействия создают гравитационное поле, электромагнитные — электромагнитное поле, а две ядерные силы,

1 Т. е. целыми кратными заряда электрона (или, что то же с точностью до знака, протона). *(Примеч. перев.)*

2 Ясно, что Вселенная может быть "заполнена" лишь *дальнодействующими* полями, т. е. теми, у которых большой ("бесконечный") радиус действия. *(Примеч. перев.)*

взятые вместе, создают нечто, названное полем Янга–Миллса по именам физиков Чжэньнин Янга и Роберта Миллса.

Основные характеристики фундаментальных взаимодействий можно подытожить в некотором подобии физического прейскуранта.

Гравитация
Напряженность 6×10^{-39}, радиус действия бесконечен, переносится гравитонами (не наблюдались, но должны иметь массу 0 и спин 2), образует гравитационное поле.

Электромагнетизм
Напряженность 10^{-2}, радиус действия бесконечен, переносится фотонами (масса 0, спин 1), образует электромагнитное поле.

Сильное взаимодействие
Напряженность 1, радиус действия 10^{-15} метров, переносится глюонами (масса 0, спин 1), образует одну из компонент поля Янга–Миллса.

Слабое взаимодействие
Напряженность 10^{-6}, радиус действия 10^{-18} метров, переносится векторными бозонами (большая масса, спин 1), образует другую компоненту поля Янга–Миллса.

У вас может сложиться впечатление, что 36 фундаментальных частиц да еще глюоны в ассортименте[1], — не слишком большое улучшение по сравнению с шестьюдесятью или более частицами. Однако кварки образуют семейство с очень строгой структурой и огромной симметрией. Все они представляют собой вариацию на одну и ту же тему, в отличие от дикого зверинца частиц, с которыми физикам приходилось иметь дело до открытия кварков.

1 Электрон, мюон и тау-лептон, а также электронное ("обычное") нейтрино, мюонное нейтрино и тау-нейтрино *не* складываются из кварков. *(Примеч. перев.)*

Описание фундаментальных частиц в терминах кварков и глюонов известно как Стандартная Модель[1]. Она исключительно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Некоторые из масс некоторых частиц пришлось установить таким образом, чтобы добиться согласия с наблюдениями, но после этого все другие массы в точности попадают куда надо. Здесь нет замкнутого логического круга.

Кварки связаны друг с другом очень крепко, и невозможно увидеть изолированный кварк. Все, что удается наблюдать, это комбинации из двоек и троек кварков. Тем не менее физика частиц нашла непрямые подтверждения существования кварков. Они не являются всего лишь нумерологическими изысканиями в зоопарке частиц. И для тех, кто верит, что вселенная в основе своей прекрасна, свойства симметрии кварков подтверждают это.

Согласно квантовой хромодинамике, протон составлен из трех кварков — двух up и одного down. Если взять кварки из протона, перетасовать их, а потом положить обратно, то все равно получится протон. Таким образом, законы для протонов должны быть симметричны относительно перестановок составляющих их кварков. Более интересно то, что эти законы также оказываются симметричными относительно изменения типа кварка. Можно было бы, скажем, превратить up-кварк в down-кварк, и законы работали бы по-прежнему[2].

1 Описание в терминах кварков и глюонов (оно относится к частицам, участвующим в сильном взаимодействии) известно как квантовая хромодинамика. Стандартная Модель помимо квантовой хромодинамики опирается и на другие идеи, главная из которых — *спонтанное нарушение симметрии*. Поле, которое должно участвовать в этом процессе — так называемое поле Хиггса, — возможно, будет обнаружено на Большом адронном коллайдере к тому времени, как эта книга доберется до читателя. *(Примеч. перев.)*

2 Конечно, в зависимости от того, что понимается под законами. Например, электрический заряд up-кварка равен 2/3, а down-кварка — −1/3. Электромагнитное взаимодействие заведомо не будет "работать по-прежнему" после замены одного на другой. *(Примеч. перев.)*

Отсюда следует, что настоящая группа симметрии является здесь не просто группой из шести перестановок трех кварков, а тесно связанной с ней непрерывной группой SU(3) — одной из простых групп в списке Киллинга. Преобразования из SU(3) оставляют уравнения для законов природы неизменными, но они могут изменить решения этих уравнений. Используя SU(3), можно, например, "повернуть" протон в нейтрон. Все, что нужно сделать, — это перевернуть все составляющие его кварки вверх ногами, так, чтобы два up и один down стали двумя down и одним up. Мир фермионов имеет SU(3) симметрию, которая действует, меняя один фермион на другой.

Еще две группы симметрии дают вклад в Стандартную Модель. Калибровочные симметрии слабых взаимодействий, образующие группу SU(2), могут заменить электрон на нейтрино. Группа SU(2) — еще одна из списка Киллинга. И доброе старое электромагнитное поле имеет симметрию U(1) — не лоренцеву симметрию уравнений Максвелла, а калибровочную (т. е. локальную) симметрию изменений фазы. Эта группа отсутствует в списке Киллинга потому, что это не SU(1), но морально она там присутствует, поскольку является очень близким родственником[1].

Электрослабая теория соединила электромагнетизм и слабое взаимодействие путем объединения их калибровочных групп. Стандартная Модель также включает в себя сильные взаимодействия, являясь единой теорией для всех фундаментальных частиц. Делает она это весьма прямолинейно: она просто соединяет все три калибровочные группы вместе, в группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Эта конструкция проста и непосредственна, но не особо изящна, и именно из-за нее Стандартная Мо-

1 Группа SU(1) состоит из *единственного* элемента — единицы — и поэтому совершенно не интересна. Группа же U(1) содержит *бесконечно много* элементов (правда, закон умножения в ней коммутативен, что и есть причина ее отсутствия в списке простых групп Ли). *(Примеч. перев.)*

дель напоминает сооружение, построенное из жевательной резинки и куска бечевки.

Предположим, у вас есть мяч для гольфа, пуговица и зубочистка. Мяч для гольфа имеет сферическую симметрию SO(3), пуговица имеет симметрию окружности SO(2), а зубочистка обладает, скажем, просто отражательной симметрией O(1). Можно ли найти некоторый объединенный объект, обладающий всеми этими тремя типами симметрий? Да, можно — просто положите все три в бумажный пакет. Теперь вы можете применять SO(3) к содержимому пакета за счет вращения мяча для гольфа, SO(2) за счет вращения пуговицы, а O(1) — за счет переворачивания зубочистки. Группа симметрии содержимого пакета есть $SO(3) \times SO(2) \times O(1)$. Стандартная Модель соединяет симметрии таким же образом, только вместо вращений она использует "унитарные преобразования" из квантовой механики. И страдает от того же недостатка: она просто сваливает различные системы в кучу и комбинирует их симметрии очевидным и довольно тривиальным способом.

Гораздо более интересный способ комбинирования трех групп симметрий может состоять в построении чего-то, что содержит те же объекты, но более изящным способом, чем просто в бумажном пакете. Может быть, у вас получится уравновесить зубочистку на мяче для гольфа, а на конце ее прикрепить пуговицу. Или у вас может быть целая система зубочисток, подобная спицам колеса; установите пуговицу на втулку и крутите колесо на мяче для гольфа. Если вы хорошенько исхитритесь, быть может, построенный объект будет обладать огромной симметрией, скажем, группой K(9). (Такой группы нет. Я придумал ее для этого обсуждения.) Группы симметрии SO(3), SO(2) и O(1) по отдельности могли бы при везении оказаться подгруппами в K(9). Это был бы куда более впечатляющий способ объединить мяч для гольфа, пуговицу и зубочистку.

Физики испытывают нечто подобное по поводу Стандартной Модели, и им бы хотелось, чтобы K(9) была чем-то из списка Киллинга или вроде того, потому что Киллинговы группы являются фундаментальными составными частями симметрии. И вот физики изобрели целый ряд теорий Великого Объединения, или ТВО, основанных на группах, подобных SU(5), O(10) и Киллинговой таинственной исключительной группе E_6. ТВО, по видимости, страдали от того же недостатка, что и теория Калуцы–Клайна, — от отсутствия допускающих проверку предсказаний. Но затем появились по-настоящему интересные предсказания. Они определенно были новыми — настолько, что вероятность того, что они окажутся истинными, казалась невысокой, однако они допускали проверку. Все ТВО предсказывают, что протон можно "повернуть" в электрон или нейтрино. Таким образом, протоны оказываются неустойчивыми, и через длительное время вся материя во вселенной должна распасться, превратившись в излучение. Вычисления показывают, что среднее время жизни протона должно быть около 10^{29} лет, что намного больше возраста вселенной. Но отдельные протоны могут спонтанно распадаться намного быстрее, и если протонов достаточно много, то можно засечь распад.

Большая цистерна с водой содержит более чем достаточно протонов для того, чтобы каждый год несколько из них распадалось. К концу 80-х годов двадцатого века проводились шесть экспериментов с целью зафиксировать распад протона. Самая большая из цистерн содержала более 3000 тонн исключительно чистой воды. Распадов протона зафиксировать не удалось. Ни одного. Что означает, что среднее время жизни составляет по крайней мере 10^{32} лет. Протоны живут по крайней мере в тысячу раз дольше, чем это предсказывают ТВО. ТВО ну никак не могут заставить протон развалиться на части. Оглядываясь назад, следует признать, что если бы

распад протона был зафиксирован, это вызвало бы некоторую неловкость, потому что в ТВО отсутствует кое-что очень важное — гравитация.

Любая Теория Всего призвана объяснить, почему имеются четыре фундаментальные силы и почему они приняли тот странный вид, какой имеют сегодня. Это до известной степени похоже на попытки найти фамильное сходство между слоном, вомбатом[1], лебедем и комаром.

Было бы намного легче организовать четыре силы, если бы удалось показать, что все они — различные проявления одной силы. В биологии такое удалось сделать: все слоны, вомбаты, лебеди и комары являются представителями Древа Жизни; объединяет их ДНК, а отличает друг от друга длинный исторический ряд изменений, произошедших в ДНК. Все четверо эволюционировали шаг за шагом от общего предка, который жил миллиард или два миллиарда лет назад.

Общий предок слонов и вомбатов жил позднее, чем, скажем, общий предок слонов и лебедей. Так что эта дивергенция представляет собой наиболее недавнее ветвление древа, нарисованного для этих четырех видов. До того общий предок слонов и вомбатов отделился от некоторого предка лебедя. А еще ранее общий предок этих трех видов отделился от предка комара.

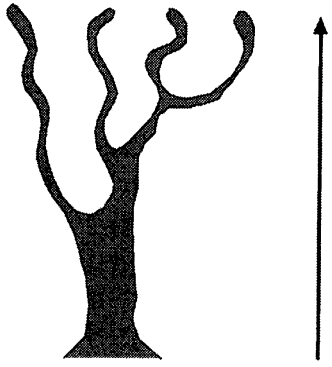
Происхождение видов можно трактовать как некое нарушение симметрии. Единый вид является (приближенно) симметричным относительно любой перестановки входящих в него организмов; каждый вомбат напоминает любого другого. Когда имеются два различных вида — вомбаты и слоны, можно пере-

1 Вомбаты — семейство двурезцовых сумчатых; это роющие норы травоядные животные, внешне напоминающие маленьких медведей. *(Примеч. перев.)*

ставлять вомбатов между собой, а слонов между собой, но нельзя заменить слона на вомбата так, чтобы никто этого не заметил.

Физики похожим образом объясняют единство, лежащее в основе четырех сил. Роль ДНК, однако, здесь играет температура вселенной — другими словами, уровень ее энергии. Хотя основополагающие законы природы одни и те же во все моменты времени, они приводят к различному поведению при различных энергиях — так же как вода, согласно одним и тем же законам, является твердой при низких температурах, жидкой при средних и газообразной при высоких. При очень высоких температурах молекулы воды разрушаются, и образуется *плазма*, состоящая из отдельных частиц[1]. При еще более высоких температурах сами эти частицы разрушаются и образуют кварк-глюонную плазму.

Когда Вселенная возникла в момент Большого Взрыва, тринадцать миллиардов лет назад, она была невероятно го-



Как четыре вида дивергируют с течением времени.

1 Состоящая из ионов — атомов, от которых отделено некоторое число их электронов — и самих этих электронов по отдельности. *(Примеч. перев.)*

рячей. Сначала все четыре силы действовали в точности одинаково. Но по мере того, как вселенная остывала, ее симметрия нарушалась, а силы расщеплялись на отдельные, каждая со своими отличительными свойствами. На данный момент наша вселенная с ее четырьмя силами является бледной копией той изящной изначальной — результатом трех нарушений симметрии.

Глава 14
Политический журналист

В июне 1972 года во время кампании по выборам президента США охранник в Уотергейтском комплексе заметил на одной из дверей скотч и оборвал его, решив, что, должно быть, его случайно оставили рабочие. Однако, когда он вернулся, скотч снова оказался на месте — им был заклеен язычок замка. Это вызвало подозрение, охранник позвонил в полицию, и та арестовала пятерых человек, проникших в помещение Национального комитета Демократической партии. Оказалось, они связаны со штабом по переизбранию президента Никсона.

Это событие не оказало большого влияния на сами выборы — Никсон победил с внушительным перевесом. Но историю не удалось замять, и щупальца Уотергейтского дела начали постепенно проникать все глубже и глубже в администрацию Никсона.

Два репортера из *Washington Post*, Боб Вудворд и Карл Бернстайн, вцепились в это дело бульдожьей хваткой. Журналисты получали секретную информацию от осведомителя, известного под псевдонимом Глубокая Глотка. Никто не знал, кто этот человек, однако все понимали, что это лицо занимает

очень высокий административный пост. В 2005 году выяснилось, что Глубокой Глоткой был Марк Фелт, второй человек в Федеральном бюро расследований.

Информация, благодаря ему просочившаяся в прессу, имела эффект разорвавшейся бомбы. К апрелю 1974 года Никсону пришлось отправить в отставку двух своих высокопоставленных помощников. Как выяснилось, президент установил "жучки" в собственном кабинете, и имелись пленки с записью довольно деликатных разговоров. После юридического сражения за доступ к пленкам в некоторых записях обнаружились пробелы, по всей вероятности — результат целенаправленного стирания.

Попытка скрыть то обстоятельство, что между проникновением со взломом и Белым Домом существует непосредственная связь, воспринималась практически всеми как преступление худшее, чем сам взлом. Палата Представителей начала формальный процесс, который мог привести к импичменту президента по обвинению в "тяжких преступлениях и правонарушениях" перед Сенатом США; в случае установления вины ему грозила отставка. Когда импичмент и осуждение стали неотвратимы, Никсон сам подал в отставку.

Противником Никсона на выборах был сенатор Джордж Макговерн. Объявляя в Сью Фоллс, штат Южная Дакота, о выдвижении своей кандидатуры от Демократической партии, Макговерн сделал несколько пророческих замечаний: "Сегодня наши граждане более не чувствуют, что они могут строить собственную жизнь во взаимодействии со своими согражданами. Происходит это из-за потери доверия к правдивости и здравому смыслу наших лидеров. Самым тягостным новым оборотом в американском политическом словаре стало выражение "кризис доверия", который проявляется в разрыве между риторикой и реальностью. Говоря откровенно, это означает, что люди больше не верят в то, что говорят им их лидеры".

Среди второстепенных фигур в кампании Макговерна был начинающий политический журналист, карьера которого, вероятно, пошла бы вверх, одержи Макговерн победу на выборах. В том варианте истории политика могла бы обогатиться, но фундаментальная физика и продвинутая математика стали бы намного беднее. В 2004 году — в той истории, которая на самом деле осуществилась — этот журналист фигурировал в списке журнала *Time* среди сотни самых влиятельных людей за год, но попал он туда не в связи с журналистикой.

Он оказался в списке за свои новаторские вклады в математическую физику. На его счету некоторые из наиболее оригинальных математических построений в мире, за которые он получил Филдсовскую медаль — высшую награду в математике, сравнимую по престижности с Нобелевской премией. Однако он не математик. Он — один из ведущих в мире физиков-теоретиков и награжден Национальной научной медалью, хотя по своему первому образованию он историк. А кроме того, он — один из главных пропагандистов (хотя и не совсем оригинальный творец) самых передовых современных усилий по объединению всей физики. Он занимает должность профессора математической физики в Институте высших исследований в Принстоне, где некогда работал Эйнштейн, а зовут его Эдвард Виттен.

Подобно немецким отцам квантовой теории и в отличие от несчастного Дирака, Виттен вырос в интеллектуальной среде. Его отец Луи Виттен — тоже физик, работающий в области общей теории относительности и гравитации. Эдвард родился в Балтиморе, штат Мэриленд, и начал обучение в университете Брандайс. После переизбрания Никсона он вернулся к академической жизни, защитив диссертацию в Принстонском университете, и стал работать и преподавать в различных американских университетах. В 1987 году его приняли в Институт высших исследований, где все академические должности — чисто исследовательские; там он работает и поныне.

Виттен начал исследования в квантовой теории поля — в области, представляющей собой первые плоды усилий по согласованию квантовой теории с теорией относительности. Релятивистские эффекты движения там учитываются, но только в плоском пространстве–времени. (А гравитация, которая требует искривленного пространства–времени, не рассматривается.) В 1998 году в своей гиббсовской лекции[1] Виттен сказал, что квантовая теория поля "охватывает большую часть того, что нам известно о законах физики, за исключением гравитации. Семидесятилетняя история ее развития включает в себя много значимых вех — от теории "антиматерии" до более точного описания атомов и Стандартной Модели физики частиц". Он отметил, что, развитая в большей своей части физиками, квантовая теория поля в значительной степени лишена математической строгости и поэтому не оказала большого влияния на математику как таковую.

Подошло время, продолжал Виттен, исправить этот дефект. Несколько важных областей чистой математики, по сути дела, являются квантовой теорией поля, но в иных одеждах. Собственный вклад Виттена — открытие и анализ топологических квантовых теорий поля — допускал прямую интерпретацию в терминах концепций, изобретенных целым рядом чистых математиков в рамках весьма различных контекстов. Сюда относится эпическое открытие, сделанное английским математиком Саймоном Доналдсоном, что четырехмерные пространства уникальны в том отношении, что допускают существование многих различных "дифференцируемых структур" — систем координат, в которых можно строить дифференциальное исчисление. Среди других аспектов — недавнее крупное откры-

1 Цель гиббсовских лекций — "предоставить широкой публике и научной общественности возможность ознакомиться с вкладом математики в современное мышление и цивилизацию". *(Примеч. перев.)*

тие в теории узлов, известное как многочлены Джонса[1], явление, называемое зеркальной симметрией в теории многомерных комплексных поверхностей, и несколько областей из современной теории алгебр Ли.

Виттен сделал смелое предсказание — одной из важнейших тем в математике двадцать первого века будет интегрирование в основное течение математики идей из квантовой теории поля: "Перед нами здесь раскинулся обширный горный хребет, бóльшая часть которого все еще скрыта в тумане. В математических теориях сегодняшнего дня видны только самые высокие вершины, возвышающиеся над облаками, и эти восхитительные вершины исследуются в отрыве друг от друга. В дымке все еще скрыт сам хребет, покоящийся на гранитном основании квантовой теории поля, а вместе с ним скрыты и россыпи математических сокровищ".

Филдсовская медаль была присуждена Виттену за открытие нескольких из этих скрытых сокровищ. Среди них — новое улучшенное доказательство "гипотезы о положительности массы", в силу которой гравитационная система с положительной локальной плотностью массы должна иметь положительную полную массу. Это может показаться очевидным, но в квантовом мире масса — тонкая материя. Доказательство этого результата, долго стоявшего на повестке дня, было опубликовано Ричардом Шеном и Шинтаном Яу[2] в 1979 году и принесло Яу Филдсовскую медаль за 1982 год. В новом улучшенном доказательстве Виттена использовалась суперсимметрия. То было первое применение этой концепции к важной математической проблеме.

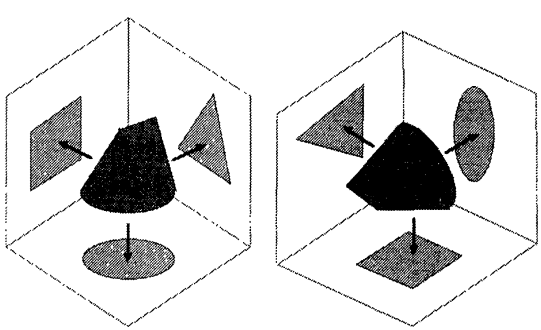
1 Многочлены Джонса были изобретены в 1983 году В. Джонсом. Виттен вывел их из "квантовой теории поля", что позволило построить дальнейшие, далеко идущие обобщения. *(Примеч. перев.)*

2 Яу Шинтан, или Цю Чентун. *(Примеч. перев.)*

Суперсимметрию можно понять в терминах старой головоломки, в которой спрашивается, какая пробка подойдет к бутылке, отверстие в которой может быть круглым, квадратным или треугольным. Удивительно, но требуемая форма существует, и стандартный ответ — пробка с круглым основанием, которая сходится к острию как клин. При взгляде снизу она видится окружностью; спереди — квадратом; сбоку — треугольником. Одна форма способна выполнить все три задачи, потому что трехмерный объект может иметь несколько различных "теней", или проекций, в различных направлениях.

Теперь представим себе флатландца, живущего на "полу" моего рисунка, так что ему видна проекция пробки на пол, но он и не подозревает о других проекциях. В один прекрасный день он, к своему изумлению, обнаруживает, что круглая форма каким-то образом изменилась и стала квадратом. Как такое может быть? Это определенно не симметрия.

Не симметрия — да, во Флатландии. Но когда флатландец отвернулся, кто-то, живущий в трехмерии, повернул пробку так, что ее проекция на пол превратилась в квадрат. При этом в трехмерии вращение является преобразованием симмет-



Как работает суперсимметрия. Слева: пробка, подходящая к отверстиям трех разных форм. Справа: эффект вращения пробки.

рии[1]. Так что симметрия в более высокой размерности может иногда объяснить совершенно непостижимое преобразование в более низкой размерности.

Нечто очень похожее происходит в суперсимметрии, но вместо превращения окружности в квадрат фермионы там превращаются в бозоны. Это удивительно. В самом деле, вы можете выполнить вычисления с фермионами, напустить на каждый операцию суперсимметрии и получить результат для бозонов без всяких дополнительных усилий[2]. Или наоборот.

Подобного мы ожидаем от настоящих симметрий. Если вы стоите перед зеркалом и жонглируете мячиками, то все происходящее с вашей стороны зеркала полностью определяет происходящее с другой стороны. Ваш образ там жонглирует образами мячиков. Если выполнение последовательности приемов занимает 3,79 с с этой стороны зеркала, то без всяких измерений ясно, что выполнение той же последовательности приемов займет 3,79 с с другой стороны. Две ситуации связаны зеркальной симметрией; что бы ни происходило с одной стороны, оно происходит также и в отражении.

Суперсимметрии не настолько просты, но приводят к похожему эффекту. Они позволяют вывести свойства частиц одного типа из свойств частиц совершенно иного типа. Дело обстоит почти так же, как если бы вы могли забраться куда-то в высокомерную область вселенной и там повернуть фермион, превратив его в бозон. Частицы организуются в суперсимметричные пары: обычной частице отвечает ее повернутая версия, называемая счастицей. Электроны имеют в паре с собой сэлектроны, кварки — скварки. По историческим причинам близнец

1 Но, разумеется, *не* преобразованием симметрии *пробки*. *(Примеч. перев.)*

2 Увы, вычисления приходится выполнять дважды. Приз же состоит в том, что полная теория — с учетом и бозонов, и фермионов — обладает значительно улучшенными свойствами по сравнению с каждой из своих "половинок". *(Примеч. перев.)*

фотона называется не сфотон, а фотино. Имеется своеобразный "теневой мир" счастиц, который только слабо взаимодействует с обычным миром.

В ногу с этой идеей идет изящная математика, но массы этих предсказываемых теневых частиц слишком велики для того, чтобы их можно было наблюдать в экспериментах[1]. Суперсимметрия прекрасна, но может не быть истинной. Но даже если вопрос не состоит в прямом подтверждении, вполне возможными могут оказаться подтверждения косвенные. Наука проверяет теории главным образом через их следствия.

Виттен активно развивал суперсимметрию и в 1984 году написал статью, озаглавленную "Суперсимметрия и теория Морса". Теория Морса — это область топологии, названная по имени своего первоисследователя Марстона Морса, в которой устанавливается связь общей формы некоторого пространства с его пиками и долинами. Сэр Майкл Атья — вероятно, наиболее крупный из ныне здравствующих британских математиков — считает, что статья Виттена представляет собой "обязательное чтение для геометров, заинтересованных в понимании современной квантовой теории поля. Она также содержит блестящее доказательство классического неравенства Морса. Реальная цель статьи состоит в подготовке почвы для суперсимметричной квантовой теории поля в терминах бесконечномерных многообразий". В дальнейшем Виттен применил эти методы к другим актуальным вопросам на дальних рубежах топологии и алгебраической геометрии.

Должно быть понятно, что, когда я сказал, что Виттен не математик, я не имел в виду отсутствие у него математического таланта. Как раз наоборот — быть может, ни у кого на планете нет

1 Сама по себе суперсимметрия прекрасна настолько, что массы частицы и отвечающей ей суперчастицы с неизбежностью *равны*. Большие значения масс счастиц определяются не самой суперсимметрией, а тем, как она *нарушена* в реальном мире, точнее — в Стандартной Модели и ее обобщениях. *(Примеч. перев.)*

бóльшего математического таланта. Но в случае Виттена к этому добавляется удивительная физическая интуиция.

В отличие от математиков физики редко стесняются использовать физическую интуицию, чтобы перескочить через пробел в математической логике. Математики же привыкли относиться к "мостам веры" с подозрением вне зависимости от того, сколь много имеется подтверждающих свидетельств: для математиков доказательство — это все. Виттен необычен в том отношении, что он может соотносить свою интуицию с той математикой, которая понятна математикам. Атья выражает это такими словами: "Его способность интерпретировать физические идеи в математических терминах совершенно уникальна. Снова и снова он удивляет математическое сообщество своими блестящими физическими озарениями, приводящими к новым глубоким математическим теоремам".

Но у этой интуитивной мощи есть и оборотная сторона. Многие из важнейших Виттеновых идей, выведенных из физических принципов или аналогий, появились без доказательств, а в отношении некоторых доказательства отсутствуют и по сей день. Не в том дело, что он не может дать доказательства, — может, как показывает его Филдсовская медаль, — а в том, что он может делать логические скачки, ведущие к глубокой и верной математике, словно бы не нуждаясь в доказательствах.

Главный вопрос — имеет ли изящная виттеновская математика какое-нибудь отношение к фундаментальной физике? Или же поиски красоты завели в математический тупик, где потеряна всякая связь с физической истиной? К 80-м годам двадцатого века физики объединили три из четырех взаимодействий, имеющихся в природе: электромагнитное, слабое и сильное[1]. Но

1 О них говорится на стр. 365 и след. *(Примеч. перев.)*

Теории Великого Объединения ничего не говорят о гравитации. Сила, которую мы наиболее непосредственно ощущаем в повседневной жизни, которая буквально не дает нам витать в облаках, исключена из синтеза — конфуз?

Достаточно несложно написать комбинированную теорию, включающую гравитацию и квантовую теорию и с виду выглядящую разумно. Но при всякой попытке решить получающиеся там уравнения возникает бессмыслица. Как правило, числа, призванные выражать разумные физические величины, оказываются бесконечными. Бесконечность в физической теории указывает: что-то идет не так. Именно появление бесконечности в законе излучения подтолкнуло Планка к квантованию света.

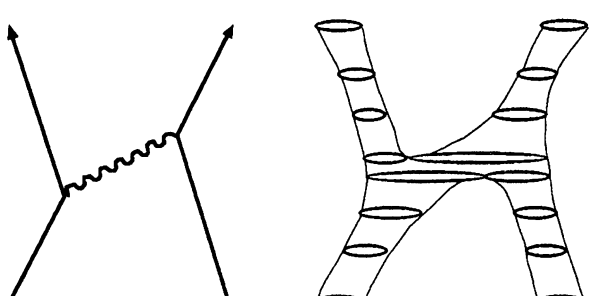
Некоторые физики пришли к убеждению, что основной источник бесконечностей — это укоренившаяся привычка рассматривать частицы как точечные. Точка — местоположение без размера — представляет собой математическую фикцию. Квантовые частицы — вероятностным образом размазанные точки, но это не приносит полного облегчения; требуются какие-то более сильные средства. Даже в 70-х годах двадцатого века несколько первооткрывателей начали думать, что частицы можно разумным образом смоделировать как колебания очень маленьких петель — "струн". В 80-х, когда в дело вступила суперсимметрия, эти струны превратились в *суперструны*.

О суперструнах можно написать целую книгу, и таких книг в самом деле существует уже несколько, но мы обойдемся очень приближенным описанием, получаемым в основном путем размахивания руками. Я хочу выделить четыре свойства: способ, которым объединяются релятивистская и квантовая картины, нужда в дополнительных измерениях, интерпретация квантовых состояний как колебаний в этих дополнительных измерениях и симметрии дополнительных измерений — или, точнее, различных полей, которые в них живут.

Начнем с эйнштейновской идеи представления траектории частицы в пространстве–времени в виде кривой, которую он назвал *мировой линией* данной частицы. По существу, это кривая, которую частица описывает в пространстве–времени по мере своего движения. В теории относительности мировые линии — гладкие кривые, что определяется видом полевых уравнений Эйнштейна. Они не ветвятся, потому что в теории относительности будущее любой системы полностью определяется ее прошлым, даже ее настоящим.

Имеется аналогичная концепция в квантовой теории поля, называемая фейнмановскими диаграммами. Фейнмановские диаграммы описывают взаимодействие частиц в весьма схематичном пространстве–времени. Например, на рисунке слева показана фейнмановская диаграмма для электрона, испускающего фотон, который затем улавливается другим электроном. По традиции фотоны обозначаются волнистыми линиями.

Фейнмановская диаграмма несколько напоминает релятивистскую мировую линию, но у нее острые углы и она ветвится. В 70-х годах XX века в голову Йоширо Намбу пришла мысль, что если вместо гипотезы о том, что частицы точечные, принять, что они представляют собой маленькие петли, то фейнманов-



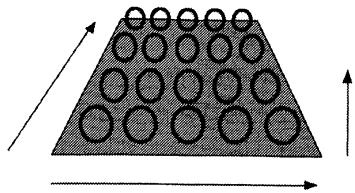
Слева: фейнмановская диаграмма для взаимодействующих частиц.
Справа: соответствующие мировые листы, в сечениях которых показаны струны.

ские диаграммы можно превратить в гладкие поверхности — *мировые листы*, как показано на правой картинке. Мировой лист можно интерпретировать как мировую линию в модифицированном пространстве–времени с дополнительными размерностями, в которых живут петли.

Что здорово насчет петель — помимо того что они не точки, — так это их способность колебаться. Быть может, каждая мода колебаний соответствует квантовому состоянию. Это позволит объяснить, почему квантовые состояния всегда содержат целые кратные некоторой базисной величины — например, спина, который всегда есть целое кратное $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Число волн, помещающихся на петле, должно быть целым числом. На скрипичной струне эти различные моды колебаний являются основным тоном и его высшими гармониками. Так что квантовая теория становится определенного вида музыкой, исполняемой на суперструнах вместо скрипичных струн.

Идея Намбу не взялась из ниоткуда. Она уходит своими корнями в замечательную формулу, выведенную Габриэле Венециано в 1968 году, которая показывала, что по видимости различные фейнмановские диаграммы представляют один и тот же физический процесс и что стоит только обойти этот факт вниманием, как вычисления в квантовой теории поля приведут к неправильному ответу. Намбу заметил, что, когда фейнмановские диаграммы окружаются трубками, различные диаграммы приводят к системе трубок с одной и той же топологией. Другими словами, системы трубок можно деформировать друг в друга. Так формула Венециано оказалась связана с топологическими свойствами трубок.

Это в свою очередь подсказывало, что квантовые частицы, несущие свои дискретные квантовые числа типа заряда, могут быть топологическими свойствами гладкого пространства–времени. Математики уже были свидетелями того, как основные топологические свойства — такие как число дыр на поверхнос-



Струны выталкиваются из обычного пространства–времени в новое измерение.

ти — имеют тенденцию к дискретности. Вроде все сходилось. Но дьявол, как всегда, сидит в деталях, а детали оказались дьявольскими. Теория струн была первой попыткой получить детали, пребывающие в согласии с реальным миром.

Теория струн возникла вовсе не как способ построить Теорию Всего, а как некоторое предложение, высказанное для объяснения частиц, известных под собирательным названием адронов[1]. Эти частицы включают в себя большую часть[2] обычных частиц, обнаруживаемых в атомных ядрах, таких как протон и нейтрон, а также толпу более экзотических частиц. Однако в теории есть изъян: она предсказывает существование частицы с нулевой массой и спином 2, которая до тех пор (как и поныне) не наблюдалась. Кроме того, она не смогла предсказать ни одной частицы со спином $\frac{1}{2}$, в то время как многие адроны, включая протон и нейтрон, имеют спин $\frac{1}{2}$. Это похоже на летний прогноз погоды, который предсказывает градины в полметра диаметром, но ничего не говорит о том, будет ли тепло. Физики не впечатлились. В 1974 году, когда на арене появилась квантовая хромодинамика и не только объясни-

1 Адроны — частицы, участвующие в сильных взаимодействиях, и только они. *(Примеч. перев.)*

2 Все, которые там постоянно живут. *(Примеч. перев.)*

ла все известные адроны, но даже успешно предсказала новый (омега-минус), судьба теории струн представлялась решенной.

В тот момент, однако, Джон Шварц и Жоэль Шерк заметили, что нежеланная частица с нулевой массой и спином 2, возникающая в теории струн, могла бы оказаться давно искомым гравитоном — гипотетической частицей, которая, согласно современным представлениям, должна переносить гравитационную силу[1]. Могла ли теория струн оказаться квантовой теорией не адронов, а *гравитации*? Если да, то она стала бы привлекательным соперником Теории Всего — ладно, Теории Много Чего, потому что есть много частиц, не являющихся адронами.

В тот момент в игру вступила суперсимметрия, потому что именно она превращает фермионы в бозоны. Адроны включают в себя частицы обоих сортов, хотя ряд других частиц, например электрон, не являются адронами. Если суперсимметрию можно было бы включить в теорию струн, то в теоретической модели автоматически появился бы целый ряд новых частиц, возникающих как суперсимметричные партнеры тех частиц, что уже присутствовали в модели.

Комбинированная теория, созданная Пьером Рамоном, Андрэ Неве и Шварцем, была теорией суперструн. Она включала частицы со спином −2, и в ней не было неприятного свойства обычной теории струн — появления частиц, движущихся быстрее света. Присутствие таких частиц в теории теперь рассматривается как свидетельство неустойчивости, из-за чего такие теории следует исключить из рассмотрения.

Начиная с 1980 года британский физик-теоретик Майкл Грин постепенно разрабатывал математику суперструн, используя методы теории групп Ли и топологии, и вскоре стало ясно, что, независимо от имеющихся у нее верительных грамот со стороны физики, теория суперструн обладает необычайной

1 Об этом говорилось на стр. 373. *(Примеч. перев.)*

математической красотой. Физики продолжали упорствовать: в 1983 году Луис Алварес-Гомэ и Виттен обнаружили новую загвоздку с теориями струн, включая и суперструны, а заодно и с доброй старой квантовой теорией поля. А именно — эти теории, как правило, обладали *аномалиями*. Аномалия возникает, когда процесс превращения классической системы в ее квантовый аналог изменяет важные симметрии.

Еще раньше Грин и Шварц открыли, что в очень специальных случаях аномалии волшебным образом исчезают, но только если пространство–время имеет размерность 26 (в первом варианте теории, называемом бозонной теорией струн) или 10 (в позднейших модификациях)[1]. Почему? В вычислениях, относящихся к бозонной теории струн, математические слагаемые, которые могли бы создать аномалию, умножаются на $d - 26$, где d — размерность пространства–времени. Так что эти члены обращаются в нуль в точности когда $d = 26$. Аналогичным образом, в модифицированном варианте соответствующий множитель оказывается равным $d - 10$. Время всегда остается одномерным, но пространство требует дополнительных 6 или 22 измерений. Шварц выразил это так: "В 1984 году мы с Майклом Грином занимались вычислениями в одной из этих теорий суперструн с целью выяснить, действительно ли там появляется аномалия. То, что мы открыли, было удивительно. Мы нашли, что, вообще говоря, действительно имеется аномалия, делавшая теорию неудовлетворительной. Но имелась свобода в вы-

1 Здесь и далее: размерность 26 относится к струне без суперсимметрии, о которой говорилось выше; она же — только что появившаяся в тексте *бозонная струна*. Струна "с модификациями", для которой существенна размерность 10, — это суперструна в том или ином ее описании. "Волшебная" размерность 26 для бозонной струны была открыта в начале 70-х годов, причем *не* Грином и Шварцем; вскоре вслед за тем была найдена и размерность 10 для суперструны. Аномалия же Грина–Шварца (1984) *не выделяет какую-либо размерность* (все действие уже разворачивается в размерности 10); условие ее непоявления выделяет *группы* SO(32) и $E_8 \times E_8$, о которых говорится чуть ниже. *(Примеч. перев.)*

боре конкретной симметрии, используемой уже в момент определения теории. На самом деле имелось бесконечно много возможностей выбора этих симметрий. Однако всего для одной из них аномалия магически сокращалась в формулах, тогда как для всех остальных не сокращалась. Таким образом, среди этой бесконечности возможностей оказалась выделенной одна-единственная, которая была потенциально непротиворечивой".

Если бы можно было не обращать внимания на неудобоваримые числа 10 и 26, это было бы восхитительное открытие. Оно подсказывало, что может иметься математическая причина, в силу которой пространство–время обладает вполне определенным числом измерений. Разочаровывал только тот факт, что число это — не четыре. Но то было только начало! Физики всегда задавались вопросом, почему пространство–время имеет ту размерность, которую мы видим; теперь же дело выглядело так, будто на этот вопрос можно найти ответ получше, чем "ну да, вообще-то размерность может быть любой, но в нашей вселенной она как раз равна четырем".

Возможно, другие теории могли бы привести к четырехмерному пространству–времени. Такая ситуация была бы идеальна, однако ничего в этом духе не сработало — необычные размерности отказывались убираться с дороги. Так что, может быть, они появляются по делу? В этом состояла старая идея Калуцы: пространство–время может иметь дополнительные размерности, которые мы просто не в состоянии наблюдать. Если так, то струны могли бы оставаться одномерными петлями, но такими, которые колеблются в более высокомерных пространствах, никаким иным способом не видимых. Квантовые числа, связанные с частицами, такие как заряд или очарование, могли бы определяться видом таких колебаний.

Фундаментальный вопрос состоял в том, как выглядят скрытые размерности. Какую форму имеет пространство–время?

Сначала физики надеялись, что дополнительные размерности образуют нечто простое, например, 6-мерный аналог тора. Но в 1985 году Филипп Канделас, Гари Хоровиц, Эндрю Строминджер и Виттен привели аргументы, показывающие, что самая подходящая форма дается так называемыми многообразиями Калаби–Яу. Имеются десятки тысяч таких геометрических форм; на рисунке схематично изображено типичное многообразие Калаби–Яу[1].

Огромное преимущество многообразий Калаби–Яу состоит в том, что суперсимметрия 10-мерного пространства–времени наследуется[2] получающимся из него обыкновенным четырехмерным пространством–временем.

Впервые исключительные группы Ли начали приобретать значительную роль на передних рубежах физики, и эта тенденция ускорялась. Около 1990 года представлялось, что имеется пять возможных типов теорий суперструн, причем все с пространством–временем размерности 10. Эти теории называются

(Иллюстрация предоставлена Эндрю Дж. Хансоном, профессором университета Индианы)

1 Не стоит забывать, что многообразие Калаби–Яу имеет размерность *шесть*, что, конечно, невероятно трудно выразить на рисунке. *(Примеч. перев.)*

2 В малой своей части. *(Примеч. перев.)*

Тип I, Тип IIA и IIB, а также "гетеротические" типы HO и HE. Возникают интересные калибровочные группы симметрий; например, в теориях Типа I и HO имеется SO(32) — группа вращений в 32-мерном пространстве, а в теории Типа HE исключительная группа Ли E_8 возникает в комбинации $E_8 \times E_8$ — в двух различных экземплярах, действующих различными способами.

Исключительная группа G_2 также возникла в самом последнем повороте сюжета, который Виттен называет M-теорией. Буква M, по его словам, означает *magic, mystery* или *matrix* — "магия, тайна, матрица". В M-теории, основанной на 11-мерном пространстве–времени, объединены все пять 10-мерных теорий струн — в том смысле, что каждую из последних можно получить из M-теории, придавая некоторым ее константам определенные значения. В M-теории многообразия Калаби–Яу заменяются на 7-мерные пространства, известные как G_2-многообразия, из-за того что их симметрии тесно связаны с Киллинговой исключительной группой Ли G_2.

На данный момент заметно некоторое недовольство теорией струн: дело не в том, что она неверна, а в том, что пока не известно, верна ли она. Несколько видных физиков, в особенности экспериментаторов, никогда вообще не связывались с суперструнами — главным образом потому, что те не давали им никакой почвы для работы. Не было новых явлений, доступных наблюдению, не было новых величин, доступных измерению.

Я не склонен считать суперструны ключом ко всей вселенной, но я полагаю, что подобный критицизм не вполне справедлив. От струнных теоретиков требуют доказать свою невиновность, тогда как нормальным образом это критики должны были бы доказывать их вину. Развитие радикально новых способов осмысления физического мира требует долгого времени и значительных усилий, а теория струн технически очень слож-

на. В принципе она *может* делать новые предсказания о нашем мире; большая проблема состоит в том, что необходимые вычисления необычайно трудны. Те же претензии можно было 40 лет назад выдвинуть против квантовой теории поля, но в конце концов вычисления там удалось продвинуть вперед за счет совместного применения лучших компьютеров и усовершенствованной математики, и достигнутое согласие с экспериментом оказалось лучше, чем где бы то ни было еще в науке.

Более того, во многом то же самое обвинение можно было бы высказать в адрес почти любого кандидата на роль Теории Всего, причем, парадоксальным образом, чем лучше такая теория, тем труднее будет доказать, что она верная. Причина в самой природе Теории Всего. Чтобы оказаться успешной, она должна согласовываться с квантовой теорией во всех случаях, когда она применяется ко всякому эксперименту, результаты которого согласуются с квантовой теорией. Она должна также согласовываться с теорией относительности во всех случаях, когда она применяется ко всякому эксперименту, результаты которого согласуются с теорией относительности. Так что Теория Всего обязана проходить *любую экспериментальную проверку, какую только можно изобрести*. Требовать нового предсказания, которое отличает Теорию Всего от стандартной физики, — это все равно что требовать чего-то такого, что приводит к результатам, тождественным тем, которые предсказаны теориями, описывающими все известные физические явления, но при этом от них отличается.

Разумеется, в конце концов теории струн придется сделать новое предсказание и пройти проверку наблюдениями, чтобы из умозрительной стать реальной физической теорией. Необходимость согласования со всем, что на данный момент известно, не исключает возможности таких предсказаний, она просто объясняет, почему они не получаются так запросто. Некоторые предварительные предложения по поводу критических

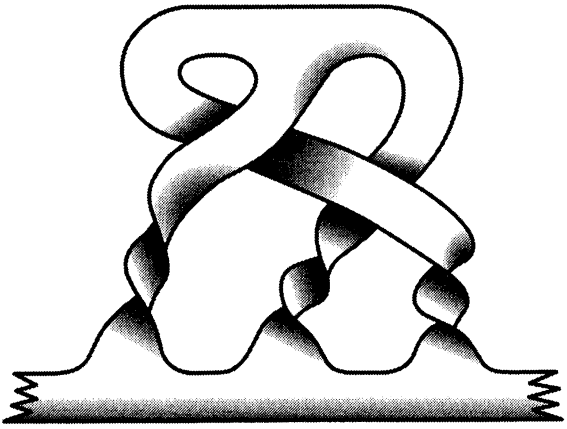
экспериментов уже существуют. Например, недавние наблюдения удаленных галактик показывают, что вселенная не только расширяется, но и делает это с возрастающей скоростью. Теория суперструн предлагает простое объяснение — гравитация утекает в те самые дополнительные измерения. Однако имеются и другие способы объяснить этот конкретный эффект. Во всяком случае не подлежит сомнению, что если все теоретики прекратят исследовать физику суперструн, то мы лишимся возможности узнать, верна ли эта теория. Формулировка и осуществление ключевых экспериментов требуют времени и сил — даже при условии, что такие эксперименты можно провести.

Я не хочу, чтобы у вас сложилось впечатление, будто, когда дело доходит до объединения квантовой теории с теорией относительности, суперструны — единственное, что есть в программе. Имеются и конкурирующие предложения — хотя все они страдают от того же отсутствия экспериментального подтверждения.

Одна идея, известная как некоммутативная геометрия, взращена французским математиком Аленом Конном. Он основывается на новой концепции геометрии пространства–времени. Большинство объединений исходят из идеи, что пространство–время представляет собой некоторое расширение релятивистской модели Эйнштейна, и пытаются как-то подогнать его под существующие фундаментальные частицы субатомной физики. Конн делает наоборот. Он начинает с математической структуры, известной как некоммутативное пространство, которое содержит все группы симметрии, возникающие в Стандартной Модели, а далее выводит свойства, аналогичные относительности. Математика такого пространства восходит к Гамильтону и его некоммутативным кватернионам, однако она сильно обобщена и модифицирована. При этом снова альтернативная теория имеет крепкие связи с теорией групп Ли.

Другая захватывающая идея — петлевая квантовая гравитация. В 80-х годах двадцатого века физик Абэй Аштекар предложил, как выглядели бы уравнения Эйнштейна в квантовой области, где пространство становится "зернистым". Ли Смолин и Карло Равелли развили его идеи, что привело к модели пространства, которое представляет собой нечто вроде средневековой кольчуги, собранной из очень маленьких, сцепленных между собой кусочков порядка 10^{-35} м в поперечнике. Они заметили, что детали структуры кольчуги становятся очень запутанными, когда звенья заузливаются или сплетаются между собой как косы. Однако не ясно, что эти возможности означают.

В 2004 году Санденс Билсон-Томсон открыл, что некоторые из этих кос точно воспроизводят правила сочетаний кварков. Электрический заряд кварка переинтерпретируется здесь в терминах топологии соответствующей косы, а правила их сочетаний следуют из простых геометрических операций с косами. Эта идея, все еще находящаяся во младенчестве, позволяет воспроизвести большинство частиц, наблюдаемых в Стандартной Модели. Она — последняя в ряду гипотетических предложений о том, что



Электрон, представленный в виде косы.

материя — реализованная здесь в виде частиц — может оказаться следствием "особенностей" в пространстве, таких как узлы, локализованные волны или более сложные структуры, где пространство перестает быть гладким и регулярным. Если Билсон-Томсон прав, то материя есть лишь скрученное пространство–время.

Математики изучали топологию кос в течение многих лет, и давно известно, что косы образуют группу — *группу кос*. Операция "умножения" в ней состоит в присоединении концов нитей друг к другу[1] — в том же духе, как мы присоединяли друг к другу перестановки при рассмотрении подхода Руффини к уравнениям пятой степени. Мы опять видим, как физика основывается на предсуществующих математических открытиях, сделанных в основном "ради самих себя", только потому, что они казались интересными. И снова ключевым ингредиентом является симметрия.

В последних версиях суперструн главной проблемой стал кризис перепроизводства. На смену отсутствию всяких предсказаний пришло производство слишком большого их количества в теории. "Энергия вакуума" — энергетическое содержание пустого пространства — может быть практически любой в зависимости от того, как струны наматываются на дополнительные измерения пространства. Число способов, которыми это может происходить, поистине гигантское — около 10^{500}. При различных выборах получаются различные значения энергии вакуума. При этом наблюдаемое значение очень, очень мало — около 10^{-120}, однако не нулевое[2].

1 "Начало" одной косы к "концу" другой. *(Примеч. перев.)*

2 Энергия, в отличие от *числа* комбинаций, должна, конечно, измеряться в каких-то единицах (аналогичным образом бессмысленно утверждение, что вы ехали "со скоростью 100", пока не сказано, о каких единицах идет речь). В тексте говорится в действительности даже не об энергии, а о "космологической постоянной" $\lambda \approx 10^{-120}\, M_{Pl}4$, для которой в качестве единицы измерения здесь выбрана четвертая степень величины $M_{Pl} = 4{,}34$ мкг (мкг — микрограммы, то есть миллионные доли грамма). *(Примеч. перев.)*

Согласно стандартной истории с "тонкой настройкой", это конкретное значение как раз подходит для существования жизни. Любое значение, превышающее 10^{-118}, заставит локальное пространство–время взорваться; а все меньшее 10^{-120} приведет к тому, что пространство–время сожмется и исчезнет в космическом хлопке. Так что "окно возможностей" для жизни очень невелико. Чудесным образом наша вселенная именно в нем и оказалась.

"Слабый антропный принцип" гласит, что если бы наша вселенная не была устроена таким способом, каким она в действительности устроена, то нас бы там не оказалось и мы не задавались бы вопросом о ее устройстве; однако при этом остается открытым вопрос о том, почему нашлось "здесь", в котором мы можем жить. "Сильный антропный принцип" говорит, что мы здесь потому, что вселенная была спроектирована специально для существования в ней жизни, но это — мистическая чепуха. Никто в действительности не знает, какие возможности реализовались бы, если бы вакуумная энергия сильно отличалась от ее актуального значения. Нам известно, что ряд вещей пошел бы вкривь и вкось, но мы и представления не имеем о том, что бы могло появиться вместо них. Большая часть всех аргументов о тонкой настройке — ерунда.

В 2000 году Рафаэль Буссо и Джозеф Полчински предложили иной ответ, используя теорию струн и имеющиеся 10^{500} возможных значений энергии вакуума. Хотя число 10^{-120} очень мало, возможные уровни вакуумной энергии отделены друг от друга на 10^{-500} единиц, что есть еще меньшее число. Таким образом, большое число теорий струн дает вакуумные энергии в "правильном" интервале. Вероятность, что случайно выбранная энергия попадет в него, по-прежнему пренебрежимо мала, но Буссо и Полчински указали, что это несущественно. В конце концов "правильная" вакуумная энергия непременно возникнет. Идея состоит в том, что вселенная перебирает все возмож-

ные теории струн, застревая на каждой до тех пор, пока та не заставит эту вселенную рассыпаться, а затем квантово-механически тунеллирует к некоторой другой теории струн. Если подождать достаточно долго, то на некотором этапе вселенная приобретет вакуумную энергию, которая будет лежать в интервале, подходящем для жизни.

В 2006 году Поль Стайнхардт и Нил Тьюрок предложили вариацию на тему теории тунеллирования — циклическую вселенную, которая расширяется после Большого Взрыва и сжимается в Большом Схлопывании, повторяя такое поведение каждый триллион лет или около того. В их модели энергия вакуума убывает на каждом последовательном цикле, так что в конце концов вселенная получает очень малую, но не нулевую вакуумную энергию.

В той или иной модели вселенная, вакуумная энергия которой достаточно мала, будет тут околачиваться очень долго. Условия пригодны для возникновения жизни, а у жизни полно времени, чтобы развить разум и поинтересоваться, почему она тут оказалась.

Глава 15
Математическая кутерьма

У гусей — гогот, у львов — достоинство, у певчих птиц — пленительность, у жаворонков — ликование... А какое обобщающее существительное относится к математике? Великолепие математики? Слишком пафосно. Таинство математики? Пожалуй, немного чересчур. В результате многих выпавших на мою долю шансов понаблюдать за поведением математических индивидуумов, сбившихся в достаточно большое стадо, я пришел к выводу, что самое подходящее слово для того, что они устраивают, — "кутерьма".

Один из них в такой кутерьме изобрел одну из наиболее причудливых структур во всем предмете и открыл скрытое единство за таинственным фасадом. Их открытия, возникавшие по большей части из праздношатания в надежде, что под руку подвернется что-нибудь интересное, начинают проникать в теоретическую физику, и они могут оказаться ключевыми для некоторых самых любопытных свойств суперструн.

Математика суперструн — предмет настолько новый, что бóльшая ее часть еще не изобретена. Но, по иронии судьбы, математики и физики как раз открыли, что суперструны, нахо-

дящиеся на самом переднем крае исследований в современной физике, демонстрируют занятную связь с куском викторианской алгебры — настолько старомодным куском, что его редко упоминают в университетских курсах математики. Это алгебраическое изобретение известно как октонионы; они представляют собой структуру, идущую после вещественных чисел, комплексных чисел и кватернионов.

Октонионы были открыты в 1843 году, результат появился в печати в 1845-м за чужим авторством, и с тех пор их создатель неизменно указывался неправильно — но это большого значения не имело, поскольку внимания на них все равно никто не обращал. К 1900 году они впали в безвестность даже внутри математики. Недолгое возрождение выпало на их долю в 1925 году, когда Вигнер и фон Нейман попытались на их основе построить квантовую механику, но снова исчезли с горизонта, когда эта попытка не удалась. В 80-х годах двадцатого века они вынырнули снова из-за их потенциальной полезности в теории струн. В 1999 году они сыграли роль ключевого ингредиента в 10- и 11-мерной теориях суперструн[1].

Октонионы говорят нам, что нечто очень странное творится в районе числа 8, а что-то еще более странное происходит с физикой пространства, времени и материи. Викторианская безделушка пережила второе рождение в качестве ключа, открывающего глубокие тайны на общих рубежах математики и физики — в особенности это относится к вере в то, что пространство–время может иметь большее число измерений, чем

1 11-мерных суперструн не бывает (это же видно из перечисления теорий струн, приведенного на стр. 398); в 11-мерном пространстве живет суперсимметричное обобщение эйнштейновской теории гравитации, которое наряду с суперструнами должно некоторым образом включаться в пока еще не созданную М-теорию (*не* являющуюся в буквальном смысле теорией струн). Эта 11-мерная супергравитация будет упомянута на стр. 428. *(Примеч. перев.)*

традиционные четыре, и что именно за счет этого соединяются в одно целое гравитация и квантовая теория.

Октонионная сага разворачивается на свободных просторах абстрактной алгебры; этому сюжету посвящен прекрасный математический обзор, опубликованный в 2001 году американским математиком Джоном Баэзом. Я буду в значительной мере опираться на его идеи, изо всех сил стараясь донести до читателя хитроумные, но изящные чудеса, которыми славится эта любопытная область на стыке математики и физики. Как и с духом отца Гамлета — развоплощенным голосом из-под сцены, — значительная часть математических подробностей должна оставаться вне поля зрения аудитории. Отнеситесь ко мне с терпением и не обращайте слишком большого внимания на непонятности необъясненного профессионального жаргона. Иногда просто требуется удобное слово, чтобы не упускать из виду основных действующих лиц.

В качестве вступления могут быть полезны несколько напоминаний. С нашей историей о погоне за симметрией тесно переплелось осуществлявшееся шаг за шагом расширение числовой системы. Первым шагом было открытие (или изобретение) в середине шестнадцатого столетия комплексных чисел, в которых имеется квадратный корень из -1. До того времени математики считали, что числа — единственные и *данные* от Бога. И подумать нельзя было об изобретении каких-то новых чисел. Но около 1550 года Кардано и Бомбелли сделали именно это, записав квадратный корень из отрицательного числа. Понадобилось около 400 лет, чтобы разобраться, какой в этом смысл, но всего около 300, чтобы убедить математиков, что штука эта слишком полезная, чтобы стоило ее выкидывать.

К 1800-м годам вычурное изобретение Кардано и Бомбелли кристаллизовалось в числа некоего нового вида, в записи кото-

рых появился новый символ *i*. Комплексные числа могут показаться странными, но они оказались восхитительным средством для понимания математической физики. Задачи о тепле, свете, звуке, колебаниях, упругости, гравитации, магнетизме, электричестве и течении жидкостей и газов — все они поддались комплексному натиску, правда, только в физике размерности два.

Наша вселенная, однако, имеет три пространственных измерения — во всяком случае так считалось до самого последнего времени. Поскольку двумерная система комплексных чисел настолько эффективна в двумерной физике, может ли найтись аналогичная трехмерная числовая система, пригодная для использования в "настоящей" физике? Гамильтон потратил годы на поиски чего-то подобного, но без всякого успеха. Затем 16 октября 1843 года он испытал озарение: *не смотри на три измерения, смотри на четыре*, — и нацарапал свои уравнения для кватернионов на каменной кладке моста Брумбридж.

У Гамильтона был старый друг со времен колледжа по имени Джон Грейвс, фанат алгебры. Весьма вероятно, что именно Грейвс первоначально пробудил в Гамильтоне интерес к расширению числовой системы. Гамильтон написал своему приятелю длинное письмо о кватернионах на следующий же день после того, как испортил мост своей надписью.

Грейвс сначала был озадачен и сомневался, насколько законным является изобретение правил умножения прямо из головы. "У меня пока нет никакого ясного представления о том, в какой степени мы свободны в произвольном создании мнимостей и в наделении их сверхъестественными свойствами", — писал он в ответ. Но он также разглядел потенциал новой идеи и задался вопросом о том, как далеко это позволит продвинуться: "Если ваша алхимия позволяет вам создать три фунта золота, то зачем останавливаться?"

То был хороший вопрос, и Грейвс задался целью ответить на него. По прошествии двух месяцев он прислал письмо, в котором говорил, что нашел восьмимерную числовую систему. Он назвал ее октавами. С ними была связана замечательная формула о сумме восьми квадратов, к которой мы очень скоро обратимся. Он попытался определить 16-мерную числовую систему, но наткнулся на нечто, о чем он отозвался как о "непредвиденной загвоздке". Гамильтон сказал, что поможет своему другу привлечь к его открытию внимание публики, но потом оказался слишком для этого занят исследованием своих кватернионов. Затем он заметил потенциальную проблему: умножение октав не подчинялось закону ассоциативности. Это значит, что если взять произведение трех октав двумя способами, как $(ab)c$ и $a(bc)$, то, как правило, получатся различные ответы. После проведенной им серьезной переоценки ценностей Гамильтон был готов отказаться от закона коммутативности, но расстаться еще и с ассоциативностью — это было уже чересчур.

Далее Грейвсу крупно не повезло. До того как он сумел опубликовать свое открытие, Кэли независимо открыл то же самое и в 1845 году опубликовал как приложение к ужасной во всех остальных отношениях статье по эллиптическим функциям, настолько изобилующей ошибками, что ее изъяли из собрания его работ. Кэли назвал свою систему октонионами.

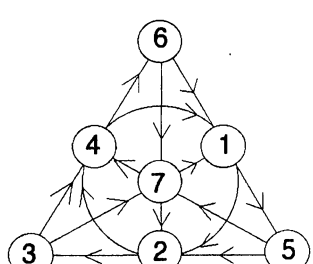
Грейвс был расстроен тем, что его опередили в плане публикации. Так случилось, что его собственная статья должна была вскоре выйти в том же журнале, где о своем открытии объявлял Кэли. Поэтому Грейвс добавил к статье замечание с указанием, что та же идея пришла ему в голову еще за два года до того, а Гамильтон поддержал его, опубликовав краткую заметку, подтверждающую, что приоритет принадлежит его другу. Несмотря на эту четкую картину, октонионы быстро приобрели название "числа Кэли", широко используемое и по сей день. Многие математики теперь пользуются терминологией Кэли,

называя эту систему октонионами, указывая при этом на авторство Грейвса. В любом случае такое название лучше, чем "октавы", поскольку оно напоминает "кватернионы".

Алгебру октонионов можно описывать в терминах замечательной диаграммы, известной как плоскость Фано. Она представляет собой конечную геометрию, составленную из семи точек, соединенных по три семью "прямыми" линиями, и имеет вид, показанный на рисунке.

Одну из прямых пришлось свернуть в окружность, чтобы изобразить ее на плоскости, но это не страшно. В этой геометрии любые две точки лежат на одной прямой, а любые две прямые пересекаются в некоторой точке. Параллельных прямых нет. Плоскость Фано была изобретена для совершенно иных целей, но оказалось, что она кодирует в себе правила умножения октонионов.

В октонионах имеется восемь единиц: обычное число 1 и еще семь, обозначаемые как e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 и e_7. Квадрат любой из этих семи равен -1. Диаграмма определяет их правила умножения. Пусть нам надо умножить e_3 на e_7. Ищем на диаграмме точки 3 и 7 и соединяющую их прямую линию. На ней имеется третья точка — в данном случае точка 1. Следуя по стрелкам, мы идем от 3 к 7 и далее к 1, так что $e_3e_7 = e_1$. Если порядок обратный, то надо дополнительно взять знак минус:



Плоскость Фано — геометрия с семью точками и семью прямыми.

$e_7e_3 = -e_1$. Если проделать это для всех возможных пар единиц, получится полная картина арифметики октонионов. (Со сложением и вычитанием все всегда просто, а деление следует из умножения.)

Грейвс и Кэли не знали об этой связи с конечной геометрией, поэтому они выписывали таблицу умножения для октонионов. Как плоскость Фано помогает выразить эту таблицу, было открыто много позже.

На протяжении многих лет октонионы оставались диковинкой второго сорта. В отличие от кватернионов у них не было ни геометрической интерпретации, ни применений в науке. Даже внутри чистой математики из них, казалось, ничего не следует; неудивительно, что они впали в безвестность. Но все изменилось, когда выяснилось, что октонионы — источник наиболее причудливых алгебраических структур, известных в математике. Они дают объяснение, откуда на самом деле берутся пять Киллинговых исключительных групп Ли G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8. А группа E_8 — самая большая из исключительных групп Ли — фигурирует *дважды* в качестве группы симметрии, на которой основана 10-мерная теория суперструн, обладающая необычайно приятными свойствами и рассматриваемая многими физиками как наилучший на данный момент кандидат на Теорию Всего.

Если мы соглашаемся с Дираком в том, что корни вселенной — в математике, то мы можем сказать, что вероятная Теория Всего существует постольку, поскольку существует E_8, а E_8 существует постольку, поскольку существуют октонионы. Что открывает перед нами занятную философскую возможность: структура, лежащая в основе нашей вселенной (про которую мы знаем, что она очень специальная), выделена своей связью с уникальным математическим объектом — октонионами.

Красота есть истина, а истина — красота. Пифагорейцам и платоникам понравилось бы такое свидетельство определяю-

щей роли математических структур в картине нашего мира. Октонионы обладают зачаровывающей, сюрреалистической математической красотой, за которую Дирак ухватился бы в качестве причины, указывающей, почему 10-мерная теория струн должна быть истинной. Если же она, на нашу беду, окажется ложной, то будет, тем не менее, даже более интересной, чем что бы то ни было иное, которое *окажется* истинным. Правда, нам известен и тот факт, что прекрасные теории не обязательно истинны, и до тех пор, пока по поводу суперструн не будет вынесен вердикт, эта возможность должна оставаться только гипотезой.

Какова бы ни была их важность в физике, круг идей, связанных с октонионами, — чистое золото для математики.

Связь между октонионами и исключительными группами Ли представляет собой одно из целой серии странных соотношений между различными обобщениями кватернионов и передним краем современной физики. Я хочу достаточно глубоко рассмотреть некоторые из этих связей, чтобы вы смогли оценить, насколько они замечательны. И я собираюсь начать с некоторых из самых старых исключительных структур в математике — формул для сумм квадратов.

Одна такая формула естественно вытекает из комплексных чисел. Каждое комплексное число имеет "норму" — квадрат расстояния от числа до начала координат. По теореме Пифагора, норма числа $x + iy$ равна $x^2 + y^2$. Правила умножения комплексных чисел, сформулированные Весселем, Арганом, Гауссом и Гамильтоном, говорят нам, что норма обладает очень приятным свойством. Если перемножить два комплексных числа, то нормы тоже перемножатся. На языке символов $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xv + yu)^2 + (xu - yv)^2$. Сумма двух квадратов, умноженная на сумму двух квадратов, всегда явля-

ется суммой двух квадратов. Этот факт был известен индийскому математику Брахмагупте около 650 года, а также Фибоначчи в 1200 году.

На начальном этапе математиков в теории чисел сильно занимали суммы двух квадратов, потому что с их помощью можно было различать два типа простых чисел. Легко доказать, что если нечетное число представляется в виде суммы двух квадратов, то оно должно иметь вид $4k + 1$ для некоторого целого k. Остальные нечетные числа, имеющие вид $4k + 3$, нельзя представить в виде суммы двух квадратов. Однако *не* верно, что каждое число вида $4k + 1$ является суммой двух квадратов, даже если разрешить одному из квадратов равняться нулю. Первое такое исключение доставляет число 21.

Ферма сделал замечательное по красоте открытие: эти исключения не могут быть простыми числами. Он доказал, что, наоборот, каждое простое число вида $4k + 1$ является суммой двух квадратов. Из приведенной выше формулы для перемножения сумм двух квадратов тогда следует, что нечетное число является суммой двух квадратов, если и только если каждый простой множитель вида $4k + 3$ входит в четной степени. Например, $45 = 3^2 + 6^2$ является суммой двух квадратов. Его разложение на простые множители имеет вид $3 \times 3 \times 5$, и простой множитель 3, имеющий вид $4k + 3$ (при $k = 0$), возникает в степени два — т. е. в четной степени. Другой множитель, 5, возникает в нечетной степени, но это простое число имеет вид $4k + 1$ (при $k = 1$), что не вызывает никаких проблем.

С другой стороны, исключение 21 есть 3×7, где оба простых имеют вид $4k + 3$, причем каждое входит в степени 1 (т. е. в нечетной степени), и поэтому для 21 правило не работает. Для бесконечного числа других чисел оно не работает по той же причине.

Позднее Лагранж использовал аналогичные методы для доказательства того факта, что каждое положительное целое чис-

ло является суммой четырех квадратов (здесь разрешаются нули). Его доказательство использует хитрую формулу, открытую Эйлером в 1750 году. Оно похоже на приведенное выше рассуждение, но только относится к суммам четырех квадратов. Сумма четырех квадратов, умноженная на сумму четырех квадратов, есть сумма четырех квадратов. Подобной формулы не может быть для суммы трех квадратов, потому что существуют пары чисел, которые оба являются суммой трех квадратов, но произведение которых такой суммой не является. Однако в 1818 году Деген нашел формулу произведения для суммы *восьми* квадратов. Ту же формулу открыл Грейвс, используя октонионы. Бедный Грейвс — сделанное им раньше всех открытие октонионов приписано другому; его формула для восьми квадратов оказалась неоригинальной.

Имеется также тривиальная формула произведения для суммы одного квадрата — т. е. просто для квадрата. Она имеет вид $x^2y^2 = (xy)^2$. Эта формула является для вещественных чисел тем же, чем формула двух квадратов для комплексных: она показывает, что норма мультипликативна, т. е. норма произведения равна произведению норм. Здесь, как и выше, норма есть квадрат расстояния от числа до начала координат. Число, противоположное любому положительному числу, имеет ту же норму, что и это положительное.

А что насчет формулы для четырех квадратов? Она утверждает то же самое для кватернионов. Четырехмерный аналог теоремы Пифагора (да, есть такая штука!) говорит нам, что кватернион общего вида $x + iy + jz + kw$ имеет норму $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, а это есть сумма четырех квадратов. Кватернионная норма также мультипликативна, и этим объясняется формула Лагранжа для четырех квадратов.

Вы, наверное, меня уже опередили. Формула Дегена для восьми квадратов имеет аналогичную интерпретацию в терминах октонионов. Октонионная норма мультипликативна.

Здесь происходит что-то весьма любопытное. У нас имеется четыре типа последовательно усложняющихся числовых систем: вещественные, комплексные, кватернионы и октонионы. Их размерности равны 1, 2, 4 и 8. Имеются формулы, утверждающие, что сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, есть сумма квадратов, и эти формулы применимы к 1, 2, 4 или 8 квадратам. Эти формулы тесно связаны с соответствующими числовыми системами. Но еще более интригующей является сама последовательность чисел, которые здесь появляются: 1, 2, 4, 8 — что дальше?

Если продолжить последовательность, то весьма разумно было бы ожидать, что мы найдем интересную 16-мерную числовую систему. Действительно, такую систему можно построить естественным путем, называемым процессом Кэли–Диксона. Если применить этот процесс к вещественным числам, то получаются комплексные. Применение к комплексным дает кватернионы. Применение к кватернионам — октонионы. И если теперь двинуться дальше и применить его к октонионам, получатся седенионы — 16-мерная числовая система, а затем алгебры размерности 32, 64 и так далее (на каждом шаге размерность удваивается).

Что же, существует формула для 16 квадратов?

Нет. Норма седенионов не мультипликативна. Формулы произведения для сумм квадратов существуют *только* тогда, когда квадратов в них 1, 2, 4 или 8. Закон малых чисел снова проявил себя: то, что выглядело как последовательность степеней, стопорится.

Почему? По сути, потому что процесс Кэли–Диксона постепенно разрушает законы алгебры. Всякий раз, как он применяется, получающаяся система ведет себя в чем-то не так хорошо, как предыдущая. Шаг за шагом, закон за законом — и изящные вещественные числа погружаются в анархию. Подробности этого таковы.

Наши четыре числовые системы имеют и другие общие свойства, помимо нормированности. Наиболее впечатляющее — из-за которого они и попадают в класс обобщений вещественных чисел — состоит в том, что это "алгебры с делением". Имеется много алгебраических систем, к которым применимы понятия сложения, вычитания и умножения. Но в наших четырех системах можно, кроме того, делить. Существование мультипликативной нормы делает их "нормированными алгебрами с делением". В течение некоторого времени Грейвс полагал, что его метод перехода от 4 к 8 можно будет повторить, что приведет к нормированным алгебрам с делением размерностей 16, 32, 64 — всех степеней двойки. Но он наткнулся на препятствие с седенионами и начал сомневаться, действительно ли существует 16-мерная нормированная алгебра с делением. Он был прав: нам теперь известно, что существуют только четыре нормированные алгебры с делением, и они имеют размерности 1, 2, 4 и 8. Нет формулы для 16 квадратов, подобной формуле Грейвса для восьми квадратов или формуле Эйлера для четырех квадратов.

Почему? На каждом шаге вдоль по цепочке из степеней двойки новая числовая система теряет некоторую часть структуры. Комплексные числа не упорядочены вдоль прямой. Кватернионы не подчиняются алгебраическому правилу $ab = ba$ — закону коммутативности. Октонионы не подчиняются закону ассоциативности $(ab)c = a(bc)$, хотя и удовлетворяют закону альтернативности $(ab)a = a(ba)$. Седенионы не образуют алгебру с делением и не имеют мультипликативной нормы.

Все это носит намного более фундаментальный характер, чем просто факт "отказа" в процессе Кэли–Диксона. В 1898 году Гурвиц доказал, что единственные нормированные алгебры с делением — это четыре наших старых друга. В 1930 году Макс Цорн доказал, что те же четыре алгебры являются единственными альтернативными алгебрами с делением. Они поистине исключительны.

Происходящее — из разряда тех вещей, которые нравятся чистым математикам с их платоническими пристрастиями. Но единственными по-настоящему важными для остального человечества случаями являются, по-видимому, вещественные и комплексные числа, которые имеют широкие практические применения. Кватернионы проявили себя в ряде полезных, пусть даже эзотерических приложений, но октонионы не попадали в свет рампы прикладной науки. Они, казалось, являют собой некий тупик чистой математики, подобие претенциозной интеллектуальной чепухи, которой и следует ожидать от людей, витающих в облаках.

История математики показывает снова и снова, что опасно отбрасывать всякие яркие или красивые идеи лишь на том основании, что они вроде бы не приносят очевидной пользы. К сожалению, это не мешает людям пренебрегать такими идеями, часто именно потому, что они прекрасные или яркие. Чем более "практическими" люди себя полагают, тем в большей степени они склонны поливать презрением математические концепции, возникающие из абстрактных проблем и изобретенные "ради самих себя", а не из проблем реального мира. Чем изящнее концепция, тем больше презрения, как будто бы изящества самого по себе следует стыдиться.

Такие декларации бесполезности — заложники судьбы. Одно-единственное новое применение, один шаг вперед в науке — и презираемая концепция может внезапно, как выпущенное из пушки ядро, приземлиться в центре сцены, более не бесполезная, а, наоборот, сущностно важная.

Таким примерам нет числа. Сам Кэли говорил, что его матрицы совершенно бесполезны, но сегодня ни одна ветвь науки не могла бы без них функционировать. Кардано объявил, что комплексные числа "настолько же деликатны, насколько бес-

полезны", но ни один инженер или физик не мог бы работать в мире, в котором отсутствовали бы комплексные числа. Годфри Хэролду Харди — ведущему английскому математику 30-х годов двадцатого века — безмерно импонировала мысль, что теория чисел не имеет никаких практических применений и, в частности, не может использоваться в военных целях. Сегодня теория чисел применяется для шифровки сообщений — она жизненно важна для безопасности коммерческих операций, проводимых через Интернет, и еще более важна для военных.

Подобное же происходит и с октонионами. Они еще могут войти в обязательный курс математики и даже, скорее, физики. Постепенно становится ясной центральная роль октонионов в теории групп Ли — в особенности тех, что представляют интерес для физики, и в первую очередь пяти исключительных групп Ли G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8, имеющих загадочные размерности 14, 52, 78, 133 и 248. Само их существование представляет собой загадку. Один доведенный до белого каления математик назвал их создание грубым порождением злонамеренного божества.

Любители природы получают удовольствие, вновь и вновь посещая хорошо им известные красивые места, откуда можно наслаждаться прекрасным видом — от середины водопада, с уступа, уводящего в сторону от нахоженной тропы, или на утесе, с которого открывается вид на голубой океан. Подобным же образом математики любят возвращаться к старым темам и рассматривать их с новых точек зрения. По мере смены перспективы в наших взглядах на математику удается дать новые интерпретации старым концепциям, что открывает новые возможности. Это вовсе не вопрос математического туризма, когда с открытым ртом таращатся на нечто невыразимо удивительное, рассматривая его под разными углами. Таким спосо-

бом возникают новые мощные способы решения старых и новых задач. Ни в каком другом месте эта тенденция не проявилась сильнее и не была более информативной, чем в теории групп Ли.

Напомним, что Киллинг организовал почти все простые группы Ли в четыре бесконечных семейства, два из которых составляют на самом деле две части одного большего семейства специальных ортогональных групп $SO(n)$ в четных и нечетных размерностях. Два другие семейства — это специальные унитарные группы $SU(n)$ и симплектические группы $Sp(2n)$.

Теперь мы знаем, что все эти семейства представляют собой вариации на одну и ту же тему. Они состоят из всех $n \times n$-матриц, удовлетворяющих некоторому конкретному алгебраическому условию — они "косо-эрмитовы"[1]. Единственное различие состоит в том, что для получения ортогональных алгебр Ли надо использовать матрицы из вещественных чисел, для получения унитарных алгебр Ли — матрицы из комплексных чисел, а для получения симплектических алгебр Ли — матрицы из кватернионов. Эти алгебры образуют бесконечные семейства, потому что матрицы могут иметь какой угодно размер. Чудесно видеть, что алгебры Ли, соответствующие естественным преобразованиям в гамильтоновом описании механики — первом великом открытии Гамильтона, — допускают естественное описание в терминах кватернионов — его последнего великого открытия.

Но теперь самое время задуматься, а что же происходит, если в качестве матричных элементов используются октонионы. К сожалению, из-за отсутствия ассоциативности не удается получить новое бесконечное семейство простых алгебр Ли. На самом деле лучше бы сказать "к счастью", поскольку мы ведь

1 Если речь идет об *алгебрах* Ли. Для групп Ли соответствующее условие выглядит по-другому. *(Примеч. перев.)*

знаем, что такого семейства не существует. Но если играть с октонионами в правильные игры, да еще заручиться поддержкой закона малых чисел, можно получить самые настоящие алгебры Ли.

Первый намек на то, что так может случиться, появился в 1914 году, когда Эли Картан ответил на очевидный вопрос и получил удивительный ответ. Руководящий принцип в математике и физике состоит в том, что если имеется некоторый интересный объект, то первое, что про него надо спросить, — это какова его группа симметрии. Группа симметрии системы вещественных чисел тривиальна и состоит только из одного тождественного преобразования — преобразования "не делаем ничего". Группа симметрии системы комплексных чисел содержит тождественный элемент и одну зеркальную симметрию, которая преобразует i в $-i$. Группой симметрии кватернионов является SU(2), которая почти совпадает с группой вращений SO(3) в трехмерном вещественном пространстве.

Вопрос, который задал Картан, — это "Какова группа симметрии октонионов?". Если вы — некий Картан, то ответ на этот вопрос вам известен. Группой симметрии октонионов является наименьшая из исключительных простых групп Ли — та, которая известна под именем G_2. 8-мерная система октонионов имеет 14-мерную группу симметрии. Исключительная нормированная алгебра с делением непосредственно связана с первой из исключительных групп Ли.

Чтобы двигаться дальше, нам надо подружиться с одной идеей, восходящей к эпохе Возрождения — но только не к математикам, а к художникам того времени.

В те дни математика и искусства были довольно близки друг к другу — не только в архитектуре, но и в живописи. Художники времен Возрождения открыли, как применить геометрию к

перспективе. Они нашли геометрические правила для изображения на бумаге таким образом, чтобы объекты и пейзажи выглядели как трехмерные. При этом они изобрели новый и удивительно красивый вид геометрии.

Работы более ранних художников часто не выглядят, на наш взгляд, реалистичными. Даже такой художник, как Джотто (Амброджио Бондоне), мог создавать работы почти фотографического качества, но при более внимательном рассмотрении оказывалось, что перспектива в них не совсем последовательна. Лишь Филиппо Брунелески в 1425 году сформулировал последовательный математический метод получения точной перспективы и передал свое знание другим художникам. В 1435 году вышла первая книга по данному предмету — *Della Pittura* Леоне Альберти.

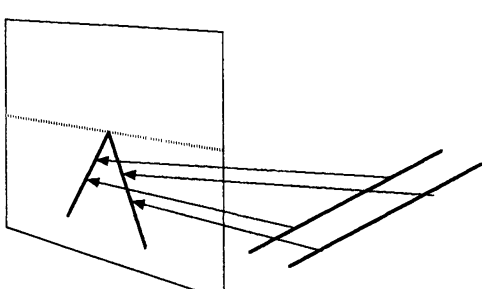
Метод был доведен до совершенства в живописи Пьеро делла Франческа, который был также замечательным математиком. Пьеро написал три книги по математике перспективы. И нельзя не упомянуть Леонардо да Винчи, книга которого *Trattato della Pittura* начинается с утверждения "Пусть никто, не являющийся математиком, не читает мои работы", что перекликалось с лозунгом "Да не войдет сюда ни один не знающий геометрии", который, согласно легенде, помещался над входом в Платоновскую Академию в Древней Греции.

Суть перспективы состоит в понятии "проекции", согласно которой трехмерный пейзаж переносится на плоский лист бумаги таким способом, что (в идеале) каждая точка пейзажа соединяется с глазом наблюдателя, после чего надо определить, где эта линия пересекает лист бумаги. Ключевая идея состоит в том, что проекции искажают формы некоторыми способами, которых не допускает Эвклид. В частности, проекция может превратить параллельные линии в пересекающиеся.

Мы наблюдаем такой эффект каждый день. Стоя на мосту и глядя на длинную прямую полосу уходящей вдаль железной до-

роги или автотрассы, мы видим, что прямые линии сходятся и, как кажется, пересекаются на горизонте. В действительности прямые остаются на одном и том же расстоянии друг от друга, но из-за перспективы воспринимаемое нами расстояние уменьшается по мере того, как прямая уходит от нас. В математической идеализации бесконечно длинные параллельные прямые на плоскости также пересекаются, если их подходящим образом спроектировать. Но место, где они пересекаются, не является образом какой бы то ни было точки в плоскости — оно и не может им быть, поскольку на плоскости прямые не пересекаются. Это кажущийся "горизонт", в направлении к которому продолжаются прямые и плоскость. С точки зрения самой плоскости горизонт бесконечно удален, но его проекция — полностью осмысленная прямая, проходящая через середину картины.

Эта прямая известна как "прямая в бесконечности". Как и квадратный корень из минус единицы, это фикция, но исключительно полезная фикция. Возникающая таким образом геометрия называется проективной геометрией, и, в духе эрлангенской программы Клейна, это геометрия свойств, которые не меняются при проекциях. Проективную геометрию использует каждый художник, который рисует изображения с перспективой, с линией горизонта и с "точкой схода", для того чтобы изображаемые объекты выглядели как реальные.



Как проекция заставляет параллельные прямые пересекаться на горизонте.

Геометрия проективной плоскости исключительно изящна. Через любые две точки можно провести единственную прямую, равно как в эвклидовой геометрии. Но, кроме того, любые две различные прямые пересекаются, причем ровно в одной точке. Параллельных, которые так занимали Эвклида, не существует.

Если это напоминает вам плоскость Фано, то вы совершенно правы. Плоскость Фано — это конечная проективная геометрия.

От перспективы Возрождения до исключительных групп Ли остается теперь только небольшой шаг. Проективная плоскость, которая неявно присутствовала в методах Альберти, явно возникла в новой геометрии. В 1636 году Жирар Дезарг — армейский офицер, позднее ставший архитектором и инженером — опубликовал "Предполагаемый набросок попытки рассматривать результаты пересечения плоскости конусом". Звучит это как название книги о конических сечениях, и книга таковой и была, но вместо использования традиционной греческой геометрии Дезарг использовал проективные методы. В точности как эвклидову геометрию можно превратить в алгебру, используя декартовы координаты (x, y) — пару вещественных чисел, — так и проективную геометрию оказалось возможным превратить в алгебру, если разрешить буквам x или y принимать бесконечное значение (ситуация хитрым способом ставится под контроль таким образом: рассматриваются отношения трех координат и считается, что $1 : 0 =$ бесконечность).

То, что можно делать с вещественными числами, можно делать и с комплексными, так что у нас появляется комплексная проективная плоскость. А если тут все работает, то почему бы не попробовать кватернионы или октонионы?

Здесь возникают сложности. Очевидные методы не работают из-за отсутствия коммутативности. Однако в 1949 году мате-

матический физик Паскуаль Жордан нашел осмысленный способ построить октонионную проективную плоскость вещественной размерности 16. В 1950 году Арман Борель — математик, специализировавшийся в теории групп — доказал, что вторая исключительная группа Ли F_4 является группой симметрии октонионной проективной плоскости — вполне в духе комплексной плоскости, но только образованной из двух 8-мерных "линеек", деления на которых — октонионы, а не вещественные числа.

Итак, нашлось октонионное объяснение двух из пяти исключительных групп Ли. А что насчет трех оставшихся — E_6, E_7 и E_8?

Взгляд на исключительные группы Ли как на грубые порождения злонамеренного божества был довольно распространенным, пока в 1959 году Ханс Фрейденталь и Жак Титс независимо не изобрели "магический квадрат" и не объяснили появление групп E_6, E_7 и E_8.

Строки и столбцы магического квадрата соответствуют четырем нормированным алгебрам с делением. Если заданы любые две нормированные алгебры с делением, можно посмотреть в соответствующую строку и соответствующий столбец и найти в магическом квадрате — который определяет результат согласно не столь уж простому математическому предписанию — некоторую группу Ли. Появление некоторых из этих групп понять несложно; например, группа Ли, соответствующая строке с вещественными числами и столбцу с вещественными числами, есть группа SO(3) вращений в трехмерном пространстве. Если и строка, и столбец соответствуют кватернионам, то мы получаем ничуть не менее близкую математикам группу SO(12) вращений в двенадцатимерном пространстве. Если теперь взять октонионную строку или октонионный стол-

бец, то там будут стоять исключительные группы Ли F_4, E_6, E_7 и E_8.[1] Отсутствующая здесь исключительная группа G_2 также тесно связана с октонионами — как мы уже видели, она представляет собой их группу симметрии.

	R	C	H	O
R	so(3)	su(3)	sp(3)	f_4
C	su(3)	su(3) ⊕ su(3)	su(6)	e_6
H	sp(3)	su(6)	so(12)	e_7
O	f_4	e_6	e_7	e_8

Итак, общее мнение состоит в том, что исключительные группы Ли существуют потому, что божество в своей мудрости дозволило существование октонионов. Надо было сразу догадаться. Как заметил Эйнштейн, господь изощрен, но не злонамерен. Все пять исключительных групп Ли являются симметриями различных октонионных геометрий.

Около 1956 года российский геометр Борис Розенфельд, размышляя, быть может, о магическом квадрате, предположил, что три оставшиеся исключительные группы E_6, E_7 и E_8 также являются группами симметрии проективных плоскостей. Однако вместо октонионов здесь надо использовать следующие структуры:

- для E_6: биоктонионы, построенные из комплексных чисел и октонионов;
- для E_7: кватероктонионы, построенные из кватернионов и октонионов;
- для E_8: октооктонионы, построенные из октонионов и октонионов.

1 Не удержимся и приведем магический квадрат в явном виде, но без дополнительных пояснений, за исключением того, что здесь фигурируют не группы, а алгебры Ли. *(Прим. перев.)*

Единственная небольшая загвоздка состояла в том, что никто не знал, как внятно определить проективные плоскости над такими комбинациями числовых систем. Тем не менее имеется ряд свидетельств в пользу осмысленности данной идеи. По ситуации на настоящий момент, мы можем доказать гипотезу Розенфельда, но только с использованием групп для построения проективных плоскостей. Это не полностью удовлетворительно, поскольку замысел состоял в том, чтобы продвигаться в другом направлении — от проективных плоскостей к группам. Тем не менее лиха беда начало. На самом деле для групп E_6 и E_7 уже найдены независимые способы построения проективных плоскостей. Лишь одна E_8 пока держит оборону.

Если б не октонионы, то вся история о группах Ли выглядела бы попроще — как первоначально и надеялся Киллинг, — но была бы далеко не столь интересной. Не то чтобы у смертных была возможность выбирать — октонионы и все с ними связанное *существуют*. И некоторым таинственным образом само существование вселенной может зависеть от них.

Связь между октонионами и жизнью, вселенной и всем на свете возникает из теории струн. Ключевое свойство там — необходимость дополнительных измерений, в которых могли бы помещаться струны. Эти дополнительные измерения могут в принципе принимать огромное число самых разнообразных форм, и серьезная проблема — найти ту самую, правильную форму. В старой квантовой теории ключевым принципом являлась симметрия, и такова же ситуация в теории струн. Так что, без сомнения, группы Ли появляются на сцене в нужный момент. Все держится на этих симметриях по отношению к группам Ли, причем исключительные группы снова занимают особое место — не как типун на языке, но как возможности для реализации неожиданных совпадений, которые обеспечивают физике ее существование.

Что возвращает нас к октонионам.

Приведем пример влияния, которое они оказывают. В 1980-х годах физики заметили, что в пространстве–времени размерностей 3, 4, 6 и 10 выполняются некоторые занятные соотношения. Векторы (направленные отрезки) и спиноры (алгебраические штучки, исходно созданные Полем Дираком в его теории спина электрона) весьма тесно связаны между собой в размерности три, и только в ней. Почему? Оказывается, что соотношение между векторами и спинорами имеет место в точности тогда, когда размерность пространства–времени на 2 превосходит размерность некоторой нормированной алгебры с делением. Вычитая 2 из 3, 4, 6 и 10, получаем как раз 1, 2, 4 и 8.

Математический аспект здесь состоит в том, что в 3-, 4-, 6- и 10-мерных теориях струн[1] каждый спинор можно представить, используя два числа из соответствующей нормированной алгебры с делением. Такого не случается ни в каком другом числе измерений, и отсюда следует набор замечательных следствий для физики. Таким образом, у нас имеются четыре кандидата на теорию струн: вещественные, комплексные, кватернионные и октонионные. И дело складывается таким образом, что, по современным представлениям, из этих возможных теорий струн наибольшие шансы соответствовать реальности имеет 10-мерная теория, *отвечающая октонионам*. Если эта 10-мерная теория действительно соответствует реальности, то наша вселенная построена из октонионов.

И это не единственное место, где эти странные "числа", едва заслуживающие называться этим именем в силу минимума необходимых алгебраических соотношений, которые для них выполнены, оказываются весьма влиятельными. Та самая модная гипотетическая теория струн — М-теория — включает в себя 11-мерное пространство–время. Чтобы редуцировать вос-

1 Следует читать "в 3-, 4-, 6- и 10-мерных пространствах". *(Примеч. перев.)*

принимаемую часть пространства–времени от 11 измерений к нашим четырем, следует избавиться от 7 измерений путем такого плотного их скручивания, чтобы они перестали быть заметными. И как же сделать такое для 11-мерной супергравитации? Надо использовать исключительную группу Ли G_2 — группу симметрии октонионов.

И вот они снова, более не милые безделушки викторианской эпохи, а увесистая отмычка к возможной Теории Всего. У нас тут октонионный мир, господа.

Глава 16
Искатели Истины и Красоты

Что же, Китс был прав? Красота есть истина, а истина — красота?

Эти два понятия тесно связаны, быть может, по той причине, что наш мозг примерно одинаково реагирует на каждое. Но то, что работает в математике, не обязано работать в физике, и наоборот. Отношения между математикой и физикой глубоки, деликатны и головоломны. Философская головоломка высшего рода — как наука открыла так называемые "законы" природы и почему природа вроде бы говорит на языке математики.

Поистине ли вселенная в природе своей математическая? Не являются ли ее видимые математические черты всего лишь изобретением человека? Или же она кажется нам математической потому, что математика — самый глубинный аспект ее бесконечно сложной природы, который доступен нашему уму?

Математика — это не некоторый развоплощенный вариант окончательной истины, как полагают некоторые. Если из нашего рассказа что-то и следует, так это что математику создают люди. Нас трогают их радости и их горе. Кто остался бы равнодушным к ужасным смертям Абеля и Галуа, ведь оба

они умерли в возрасте 21 года? Один из них был объектом глубокой любви, но не располагал достаточными для женитьбы средствами; другой же, блестящий, но неуравновешенный молодой человек, влюбился, но был отвергнут и умер, быть может, из-за этой любви. Успехи современной медицины спасли бы Абеля и даже помогли бы Гамильтону сохранять трезвость.

Поскольку математики — живые люди, живущие обычной человеческой жизнью, создание новой математики является частью общественных процессов. Однако ни математика, ни наука в целом не есть *исключительно* результат общественных процессов, как то нередко утверждают обществоведы-релятивисты. В каждом случае требуется удовлетворить некоторым внешним требованиям — требованиям логики в случае математики, требованиям эксперимента в случае наук. Сколь отчаянно математики ни желали бы разделить угол на три части эвклидовыми методами, голый факт состоит в том, что это невозможно. Сколь бы сильно физики ни желали вывести из ньютоновского закона гравитации окончательное описание вселенной, движение перигелия Меркурия доказывает, что это невозможно.

Вот почему математики столь упрямо следуют логике, крайне беспокоясь при этом о вещах, до которых большинству людей просто нет дела. А *важно ли* в самом деле, можно или нельзя разрешить уравнение пятой степени в радикалах?

Приговор истории по этому вопросу не допускает толкований. Это — важно. Не так уж, возможно, важно для повседневной жизни, но, без всякого сомнения, важно для человечества в целом — не потому, что нечто важное основано на нашей способности решить уравнение пятой степени, а потому, что понимание причин, по которым это невозможно, открывает тайную дверь в новый математический мир. Если бы Галуа и его предшественники не были одержимы задачей найти условия, при

которых уравнение можно решить в радикалах, открытие человечеством теории групп сильно задержалось бы, а возможно, его никогда бы и не произошло.

Вы не обязательно встречаетесь с группами у себя на кухне или во время поездки на работу, и тем не менее без них современная наука оказалась бы серьезно урезанной, а наша жизнь — устроенной в сильной степени по-другому. Не столько в отношении таких штук, как широкофюзеляжные реактивные лайнеры, или GPS-навигаторы, или даже мобильные телефоны — хотя и их это касается, — сколько в отношении нашего понимания природы. Никто не смог бы предсказать, что занудный вопрос об уравнениях прояснит глубокую структуру физического мира, однако именно так и случилось.

История посылает нам столь же простой, сколь и ясный сигнал. Исследование глубоких математических вопросов не следует отвергать или умалять только на том основании, что эти вопросы не обещают прямых практических применений. Ценность хорошей математики выше, чем у золота, и по большей части неважно, откуда она взялась. Что важно, так это куда она нас ведет.

Потрясающая вещь состоит в том, что математика высшего уровня обычно приводит к чему-то неожиданному, причем значительная ее часть оказывается актуальной для науки и технологии, пусть даже исходно изобретение совершалось для каких-то совершенно иных целей. Эллипс, который греки изучали как коническое сечение, оказался той путеводной нитью, которая привела стопами Кеплера, основывавшегося на наблюдениях Тихо Браге за движением Марса, к ньютоновской теории гравитации. Теория матриц, за бесполезность которой извинялся ее изобретатель Кэли, стала неотъемлемым инструментом в статистике, экономике и едва ли не в каждом отделе науки. Октонионы могут сыграть роль вдохновителей Теории Все-

го. Разумеется, теория суперструн может оказаться всего лишь симпатичным фрагментом математики, не имеющим связи с физикой. Если и так, то существующие применения симметрии в квантовой теории все равно демонстрируют, что теория групп позволяет нам глубоко проникнуть в природу вещей, несмотря на то что создавалась она для ответа на некий вопрос в рамках чистой математики.

Почему математика столь полезна для целей, ни в коей мере не предусмотренных ее изобретателями?

Греческий философ Платон говорил, что "Бог во всем геометр". Ему вторил Галилей: "Великая книга Природы написана на языке математики". Иоганн Кеплер задался целью обнаружить математические закономерности в орбитах планет. Часть из его изысканий привела Ньютона к его закону гравитации, другая же часть оказалась мистической чепухой.

Многие современные физики отмечали потрясающую мощь математического мышления. Вигнер говорил о "непостижимой эффективности математики" в деле познания природы; эта фраза фигурирует в заглавии статьи, написанной им в 1960 году. Он пишет, что в статье рассматриваются два основных вопроса:

> "Первое — это то обстоятельство, что колоссальная эффективность математики в естественных науках граничит до некоторой степени с мистикой и что этому нет никакого рационального объяснения. Второе — это то, что именно эта сверхъестественная эффективность математических понятий поднимает вопрос о единственности физических теорий".

И еще:

> "Математический язык удивительно приспособлен для формулировки физических законов — это чудесный дар, который мы

не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему им пользоваться. Мы думаем, что сфера его применимости, хорошо это или плохо, будет непрерывно возрастать, принося нам не только радость, но и новые головоломные проблемы".

Поль Дирак полагал, что законы природы должны быть не только математическими, но еще и красивыми. Красота и истина были для него двумя сторонами одной монеты, и математическая красота в сильной степени подсказывала физическую истину. Он даже зашел столь далеко, что говорил, будто предпочтет прекрасную теорию правильной и что красота представляет большую ценность, нежели простота: "Исследователь в своих усилиях выразить фундаментальные законы природы в математическом виде должен главным образом стремиться к математической красоте. Он также должен принимать во внимание и простоту, но в подчинении у красоты... Там же, где они вступают в конфликт, следует отдавать предпочтение красоте".

Интересно, что дираковская концепция математической красоты значительно отличалась от той, которую разделяют большинство математиков. Она не включала в себя логическую строгость, и многие шаги в его работах содержали логические скачки — больше всего известен пример его "дельта-функции", обладающей внутренне противоречивыми свойствами. Тем не менее он весьма эффективно использовал эту "функцию", и в конце концов математики дали строгую формулировку его идеи, после чего она и в самом деле стала частью прекрасного.

Тем не менее, как было отмечено в книге Хельге Краф "Дирак. Биография ученого", "Все его [Дирака] великие открытия были сделаны до [середины 1930-х годов], а после 1935 года

ему, в общем, не удавалось производить физические результаты, имеющие непреходящую ценность[1]. Уместно замечание, что принцип математической красоты управлял его мышлением только в течение более позднего периода".

"Уместно" — возможно, но не верно. Дирак мог явно выразить этот принцип в позднейший период, но он пользовался им и ранее. *Все* его лучшие работы математически изящны, причем он опирался на изящество как на проверку того, движется ли он в правильном направлении. Отсюда следует не то, что математическая красота *тождественна* физической истине, а то, что она *необходима* для достижения физической истины. Одной ее недостаточно. Много прекрасных теорий при столкновении с экспериментом оказались полной бессмыслицей. Как заметил Томас Хаксли, "наука — это вышколенный и организованный здравый смысл, где погибло немало прекрасных теорий, убиенных уродливыми фактами".

Тем не менее имеется много свидетельств, что в основе своей природа прекрасна. Математик Герман Вейль, соединивший в своих исследованиях теорию групп и физику, говорил: "В своих работах я всегда пытался соединить истину с красотой, и когда мне приходилось выбрать между ними, я обычно останавливал выбор на красоте". Основатель квантовой механики Вернер Гайзенберг писал Эйнштейну: "Вы можете возразить, что, говоря о простоте и красоте, я ввожу эстетические критерии истины, и я честно признаюсь, что меня в сильной

1 Трудно согласиться. Помимо формулировки своего уравнения Дирак заложил основы теории квантования систем со связями в рамках гамильтоновой механики. Его небольшая книга на эту тему с неброским названием "Лекции по квантовой механике", вышедшая в 1966 году, вводит ряд концепций и понятий. Среди них — фундаментальная конструкция, которую вскоре стали повсеместно называть *скобкой Дирака*. Она, без сомнения, *изящна* в той же мере, в какой эффективна и востребована. (Гамильтоново квантование систем со связями — фундаментальный подход к построению квантовых калибровочных теорий поля, лежащих в основе современной картины микромира.) *(Примеч. перев.)*

степени привлекают простота и красота математических схем, которые нам предлагает природа. Вам должно быть это знакомо — почти пугающая простота и целостность связи, которую природа неожиданно перед нами раскрывает".

Эйнштейн же полагал, что неизвестно столь много фундаментальных вещей — природа времени, источники упорядоченного поведения материи, форма вселенной, — что нам следует напоминать самим себе, сколь далеки мы от какого бы то ни было "окончательного" понимания. По мере своей полезности математическое изящество дает нам всего лишь локальные и временные истины. Тем не менее это — наилучший способ двигаться вперед.

На протяжении всей истории математика обогащалась из двух различных источников. Один — это естественный мир, а другой — абстрактный мир логической мысли. Именно комбинация этих двух источников придает математике мощь, позволяющую ей сообщать нам об устройстве вселенной. Дирак прекрасно понимал эту связь: "Математик играет в игру, где он сам изобрел правила, тогда как физик играет в игру, правила которой задаются природой, но со временем становится все более и более очевидно, что правила, которые оказываются интересными для математика, — это те же правила, что установлены природой". Чистая и прикладная математика дополняют друг друга. Они представляют собой не два противоположных полюса, а два конца единого, связного спектра мыслей.

Наш рассказ о симметрии показывает, как даже отрицательный ответ на хороший вопрос ("возможно ли решить уравнение пятой степени?") может привести к глубокой и фундаментальной математике. Здесь имеет значение, *почему* ответ

оказался отрицательным. Методы, которые это выясняют, можно использовать для решения множества других проблем — и среди них глубоких вопросов физики. Но наш рассказ также показывает, что здоровье математики зависит и от того, вдыхает ли она новую жизнь из физического мира.

Истинная сила математики лежит именно в этом замечательном слиянии человеческого чувства гармонии ("красота") с физическим миром, причем оба действуют как критерий реальности ("истина") и как неистощимый источник вдохновения. Нельзя решить выдвигаемые наукой задачи без новых математических идей. Однако сами по себе новые идеи, если довести их до предела, могут выродиться в бессмысленную игру. Требования науки удерживают развитие математики на той линии, где она плодотворна, а также часто подсказывают новые направления ее развития.

Если бы математика полностью зависела от внешних потребностей — была бы служанкой наук, — мы бы получали от нее то, чего и следует ожидать от служанки: она была бы угрюмой, ворчливой и медлительной. Если бы математика руководствовалась исключительно собственными интересами, мы бы получили испорченное, дурно воспитанное дитя — избалованное, эгоистичное и раздувшееся от собственной важности. Математика высшего разряда балансирует между двумя этими крайностями, сопоставляя свои собственные потребности с потребностями внешнего мира.

Отсюда и проистекает ее непостижимая эффективность. Уравновешенная личность учится на опыте и применяет полученное знание в новых обстоятельствах. Вдохновителем великих математических достижений служил реальный мир, но великая математика может выйти за пределы, установленные ее происхождением.

Неизвестный вавилонянин, открывший, как решать квадратное уравнение, и представить себе не мог, даже в самых не-

вероятных мечтах, во что превратится его наследие три с лишним тысячи лет спустя. Никто не мог бы предположить, что вопросы о разрешимости уравнений приведут к одной из ключевых концепций в математике — концепции группы — или что группы окажутся языком, на котором описывается симметрия. Еще менее того можно было полагать, что симметрии откроют нам дверь к тайнам физического мира.

В физике польза от умения решать квадратные уравнения очень ограниченна. Пользы от умения решать уравнение пятой степени и того меньше — уже по той причине, что всякое решение по необходимости будет численным, а не аналитическим или же будет выражаться с помощью символов, специально для этой цели изобретенных и едва ли поэтому пригодных на что-либо, кроме как прикрывать проблему фиговым листком. Но понимание того, почему уравнения пятой степени не решаются, осознание ключевой роли симметрии и развитие сопутствующих идей настолько далеко, насколько возможно, — все это открыло целые области физического мира.

Процесс идет. Следствия из симметрии для физики, а на самом деле и для науки в целом, остаются в достаточной степени неисследованными. Многого мы еще не понимаем. Но что мы понимаем наверняка, так это тот факт, что группы симметрии — наш проводник через неисследованные земли, по крайней мере до тех пор, пока не появится некая более мощная концепция (уже, быть может, ожидающая своего часа в какой-нибудь безвестной диссертации).

В физике красота не дает автоматической гарантии истинности, но она ей способствует.

В математике красота *должна* быть истиной — поскольку все ложное уродливо.

Литература

John C. Baez, *The octonions*, Bulletin of the American Mathematical Society, volume 39 (2002), 145–205.

E. T. Bell, *Men of Mathematics* (2 volumes), Pelican, Harmondsworth, 1953.

R. Bourgne and J.-P. Azra, *Écrits et Mémoires Mathématiques d'évariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.

Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.

W. K. Buhler, *Gauss: A Biographical Study*, Springer, Berlin, 1 981.

Jerome Cardan, *The Book of My Life* (translated by Jean Stoner), Dent, London, 1931.

Girolamo Cardano, *The Great Art or the Rules of Algebra* (translated T. Richard Witmer), MIT Press, Cambridge, MA, 1968.

A. J. Coleman, *The greatest mathematical paper of all time*, The Mathematical Intelligencer, volume 11 (1989), 29–38.

Julian Lowell Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover, New York, 1963.

C. W. Davies and J. Brown, *Superstrings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Underwood Dudley, *A Budget of Trisections*, Springer, New York, 1987.

Alexandre Dumas, *Mes Mémoires* (volume 4), Gallimard, Paris, 1967.

Euclid, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (translated by Sir Thomas L. Heath), Dover, New York, 1956 (3 volumes).

CARL FRIEDRICH GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae* (translated by Arthur A. Clarke), Yale University Press, New Haven, 1966.
JAN GULLBERG, *Mathematics: From the Birth of Numbers*, Norton, New York, 1997.
GEORGE GHEVERGHESE JOSEPH, *The Crest of the Peacock*, Penguin, London, 2000.
BRIAN GREENE, *The Elegant Universe*, Norton, New York, 1999.
MICHIO KAKU, *Hyperspace*, Oxford University Press, Oxford, 1994.
MORRIS KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, Oxford, 1972.
HELGE S. KRAGH, *Dirac — A Scientific Biography*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
MARIO LIVIO, *The Equation That Couldn't Be Solved*, Simon & Schuster, New York, 2005.
J.-P. LUMINET, *Black Holes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
OYSTEIN ORE, *Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary*, University of Minnesota Press, Minneapolis, 1957.
ABRAHAM PAIS, *Subtle Is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, Oxford, 1982.
ROGER PENROSE, *The Road to Reality*, BCA, London, 2004.
LISA RANDALL, *Warped Passages*, Allen Lane, London, 2005.
MICHAEL I. ROSEN, *Niels Hendrik Abel and equations of the fifth degree*, American Mathematical Monthly, volume 102 (1995), 495–505.
TONY ROTHMAN, *The short life of Évariste Galois*, Scientific American (April 1982) 112–120. Collected in Tony Rothman, *A Physicist on Madison Avenue*, Princeton University Press, 1991.
H. F. W. SAGGS, *Everyday Life in Babylonia and Assyria*, Putnam, New York, 1965.
LEE SMOLIN, *Three Roads to Quantum Gravity*, Basic Books, New York, 2000.
PAUL J. STEINHARDT AND NEIL TUROK, *Why the cosmological constant is small and positive*, Science, volume 312 (2006), 1180–1183.
IAN STEWART, *Galois Theory* (3rd edition), Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton 2004.
JEAN-PIERRE TIGNOL, *Galois's Theory of Algebraic Equations*, Longman, London, 1980.
EDWARD WITTEN, *Magic, mystery, and matrix*, Notices of the American Mathematical Society, volume 45 (1998), 1124–1129.

Веб-сайты

A. Hulpke, Determining the Galois group of a rational polynomial:
http://www.math.colosate.edu/hulpke/talks/galoistalk.pdf
The MacTutor History of Mathematics archive:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html
A. Rothman, Genius and biographers: the fictionalization of Evariste Galois:
http://godel.ph.utexas.edu/tonyr/galois.htm

Алфавитный указатель

А

Абак, 86
Абель, Маргарета, 136
Абель, Нильс Хенрик, 14, 120, 137-142, 148-155, 174, 178, 193, 250
Абель, Сёрен, 136-138
Абель, Ханс Матиас, 135-136
Август, Эрнст, 120
Адроны, 393-394
Азимов, Айзек, 212, 347
Азра, Жан-Пьер, 173
Аккад, 19, 20, 30
Аксиомы Эвклида, 54
Аламут, замок, 73
Алварес-Гомэ, Луис, 395
Алгебра с делением, 244, 416, 424, 427
вещественные числа as, 244, 416
комплексные числа as, 244, 416
Алгебра, 14–15, 50, 143. **см. также алгебры с делением; алгебры Ли**, 419; **векторые алгебры** 241
обозначения в алгебре, 39, 40, 66-68, 83, 97, 113
с делением, 244, 416, 424, 427
симметрии в алгебре, 15, 251-252, 360
Алгебра (Бомбелли), 103-104
Алгебра (Хайям), 64, 65, 73, 79
Александр Македонский, 28, 36, 44-46
Александр, царь Эпира, 44
Александрия, 43, 46
Аль-Джабр в'аль Мукабала (аль-Хваризми), 70
Аль-Мульк, Низам, 71
Аль-Хваризми, Мохамед ибн Муса, 70

Альберти, Леоне, 421, 423
Амон, 43, 44
Анализ, 78, 86, 113, 116, 117, 124, 128, 139, 142, 190, 196, 197, 201, 206, 209, 217, 230, 232, 243, 250, 302, 305, 323, 384
Аналитическая динамика (Уиттекер), 333
Аналитическая механика (Лагранж), 124
Аномалии, 395,
Анти-Таурус, горы, 19
Антикварки, 371
Антикитера, 50
Антиматерия, 369, 384
Аполлоний, 28, 73
Апостольская Палата, 103
Арган, Жан-Робер, 231
Аргана диаграмма, 231
Аристотель, 49, 269,
Арслан, Альп, 71
Артиллерия Национальной Гвардии, 164
Архимед, 28, 48, 50, 58, 73, 194, 195
Асимптоты, 78
Ассасины, 73
Ассирия, 19
Ассоциативности закон, 236, 238, 409, 416
Астрология, 46, 82, 89
Астрономия, 21, 25, 83, 117-118, 217
Атома исследование, 316, 324, 338, 369
Атья, Майкл, 388-389
Аштекар, Абэй, 401

Б

Бадер, Петер, 137
Бандарини, Лучиа, 90
Барабаны, картины колебаний, 339
Бартельс, Иоганн, 110
Бартолотти, Э., 94
Бастилии день взятия, 168
Бахарийа оазис, 44
Башелье, Луи, 287
Башни, 142-148, 178
Башня Абеля, 142, 146-148
Баэз, Джон, 407
Бейли, Элен, 220
Беккерель, Александр, 287
Белл, Эрик Темпл, 170, 213, 241
Бенце, Доротея, 108
Бернадотт, Жан Батист, 137
Бернстайн, Карл, 381
Бернулли, Иоганн, 229, 230, 325, 326
Бертель, Аннемари, 317
Бесконечные десятичные дроби, 243
Библия, 26, 47
Билсон-Томсон, Сандэнс, 401
Биоктонионы, 425
Бисекции задача, 55
Бисмарк, 249
Бозе, Сатьендранат, 370
Бозоны, 370, 372, 387, 394
Бойяи, Вольфганг, 108, 111, 118, 232
Бойяи, Янош, 119
Большое Схлопывание, 404
Большой Взрыв, 299, 379, 404
Большой Хлопок, 403

Бомбелли, Рафаеле, 103, 104, 227, 407
Бор, Нильс, 316, 319, 368,
Борель, Арман, 424
Борн, Макс, 324-325
Браге, Тихо,75, 431
Брахмагупта, 413
Бренда, Георгина Эмилия, 317
Бринкли, Джон, 217
Броуновское движение, 287
Брумбридж, мост, 408
Брунелески, Филиппо, 421
Бруно, Джордано, 97, 291
Бург-ля-Рен, 155, 161
Бурнь, Робер, 173
Буссо, Рафаэль, 403
Бьянки тождества, 303
Бюттнер, Й. Г. 108-110

В

Вавилон, 19-42
дроби, 37-38
жизнь, 30-33,
измерение времени, 36
история, 20, 27-28, 30
культура, 24-25
математика, 25-26, 38-42
образование, 21-24, 29, 32
системы обозначений, 25, 33-36
Вавилонская Башня, 20, 145, 146
Вакуумная энергия, 403, 404
Валлис, Джон, 227-229, 231
Вандермонд, Александр Теофил, 122-123
Ванцель, Пьер Лоран, 195-197, 199
Вебер, Вильгельм, 120-121
Вебер, Генрих Фридрих, 284, 338
Вейерштрасс, Карл, 247, 256, 257, 311
Вейль, Герман, 339, 434
Вейля группы, 434
Векторная алгебра, 241
Векторное сложение, 233
Векторы, 241, 276, 427
Велайн, Анна, 321
Велайн, Николаус, 322
Великого Объединения Теории (ТВО), 390
Великое искусство (Кардано, Дж.), 92, 95, 97, 102, 104, 122
Венециано, Габриеле, 392
Вессель, Каспар, 230-231
Вессель, Оле, 230-231
Весселя плоскость, 231
Вещественные числа, 222, 227, 232, 240, 242-244, 415, 417,
как алгебра с делением, 244
Вигнер, Антал, 335, 336, 337
Вигнер, Йена Паал – см. Вигнер, Юджин
Вигнер, Юджин, х, 13, 335-339, 341, 342-343, 406, 432
Вильгельм Молчаливый, 224
Вин, Вильгельм, 313
Висячие Сады, 20
Виттен, Луи, 383
Виттен, Эдвард, 383-385, 388-389, 395, 397, 398
Водород, 317
Волновая оптика, 217
Вольф, Кристоф, 322
Вордсворт, Уильям, 216, 220

Восьми квадратов формула, 409, 414, 416
Вращение, 189, 191, 334, 386
Земли, 291
Время, 219, 288-289, 292, 297, 298-299, 300, 303, 304, 305, 326, 344, 349, 350
вавилонское измерение времени, 36
отражение времени, 219, 289
сдвиг времени, 288-289, 297
Вселенная
гармония вселенной, 347, 374, 380
математика и вселенная, xiii 18, 268, 346, 429
Вставки прием, 58
Вудворд, Боб, 381

Г

Гёттинген, 111, 118-120, 206, 211, 247, 255, 338
Гайзенберг, Август, 321, 322, 323
Гайзенберг, Вернер, 321-328, 332, 333, 338, 345, 434
Гайзенберг, Эрвин, 322
Галилей, 432
Галлей, Эдмонд, 124
Галуа тест, xii 14, 16
Галуа, Николя-Габриель, 156, 161
Галуа, Эварист, ix, xi, 11, 14, 15, 126, 155-185, 193, 196, 203, 205, 208, 216, 246, 247, 250, 251, 254, 255, 266, 360, 429, 430
арест, 166, 168
доказательства, 167
дуэль, 11, 170-173
новаторство, 11, 14, 15, 155, 168, 174-185
образование, 156-159
Гамильтон, Уильям Роуэн, 212-221, 231-242, 244, 261, 263, 333, 408, 409, 413, 419, 430, 434
о комплексных числах, 231-232, 234, 236-238
образование, 216
Гамильтоновы системы, 215-216
Ган, Отто, 312
Гармония, 49
Гарроне, Лоренцо, 282
Гаусс, Гебхард Дитрих, 107-108
Гаусс, Карл Фридрих, 106-113, 116-121, 135, 141, 149, 165, , 174, 196, 197, 208-210, 214, 215, 231, 256, 299, 300, 302, 412
образование, 108-112
слава, 118
смерть, 121
теоремы, 111, 117
Гаусса плоскость, 231
Гелиоцентрическая система, 291
Гельмгольц, Герман фон, 256, 293, 311-312
Генрих VIII, 275
Геодезические линии, 304
Геометрическая оптика, 217
Геометрия
квадратных уравнений, 40-42
некоммутативная, 400
эвклидова, 119-120, 124
Герц, Генрих, 278, 287

Гиббс, Джозайа Уиллард, 241, 384
Гильберт, Давид, 207, 255, 306, 338, 339
Гиммлер, Генрих, 327
Гимназия, 111, 256, 281, 336
Гиньо 163-164
Гипербола, 74, 78
Гиперсферы, 357
Гиппас из Метапонта, 83-84, 201, 224
Гитлер, Адольф, 315, 318, 324, 327
Глубокая Глотка, 381
Глюоны, 372, 373
Гомер, 47
Городское Философское Общество, 273
Гравитация, 299, 301, 304, 330, 346, 365, 367, 373, 378, 384, 400, 407,
петлевая квантовая, 401
электромагнетизм и гравитация, 350-351, 373
Гравитон, 372, 373
Грассман, Герман, 241
Грейвс, Джон, 408-411, 414, 416
Грин, Майкл, 394, 395
Гроссманн, Марсель, 285, 286, 302, 303, 307
Групп теория, ix, xi, 11, 193, 248, 254, 334, 335, 339, 343, 432,
квадратное уравнение и теория групп, 181
кубичное уравнение и теория групп, 181
уравнение четвертой степени и теория групп, 181
группа Галуа, 178, 182
ограничения, 183
Групповая зараза (Gruppenrest), 343
Группы симметрии, 245, 252, 260, 375, 376, 398, 400, 437,
Гук, Роберт, 269
Гумбольдт, Александр фон, 118, 149
Гурвиц, Адольф, 244, 284, 416
Гюйгенс, Христиан, 272

Д

Д'Аламбер, Жан Ле Рон, 124
д'Эрбенвиль, Пешё, 171, 173
да Винчи, Леонардо, 89, 421
де Бройль, Луи, 316
де Лаплас, Пьер-Симон, 118
де Сен-Венан, Адемар Жан Клод Барр, 196
ДНК, 318, 378, 379
Дайсон, Фрэнк, 330
Дарбу, Гастон, 249
Дарвин, Чарльз, 284
Дарий III, 44
Двойные конусы, 74, 298
Деген, Фердинанд, 138, 414
Дезарг, Жирар, 423
Декарт, Рене, 227, 276, 423
Декогеренция, 321
Деления закон, 236
дель Наве, Аннибале, 94
дель Ферро, Шипионе, 92, 94, 96, 97, 104
Делямбр, Жан, 130
Десятичные дроби, 38, 225, 226, 243,

Десятичные системы, 25, 226
Дизни, Кэтрин, 216, 239
Дизни, Томас, 239
Динамическая теория, 309
Динократ, 45
Диофант, 67, 68, 69, 76, 88
Диофантовы уравнения, 69
Дирак, Поль, 317, 328-329, 331-335, 342, 369, 383, 411, 412, 427, 433, 434, 435
образование, 332
Дирак, Чарльз, 328
Дирака эффект, 331-332
Дифференциальные поля, 254
Дифференциальные уравнения, 205, 250, 251, 254
Дифракция, 217
Длины волн, 278
Доказательства, 51-54, 60
необходимость в, 25, 51
Доналдсон, Саймон, 384
Динократ, 45
Древо жизни, 378
Дроби, 223-225
в вавилонские времена, 37-38
Дэви, Гэмфри, 273
Дюма, Александр, 166, 171
Дюшатле, Эрнест, 168, 173

Е

Евфрат, 19, 20, 27

Ж

Жермен, Софи, 165
Жордан, Камиль, 190, 191, 248
Жордан, Паскуаль, 424

З

Загрос, горы, 19
Задачи античности, 194-195
Закон отражения, 218
Законы природы, х 346, 429 –
Затмение, 330
Землемерие, 85, 120, 231
Земли вращение, 291
Знакопеременные группы, 180
Зоммерфельд, Арнольд, 324

И

Излучение, 270, 271, 312, 313, 338, 368, 377
Инвариантов теория, 296
Инерциальные системы отсчета, 292-293
симметри и инерциальные системы отсчета, 292
Инквизиция, 97
Институт Высших исследований, 342, 383
Инфантоцци, Карлос, 169
Ирак, 27
Иррациональности, 200, 203, 206
Истина
красота и истина, 18, 23, 66, 292, 347, 411, 429, 436
математика и истина, 436
Иштар Ворота, 30
Йерстад, 135
Йолли, Филипп фон, 309-311

К

Кёнигсберг, 207, 349, 350
Кайзера Вильгельма Институт, 256, 337
Калаби–Яу многообразие, 397, 398
Калуца, Теодор, 350-351
Калуцы–Клайна теория, 359, 377
Камбис II, 43-44
Канделас, Филипп, 397
Кант, Иммануил, 281
Кардано, Джироламо, 80-83, 88-93, 95-97, 100-105, 122, 126, 226, 231, 407, 417
Башня Кардано, 144-145, 178
Фонтана, Никколо, и Кардано, 92-97, 101-102, 104
его тяга к азартным играм, 80-81, 89-90
тюремное заключение, 97
формула для кубичного уравнения, 92-102
Кардано, Фацио, 88-89, 91
Карл VIII Французский, 89
Карл X, 163
Карнак, 45
Карт создание, 85
Картан, Эли, 261, 264, 265, 420
Кассиани, Паоло, 128
Квадратные корни, 22,23, 40, 87, 99, 210
из минус едницы, 113, 238
из отрицательных чисел, 101-103, 243
Квадратные уравнения, 39, 40, 67, 69, 70, 97, 144, 146, 437,
геометрическая картина, 40-42
решение, 38-40, 83, 97-98
Квадратные числа, 50
Квадратрисса, 57
Квадратура круга, 57, 204
Квантовая механика, 297, 308, 317, 319, 320, 328, 332, 338, 339, 343, 358-359, 360, 406, 434
Квантовая теория поля, 344, 384, 385, 388, 391, 392, 395, 399
Квантовая теория, xiii, 17, 215, 310, 317, 319-320, 324-328, 333, 338, 339, 344, 345, 360, 372, 392, 407
копенгагенская интерпретация, 319-320
относительность и квантовая теория, 17, 345, 384, 399-400
Квантовая физика, x 12, 314, 318, 321, 333
Квантовая хромодинамика, 365, 372, 374, 393
Квантовая электродинамика, 362, 365
Кванты, 288, 314-316, 348, 369
Кварки, 371-375, 379, 387, 401,
Кватернионы, xii, 220, 221, 228, 248-242, 244, 263, 334, 400, 406, 408, 410-412, 414, 415, 417, 419, 420, 423, 425, 427
Кватероктонионы, 425
Кельвин, лорд, 309-310
Кемп, Кристин, 139-140, 148-152
Кеплер, Иоганн, 75, 431, 432

Киллинг, Вильгельм Карл Йозеф, 255-266, 375, 377, 411, 419, 426
доказательства, 260-261, 263
Киллинга список, 375, 377
Кинетическая теория, 287
Кирхгофф, Густав, 311
Китс, Джон, 9, 429
Клайн, Моррис, 88
Клайн, Оскар, 358-359, 377
Клейн, Феликс, 206, 247-249, 258
Клейна эрлангенская программа, 248, 422
Клеопатра, 44
Клинопись, 24
Клойна епископ, 217
Книга моей жизни (**Кардано, Дж.**), 81-82
Колберн, Зира, 214
Колебаний картины, 339-340
Коллрос, Луи, 170
Колридж, Сэмюэль Тейлор, 216
Комиссия мер и весов, 125
Коммутативности закон, 235-238, 244, 409, 416
Коммутатор, 254, 332, 333
Комплексные числа, 16, 116-117, 205, 206, 209, 221, 227, 229, 230, 231, 234, 238, 243, 244, 258, 259, 364, 407-408, 412, 414, 417-420, 423, 425, 427
и тройки, 233, 236
как алгебра с делением, 244, 416
как пары, 231-232, 238
уравнения и комплексные числа, 113-115
Конические сечения, 57, 65, 73, 74-76, 423
Конн, Ален, 400
Конти, Виттория, 124
Конуэй, Джон Хортон, 211
Копенгагенская интерпретация, 319-320
Коперник, Николай, 97
Корней системы, их симметрии, 185, 260-261
Корни из единицы, 114-115
Корни, 84, 99. См. также **кубичные корни; Квадратные корни**
Коссидьер, Марк, 171
Косы, 401-402
Коши, Огюстен-Луи, 123, 130, 131, 159-161, 165, 174, 182, 184
Красота
истина и красота, 17, 18, 23, 216, 292, 347, 411, 429, 433-434, 436-437
математика и красота, 216, 433, 436
природа и красота, 435-436
Краф, Хельге, 433
Крелле, Август, 148-150
Кривизна пространства–времени, 299, 300, 302, 305, 350
внутренняя, 303
Крик, Френсис, 318
Кроммлин, Эндрю, 330
Кронеккер, Леопольд, 247, 323
Круга квадратура, см. Квадратура круга
Куба удвоение, 57, 194
Кубические уравнения, 39, 114, 145, 177, 189, 198

Кардано, 92, 96, 97, 99-104, 126
группы и кубические уравнения, 175
их типы, 76-77
их решение, 65, 69, 70, 73, 74, 76, 78-80, 83, 87, 88, 94, 98, 100, 126,
(Кубический) корень, 65, 84, 99, 114, 143, 146, 180, 214
Кулон, Шарль Огюстен, 125
Культура вавилонян, см. Вавилон, культура
Куммер, Эрнст, 247, 256
Кэли числа, 409
Кэли, Артур, 191, 409, 411, 417, 431
Кэли–Диксона процесс, 415-416
Кюсснер, Элизабет, 207

Л

Лавуазье, Антуан, 125
Лагаш, 20
Лагранж, Жозеф-Луи, 122-127, 129, 131, 132, 134, 157, 174, 175, 413
Лакруа, Сильвестр-Франсуа, 162, 165, 182
Ламберт, Иоганн, 201-202, 206
Ламберта доказательство, 201-202
Лаплас, Пьер Симон, 118, 125
Ле Моннье, Рене-Франсуаза-Аделаида, 125
Леви-Чивита, Туллио, 302
Лежандр, Адриен-Мари, 149, 157, 162, 217
Лейбниц, Готфрид Вильгельм, 25, 205, 230,
Леонардо Пизанский (Фибоначчи), 85-88, 413
Ли алгебры, 254, 257, 261, 385, 419-420, 425
простые, 258-261, 264, 375
Ли группы, xii, 16, 248-249, 251-255, 257-259, 261-262, 334-335, 375, 394, 397-398, 400, 411, 412, 418, 419-420, 423-426, 428
исключительные, 16, 262-263,
Ли, Мариус Софус, 246-255, 258, 259, 263-265, 332,
Линдеманн, Карл Луис Фердинанд фон, 206-208
Линдеманна доказательство, 207-208
Линейка, 25, 26, 27, 29, 30, 33, 63, 126, 127, 128, 129, 134, 150
Линейные уравнения, 39, 69, 70, 197
Лиувилль, Жозеф Луи, 174, 175, 197, 203-206
Лобачевский, Николай Иванович, 119
Логарифмы, 205, 230
Лоренц, Хендрик, 298, 301, 331,
Лоренца группа, 298, 343, 360, 362, 375
Лоренцева инвариантность, 301
Луи-Филипп, 163, 166
Луны движение, 53
Лучи, 348, 363
Людовик XVIII, 163
Людовика Великого колледж, 156, 158, 205

М

М-теория, 427
Магический квадрат, 424-425
Магнетизм, 120, 250, 273, 275, 277, 289, 290, 345, 346, 408
Майкельсон, Альберт, 293, 296
Майкельсона–Морли эксперимент, 296
Майтнер, Лизе, 312
Макговерн, Джордж, 382-383
Максвелл, Джеймс Клерк, 275, 277, 284, 310, 345, 351, 362, 366, 372
Максвелла уравнения, 289, 290, 292-293, 345, 362
  их симметрии, 293, 295, 297, 364, 375
Максвелла–Больцмана доктрина, 310
Манхэттенский проект, 343
Мардук, 31
Марич, Милева, 285-286
Маркони, Гульелмо, 278
Маскарад (Пратчетт), 320
Математика
  в Вавилоне, 21-23, 25, 26, 29, 33, 223,
  в древнем мире, 43, 46, 47-52, 80, 85, 223
  вселенная и математика, xiii 18
  истина и математика, 436
  красота и математика, 13, 23, 216, 436-437
  прикладная, 11, 130-131, 138, 332, 435
  роль математики, 23, 432, 436
  симметрия и математика, 267
  состязания, 93
Математические начала натуральной философии (Ньютон), 268
Математическое мышление от античности до современности (Моррис Клайн), 88
Матрицы, 191, 192, 264, 305, 325, 326, 332-334, 338, 398, 419, 431,
Мерк, Мари, 311-312
Месопотамия, 19-20, 28
  история, 20, 28
Метрика, 120-121, 300, 303
Механика (Эйлер), 205
Микериа, Кьяра, 88
Миллс, Роберт, 373
Минковский, Герман, 284, 298
Минковского пространство–время, 298
  геометрия, 298
Мировая линия, 298-299, 391-392
Мировой лист, 391-392
Мнимые числа, 103, 227-230, 232

Многомерные пространства, 121, 190, 260, 349, 353
Многообразия, 121, 252-253, 300, 302, 388, 397, 398
Многоугольники, 50, 61, 211
  правильные, 57, 61-62, 106, 107, 197-198, 207
Многочлены, 99, 116, 122, 132, 197, 199, 200, 202, 209, 385
Моваффак, Имам, 71

Модены университет, 131
Мориц Оранский, 224
Морли, Эдвард, 293, 296
Морс, Марстон, 388
Мотель дю, Жан-Луи, 169, 170
Мотцфелд, Эрнст, 246
Мюллер, Герман, 310

Н

Набопаласар, 30
Набу, 21-24, 29-33, 37-38
Навуходоносор I, 27, 29-31
Навуходоносор II, 30
Намбу, Йоширо, 391-392
Наполеон, 125, 131, 137, 273
Наполеон III, 249
Нацисты, 315, 318, 327, 342,
Начала геометрии (Эвклид), 47-48, 51, 55, 57, 87
Невё, Андрэ, 394
Негэнтропия, 318
Нейгенбауэр, Отто, 39
Нейман, Янош, фон, 336, 338, 343, 406
Нейтрино, 369, 371, 373, 375, 377
Некоммутативная геометрия, 400
Нётер, Эмми, 255
Никомах, 67
Никсон, Ричард, 381-383
Нимруд, 20
Ниневия, 20
Ниппур, 20
Нишапур, 71-73
Нобелевская премия, 317, 327, 343, 383
Нуль, 37
Ньютон, Исаак, 25, 75, 212, 227, 250, 268, 270-272, 278, 288, 289, 290, 292, 293, 295, 297, 301, 303, 305-307, 317, 330, 331, 346, 367, 431, 432
физика, 288, 298

О

О вращении небесных сфер (Коперник), 97
Об условиях разрешимости уравнений в радикалах (Галуа), 165
Обозначений системы, 34, 35, 38-40, 86, 97, 98, 223, 225
вавилонская, 25, 33-37, 225
Обозначения в алгебре, 40, 66-67, 83, 98
Обратных квадратов закон, 75
Общая теория земного магнетизма, 120
Общая теория уравнений (Руффини), 129
Объединенная теория поля, 308, 348, 350, 358
Ограничения (математики), 59, 80
Октонионы, xii, 16, 263, 406-407, 409-412, 414-420, 423-428, 431
единицы в , 410-411
Октооктонионы, 425
Оптика (Ньютон), 270
Оптико-механическая аналогия, 220
Осиандер, Андреас, 97
Осло-фьорд, 135

Основная Теорема Алгебры, 117
Остхофф, Иоанна, 118
Относительности теория, 12, 17, 284, 288, 294, 296, 298, 299, 301, 305, 308, 322, 330, 331, 344, 348, 356, 362, 383, 391
Относительность, xiii
квантовая теория и относительность, 17, 345, 384, 399
следствия из нее, 296-298
Отражение, 188-191, 219, 252, 260, 269, 270-272, 387
времени, 289
Отрицательные числа, 76, 100, 101, 116, 223, 226, 227, 230, 243,
квадратные корни из отрицательных чисел, 101, 102-104, 243, 407
Охотники и собиратели, 19-20

П

Павсаний, 44
Папп, 49
Парабола, 74, 215, 355
Париж, 122, 124, 140, 141, 155, 165, 166, 172, 195, 206, 207, 248, 249
Патциг, Эмма, 310
Паули принцип, 370
Паули, Вольфганг, 325, 327
Пачоли, Лука, 87-88
Пейс, Абрахам (на с.286 его инициал: А.), 267, 286, 343
Перестановки, 131-134, 175-177, 179, 180, 183, 185, 189, 190, 360, 363, 374, 378, 402
групповое свойство перестановок, 175-177, 189, 251, 375,
подгруппы перестановок, 176-180
симметрии и перестановки, 132, 185, 338
умножение, 133-134
Перигелия положение, 304, 306, 430
Перитонит, ix 11, 173
Петлевая квантовая гравитация, 401
Пирс, Бенджамин, 240, 241
Пифагор, 49, 69, 201, 224
культ, его окружающий, 49
Пифагора теорема, 25, 56, 224, 300, 414
Пифагореизм, 50
Плазма, 379,
Планк, Макс Карл Эрнст Людвиг, 310-317, 322, 333, 337, 341, 359, 390
Планк, Юлиус Вильгельм, 310
Планка постоянная, 314, 333, 359
Платон, 48, 49, 79, 421, 432
Плодородный Полумесяц, 20
Плоский Мир, 271-272
Плоскости, 74, 114, 115, 186, 187, 191, 209, 227, 229, 230, 231, 233, 243, 247, 248, 252, 254, 354-356, 365, 422, 424-426
Плоскость Фано, 410-411, 423
Плюккер, Юлиус, 247, 256
Подагра, 239
Подгруппы, 178-179, 258, 376
перестановок, 176-180
Позитрон, 364, 369

Политехническая Школа, 158, 161, 163, 196, 205
Полчински, Джозеф, 403
Поля, упорядоченные, 243
Понселе, Жан-Виктор, 247
Пратчетт, Терри, 271, 320
Предполагаемый набросок попытки рассматривать результаты пересечения плоскости конусом (Дезарг), 423
Представлений теория, 190-191, 338, 342
Преломление, 215, 219, 220, 270-272
Преобразование, 12, 100, 185, 188, 190-192, 221, 248, 251-253, 259, 288, 289, 292, 298, 301, 340, 360, 362, 364, 375, 376, 386, 387, 419, 420
  определение, 186
Прикладная математика, 11, 50, 131, 138, 196, 332, 435
Принсипе, остров, 319
Принцип наименьшего времени, 218-219
Природа и красота, 278–279
Проблемы и различные изобретения (Фонтана), 95
Проекции, 386, 421-422
Происхождение видов, 378
Прокл, 48
Пропорция, 87, 185,
Пространство, время, и тяготение (Эддингтон), 331
Пространство–время, 288-289, 297, 298, 301, 303, 331, 344, 349, 350-351, 358, 262, 364, 365, 384, 391-393, 395, 396, 400, 402, 403, 427-428
  Минковского, 299
  дополнительные измерения, 17, 350
  кривизна пространства, 253, 300, 304, 305, 350, 384
  свойства пространства, xiii 18
  симметрии пространства, 12, 305, 362
  форма, 397-398
Простые числа, 413
Протон 367-368, 370, 375, 377, 393
  группы симметрии в протоне, 374
  стабильность, 377, 378
  структура, 366, 371, 374
"Прямая в бесконечности", 422
Прямые углы, 12, 51, 52, 78, 187, 228, 254, 278, 336,
Птолемей, 48, 87
Пуанкаре, Анри, 205, 298
Пуансо, Луи, 162
Пуассон, Симеон, 165, 166, 172, 184
Пуассона скобка, 333
Пфафф, Иоганн, 112, 118
Пьяцци, Джузеппе, 117-118
Пятой степени корни, 104, 114-115, 127, 143, 148, 179-180, 251,
Пятой степени уравнения, xi, 14, 15, 104, 127, 128-129, 131, 134-135, 139, 146, 148, 153-154, 182-183, 251, 402, 430, 435, 437
  решение, 14, 120, 128, 139-141, 147, 148, 153-155, 180-183, 205, 234, 430, 435, 437
Пятый постулат, 51-52

Р

Ра, 43
Равелли, Карло, 401
Радикалы, 114, 120, 123, 128-129, 134-135, 143-144, 146-149, 153-155, 167, 175, 178, 179, 181-184, 190, 199, 221, 234, 267, 430, 431
Размерность, 212, 233, 235, 239, 240, 243, 244, 245, 253, 259, 260-262, 300, 350, 352 354, 356, 357, 358, 387, 395-397, 408, 415, 416, 418, 419, 424, 427
Рамон, Пьер, 394
Рамсес II, 45
Рациональности, 201
Релея–Джинса закон, 312-313
Религия, 268, 279, 281, 322, 347
Решений наличие, 227
Риман, Георг Бернхард, 121, 300, 302
Римановы многообразия, 121, 300
Рич, Клавдий, 27
Ричмонд, Герберт Уильям, 210
Риччи-Курбастро, Грегорио, 302, 305
Ришар, Луи-Поль, 158, 159, 205
Ришло, Ф. Ж., 210
Розенфельд, Борис, 425
Ротман, Тони, 173
Рубаи (Рубайят) – см. Хайям
Руффини, Паоло, 127-129, 131, 132, 134, 135, 140, 142, 174, 175, 196, 199, 402
доказательство, 129-130, 134-135, 140-142, 147-148

С

Сабах, Хасан,71, 73
Свет, 215, 217, 218, 220, 250, 268-272, 276, 277, 278, 288, 292, 297, 298, 299, 301, 304-307, 310, 312-316, 324, 330, 331, 341, 344, 348, 351, 357, 363, 390, 408
изменение фазы, 362-364
скорость, 15, 33, 219, 271, 277, 293, 294-296, 321, 327, 359, 394
Сдвиги времени, 288-289, 297
Седенионы, 415-416
Селевкидов период, 28
Сельское хозяйство, 20, 25, 61
Сен-Симон, 160, 161
Сети I, 45
Сива, 43-45
Силов, Людвиг, 246, 250
Силы, 68, 250, 272, 274, 284, 299, 301, 346, 365, 366, 372, 378-380. **См. также Электромагнетизм; Гравитация**
Сильный антропный принцип, 403
Симметрия, 132, 175, 178, 179, 184, 187
в алгебре, 122
в протонах, 374
в системах корней, 132, 134
инерциальные системы отсчета и симметрия, 292-293
как преобразование, іх 188
калибровочная, 361-362, 364-365, 375
локальные, 305

математика и симметрия, 12, 255
образование видов и симметрия, 378-379
определение, 12, 184-185
перестановки и симметрия, 175, 177, 178
пространства–времени, 362
спонтанное нарушение, 374
треугольника, 185, 187-189, 191
умножение, 190
уравнений Максвелла, 277, 289, 293, 297, 375
Симонсен, Анна Мари, 136, 138
Симплектические группы, 259, 261, 419
Система глобального позиционирования, 278
Скорость изменения, 250, 251, 305
Слабый антропный принцип, 403
Сложные системы, 353
Смит, Уиллоуби, 287
Смолин, Ли, 401
Смолуховский, Мариан, 287
Снеллиуса закон преломления, 219
Сохранение, 255
Сохранения энергии закон, 255, 310
Спектр, 313, 317, 324, 338, 339, 341
Спектральные линии, 341
Спин, 320, 333-334, 369-371, 373, 392-394, 427
Спиноры, 334, 427
Спонтанное нарушение симметрии, 340, 374
Стайнхардт, Поль, 404
Стевин, Симон, 224-225
Степень многочлена, 99, 116
Стробей, 49
Строминджер, Эндрю, 397
Струн теория, 17, 390-391, 393, 394, 395, 398, 399, 403, 404, 406, 412, 426, 427
бозонная, 395
неудовлетворенность ею, 396, 398
Суперсимметрия, 360, 385, 386-388, 390, 394, 395, 397, 406
Суперструны, 390, 392, 395, 398, 400, 402, 405, 406, 412
типы теорий, 394, 395, 397, 400, 411, 432

Т

ТВО. См. Великого Объединения Теории
Талмуд, Макс, 281
Тарталья. См. Фонтана, Никколо
Татон, Рене, 160
Тейт, Питер, 240, 241
Температура, 150, 250, 311, 379
Тензоры, 302, 305, 350
Теоремы, 25, 48, 55-56, 64, 68, 69, 111, 112, 116, 117, 124, 125, 129, 139, 174, 193, 194, 224, 256, 258, 259, 263, 300, 323, 389, 412
Теория Всего, 12, 345-348, 378, 394, 399, 411, 428,
Теория Галуа алгебраических уравнений (Тиньоль), 126

Теория групп и ее применения в квантовой механике атомных спектров (Вигнер, Ю.), 339
Теория чисел, 48, 69, 87, 111, 116, 124, 208, 284, 323, 413, 418
Теркем, Орли, 158
Термодинамика, 311
Теэтет, 48
Тигр, 19
Тиньоль, Жан-Пьер, 126, 168
Титс, Жак, 424
Тиф, 131
Тождество, 215, 303,
Топология, 186, 349, 388, 392, 394, 401, 402
Трактат о Свете (Гюйгенс), 272
Транспортир, 198
Трансцендентные числа, 201, 203-205, 207, 208
Треугольник, 25, 50, 55, 61, 107, 157, 184-189, 336, 386
неравенство треугольника, 300
симметрии треугольника, 187-188,191
Треугольные числа, 50
Тригонометрия, 87, 198-199
Трисекция, 57-60, 194, 197-199
Тунеллирования теория, 404
Тьюрок, Нил, 404

У

Уайлс, Эндрю, 69
Углы
деление угла пополам, 55-56
деление на три равные части, 57-58
Угольник, 25, 41, 50, 55, 57, 61-63, 106, 107, 111, 114, 123, 157, 184-189, 191, 208, 209-211, 215, 300, 336, 339, 340, 386
Уитмер, Ричард, 93
Уиттекер, 333
Ультрафиолетовая катастрофа, 312-313
Университет Кёнигсберга, 207, 350
Уотсон, Джеймс, 318
Уравнения, 12-13, 53, 65-66, 69, 70, 76, 100, 132, 175, 177, 201, 215, 218, 234, 235, 250, 277, 289, 301, 345, 346, 348, 431, 437. **См. также квадратные уравнения**
комплексные числа и уравнения, 113
теория уравнений, 75, 125, 129, 131, 140-142, 157, 159, 162, 200
Ур, 20
Урук, 20
Ускорение, 250, 301

Ф

Фаза, 245, 362, 363-364, 375
сдвиг фаз, 363-364
Фантини, Луиджи, 128
Фарадей, Майкл, 273-277
Фейнмановские диаграммы, 391-392
Фердинанд, Карл Вильгельм, 110, 111, 112

Ферма Последняя Теорема, 69, 139, 194, 323
Ферма простые числа, 209-210, 413
Ферма, Пьер де, 69, 209, 217-219, 413
Ферми, Энрико, 370
Фермионы, 370, 371, 375, 387, 394
Феррари башня, 145-146
Феррари, Лодовико, 93, 104, 127
Фонтана и Феррари, 93, 95-96
Фибоначчи последовательность, 49, 86-87
Фибоначчи. См. Леонардо Пизанский
Физика частиц, 349, 360, 371, 384
Филдсовская медаль, 383, 385, 389
Филипп II, 44
Философия, 48, 50, 128, 196, 268, 281, 331
Фиор, Антонио Марио, 92
Фитцджеральд, Эдвард, 64
Флатландия (Эббот), 354-355, 386
Фонтана (Тарталья), Никколо, 80, 92
Кардано и Фонтана, 92-97, 101-102, 104
Феррари и Фонтана, 93, 95-96, 104
Формул размножение, 143-144
Фотоны, 316, 341, 345, 372, 373, 378, 391
Фотоэлектрический эффект, 287, 315
Франк, Амелия, 342
Французская Революция, 124
Фрейденталь, Ханс, 424
Фридрихсен, Генриэтта, 152
Фундаментальные частицы, x, 12, 360, 365, 370, 373, 374, 400
Фурье, Жозеф, 162

X

Хёсслин, Марга фон, 312
Хазенорль, Фридрих, 317
Хайям, Омар, 64-65, 70-78, 83
Хаксли, Томас, 434
Ханстеен, Иоанна, 148, 152
Ханстеен, Катарина, 148, 152-153
Ханстеен, Кристофер, 138, 148, 152
Харди, Годфри Хэролд, 418
Харнак, Адольф фон, 311
Хаттон, Сара, 213
Хокинс, Томас, 259
Холмбоэ, Бернт, 137, 138, 150
Холтен, Флоренс Ханна, 329
Хоровиц, Гари, 397

Ц

Церера, 117, 118
Циркуль, 61, 62, 65
в греческой геометрии, 55-58, 65, 78, 87
задачи, разрешимые с его помощью, 55-58, 59, 61, 107, 195, 197-199, 208, 209, 234
Цифры, 33
Цорн, Макс, 416

Ч

Частицы–волны, 319
Черное тело, 312-313
Черные дыры, 344
Четверки чисел, 235, 236, 238
Четвертое измерение, 350, 352, 355
Четвертой степени уравнение, 65, 67, 69, 99, 104, 126, 146
группы и уравнение четвертой степени, 182
решение, 65, 83, 93, 114, 122, 126, 144, 181, 182
Четырех квадратов Теорема, 125
Числа. См. также Комплексные числа; Мнимые числа; Отрицательные числа; Простые числа; Вещественные числа; Квадратные числа; Трансцендентные числа; Треугольные числа
системы для обозначения, 34-37
Что такое жизнь (Шрёдингер), 318

Ш

Шамаш, 29
Шварц, Джон, 394, 395
Шевалье, Огюст, 161, 170, 172, 174
Шерк, Жоэль, 394
Шестидесятиричная система, 25, 36, 38
Шестиугольник правильный, построение, 62-63
Школа мостов и дорог, 196
Шён, Ричард, 385
Шрёдингер, Рудольф, 317
Шрёдингер, Эрвин, 316-320, 325
Шрёдингера кот, 319-320, 326
Шредингеровские волны, 319, 326
Шумер, 19

Э

Эббот, Эдвин, 354-355
Эвдокс, 48-49
Эвклид, 28, 46, 50, 51, 59, 60, 62, 63, 65, 74, 85, 87-89, 219, 247, 281, 288, 300, 325, 354, 360, 421, 423
аксиомы, 54-55, 119
жизнь, 46-49
новаторство, 51-52
не охваченные им темы, 57, 58, 106, 194, 421
Эддингтон, Артур Стенли, 306, 330
Эйлер, Леонард, 111, 113, 115, 124, 138, 205, 207, 230, 325, 326, 349, 414, 416
Эйнштейн, Альберт, 121, 157, 266-268, 280-288, 293, 302, 304-308, 312, 315, 316, 318, 331, 337, 350-351, 383, 400, 425, 434, 435
молодость, 279-286
научные статьи, 268, 284, 287-288, 348
образование, 280-284
слава, 286, 307, 331

теория относительности, 12, 288, 293-301, 303, 331, 344-345, 348, 356, 362, 383, 391, 399
Эйнштейн, Герман, 279, 282, 283, 285-286
Эйнштейн, Мария, 279,
Эйнштейн (Кох), Паулина, 279, 280, 285
Эйнштейна уравнения, 301-303. 305, 350, 401
их компоненты, 350
Эйри, Джордж, 239
Эквивалентности принцип, 301
Экснер, Франц, 317
Экспериментальные исследования (Фарадей), 276
Электричество, 273-275, 277, 280, 289, 299, 315, 316
Электромагнетизм, 284, 290, 294, 348, 353, 362, 365, 373, 375. **См. также Максвелла уравнения**
гравитация и электромагнетизм, 350-351, 359
излучение, 378, 313-315
индукция, 274, 277
как фундаментальная сила, 367
модели электромагнетизма, 276
симметрии в законах электромагнетизма, 298
уравнения для, 268, 277, 289,
Электроны, 207, 315, 316, 320, 321, 325, 333, 334, 338, 364, 366, 368-370, 372, 373, 375, 379, 387, 391, 394, 401, 427
Электрослабая теория, 346, 365, 375
Элементы геометрии (Лежандр), 157
Энгель, Фридрих, 258, 259
Энлиль, 32
Эратосфен, 48
Эриду, 20
Эрмит, Шарль, 205-207
Эрстед, Ханс, 273-274
Эфир, 270-272, 278, 284, 285, 292-294, 296, 297, 310

Ю

Югэнен, Ульрих фон, 210

Я

Ядерное оружие, 327-328
Ядерные силы, 343, 346, 365, 371-372
Якоби, Карл Густав Якоб, 174
Янг, Чжэньнин, 373
Янга–Миллса поле, 373
Яу, Шинтан, 385, 397-398

Arithmetica (Диофант), 67-69,

Cosa, 87

Della Pittura (Альберти), 421
Disquisitiones Arithmeticae (Гаусс, К. Ф.), 112, 208, 256, 439

ETH (Eidgenossiche Techhnische Hochschule), 282-285, 302

Habilitation диссертация, 121

Inroductio Arithmetica (Никомах) 67
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 197

Lehrbuch der Algebra (Вебер, Г.), 338
Liber Abbaci (Фибоначчи), 85, 86, 88
Ludus Algebrae et Almucgrabalaeque, 70

Practica Geometriae (Леонардо Пизанский), 87

Revue Encyclopedique, 172

Trattato della Pittura (да Винчи), 421

Серия "Элементы"

Иэн Стюарт

ИСТИНА И КРАСОТА

История симметрии

Главный редактор Варвара Горностаева
Художник Андрей Бондаренко
Ведущий редактор Михаил Калужский
Ответственный за выпуск Мария Косова
Редактор Галина Юзефович
Технический редактор Татьяна Тимошина
Корректор Екатерина Комарова
Верстка Елена Илюшина

ООО "Издательство Астрель",
обладатель товарного знака "Издательство Corpus"
129085, г. Москва, пр-д Ольминского, 3а

Подписано в печать 25.03.10. Формат 60x90/16
Бумага офсетная. Гарнитура "MetaNormalC"
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29
Тираж 5000 экз. Заказ № 1147.

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры
Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.012280.10.09 от 20.10.2009

Охраняется законом РФ об авторском праве. Воспроизведение всей книги или любой ее части воспрещается без письменного разрешения издателя. Любые попытки нарушения закона будут преследоваться в судебном порядке.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ЗАО "ИПК "Парето-Принт",
г. Тверь, www.pareto-print.ru

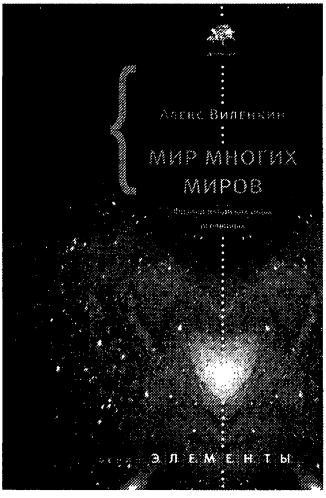
Издание осуществляется при техническом содействии
ООО "Издательство АСТ", ООО "Издательство Астрель"

По вопросам оптовой покупки книг
Издательской группы "АСТ" обращаться по адресу:
г. Москва, Звездный бульвар, 21, 7-й этаж
Тел.: (495) 615-01-01, 232-17-16

Издательство CORPVS представляет

Алекс Виленкин
Мир многих миров

уже в продаже



Все мы живем в остатках огромного взрыва, случившегося около 14 миллиардов лет тому назад и положившего начало нашей Вселенной. Однако что предшествовало этому грандиозному событию? И какова вероятность того, что помимо нашего мира где-то существуют другие? В своей популярно написанной книге физик, профессор университета Тафтс (США) Алекс Виленкин знакомит читателя с последними научными достижениями в сфере космологии и излагает собственную теорию, доказывающую возможность — и, более того, вероятность, — существования бесчисленных параллельных вселенных. Выводы из его гипотезы ошеломляют: за границами нашего мира раскинулось множество других миров, похожих на наш или принципиально иных, населенных невообразимыми созданиями или существами, неотличимыми от людей. Идеи Виленкина оказались настолько ясными, убедительными и в то же время революционными, что в одночасье превратили скромного кабинетного ученого в звезду популярных токшоу, а его книгу — в международный бестселлер, получивший колоссальный общественный резонанс.

Издательство CORPVS представляет

Нил Шубин
Внутренняя рыба

уже в продаже

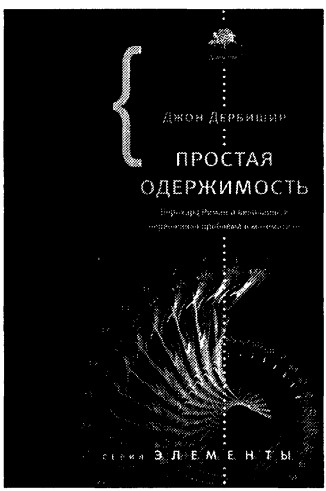
Почему мы выглядим так, как выглядим? Что общего между человеческими руками и, допустим, крылышками бабочки? И как связаны между собой волосы, молочные железы и сложное устройство нашего уха? Эти вопросы только кажутся праздными — на деле ответы на них позволят нам лучше понять строение человеческого организма, а, значит, найти причину его слабостей и болезней.

Нил Шубин, профессор анатомии, известный палеонтолог и один из первооткрывателей легендарного тиктаалика (промежуточного звена между рыбами и наземными животными), предлагает читателю совершить увлекательное путешествие к истокам эволюции и посмотреть, как на протяжении трех с половиной миллиардов лет формировалось и совершенствовалось наше тело.

Издательство CORPVS представляет

Джон Дербишир
Простая одержимость

уже в продаже



В 1859 году немецкий математик Бернхард Риман выдвинул гипотезу, касающуюся распределения простых чисел — одной из центральных проблем теории чисел в целом. С тех пор и до наших дней его гипотеза, изящная, интуитивно понятная и совершенно не доказуемая, будоражит умы самых блестящих исследователей мира.

Гипотеза Римана включена в список семи "проблем тысячелетия", за решение каждой из которых Математический Институт Клэя установил награду в один миллион долларов.

Увлекательная и остроумная книга американского публициста Джона Дербишира повествует о попытках доказать эту гипотезу, а также о судьбах людей, для которых она превратилась в навязчивую идею, проклятие и неисчерпаемый источник научного вдохновения.

Э Эe | Лl | Еe | Мm | Еe | Нn | Тt | Ыy

elementy.ru

Ian Stewart

WHY BEAUTY IS TRUTH

A History of Symmetry

Понятие симметрии лежит в основе человеческих представлений о гармонии и красоте. Однако помимо этого симметрия играет важную роль в математике, а основные ее принципы поразительным образом проявляют себя в фундаментальных физических законах. Известный математик Иэн Стюарт предлагает читателю отправиться в головокружительное путешествие к истокам этого феномена и проследить развитие идеи симметрии начиная с эпохи древнего Вавилона и заканчивая передовыми рубежами современной науки.

Династия

9 785271 271786