ТВ

МС

В. Ф. КОЛЧИН

СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

ТВ
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
МС

В. Ф. КОЛЧИН

СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.17
К.61
УДК 519.2

Колчин В. Ф. **Случайные отображения**. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 208 с.

Книга посвящена применениям асимптотических методов теории вероятностей к изучению случайных отображений конечного множества в себя.

Предельные распределения ряда характеристик графа случайного отображения находятся путем сведения комбинаторных задач к задачам суммирования независимых случайных величин. При этом основную роль играют локальные предельные теоремы в схеме серий для сумм независимых целочисленных слагаемых. Для изучения случайных деревьев, являющихся основными элементами графа отображения, используется их связь с ветвящимися процессами. Эта связь позволяет применять для анализа комбинаторных объектов аналитические методы теории ветвящихся процессов.

Для специалистов в области теории вероятностей и ее приложений, инженеров и студентов старших курсов вузов.

Библ. 112 назв.

К $\frac{1702060000-019}{053(02)-84}$ 44-83

ОГЛАВЛЕНИЕ

1* Зак. 24

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние два десятилетия вероятностные методы занимают все большее место в исследованиях комбинаторного характера. Если на множестве изучаемых комбинаторных объектов задать равномерное распределение, то числовые характеристики этих объектов можно рассматривать как случайные величины и применять для их изучения хорошо развитые в теории вероятностей аналитические методы. Успешное применение этих методов в комбинаторном анализе связано с тем, что при вероятностном подходе ограничиваются изучением свойств типичных представителей рассматриваемого множества комбинаторных объектов, составляющих основную массу этого множества. При этом нетипичные по своим свойствам объекты, число которых составляет малую долю общего числа рассматриваемых объектов, естественным образом исключаются из рассмотрения.

В книге вероятностный подход применяется для изучения однозначных отображений конечного множества в себя, когда число элементов множества стремится к бесконечности. В исследованиях таких комбинаторных объектов нашли применение различные вероятностные методы: метод моментов, асимптотические методы анализа характеристических и производящих функций, в том числе метод перевала. Эти методы приспособлены для установления слабой сходимости последовательностей распределений и наиболее эффективны в случаях, когда изучаемые распределения связаны с последовательностями независимых случайных величин. Как правило, характеристики случайных комбинаторных объектов представляют собой зависимые случайные величины. Однако, хотя кратности вершин, объемы компонент, объемы деревьев случайного отображения, длины циклов случайной подстановки зависимы, их совместное распределение инвариантно относительно перестановки этих случайных величин. Симметричность зависимости позволяет надеяться, что совместное распределение таких характеристик может быть представлено, как в случае бесконечной последовательности симметрично связанных величин, в виде условного распределения независимых величин. Возможность такого представления впервые была отмечена автором и в последнее десятилетие применялась для решения ряда вероятностных задач комбинаторного характера. В книге сделана попытка изложить основные результаты о случайных подстановках, деревьях, лесах и отображениях конечных множеств на основе систематического использования этой возможности представления распределений комбинаторных объектов с помощью независимых случайных величин. Изложение опирается на связь случайных отображений с обобщенной схемой размещения частиц и на связь случайных деревьев и лесов с ветвящимися процессами. Несмотря на внешнее различие этих двух подходов, они объединяются тем, что в обоих случаях применяемые вероятностные методы существенно используют свойство независимости. В обобщенной схеме размещения частиц распределение заполнений ячеек представимо как условное распределение независимых случайных величин при условии, что их сумма принимает фиксированное значение. Аналитические методы, применяемые для анализа ветвящихся процессов, основаны на независимости поведения каждой частицы ветвящегося процесса от ее происхождения и от поведения остальных частиц.

В книге излагаются результаты о случайных комбинаторных объектах, имеющих равномерное распределение на множестве изучаемых объектов. При равномерном распределении, несмотря на вероятностную терминологию, рассматриваемые задачи по существу являются перечислительными задачами комбинаторного анализа и вероятностный подход обеспечивает лишь удобную форму изложения и помогает применять хорошо развитые в теории вероятностей методы асимптотического анализа.

Внимание к рассмотренным в книге комбинаторным объектам, с одной стороны, является отражением общего повышения интереса к комбинаторным задачам, а с другой стороны, вызвано многочисленными применениями этих объектов в различных областях приложений математики. В связи с развитием вычислительной техники знание свойств типичных представителей множеств подстановок деревьев, отображений приобретает особенно важное значение, так как они широко используются при построении и анализе вычислительных алгоритмов.

Простота и наглядность формулировок делает изложенные в книге вероятностные задачи комбинаторного анализа хорошими объектами для демонстрации в педагогической практике применений асимптотических методов теории вероятностей и особенно локальных предельных теорем для целочисленных слагаемых и предельных теорем теории ветвящихся процессов.

Наглядным представлением однозначного отображения конечного множества в себя может служить граф, вершинами которого являются элементы этого множества. Из каждой вершины графа выходит ровно одна дуга, которая соединяет вершину с ее сбразом при отображении. Каждая компонента связности графа однозначного отображения содержит один контур. Если в графе отображения убрать дуги, составляющие эти контуры, то останется граф, представляющий собой лес. Таким образом, можно считать, что граф отображения строится из деревьев. Поэтому в книге выбран следующий порядок изложения. Вначале рассматриваются взаимно однозначные отображения, граф которых состоит только из контуров. Далее изучаются деревья и леса и с помощью результатов о случайных лесах исследуются случайные отображения.

Книга состоит из трех глав. В гл. I излагаются результаты, получаемые с помощью сведения задач к обобщенной схеме размещения частиц. Особое внимание уделяется изучению циклового строения случайных подстановок, взаимно однозначных отображений конечного множества в себя, а также объемам компонент случайного отображения. В гл. II с помощью теории ветвящихся процессов изучаются случайные деревья. В гл. III связь с ветвящимися процессами распространяется на случайные леса и с помощью результатов о случайных лесах исследуются свойства случайных однозначных отображений.

Излагаемые результаты получены в основном за последние пятнадцать лет. Все литературные ссылки даются в заключительных параграфах каждой главы, при этом не ставится цели дать в этих параграфах исчерпывающий обзор исследований. Кроме статей, прямо использованных в основном тексте, в обзорные параграфы включены работы, в которых приведенные в основном тексте результаты получены другими методами, а также статьи, близко примыкающие по содержанию к материалу соответствующей главы.

Книга доступна читателям, владеющим обычными курсами математического анализа и теории вероятностей. Определения изучаемых комбинаторных объектов приводятся в тексте, однако более широкое знакомство с основными понятиями комбинаторики представляется желательным. Технически наиболее сложными являются доказательства играющих в книге вспомогательную роль локальных предельных теорем для сумм независимых одинаково распределенных целочисленных слагаемых в схеме серий. Известные в теории вероятностей достаточные условия справедливости локальных теорем не охватывают всех случаев их применений, встречающихся в книге. Если в результате развития этой области теории вероятностей появится теорема общего характера, следствиями которой окажутся доказываемые в книге локальные теоремы в схеме серий, то сложность изложения соответствующих разделов существенно уменьшится. Используемая в книге связь характеристик ветвящихся процессов с соответствующими характеристиками случайных деревьев и лесов дает возможность использовать аналитические методы, развитые в теории ветвящихся процессов, при этом в теории ветвящихся процессов возникают новые задачи, вызываемые потребностями изучения случайных деревьев и лесов.

В книге принята следующая нумерация формул, теорем, лемм и следствий. В каждом параграфе для каждого из этих объектов имеется своя нумерация, используемая при ссылках внутри параграфа. При ссылке на объект из другого параграфа той же главы к его номеру добавляется номер параграфа, а при ссылке на объект из другой главы — еще и номер главы. Так, на теорему 1 из § 2 гл. III ссылаются в § 2 гл. III как на теорему 1, в другом параграфе гл. III как на теорему 2.1 и в другой главе как на теорему 3.2.1. Аналогичного правила придерживаются и при ссылках на параграфы, которые в каждой главе имеют свою нумерацию.

Автор благодарен И. Б. Калугину, замечания которого помогли устранить в рукописи ряд неточностей.

1982 г. *В. Ф. Колчин*

ГЛАВА I

ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ И СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Вероятностный подход к перечислительным задачам комбинаторики

Понятие отображения, или функции, занимает центральное место в математике. В книге изучаются свойства некоторых классов однозначных отображений конечного множества $X_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Однозначное отображение s множества X_n в себя можно записать в виде таблицы

$$s=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где s_k обозначает элемент множества X_n, в который при отображении s переходит элемент k, $k=1, 2, \ldots, n$. Наглядным представлением отображения s служит ориентированный граф $\Gamma_n^{(s)}=\Gamma(X_n, W_n)$, множество вершин которого составляет X_n, а множество W_n дуг образовано n дугами (k, s_k), направленными из k в s_k, $k=1, 2, \ldots, n$.

Число дуг, входящих в вершину k в графе $\Gamma_n^{(s)}$, равное числу прообразов элемента k при отображении s, называется *кратностью вершины* k.

Обозначим Σ_n множество всех однозначных отображений X_n в себя, множество всех графов этих отображений обозначим Γ_n. Число элементов множества Σ_n равно, очевидно, n^n.

Граф $\Gamma_n^{(s)}$ отображения s естественным образом разбивается на связные компоненты. Ясно, что каждая связная компонента графа $\Gamma_n^{(s)}$ содержит ровно один контур. Вершины, входящие в контуры, называются *циклическими*. Если убрать дуги, соединяющие циклические вершины, то граф $\Gamma_n^{(s)}$ превращается в *лес*: граф, состоящий из корневых деревьев, вершины которых занумерованы числами от 1 до n.

Напомним, что *корневым* деревом с $n+1$ вершиной называется связный неориентированный граф без циклов с выделенной вершиной, называемой *корнем*, и n некорневыми помеченными вершинами. Корневое дерево с $n+1$ вершиной содержит n ребер. В дальнейшем все ребра деревьев будут рассматриваться либо как дуги, направленные к корню, либо как дуги, направленные от корня. Кратностью вершины дерева в первом случае называется число входящих в эту вершину дуг, а во втором случае — число выходящих из нее дуг.

Обозначим T_n множество всех корневых деревьев с $n+1$ вершиной, корни которых помечены нулем, а n некорневых вершин — номерами 1, 2, ..., n. Число элементов множества T_n равно $(n+1)^{n-1}$.

Лесом с N корневыми и n некорневыми вершинами будем называть граф, все компоненты связности которого представляют собой деревья, корни этих деревьев помечены числами от 1 до N, а некорневые вершины — числами от 1 до n. Множество таких лесов обозначим $F_{n,N}$, число элементов в множестве $F_{n,N}$ равно $N(n+N)^{n-1}$.

Взаимно однозначные отображения множества X_n в себя называются *подстановками степени* n. Обозначим S_n множество всех подстановок степени n, число элементов в S_n равно $n!$. Для подстановки $s \in S_n$ нижняя строка таблицы (1) содержит каждый элемент X_n ровно по одному разу, все компоненты графа $\Gamma_n^{(s)}$ представляют собой контуры, кратности всех вершин $\Gamma_n^{(s)}$ равны единице и все вершины являются циклическими.

Перечислительные задачи комбинаторики состоят в отыскании точного или приближенного выражения для числа комбинаторных объектов, обладающих изучаемым свойством. В книге применяется вероятностный подход к комбинаторным перечислительным задачам.

Основным понятием теории вероятностей является вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, где Ω — множество элементов произвольной природы, называемое пространством элементарных событий, $\mathfrak{A}$ — множество подмножеств Ω, образующее σ-алгебру событий с операциями объединения и пересечения множеств, и P — вероятность, неотрицательная счетно-аддитивная функция, определенная для каждого события $A \in \mathfrak{A}$, $\mathsf{P}(\Omega) = 1$. Случайной величиной называется действительная измеримая функция $\xi=\xi(\omega)$, заданная для всех $\omega\in\Omega$.

Пусть Ω состоит из конечного числа элементов, тогда вероятность P определена на всех подмножествах Ω, если она определена для каждого элементарного события $\omega\in\Omega$. В этом случае любая действительная функция $\xi=\xi(\omega)$ на таком пространстве элементарных событий есть случайная величина.

Вместо действительной функции $\xi(\omega)$ можно рассматривать функции $f(\omega)$, принимающие значения из некоторого множества Y с элементами произвольной природы. Такую функцию $f(\omega)$ естественно рассматривать как обобщение случайной величины и называть случайным элементом множества Y.

При изучении комбинаторных объектов рассматриваются вероятностные пространства, имеющие естественную комбинаторную интерпретацию: в качестве пространства элементарных событий Ω берется изучаемое множество комбинаторных объектов и всем элементам множества приписывается одинаковая вероятность. В этом случае числовые характеристики комбинаторных объектов из Ω становятся случайными величинами. Термин случайный элемент множества Ω обычно применяется для тождественной функции $f(\omega)=\omega$, $\omega\in\Omega$, переводящей элементы множества комбинаторных объектов в себя. Поскольку на Ω задано равномерное распределение, вероятность того, что тождественная функция f примет любое фиксированное значение ω, одна и та же для всех $\omega\in\Omega$. Поэтому представление о случайном комбинаторном объекте из Ω как о тождественной функции $f(\omega)=\omega$ согласуется с обиходным представлением о случайном элементе множества как об элементе, выбираемом из всех элементов этого множества с равными вероятностями.

Заметим, что случайный комбинаторный объект с тем же распределением мог бы быть определен и на более широком вероятностном пространстве, однако в дальнейшем в большинстве случаев достаточно изложенной выше естественной конструкции. Исключение составляют те немногие случаи, когда говорится о нескольких независимых случайных объектах. Для их определения описанного выше естественного вероятностного пространства недостаточно и приходится привлекать более богатое вероятностное пространство, например известную конструкцию прямого произведения вероятностных пространств.

Рассмотрим два примера. 1. Если на множестве Σ_n всех однозначных отображений множества $X_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя задать равномерное распределение, то получается вероятностное пространство, в котором пространство элементарных событий $\Omega=\Sigma_n$, вероятность задана для каждого подмножества Σ_n и равна числу элементов подмножества, деленному на число элементов в множестве Σ_n, равное n^n. *Случайное отображение* σ есть тождественное преобразование множества Σ_n в себя, и $\mathsf{P}\{\sigma=s\}=n^{-n}$ для любого $s\in\Sigma_n$. В табличной записи случайного отображения

$$\sigma=\begin{Bmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n\end{Bmatrix}$$

величины $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ являются случайными величинами, определенными на Σ_n с равномерным распределением. Равенство $\sigma=s$ означает, что $\sigma_1=s_1$, $\sigma_2=s_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_n=s_n$, поэтому для любого $s\in\Sigma_n$

$$\mathsf{P}\{\sigma_1=s_1, \ \ldots, \ \sigma_n=s_n\}=n^{-n}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *В случайном отображении*

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n\end{pmatrix}$$

случайные величины $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ *независимы и принимают значения* $1, 2, \ldots, n$ *с равными вероятностями.*

2. Пусть $\Omega=T_n$, где T_n — множество всех корневых деревьев с $n+1$ вершиной. Число элементов этого множества равно $(n+1)^{n-1}$. Приписывая каждому элементу T_n вероятность, равную $(n+1)^{-n+1}$, получаем вероятностное пространство с равномерным распределением и числовые характеристики деревьев можно рассматривать как случайные величины. Так, высота дерева определяется как максимальное число ребер в цепочках, соединяющих некорневые вершины с корнем. Обозначим $\tau_n(\omega)$ высоту дерева $\omega\in T_n$. Ясно, что на множестве T_n высота $\tau_n(\omega)$ принимает все целые значения от 1 до n. На множестве T_n с равномерным распределением $\tau_n=\tau_n(\omega)$ является случайной величиной. Функция распределения этой случайной величины определена для всех действительных x и равна вероятности $\mathsf{P}\{\tau_n\leqslant x\}$. При равномерном распределении на T_n вероятность $\mathsf{P}\{\tau_n\leqslant x\}=n_x/(n+1)^{n-1}$, где n_x — число деревьев, высота которых не превосходит x. Если для $\mathsf{P}\{\tau_n\leqslant x\}$ получена хорошая оценка, то тем

самым оцененно число n_x тех деревьев, высота которых не больше x.

В § 5 гл. II будет доказана следующая теорема:

При $n \to \infty$ для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\tau_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-k^2x^2)e^{-k^2x^2/2}. \qquad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что, хотя для всех $\omega \in T_n$ можно лишь утверждать, что $1 \leqslant \tau_n(\omega) \leqslant n$, встав на вероятностную точку зрения, удается получить более содержательную оценку: основная доля деревьев имеет высоту порядка $\sqrt{n}$ и с ростом n эта доля становится как угодно близкой к единице; более того, для любого $x > 0$ доля деревьев ω, для которых $\tau_n(\omega) \leqslant x\sqrt{n}$, стремится к величине, стоящей в правой части соотношения (2).

Утверждения вида соотношения (2), в которых оцениваются функции распределения последовательности случайных величин, называются интегральными предельными теоремами. Более полную информацию о поведении распределений последовательности целочисленных случайных величин дают локальные предельные теоремы, в которых оцениваются вероятности отдельных значений, принимаемых случайной величиной. В качестве примера рассмотрим случайную величину $\mu_0(n)$, определенную на множестве деревьев T_n и равную числу концевых вершин в случайном дереве. В § 5 гл. II будет доказана следующая локальная предельная теорема:

При $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\mu_0(n)-ne^{-1}}{\sqrt{n(1-2e^{-1})}} = u\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-2e^{-1})}}e^{-u^2/2}(1+o(1))$$

равномерно относительно целых k, для которых $u = (k-ne^{-1})/\sqrt{n(1-2e^{-1})}$ лежит в любом конечном интервале.

§ 2. Обобщенная схема размещения и полиномиальное распределение

Рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых с равными вероятностями осуществляется один из N исходов, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$. Обозначим η_i число появлений i-го исхода в этой последовательности испытаний, $i=1, 2, \ldots, N$. Случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ имеют полиномиальное распределение: если целые неотрицальные $k_1, \ldots, k_N$ таковы, что $k_1+\ldots+k_N=n$, то

$$\mathsf{P}\{\eta_1=k_1, \ldots, \eta_N=k_N\}=\frac{n!}{k_1!\ldots k_N!N^n}. \tag{1}$$

Ситуацию, в которой возникает полиномиальное распределение, можно описать в терминах равновероятной схемы размещения частиц по ячейкам. Если n частиц независимо одна от другой размещаются в N ячейках так, что каждая частица с равными вероятностями попадает в одну из N ячеек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, N$, то заполнения ячеек $\eta_1, \ldots, \eta_N$ имеют полиномиальное распределение (1).

В такой схеме размещения частиц по ячейкам, приводящей к полиномиальному распределению, заполнения ячеек могут быть получены путем последовательных независимых размещений частиц. Если отказаться от возможности получать заполнения ячеек путем последовательных размещений частиц по ячейкам с простыми вероятностными связями между последовательными размещениями, то любой набор целочисленных неотрицательных случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$, для которых $\eta_1+\ldots+\eta_N=n$, можно рассматривать как схему размещения n частиц по N ячейкам и интерпретировать η_i как число частиц в ячейке с номером i, $i=1, 2, \ldots, N$.

В вероятностных задачах комбинаторики нашел применение класс обобщенных схем размещения, в которых совместное распределение заполнений ячеек $\eta_1, \ldots, \eta_N$ представимо в виде

$$\mathsf{P}\{\eta_1=k_1, \ldots, \eta_N=k_N\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\xi_1=k_1, \ldots, \xi_N=k_N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}, \tag{2}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины. Основные результаты этой главы получены путем сведения комбинаторных задач к такой обобщенной схеме.

Обобщенная схема размещения частиц по ячейкам задается параметрами n и N и распределением случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, которое с помощью соотношения (2) определяет совместное распределение заполнений ячеек $\eta_1, \ldots, \eta_N$. Обозначим

$$p_k=\mathsf{P}\{\xi_1=k\}, \qquad k=0, 1, \ldots \tag{3}$$

Для случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ с полиномиальным распределением (1) соотношение (2) выполняется, если ξ_1 имеет распределение Пуассона с произвольным параметром α:

$$p_k = \mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

Поэтому распределение $\eta_1, \ldots, \eta_N$, удовлетворяющее соотношению (2) при некотором распределении (3), можно рассматривать как обобщение полиномиального распределения.

За равновероятной схемой размещения частиц по ячейкам, приводящей к полиномиальному распределению (1), закрепилось название классическая схема размещения. Использование естественных терминов, связанных с классической схемой размещения частиц по ячейкам, оказалось удобным для наглядного описания ряда комбинаторных задач, в которых возникает полиномиальное распределение. Многие результаты, относящиеся к классической схеме размещения, могут быть получены с использованием связи (2) полиномиального распределения с распределением Пуассона (4). Введение обобщенных схем размещения частиц не только расширяет область применения удобного языка для описания комбинаторных объектов, но и сохраняет возможность применения опирающихся на соотношение (2) методов, разработанных для анализа классической схемы размещения частиц.

Обозначим $\mu_r(n, N)$ число ячеек, содержащих ровно r частиц в обобщенной схеме размещения с распределениями (2) и (3). Покажем, как представление (2) можно использовать для изучения этих случайных величин.

Обозначим $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ независимые одинаково распределенные случайные величины, распределения которых связаны с распределением $\xi_1, \ldots, \xi_N$ следующим образом:

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathsf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Введем также обозначения

$$\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_N^{(r)}.$$

Следующая лемма выражает распределение $\mu_r(n, N)$ через вероятности, связанные с суммами независимых одинаково распределенных величин:

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}=C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k}\,\frac{\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $A_k^{(r)}$ — событие, состоящее в том, что ровно k случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ приняли значение r. В силу равенства (2)

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}=\mathsf{P}\{A_k^{(r)} \mid \zeta_N=n\}=\frac{\mathsf{P}\{A_k^{(r)},\ \zeta_N=n\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}.$$

Равенство (5) получается с помощью очевидных преобразований числителя: событие $A_k^{(r)}$ может произойти при C_N^k различных выборах случайных величин, принимающих значение r, поэтому

$$\mathsf{P}\{A_k^{(r)},\ \zeta_N=n\}=C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k}\,\mathsf{P}\{\zeta_N= \\ =n \mid \xi_1\neq r, \ldots, \xi_{N-k}\neq r,\ \xi_{N-k+1}=r, \ldots, \xi_N=r\}= \\ =C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k}\,\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}.$$

В обобщенной схеме размещения частиц возможен достаточно простой подход и к изучению членов вариационного ряда $\eta_{(1)}\leqslant\eta_{(2)}\leqslant\ldots\leqslant\eta_{(N)}$, построенного для случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ расположением их значений в неубывающем порядке.

Пусть $\xi_1^{(A)}, \ldots, \xi_N^{(A)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(A)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k \mid \xi_1\notin A\}, \qquad k=0, 1, \ldots,$$

где A — подмножество натуральных чисел, $\mathsf{P}\{\xi_1\notin A\}>0$. В частности, если A состоит из одного значения r, то $\xi_1^{(A)}=\xi_1^{(r)}$, где $\xi_1^{(r)}$ — случайная величина, определенная перед леммой 1. Обозначим

$$\zeta_N^{(A)}=\xi_1^{(A)}+\ldots+\xi_N^{(A)}.$$

Следующая лемма сводит изучение распределений членов вариационного ряда к изучению вероятностей, связанных с суммами независимых слагаемых.

Лемма 2. *Для любого натурального* m

$$\mathsf{P}\{\eta_{(m)}\leqslant r\}= \\ =1-\sum_{l=0}^{m-1} C_N^l (1-P_r)^l P_r^{N-l}\,\mathsf{P}\{\zeta_l^{(\overline{A}_r)}+\zeta_{N-l}^{(A_r)}=n\}/\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}, \qquad (6)$$

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N-m+1)}\leqslant r\}= \\ =\sum_{l=0}^{m-1} C_N^l P_r^l (1-P_r)^{N-l}\,\mathsf{P}\{\zeta_l^{(A_r)}+\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_r)}=n\}/\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}, \qquad (7)$$

где A_r — множество целых неотрицательных чисел, не превосходящих r, $\bar{A}_r$ — его дополнение в множестве целых неотрицательных чисел, $P_r = \mathsf{P}\{\xi_1 > r\}$.

Доказательство. Докажем соотношения (7) при $m=1$. Для максимального члена вариационного ряда $\eta_N = \max(\eta_1, \ldots, \eta_N)$ в силу (2) и независимости $\xi_1, \ldots, \xi_N$ справедливы следующие равенства:

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = \mathsf{P}\{\eta_1 \leqslant r, \ \ldots, \ \eta_N \leqslant r\} = \\ = \mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant r, \ \ldots, \ \xi_N \leqslant r \mid \zeta_N = n\} = \\ = (\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant r\})^N \mathsf{P}\{\zeta_N = n \mid \xi_1 \leqslant r, \ \ldots, \ \xi_N \leqslant r\} / \mathsf{P}\{\zeta_N = n\}.$$

Используя случайные величины $\xi_1^{(A_r)}, \ \ldots, \ \xi_N^{(A_r)}$, окончательно получаем, что

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - P_r)^N \mathsf{P}\{\zeta_N^{(A_r)} = n\} / \mathsf{P}\{\zeta_N = n\}. \tag{8}$$

Соотношения (6) и (7) при других значениях m доказываются аналогично.

Для совместного распределения случайных величин $\mu_{r_1}(n, N), \ \ldots, \ \mu_{r_s}(n, N)$ справедливо следующее представление, которое доказывается точно так же, как лемма 1.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\{\mu_{r_1}(n, N) = k_1, \ \ldots, \ \mu_{r_s}(n, N) = k_s\} = \\ = \frac{N!\, p_{r_1}^{k_1} \ldots p_{r_s}^{k_s} \left(1 - p_{r_1} - \ldots - p_{r_s}\right)^{N-k_1-\ldots-k_s}}{k_1! \ldots k_s!\, (N - k_1 - \ldots - k_s)!} \times \\ \times \frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-k_1-\ldots-k_s}^{(r_1, \ldots, r_s)} = n - k_1 r_1 - \ldots - k_s r_s\right\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}},$$

где $s - 1$, $k_1, \ \ldots, \ k_s$, $r_1, \ \ldots, \ r_s$ — целые неотрицательные числа и $r_1, \ \ldots, \ r_s$ различны.

Леммы 1, 2 и 3 выражают распределения случайных величин $\mu_r(n, N)$ и членов вариационного ряда $\eta_{(1)}, \ \ldots, \ \eta_{(N)}$ в обобщенной схеме размещения частиц через вероятности, связанные с суммами независимых случайных величин. Получение предельных распределений случайных величин $\mu_r(n, N)$ и $\eta_{(1)}, \ \ldots, \ \eta_{(N)}$ сводится к применению локальных предельных теорем для сумм независимых одинаково распределенных целочисленных слагаемых.

§ 3. Примеры сведения комбинаторных задач к обобщенной схеме размещения

Приведем несколько примеров сведения комбинаторных задач к обобщенной схеме размещения частиц по ячейкам.

Пример 1. Согласно лемме 1.1 в случайном отображении

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n\end{pmatrix},$$

принимающем с равными вероятностями значения из множества Σ_n, случайные величины $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ независимы и для целых положительных $s_1, \dots, s_n$, не превосходящих n,

$$\mathsf{P}\{\sigma_1=s_1, \dots, \sigma_n=s_n\}=n^{-n}. \tag{1}$$

Обозначим η_r кратность вершины r в случайном отображении σ, $r=1, 2, \dots, n$. Величина η_r равна числу случайных величин $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, принявших значение r, поэтому для целых неотрицательных $k_1, \dots, k_n$, $k_1+\dots$ $\dots+k_n=n$, вероятность $\mathsf{P}\{\eta_1=k_1, \dots, \eta_n=k_n\}$ равна сумме вероятностей вида (1), для которых среди $s_1, \dots, s_n$ ровно k_r значений, равных r, $r=1, 2, \dots, n$. Число слагаемых в этой сумме равно, очевидно, $n!/(k_1! \dots k_n!)$, поэтому

$$\mathsf{P}\{\eta_1=k_1, \dots, \eta_n=k_n\}=\frac{n!}{k_1! \dots k_n! n^n}. \tag{2}$$

Таким образом, совместное распределение кратностей вершин $\eta_1, \dots, \eta_n$ случайного отображения является полиномиальным. Принимая вершины за ячейки, а входящие в эти вершины дуги за частицы, получаем классическую схему размещения n частиц в n ячеек с полиномиальным распределением заполнений ячеек $\eta_1, \dots, \eta_n$. Для случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_n$ справедливо соотношение (2.2):

$$\mathsf{P}\{\eta_1=k_1, \dots, \eta_n=k_n\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k, \dots, \xi_n=$$
$$=k_n \mid \xi+\dots+\xi_n=n\},$$

в котором $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены по закону Пуассона.

Число вершин $\mu_r(n)$ в случайном отображении, имеющих кратность r, совпадает с числом ячеек, содержащих ровно r частиц, в классической схеме размещения n частиц в n ячеек, и для изучения этих величин, а также вариационного ряда, составленного из кратностей вершин, можно привлекать леммы 2.1, 2.2, 2.3.

Пример 2. Из урны, содержащей по m шаров каждого из N цветов, с помощью случайного выбора без возвращения извлекается n шаров. Обозначим η_i число извлеченных шаров i-го цвета, $i=1, \ldots, N$. Легко видеть, что для целых неотрицательных $n_1, \ldots, n_N$ таких, что $n_1+\ldots+n_N=n$,

$$\mathbf{P}\{\eta_1=n_1, \ldots, \eta_N=n_N\}=C_m^{n_1} \ldots C_m^{n_N} / C_{mN}^n.$$

Если в обобщенной схеме размещения частиц случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют биномиальное распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=C_m^k p^k(1-p)^{m-k}, \quad k=0, 1, \ldots, m, \quad 0<p<1,$$

то

$$\mathbf{P}\{\xi_1=n_1, \ldots, \xi_N=n_N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}=C_m^{n_1} \ldots C_m^{n_N}/C_{mN}^n$$

и распределение случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ в этой схеме совпадает с условным распределением независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ при условии $\xi_1+\ldots+\xi_N=n$. Таким образом, $\eta_1, \ldots, \eta_N$ можно рассматривать как заполнения ячеек в обобщенной схеме размещения частиц, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют биномиальное распределение с параметрами (m, p).

Пример 3. Рассмотрим все различные разбиения числа n на N слагаемых, не меньших $r \geqslant 0$. Число таких разбиений равно $C_{n-(r-1)N-1}^{N-1}$. Зададим на множестве этих разбиений равномерное распределение, приписав каждому разбиению $n=n_1+\ldots+n_N$, $n_1, \ldots, n_N \geqslant r$, вероятность $(C_{n-(r-1)N-1}^{N-1})^{-1}$. Тогда число n можно записать в виде

$$n=\eta_1+\ldots+\eta_N,$$

где слагаемые $\eta_1, \ldots, \eta_N$ являются случайными величинами, причем, если $n_1, \ldots, n_N \geqslant r$, $n_1+\ldots+n_N=n$, то

$$\mathbf{P}\{\eta_1=n_1, \ldots, \eta_N=n_N\}=(C_{n-(r-1)N-1}^{N-1})^{-1}.$$

Соответствующая этой комбинаторной задаче обобщенная схема размещения получается, если в качестве распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ взять геометрическое распределение:

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=p^{k-r}(1-p), \quad k=r, r+1, \ldots, \quad 0<p<1.$$

Действительно, как легко проверить,

$$\mathbf{P}\{\xi_1=n_1, \ldots, \xi_N=n_N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}=(C_{n-(r-1)N-1}^{N-1})^{-1},$$

поскольку для геометрически распределенных слагаемых

$$\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}=C_{n-(r-1)N-1}^{N-1}p^{n-Nr}(1-p)^N.$$

Пример 4. Рассмотрим множество $F_{n,N}$ всех лесов, состоящих из N корневых деревьев; корни, а вместе с ними и сами деревья занумерованы числами $1, 2, \ldots, N$, а остальные n вершин занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. Как будет показано в § 1 гл. III, число различных лесов в $F_{n,N}$ равно $N(n+N)^{n-1}$. Число лесов, в которых k-е дерево содержит n_k некорневых вершин, $k=1, \ldots, N$, равно

$$\frac{n!}{n_1!\ldots n_N!}(n_1+1)^{n_1-1}\ldots(n_N+1)^{n_N-1},$$

где множитель $n!/(n_1!\ldots n_N!)$ есть число разбиений n вершин на N упорядоченных групп, а $(n_k+1)^{n_k-1}$ — число деревьев, которые можно построить из k-й группы вершин каждого разбиения. Отсюда следует, что

$$n!\sum_{n_1+\ldots+n_N=n}\frac{(n_1+1)^{n_1-1}\ldots(n_N+1)^{n_N-1}}{n_1!\ldots n_N!}=N(n+N)^{n-1}, \qquad (3)$$

где суммирование проводится по целым неотрицательным $n_1, \ldots, n_N$ таким, что $n_1+\ldots+n_N=n$.

Зададим на $F_{n,N}$ равномерное распределение. Обозначим η_k число некорневых вершин в k-м дереве случайного леса из $F_{n,N}$, $k=1, \ldots, N$. Для случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$

$$\mathsf{P}\{\eta_1=n_1, \ldots, \eta_N=n_N\}=\frac{n!(n_1+1)^{n_1}\ldots(n_N+1)^{n_N}}{N(n+N)^{n-1}(n_1+1)!\ldots(n_N+1)!}, \qquad (4)$$

где $n_1, \ldots, n_N$ — целые неотрицательные числа и $n_1+\ldots+n_N=n$.

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, для которых

$$\mathsf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{(k+1)^k}{(k+1)!}x^k e^{-\theta(x)}, \qquad k=0, 1, \ldots, \qquad (5)$$

где параметр x лежит в интервале $0<x\leqslant e^{-1}$ и функция $\theta(x)$ задается рядом

$$\theta(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}}{k!}x^k.$$

Используя (3), легко получаем, что

$$\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}=$$
$$=\sum_{n_1+\ldots+n_N=n}\frac{(n_1+1)^{n_1}\ldots(n_N+1)^{n_N}}{(n_1+1)!\ldots(n_N+1)!}x^n e^{-N\theta(x)}=$$
$$=\frac{N(n+N)^{n-1}}{n!}x^n e^{-N\theta(x)},$$

поэтому при любом x, $0<x\leqslant e^{-1}$, для целых неотрицательных $n_1, \ldots, n_N$ таких, что $n_1+\ldots+n_N=n$,

$$\mathsf{P}\{\xi_1=n_1, \ldots, \xi_N=n_N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}=$$
$$=\frac{n!\,(n_1+1)^{n_1}\ldots(n_N+1)^{n_N}}{N(n+N)^{n-1}(n_1+1)!\ldots(n_N+1)!}. \qquad (6)$$

Правые части равенств (4) и (6) одинаковы, и совместное распределение $\eta_1, \ldots, \eta_N$ совпадает с совместным распределением $\xi_1, \ldots, \xi_N$ при условии $\xi_1+\ldots+\xi_N=n$. Таким образом, для случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ и $\xi_1, \ldots, \xi_N$ справедливо соотношение (2.2), и для изучения объемов деревьев в случайном лесе можно использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение, задаваемое равенствами (5).

§ 4. О локальных предельных теоремах

Рассмотрим сумму $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$ независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$. В случае, когда распределения слагаемых постоянны (не зависят от N), вопрос об оценке вероятностей $\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}$ при $N\to\infty$ решен исчерпывающим образом. Если существуют последовательности центрирующих и нормирующих величин A_N и B_N такие, что распределения случайных величин $(\zeta_N-A_N)/B_N$ слабо сходятся к некоторому распределению, то это распределение является устойчивым и имеет плотность. В таком случае на решетке с шагом, равным максимальному шагу распределения случайной величины ξ_1, справедлива локальная предельная теорема. Если максимальный шаг распределения ξ_1 равен единице, то локальная теорема справедлива на решетке целых чисел.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных слу-*

чайных величин и существуют A_N *и* B_N *такие, что при* $N\to\infty$ *для любого фиксированного* x

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\zeta_N-A_N}{B_N}\leqslant x\right\}\to\int_{-\infty}^{x}p(u)\,du.$$

Тогда, если максимальный шаг распределения ξ_1 *равен единице, то равномерно относительно целых* n

$$B_N\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}-p\left(\frac{n-A_N}{B_N}\right)\to 0.$$

В качестве образца для доказательства локальных предельных теорем в более сложных случаях приведем доказательство локальной теоремы о сходимости к нормальному распределению.

Теорема 2. *Пусть независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины* $\xi_1, \xi_2 \ldots$ *имеют математическое ожидание* a *и дисперсию* $\sigma^2>0$. *Тогда, если максимальный шаг распределения* ξ_1 *равен единице, то при* $N\to\infty$ *равномерно относительно целых* n

$$\sigma\sqrt{N}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(n-aN)^2}{2\sigma^2N}}\to 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$z=\frac{n-aN}{\sigma\sqrt{N}},\quad P_N(n)=\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}.$$

Если $f(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1, то характеристическая функция суммы $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$ равна $f^N(t)$ и

$$f^N(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_N(n)\,e^{itn}.$$

По формуле обращения

$$P_N(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itn}f^N(t)\,dt. \qquad (1)$$

Обозначим $f^*(t)$ характеристическую функцию центрированной случайной величины ξ_1-a, равную $f(t)\exp\{-ita\}$. Поскольку $n=aN+\sigma z\sqrt{N}$, из (1) следует, что

$$P_N(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-it\sigma z\sqrt{N}}(f^*(t))^N\,dt.$$

После замены $x = t\sigma\sqrt{N}$ это равенство принимает вид

$$\sigma\sqrt{N}\,P_N(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi\sigma\sqrt{N}}^{\pi\sigma\sqrt{N}} e^{-ixz}\left(f^*\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right)^N dx. \tag{2}$$

По формуле обращения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz-x^2/2}\,dx. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что оцениваемую разность

$$R_N = 2\pi\left(\sigma\sqrt{N}\,P_N(n) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2}\right) \tag{4}$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-ixz}\left(\left(f^*\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right)^N - e^{-x^2/2}\right)dx,$$

$$I_2 = -\int\limits_{A\leqslant |x|} e^{-ixz-x^2/2}\,dx,$$

$$I_3 = \int\limits_{A\leqslant |x|\leqslant \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-ixz}\left(f^*\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right)^N dx,$$

$$I_4 = \int\limits_{\varepsilon\sigma\sqrt{N}\leqslant |x|\leqslant \pi\sigma\sqrt{N}} e^{-ixz}\left(f^*\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right)^N dx,$$

где постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Чтобы убедиться, что $R_N \to 0$ при $N \to \infty$, возьмем произвольное $\delta > 0$ и покажем, что выбором достаточно большого N разность R_N можно сделать меньше этого числа.

Для интеграла I_2 справедлива оценка

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A\leqslant |x|} e^{-x^2/2}\,dx$$

и $|I_2|$ выбором достаточно большого A можно сделать сколь угодно малым.

Поскольку $\mathsf{M}\xi_1 = a$ и $\mathsf{D}\xi_1 = \sigma^2$, для характеристической функции $f^*(t)$ при $t \to 0$ справедливо разложение

$$f^*(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2). \tag{5}$$

Обозначим $f_N(x)$ характеристическую функцию случайной величины $(\zeta_N - aN)/(\sigma\sqrt{N})$, равную $\left(f^*\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right)^N$. Из (5) для $f_N(x)$ при $N \to \infty$ и любом фиксированном x вытекает оценка

$$\ln f_N(x) = N \ln f^*\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{N}}\right) = N \ln\left(1 - \frac{x^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right) = \\ = -\frac{x^2}{2} + o(1),$$

из которой следует, что при любом фиксированном x при $N \to \infty$

$$f_N(x) \to e^{-x^2/2}. \tag{6}$$

Кроме того, как видно из (5), существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|t| \leqslant \varepsilon$

$$|f^*(t)| \leqslant 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{4} \leqslant e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{4}}. \tag{7}$$

Используя это неравенство для оценки I_3, находим, что

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{A \leqslant |x| \leqslant \varepsilon\sigma\sqrt{N}} \left|f^*\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right|^N dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{A \leqslant |x| \leqslant \varepsilon\sigma\sqrt{N}} e^{-x^2/4}\, dx,$$

и выбором достаточно большого A величина $|I_3|$ может быть сделана сколь угодно малой.

Выберем ε так, что справедлива оценка (7), и достаточно большое A так, что $|I_2| \leqslant \delta/4$ и $|I_3| \leqslant \delta/4$. Оценим теперь интегралы I_1, I_4 при фиксированных ε и A. Соотношение (6) означает, что распределение $(\zeta_N - aN)/(\sigma\sqrt{N})$ слабо сходится при $N \to \infty$ к нормальному распределению с параметрами (0, 1). Сходимость характеристических функций $f_N(x)$ к характеристической функции нормального закона равномерна в любом конечном интервале, и интеграл I_1 стремится к нулю при $N \to \infty$.

Для интеграла I_4 справедлива оценка

$$|I_4| \leqslant \int\limits_{\varepsilon \leqslant |x|/\sigma\sqrt{N} \leqslant \pi} \left|f^*\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right|^N dx = \\ = \sigma\sqrt{N} \int\limits_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi} |f(t)|^N dt.$$

Поскольку максимальный шаг распределения ξ_1 равен единице,

$$\max_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi} |f(t)| = q < 1.$$

Поэтому

$$|I_4| \leqslant \sigma \sqrt{N}\, 2\pi q^N$$

и $I_4 \to 0$ при $N \to \infty$.

Оценки интегралов I_1 и I_4 показывают, что существует такое N_0, что $|I_1| \leqslant \delta/4$ и $|I_4| \leqslant \delta/4$ при $N \geqslant N_0$.

Итак, разность R_N при $N \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно целых n.

В приложениях обобщенной схемы размещения частиц обычно появляется суммирование независимых слагаемых в схеме серий, когда распределение слагаемых суммы $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ зависит от числа слагаемых N. В таких случаях нет исчерпывающего ответа на вопрос, когда для ζ_N справедлива локальная предельная теорема. Даже в случае сходимости к нормальному закону известные достаточные условия справедливости локальной теоремы нельзя признать вполне удовлетворительными. Поэтому для каждого конкретного распределения, параметры которого зависят от числа слагаемых в сумме, приходится проводить доказательство локальной теоремы по только что описанной классической схеме. В надежде, что будут указаны простые достаточные условия справедливости локальных теорем в схеме серий для целочисленных одинаково распределенных слагаемых в форме, близкой к условиям теорем 1 и 2, мы при доказательстве локальных теорем будем часто опускать возникающие при оценке характеристических функций особенно громоздкие выкладки, связанные, по-видимому, с несовершенством применяемых нами методов.

§ 5. Кратности вершин случайного отображения

В примере 3.1 показано, что кратности $\eta_1, \ldots, \eta_n$ вершин случайного отображения из множества Σ_n всех однозначных отображений X_n в себя можно рассматривать как заполнения n ячеек после размещения n частиц в классической схеме размещения. Найдем предельное распределение при $n \to \infty$ случайных величин $\mu_r(n) = \mu_r(n, n)$, равных числу вершин случайного отображения из Σ_n, имеющих кратность r, или числу ячеек, содержащих ровно r частиц в кассической схеме размещения n частиц в n ячеек.

Рассмотрим несколько более общую схему размещения: классическую схему размещения n частиц в N ячеек. Для классической схемы справедливо соотношение (2.2), в котором случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение Пуассона с произвольным параметром α. Поэтому согласно лемме 2.1 для числа ячеек $\mu_r(n, N)$, содержащих ровно r частиц, справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}=C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k} \frac{\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}, \quad (1)$$

где $p_r=p_r(\alpha)=\alpha^r e^{-\alpha}/r!$, $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$, $\zeta_N^{(r)}=\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_N^{(r)}$ и $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(r)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k \mid \xi_1 \neq r\}.$$

Как нетрудно подсчитать,

$$\mathsf{M}\xi_1^{(r)}=\alpha_r=(\alpha-rp_r)/(1-p_r), \quad (2)$$

$$\mathsf{D}\xi_1^{(r)}=\sigma_r^2=\frac{\alpha}{(1-p_r)^2}\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r\right), \quad (3)$$

где

$$p_r=p_r(\alpha)=\frac{\alpha^r e^{-\alpha}}{r!}. \quad (4)$$

Выберем параметр α распределения Пуассона равным n/N и рассмотрим случай, когда α фиксировано. Поскольку при любом r максимальный шаг распределения $\xi_1^{(r)}$ равен единице, для суммы $\zeta_m^{(r)}=\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_m^{(r)}$ при $m \to \infty$ справедлива локальная предельная теорема.

Лемма 1. *При $m \to \infty$ для любого фиксированного $r=0, 1, \ldots$ и любого фиксированного $\alpha>0$*

$$\mathsf{P}\{\zeta_m^{(r)}=l\}=\frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi m}}e^{-\frac{(l-m\alpha_r)^2}{2m\sigma_r^2}}(1+o(1))$$

равномерно относительно целых l, для которых $(l-m\alpha_r)/(\sigma_r\sqrt{m})$ лежит в любом конечном интервале.

Используем эту лемму и соотношение (1) для нахождения предельного распределения случайной величины $\mu_r(n, N)$. Обозначим

$$\sigma_{rr}^2=\sigma_{rr}^2(\alpha)=p_r\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r\right). \quad (5)$$

Теорема 1. *Если $n, N \to \infty$ так, что отношение $\alpha = n/N$ постоянно, то для любого фиксированного $r=0, 1, \ldots$*

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{(k-Np_r)^2}{2N\sigma_{rr}^2}} (1+o(1))$$

равномерно относительно целых k, для которых $(k-Np_r)/\sigma_{rr}\sqrt{N}$ лежит в любом конечном интервале.

Доказательство. При $N \to \infty$ для биномиального распределения справедливо нормальное приближение:

$$C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_r (1-p_r)}} e^{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}} (1+o(1)). \quad (6)$$

равномерно по k, для которых $(k-Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$ лежит в любом конечном интервале.

Случайная величина ζ_N имеет распределение Пуассона с параметром $\alpha N = n$, поэтому при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{n^n e^{-n}}{n!}(1+o(1)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(1+o(1)). \quad (7)$$

Для оценки вероятности $\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}$ используем лемму 1. Обозначим

$$u = (k - Np_r)/(\sigma_r \sqrt{N}).$$

При ограниченном $|u|$

$$N - k = N(1-p_r)(1+o(1)). \quad (8)$$

Подставляя в показатель экспоненты в лемме 1 $l = n - kr$, $m = N - k$, находим, что

$$\frac{(l - m\alpha_r)^2}{2m\sigma_r^2} = \frac{(\alpha - r)^2 p_r u^2}{2\alpha(1-p_r)}(1+o(1))$$

равномерно относительно u в любом конечном интервале. Поэтому из леммы 1 следует, что равномерно относительно u в любом конечном интервале

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi N(1-p_r)}} e^{-\frac{(\alpha-r)^2 p_r u^2}{2\alpha(1-p_r)}} (1+o(1)).$$

Для завершения доказательства теоремы остается подставить эту оценку, а также оценки (6) и (7) в равенство (1).

Для случайных величин $\mu_r(n)$, равных числу вершин кратности r в случайном отображении, параметр $\alpha = 1$.

Поэтому теорема 1 дает следующий результат для этих случайных величин.

Следствие 1. *При $n \to \infty$ для любого фиксированного $r=0, 1, \ldots$ равномерно относительно целых k, для которых $(k-np_r)/(\sigma_{rr}\sqrt{n})$ лежит в любом конечном интервале,*

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n)=k\}=\frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{\pi n}}e^{-\frac{(k-np_r)^2}{2n\sigma_{rr}^2}}(1+o(1)),$$

где $p_r=p_r(1)$ и $\sigma_{rr}=\sigma_{rr}(1)$ задаются формулами (4) и (5) при $\alpha=1$.

Несколько более сложным оказывается применение леммы 2.2 для изучения вариационного ряда $\eta_{(1)}\leqslant\eta_{(2)}\leqslant\ldots\ldots\leqslant\eta_{(N)}$, составленного из заполнений ячеек в классической схеме размещения n частиц в N ячеек. Рассмотрим распределение максимального заполнения $\eta_{(N)}=\max(\eta_1, \ldots, \eta_N)$. Найдем предельное распределение $\eta_{(N)}$ в случае, когда $n, N\to\infty$ так, что их отношение остается постоянным. Справедлива следующая

Теорема 2. *Если $n, N\to\infty$ так, что отношение $\alpha=n/N$ постоянно, и $r=r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r>\alpha$ и $Np_r\to\lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N)}=r-1\}\to e^{-\lambda},\quad \mathsf{P}\{\eta_{(N)}=r\}\to 1-e^{-\lambda}.$$

Для доказательства теоремы 2 получим сначала некоторые вспомогательные результаты. Согласно равенству (2.8)

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N)}\leqslant r\}=(1-P_r)^N\frac{\mathsf{P}\{\zeta_N^{(Ar)}=n\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}},\tag{8}$$

где $\zeta_N^{(Ar)}=\xi_1^{(Ar)}+\ldots+\xi_N^{(Ar)}$, $\xi_1^{(Ar)}, \ldots, \xi_N^{(Ar)}$ независимы, одинаково распределены и

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(Ar)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k\mid\xi_1\leqslant r\},$$

$$P_r=\mathsf{P}\{\xi_1>r\}=\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}.$$

Выберем последовательность $r=r(\alpha, N)$ так, что $r>\alpha$ и $Np_r\to\lambda$ при $N\to\infty$.

Поскольку $r=r(\alpha, N)\to\infty$ и α постоянно,

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-r}r!}{k!}\leqslant\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^k=\frac{\alpha}{r}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1}\to 0.$$

Поэтому в условиях теоремы

$$NP_r = Np_r \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-r} r!}{k!} \to 0,$$

$$NP_{r-1} = Np_r \left(1 + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-r} r!}{k!}\right) \to \lambda, \tag{9}$$

$$NP_{r-2} \geqslant Np_{r-1} = Np_r \frac{r}{\alpha} \to \infty.$$

Соотношение (9) позволяет оценить множитель $(1-P_r)^N$ в (8): при $N \to \infty$ и $r = r(\alpha, N)$

$$(1-P_r)^N \to 1, \quad (1-P_{r-1})^N \to e^{-\lambda}, \quad (1-P_{r-2})^N \to 0. \tag{10}$$

Оценим теперь отношение вероятностей в (8). Обозначим

$$m_r = \mathsf{M}\xi_1^{(A_r)}, \quad b_r^2 = \mathsf{D}\xi_1^{(A_r)}.$$

Как нетрудно подсчитать,

$$m_r = \alpha\left(1 - \frac{p_r}{1-P_r}\right),$$

$$b_r^2 = \alpha\left(1 - \frac{p_r}{1-P_r} - \frac{(\alpha - r)\, p_r}{1-P_r} - \frac{\alpha p_r^2}{(1-P_r)^2}\right).$$

Докажем, что для $\zeta_N^{(A_r)}$ справедлива локальная предельная теорема. Прямое использование теоремы 4.2 в этом случае невозможно, поскольку распределение слагаемых суммы $\zeta_N^{(A_r)}$ зависит от N.

Лемма 2. *Если $N \to \infty$, α постоянно и $r = r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r > \alpha$ и $Np_r \to \lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\mathsf{P}\{\zeta_N^{(A_r)} = k\} = \frac{1}{b_r \sqrt{2\pi N}}\, e^{-\frac{(k-Nm_r)^2}{2b_r^2 N}} (1 + o(1))$$

равномерно относительно целых k, для которых $(k - Nm_r)/(b_r\sqrt{N})$ лежит в любом конечном интервале.

Доказательство. Следуя классическому доказательству локальной предельной теоремы 4.2, представим вероятность $\mathsf{P}\{\zeta_N^{(A_r)} = k\}$ в виде интеграла

$$\mathsf{P}\{\zeta_N^{(A_r)} = k\} = \frac{1}{2\pi b_r \sqrt{N}} \int_{-\pi b_r \sqrt{N}}^{\pi b_r \sqrt{N}} e^{-ixz} \left(f_r^*\left(\frac{x}{b_r \sqrt{N}}\right)\right)^N dx,$$

где

$$z=(k-Nm_r)/(b_r\sqrt{N}),\quad f_r^*(t)=e^{-itm_r}f_r(t),$$
$$f_r(t)=\mathsf{M}\exp\{it\xi_1^{(A_r)}\}=\frac{1}{1-P_r}\sum_{k=0}^{r}p_ke^{itk}.$$

Так же, как в доказательстве теоремы 4.2, запишем разность

$$R_N=2\pi\left(b_r\sqrt{N}\,\mathsf{P}\{\zeta_N^{(A_r)}=k\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\right)$$

в виде суммы четырех интегралов:

$$I_1=\int_{-A}^{A}e^{-ixz}\left(\left(f_r^*\left(\frac{x}{b_r\sqrt{N}}\right)\right)^N-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)dx,$$
$$I_2=-\int_{A\leqslant|x|}e^{-ixz-x^2/2}\,dx,$$
$$I_3=\int_{A\leqslant|x|\leqslant\varepsilon b_r\sqrt{N}}e^{-ixz}\left(f_r^*\left(\frac{x}{b_r\sqrt{N}}\right)\right)^N dx,$$
$$I_4=\int_{\varepsilon b_r\sqrt{N}\leqslant|x|\leqslant\pi b_r\sqrt{N}}e^{-ixz}\left(f_r^*\left(\frac{x}{b_r\sqrt{N}}\right)\right)^N dx,$$

где постоянные ε и A будут выбраны позднее.

Для оценки I_1 заметим, что при постоянном α и $r=r(\alpha, N)$ дисперсия $b_r^2\to\alpha$, а третий абсолютный момент случайной величины $\xi_1^{(A_r)}-m_r$ ограничен. Поэтому при $t\to 0$ равномерно относительно r

$$f_r^*(t)=1-\frac{b_r^2t^2}{2}+O(|t|^3).\tag{11}$$

Отсюда следует, что при любом фиксированном x и $N\to\infty$, $r=r(\alpha, N)$

$$\left(f_r^*\left(\frac{x}{b_r\sqrt{N}}\right)\right)^N\to e^{-x^2/2},\tag{12}$$

и распределение случайной величины $(\zeta_N^{(A_r)}-m_rN)/(b_r\sqrt{N})$ слабо сходится к нормальному распределению с параметрами (0, 1). Таким образом, сходимость в (12) равномерна в любом конечном интервале, и интеграл I_1 при любом фиксированном A стремится к нулю.

Как следует из (11), при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в области $|t| \leqslant \varepsilon$

$$|f_r^*(t)| \leqslant e^{-b_r^2 t^2/4}$$

и для I_3 справедлива оценка

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{A \leqslant |x|} e^{-x^2/4}\, dx.$$

Выбором достаточно большого A интеграл $|I_3|$, так же как и интеграл $|I_2|$, может быть сделан сколь угодно малым.

Остается при фиксированных ε и A оценить интеграл I_4. Поскольку при $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$ и фиксированном α

$$|e^{\alpha(e^{it}-1)}| \leqslant q_0 < 1$$

и $P_r \to 0$ при $N \to \infty$, в этой области при достаточно большом N для характеристической функции $f_r^*(t)$ справедлива оценка

$$|f_r(t)| = \frac{1}{1-P_r}\left| e^{\alpha(e^{it}-1)} - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk} \right| \leqslant \frac{q_0+P_r}{1-P_r} \leqslant q < 1.$$

Поэтому при $N \to \infty$

$$|I_4| \leqslant \left| \int\limits_{\varepsilon b_r \sqrt{N} \leqslant |x| \leqslant \pi b_r \sqrt{N}} e^{-ixz} \left(f_r^*\left(\frac{x}{b_r\sqrt{N}}\right)\right)^N dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\pi b_r \sqrt{N}\, q^N \to 0.$$

Лемма 2 и оценки (7) и (11) позволяют доказать теорему 2. Действительно, в условиях теоремы 2

$$b_r^2 \to \alpha, \quad (n - Nm_r)^2/(2Nb_r^2) \to 0,$$

и согласно лемме 2

$$\mathsf{P}\{\zeta_N^{(A_r)} = n\} = \frac{1}{b_r\sqrt{2\pi N}}(1 + o(1)).$$

Поэтому в силу (7)

$$\mathsf{P}\{\zeta_N^{(A_r)} = n\}/\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} = 1 + o(1). \tag{13}$$

Утверждение теоремы 2 следует теперь из соотношений (8), (11) и (13).

Заметим, что в силу соотношений (8) и (13) поведение максимума $\eta_1, \ldots, \eta_N$ в полиномиальной схеме асимптотически совпадает с поведением максимума независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, имеющих распределение Пуассона с параметром $\alpha = n/N$.

Из теоремы 2 для максимума $\eta_{(n)}$ кратностей вершин случайного отображения вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Если $n \to \infty$ и $r = r(n)$ выбрано так, что $np_r(1) \to \lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\mathsf{P}\{\eta_{(n)} = r-1\} \to e^{-\lambda}, \quad \mathsf{P}\{\eta_{(n)} = r\} \to 1 - e^{-\lambda}.$$

Предельное распределение максимума $\eta_{(n)}$ кратностей вершин случайного отображения оказывается почти вырожденным, с ростом n его носитель, состоящий из точек $r(n)-1$ и $r(n)$, сдвигается в бесконечность, при этом целые числа $r(n)$ имеют порядок $\ln n/\ln \ln n$ и медленно меняются с ростом n.

§ 6. Связность графов и обобщенная схема размещения

Рассмотрим множество всех графов $\Gamma_n(R)$ с n занумерованными вершинами, обладающих некоторым свойством R. Обозначим a_n число графов в множестве $\Gamma_n(R)$ и b_n число связных графов в этом множестве. Выделим подмножество $\Gamma_{n,N}(R)$ графов из $\Gamma_n(R)$, имеющих ровно N связных компонент. Заметим, что компоненты в графе из $\Gamma_{n,N}(R)$ неупорядочены, поэтому для них можно рассматривать лишь симметрические характеристики, не зависящие от порядка компонент. Чтобы избавиться от этого ограничения, рассмотрим множество $\bar{\Gamma}_{n,N}(R)$ других комбинаторных объектов, построенных путем всевозможных упорядочений компонент графа из $\Gamma_{n,N}(R)$: элементами этого множества являются упорядоченные наборы N компонент, каждая из которых представляет собой связный граф, обладающий свойством R, причем общее число вершин в компонентах равно n. Ясно, что число элементов множества $\bar{\Gamma}_{n,N}(R)$ равно $N!a_{n,N}$, где $a_{n,N}$ — число элементов множества $\Gamma_{n,N}(R)$, состоящего из неупорядоченных наборов компонент. Положим $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ и введем производящие функции

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!}.$$

Назовем *свойство R разложимым*, если для графа оно выполнено тогда и только тогда, когда оно выполнено для каждой его связной компоненты.

Лемма 1. *Если свойство R разложимо, то*

$$a_{n,N}=\frac{n!}{N!}\sum_{n_1+\ldots+n_N=n}\frac{b_{n_1}\ldots b_{n_N}}{n_1!\ldots n_N!}, \tag{1}$$

где суммирование проводится по целым неотрицательным $n_1, \ldots, n_N$, $n_1+\ldots+n_N=n$.

Доказательство. Обозначим $\bar a_n(n_1, \ldots, n_N)$, где $n_1+\ldots+n_N=n$, $n_1, \ldots, n_N \geqslant 1$, число графов из $\bar\Gamma_{n,N}(R)$, имеющих упорядоченные компоненты объемов $n_1, \ldots, n_N$. Построим все $\bar a_n(n_1, \ldots, n_N)$ таких графов. Разобьем n занумерованных вершин на N групп так, что в i-ю группу попадет n_i вершин, $i=1, \ldots, N$. Это можно сделать $n!/(n_1!\ldots n_N!)$ способами. Из n_i вершин построим связный граф, обладающий свойством R, это можно сделать b_{n_i} способами. Таким образом, число упорядоченных наборов связных компонент объемов $n_1, \ldots, n_N$ равно

$$\bar a_n(n_1, \ldots, n_N)=\frac{n!\,b_{n_1}\ldots b_{n_N}}{n_1!\ldots n_N!}.$$

Поскольку упорядочить N компонент можно $N!$ способами, для числа $a_n(n_1, \ldots, n_N)$ неупорядоченных наборов или числа графов из $\Gamma_{n,N}(R)$, имеющих ровно N компонент объемов $n_1, \ldots, n_N$, получаем выражение

$$a_n(n_1, \ldots, n_N)=\frac{1}{N!}\bar a_n(n_1, \ldots, n_N)=\frac{n!\,b_{n_1}\ldots b_{n_N}}{N!\,n_1!\ldots n_N!}. \tag{2}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Если свойство R разложимо, то*

$$A(x)=e^{B(x)}.$$

Доказательство. Как следует из (1), число a_n всех графов в $\Gamma_n(R)$ равно

$$a_n=\sum_{N=1}^{n}\frac{n!}{N!}\sum_{n_1+\ldots+n_N=n}\frac{b_{n_1}\ldots b_{n_N}}{n_1!\ldots n_N!}. \tag{3}$$

Разделив обе части этого равенства на $n!$, умножив

на x^n и просуммировав по n, получаем цепочку равенств
$A(x)-1=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{n_1+\ldots+n_N=n}\frac{b_{n_1}x^{n_1}\ldots b_{n_N}x^{n_N}}{n_1!\ldots n_N!}=$$

$$=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n x^n}{n!}\right)^N=e^{B(x)}-1,$$

из которых следует утверждение леммы.

Зададим на множестве $\Gamma_n(R)$ равномерное распределение. Основное внимание в книге уделено изучению случайных величин α_m, равных числу компонент объема m в случайном графе из $\Gamma_n(R)$. Общее число компонент ν_n случайного графа из $\Gamma_n(R)$ связано с этими величинами равенством $\nu_n=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Расположим компоненты в порядке неубывания их объемов и обозначим β_m объем m-й компоненты в полученном ряде; если $m>\nu_n$, то полагаем $\beta_m=0$.

Рассмотрим также выполняющие вспомогательную роль случайные величины, определенные на множестве $\overline{\Gamma}_{n,N}(R)$ упорядоченных наборов N компонент. Занумерованные числами от 1 до N упорядоченные компоненты будут играть роль ячеек в обобщенной схеме размещения частиц. Зададим на $\overline{\Gamma}_{n,N}(R)$ равномерное распределение и обозначим $\eta_1, \ldots, \eta_N$ объемы упорядоченных связных компонент случайного элемента из $\overline{\Gamma}_{n,N}(R)$. Ясно, что

$$\mathbf{P}\{\eta_1=n_1, \ldots, \eta_n=n_N\}=\frac{N!a_n(n_1, \ldots, n_N)}{N!a_{n,N}}=\frac{a_n(n_1, \ldots, n_N)}{a_{n,N}}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если ряд*

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n x^n}{n!} \tag{5}$$

имеет ненулевой радиус сходимости, то случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ можно рассматривать как заполнения ячеек в обобщенной схеме размещения, в которой определяющие ее независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение, задаваемое равенствами

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{b_k x^k}{k!B(x)}, \tag{6}$$

где положительное значение x из области сходимости ряда (5) *может быть взято произвольным.*

Доказательство. Найдем условное совместное распределение случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ с распределением (6) при условии $\xi_1 + \ldots + \xi_N = n$. Для таких случайных величин

$$\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} = \frac{x^n}{(B(x))^N} \sum_{n_1 + \ldots + n_N = n} \frac{b_{n_1} \ldots b_{n_N}}{n_1! \ldots n_N!} \tag{7}$$

и, согласно (1),

$$\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} = \frac{x^n N!}{(B(x))^N n!} a_{n,N}. \tag{8}$$

Поэтому, если $n_1, \ldots, n_N \geqslant 1$, $n_1 + \ldots + n_N = n$, то

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = n_1, \ldots, \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} = \\ = \frac{b_{n_1} \ldots b_{n_N} x^n}{n! \ldots n_N! \, (B(x))^N \, \mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}} = \frac{b_{n_1} \ldots b_{n_N} n!}{n_1! \ldots n_N! N! a_{n,N}}$$

и, согласно (2),

$$\mathsf{P}\{\xi_1 = n_1, \ldots, \xi_N = n_N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} = \frac{a_n(n_1, \ldots, n_N)}{a_{n,N}}. \tag{9}$$

Из (4) и (9) следует соотношение (2.2), связывающее случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ и $\xi_1, \ldots, \xi_N$ в обобщенной схеме резмещения частиц по ячейкам.

В обобщенной схеме размещения частиц обычно изучаются случайные величины $\mu_r(n, N)$, равные числу ячеек, содержащих ровно r частиц и вариационный ряд $\eta_{(1)} \leqslant \eta_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \eta_{(N)}$, получаемый расположением в неубывающем порядке заполнений ячеек. В данном случае $\mu_r(n, N)$ — число компонент объема r, а вариационный ряд $\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \ldots, \eta_{(N)}$ — расположенные в неубывающем порядке объемы компонент в случайном элементе из $\overline{\Gamma}_{n,N}(R)$. Эти случайные величины будут играть вспомогательную роль; они помогают изучать распределения случайных величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и связанных с ними величин, определенных на множестве $\Gamma_n(R)$ всех графов, обладающих свойством R.

Лемма 3. *Для любого положительного x из области сходимости ряда* (5)

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{n! \, (B(x))^N}{N! a_n x^n} \mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}. \tag{10}$$

Доказательство. Указанное в лемме соотношение следует из (8), поскольку по определению $\mathsf{P}\{\nu_n=N\}=a_{n,N}/a_n$.

Ясно, что в силу (3) число a_n также выражается через вероятности, связанные с величинами $\xi_1, \ldots, \xi_N$:

$$a_n=\sum_{N=1}^{\infty}\frac{n!\,(B(x))^N}{N!\,x^n}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}. \tag{11}$$

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\{\alpha_1=m_1, \ldots, \alpha_n=m_n \mid \nu_n=N\}=\mathsf{P}\{\mu_1(n, N)=m_1, \ldots, \mu_n(n, N)=m_n\}.$$

Доказательство. Условное распределение на $\Gamma_n(R)$ при условии, что $\nu_n=N$, сосредоточено на множестве $\Gamma_{n,N}(R)$ графов, имеющих ровно N связных компонент, и является равномерным на этом множестве. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\alpha_1=m_1, \ldots, \alpha_n=m_n \mid \nu_n=N\}=c_N(m_1, \ldots, m_n)/a_{n,N}, \tag{12}$$

где $a_{n,N}$ — число элементов в множестве $\Gamma_{n,N}(R)$, а $c_N(m_1, \ldots, m_n)$ — число графов из $\Gamma_{n,N}(R)$, для которых число компонент объема r равно m_r, $r=1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим введенное ранее множество $\overline{\Gamma}_{n,N}(R)$, составленное из упорядоченных наборов N компонент, и обозначим $\overline{c}_N(m_1, \ldots, m_n)$ число элементов из $\overline{\Gamma}_{n,N}(R)$, для которых число компонент объема r равно m_r, $r=1, 2, \ldots, n$. Ясно, что

$$\mathsf{P}\{\mu_1(n, N)=m_1, \ldots, \mu_n(n, N)=m_n\}=\overline{c}_N(m_1, \ldots, m_n)/\overline{a}_{n,N}, \tag{13}$$

где $\overline{a}_{n,N}$ — число элементов в множестве $\overline{\Gamma}_{n,N}(R)$. Утверждение леммы следует из (12) и (13), поскольку $\overline{a}_{n,N}=N!\,a_{n,N}$ и $\overline{c}_N(m_1, \ldots, m_n)=N!\,c_N(m_1, \ldots, m_n)$.

Таким образом, если ряд (5) имеет ненулевой радиус сходимости, то все случайные величины, выражающиеся через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, могут изучаться с помощью обобщенной схемы размещения частиц, в которой определяющие ее случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение (6).

Грубо говоря, при условии, что число ν_n связных компонент графа $\Gamma_n(R)$ равно N, объемы этих компонент (при случайном упорядочении) имеют такое же совместное распределение, как случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ в обобщенной схеме размещения частиц, задаваемой независимыми случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_N$ с распределением (6).

Так, при условии $\nu_n = N$ случайные величины $\beta_1, \ldots, \beta_N$ выражаются через случайные величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ точно так же, как члены вариационного ряда $\eta_{(1)}, \ldots, \eta_{(N)}$ в обобщенной схеме размещения частиц выражаются через $\mu_1(n, N), \ldots, \mu_n(n, N)$, поэтому из леммы 4 вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\{\beta_1 = k_1, \ldots, \beta_N = k_N \mid \nu_n = N\} = \mathsf{P}\{\eta_{(1)} = k_1, \ldots, \eta_{(N)} = k_N\}. \tag{14}$$

Выпишем совместное распределение $\mu_1(n,N), \ldots, \mu_n(n,N)$.

Лемма 6. *Для целых неотрицательных* $m_1, \ldots, m_n$ *таких, что* $m_1 + \ldots + m_n = N$, $m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n$,

$$\mathsf{P}\{\mu_1(n, N) = m_1, \ldots, \mu_n(n, N) = m_n\} = \\ = \frac{n!\, b_1^{m_1} \ldots b_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!\, (1!)^{m_1} \ldots (n!)^{m_n} a_n \mathsf{P}\{\nu_n = N\}}. \tag{15}$$

Доказательство. Для получения (15) достаточно подсчитать величину $\bar{c}_N(m_1, \ldots, m_n)$, входящую в (13). Ясно, что

$$\bar{c}_N(m_1, \ldots, m_n) = \sum \bar{a}_n(n_1, \ldots, n_N),$$

где суммирование проводится по всем наборам $(n_1, \ldots, n_N)$, содержащим ровно m_r раз элемент r, $r = 1, \ldots, n$. Число таких наборов равно $N!/(m_1! \ldots m_n!)$, и для каждого из них согласно (2)

$$\bar{a}_n(n_1, \ldots, n_N) = \frac{n!\, b_1^{m_1} \ldots b_n^{m_n}}{(1!)^{m_1} \ldots (n!)^{m_n}}.$$

Поэтому

$$\bar{c}_N(m_1, \ldots, m_n) = \frac{N!\, n!\, b_1^{m_1} \ldots b_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!\, (1!)^{m_1} \ldots (n!)^{m_n}}.$$

Для получения формулы (15) остается заметить, что

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = a_{n,N}/a_n = \bar{a}_{n,N}/(N!\, a_n).$$

Леммы 4 и 6 дают возможность выписать совместное распределение случайных величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в случайном графе из $\Gamma_n(R)$.

Лемма 7. *Если $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, то*

$$\mathsf{P}\{\alpha_1=m_1, \ldots, \alpha_n=m_n\}=$$
$$=\begin{cases} \dfrac{n!}{a_n}\prod\limits_{r=1}^{n}\dfrac{b_r^{m_r}}{m_r!\,(r!)^{m_r}}, & \text{если} \quad \sum\limits_{r=1}^{n} rm_r=n, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}\{\alpha_1=m_1, \ldots, \alpha_n=m_n\}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{P}\{\nu_n=k\}\,\mathsf{P}\{\alpha_1=m_1, \ldots, \alpha_n=m_n \mid \nu_n=k\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\nu_n=N\}\,\mathsf{P}\{\alpha_1=m_1, \ldots, \alpha_n=m_n \mid \nu_n=N\},$$

где $N=m_1+\ldots+m_n$. Используя лемму 4, находим, что

$$\mathsf{P}\{\alpha_1=m_1, \ldots, \alpha_n=m_n\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\nu_n=N\}\ \mathsf{P}\{\mu_1(n, N)=m_1, \ldots, \mu_n(n, N)=m_n\}. \qquad (16)$$

Остается заметить, что $\mathsf{P}\{\mu_1(n, N)=m_1, \ldots, \mu_n(n, N)=m_n\}=0$, если $m_1+2m_2+\ldots+nm_n\neq n$ и для вероятности $\mathsf{P}\{\mu_1(n, N)=m_1, \ldots, \mu_n(n, N)=m_n\}$ справедливо содержащееся в лемме 6 выражение (15), если $m_1+\ldots+m_n=N$ и $m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n$. Подставляя (15) в (16), приходим к утверждению леммы 7.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Множеству S_n взаимно однозначных отображений соответствует множество $\Gamma_n(R)$ графов с n вершинами, для которых свойство R состоит в том, что граф, обладающий этим свойством, есть ориентированный граф, в каждую вершину которого входит ровно одна дуга и из каждой вершины выходит ровно одна дуга. Компонентами связности такого графа являются контуры. В этом случае $a_n=n!$, $b_n=(n-1)!$ и производящие функции

$$A(x)=(1-x)^{-1}, \quad B(x)=-\ln(1-x)$$

удовлетворяют соотношению леммы 2:

$$A(x)=e^{B(x)}. \qquad (17)$$

Для изучения длин циклов случайной подстановки и связанных с ними величин можно использовать обобщенную схему размещения частиц, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = -\frac{x^k}{k \ln(1-x)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < x < 1.$$

Пример 2. Множеству Σ_n всех однозначных отображений соответствует множество $\Gamma_n(R)$ графов с n вершинами, для которых свойство R состоит в том, что граф, обладающий этим свойством, есть ориентированный граф, в котором из каждой вершины выходит ровно одна дуга. Это свойство является разложимым. Поскольку число элементов в Σ_n равно n^n, из соотношения (17) для производящих функций находим, что

$$B(x) = \ln A(x) = \ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!},$$

откуда следует, что

$$b_n = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}.$$

Радиус сходимости рядов $A(x)$ и $B(x)$ равен e^{-1}, и в точке $x = e^{-1}$ ряды сходятся.

Для изучения характеристик случайного отображения можно использовать обобщенную схему размещения частиц, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{b_k x^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 0 < x \leqslant e^{-1}.$$

Пример 3. Рассмотрим множество всех неупорядоченных разбиений множества $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ на непересекающиеся подмножества, объединение которых составляет X_n. Разбиению X_n на подмножества $A_1, \ldots, A_N$ можно поставить в соответствие гиперграф с n вершинами и N гиперребрами $A_1, \ldots, A_N$. Свойство R, выделяющее этот класс графов, состоит в том, что обладающий свойством R граф есть гиперграф, в котором разные гиперребра не имеют общих вершин. Каждая компонента связности такого графа представляет собой гиперребро. Ясно, что число обладающих свойством R связных графов с n вершинами $b_n = 1$ и

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1.$$

Поскольку свойство R разложимо,

$$A(x)=e^{e^x-1}.$$

Из этого равенства или непосредственно из (3) находим, что

$$a_n=\sum_{N=1}^{n}\frac{n!}{N!}\sum_{n_1+\ldots+n_N=n}\frac{1}{n_1!\ldots n_N!},$$

где суммирование проводится по положительным $n_1, \ldots, n_N$.

Для изучения случайных разбиений можно использовать обобщенную схему размещения частиц, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение Пуассона с запрещенным нулевым значением:

$$\mathsf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{x^k}{k!\,(e^x-1)},\quad k=1, 2, \ldots,\quad 0<x<\infty.$$

Пример 4. Рассмотрим множество всех корневых лесов с n занумерованными вершинами. Свойство R, выделяющее этот класс графов, состоит в том, что обладающий этим свойством граф есть неориентированный граф без циклов, в каждой компоненте связности которого выделено по одной вершине, называемой корнем. Свойство R является разложимым. Число b_n связных графов, обладающих свойством R, есть число корневых деревьев, составленных из n вершин, и равно n^{n-1}. Производящая функция $B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}x^n}{n!}$ совпадает с известной функцией $\theta(x)$, являющейся решением уравнения

$$\theta(x)\,e^{-\theta(x)}=x.$$

Для производящих функций $A(x)$, $B(x)$ справедливо равенство (17), поэтому

$$A(x)=e^{\theta(x)}=\theta(x)/x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^n x^n}{(n+1)!},$$

откуда следует, что $a_n=(n+1)^{n-1}$.

Для изучения случайного леса можно использовать обобщенную схему размещения частиц, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение

$$\mathsf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{k^{k-1}x^k}{k!\,\theta(x)},\quad k=1, 2, \ldots,\quad 0<x\leqslant e^{-1}.$$

§ 7. Обобщенная схема размещения и случайные подстановки

Как показано в примере 6.1, изучение множества подстановок S_n с равномерным распределением вкладывается в рассмотренную в предыдущем параграфе схему и может проводиться с использованием обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение

$$p_k = \mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = -\frac{x^k}{k \ln(1-x)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

причем параметр x этого распределения может принимать любое значение из интервала $0 < x < 1$. По очевидной причине это распределение иногда называют распределением логарифмического ряда.

Введенные в предыдущем параграфе для общей схемы случайные величины α_r для случайной подстановки из S_n равны числу циклов длины r, $r = 1, 2, \ldots, n$; случайная величина ν_n равна числу циклов случайной подстановки; величины $\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_{\nu_n}$ представляют собой вариационный ряд длин циклов и получаются расположением в неубывающем порядке длин циклов случайной подстановки.

Изучим предельное поведение распределений этих характеристик случайной подстановки при $n \to \infty$. Прежде всего переформулируем для подстановок общие результаты предыдущего параграфа.

Учитывая, что $a_n = n!$, из леммы 6.1 получаем явное выражение для распределения случайной величины ν_n:

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{a_{n,N}}{a_n} = \frac{1}{N!} \sum_K \frac{1}{k_1 \ldots k_N},$$

где суммирование проводится по множеству целых чисел $K = \{k_i \geqslant 1,\ i = 1, \ldots, N,\ k_1 + \ldots + k_N = n\}$.

Лемма 6.3, выражающая это распределение через вероятность, связанную с суммой случайных величин $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_N$, принимает для подстановок следующий вид.

Лемма 1. *Для любого x, $0 < x < 1$, и $N = 1, 2, \ldots, n$*

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{(-\ln(1-x))^N}{N!\, x^n} \mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}, \tag{2}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы и распределены по закону (1).

Лемма 6.7 позволяет выписать для класса случайных подстановок совместное распределение $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Теорема 1. *Если целые неотрицательные числа $m_1, \ldots, m_n$ удовлетворяют соотношению $m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n$, то*

$$\mathsf{P}\{\alpha_r=m_r,\ r=1,\ \ldots,\ n\}=\prod_{r=1}^{n}\frac{1}{m_r!\,r^{m_r}},$$

в остальных случаях

$$\mathsf{P}\{\alpha_r=m_r,\ r=1,\ \ldots,\ n\}=0.$$

Введем производящую функцию

$$\varphi_n(t_1,\ \ldots,\ t_n)=$$
$$=\sum_{m_1,\ \ldots,\ m_n=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\alpha_1=m_1,\ \ldots,\ \alpha_n=m_n\}\,t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n}=$$
$$=\sum_{M_n}\frac{1}{m_1!\ldots m_n!}\left(\frac{t_1}{1}\right)^{m_1}\left(\frac{t_2}{2}\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{t_n}{n}\right)^{m_n},$$

где суммирование проводится по множеству целых чисел $M_n=\{m_i\geqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ n,\ m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n\}$. Положим $\varphi_0=1$. Нетрудно видеть, что $\varphi_n(t_1,\ \ldots,\ t_n)$ является коэффициентом при u^n в разложении $\exp\left\{ut_1+\frac{u^2t_2}{2}+\ldots\right\}$ по степеням u:

$$\varphi(u,\ t_1,\ t_2,\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t_1,\ \ldots,\ t_n)\,u^n=\exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^nt_n}{n}\right\}. \quad (3)$$

Предельные распределения случайных величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, числа циклов ν_n и членов вариационного ряда $\beta_1, \ldots, \beta_{\nu_n}$, построенного из длин циклов случайной подстановки, можно получать с использованием производящей функции $\varphi(u,\ t_1,\ t_2,\ldots)$. В книге в основном используется подход, опирающийся на связь случайных подстановок с обобщенной схемой размещения частиц. Результаты, относящиеся к случайным величинам α_r и членам вариационного ряда β_m, получаются усреднением по распределению случайной величины ν_n соответствующих результатов о случайных величинах $\mu_r(n,\ N)$ и $\eta_{(m)}$ в обобщенной схеме размещения. Изучение распределения числа циклов ν_n в случайной подстановке, по которому проводится усреднение, с помощью леммы 1 сводится к оценке вероятности $\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}$. Изучение случайных величин $\mu_r(n,\ N)$ и членов вариационного ряда в обобщенной схеме размещения частиц с помощью лемм 2.1, 2.2 и 2.3 также сводится к задачам о суммах независимых одинаково распределенных случайных величин. Поэтому первым шагом к получению предельных распределений величин α_r и β_m является доказательство локальных предельных теорем для таких сумм.

§ 8. Свойства распределения логарифмического ряда

В этом параграфе приводятся локальные предельные теоремы для сумм $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$ и сумм вида $\zeta_N^{(A)}=$ $=\xi_1^{(A)}+\ldots+\xi_N^{(A)}$, составленных из независимых одинаково распределенных случайных величин, при этом ξ_1 имеет распределение логарифмического ряда с параметром x:

$$p_k=\mathsf{P}\{\xi_1=k\}=-\frac{x^k}{k\ln(1-x)}, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{1}$$

а распределение $\xi_1^{(A)}$ связано с (1) соотношением

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(A)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k\mid\xi_1\notin A\},$$

где для подмножества целых чисел A вероятность $\mathsf{P}\{\xi_1\notin A\}>0$.

Теоремы о ζ_N и $\zeta_N^{(A)}$ носят вспомогательный характер и используются в дальнейшем для доказательства предельных теорем о циклах случайных подстановок.

Всюду в дальнейшем параметр x распределения (1) выбран равным $1-n^{-1}$. Такой выбор параметра связан с тем, что при $x=1-n^{-1}$ математическое ожидание

$$\mathsf{M}\xi_1=-\frac{x}{(1-x)\ln(1-x)}=\frac{n-1}{\ln n}.$$

Из дальнейших результатов следует, что среднее значение числа циклов случайной подстановки эквивалентно $\ln n$, поэтому значение $\mathsf{M}\xi_1$ при $x=1-n^{-1}$ эквивалентно средней длине цикла случайной подстановки. Для получения предельных распределений характеристик случайной подстановки используются оценки вероятностей $\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots$ $\ldots+\xi_N=n\}$, в которых число слагаемых N имеет порядок $\ln n$, при $x=1-n^{-1}$ величина $\mathsf{M}\zeta_N$ оказывается близкой к n, что облегчает доказательство локальной теоремы, поскольку не выводит вероятности $\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}$ в область больших уклонений.

Получим некоторые оценки для характеристической функции распределения логарифмического ряда с параметром $x=1-n^{-1}$, равной

$$\varphi_n(t)=-\frac{1}{\ln n}\ln\left(1-e^{it}+\frac{1}{n}e^{it}\right).$$

Представим $\varphi_n(t)$ в виде

$$\varphi_n(t)=-\frac{1}{\ln n}\left(\ln\left(\frac{1}{n}-it\right)+\ln\left(1+\psi_1(t)+\psi_2(t)\right)\right), \qquad (2)$$

где

$$\psi_1(t)=\frac{1+it-e^{it}}{n^{-1}-it}, \quad \psi_2(t)=\frac{e^{it}-1}{n(n^{-1}-it)}.$$

Для $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ справедливы оценки

$$|\psi_1(t)|\leqslant\frac{|e^{it}-1-it|}{|t|}\leqslant\frac{|t|}{2}, \qquad (3)$$

$$|\psi_2(t)|\leqslant\frac{|e^{it}-1|}{n|t|}\leqslant\frac{1}{n}. \qquad (4)$$

Используя явный вид $\varphi_n(t)$, представление (2) и оценки (3) и (4), нетрудно получить следующие свойства $\varphi_n(t)$.

Лемма 1. *Если $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$, то при любом фиксированном t*

$$\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{1}{1-it}+o(1).$$

Лемма 2. *Если $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$, то для любого $\delta>0$ существуют такие положительные числа ε и c, что при $|t/n|\leqslant\varepsilon$ выполняется неравенство*

$$\left|\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)\right|<\frac{c}{(1+|t|)^{1-\delta}}.$$

Лемма 3. *Если $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$, то при $0<\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$, начиная с некоторого n,*

$$|\varphi_n(t)|<1/3.$$

Лемма 4. *Если $n\to\infty$, то существуют такие положительные ε и c, что при $|t/n|\leqslant\varepsilon$*

$$\left|\frac{1}{n}\varphi_n'\left(\frac{t}{n}\right)\right|<\frac{c}{(1+|t|)\ln n}.$$

Как следует из леммы 1, при $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$ распределения нормированных сумм ζ_N/n сходятся к показательному распределению с характеристической функцией $(1-it)^{-1}$. В действительности имеет место локальное сближение этих распределений.

Теорема 1. *Если $n \to \infty$, $N = \ln n + o(\ln n)$, $z = k/n$, где k — натуральные числа, то равномерно относительно $z \geqslant z_0 > 0$*

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\} = e^{-z} + o(1).$$

Доказательство. По формуле обращения вероятность

$$\mathsf{P}\{\zeta_N = k\} = \mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\}$$

представима в виде

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\} = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi n}^{\pi n} e^{-itz}\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

кроме того,

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itz}}{1-it}dt.$$

Поэтому

$$2\pi n\,\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\} - 2\pi e^{-z} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-itz}\left(\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right) - \frac{1}{1-it}\right)dt,$$

$$I_2 = \int_{A \leqslant |t| \leqslant \varepsilon n} e^{-itz}\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon n \leqslant |t| \leqslant \pi n} e^{-itz}\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

$$I_4 = -\int_{A \leqslant |t|}\frac{e^{-itz}}{1-it}dt,$$

и постоянные ε и A будут выбраны позднее.

Согласно лемме 1 интеграл I_1 стремится к нулю при любом фиксированном A. По лемме 3 $|I_3| \leqslant 2\pi n 3^{-N}$ и $I_3 \to 0$ при $n \to \infty$ и $N = \ln n + o(\ln n)$.

Для оценки интегралов I_2 и I_4 проведем интегрирование по частям. Для I_4 это приводит к равенству

$$\int_{A}^{\infty}\frac{e^{-itz}}{1-it}dt = -\left.\frac{e^{-itz}}{iz(1-it)}\right|_{A}^{\infty} + \frac{1}{z}\int_{A}^{\infty}\frac{e^{-itz}}{(1-it)^2}dt.$$

Поэтому

$$|I_4| \leqslant \frac{2}{z\sqrt{1+A^2}} + \frac{2}{z}\int_A^\infty \frac{dt}{1+t^2}$$

и $|I_4|$ выбором A можно сделать сколь угодно малым.

Аналогично,

$$\int_A^{\varepsilon n} e^{-itz}\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right) dt =$$

$$= -\frac{e^{-itz}}{iz}\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)\Bigg|_A^{\varepsilon n} + \frac{N}{iz}\int_A^{\varepsilon n} e^{-itz}\varphi_n^{N-1}\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{n}\varphi_n'\left(\frac{t}{n}\right) dt.$$

Используя оценки лемм 2 и 4, получаем, что

$$|I_2| \leqslant \frac{2}{z}\left|\varphi_n^N\left(\frac{A}{n}\right)\right| + \frac{2}{z}|\varphi_n^N(\varepsilon)| + \frac{c}{z}\int_A^\infty \frac{dt}{t^{2-\delta}},$$

и выбором A величина $|I_2|$ может быть сделана сколь угодно малой, так как, согласно леммам 1 и 3,

$$\left|\varphi_n^N\left(\frac{A}{n}\right)\right| \leqslant \frac{c}{A}, \quad |\varphi_n^N(\varepsilon)| \leqslant 3^{-N}$$

и, согласно лемме 1, в интеграле, входящем в правую часть неравенства, δ можно выбрать меньшим единицы. Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается локальная теорема для суммы $\zeta_N^{(r_1, \ldots, r_s)}$, где $r_1, \ldots, r_s$ — различные фиксированные натуральные числа.

Теорема 2. *Если $n \to \infty$, $N = \ln n + o(\ln n)$ и $z = k/n$, где k — натуральные числа, то равномерно относительно $z \geqslant z_0 > 0$*

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N^{(r_1, \ldots, r_s)} = z\right\} = e^{-z} + o(1).$$

Рассмотрим теперь входящие в лемму 2.2 суммы $\zeta_l^{(A_r)} + \zeta_{N-l}^{(\bar{A}_r)}$, где A_r — множество натуральных чисел, не превосходящих r, и $\bar{A}_r$ — его дополнение в множестве всех натуральных чисел, а случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение (1) с параметром $x = 1 - n^{-1}$.

Обозначим $\varphi_{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1^{(A_r)}$, равную

$$\varphi_{(r)}(t)=\left(\varphi_n(t)-\sum_{k=1}^{r} p_k e^{itk}\right)\left(1-\sum_{k=1}^{r} p_k\right)^{-1}.$$

Обратимся вначале к случаю, когда

$$r=\exp\{\alpha\ln n+t\sqrt{\ln n}\},\quad 0<\alpha<1.$$

Лемма 5. *Если* $n\to\infty$, $r=\exp\{\alpha\ln n+t\sqrt{\ln n}\}$, $0<\alpha<1$, *то при* $t=o(\sqrt{\ln n})$

$$\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant r\}=\alpha+\frac{t}{\sqrt{\ln n}}+O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Доказательство. Так как $(1-1/n)^k=1+O(k/n)$ при $k\leqslant r$, то

$$\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant r\}=\sum_{k=1}^{r} p_k=\sum_{k=1}^{r}\frac{(1-n^{-1})^k}{k\ln n}=\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}+O\left(\frac{r}{n\ln n}\right).$$

Остается заметить, что $\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}=\ln r+O(1)$ при $r\to\infty$.

Лемма 6. *Если* $n\to\infty$, $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$, $l=(1-\alpha)\ln n+o(\ln n)$, $0<\alpha<1$, *то при любом фиксированном* t

$$\varphi_{(r)}^{l}\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{1}{1-it}+o(1).$$

Доказательство. Используя представление (2) и оценки (3) и (4), получаем

$$\varphi_n\left(\frac{t}{n}\right)=1-\frac{\ln(1-it)}{\ln n}+O\left(\frac{1+|t|}{n\ln n}\right). \tag{5}$$

Так же, как в лемме 5, находим, что

$$\sum_{k=1}^{r} p_k e^{itk/n}=\sum_{k=1}^{r}\frac{(1-n^{-1})^k e^{itk/n}}{k\ln n}=$$

$$=\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}+O\left(\frac{r(1+|t|)}{n\ln n}\right)=\alpha+O\left(\frac{1+|t|}{\sqrt{\ln n}}\right). \tag{6}$$

Используя (5), оценку леммы 5 и (6), получаем, что для любого фиксированного t

$$\varphi_{(r)}^{l}\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{\left(1-\frac{\ln(1-it)}{\ln n}-\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}+o\left(\frac{r}{n\ln n}\right)\right)^{l}}{\left(1-\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}+o\left(\frac{r}{n\ln n}\right)\right)^{l}}=$$

$$=\left(1-\frac{\ln(1-it)}{(1-\alpha)\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)^{l}=\frac{1}{1-it}+o(1).$$

Как следует из леммы 6, распределение нормированной суммы $\zeta_l^{(A_r)}/n$ при $n\to\infty$, $l=(1-\alpha)\ln n+o(\ln n)$ и $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$ сходится к показательному распределению.

Следуя доказательству теоремы 1 и заменяя при этом в определении интегралов I_2 и I_3 области интегрирования $A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon n$ и $\varepsilon n\leqslant|t|\leqslant\pi n$ на $A\leqslant|t|\leqslant n/r$ и $n/r\leqslant t\leqslant\pi n$ соответственно, нетрудно доказать локальную теорему для $\zeta_l^{(A_r)}/n$.

Теорема 3. *Если $n\to\infty$, $l=(1-\alpha)\ln n+o(\ln n)$, $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$, $0<\alpha<1$, и $z=k/n$, где k — натуральные числа, то равномерно относительно $z\geqslant z_0>0$*

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_l^{(A_r)}=z\right\}=e^{-z}+o(1).$$

Для $\zeta_l^{(A_r)}/n$ потребуется также более грубая оценка, справедливая для всех натуральных l.

Лемма 7. *Если $n>l$ и $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$, где α — фиксированное число, $0<\alpha<1$, то найдется такая постоянная c, что, начиная с некоторого n,*

$$\mathsf{P}\{\zeta_l^{(A_r)}=n\}\leqslant\frac{cl^2}{n\ln n}.$$

Доказательство. Поскольку

$$\{\zeta_l^{(A_r)}=n\}=\bigcup_{i=1}^{l}\bigcup_{k\geqslant[n/l]}\{\xi_i^{(A_r)}=k,\ \zeta_l^{(A_r)}=n\},$$

то

$$\mathsf{P}\{\zeta_l^{(A_r)}=n\}\leqslant l\sum_{k\geqslant[n/l]}\mathsf{P}\{\xi_1^{(A_r)}=k,\ \zeta_l^{(A_r)}=n\}=$$

$$=l\sum_{k\geqslant[n/l]}\mathsf{P}\{\xi_1^{(A_r)}=k\}\mathsf{P}\{\zeta_{l-1}^{(A_r)}=n-k\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{lp_{[n/l]}}{1-\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant r\}}\sum_{k\geqslant[n/l]}\mathsf{P}\{\zeta_{l-1}^{(A_r)}=n-k\}\leqslant\frac{lp_{[n/l]}}{1-\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant r\}}.$$

Отсюда легко получаем утверждение леммы, поскольку $\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant r\} = \alpha + o(1)$ и $p_{[n/l]} \leqslant l/(n \ln n)$.

Обратимся теперь к суммам $\zeta_l^{(A_r)} + \zeta_{N-l}^{(\bar{A}_r)}$ при $r = \gamma n$, $0 < \gamma < 1$. Введем функцию

$$E(\gamma,\ t) = \int\limits_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u(1-it)}\, du, \quad E(\gamma) = E(\gamma,\ 0).$$

Оценим вначале

$$S_{\gamma n}(t) = \sum_{k > \gamma n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k e^{itk/n}.$$

Лемма 8. *Для любого фиксированного* γ, $0 < \gamma < 1$, *при* $n \to \infty$

$$S_{\gamma n}(t) = E(\gamma,\ t) + o(1).$$

Доказательство. Проводя тождественные преобразования, находим, что

$$S_{\gamma n}(t) = \sum_{k > \gamma n} \frac{1}{k}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{it/n}\right)^k =$$
$$= \sum_{k > \gamma n} \int\limits_0^{(1-1/n)\, e^{it/n}} x^{k-1}\, dx = \int\limits_0^{(1-1/n)\, e^{it/n}} \frac{x^{[\gamma n]}}{1-x}\, dx.$$

После замены $y = n(1-x)$ получаем, что

$$S_{\gamma n}(t) = \int\limits_{n-(n-1)\, e^{it/n}}^{n} \frac{1}{y}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{[\gamma n]} dy.$$

Так как подынтегральная функция мажорируется интегрируемой функцией, можно перейти к пределу под знаком интеграла; проведя эту операцию, находим, что

$$S_{\gamma n}(t) = \int\limits_{1-it}^{\infty} \frac{1}{y} e^{-\gamma y}\, dy + o(1) = \int\limits_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u(1-it)}\, du + o(1).$$

В частности, для хвоста распределения логарифмического ряда получаем оценку

$$\mathsf{P}\{\xi_1 > \gamma n\} = \frac{S_{\gamma n}(0)}{\ln n} = \frac{E(\gamma) + o(1)}{\ln n}. \tag{7}$$

Положим

$$I_0(z,\ \gamma)=1,$$

$$I_s(z,\ \gamma)=\int\limits_{X(s,\,z,\,\gamma)} \frac{dx_1 \ldots dx_s}{x_1 \ldots x_s}, \qquad s=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $X(s,\ z,\ \gamma)=\{x_i \geqslant \gamma,\ i=1,\ \ldots,\ s,\ x_1+\ldots+x_s \leqslant z\}$.

Теорема 4. *Если* $n \to \infty$, $N=\ln n+o(\ln n)$, l — *фиксированное натуральное число*, $0<\gamma<1$, $z=k/n$, *где* k — *натуральные числа, то равномерно относительно* $z \geqslant z_0 > 0$

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\left(\zeta_l^{(A_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}\right)=z\right\}=$$

$$=\frac{e^{-z}}{E^l(\gamma)\, e^{-E(\gamma)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} I_{s+l}(z,\ \gamma)+o(1).$$

Доказательство. Характеристическая функция одного слагаемого суммы $\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}/n$ равна

$$f_1(t)=\frac{\varphi_n(t/n)-S_{\gamma n}(t)/\ln n}{1-S_{\gamma n}(0)/\ln n}.$$

Используя оценки лемм 1 и 8, легко находим, что при $n \to \infty$

$$f_1(t)=\frac{\ln n-\ln(1-it)-E(\gamma,\ t)+o(1)}{\ln n-E(\gamma)+o(1)},$$

откуда следует, что для любого фиксированного l при $n \to \infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$

$$f_1^{N-l}(t)=\frac{e^{-E(\gamma,\ t)}}{(1-it)\, e^{-E(\gamma)}}+o(1). \tag{8}$$

Характеристическая функция одного слагаемого суммы $\zeta_l^{(A_{\gamma n})}/n$ равна $f_2(t)=S_{\gamma n}(t)/S_{\gamma n}(0)$, и при $n \to \infty$

$$f_2(t)=E(\gamma,\ t)/E(\gamma)+o(1). \tag{9}$$

Поэтому характеристическая функция $\varphi_{l,\gamma}^{(n)}(t)$ суммы $\left(\zeta_l^{(A_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}\right)/n$ для любого фиксированного l при $n \to \infty$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi_{l,\gamma}^{(n)}(t)=\varphi_{l,\gamma}(t)+o(1),$$

где

$$\varphi_{l,\gamma}(t)=\frac{E^l(\gamma,\ t)\, e^{-E(\gamma,\ t)}}{E^l(\gamma)\, e^{-E(\gamma)}\,(1-it)}.$$

Найдем плотность $f_{l,\gamma}(z)$ распределения, соответствующего характеристической функции $\varphi_{l,\gamma}(t)$. Для этого разложим $e^{-E(\gamma,t)}$ в ряд по степеням $E(\gamma, t)$ и представим $\varphi_{l,\gamma}(t)$ в следующем виде:

$$\varphi_{l,\gamma}(t)=e^{E(\gamma)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s E^s(\gamma)}{s!}\frac{E^{l+s}(\gamma, t)}{E^{l+s}(\gamma)(1-it)}.$$

Заметим, что если независимые случайные величины $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ имеют плотности распределения $p(z)$, $p_1(z), \ldots, p_m(z)$ соответственно, то их сумма $\zeta+\zeta_1+\ldots+\zeta_m$ имеет плотность

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}p(z-x_1-\ldots-x_m)\,p_1(x_1)\ldots p_m(x_m)\,dx_1\ldots dx_m. \tag{10}$$

Ясно, что функция $E(\gamma, t)/E(\gamma)$ является характеристической функцией распределения с плотностью

$$p(x)=\frac{e^{-x}}{xE(\gamma)}, \qquad x\geqslant\gamma.$$

Учитывая, что характеристической функции $(1-it)^{-1}$ соответствует показательное распределение, с помощью (10) легко убеждаемся, что характеристической функции $E^{l+s}(\gamma, t)/(E^{l+s}(\gamma)(1-it))$ соответствует плотность распределения, равная при $z>0$

$$\frac{e^{-z}}{E^{l+s}(\gamma)}I_{l+s}(z, \gamma).$$

Поэтому характеристической функции $\varphi_{l,\gamma}(t)$ соответствует плотность

$$f_{l,\gamma}(z)=\frac{e^{-z}}{E^{l}(\gamma)\,e^{-E(\gamma)}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}I_{l+s}(z, \gamma).$$

Далее доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1, так как для $\varphi_{l,\gamma}(t)$ справедлива формула обращения, а для характеристической функции слагаемого суммы $\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}/n$ справедливы утверждения лемм 3, 4, 5.

§ 9. Циклы случайной подстановки

Применим результаты предыдущих параграфов к исследованию случайных величин, связанных с цикловым строением подстановок.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} \exp\left\{\frac{(N-\ln n)^2}{2\ln n}\right\}(1+o(1))$$

равномерно относительно целых N, *для которых* $(N-\ln n)(\ln n)^{-7/12}$ *лежит в любом конечном интервале.*

Доказательство. По лемме 7.1 при $x = 1 - n^{-1}$

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N!\,(1-n^{-1})^n}\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}.$$

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 8.1 справедливо равномерно относительно целых значений N, для которых $(N-\ln n)(\ln n)^{-7/12}$ лежит в любом конечном интервале. Поэтому, применяя теорему 8.1, получаем, что равномерно относительно $(N-\ln n)(\ln n)^{-7/12}$ в любом конечном интервале

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N!\,n}(1+o(1)),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим совместное распределение случайных величин $\alpha_{r_1}, \ldots, \alpha_{r_s}$, где $r_1, \ldots, r_s$ — различные натуральные числа.

Теорема 2. *Для любых натуральных* $k_1, \ldots, k_s$ *при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\alpha_{r_1} = k_1, \ldots, \alpha_{r_s} = k_s\} = \\ = \frac{r_1^{-k_1}\ldots r_s^{-k_s}}{k_1!\ldots k_s!}\exp\left\{-\frac{1}{r_1} - \ldots - \frac{1}{r_s}\right\} + o(1).$$

Доказательство. Согласно лемме 6.4

$$\mathsf{P}\{\alpha_{r_1} = k_1, \ldots, \alpha_{r_s} = k_s\} = \\ = \sum_{N=1}^{n} \mathsf{P}\{\nu_n = N\}\,\mathsf{P}\{\mu_{r_1}(n, N) = k_1, \ldots, \mu_{r_s}(n, N) = k_s\}. \quad (1)$$

В силу теорем 8.1 и 8.2 при $n \to \infty$ и $N = \ln n + o(\ln n)$

$$\frac{\mathsf{P}\left\{\zeta^{(r_1, \ldots, r_s)}_{N-k_1-\ldots-k_s} = n - k_1 r_1 - \ldots - k_s r_s\right\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}} = 1 + o(1). \quad (2)$$

поэтому по лемме 2.3 при $n \to \infty$ и $N = \ln n + o(\ln n)$

$$\mathsf{P}\{\mu_{r_1}(n, N) = k_1, \ldots, \mu_{r_s}(n, N) = k_s\} =$$
$$= \frac{r_1^{-k_1} \ldots r_s^{-k_s}}{k_1! \ldots k_s!} \exp\left\{-\frac{1}{r_1} - \ldots - \frac{1}{r_s}\right\} + o(1).$$

Так как эти равенства выполняются равномерно относительно $(N - \ln n)(\ln n)^{-7/12}$ в любом конечном интервале, применяя теорему 1, из (1) получаем утверждение теоремы.

Следующее утверждение о распределении длин m-х минимальных циклов β_m является простым следствием этой теоремы и тождества

$$\mathsf{P}\{\beta_m \leqslant r\} = \mathsf{P}\{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r \geqslant m\},$$

справедливого для любых натуральных m и r.

Следствие 1. *Для любого натурального r при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\{\beta_m \leqslant r\} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda_r^k e^{-\lambda_r}}{k!} + o(1),$$

где $\lambda_r = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}$.

Из теоремы 2 и тождества

$$\mathsf{P}\{\beta_1 = r, \alpha_r = s\} = \mathsf{P}\{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1} = 0, \alpha_r = s\},$$

справедливого для натуральных r и s, вытекает следующее утверждение о числе циклов минимальной длины.

Следствие 2. *Для любых натуральных r и s при $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\{\beta_1 = r, \alpha_r = s\} = \frac{1}{s! r^s} e^{-\lambda_r} + o(1),$$

где $\lambda_r = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}$.

Для случайных величин $\beta_{\nu_n - m+1}$, равных длине m-го максимального цикла, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *При $n \to \infty$*

$$\mathsf{P}\{\beta_{\nu_n - m+1}/n \leqslant \gamma\} =$$
$$= \begin{cases} 1 - \sum\limits_{m \leqslant s < 1/\gamma} \frac{(-1)^{s-m}}{s(m-1)!(s-m)!} I_s(1, \gamma) + o(1), & 0 < \gamma < \frac{1}{m}, \\ 1, & \gamma \geqslant \frac{1}{m}, \end{cases}$$

где

$$I_0(z,\ \gamma)=1,\quad I_s(z,\ \gamma)=\int\limits_{X(s,\ z,\ \gamma)}\frac{dx_1\ldots dx_s}{x_1\ \ldots\ x_s},\qquad s=1,\ 2,\ \ldots,$$

и интегрирование проводится по области $X(s,\ z,\ \gamma)=$ $=\{x_i\geqslant\gamma,\ i=1,\ \ldots,\ s,\ x_1+\ldots+x_s\leqslant z\}$.

Доказательство. Рассмотрим вначале распределение $\eta_{(N-m+1)}$ в обобщенной схеме размещения n частиц в N ячеек, связанной с классом случайных подстановок. Согласно лемме 2.2 при $0<\gamma<1$

$$\mathsf{P}\{\eta_{(N-m+1)}/n\leqslant\gamma\}=$$
$$=\sum_{l=0}^{m-1}C_N^l P_{\gamma n}^l(1-P_{\gamma n})^{N-l}\frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_l^{(A_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}=n\right\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}},\qquad(3)$$

где $P_{\gamma n}=\mathsf{P}\{\xi_1>\gamma n\}$.

При $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$, согласно теореме 8.1, $n\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}=e^{-1}+o(1)$ и, согласно теореме 8.4,

$$n\mathsf{P}\left\{\zeta_l^{(A_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}=n\right\}=$$
$$=\frac{e^{-1}}{E^l(\gamma)\,e^{-E(\gamma)}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}I_{s+l}(1,\ \gamma)+o(1),$$

где величины $I_s(z,\ \gamma)$ определены в формулировке теоремы.

В силу (8.7)

$$P_{\gamma n}=\mathsf{P}\{\xi_1>\gamma n\}=E(\gamma)/\ln n+o(1)$$

и, следовательно,

$$(1-P_{\gamma n})^{N-l}=e^{-E(\gamma)}+o(1).$$

Подставляя эти выражения в (3), находим, что

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{(N-m+1)}\leqslant\gamma\right\}=\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{l!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}I_{s+l}(1,\ \gamma)+o(1),$$

откуда, используя тождество

$$\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l C_n^l=\begin{cases}(-1)^{m-1}C_{n-1}^{m-1}, & n\geqslant m,\\ 0, & n<m,\end{cases}$$

получаем, что при $0<\gamma<1$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{(N-m+1)}\leqslant\gamma\right\}=$$
$$=1-\sum_{m\leqslant s<1/\gamma}\frac{(-1)^{s-m}}{s\,(m-1)!\,(s-m)!}I_s(1,\ \gamma)+o(1).$$

Это соотношение выполняется равномерно относительно $(N-\ln n)(\ln n)^{-7/12}$ в любом конечном интервале, поэтому, усредняя по распределению ν_n и используя при этом лемму 6.5 и теорему 1, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь распределение средних членов вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки. Так как среднее число циклов при $n\to\infty$ имеет порядок $\ln n$, то средние члены β_m имеют номера m порядка $\alpha\ln n$, $0<\alpha<1$. Для них справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *При* $n\to\infty$ *и* $m=\alpha\ln n+o(\sqrt{\ln n})$, $0<\alpha<1$, *для любого фиксированного* t

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\ln\beta_m-m}{\sqrt{m}}\leqslant t\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-u^2/2}\,du\,(1+o(1)).$$

Доказательство. Рассмотрим вероятность

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\ln\beta_m-\alpha\ln n}{\sqrt{\alpha\ln n}}\leqslant t\right\}=\mathbf{P}\{\beta_m\leqslant r\},$$

где $r=\exp\{\alpha\ln n+t\sqrt{\alpha\ln n}\}$. Чтобы оценить $\mathbf{P}\{\beta_m\leqslant r\}$, найдем вначале асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{\eta_{(m)}\leqslant r\}$ в обобщенной схеме размещения частиц, а затем усредним полученный результат по распределению ν_n. Воспользуемся равенством (2.6) леммы 2.2. Положим $N=\ln n+s\sqrt{\ln n}$, где $|s|<(\ln n)^{1/12}$, $l=\alpha\ln n+u\sqrt{\alpha(1-\alpha)\ln n}$, и разобьем область суммирования на две части:

$$L_1=\{0\leqslant l<\alpha\ln n-2(\ln n)^{7/12}\},$$
$$L_2=\{\alpha\ln n-2(\ln n)^{7/12}\leqslant l\leqslant m-1\}.$$

Поскольку $\zeta_l^{(\bar{A}r)}\leqslant lr$ и $|s|<(\ln n)^{1/12}$, по лемме 8.7

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(\bar{A}r)}+\zeta_{N-l}^{(Ar)}=n\right\}\leqslant c\ln n/n$$

и, согласно теореме 8.1,

$$n\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}=e^{-1}+o(1),$$

Поэтому в равенстве 2.6 леммы 2.2

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(\bar{A}r)}+\zeta_{N-l}^{(Ar)}=n\right\}\Big/\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}\leqslant C\ln n,$$

где C — некоторая постоянная.

Используя нормальное приближение для хвоста биномиального распределения и учитывая, что, согласно лемме 8.5,

$$1-P_r=\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant r\}=\alpha+\frac{t\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\ln n}}+O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

получаем при достаточно больших n оценку

$$\sum_{l\in L_1} C_N^l(1-P_r)^l P_r^{N-l}\frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_l^{(\bar{A}_r)}+\zeta_{N-l}^{(A_r)}=n\right\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2C\ln n}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-2a(\ln n)^{1/12}-ab} e^{-u^2/2}\,du,$$

где $a=(\alpha(1-\alpha))^{-1/2}$, $b=\alpha s+t\sqrt{\alpha}$. Правая часть этого неравенства при $n\to\infty$ стремится к нулю.

В области L_2 в силу теорем 8.1 и 8.3

$$\mathsf{P}\left\{\zeta_l^{(\bar{A}_r)}+\zeta_{N-l}^{(A_r)}=n\right\}\Big/\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}=1+o(1)$$

равномерно относительно $|s|<(\ln n)^{1/12}$ и таких u, что $l\in L_2$. Поэтому, воспользовавшись нормальным приближением для биномиального распределения, получаем

$$1-\sum_{l\in L_2} C_N^l(1-P_r)^l P_r^{N-l}\frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_l^{(\bar{A}_r)}+\zeta_{N-l}^{(A_r)}=n\right\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}=$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-ab} e^{-u^2/2}\,du+o(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{ab} e^{-u^2/2}\,du+o(1).$$

Таким образом, собирая оценки по областям L_1 и L_2, находим, что в условиях теоремы

$$\mathsf{P}\{\eta_{(m)}\leqslant r\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{ab} e^{-u^2/2}\,du+o(1).$$

Усредняя по распределению ν_n, получаем, что

$$\mathsf{P}\{\beta_m\leqslant r\}=\sum_{N=1}^{n}\mathsf{P}\{\nu_n=N\}\,\mathsf{P}\{\eta_{(m)}\leqslant r\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2}\int\limits_{-\infty}^{ab} e^{-u^2/2}\,du\,ds+o(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\,du+o(1).$$

Теорема доказана.

§ 10. Линейные комбинации длин циклов

Рассмотрим линейные комбинации случайных величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вида

$$\zeta_{n,r} = c_{n1}\alpha_1 + \ldots + c_{nr}\alpha_r. \qquad (1)$$

Согласно теореме 9.2 для любого фиксированного r при $n \to \infty$ распределение α_k, числа циклов длины k в случайной подстановке степени n, сходится к распределению Пуассона с параметром $1/k$, $k=1, \ldots, r$, и случайные величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ асимптотически независимы. Поэтому при фиксированном r распределение $\zeta_{n,r}$ сходится при $n \to \infty$ к тому же распределению, что и распределение

$$\zeta^*_{n,r} = c_{n1}\alpha^*_1 + \ldots + c_{nr}\alpha^*_r,$$

где α^*_k — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметром $1/k$, $k=1, \ldots, r$. В этом параграфе изучается поведение линейных комбинаций вида (1) при $n, r \to \infty$.

Если r растет не слишком быстро по сравнению с n, так что $(r \ln r)/n \to 0$, то случайные величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ остаются асимптотически независимыми и поведение их линейных комбинаций асимптотически совпадает с поведением соответствующих линейных комбинаций независимых пуассоновских случайных величин. Покажем, что в этом случае класс предельных распределений для $\zeta_{n,r}$ совпадает с классом безгранично делимых распределений.

Найдем асимптотическое выражение для производящих функций

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_r) = \mathsf{M}x_1^{\alpha_1} \ldots x_r^{\alpha_r}, \qquad r \leqslant n;$$

для $r > n$ положим

$$\varphi_n(x_1, \ldots x_r) = \mathsf{M}x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Лемма 1. *Если $n, r \to \infty$ так, что $(r \ln r)/n \to 0$, то равномерно по $|x_k| \leqslant 1$, $k=1, \ldots, r$,*

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_r) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{r} \frac{x_k - 1}{k}\right\} + o(1).$$

Доказательство. Согласно (7.3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) z^n = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n x_n}{n}\right\};$$

отсюда следует, что производящие функции $\varphi_n(x_1, \ldots, x_r)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x_1, \ldots, x_r) z^n = \frac{1}{1-z} \exp\left\{\sum_{k=1}^{r} \frac{(x_k-1) z^k}{k}\right\}. \tag{2}$$

Обозначим $f(z) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{r} \frac{(x_k-1) z^k}{k}\right\}$. Используем простейшие свойства вычетов. При $R > 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(1-z) z^{n+1}} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{f(z)}{(1-z) z^{n+1}} + \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{f(z)}{(1-z) z^{n+1}}. \tag{3}$$

Так как

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{f(z)}{(1-z) z^{n+1}} = \varphi_n(x_1, \ldots, x_r),$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{f(z)}{(1-z) z^{n+1}} = -f(1),$$

из (3) следует, что

$$\varphi_n(x_1, \ldots, x_r) = f(1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(1-z) z^{n+1}}. \tag{4}$$

При $|x_k| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, r$, и $|z| = R > 1$

$$|f(z)| = \exp\left\{\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{r} \frac{(x_k-1) z^k}{k}\right\} \leqslant e^{2R^r (1+\ln r)},$$

поэтому при $r \geqslant 3$

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(1-z) z^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{R^n (R-1)} e^{4R^r \ln r}. \tag{5}$$

Обозначим

$$y(n, r, R) = \frac{1}{R^n (R-1)} e^{4R^r \ln r}$$

и оценим эту функцию при $n, r \to \infty$, $(r \ln r)/n \to 0$ и $R = (n/(r \ln r))^{1/r}$.

Если $(\ln n)/r \geqslant \delta > 0$, то, как нетрудно видеть, $\ln(R-1)$ ограничен снизу и

$$\ln y(n, r, R) = -\frac{n}{r}\left(\ln \frac{n}{r \ln r} - 4 + \frac{r}{n} \ln(R-1)\right) \to -\infty. \tag{6}$$

Если $(\ln n)/r \to 0$, то

$$\ln(R-1) = -\ln r + \ln\ln \frac{n}{r\ln r} + o(1)$$

и

$$\ln y(n, r, R) = \\ = -\frac{n}{r}\left(\ln\frac{n}{r\ln r} - 4 - \frac{r\ln r}{n} + \frac{r}{n}\ln\ln\frac{n}{r\ln r} + o(1)\right) \to -\infty. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что при $n, r \to \infty$, $(r\ln r)/n \to 0$ и $R = (n/(r\ln r))^{1/r}$

$$y(n, r, R) \to 0.$$

Теперь из (4) и (5) следует утверждение леммы.

Следствием леммы 1 является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы при $n, r \to \infty$, $(r\ln r)/n \to 0$ последовательность распределений случайных величин $\zeta_{n,r} - A_{n,r}$ сходилась к некоторому предельному распределению, необходимо и достаточно, чтобы к этому распределению сходилась последовательность распределений величин $\zeta^*_{n,r} - A_{n,r}$, где*

$$\zeta^*_{n,r} = c_{n1}\alpha^*_1 + \ldots + c_{nr}\alpha^*_r$$

и α^*_k — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметром $1/k$, $k=1, \ldots, r$.

Класс безгранично делимых распределений совпадает с классом композиций конечного числа законов Пуассона и пределов таких композиций в смысле слабой сходимости. Очевидно, что любой набор положительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ можно с любой точностью приблизить набором сумм конечных непересекающихся отрезков гармонического ряда: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $l_1 < l_2 < \ldots < l_{s+1}$, что

$$\lambda_k = \sum_{l=l_k+1}^{l_{k+1}} \frac{1}{l} + \varepsilon_k, \qquad k = 1, \ldots, s,$$

и $|\varepsilon_k| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, если, как в теореме 1, α^*_k — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметром $1/k$, то $\alpha^*_{l_k+1} + \ldots + \alpha^*_{l_{k+1}}$, $k = 1, \ldots, s$, представляют собой независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами, близкими к $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Поэтому, используя теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *При n, $r \to \infty$, $(r \ln r)/n \to 0$ класс предельных распределений для $\zeta_{n,r} - A_{n,r}$ совпадает с классом безгранично делимых распределений.*

В качестве примера использования теоремы 1 найдем предельные распределения двух просто интерпретируемых линейных комбинаций:

$$\nu_{n,r} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r,$$
$$\eta_{n,r} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\alpha_r.$$

Теорема 3. *Если n, $r \to \infty$, $(r \ln r)/n \to 0$, то распределение $(\nu_{n,r} - \ln r)/\sqrt{\ln r}$ слабо сходится к нормальному распределению с параметрами* $(0, 1)$.

Доказательство. Утверждение является прямым следствием теоремы 1, так как сумма $\alpha_1^* + \ldots + \alpha_r^*$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_r = 1 + 1/2 + \ldots + 1/r = \ln r + O(1)$, которое при $r \to \infty$ сближается с нормальным.

Теорема 3 позволяет дать простое доказательство теоремы 9.4 о логарифмической нормальности средних членов вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки. Теорема 9.4 утверждает, что при $n \to \infty$ и $m = \alpha \ln n + o(\sqrt{\ln n})$, $0 < \alpha < 1$,

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\ln \beta_m - m}{\sqrt{m}} \leqslant x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du. \tag{8}$$

Приведем доказательство этого соотношения, опирающееся на теорему 3. Воспользуемся очевидным равенством

$$\mathsf{P}\{\beta_m \leqslant r\} = \mathsf{P}\{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r \geqslant m\}. \tag{9}$$

Если $n \to \infty$, $m = \alpha \ln n + o(\sqrt{\ln n})$, $0 < \alpha < 1$, то, выбирая $r = \exp\{m + t\sqrt{m}\}$ и применяя теорему 3, из (9) получаем, что для любого фиксированного t

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\ln \beta_m - m}{\sqrt{m}} \leqslant \frac{\ln r - m}{\sqrt{m}}\right\} = \mathsf{P}\left\{\frac{\ln \beta_m - m}{\sqrt{m}} \leqslant t\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r - \ln r}{\sqrt{\ln r}} \geqslant \frac{m - \ln r}{\sqrt{\ln r}}\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r - \ln r}{\sqrt{\ln r}} \geqslant -t + o(1)\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du + o(1).$$

Таким образом, распределение $(\ln \beta_m - m)/\sqrt{m}$ слабо сходится к нормальному распределению с параметрами (0, 1).

Найдем теперь предельное распределение случайной величины

$$\eta_{n,r} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\alpha_r.$$

Теорема 4. *Если $n, r \to \infty$, $(r \ln r)/n \to 0$, то распределение $\eta_{n,r}/r$ слабо сходится к распределению с преобразованием Лапласа, равным*

$$\exp\left\{-\int_0^s \frac{1-e^{-u}}{u}\,du\right\}.$$

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно показать, что для любого фиксированного положительного s при $r \to \infty$

$$\psi_r(s) = \ln \mathsf{M} \exp\left(-\frac{s}{r}(\alpha_1^* + 2\alpha_2^* + \ldots + r\alpha_r^*)\right) \to$$
$$\to -\int_0^s \frac{1-e^{-u}}{u}\,du.$$

Нетрудно видеть, что

$$\psi_r(s) = \sum_{k=1}^{r} (e^{-sk/r} - 1)/k,$$

и эту функцию можно привести к виду

$$\psi_r(s) = \frac{1}{r} \sum_{1/r \leqslant k/r \leqslant 1} (e^{-sk/r} - 1)/(k/r).$$

Таким образом, $\psi_r(s)$ представима в виде интегральной суммы на отрезке (0, 1) с шагом $1/r$ интегрируемой функции $(e^{-us} - 1)/u$, и, следовательно, при $r \to \infty$

$$\psi_r(s) \to \int_0^1 \frac{e^{-us} - 1}{u}\,du = -\int_0^s \frac{1 - e^{-u}}{u}\,du.$$

Найдем теперь предельное распределение $\eta_{n,r}$ при $n \to \infty$ и $r = \gamma n$, $0 < \gamma < 1$. Для этого воспользуемся связью класса случайных подстановок с обобщенной схемой размещения частиц. В силу леммы 6.4

$$\mathsf{P}\{\eta_{n,r} = k \mid \nu_n = N\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\mu_1(n, N) + 2\mu_2(n, N) + \ldots + r\mu_r(n, N) = k\}, \quad (10)$$

где ν_n — число циклов в случайной подстановке степени n, а $\mu_m(n, N)$ — число ячеек, содержащих ровно m частиц в обобщенной схеме размещения n частиц в N ячеек, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение (8.1) с параметром $x = 1 - n^{-1}$.

Лемма 2. *Если* $0 < k < n$, *то*

$$\mathsf{P}\{\mu_1(n, N) + 2\mu_2(n, N) + \ldots + r\mu_r(n, N) = k\} =$$
$$= \sum_{l=1}^{N-1} C_N^l P_r^l (1 - P_r)^{N-l} \frac{\mathsf{P}\left\{\zeta_l^{(A_r)} = n - k\right\} \mathsf{P}\left\{\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_r)} = k\right\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}}, \quad (11)$$

где $P_r = \mathsf{P}\{\xi_1 > r\}$.

Доказательство. Введем случайные величины $\varepsilon_i^{(r)}$ и $\overline{\varepsilon}_i^{(r)}$, $i = 1, \ldots, N$, такие, что $\varepsilon_i^{(r)} + \overline{\varepsilon}_i^{(r)} = \xi_i$ и

$$\varepsilon_i^{(r)} = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } \xi_i > r, \\ 0, & \text{если } \xi_i \leqslant r. \end{cases}$$

Напомним, что $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$, $\zeta_N^{(A_r)} = \xi_1^{(A_r)} + \ldots + \xi_N^{(A_r)}$, $\zeta_N^{(\overline{A}_r)} = \xi_1^{(\overline{A}_r)} + \ldots + \xi_N^{(\overline{A}_r)}$, и с помощью случайных величин $\varepsilon_i^{(r)}$, $\overline{\varepsilon}_i^{(r)}$, $i = 1, \ldots, N$, распределения введенных ранее случайных величин $\xi_i^{(A_r)}$ и $\xi_i^{(\overline{A}_r)}$, $i = 1, \ldots, N$, можно записать следующим образом:

$$\mathsf{P}\left\{\xi_i^{(A_r)} = k\right\} = \mathsf{P}\left\{\varepsilon_i^{(r)} = k \mid \varepsilon_i^{(r)} > 0\right\},$$
$$\mathsf{P}\left\{\xi_i^{(\overline{A}_r)} = k\right\} = \mathsf{P}\left\{\overline{\varepsilon}_i^{(r)} = k \mid \overline{\varepsilon}_i^{(r)} > 0\right\}.$$

В силу основного соотношения (2.2) и определения величин $\varepsilon_i^{(r)}$ и $\overline{\varepsilon}_i^{(r)}$

$$\mathsf{P}\{\mu_1(n, N) + 2\mu_2(n, N) + \ldots + r\mu_r(n, N) = k\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\varepsilon_1^{(r)} + \ldots + \varepsilon_N^{(r)} = n - k,\ \overline{\varepsilon}_1^{(r)} + \ldots + \overline{\varepsilon}_N^{(r)} = k \mid \zeta_N = n\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\varepsilon_1^{(r)} + \ldots + \varepsilon_N^{(r)} = n - k,\ \overline{\varepsilon}_1^{(r)} + \ldots + \overline{\varepsilon}_N^{(r)} = k\} / \mathsf{P}\{\zeta_N = n\}.$$

Обозначим ν число случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, принявших значения, большие r. По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}\{\varepsilon_1^{(r)} + \ldots + \varepsilon_N^{(r)} = n - k,\ \overline{\varepsilon}_1^{(r)} + \ldots + \overline{\varepsilon}_N^{(r)} = k\} =$$
$$= \sum_{l=0}^{N} \mathsf{P}\{\nu = l\} \mathsf{P}\{\varepsilon_1^{(r)} + \ldots + \varepsilon_N^{(r)} = n - k,$$
$$\overline{\varepsilon}_1^{(r)} + \ldots + \overline{\varepsilon}_N^{(r)} = k \mid \nu = l\}.$$

Отсюда следует утверждение леммы, поскольку

$$\mathsf{P}\{\nu=l\}=C_N^l P_r^l (1-P_r)^{N-l},$$

$$\mathsf{P}\{\varepsilon_1^{(r)}+\ldots+\varepsilon_N^{(r)}=n-k,\ \bar{\varepsilon}_1^{(r)}+\ldots+\bar{\varepsilon}_N^{(r)}=k \mid \nu=l\}=$$
$$=\mathsf{P}\left\{\zeta_l^{(A_r)}=n-k\right\}\mathsf{P}\left\{\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_r)}=k\right\}$$

и при $l=0$, $l=N$ и $0<k<n$ эта вероятность равна нулю.

В § 8 проведена почти вся подготовительная работа для получения с помощью леммы 2 и равенства (10) предельного распределения $\eta_{n,r}=\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+r\alpha_r$. Остается лишь найти асимптотическое выражение для входящей в равенство (11) вероятности $\mathsf{P}\left\{\zeta_l^{(A_r)}=n-k\right\}$ при $r=\gamma n$, $0<\gamma<1$.

В § 8 для $\gamma>0$ была введена функция

$$E(\gamma,\ t)=\int_\gamma^\infty \frac{1}{u}e^{-u(1-it)}\,du,\quad E(\gamma)=E(\gamma,\ 0)$$

и было отмечено, что $E(\gamma,\ t)/E(\gamma)$ — характеристическая функция распределения с плотностью

$$p_1(x)=\frac{1}{xE(\gamma)}e^{-x},\qquad x\geqslant\gamma.$$

Нетрудно выписать плотность $p_l(z)$ распределения, являющегося сверткой l распределений с плотностью $p_1(x)$. Обозначим

$$J_0(z,\ \gamma)=\begin{cases}1/z, & z\geqslant\gamma,\\ 0, & z<\gamma;\end{cases}$$

$$J_l(z,\ \gamma)=\int\limits_{X(l,\ z-\gamma,\ \gamma)}\frac{dx_1\ldots dx_l}{x_1\ldots x_l(z-x_1-\ldots-x_l)},$$

где, как и ранее, $X(l,\ z,\ \gamma)=\{x_i\geqslant\gamma,\ i=1,\ \ldots,\ l,\ x_1+\ldots+x_l\leqslant z\}$. Применяя формулу (8.10) для свертки, легко убеждаемся, что

$$p_{l+1}(z)=\frac{e^{-z}}{E^{l+1}(\gamma)}J_l(z,\ \gamma),\qquad l=0,\ 1,\ \ldots \tag{12}$$

По определению

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(A_r)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k\}/\mathsf{P}\{\xi_1>r\},\qquad k=r+1,\ r+2,\ \ldots$$

При $n\to\infty$ и $r=\gamma n$, $0<\gamma<1$, $k=zn$, $\gamma<z<1$,

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\xi_1^{(A_r)}=z\right\}=\frac{(1-n^{-1})^k}{k\ln n\mathsf{P}\{\xi_1>\gamma n\}}$$

и, согласно (8.7),

$$\mathbf{P}\{\xi_1 > \gamma n\} = E(\gamma)/\ln n + o(1),$$

поэтому

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\xi_1^{(A_r)} = z\right\} = p_1(z) + o(1).$$

Отсюда следует, что для любого фиксированного l

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_l^{(A_r)} = z\right\} = p_l(z) + o(1)$$

и, с учетом (12),

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_l^{(A_r)} = z\right\} = \frac{e^{-z}}{E^l(\gamma)} J_{l-1}(z, \gamma) + o(1). \tag{13}$$

Теорема 5. *Если* $n \to \infty$ *и* $r = \gamma n$, $0 < \gamma < 1$, *то*

$$\mathbf{P}\{\eta_{n,r} = n\} = \sum_{0 \leqslant s < 1/\gamma} \frac{(-1)^s}{s!} I_s(1, \gamma) + o(1)$$

и для $k = \alpha n$, $0 < \alpha < 1$,

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{n,r} = \alpha\right\} = \sum_{0 \leqslant s \leqslant \alpha/\gamma} \frac{(-1)^s}{s!} I_s(\alpha, \gamma) \times$$
$$\times \sum_{0 \leqslant l \leqslant (1-\alpha-\gamma)/\gamma} \frac{1}{(l+1)!} J_l(1-\alpha, \gamma) + o(1).$$

Доказательство. При $n \to \infty$ и $r = \gamma n$ согласно (8.7)

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\} = E(\gamma)/\ln n + o(1),$$

поэтому при любом фиксированном l и $N = \ln n + o(\ln n)$

$$C_N^l P_r^l (1-P_r)^{N-l} = \frac{1}{l!} E^l(\gamma) e^{-E(\gamma)} + o(1). \tag{14}$$

Согласно теореме 8.1, при $n \to \infty$

$$n\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = e^{-1} + o(1)$$

и, согласно теореме 8.4, для любого фиксированного l при $r = \gamma n$, $0 < \gamma < 1$, и $k = \alpha n$, $0 < \alpha < 1$,

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_r)} = \alpha\right\} = e^{-\alpha+E(\gamma)} \sum_{0 \leqslant s \leqslant \alpha/\gamma} \frac{(-1)^s}{s!} I_s(\alpha, \gamma) + o(1).$$

Таким образом, для любого фиксированного l

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_r)}=\alpha\right\}\Big/\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}=$$

$$=e^{1-\alpha+E(\gamma)}\sum_{0\leqslant s\leqslant\alpha/\gamma}\frac{(-1)^s}{s!}I_s(\alpha,\gamma)+o(1).\quad(15)$$

С помощью леммы 2, соотношения (10) и оценок (13), (14) и (15) находим, что при $n\to\infty$, $N=\ln n+o(\ln n)$, $r=\gamma n$, $k=\alpha n$, $0<\gamma$, $\alpha<1$,

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{n,r}=\alpha\mid\nu_n=N\right\}=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}J_{l-1}(1-\alpha,\gamma)\sum_{0\leqslant s\leqslant\alpha/\gamma}\frac{(-1)^s}{s!}I_s(\alpha,\gamma)+o(1).\quad(16)$$

Учитывая, что $J_{l-1}(1-\alpha,\gamma)=0$ при $l>(1-\alpha)/\gamma$, и усредняя выражение (16) по распределению ν_n, получаем утверждение теоремы.

Заметим, что, как следует из теоремы 5, при фиксированном γ функция предельного распределения случайной величины $\eta_{n,r}/n$ имеет скачок в точке 1 и ненулевую плотность на отрезке $(0, 1-\gamma)$. Так, например, согласно теореме 5, при $\gamma=2/3$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{n,2n/3}=1\right\}=1-\ln\frac{3}{2}+o(1)$$

и на отрезке (0, 1/3) плотность предельного распределения равна $(1-\alpha)^{-1}$.

§ 11. Порядок случайной подстановки

Произведением gh *отображений*

$$g=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\ g_1&g_2&\ldots&g_n\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\ h_1&h_2&\ldots&h_n\end{pmatrix}$$

называется отображение

$$s=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\ s_1&s_2&\ldots&s_n\end{pmatrix},$$

в котором $s_k=h_{g_k}$, $k=1, 2, \ldots, n$; другими словами, отображение $s=gh$ есть последовательное применение к элементу k вначале отображения g, которое переводит k в g_k, а затем применение отображения h, которое переводит g_k

в h_{g_k}, $k=1, 2, \ldots, n$. Отображение s, равное произведению m одинаковых отображений g, обычно обозначают g^m.

Множество всех подстановок S_n с операцией умножения подстановок образует *симметрическую группу*. Единицей этой группы является тождественная подстановка, переводящая каждый элемент множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Одной из основных характеристик подстановки как элемента группы S_n является порядок. *Порядком* $O_n(s)$ *подстановки* $s \in S_n$ называется наименьшее целое положительное m, для которого s^m есть тождественная подстановка. Легко видеть, что порядок равен наименьшему общему кратному длин циклов подстановки. Порядок элементов в S_n изменяется в широких пределах: от единицы до $G(n)$, максимального по всем $s \in S_n$ значения порядка $O_n(s)$, причем известно, что

$$\lim_{n\to\infty} (n \ln n)^{-1/2} G(n) = 1. \qquad (1)$$

Не приводя доказательства соотношения (1), покажем лишь, что если этот предел существует, то он не меньше единицы. Для этого достаточно построить последовательность подстановок $s^{(k)} \in S_{n_k}$ такую, что

$$\lim_{k\to\infty} (n_k \ln n_k)^{-1/2} \ln O_{n_k}(s^{(k)}) = 1.$$

В качестве элементов такой последовательности возьмем подстановки $s^{(k)}$, длины циклов которых принимают значения последовательных простых чисел, не превосходящих k. Для простых чисел будем использовать символ p и $\sum_{p\leqslant k} f(p)$ будет обозначать сумму значений функции $f(p)$ по всем простым числам p, $1 \leqslant p \leqslant k$. В этих обозначениях степень подстановки $s^{(k)}$ равна $n_k = \sum_{p\leqslant k} p$, а порядок есть произведение простых чисел, не превосходящих k и $\ln O_{n_k}(s^{(k)}) = \sum_{p\leqslant k} \ln p$. Воспользуемся известными в теории чисел результатами о суммах по простым числам: при $k \to \infty$

$$\ln O_{n_k}(s^{(k)}) = \sum_{p\leqslant k} \ln p = k(1+o(1)),$$

$$n_k = \sum_{p\leqslant k} p = \frac{k^2}{2\ln k}(1+o(1)).$$

Таким образом, для построенной последовательности $s^{(k)}$ при $k \to \infty$

$$(n_k \ln n_k)^{-1/2} \ln O_{n_k}(s^{(k)}) = 1 + o(1).$$

Итак, оценивая порядок подстановки, можно утверждать, что, как следует из (1), $0 \leqslant \ln O_n(s) \leqslant \sqrt{n \ln n}\,(1 + o(1))$ при $n \to \infty$. Используя вероятностный подход к изучению множества подстановок, можно убедиться, что для основной массы подстановок значения $\ln O_n(s)$ близки к $1/2 \ln^2 n$, и для любого интервала можно оценить долю тех подстановок, для которых значение $\ln O_n(s)$ лежит в этом интервале.

Если на S_n задано равномерное распределение, то порядок $O_n = O_n(s)$ как числовая функция, определенная на множестве S_n с равномерным распределением, является случайной величиной и для нее $\mathsf{P}\{O_n \leqslant x\} = n_x/n!$, где n_x — число подстановок $s \in S_n$, для которых $O_n(s) \leqslant x$. Оценивая вероятности вида $\mathsf{P}\{O_n \leqslant x\}$, мы получаем оценки чисел n_x.

Теорема 1. *При $n \to \infty$ для любого фиксированного x*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\ln O_n - \frac{1}{2}\ln^2 n}{\sqrt{\frac{1}{3}\ln^3 n}} \leqslant x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du. \qquad (2)$$

Доказательство этого результата содержит значительные технические трудности. Основные моменты доказательства состоят в следующем: вначале изучение условного распределения порядка случайной подстановки степени n при условии, что число циклов $\nu_n = N$, сводится к изучению наименьшего общего кратного независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ при условии, что $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N = n$ (лемма 1); далее, при условии, что $\zeta_N = n$, для логарифма произведения этих случайных величин методом характеристических функций устанавливается асимптотическая нормальность (лемма 7); оказывается, что условные распределения логарифма произведения и логарифма наименьшего общего кратного этих случайных величин асимптотически совпадают (лемма 8); утверждение теоремы получается усреднением условного предельного распределения $\ln O_n$ по распределению числа циклов ν_n.

Воспользуемся представлением длин циклов случайной подстановки с помощью обобщенной схемы размещения частиц. В § 7 было установлено, что если случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ имеют совместное распределение, задаваемое соотношениями

$$\mathsf{P}\{\eta_1=n_1, \ldots, \eta_N=n_N\}= \\ =\mathsf{P}\{\xi_1=n_1, \ldots, \xi_N=n_N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}, \quad (3)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением логарифмического ряда

$$\mathsf{P}\{\xi_1=k\}=-\frac{x^k}{k\ln(1-x)}, \quad 0<x<1, \quad k=1, 2, \ldots, \quad (4)$$

то

$$\mathsf{P}\{\alpha_r=m_r,\ r=1, \ldots, n \mid \nu_n=N\}= \\ =\mathsf{P}\{\mu_r(n, N)=m_r,\ r=1, \ldots, n\}, \quad (5)$$

где α_r — число циклов длины r в случайной подстановке степени n, а $\mu_r(n, N)$ — число случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$, принимающих значение r, $r=1, \ldots, n$.

Порядок подстановки равен наименьшему общему кратному длин циклов. Обозначим $a(x_1, \ldots, x_N)$ наименьшее общее кратное целых положительных чисел $x_1, \ldots, x_N$, $x_1+\ldots+x_N=n$. Случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ интерпретируются как длины упорядоченных случайным образом циклов случайной подстановки степени n, имеющей ровно N циклов, поэтому утверждение следующей леммы почти очевидно.

Лемма 1. *Для любого* x

$$\mathsf{P}\{O_n\leqslant x \mid \nu_n=N\}=\mathsf{P}\{a(\xi_1, \ldots, \xi_N)\leqslant x \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}.$$

Доказательство. Пусть y_r — число значений, равных r, среди $x_1, \ldots, x_N$, $x_1+\ldots+x_N=n$. Существует функция $b(y_1, \ldots, y_n)$ такая, что наименьшее общее кратное $a(x_1, \ldots, x_N)=b(y_1, \ldots, y_n)$. Для случайной подстановки порядок $O_n=b(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, поэтому для любого x

$$\mathsf{P}\{O_n\leqslant x \mid \nu_n=N\}=\mathsf{P}\{b(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\leqslant x \mid \nu_n=N\}. \quad (6)$$

В силу (5) и (3)

$$\mathsf{P}\{b(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\leqslant x \mid \nu_n=N\}= \\ =\mathsf{P}\{b(\mu_1(n, N), \ldots, \mu_n(n, N))\leqslant x\}= \\ =\mathsf{P}\{a(\eta_1, \ldots, \eta_N)\leqslant x\}= \\ =\mathsf{P}\{a(\xi_1, \ldots, \xi_N)\leqslant x \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}. \quad (7)$$

Утверждение леммы следует из (6) и (7).

Лемма 1 дает возможность получить предельное распределение $\ln O_n$ с помощью усреднения условного распределения $\ln a(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ при условии $\xi_1 + \ldots + \xi_N = n$ по распределению числа циклов ν_n.

В дальнейшем параметр x распределения (4) положим равным $1 - n^{-1}$. При таком выборе параметра

$$p_k = \mathsf{P}\{\xi_1 = k\} = \frac{1}{k \ln n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Для суммы $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ справедлива локальная предельная теорема 8.1: *если* $n \to \infty$, $N = \ln n + o(\ln n)$ *и* $z = k/n$, *где* k — *целые числа, то равномерно относительно* $z \geqslant z_0 > 0$

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\} = e^{-z} + o(1). \tag{9}$$

Для ζ_N потребуется еще следующая оценка.

Лемма 2. *Для любого фиксированного A существует постоянная c такая, что при $N = \ln n + a\sqrt{\ln n}$, $|a| \leqslant A$, для любого m*

$$n\mathsf{P}\{\zeta_N = m\} \leqslant c. \tag{10}$$

Доказательство. Используя (8), находим, что

$$\mathsf{P}\{\zeta_N = m\} = \frac{1}{(\ln n)^N}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \sum_{k_1 + \ldots + k_N = m} \frac{1}{k_1 \ldots k_N} =$$

$$= \frac{1}{m(\ln n)^N}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \sum_{k_1 + \ldots + k_N = m} \left(\frac{1}{k_1 \ldots k_{N-1}} + \ldots + \frac{1}{k_2 \ldots k_N}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{m(\ln n)^N} \sum_{k_1, \ldots, k_{N-1} = 1}^{m} \frac{1}{k_1 \ldots k_{N-1}} \leqslant \frac{N}{m \ln n}\left(\frac{1 + \ln m}{\ln n}\right)^{N-1}.$$

Нетрудно видеть, что при $m \geqslant 1$ функция $f(m) = m^{-1}(1 + \ln m)^{N-1}$ достигает максимума в точке $m^* = e^{N-2}$. Поэтому при $n \to \infty$, $N = \ln n + a\sqrt{\ln n}$, $|a| \leqslant A$,

$$\mathsf{P}\{\zeta_N = m\} \leqslant \frac{N}{(\ln n)^N} f(m^*) \leqslant e^{-N+2}\left(\frac{N}{\ln n}\right)^N \leqslant \frac{1}{n} e^{a^2/2 + 2 + o(1)}.$$

Докажем асимптотическую нормальность условного распределения случайной величины

$$L_N = \ln \xi_1 + \ldots + \ln \xi_N - \frac{1}{2} N \ln n$$

при условии $\zeta_N = n$. Обозначим

$$\varphi(t_1, t_2) = \mathsf{M}\exp\left\{it_1\xi_1 + it_2\left(\ln\xi_1 - \frac{1}{2}\ln n\right)\right\},$$
$$\varphi(u) = \varphi(u, 0) = \mathsf{M}e^{iu\xi_1}.$$

Положим

$$b^2 = \frac{1}{12}\ln^3 n, \quad L_N^* = b^{-1}L_N$$

и рассмотрим характеристическую функцию

$$\psi(t) = \mathsf{M}\left\{e^{itL_N^*} \mid \zeta_N = n\right\}.$$

Ясно, что

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi\mathsf{P}\{\zeta_N = n\}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it_1n}\varphi^N\left(t_1, \frac{t}{b}\right)dt_1$$

и, в силу (9) при $n \to \infty$ и $N = \ln n + o(\ln n)$,

$$\psi(t) = \frac{e}{2\pi}\int_{-\pi n}^{\pi n} e^{-iu}\varphi^N\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right)du\,(1 + o(1)). \tag{11}$$

Покажем, что для любого фиксированного t при $n \to \infty$

$$\psi(t) \to e^{-t^2/2}.$$

Для этого установим вначале ряд свойств распределения логарифмического ряда.

Лемма 3. *При $n \to \infty$, $N = \ln n + o(\ln n)$ для любых фиксированных u и t*

$$\varphi^N\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right) = \frac{1}{1 - iu}e^{-t^2/2}(1 + o(1)).$$

Доказательство. При $n \to \infty$ справедливо равенство

$$\varphi\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right) = \varphi\left(\frac{u}{n}, 0\right) + \frac{t}{b}\varphi_t'\left(\frac{u}{n}, 0\right) +$$
$$+ \frac{t^2}{2b^2}\varphi_{tt}''\left(\frac{u}{n}, 0\right) + O\left(\frac{|t|^3}{b^3}\max_{|\tau| \leqslant |t|}\left|\varphi_{ttt}'''\left(\frac{u}{n}, \frac{\tau}{b}\right)\right|\right). \tag{12}$$

Как нетрудно видеть,

$$\varphi\left(\frac{u}{n}, 0\right) = \varphi\left(\frac{u}{n}\right) = -\frac{\ln\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)e^{iu/n}\right)}{\ln n}, \tag{13}$$

и согласно (8.2) функцию $\varphi(u/n)$ можно представить в виде

$$\varphi\left(\frac{u}{n}\right)=1-\frac{\ln(1-iu)+\ln(1+\psi_1(u/n)+\psi_2(u/n))}{\ln n},$$

где

$$\psi_1(t)=\frac{1+it-e^{it}}{1/n-it},\quad \psi_2(t)=\frac{e^{it}-1}{n(1/n-it)}.$$

Для $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ справедливы оценки (8.3) и (8.4):

$$|\psi_1(t)|\leqslant|t|/2,\quad |\psi_2(t)|\leqslant 1/n.$$

Поэтому при $n\to\infty$

$$\varphi\left(\frac{u}{n}\right)=1-\frac{\ln(1-iu)}{\ln n}+O\left(\frac{|u|}{n\ln n}\right). \tag{14}$$

Оценим первую производную

$$\varphi'_t\left(\frac{u}{n},\,0\right)=i\sum_{k=1}^{\infty}p_k\left(\ln k-\frac{1}{2}\ln n\right)e^{iuk/n}. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\ln k}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k e^{iuk/n}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k e^{iuk/n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}\frac{1}{l}+O(1)\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k e^{iuk/n}+O(\ln n).$$

При $|z|<1$

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k=\int_0^z\frac{t^l\,dt}{1-t},$$

поэтому, полагая

$$z=\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{iu/n},$$

получаем, что

$$\sum_{=1}^{\infty}\frac{1}{l}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k e^{iuk/n}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_0^z\frac{t^l\,dt}{1-t}=$$

$$=-\int_0^z\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,dt=\frac{1}{2}\ln^2(1-z)=\frac{1}{2}\ln^2\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{iu/n}\right).$$

Таким образом, равномерно по u

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k e^{iuk/n} = \frac{1}{2}\ln^2\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{iu/n}\right) + O(\ln n).$$

Отсюда в силу (13) и (15) равномерно по u

$$i\varphi_t'\left(\frac{u}{n},\, 0\right) = \frac{1}{2}\left(\varphi^2\left(\frac{u}{n}\right) - \varphi\left(\frac{u}{n}\right)\right)\ln n + O(1).$$

Используя (14), находим, что равномерно по $|u| \leqslant \pi n$

$$\varphi_t'\left(\frac{u}{n},\, 0\right) = O(1+\ln(1+|u|)). \tag{16}$$

Оценим вторую производную

$$\varphi_{tt}''\left(\frac{u}{n},\, 0\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k\left(\ln k - \frac{1}{2}\ln n\right)^2 e^{iuk/n}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \ln^2 k = \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln^2 k}{k} + O(\ln n) = \frac{\ln^2 n}{3} + O(\ln n),$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \ln k = \frac{1}{2}\ln n + O(1), \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Поэтому при фиксированном u

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\left(\ln k - \frac{1}{2}\ln n\right)^2 e^{iuk/n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k\left(\ln k - \frac{1}{2}\ln n\right)^2 + O(\ln n) = \frac{1}{12}\ln^2 n + O(\ln n).$$

Поскольку при $k \geqslant n$ справедлива оценка $\left(\ln n + \ln\frac{k}{n}\right) \Big/ \left(\frac{k}{n}\ln n\right) \leqslant 2$, то найдется такая постоянная c_1, что

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} p_k\left(\ln k - \frac{1}{2}\ln n\right)^2 e^{iuk/n}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{e^{-k/n}\ln^2 k}{k\ln n} =$$

$$= \frac{\ln n}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{e^{-k/n}\left(\ln n + \ln\frac{k}{n}\right)^2\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\ln n\right)^2} \leqslant 4\ln n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k}{n^2}e^{-k/n} \leqslant c_1 \ln n.$$

Из этих оценок следует, что при фиксированном u

$$\varphi''_{tt}\left(\frac{u}{n},\ 0\right)=-\frac{1}{12}\ln^2 n+O(\ln n) \tag{17}$$

и равномерно по $|u|\leqslant\pi n$

$$\left|\varphi''_{tt}\left(\frac{u}{n},\ 0\right)\right|=O(\ln^2 n). \tag{18}$$

Наконец, найдется такая постоянная c_2, что

$$\left|\varphi'''_{ttt}\left(\frac{u}{n},\ t\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}p_k\left|\ln k-\frac{1}{2}\ln n\right|^3\leqslant c_2\ln^3 n. \tag{19}$$

Подставляя оценки (14), (16), (17) и (19) в разложение (12), находим, что для любых фиксированных u и t при $n\to\infty$

$$\varphi\left(\frac{u}{n},\ \frac{t}{b}\right)=1-\frac{\ln(1-iu)}{\ln n}-\frac{t^2}{2\ln n}+O\left(\frac{1+\ln(1+|u|)}{\ln^{3/2}n}\right)$$

и при $N=\ln n+o(\ln n)$

$$\varphi^N\left(\frac{u}{n},\ \frac{t}{b}\right)=\frac{1}{1-iu}e^{-t^2/2}+o(1).$$

Лемма 4. *Для любого $\varepsilon>0$ при $\varepsilon n\leqslant|u|\leqslant\pi n$ и любом фиксированном t, начиная с некоторого n,*

$$\left|\varphi\left(\frac{u}{n},\ \frac{t}{b}\right)\right|\leqslant\frac{1}{3}.$$

Доказательство. Как видно из (14), при $\varepsilon n\leqslant|u|\leqslant\pi n$ характеристическая функция $\varphi(u/n)\to 0$ при $n\to\infty$, кроме того,

$$\left|\varphi'_t\left(\frac{u}{n},\ \frac{t}{b}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}p_k(\ln k+\ln n)\leqslant c_3\ln n,$$

где c_3 — некоторая постоянная. Учитывая эти оценки, а также равенство $b^2=\frac{1}{12}\ln^3 n$, из соотношения

$$\varphi\left(\frac{u}{n},\ \frac{t}{b}\right)=\varphi\left(\frac{u}{n}\right)+O\left(\frac{1}{b}\max_{|\tau|\leqslant|t|}\left|\varphi'_t\left(\frac{u}{n},\ \frac{\tau}{b}\right)\right|\right)$$

находим, что $\varphi\left(\frac{u}{n},\ \frac{t}{b}\right)\to 0$ *при* $n\to\infty$ и $\varepsilon n\leqslant|u|\leqslant\pi n$.

Лемма 5. *Если* $N=\ln n+o(\ln n)$ при $n\to\infty$, *то для любого сколь угодно малого $\delta>0$ найдется такая постоян-*

ная c_4, *что для любого фиксированного* t *и* $|u| \leqslant \pi n$, *начиная с некоторого* n,

$$\left|\varphi^N\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right)\right| \leqslant c_4(1+|u|)^{-1+\delta}.$$

Доказательство. Утверждение требует доказательства лишь при больших $|u|$. Из (12) с помощью (14), (16), (18) и (19) находим, что при $|u| \leqslant \pi n$

$$\varphi\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right) = 1 - \frac{\ln(1-iu)}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(1+|u|)}{\ln^{3/2} n}\right).$$

Отсюда следует, что для любого δ, $0 < \delta < 1$, при достаточно большом $|u|$, начиная с некоторого n,

$$\left|\varphi\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{\ln(1+|u|)}{\ln n}\sqrt{1-\delta} \leqslant 1,$$

и поскольку, начиная с некоторого n, справедливо неравенство $N > \sqrt{1-\delta}\ln n$, для таких u

$$\left|\varphi\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right)\right|^N \leqslant \left(1 - \frac{\ln(1+|u|)}{\ln n}\sqrt{1-\delta}\right)^{\sqrt{1-\delta}\ln n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_4}{(1+|u|)^{1-\delta}}.$$

Лемма 6. *При любом фиксированном* t *найдутся такие постоянные* c_5 *и* $\varepsilon > 0$, *что при* $|u| \leqslant \varepsilon n$, *начиная с некоторого* n,

$$\left|\frac{1}{n}\varphi'_u\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right)\right| \leqslant \frac{c_5}{|u|\ln n}.$$

Доказательство. Положим $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = ikp_k e^{\frac{it}{b}\left(\ln k - \frac{1}{2}\ln n\right)}$, $\beta_0 = 0$, $\beta_k = e^{iuk/n}$, $B_k = \beta_0 + \ldots + \beta_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Применяя преобразования Абеля, находим, что

$$\varphi'_u\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\beta_k = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\alpha_{k-1} - \alpha_k). \tag{20}$$

Поскольку при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для $|u| \leqslant \varepsilon n$ справедливы оценки

$$|B_k| \leqslant \frac{2n}{|u|}, \quad |\alpha_k - \alpha_{k-1}| \leqslant \frac{c}{\ln n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k\ln^{3/2} n}\right),$$

из (20) получаем окончательную оценку

$$\left|\frac{1}{n}\varphi'_u\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n}\max_k |B_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{k-1} - \alpha_k| \leqslant \frac{c_5}{|u|\ln n}.$$

Лемма 7. *При $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$ условное распределение случайной величины*

$$L_N^*=\frac{1}{b}\left(\sum_{k=1}^{N}\ln\xi_k-\frac{1}{2}N\ln n\right)$$

при условии $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N=n$ слабо сходится к нормальному распределению с параметрами (0, 1).

Доказательство. Покажем, что характеристическая функция условного распределения L_N^*, равная $\psi(t)$, стремится к $\exp\{-t^2/2\}$ при любом фиксированном t. Справедливо равенство

$$e^{-t^2/2}=\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu-t^2/2}}{1-iu}\,du.$$

В силу (11) разность

$$R_N=\frac{2\pi}{e}\left(\psi(t)-e^{-t^2/2}\right)$$

при $n\to\infty$ можно представить в виде суммы четырех интегралов: $R_N=I_1+I_2+I_3+I_4+o(1)$, где

$$I_1=\int_{-A}^{A}e^{-iu}\left(\varphi^N\left(\frac{u}{n},\,\frac{t}{b}\right)-\frac{1}{1-iu}e^{-t^2/2}\right)du,$$

$$I_2=\int\limits_{A\leqslant|u|\leqslant\varepsilon n}e^{-iu}\,\varphi^N\left(\frac{u}{n},\,\frac{t}{b}\right)du,$$

$$I_3=\int\limits_{\varepsilon n\leqslant|u|\leqslant\pi n}e^{-iu}\,\varphi^N\left(\frac{u}{n},\,\frac{t}{b}\right)du,$$

$$I_4=-e^{-t^2/2}\int\limits_{A\leqslant|u|}\frac{e^{-iu}}{1-iu}\,du,$$

причем $\varepsilon>0$ таково, что справедлива лемма 4, а постоянная A будет выбрана позднее.

Согласно лемме 3 интеграл I_1 стремится к нулю при любом фиксированном A.

Согласно лемме 4 справедлива оценка $|I_3|\leqslant 2\pi n\,3^{-N}$ и в условиях леммы этот интеграл также стремится к нулю.

Для оценки I_2 и I_4 проведем интегрирование по частям. Для I_4 это приводит к равенству

$$\int_A^{\infty}\frac{e^{-iu}}{1-iu}\,du=-\frac{e^{-iu}}{i(1-iu)}\Bigg|_A^{\infty}+\int_A^{\infty}\frac{e^{-iu}}{(1-iu)^2}\,du,$$

поэтому

$$|I_4| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1+A^2}} + 2\int_A^\infty \frac{du}{1+u^2}$$

и выбором A величину $|I_4|$ можно сделать сколь угодно малой.

Аналогично,

$$\int_A^{\varepsilon n} e^{-iu}\varphi^N\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right) du = ie^{-iu}\varphi^N\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right)\Big|_A^{\varepsilon n} +$$
$$+ N\int_A^{\varepsilon n} e^{-iu}\varphi^{N-1}\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right)\frac{1}{n}\varphi_u'\left(\frac{u}{n}, \frac{t}{b}\right) du.$$

Используя оценки лемм 5 и 6, получаем, что

$$|I_2| \leqslant 2\left|\varphi\left(\frac{A}{n}, \frac{t}{b}\right)\right|^N + 2\left|\varphi\left(\varepsilon, \frac{t}{b}\right)\right|^N +$$
$$+ 2c_4c_5\frac{N}{\ln n}\int_A^\infty \frac{du}{u(1+u)^{1-\delta}}.$$

Выбором A и n величина $|I_2|$ может быть сделана сколь угодно малой, так как согласно леммам 3 и 4

$$\left|\varphi\left(\frac{A}{n}, \frac{t}{b}\right)\right|^N \leqslant \frac{c_6}{A}, \quad \left|\varphi\left(\varepsilon, \frac{t}{b}\right)\right|^N \leqslant 3^{-N},$$

и согласно лемме 5 в интеграле величину δ можно выбрать меньшей единицы.

Покажем теперь, что при условии $\xi_1 + \ldots + \xi_N = n$ наименьшее общее кратное $a(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ асимптотически имеет то же распределение, что и произведение $\xi_1 \ldots \xi_N$.

Итак, пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением (8). Положим $\varepsilon_i^{(r)} = 1$, если ξ_i делится на r, и $\varepsilon_i^{(r)} = 0$ в противном случае. Тогда число случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, кратных r, равно $g_r = \varepsilon_1^{(r)} + \ldots + \varepsilon_N^{(r)}$. Положим также $\chi(0) = 0$, $\chi(x) = 1$ при $x > 0$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \ln(\xi_1 \ldots \xi_N) &= \sum_p \sum_{\alpha=1}^\infty g_{p^\alpha} \ln p, \\ \ln a(\xi_1, \ldots, \xi_N) &= \sum_p \sum_{\alpha=1}^\infty \chi(g_{p^\alpha}) \ln p, \end{aligned} \qquad (21)$$

где суммирование по p, как обычно, означает суммирование по всем простым числам.

Для случайных величин ξ и событий A будем обозначать

$$\mathsf{P}_n(A)=\mathsf{P}\{A\,|\,\zeta_N=n\},\qquad \mathsf{M}_n\xi=\mathsf{M}\{\xi\,|\,\zeta_N=n\}.$$

Лемма 8. *Если* $n\to\infty$, $N=\ln n+a\sqrt{\ln n}$, $|a|\leqslant C<\infty$, *то*

$$\mathsf{M}_n\left(\sum_{i=1}^{N}\ln\xi_i-\ln a(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_N)\right)=O(\ln n(\ln\ln n)^2). \tag{22}$$

Доказательство. В силу (21)

$$\Delta_n=\mathsf{M}_n(\ln(\xi_1\ldots\xi_N)-\ln a(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_N))=$$
$$=\mathsf{M}_n\sum_p\sum_{\alpha=1}^{\infty}(g_{p^\alpha}-\chi(g_{p^\alpha}))\ln p\leqslant\mathsf{M}_n\sum_{r=1}^{n}(g_r-\chi(g_r))\ln r.$$

Поскольку $\mathsf{M}_n g_r=N\mathsf{P}_n\{\varepsilon_1^{(r)}=1\}$ и $\mathsf{M}_n\chi(g_r)=\mathsf{P}_n\{g_r\geqslant 1\}\geqslant\geqslant N\mathsf{P}_n\{\varepsilon_1^{(r)}=1,\ \varepsilon_2^{(r)}=\ldots=\varepsilon_N^{(r)}=0\}$, для Δ_n справедлива оценка

$$\Delta_n\leqslant N\sum_{r=1}^{n}\delta_r\ln r,$$

где $\delta_r=\mathsf{P}_n\{\varepsilon_1^{(r)}=1\}-\mathsf{P}_n\{\varepsilon_1^{(r)}=1,\ \varepsilon_2^{(r)}=\ldots=\varepsilon_N^{(r)}=0\}$.

Оценим вначале сумму $\sum\limits_{r\leqslant\ln n}\delta_r\ln r$. В силу (9) и (10)

$$\delta_r\leqslant\mathsf{P}_n\{\varepsilon_1^{(r)}=1\}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\xi_1=kr\}\frac{\mathsf{P}\{\xi_2+\ldots+\xi_N=n-kr\}}{\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c_7}{r\ln n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{kr}\leqslant\frac{c_7}{r}.$$

Отсюда следует, что

$$N\sum_{r\leqslant\ln n}\delta_r\ln r\leqslant c_7N\sum_{r\leqslant\ln n}\frac{\ln r}{r}\leqslant c_8N(\ln\ln n)^2. \tag{23}$$

Для оценки оставшейся суммы заметим, что

$$\mathsf{P}_n\{\varepsilon_1^{(r)}=1,\ \varepsilon_2^{(r)}=\ldots=\varepsilon_N^{(r)}=0\}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\xi_1=kr\}\frac{\mathsf{P}\{\xi_2+\ldots+\xi_N=n-kr,\ \varepsilon_2^{(r)}=\ldots=\varepsilon_N^{(r)}=0\}}{\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}},$$

$$\mathsf{P}\{\xi_2+\ldots+\xi_N=n-kr\}\leqslant\mathsf{P}\{\xi_2+\ldots+\xi_N=n-kr,$$
$$\varepsilon_2^{(r)}=\ldots=\varepsilon_N^{(r)}=0\}+$$
$$+N\sum_{l=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\xi_2=lr\}\mathsf{P}\{\xi_3+\ldots+\xi_N=n-kr-lr\}.$$

Поэтому для δ_r справедлива оценка

$$\delta_r \leqslant N \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\xi_1 = kr\} \mathsf{P}\{\xi_2 = lr\} \frac{\mathsf{P}\{\xi_3 + \ldots + \xi_N = n - kr - lr\}}{\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}}.$$

Отсюда с помощью (9) и (10) находим, что $\delta_r \leqslant c_9 N r^{-2}$, и, заменяя суммирование интегрированием и интегрируя по частям, легко получаем, что

$$N \sum_{\ln n \leqslant r \leqslant n} \delta_r \ln r \leqslant c_9 N^2 \sum_{\ln n \leqslant r \leqslant n} \frac{\ln r}{r^2} \leqslant c_{10} \ln n \ln \ln n. \quad (24)$$

Из (23) и (24) следует оценка (22).

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы 1. В силу леммы 1 при $N = \ln n + a\sqrt{\ln n}$

$$F_{n,N}(x) = \mathsf{P}\left\{\frac{\ln O_n - \frac{1}{2}\ln^2 n}{\sqrt{\frac{1}{3}\ln^3 n}} \leqslant x \mid \nu_n = N\right\} =$$

$$= \mathsf{P}_n\left\{\frac{\ln a(\xi_1, \ldots, \xi_N) - \frac{1}{2}\ln^2 n}{\sqrt{\frac{1}{3}\ln^3}} \leqslant x\right\} =$$

$$= \mathsf{P}_n\left\{\frac{\ln a(\xi_1, \ldots, \xi \quad - \frac{1}{2} N \ln n}{\sqrt{\frac{1}{12}\ln^{\circ} n}} \leqslant 2x - a\sqrt{3}\right\}.$$

В силу леммы 8 условное распределение случайной величины $\left(\ln a(\xi_1, \ldots, \xi_N) - \frac{1}{2} N \ln n\right)\left(\frac{1}{12}\ln^3 n\right)^{-1/2}$ асимптотически совпадает с условным распределением случайной величины L_N^*, которое получено в лемме 7. Поэтому

$$F_{n,N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2x - a\sqrt{3}} e^{-u^2/2}\, du + o(1)$$

и по формуле полной вероятности с учетом теоремы 9.1

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\ln O_n - \frac{1}{2}\ln^2 n}{\sqrt{\frac{1}{3}\ln^3 n}} \leqslant x\right\} = \sum_{N=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\nu_n = N\} F_{n,N}(x) = \Phi(x) + o(1),$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2/2}\int_{-\infty}^{2x-a\sqrt{3}} e^{-u^2/2}\,du\,da.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1, поскольку функция $\Phi(x)$ стремится к единице при $x\to\infty$ и ее производная, как нетрудно видеть, равна $(2\pi)^{-1/2}\exp\{-x^2/2\}$.

§ 12. Компоненты случайного отображения и обобщенная схема размещения

Как показано в примере 6.2, изучение множества Σ_n всех однозначных отображений с равномерным распределением вкладывается в рассмотренную в § 6 схему и может проводиться с использованием обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{b_k x^k}{k!\,B(x)},\qquad k=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где

$$B(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k x^k}{k!}=\ln A(x),\qquad A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^k x^k}{k!}$$

и, следовательно,

$$b_k=(k-1)!\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k^m}{m!}. \tag{2}$$

Параметр x распределения (1) может принимать любое значение из интервала $0<x\leqslant e^{-1}$.

Введенные в § 6 для общей схемы (рассматривающей компоненты связности случайного графа из класса графов с разложимым свойством) случайные величины α_r для случайного отображения из Σ_n равны числу компонент объема r, $r=1, 2, \ldots, n$, случайная величина ν_n равна числу компонент, а величины $\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_{\nu_n}$ представляют собой вариационный ряд объемов компонент и получаются расположением объемов компонент случайного отображения в неубывающем порядке.

Изучим предельное поведение распределений этих характеристик случайного отображения при $n\to\infty$. Исследования проводятся по общей схеме, описанной в § 6, и аналогичны исследованиям класса S_n случайных подстановок, проведенным в §§ 7—11. Прежде всего переформулируем для случайных отображений общие результаты § 6. Учитывая, что $a_n = n^n$, из леммы 6.1 получаем явное выражение для распределения случайной величины ν_n:

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{a_{n,\,N}}{a_n} = \frac{n!}{n^n N!} \sum_K \frac{b_{k_1} \ldots b_{k_N}}{k_1! \ldots k_N!},$$

где величины b_k задаются формулой (2), а суммирование проводится по области целых чисел $K = \{k_i \geqslant 1,\ i = 1, \ldots, N,\ k_1 + \ldots + k_N = n\}$.

Лемма 6.3, выражающая это распределение через вероятность, связанную с суммой случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, принимает следующий вид.

Лемма 1. *Для любого x, $0 < x \leqslant e^{-1}$, и $N = 1, 2, \ldots, n$*

$$\mathsf{P}\{\nu_n = N\} = \frac{n! \ln^N A(x)}{N!\, n^n x^n} \mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}, \tag{3}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_N$ независимы и распределены по закону (1).

Лемма 6.7 позволяет выписать для случайного отображения из Σ_n совместное распределение $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Теорема 1. *Если натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ удовлетворяют соотношению $m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n$, то*

$$\mathsf{P}\{\alpha_1 = m_1, \ldots, \alpha_n = m_n\} = \frac{n!}{n^n} \prod_{r=1}^{n} \frac{b_r^{m_r}}{m_r!\,(r!)^{m_r}},$$

в остальных случаях $\mathsf{P}\{\alpha_1 = m_1, \ldots, \alpha_n = m_n\} = 0$.

Для изучения основных характеристик случайного отображения в книге используется подход, опирающийся на связь случайных отображений с обобщенной схемой размещения частиц. Результаты, относящиеся к случайным величинам α_r и членам вариационного ряда β_m, получаются усреднением по распределению случайной величины ν_n соответствующих результатов о случайных величинах $\mu_r(n, N)$ и $\eta_{(m)}$ в обобщенной схеме размещения n частиц в N ячеек, в которой определяющие ее случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение (1).

Изучение распределения числа компонент ν_n, по которому проводится усреднение, с помощью леммы 1 сводится к оценке вероятности $\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}$, а изучение случайных величин $\mu_r(n, N)$ и членов вариационного ряда в обобщенной схеме размещения с помощью лемм 2.1, 2.2, 2.3 также сводится к задачам о суммах независимых случайных величин. Поэтому вначале докажем играющие вспомогательную роль локальные предельные теоремы для суммы $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$ и сумм вида $\zeta_N^{(A)}=\xi_1^{(A)}+\ldots+\xi_N^{(A)}$, в которых $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением (1), параметр x в этом распределении равен $(1-n^{-1/2})\exp\{-1+n^{-1/2}\}$, и $\xi_1^{(A)}, \ldots, \xi_N^{(A)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(A)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k \mid \xi_1 \notin A\},$$

где для множества натуральных чисел A вероятность $\mathsf{P}\{\xi_1 \notin A\}>0$.

Выбор значения $x=(1-n^{-1/2})\exp\{-1+n^{-1/2}\}$ для параметра распределения (1) объясняется тем, что, как будет ясно из дальнейшего, среднее значение числа компонент ν_n при $n \to \infty$ имеет порядок $\frac{1}{2}\ln n$ и для изучения класса случайных отображений нужно изучать обобщенную схему размещения n частиц в N ячеек, для которой параметр N имеет порядок $\frac{1}{2}\ln n$; при таком N и $x=(1-n^{-1/2})\times$ $\times\exp\{-1+n^{-1/2}\}$ среднее значение $\mathsf{M}\zeta_N$ имеет порядок n и значение суммы ζ_N, при котором требуется оценка вероятности $\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}$, не выходит в область больших уклонений. Итак, всюду в дальнейшем параметр x распределения (1) положим равным

$$x=(1-n^{-1/2})\exp\{-1+n^{-1/2}\}.$$

Лемма 2. *Характеристическая функция распределения* (1) *равна*

$$\varphi(t)=-\frac{\ln((1-\theta(xe^{it}))^2)}{\ln n},$$

где $\theta(w)$ *при* $|w| \leqslant e^{-1}$ *задается рядом* $\theta(w)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}w^k}{k!}$.

Доказательство. Характеристическая функция $\varphi(t)$ распределения (1) равна

$$\varphi(t)=\frac{B(xe^{it})}{B(x)}=\frac{\ln A(xe^{it})}{\ln A(x)}. \tag{4}$$

Как легко видеть, функции $\theta(w)$ и $A(w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^k w^k}{k!}$ связаны соотношением

$$A(w)-1=w\theta'(w). \tag{5}$$

Функция $\theta(w)$ является решением уравнения
$$\theta e^{-\theta} = w \tag{6}$$
в круге $|w| \leqslant e^{-1}$. Поэтому
$$w\theta'(w) = \theta(w)/(1-\theta(w)) \tag{7}$$
и из (5) следует, что
$$A(w) = \frac{1}{1-\theta(w)}. \tag{8}$$

Учитывая (6), при $x = (1-n^{-1/2})\exp\{-1+n^{-1/2}\}$ находим, что $\theta(x) = 1-n^{-1/2}$. Поэтому, как следует из (4) и (8), $\varphi(t)$ имеет указанный в лемме вид.

Лемма 3. *Справедливо представление*
$$(1-\theta(xe^{it}))^2 = 1/n - 2it + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(n, t), \tag{9}$$
где $\varepsilon_1(t)/t \to 0$ *при* $t \to 0$ *равномерно относительно* n *и* $|\varepsilon_2(n, t)| \leqslant 2|t|/\sqrt{n}$.

Доказательство. Функция $u(w) = (1-\theta(w))^2$ представима в виде ряда
$$u(w) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-2}w^k}{k!}. \tag{10}$$

Действительно, в силу (7) $u'(w) = -2\theta(w)/w$; записывая правую часть в виде степенного ряда и интегрируя это равенство, приходим к (10). Представим $u(w)$ в виде
$$u(xe^{it}) = u(e^{-1+it}) + \frac{1}{n} + \varepsilon_2(n, t). \tag{11}$$

Поскольку $\theta(x) = 1-n^{-1/2}$ и $\theta(e^{-1}) = 1$, справедливо равенство $u(e^{-1}) - u(x) = -1/n$. Учитывая это равенство и замечая, что $x < e^{-1}$, приходим к оценкам
$$|\varepsilon_2(n, t)| = \left|u(xe^{it}) - u(e^{-1+it}) - \frac{1}{n}\right| =$$
$$= 2\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-2}(e^{-k}-x^k)(e^{itk}-1)}{k!}\right| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}(e^{-k}-x^k)|t|}{k!} =$$
$$= 2|t|(\theta(e^{-1}) - \theta(x)) = 2|t|/\sqrt{n}. \tag{12}$$

Функция $u(e^{-1+it})$ в точке $t=0$ имеет производную по t, равную $-2i$, поэтому равномерно относительно n при $t \to 0$
$$u(e^{-1+it}) = -2it + o(t). \tag{13}$$
Утверждение леммы следует из (11), (12) и (13).

Лемма 4. *Если $n \to \infty$ и $N = \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$, то при любом фиксированном t*

$$\varphi^N\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2it}} + o(1).$$

Это утверждение прямо следует из леммы 2 и оценки (9).

Лемма 5. *Если $n \to \infty$ и $N = \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$, то для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся такие положительные c и ε, что для $|t/n| \leqslant \varepsilon$*

$$\left|\varphi^N\left(\frac{t}{n}\right)\right| \leqslant c\,|t|^{-(1-\delta)/2}.$$

Доказательство. Из (9) следует, что найдется такое ε, что, начиная с некоторого n, для всех $|\tau| \leqslant \varepsilon$

$$|1 - \theta(xe^{i\tau})|^2 \geqslant |\tau|. \tag{14}$$

Поэтому при $|t/n| \leqslant \varepsilon$

$$\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| = \left|1 - \frac{\ln(n(1-\theta(xe^{it/n}))^2)}{\ln n}\right| \leqslant 1 - \frac{\ln|t|}{\ln n} + \frac{2\pi}{\ln n}.$$

Для ограниченных значений $\ln|t|$, например, при $\ln|t| \leqslant 2\pi$ указанная в лемме оценка справедлива. Для доказательства этой оценки при $\ln|t| > 2\pi$ заметим, что $N > \frac{1-\delta}{2}\ln n$ для любого $\delta > 0$ при $n \geqslant n(\delta)$, поэтому найдется такое c, что, начиная с некоторого n, при $|t/n| \leqslant \varepsilon$, $\ln|t| > 2\pi$

$$\left|\varphi^N\left(\frac{t}{n}\right)\right| \leqslant \left(1 - \frac{\ln|t| - 2\pi}{\ln n}\right)^{\frac{1-\delta}{2}\ln n} \leqslant c\,|t|^{\frac{-(1-\delta)}{2}}.$$

Лемма 6. *Найдутся такие положительные постоянные ε и c, что при $|t/n| \leqslant \varepsilon$, начиная с некоторого n,*

$$\left|\frac{1}{n}\varphi'\left(\frac{t}{n}\right)\right| < \frac{c}{|t|\ln n}.$$

Доказательство. Используя явный вид характеристической функции $\varphi(t)$ и равенство (8), находим, что

$$\varphi'(t) = -\frac{2i\theta(xe^{it})}{(1-\theta(xe^{it}))^2\ln n},$$

откуда с помощью оценки (14) получаем указанное в лемме неравенство.

Лемма 7. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная c, что при $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$*

$$|\varphi(t)| \leqslant c/\ln n.$$

Доказательство. Характеристическую функцию $\varphi(t)$ можно представить в виде

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\ln n}\left(\ln\left(\theta(x) - \theta(xe^{it}) + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right). \qquad (15)$$

При любом фиксированном положительном $z \leqslant e^{-1}$ функция $\psi(t) = \theta(ze^{it})/\theta(z)$ является характеристической функцией целочисленного распределения с максимальным шагом, равным единице, и, следовательно, $\theta(ze^{it}) - \theta(z) \neq 0$, если $0 < \varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$. В силу непрерывности найдутся такие c_1 и c_2, что в области $\frac{1}{2}e^{-1} \leqslant z \leqslant e^{-1}$, $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$

$$0 < c_1 \leqslant |\theta(ze^{it}) - \theta(z)| \leqslant c_2.$$

Учитывая эту оценку, из (15) получаем указанное в лемме неравенство.

Как следует из леммы 4, при $n \to \infty$ и $N = \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$ распределения нормированных сумм ζ_N/n сходятся к распределению с характеристической функцией $(1-2it)^{-1/2}$, плотность которого равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2}.$$

В действительности имеет место локальное сближение этих распределений.

Теорема 2. *Если $n \to \infty$, $N = \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$, $z = k/n$, где k — натуральные числа, то равномерно относительно $z \geqslant z_0 > 0$*

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2} + o(1).$$

Доказательство этой теоремы проводится с помощью лемм 4, 5, 6 и 7 точно так же, как доказательство теоремы 8.1. Аналогично доказывается и локальная предельная теорема для суммы $\zeta_N^{(r_1, \ldots, r_s)}$, где $r_1, \ldots, r_s$ — различные фиксированные натуральные числа.

Теорема 3. *Если $n \to \infty$, $N = \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$ и $z = k/n$, где k — натуральные числа, то равномерно* *относительно* $z \geqslant z_0 > 0$

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N^{(r_1,\ldots,r_s)}=z\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^{-z/2}+o(1).$$

Применим теоремы 2 и 3 для изучения характеристик случайного отображения.

Теорема 4. *При* $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\{\nu_n=N\}=\frac{1}{\sqrt{\pi\ln n}}e^{-\frac{\left(N-\frac{1}{2}\ln n\right)^2}{\ln n}}(1+o(1))$$

равномерно относительно целых N, *для которых* $\left(N-\frac{1}{2}\ln n\right)(\ln n)^{-7/12}$ *лежит в любом конечном интервале.*

Доказательство. Используя теорему 2 и учитывая, что

$$x^n=((1-n^{-1/2})\exp\{-1+n^{-1/2}\})^n=e^{-n-1/2}(1+o(1)),$$
$$n!/n^n=\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}(1+o(1))$$

и согласно (6) и (8)

$$\theta(x)=1-n^{-1/2},\quad A(x)=(1-\theta(x))^{-1}=\sqrt{n},$$

из равенства (3) леммы 1 находим, что равномерно относительно $\left(N-\frac{1}{2}\ln n\right)(\ln n)^{-7/12}$ в любом конечном интервале

$$\mathsf{P}\{\nu_n=N\}=$$
$$=\frac{n!\ln^N A(x)\,\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}{N!n^nx^n}=\frac{1}{N!}\left(\frac{1}{2}\ln n\right)^N e^{-\frac{1}{2}\ln n}(1+o(1)).$$

Отсюда с помощью нормального приближения для распределения Пуассона с растущим параметром $\frac{1}{2}\ln n$ получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим совместное распределение случайных величин $\alpha_{r_1},\ldots,\alpha_{r_s}$, где $r_1,\ldots,r_s$ — различные натуральные числа.

Теорема 5. *Для любых целых неотрицательных* $k_1,\ldots,k_s$ *при* $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\{\alpha_{r_1}=k_1,\ldots,\alpha_{r_s}=k_s\}=$$
$$=\frac{\lambda_{r_1}^{k_1}\ldots\lambda_{r_s}^{k_s}}{k_1!\ldots k_s!}\exp\{-\lambda_{r_1}-\ldots-\lambda_{r_s}\}+o(1),$$

где

$$\lambda_r = \frac{e^{-r}}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{r^k}{k!}.$$

Доказательство. Проведем доказательство в случае $s=1$. Согласно лемме 6.4

$$\mathsf{P}\{\alpha_r = k\} = \sum_{N=1}^{n} \mathsf{P}\{\nu_n = N\} \mathsf{P}\{\mu_r(n, N) = k\}. \tag{16}$$

В силу теорем 2 и 3 при $n \to \infty$ и $N = \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$ для любых фиксированных r и k

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\}/\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} = 1 + o(1),$$

кроме того, в силу (1), (2) и равенства $B(x) = \frac{1}{2}\ln n$

$$p_r = \mathsf{P}\{\xi_1 = r\} = \frac{b_r x^r}{r! B(x)} = \frac{2\lambda_r}{\ln n}(1 + o(1)), \tag{17}$$

где

$$\lambda_r = \frac{e^{-r}}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{r^k}{k!}.$$

Поэтому согласно лемме 2.1 при $n \to \infty$, $N = \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, \mathrm{N}) = k\} = \frac{\lambda_r^k}{k!} e^{-\lambda_r} + o(1), \tag{18}$$

поскольку $Np_r = \lambda_r + o(1)$ и биномиальное распределение сближается с распределением Пуанссона с параметром λ_r.

Равенство (7) выполняется равномерно относительно целых N, для которых $\left(N - \frac{1}{2}\ln n\right)(\ln n)^{-7/12}$ лежит в любом конечном интервале, поэтому, применяя теорему 4, из (16) и (18) получаем утверждение теоремы 5.

§ 13. Вариационный ряд компонент случайного отображения

Для изучения членов вариационного ряда $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n\nu}$, построенного из объемов компонент случайного отображения, воспользуемся леммой 2.2. Оценим входящие в равенства (2.6) и (2.7) суммы вида $\zeta_l^{(\bar{A}_r)} + \zeta_{N-l}^{(A_r)}$, где A_r—множество натуральных чисел, не превосходящих r, и $\bar{A}_r$ —

его дополнение в множестве всех натуральных чисел, а случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение (12.17) с параметром $x=(1-n^{-1/2})\exp\{-1+n^{-1/2}\}$. Обозначим $\varphi_{(r)}(t)$ характеристическую функцию случайной величины $\xi_1^{(A_r)}$, равную

$$\varphi_{(r)}(t)=\left(\varphi(t)-\sum_{k=1}^{r} p_k e^{itk}\right)\Big/\left(1-\sum_{k=1}^{r} p_k\right),$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1, которая согласно лемме 12.2 равна

$$\varphi(t)=-\frac{2\ln(1-\theta(xe^{it}))}{\ln n}.$$

Обратимся вначале к случаю $r=\exp\{\alpha\ln n+t\sqrt{\ln n}\}$, $0<\alpha<1$.

Лемма 1. *Если* $n\to\infty$, $r=\exp\{\alpha\ln n+t\sqrt{\ln n}\}$, $0<\alpha<1$, *то равномерно относительно* t *в любом конечном интервале*

$$\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}=\alpha+\frac{t}{\sqrt{\ln n}}+O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Доказательство. При $n\to\infty$ равномерно относительно k, $1\leqslant k\leqslant r$,

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k e^{k/\sqrt{n}}=1+O\left(\frac{r}{n}\right),$$

поэтому, вводя обозначение

$$\Lambda_r=\sum_{k=1}^{r}\frac{b_k e^{-k}}{k!}$$

и учитывая равенство $B(x)=\frac{1}{2}\ln n$, получаем, что

$$\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}=\sum_{k=1}^{r} p_k=\frac{2}{\ln n}\Lambda_r\left(1+O\left(\frac{r}{n}\right)\right).$$

Поскольку равномерно по k, $1\leqslant k\leqslant r$,

$$\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k^m e^{-k}}{m!}=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

для Λ_r при $r\to\infty$ получаем оценку

$$\Lambda_r=\sum_{k=1}^{r}\frac{b_k e^{-k}}{k!}=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k^m e^{-k}}{m!}=\frac{1}{2}\ln r+O(1).$$

Отсюда следует, что равномерно относительно t в любом конечном интервале

$$\mathsf{P}\{\xi_1 \leqslant r\} = \frac{\ln r}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) = \alpha + \frac{t}{\sqrt{\ln n}} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Лемма 2. *Если* $n \to \infty$, $r = \exp\{\alpha \ln n + o(\ln n)\}$, $l = \frac{1-\alpha}{2} \ln n + o(\ln n)$, $0 < \alpha < 1$, *то при любом фиксированном* t

$$\varphi_{(r)}^l\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2it}} + o(1).$$

Доказательство. Из леммы 12.3 следует, что при любом фиксированном t и $n \to \infty$

$$\varphi\left(\frac{t}{n}\right) = 1 - \frac{\ln(1-2it)}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{1}$$

Так же, как в лемме 1, находим, что при $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{r} p_k e^{itk/n} = \frac{2\Lambda_r}{\ln n}\left(1 + O\left(\frac{r}{n}\right)\right) = \alpha + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right). \tag{2}$$

Используя оценки (1) и (2), находим, что для любого фиксированного t при выполнении условий леммы

$$\varphi_{(r)}^l\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1 - \frac{\ln(1-2it)}{\ln n} - \frac{2\Lambda_r}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)^l \left(1 - \frac{2\Lambda_r}{\ln n} + \right.$$
$$\left. + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)^{-l} = \left(1 - \frac{\ln(1-2it)}{(1-\alpha)\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)^l = \frac{1}{\sqrt{1-2it}} + o(1).$$

Из леммы 2 следует, что распределение нормированных сумм $\zeta_l^{(A_r)}/n$ при $n \to \infty$, $r = \exp\{\alpha \ln n + o(\ln n)\}$, $l = \frac{1-\alpha}{2} \ln n + o(\ln n)$ слабо сходится к распределению с плотностью $(2\pi z e^z)^{-1/2}$. Следуя доказательству теоремы 12.2, можно показать, что для $\zeta_l^{(A_r)}/n$ справедлива локальная предельная теорема.

Теорема 1. *Если* $n \to \infty$, $r = \exp\{\alpha \ln n + o(\ln n)\}$, $l = \frac{1-\alpha}{2} \ln n + o(\ln n)$, $0 < \alpha < 1$, *и* $z = \frac{k}{n}$, *где* k — *натуральные числа, то равномерно относительно* $z \geqslant z_0 > 0$

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_l^{(A_r)} = z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-z/2} + o(1).$$

Как и в § 8, для $\zeta_l^{(A_r)}/n$ потребуется более грубая оценка, справедливая для всех $l < n$.

Лемма 3. *Если* $l<n$ *и* $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$, $0<\alpha<1$, *то найдется такая постоянная* c, *что, начиная с некоторого* n,

$$\mathsf{P}\{\zeta_l^{(A_r)}=n\}\leqslant\frac{cl^2}{n\ln n}.$$

Доказательство. Поскольку

$$\{\zeta_l^{(A_r)}=n\}=\bigcup_{i=1}^{l}\ \bigcup_{k\geqslant[n/l]}\{\xi_i^{(A_r)}=k,\ \zeta_l^{(A_r)}=n\},$$

то, с учетом убывания p_k с ростом k,

$$\mathsf{P}\{\zeta_l^{(A_r)}=n\}\leqslant l\sum_{k\geqslant[n/l]}\mathsf{P}\{\xi_1^{(A_r)}=k\}\,\mathsf{P}\{\zeta_{l-1}^{(A_r)}=n-k\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{lp_{[n/l]}}{1-\sum\limits_{k=1}^{r}p_k}\sum_{k\geqslant[n/l]}\mathsf{P}\{\zeta_{l-1}^{(A_r)}=n-k\}\leqslant\frac{lp_{[n/l]}}{1-\sum\limits_{k=1}^{r}p_k}.$$

Учитывая явное выражение (12.17) для $p_{[n/l]}$ и оценку леммы 1, приходим к утверждению леммы 3.

Рассмотрим теперь суммы $\zeta_l^{(A_r)}+\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_r)}$ при $r=\gamma n$, $0<\gamma<1$. Введем функцию

$$F(\gamma,t)=\frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\infty}\frac{1}{u}e^{-(1-2it)u/2}\,du,\quad F(\gamma,0)=F(\gamma),$$

где $\gamma>0$ и t и u — действительные переменные.

Оценим вначале

$$R_{\gamma n}(t)=\sum_{k>\gamma n}\frac{b_kx^k}{k!}e^{\frac{itk}{n}},$$

где $x=(1-n^{-1/2})\exp\{-1+n^{-1/2}\}$.

Лемма 4. *Для любого фиксированного* γ, $0<\gamma<1$, *при* $n\to\infty$

$$R_{\gamma n}(t)=F(\gamma,t)+o(1). \tag{3}$$

Доказательство. Равномерно относительно $k>\gamma n$

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k e^{k/\sqrt{n}}=e^{-k/2n}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

$$\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k^me^{-k}}{m!}=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Поэтому при $n\to\infty$

$$R_{\gamma n}(t)=\sum_{k>\gamma n}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k\exp\left\{\frac{k}{\sqrt{n}}+\frac{itk}{n}\right\}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k^m e^{-k}}{m!}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k>\gamma n}\frac{1}{k}e^{-(1-2it)k/2n}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\gamma}^{\infty}\frac{1}{u}e^{-(1-2it)u/2}\,du+o(1)=F(\gamma,\,t)+o(1).$$

В частности, для хвоста распределения (12.17) при $n\to\infty$ получаем оценку

$$\mathsf{P}\{\xi_1>\gamma n\}=\frac{1}{B(x)}\sum_{k>\gamma n}\frac{b_k x^k}{k!}=\frac{2R_{\gamma n}(0)}{\ln n}=\frac{2F(\gamma)+o(1)}{ln\, n}. \qquad (4)$$

Обозначим

$$H_m(z,\gamma)=\int\limits_{X(m,z,\gamma)}\frac{dx_1\ldots dx_m}{x_1\ldots x_m\sqrt{z-x_1-\ldots-x_m}}, \qquad (5)$$

где $X(m,\,z,\,\gamma)=\{x_i\geqslant\gamma,\ \ i=1,\,\ldots,\,m,\ \ x_1+\ldots+\ \ _i<z\}$, $m=1,\,2,\,\ldots$, при $m=0$ положим $H_0(z,\,\gamma)=1$.

Теорема 2. *Если $n\to\infty$, $N=\frac{1}{2}\ln n+o(\ln n)$, l - фиксированное натуральное число, $z=k/n$, где k — натуральные числа, то равномерно относительно $z\geqslant z_0>0$*

$$n\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}(\zeta_l^{(A_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_{\gamma n})})=z\right\}=f_{l,\gamma}(z)+o(1),$$

где

$$f_{l,\gamma}(z)=\frac{e^{-z/2+F(\gamma)}}{\sqrt{2\pi}F^l(\gamma)}\sum_{m\geqslant l}\frac{(-1)^{m-l}}{2^m(m-l)}H_m(z,\,\gamma). \qquad)$$

Доказательство. Характеристическая функция слагаемого суммы $\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_{\gamma n})}/n$ равна

$$f_1(t)=\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-\frac{2}{\ln n}R_{\gamma n}(t)\right)\left(1-\frac{2}{\ln n}R_{\gamma n}(0)\right)^{-1}.$$

Используя оценки (1), (3) и (4), находим, что при $n\to\infty$

$$f_1(t)=\left(1-\frac{\ln(1-2it)-2F(\gamma,\,t)+o(1)}{\ln n}\right)\left(1-\frac{2F(\gamma)+o(1)}{\ln n}\right)^{-1},$$

откуда следует, что для любого фиксированного l при

$n \to \infty$ и $N = \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$

$$f_1^{N-l}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2it}} e^{-F(\gamma, t)+F(\gamma)} + o(1).$$

Характеристическая функция слагаемого суммы $\zeta_l^{(A_{\gamma n})}/n$ равна $f_2(t) = R_{\gamma n}(t)/R_{\gamma n}(0)$, и при $n \to \infty$

$$f_2(t) = F(\gamma, t)/F(\gamma) + o(1).$$

Поэтому характеристическая функция $\varphi_{l, \gamma}^{(n)}(t)$ суммы $(\zeta_l^{(A_{\gamma n})} + \zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})})/n$ для любого фиксированного l при $n \to \infty$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi_{l, \gamma}^{(n)}(t) = \varphi_{l, \gamma}(t) + o(1),$$

где

$$\varphi_{l, \gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2it}} \left(\frac{F(\gamma, t)}{F(\gamma)} \right)^l e^{-F(\gamma, t)+F(\gamma)}.$$

Поскольку $F(\gamma, t)/F(\gamma)$ является характеристической функцией распределения с плотностью

$$f(u) = \frac{1}{2uF(\gamma)} e^{-u/2},$$

сосредоточенного на полуоси $u \geqslant \gamma$, точно так же, как в доказательстве теоремы 8.4, убеждаемся, что характеристической функции $\varphi_{l, \gamma}(t)$ соответствует плотность $f_{l, \gamma}(z)$, определенная равенством (6), и распределение суммы $(\zeta_l^{(A_{\gamma n})} + \zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})})/n$ слабо сходится к распределению с плотностью (6).

Далее доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 8.1, так как для $\varphi_{l, \gamma}(t)$ справедлива формула обращения и для характеристической функции слагаемого суммы $\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}/n$ справедливы утверждения лемм 12.5, 12.6 и 12.7.

Применим полученные результаты к исследованию вариационного ряда $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\nu_n}$. Из теоремы 12.5 и тождества

$$\mathsf{P}\{\beta_m \leqslant r\} = \mathsf{P}\{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r \geqslant m\}$$

вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любых фиксированных натуральных чисел* r *и* m *при* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\beta_m \leqslant r\} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\Lambda_r^k e^{-\Lambda_r}}{k!} + o(1),$$

где $\Lambda_r = \lambda_1 + \ldots + \lambda_r$, $\lambda_k = \frac{e^{-k}}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k^m}{m!}$, $k = 1, 2, \ldots$

Теорема 4. *При* $n \to \infty$ *и* $m = \frac{1}{2}\alpha \ln n + o(\ln n)$, $0 < \alpha < 1$,

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\ln \beta_m - 2m}{2\sqrt{m}} \leqslant t\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du + o(1).$$

Доказательство. Рассмотрим вероятность

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\ln \beta_m - \alpha \ln n}{\sqrt{2\alpha \ln n}} \leqslant t\right\} = \mathsf{P}\{\beta_m \leqslant r\},$$

где $r = \exp\{\alpha \ln n + t\sqrt{2\alpha \ln n}\}$. Чтобы оценить $\mathsf{P}\{\beta_m \leqslant r\}$, найдем асимптотику $\mathsf{P}\{\eta_{(m)} \leqslant r\}$ и усредним полученный результат по распределению ν_n. Воспользуемся равенством (2.6) леммы 2.2. Положим $N = \frac{1}{2}\ln n + s\sqrt{\frac{1}{2}\ln n}$, где $|s| \leqslant (\ln n)^{1/12}$, и разобьем область суммирования по l на две части:

$$L_1 = \left\{0 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}\alpha \ln n - \sqrt{2}\,(\ln n)^{7/12}\right\},$$

$$L_2 = \left\{\frac{1}{2}\alpha \ln n - \sqrt{2}\,(\ln n)^{7/12} < l \leqslant m - 1\right\}.$$

Поскольку $\zeta_l^{(\bar{A}_r)} \leqslant lr$ и $|s| \leqslant (\ln n)^{1/12}$, согласно лемме 3

$$\mathsf{P}\{\zeta_l^{(\bar{A}_r)} + \zeta_{N-l}^{(A_r)} = n\} \leqslant \frac{c \ln n}{n}$$

и согласно теореме 12.2

$$n\mathsf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2} + o(1).$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\{\zeta_l^{(\bar{A}_r)} + \zeta_{N-l}^{(A_r)} = n\} / \mathsf{P}\{\zeta_N = n\} \leqslant c \ln n.$$

Используя нормальное приближение для хвоста биномиального распределения и учитывая, что согласно лемме 1

$$1-P_r=\mathsf{P}\{\xi_1\leqslant r\}=\alpha+t\sqrt{\frac{2\alpha}{\ln n}}+O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

получаем оценку

$$\sum_{l\in L_1} C_N^l(1-P_r)^l P_r^{N-l}\frac{\mathsf{P}\{\zeta_l^{(\bar{A}r)}+\zeta_{N-l}^{(Ar)}=n\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}\leqslant\frac{c\ln n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-y}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

где $y=(2(\ln n)^{1/12}+\alpha s+t\sqrt{\alpha})/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$. Ясно, что правая часть неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$.

В области L_2 в силу теоремы 12.2 и теоремы 1

$$\mathsf{P}\{\zeta_l^{(\bar{A}r)}+\zeta_{N-l}^{(Ar)}=n\}/\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}=1+o(1)$$

равномерно относительно $l\in L_2$ и $|s|\leqslant(\ln n)^{1/12}$. Поэтому, используя нормальное приближение для биномиального распределения, находим, что

$$1-\sum_{l\in L_2} C_N^l(1-P_r)^l P_r^{N-l}\frac{\mathsf{P}\{\zeta_l^{(\bar{A}r)}+\zeta_{N-l}^{(Ar)}=n\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}=$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-z}e^{-u^2/2}\,du+o(1),$$

где $z=(\alpha s+t\sqrt{\alpha})/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$. Используя теорему 12.4 при усреднении по распределению ν_n, получаем, что

$$\mathsf{P}\{\beta_m\leqslant r\}=\sum_{N=1}^{n}\mathsf{P}\{\nu_n=N\}\mathsf{P}\{\eta_{(m)}\leqslant r\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2/2}\int_{-\infty}^{z}e^{-u^2/2}\,du\,ds+o(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-u^2/2}\,du+o(1).$$

Теорема доказана.

Для случайных величин β_{ν_n-m+1} справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *При $n\to\infty$, $0<\gamma<1$, для любого фиксированного натурального m*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\beta_{\nu_n-m+1}\leqslant\gamma\right\}=\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{l\leqslant s<1/\gamma}\frac{(-1)^{s-l}}{2^{s-l}}C_s^l H_s(1,\gamma)+o(1),$$

где функция $H_s(z,\gamma)$ определена равенством (5).

Доказательство. Рассмотрим распределение $\eta_{(N-m+1)}$. Согласно равенству (2.7) леммы 2.2 при $0<\gamma<1$, $r=\gamma n$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{(N-m+1)}\leqslant\gamma\right\}=\\ =\sum_{l=0}^{m-1} C_N^l P_r^l (1-P_r)^{N-l}\frac{\mathbf{P}\{\zeta_l^{(A_r)}+\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_r)}=n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}}. \quad (7)$$

При $n\to\infty$ и $N=\frac{1}{2}\ln n+o(\ln n)$ согласно теореме 12.2

$$n\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2}+o(1)$$

и согласно теореме 2

$$n\mathbf{P}\{\zeta_l^{(A_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_{\gamma n})}=n\}=\\ =\frac{e^{-1/2+F(\gamma)}}{\sqrt{2\pi}\,F^l(\gamma)}\sum_{s\geqslant l}\frac{(-1)^{s-l}}{2^s(s-l)!}H_s(1,\ \gamma)+o(1).$$

Кроме того, в силу (4)

$$P_r=\mathbf{P}\{\xi_1>\gamma n\}=\frac{2F(\gamma)+o(1)}{\ln n}$$

и, следовательно,

$$(1-P_r)^{N-l}=e^{-F(\gamma)}+o(1).$$

Подставляя эти выражения в (7) и учитывая, что $H_s(1,\gamma)=0$ при $s\geqslant 1/\gamma$, приходим к соотношению

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{(N-m+1)}\leqslant\gamma\right\}=\sum_{l=0}^{m-1}\ \sum_{l\leqslant s<1/\gamma}\frac{(-1)^{s-l}}{2^{s-l}}C_s^l H_s(1,\gamma)+o(1).$$

Это соотношение выполняется равномерно относительно $\left(N-\frac{1}{2}\ln n\right)(\ln n)^{-7/12}$ в любом конечном интервале, поэтому, усредняя по распределению ν_n, получаем утверждение теоремы.

В частности,

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\beta_{\nu_n}\leqslant\gamma\right\}=\sum_{0\leqslant s<1/\gamma}\frac{(-1)^s}{2^s}H_s(1,\ \gamma)+o(1)$$

и при $1/2 < \gamma \leqslant 1$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\beta_{\nu_n} \leqslant \gamma\right\} = 1 - \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}} + o(1) = \\ = 1 - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\gamma}}{1-\sqrt{1-\gamma}} + o(1). \quad (8)$$

§ 14. Дополнения и литературные ссылки

Определения изучаемых комбинаторных объектов приводятся в книге, однако для читателя желательно более широкое знакомство с основными понятиями комбинаторного анализа. Такое знакомство можно получить с помощью посвященных этому разделу математики монографий [62, 63, 73], в которых содержатся используемые нами определения комбинаторных объектов.

В гл. I развивается подход, использовавшийся для изучения случайных подстановок в гл. 7 книги [36]. Рассматриваемая в § 2 обобщенная схема размещения частиц впервые была введена в статье [27]. Естественность обобщенной схемы размещения частиц подтверждается появлением статей [88—91], автор которых также пришел к необходимости использования этой схемы. Некоторые примеры применения обобщенной схемы размещения частиц, описанные в § 3, рассмотрены в [88]. Связь объемов деревьев в случайном лесе из $F_{n,N}$ с обобщенной схемой размещения частиц, описанная в примере 3.4, использовалась в статьях Ю. Л. Павлова [48—54].

В § 4 излагаются известные сведения о локальных предельных теоремах для сумм независимых одинаково распределенных целочисленных слагаемых [15, 55]. Теорема 4.2 доказана Б. В. Гнеденко [14, 15]. Различные варианты локальной теоремы о сходимости к нормальному распределению для сумм целочисленных слагаемых в схеме серий содержатся в [42, 43, 65, 72].

Результаты § 5 о кратностях вершин случайного отображения из Σ_n представляют собой прямое использование соответствующих результатов классической схемы размещения n частиц в n ячеек [36]. Метод получения этих результатов опирается на возможность сведения задачи к изучению сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, впервые отмеченную в [27] и использованную в [36].

Содержащееся в лемме 6.2 соотношение $A(x)=\exp B(x)$, доказанное для производящей функции $A(x)$ чисел всех графов с n вершинами и производящей функции $B(x)$ связных графов с n вершинами, обладающих разложимым свойством R, часто встречается в перечисленных задачах комбинаторного анализа. Обзор попыток сформулировать общие условия справедливости такого соотношения содержится в [13]. Примеры 6.1 и 6.2 подробно рассмотрены в статьях [28, 30], а пример 6.4 в статьях [48—54].

Результаты §§ 7, 8 и 9 содержатся в [36]. Литература, посвященная симметрической группе подстановок S_n, практически необозрима. Вероятностный подход к исследованию свойств множества S_n подстановок растущей степени n впервые был использован В. Л. Гончаровым [16, 17]. С помощью производящей функции (7.3) В. Л. Гончаровым получены основные результаты о предельном поведении случайных величин, связанных с цикловым строением случайной подстановки. В статье [17] приведено доказательство интегральной теоремы о сходимости распределения числа циклов ν_n случайной подстановки при $n\to\infty$ к нормальному распределению с параметрами $(\ln n, \ln n)$, показано, что при этом $\mathsf{M}\nu_n=\ln n+c+o(1)$, где c — постоянная Эйлера; для числа α_r циклов длины r доказана предельная теорема о сходимости к распределению Пуассона с параметром $1/r$ (теорема 9.2). В этой же статье найдено предельное распределение максимального члена β_{ν_n} вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки из S_n.

Несмотря на то, что цикловое строение случайной подстановки было достаточно полно изучено В. Л. Гончаровым, эта тематика до сих пор продолжает привлекать внимание исследователей. Красивый подход к изучению множества S_n случайных подстановок реализован в статье [112]. Пусть μ_r, $r=1, \ldots, n$,— независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона, и $\mathsf{M}\mu_r=\theta^r/r$, где θ — некоторый положительный параметр. Тогда

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\alpha_r=m_r,\ r=1,\ \ldots,\ n\}=\\&=\mathsf{P}\{\mu_r=m_r,\ r=1,\ \ldots,\ n\,|\,\mu_1+2\mu_2+\ldots+n\mu_n=n\}.\qquad(1)\end{aligned}$$

Действительно, пусть целые неотрицательные $m_1, \ldots$ $\ldots, m_n$ таковы, что $m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n$. Тогда согласно теореме 7.1

$$\mathsf{P}\{\alpha_r=m_r,\ r=1,\ \ldots,\ n\}=\prod_{r=1}^{n}\frac{1}{m_r!\,r^{m_r}}. \qquad (2)$$

С другой стороны, для таких $m_1, \ldots, m_n$

$$\mathsf{P}\{\mu_r=m_r,\ r=1,\ \ldots,\ n\,|\,\mu_1+2\mu_2+\ldots+n\mu_n=n\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\mu_r=m_r,\ r=1,\ \ldots,\ n\}/\mathsf{P}\{\mu_1+2\mu_2+\ldots+n\mu_n=n\}=$$
$$=a_n\prod_{r=1}^{n}\frac{1}{m_r!\,r^{m_r}},$$

где

$$a_n=\theta^n e^{-\theta-\frac{\theta^2}{2}-\ldots-\frac{\theta^n}{n}}\Big/\mathsf{P}\{\mu_1+2\mu_2+\ldots+n\mu_n=n\}.$$

Суммируя обе части этого равенства по всем допустимым $m_1, \ldots, m_n$ и учитывая, что сумма левых частей равна единице и согласно (2)

$$\sum\prod_{r=1}^{n}\frac{1}{m_r!\,r^{m_r}}=1,$$

находим, что $a_n=1$, откуда следует равенство (1), а также равенство

$$\mathsf{P}\{\mu_1+2\mu_2+\ldots+n\mu_n=n\}=\theta^n e^{-\theta-\frac{\theta^2}{2}-\ldots-\frac{\theta^n}{n}}.$$

С помощью связи (1) случайных величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, описывающих цикловое строение случайной подстановки, с независимыми случайными величинами $\mu_1, \ldots, \mu_n$ в [112] изучено предельное поведение крайних членов вариационного ряда $\beta_1\leqslant\ldots\leqslant\beta_{\nu_n}$, составленного из длин циклов случайной подстановки. Для распределений случайных величин β_m, β_{ν_n-m+1}, $m=1, 2, \ldots$, а также для их моментов любого порядка получены асимптотические выражения. В частности, для $\mathsf{M}\beta_{\nu_n}$ получено значение 0,6243 ... Идеи статьи [112] развиваются и обобщаются в [74]. Другой подход к изучению предельного поведения максимального члена вариационного ряда длин циклов случайной подстановки использован В. Е. Степановым [66]. В статье [66] приведен обзор результатов о случайных отображениях конечных множеств, в том числе и о предельном поведении характеристик случайных подстановок.

Еще один подход к изучению асимптотических свойств множества S_n с равномерным распределением предложен в статьях [8—10, 24]. Основное отличие этого подхода от всех предшествующих состоит в том, что удается указать пространство элементарных событий, на котором вероятностные меры, индуцируемые равномерным распределением на S_n, слабо сходятся при $n \to \infty$ к предельному распределению. Таким образом, предельные распределения различных характеристик случайной подстановки оказывается возможным вычислять с помощью этого предельного распределения. В статьях [8—10] с помощью этого подхода получены многие известные результаты о предельных распределениях характеристик случайных подстановок.

Использованный в §§ 7, 8 и 9 подход к изучению асимптотических свойств случайных подстановок изложен в статьях [27, 28, 38]. С помощью этого подхода в [28] для числа циклов ν_n получена локальная теорема о сходимости к нормальному распределению и доказана асимптотическая логарифмическая нормальность средних членов вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки.

Результаты § 10 о линейных комбинациях длин циклов случайной подстановки получены в статье [38]. Перенесение этих результатов на объемы компонент случайного отображения осуществлено Л. Р. Мутафчиевым [104].

Большой интерес представляет изучение групповых свойств случайной подстановки как элемента симметрической группы S_n. Наиболее характерными в этой области являются исследования порядка O_n случайной подстановки степени n. Соотношение (11.1) для максимального порядка подстановки из S_n доказано в [95]. Использованные в книге результаты о суммах по простым числам можно найти в [11, 56].

Теорема 11.1 о логарифмической нормальности порядка случайной подстановки впервые доказана Эрдешем и Тураном в [83]. Другие доказательства асимптотической нормальности $\ln O_n$ содержатся в статьях [47, 75, 77]. Доказательство этого результата, занимающего важное место среди вероятностных характеристик группы S_n, требует преодоления аналитических трудностей. В статье [75] основной момент доказательства опирается, по существу, на представление (1), которое впервые было использовано в [112] при изучении вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки. Использование этого представления приводит к существенному упрощению доказательства по сравнению с первым доказательством, изложенным в [83]. В § 11 приведено доказательство из статьи [31], опирающееся на связь длин циклов случайной подстановки с обобщенной схемой размещения частиц и использующее ряд соображений статей [75] и [77]. Локальные теоремы о числе подстановок $s \in S_n$, имеющих простой порядок, приведены в статьях [79, 103].

Представляет интерес вероятностный подход к задаче о порождении группы ее элементами. Обозначим P_n вероятность того, что группа $G(\sigma_1, \sigma_2)$, порожденная независимыми случайными подстановками $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$, совпадает либо с S_n, либо с знакопеременной группой A_n четных подстановок степени n. Диксон [81] показал, что $P_n \to 1$ при $n \to \infty$, для достаточно больших n им получена оценка $P_n \geqslant 1 - 2/(\ln \ln n)^2$ и высказано предположение, что в действительности остаточный член в нижней оценке имеет порядок n^{-1}. Продвижениями в этом направлении являются результаты статей [76, 78]. В [78] показано, что, начиная с некоторого n, справедливо неравенство $P_n \geqslant 1 - \exp\{-\sqrt{\ln n}\}$, а в [76] нижняя граница для P_n доведена до $1 - n^{-1+\varepsilon}$, е ε — произвольное положительное число.

Ряд статей посвящен задачам, связанным с построением экономных алгоритмов генерирования случайных подстановок из S_n с помощью последовательности случайных чисел (см. [25, 40, 58]). При генерировании случайных подстановок иногда оказывается удобным использовать взаимно однозначное соответствие между множеством S_n и множеством других объектов той же мощности. Используются, например, различные взаимно однозначные соответствия между множеством S_n и множеством всех векторов $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ с целыми элементами, для которых $0 \leqslant a_i \leqslant i$, $i = 1, \ldots, n-1$. При таком соответствии равномерное распределение на S_n порождает равномерное распределение на множестве всех векторов такого вида и элементы вектора $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ становятся независимыми случайными величинами, принимающими с равными вероятностями свои допустимые значения.

Пусть, например, подстановке

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & & s_n \end{pmatrix}$$

поставлен в соответствие вектор $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ инверсий этой подстановки, в котором b_i равно числу элементов, стоящих в нижней строке таблицы (3) левее i и больших i,

$i=1, \ldots, n-1$. Как нетрудно видеть, по вектору b легко восстанавливается подстановка s, так что построенное отображение взаимно однозначно [25]. Другая возможность задать подстановку s с помощью вектора $g=(g_1, \ldots, g_n)$ состоит в использовании представления s в виде произведения подстановок, каждая из которых является транспозицией двух элементов. Для транспозиции элементов i и j, т. е. для подстановки, оставляющей на месте все элементы, кроме i и j, будем использовать обычную запись (ij). В статье [76] показано, что каждая подстановка $s \in S_n$ может быть единственным образом представлена в виде произведения:

$$s=(1g_1)(2g_2)\ldots(ng_n),$$

где $1 \leqslant g_i \leqslant i$, $i=1, \ldots, n$. В силу взаимной однозначности этого соответствия между S_n и множеством векторов g в записи случайной подстановки

$$\sigma=(1\gamma_1)(2\gamma_2)\ldots(n\gamma_n)$$

случайные величины $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ независимы и с равными вероятностями принимают свои допустимые значения. В статьях [76—78] это свойство случайных величин $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ успешно используется при изучении различных свойств случайных подстановок.

Значительные трудности возникают при попытках рассмотреть множество подстановок S_n с распределением, отличным от равномерного. Отметим в этом направлении статьи [5—7, 71], в которых изучаются числа циклов длины r, а также линейные комбинации длин циклов случайной подстановки из некоторых подмножеств S_n с равномерным распределением.

В статьях [41, 46] рассматривается множество $S_n^{(k)}$ подстановок, состоящее из всех подстановок $s \in S_n$, которые представимы в виде k-й степени какой-либо подстановки. В статье [47] получены предельные распределения для числа циклов длины r, общего числа циклов и логарифма порядка случайной подстановки из $S_n^{(k)}$ с равномерным распределением. Для случайной подстановки из этого множества при $n \to \infty$ распределение случайной величины

$$\left(\ln O_n - \frac{\varphi(k)}{2k}\ln^2 n\right)\Big/\sqrt{\frac{\varphi(k)}{3k}\ln^3 n},$$

где $\varphi(k)$ — функция Эйлера, слабо сходится к нормальному распределению с параметрами (0, 1).

Исследования случайных подстановок нашли отражение в обзорных статьях [37, 66, 70]. Случайным подстановкам посвящены гл. 7 книги [36] и гл. 5 книги [63].

В §§ 12, 13 рассматриваются случайные отображения из Σ_n, в этих параграфах излагается содержание статьи [30]. Выражение (13.8) для функции распределения объема максимальной компоненты случайного отображения из Σ_n при $1/2 < \gamma \leqslant 1$ получено в [69]. Предельная теорема о числе компонент случайного отображения впервые доказана в [86], она является следствием теоремы о числе циклов случайной подстановки. Как будет показано в § 3.1, для числа циклических точек $\lambda^{(n)}$ случайного отображения из Σ_n справедливы следующие утверждения [86]:

Для любого натурального N

$$\mathbf{P}\{\lambda^{(n)} = N\} = \frac{N(n-1)!}{n^N(n-N)!}$$

и при $n \to \infty$ *равномерно относительно целых* N, *для которых* $z = N/\sqrt{n}$ *лежит в любом интервале вида* $0 < z_0 \leqslant \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$,

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{\lambda^{(n)}/\sqrt{n} = z\} = ze^{-z^2/2} + o(1).$$

Поскольку при $\lambda^{(n)} = N$ эти N циклических точек отображения образуют случайную подстановку, число компонент ν_n при условии $\lambda^{(n)} = N$ асимптотически нормально с параметрами $(\ln N, \ln N)$ и при этом справедлива локальная предельная теорема. Усредняя эти результаты по распределению $\lambda^{(n)}$ и учитывая при этом, что при $N = z\sqrt{n}$, $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$, $\ln N = \frac{1}{2}\ln n + O(1)$, получаем утверждение теоремы 12.4.

Обзор результатов о случайных отображениях содержится в статьях [37, 66, 70], случайным отображениям посвящена гл. 6 книги [63].

ГЛАВА II

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ДЕРЕВЬЯ

§ 1. Ветвящиеся процессы

В этой главе для изучения случайных деревьев используется их связь с однородными ветвящимися процессами с одним типом частиц и с дискретным временем. Для таких процессов удобно пользоваться следующей наглядной интерпретацией и связанной с ней терминологией. Пусть имеются однотипные частицы. Состояние системы определяется числом частиц $\mu(t)$, находящихся в системе в момент времени t, $t=0, 1, \ldots$ За единицу времени каждая частица независимо от ее происхождения и поведения других частиц с вероятностью p_r превращается в r частиц, $r=0, 1, \ldots$ Эти частицы называются прямыми *потомками* породившей их частицы, которая является для них предком. Частицы, находящиеся в системе в момент t, образуют t-е поколение, $t=0, 1, \ldots$ Такая терминология связана с тем, что ветвящийся процесс с дискретным временем в конце XIX в. впервые был использован английскими статистиками Гальтоном и Ватсоном при изучении вырождения фамилий. Ветвящийся процесс $\mu(t)$ называется иногда *процессом Гальтона—Ватсона.*

Приведем более строгое определение ветвящегося процесса $\mu(t)$ с дискретным временем. Пусть заданы независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины $\xi_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, t=0, 1, \ldots$, для которых

$$\mathsf{P}\{\xi_k(t)=r\}=p_r, \qquad r=0, 1, \ldots \tag{1}$$

Ветвящимся процессом, начинающимся с m частиц, называется последовательность $\mu(t)$, $t=0, 1, \ldots,$

задаваемая следующим образом:

$$\mu(0)=m, \quad \mu(t+1)=\xi_1(t)+\ldots+\xi_{\mu(t)}(t), \tag{2}$$

причем $\mu(t+1)=0$, если $\mu(t)=0$, $t=1, 2, \ldots$

Распределение (1) называется *распределением числа потомков одной частицы* в ветвящемся процессе $\mu(t)$. Случайная величина $\mu(t)$ интерпретируется как число частиц в поколении с номером t, для каждой из $\mu(t)$ частиц этого поколения определено число потомков, эти случайные величины независимы и имеют распределение (1). При изучении вопросов, связанных с происхождением частиц, может потребоваться более детальное описание процесса $\mu(t)$, при котором частицы каждого поколения оказываются занумерованными. Мы не будем вводить нумерацию частиц, поскольку в дальнейшем изложении такая детализация ветвящегося процесса не потребуется.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные целочисленные неотрицательные случайные величины с производящей функцией

$$F(z)=\sum_{r=0}^{\infty} p_r z^k \tag{3}$$

и η — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от $\xi_1, \xi_2, \ldots,$

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta=n\} z^n.$$

Рассмотрим сумму случайного числа слагаемых

$$\zeta_\eta^1=\xi_1+\ldots+\xi_\eta.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{M}z^{\zeta_\eta}=\varphi(F(z)). \tag{4}$$

Доказательство. Производящая функция суммы $\zeta_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$ равна $(F(z))^n$, поэтому, используя независимость $\eta, \xi_1, \xi_2, \ldots$, получаем цепочку равенств

$$\mathsf{M}z^{\zeta_\eta}=\sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\zeta_\eta=k\} z^k=\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta=n\} \mathsf{P}\{\zeta_n=k\}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta=n\} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}\{\zeta_n=k\}=\sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta=n\}(F(z))^n=$$
$$=\varphi(F(z)).$$

Лемма 2. *Если существуют математические ожидания* $\mathsf{M}\eta$ *и* $a=\mathsf{M}\xi_1$, *то*

$$\mathsf{M}\zeta_\eta = a\mathsf{M}\eta. \tag{5}$$

Доказательство. Если $\mathsf{M}\xi_1 = a$, то

$$\mathsf{M}\zeta_n = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathsf{P}\{\zeta_n = k\} = an,$$

поэтому

$$\mathsf{M}\zeta_\eta = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}\{\zeta_\eta = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta = n\} \mathsf{P}\{\zeta_n = k\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\eta = n\} \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}\{\zeta_n = k\} = a \sum_{n=0}^{\infty} n\mathsf{P}\{\eta = n\} = a\mathsf{M}\eta.$$

Согласно (2) случайная величина $\mu(t+1)$ представляет собой сумму случайного числа независимых одинаково распределенных слагаемых, имеющих распределение с производящей функцией $F(z)$. Обозначим

$$F_t(z) = \mathsf{M}z^{\mu(t)}, \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots$$

Прямым следствием леммы 1 и представления (2) являются равенства

$$F_{t+1}(z) = F_t(F(z)), \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots,$$
$$F_0(z) = \mathsf{M}z^{\mu(0)} = z^m. \tag{6}$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, будут рассматриваться ветвящиеся процессы, начинающиеся с одной частицы. Для ветвящегося процесса, начинающегося с одной частицы, $F_0(z) = z$, $F_1(z) = F(z) = F(F_0(z))$, и индукцией по t легко убедиться, что для такого процесса

$$F_{t+1}(z) = F(F_t(z)), \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots \tag{7}$$

Если число потомков одной частицы имеет математическое ожидание, равное a, то для ветвящегося процесса, начинающегося с одной частицы,

$$\mathsf{M}\mu(t) = a^t, \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots \tag{8}$$

Действительно, индукцией по t с использованием леммы 2 легко убеждаемся, что $\mathsf{M}\mu(t)$ существует и

$$\mathsf{M}\mu(t+1) = a\mathsf{M}\mu(t), \qquad t = 1,\ 2,\ \ldots$$

Из этого равенства следует (8), поскольку $\mathsf{M}\mu(1) = a$.

Если $a > 1$, то при $t \to \infty$ математическое ожидание числа частиц в процессе $\mu(t)$ стремится к бесконечности, если $a < 1$, то $\mathsf{M}\mu(t) \to 0$, и если $a = 1$, то $\mathsf{M}\mu(t) = 1$. В соответствии с этим ветвящийся процесс $\mu(t)$ при $a = 1$ называется *критическим*, при $a < 1$ *докритическим* и при $a > 1$ *надкритическим*.

Напомним, что $\mu(t+1) = 0$, если $\mu(t) = 0$. Процесс $\mu(t)$ вырождается в момент времени t, если $\mu(t) = 0$, а $\mu(t-1) > 0$. Обозначим B_t событие, состоящее в том, что процесс $\mu(t)$ выродился к моменту t:

$$B_t = \{\mu(t) = 0\}.$$

Событие, состоящее в том, что процесс вырождается в какой-либо момент времени, равно

$$A = \bigcup_{t=0}^{\infty} B_t.$$

Вероятность события A называется *вероятностью вырождения процесса* $\mu(t)$; обозначим $q = \mathsf{P}(A)$. Поскольку $B_t \subseteq B_{t+1}$ и $A = \bigcup_{t=0}^{\infty} B_t$,

$$q = \mathsf{P}(A) = \lim_{t \to \infty} \mathsf{P}(B_t). \tag{9}$$

Если $q = 1$, то ветвящийся процесс $\mu(t)$ называется *вырождающимся*.

В дальнейшем всюду исключается случай, когда $p_0 + p_1 = 1$.

Теорема 1. *Если* $a \leqslant 1$, *то* $q = 1$; *если* $a > 1$, *то* $q < 1$.

Доказательство. Покажем вначале, что вероятность вырождения q удовлетворяет уравнению

$$x = F(x). \tag{10}$$

Полагая $z = 0$ в равенстве (7), находим, что

$$\mathsf{P}\{\mu(t+1) = 0\} = F(\mathsf{P}\{\mu(t) = 0\}). \tag{11}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to \infty$, в силу (9) для $x = q$ получаем равенство (10).

Если существует $\mathsf{M}\mu(1) = a$, то существует левая производная $F'(1)$ и $F'(1) = a$. График функции $F(x)$ на отрезке $[0, 1]$ при $a \leqslant 1$ идет выше диагонали x, поскольку $F(1) = 1$ и $F''(x) > 0$ при $x > 0$. Поэтому уравнение (10) имеет единственное решение, равное $q = 1$. При $a > 1$ уравнение (10) имеет ровно два решения: $x = x_1 < 1$, $x = x_2 = 1$.

Покажем, что $q=x_1$. Ясно, что

$$\mathsf{P}(B_1)=\mathsf{P}\{\mu(1)=0\}=p_0\leqslant F(x_1)=x_1.$$

Предположим, что $\mathsf{P}(B_t)\leqslant x_1$, тогда согласно (11)

$$\mathsf{P}(B_{t+1})=F(\mathsf{P}(B_t))\leqslant F(x_1)=x_1.$$

Итак, индукцией по t доказано, что при всех t

$$\mathsf{P}(B_t)\leqslant x_1.$$

Таким образом, $\mathsf{P}(B_t)$ стремится к корню уравнения (10) и не превосходит меньшего корня этого уравнения, значит, $q=\lim\limits_{t\to\infty}\mathsf{P}(B_t)=x_1$.

Рассмотрим более подробно свойства критических ветвящихся процессов.

Пусть τ — момент вырождения критического ветвящегося процесса $\mu(t)$ с производящей функцией числа потомков одной частицы, равной $F(z)$. Случайная величина $\tau=t$, если $\mu(t-1)>0$, $\mu(t)=0$, $t=1, 2, \ldots$, поэтому

$$\mathsf{P}\{\tau\leqslant t\}=\mathsf{P}\{\mu(t)=0\}.$$

Теорема 2. *Для критического ветвящегося процесса $\mu(t)$ с дисперсией числа потомков одной частицы, равной B, при $t\to\infty$*

$$\mathsf{P}\{\tau>t\}=\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}=\frac{2}{Bt}(1+o(1)).$$

Доказательство. В силу существования второго момента производящая функция $F(z)$ имеет вторую производную слева в точке $z=1$. Будем обозначать ее $F''(1)$. Разлагая правую часть (11) в окрестности единицы, получим равенство

$$\mathsf{P}\{\mu(t+1)=0\}=F(1)+F'(1)(\mathsf{P}\{\mu(t)=0\}-1)+\\ +\frac{1}{2}F''(\theta\mathsf{P}\{\mu(t)=0\}+1-\theta)(\mathsf{P}\{\mu(t)=0\}-1)^2,$$

где $0\leqslant\theta\leqslant 1$. С использованием обозначения

$$Q(t)=\mathsf{P}\{\mu(t)\}>0\}=1-\mathsf{P}\{\mu(t)=0\}$$

полученное равенство преобразуется к виду

$$Q(t+1)=Q(t)-\frac{1}{2}F''(1-\theta Q(t))\,Q^2(t). \qquad (12)$$

Заметим, что для критического процесса при $t\to\infty$

$$Q(t)\to 0,\quad b_t=F''(1-\theta Q(t))\to F''(1)=B,$$

поэтому
$$Q(t+1)/Q(t)=1-b_t Q(t)/2 \longrightarrow 1.$$
Равенство (12) можно записать в виде
$$Q(t+1)=Q(t)-BQ(t)\,Q(t+1)/2+\varepsilon(t),$$
где $2\varepsilon(t)=BQ(t)\,Q(t+1)-b_t Q^2(t)$ и при $t\longrightarrow\infty$
$$\frac{\varepsilon(t)}{Q(t)\,Q(t+1)}=\frac{B}{2}-\frac{b_t Q(t)}{2Q(t+1)}\longrightarrow 0.$$
Деля обе части равенства на $Q(t)\,Q(t+1)$, получаем соотношение
$$\frac{1}{Q(t)}=\frac{1}{Q(t+1)}-\frac{B}{2}-\delta(t),$$
где $\delta(t)=-\varepsilon(t)/(Q(t)\,Q(t+1))\longrightarrow 0$ при $t\longrightarrow\infty$. Перепишем его в виде
$$\frac{1}{Q(s+1)}=\frac{1}{Q(s)}+\frac{B}{2}+\delta(s)$$
и просуммируем по s от 0 до $t-1$. Учитывая, что $Q(0)=1-\mathsf{P}\{\mu(0)=0\}=1$, приходим к равенству
$$\frac{1}{Q(t)}=1+\frac{Bt}{2}+\sum_{s=0}^{t-1}\delta(s)=\frac{Bt}{2}\left(1+\frac{2}{Bt}+\frac{2}{Bt}\sum_{s=0}^{t-1}\delta(s)\right). \quad (13)$$
При $s\longrightarrow\infty$ величина $\delta(s)\longrightarrow 0$ и, следовательно, среднее арифметическое этих величин $\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\delta(s)$ стремится к нулю при $t\longrightarrow\infty$, поэтому из (13) следует, что
$$\frac{1}{Q(t)}=\frac{Bt}{2}(1+o(1)).$$

Итак, при $t\longrightarrow\infty$ вероятность $\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}$ для критического ветвящегося процесса стремится к нулю, т. е. распределение критического ветвящегося процесса сходится к вырожденному в нуле распределению. Представляет интерес изучение условного распределения $\mu(t)$ при условии, что $\mu(t)>0$. Для критических ветвящихся процессов предельное распределение $\mu(t)$ при условии, что $\mu(t)>0$, зависит лишь от значения второго момента B. Рассмотрим функцию условного распределения
$$G_t(x)=\mathsf{P}\left\{\frac{2\mu(t)}{Bt}\leqslant x\,|\,\mu(t)>0\right\}, \quad (14)$$
где B — дисперсия числа потомков одной частицы.

Теорема 3. *Для критического ветвящегося процесса с дисперсией числа потомков одной частицы, равной B, при $t \to \infty$ для любого фиксированного $x > 0$*

$$G_t(x) \to 1 - e^{-x}.$$

Доказательство. Обозначим $R_t(z) = 1 - F_t(z)$, где $F_t(z)$ — производящая функция $\mu(t)$. Характеристическая функция распределения (14) равна

$$\psi_t(\theta) = \mathsf{M}\, \{e^{\frac{2i\theta\mu(t)}{Bt}} \mid \mu(t) > 0\} =$$
$$= \left(F_t\left(e^{\frac{2i\theta}{Bt}}\right) - F_t(0)\right) / \mathsf{P}\{\mu(t) > 0\} = 1 - R_t\left(e^{\frac{2i\theta}{Bt}}\right) / R_t(0). \tag{15}$$

Перепишем соотношение (7) в виде

$$R_{t+1}(z) = 1 - F(F_t(z)) \tag{16}$$

и воспользуемся разложением

$$F(z) = z + \frac{B + \varepsilon(z)}{2}(z-1)^2, \tag{17}$$

где $|B + \varepsilon(z)| \leqslant B$ и $\varepsilon(z) \to 0$ при $z \to 1$. Подставляя (17) в (16), находим, что

$$R_{t+1}(z) = R_t(z) - \frac{B + \varepsilon_t(z)}{2} R_t^2(z), \tag{18}$$

где $|B + \varepsilon_t(z)| \leqslant B$, $\varepsilon_t(z) = \varepsilon(F_t(z))$. Функция $\varepsilon_t(z) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно относительно $|z| \leqslant 1$, поскольку $F_t(z) \to 1$ равномерно относительно $|z| \leqslant 1$ и $\varepsilon(z) \to 0$ при $z \to 1$. Из (18) следует, что

$$|R_{t+1}(z)/R_t(z) - 1| \leqslant \frac{1}{2} B\, |R_t(z)|$$

и при $t \to \infty$

$$R_{t+1}(z)/R_t(z) \to 1 \tag{19}$$

равномерно относительно $|z| \leqslant 1$. Поэтому равенству (18) можно придать следующий вид:

$$R_{t+1}(z) = R_t(z) - \frac{B}{2} R_t(z) R_{t+1}(z) + \eta_t(z) R_t(z) R_{t+1}(z), \tag{20}$$

где

$$\eta_t(z) = 1 - \frac{(B + \varepsilon_t(z))\, R_t(z)}{B R_{t+1}(z)}$$

и в силу (18) и (19) при $t \to \infty$

$$\eta_t(z) \to 0$$

равномерно относительно $|z| \leqslant 1$. Разделив обе части равенства (20) на $R_t(z) R_{t+1}(z)$, находим, что

$$\frac{1}{R_{t+1}(z)} = \frac{1}{R_t(z)} + \frac{B}{2} - \eta_t(z),$$

откуда с использованием равенства $R_0(z) = 1 - z$ получаем, что

$$\frac{1}{R_t(z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{Bt}{2} - \sum_{s=0}^{t-1} \eta_s(z)$$

и, следовательно,

$$R_t(z) = \frac{1-z}{1 + \frac{Bt}{2}(1-z) - t(1-z)\alpha_t(z)}, \tag{21}$$

где

$$\alpha_t(z) = \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \eta_s(z)$$

и при $t \to \infty$ стремится к нулю равномерно относительно $|z| \leqslant 1$.

Полагая $z = e^{2i\theta/(Bt)}$ и подставляя (21) в (15), для $\psi_t(\theta)$ получаем выражение

$$\psi_t(\theta) = 1 - \frac{1-z}{R_t(0)\left(1 + \frac{Bt}{2}(1-z) - t(1-z)\alpha_t(z)\right)}.$$

Согласно теореме 2 при $t \to \infty$

$$R_t(0) = \mathbf{P}\{\mu(t) > 0\} = \frac{2}{Bt}(1 + o(1))$$

и, следовательно, при любом фиксированном действительном θ

$$\psi_t(\theta) = 1 - \frac{i\theta + o(1)}{1 - i\theta + o(1)} = \frac{1}{1 - i\theta} + o(1).$$

Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку характеристическая функция показательного распределения равна $(1 - i\theta)^{-1}$.

При изучении связи ветвящихся процессов и случайных деревьев важную роль играет случайная величина ν, равная общему числу частиц, существовавших в ветвящемся процессе $\mu(t)$ до его вырождения. Для ветвящегося процесса, начинающегося с m частиц, общее число частиц, существовавших в этом процессе до его вырождения, будем обозначать ν_m.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие распределение числа потомков одной частицы в процессе $\mu(t)$.

Лемма 3. *Для* $n \geqslant m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}\{\nu_m = n\} = \frac{m}{n}\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = n - m\}. \tag{22}$$

Доказательство. Обозначим $f(m, n) = \mathsf{P}\{\nu_m = n\}$. Фиксируем одну из m частиц, с которых начинается ветвящийся процесс, и обозначим A_r событие, состоящее в том, что эта фиксированная частица имеет r потомков. По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}\{\nu_m = n\} = \sum_{r=0}^{\infty} p_r \mathsf{P}\{\nu_m = n \mid A_r\}. \tag{23}$$

Ясно, что

$$\mathsf{P}\{\nu_m = n \mid A_r\} = \mathsf{P}\{\nu_{m+r-1} = n-1\} = f(m+r-1, n-1),$$

поэтому из (23) следует, что $f(m, n)$ удовлетворяет уравнению

$$f(m, n) = \sum_{r=0}^{n-m} p_r f(m+r-1, n-1), \tag{24}$$

причем при $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} f(0, n) &= \mathsf{P}\{\nu_1 = n+1 \mid A_0\} = 0, \\ f(1, 1) &= \mathsf{P}\{\nu_1 = 1\} = p_0. \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнение (24) и условия (25) однозначно определяют $f(m, n)$ в области $n \geqslant m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Для доказательства равенства (22) достаточно проверить, что функция

$$f(m, n) = \frac{m}{n}\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_n = n - m\} \tag{26}$$

удовлетворяет (24) и (25). Легко видеть, что условия (25) выполняются. Подставляя в правую часть (24) функцию (26), находим, что

$$\sum_{r=0}^{n-m} \mathsf{P}\{\xi_n=r\}\frac{m+r-1}{n-1}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n-1}=n-m-r\}=$$

$$=\frac{m-1}{n-1}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_n=n-m\}+$$

$$+\frac{1}{n-1}\sum_{r=0}^{n-m} r\mathsf{P}\{\xi_n=r\}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n-1}=n-m-r\}=$$

$$=\frac{m}{n}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_n=n-m\},$$

поскольку

$$\sum_{r=0}^{n-m}\frac{r\mathsf{P}\{\xi_n=r\}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n-1}=n-m-r\}}{\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_n=n-m\}}=$$

$$=\mathsf{M}\{\xi_n\,|\,\xi_1+\ldots+\xi_n=n-m\}=\frac{n-m}{n}.$$

Обратимся к критическому ветвящемуся процессу.

Лемма 4. *Если в критическом ветвящемся процессе $\mu(t)$ распределение числа потомков одной частицы имеет дисперсию B и его максимальный шаг равен d, то для любого фиксированного m при n, стремящемся к бесконечности по значениям, кратным d,*

$$\mathsf{P}\{\nu_m=n\}=\frac{md}{n\sqrt{2\pi Bn}}(1+o(1)).$$

Доказательство. Для суммы $\xi_1+\ldots+\xi_n$ справедлива локальная предельная теорема 1.4.2. Поэтому, если $n\to\infty$ по значениям, кратным d, то

$$\mathsf{P}\{\nu_m=n\}=\frac{m}{n}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_n=n-m\}=$$

$$=\frac{md}{n\sqrt{2\pi Bn}}e^{-\frac{m^2}{2Bn}}(1+o(1))=\frac{md}{n\sqrt{2\pi Bn}}(1+o(1)).$$

Обозначим μ_r случайную величину, равную числу частиц, существовавших в ветвящемся процессе $\mu(t)$ до его вырождения и имевших ровно r прямых потомков, $r=0, 1, \ldots$

Лемма 5. *При $n\geqslant m\geqslant 0$, $n\geqslant 1$ для целых неотрицательных $k_0, \ldots, k_{n-m}$ таких, что*

$$\sum_{r=0}^{n-m}k_r=n,\quad \sum_{r=0}^{n-m}rk_r=n-m,$$

справедливы равенства

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k_r,\ r = 0, 1, \ldots, n-m;\ \nu_m = n\} =$$
$$= \frac{mn!}{nk_0! \ldots k_{n-m}!} p_0^{k_0} \ldots p_{n-m}^{k_{n-m}}, \tag{27}$$

для остальных наборов $k_0, \ldots, k_{n-m}$ *эта вероятность равна нулю.*

Доказательство. Обозначим

$$f_{k_0, \ldots, k_{n-m}}(m, n) = \mathsf{P}\{\mu_r = k_r,\ r = 0, 1, \ldots, n-m;\ \nu_m = n\}.$$

Учитывая возможные исходы деления одной из m частиц, с которых начинается процесс $\mu(t)$, по формуле полной вероятности находим, что

$$f_{k_0, \ldots, k_{n-m}}(m, n) =$$
$$= \sum_{r=0}^{n-m-r} p_r f_{k_0, \ldots, k_{r-1}, k_r - 1, k_{r+1}, \ldots, k_{n-m-r}}(m+r-1, n-1). \tag{28}$$

При этом, если хотя бы один из индексов $k_0, \ldots, k_{n-m}$ отрицателен, то соответствующее значение функции равно нулю. Соотношение (28) является рекуррентным соотношением относительно параметра n, поэтому, зная краевые условия при $m=0$, $n \geqslant 1$ и $m=n=1$, с помощью (28) можно найти все значения $f_{k_0, \ldots, k_{n-m}}(m, n)$ при $n \geqslant m \geqslant 1$. Такими краевыми условиями являются равенства

$$\begin{aligned} f_{k_0, \ldots, k_n}(0, n) &= 0 \quad \text{при } n \geqslant 1, \\ f_{k_0}(1, 1) &= p_0 \quad \text{при } k_0 = 1. \end{aligned} \tag{29}$$

Уравнение (28) и условия (29) однозначно определяют функцию $f_{k_0, \ldots, k_{n-m}}(m, n)$.

Легко проверить, что функция

$$f_{k_0, \ldots, k_{n-m}}(m, n) = \frac{mn!}{nk_0! \ldots k_{n-m}!} p_0^{k_0} \ldots p_{n-m}^{k_{n-m}}$$

удовлетворяет уравнению (28) и краевым условиям (29).

§ 2. Связь ветвящихся процессов и случайных деревьев

В этом параграфе изучается связь характеристик ветвящихся процессов с соответствующими характеристиками случайных деревьев. Эта связь, с одной стороны, дает возможность использовать для исследования комбинаторных объектов аналитические методы, развитые в теории ветвящихся процессов, а с другой стороны, ставит новые задачи для ветвящихся процессов, вызываемые потребностями изучения случайных деревьев и лесов, и часто подсказывает решения этих задач.

При изучении случайных деревьев особую роль играет ветвящийся процесс $\mu(t, G)$, в котором число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона с параметром λ. Для этого процесса будем использовать следующие обозначения:

$$p_r = p_r(\lambda) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}, \qquad r = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

$\mu_r(t, G)$ — число частиц в момент t, имеющих ровно r прямых потомков, $\nu(G)$ — общее число частиц за все время эволюции процесса, $\tau(G)$ — время до вырождения, $\mu_r(G) = \sum_{t=0}^{\infty} \mu_r(t, G)$ — число частиц, имеющих ровно r прямых потомков.

Рассмотрим множество T_n всех корневых деревьев, некорневые вершины которых занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$, а корень имеет номер 0. Зададим на T_n равномерное распределение, приписав каждому дереву из T_n вероятность $(n+1)^{-n+1}$.

Любая вершина дерева соединяется с корнем единственным путем. Число ребер, составляющих этот путь, называется *высотой* соответствующей *вершины*. Будем считать все ребра дерева направленными от корня и назовем *кратностью вершины* число выходящих из нее ребер.

Обозначим $\mu_r(t, T_n)$, r, $t = 0, 1, \ldots, n$, число вершин высоты t, имеющих кратность r, $\mu_r(T_n)$, $r = 0, 1, \ldots, n$, число вершин кратности r, τ_n высоту дерева. Рассмотрим матрицы $\|\mu_r(t, T_n)\|$ и $\|\mu_r(t, G)\|$, $t, r = 0, 1, \ldots, n$, и матрицу $M = \|m_r(t)\|$ такого же размера, составленную из целых неотрицательных чисел.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, T_n)\| = M\} = \mathsf{P}\{\|\mu_r(t, G)\| = M \mid \nu(G) = n+1\}.$$

Доказательство. Обозначим $n_t = m_0(t) + \ldots + m_n(t)$, $t = 0, 1, \ldots, n$. Для того чтобы равенство $\|\mu_r(t, T_n)\| = \|m_r(t)\|$ имело положительную вероятность необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{gathered} {}_0=1; \quad n_t=m_1(t-1)+2m_2(t-1)+\ldots+nm_n(t-1), \\ t=1, \ \ldots, \ n; \ m_1(n)+2m_2(n)+\ldots+nm_n(n)=0; \\ n_0+n_1+\ldots+n_n=n+1. \end{gathered} \tag{2}$$

Матрицу M, для которой выполняются соотношения (2), назовем *допустимой*. Рассмотрим случай, когда M допустима, так как для недопустимой матрицы обе вероятности в утверждении леммы равны нулю. Согласно лемме 1.3 для ветвящегося процесса $\mu(t)$, начинающегося с одной частицы,

$$\mathsf{P}\{\nu=n+1\}=\frac{1}{n+1}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}=n\}, \tag{3}$$

где $\xi_1, \ \ldots, \ \xi_{n+1}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение числа потомков одной частицы в ветвящемся процессе $\mu(t)$. Для процесса $\mu(t, G)$ отсюда получаем, что

$$\mathsf{P}\{\nu(G)=n+1\}=\frac{\lambda^n (n+1)^n}{(n+1)!}e^{-\lambda(n+1)}, \qquad n=0, \ 1, \ \ldots \tag{4}$$

С помощью (4) нетрудно проверить, что для допустимой матрицы M

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, \ G)\|=M \mid \nu(G)=n+1\}= \\ =\frac{(n+1)!\,n_1!\,\ldots n_n!}{(n+1)^n}\prod_{r, \ t=0}^{n}\frac{1}{m_r(t)!\,(r!)^{m_r(t)}}. \tag{5}$$

Найдем теперь вероятность $\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, T_n)\|=M\}$. Если M допустима, то существует дерево, для которого $\|\mu_r(t, T_n)\|=M$. С помощью этого дерева построим все деревья, для которых $\|\mu_r(t, \ T_n)\|=M$. Перенумеруем некорневые вершины дерева числами $1, 2, \ldots, n$, что можно сделать $n!$ способами. В слое высоты t содержится n_t вершин, являющихся корнями n_t поддеревьев. В каждом из $n!$ деревьев, полученных перенумерацией вершин, переставим эти n_t поддеревьев всеми $n_t!$ способами. Проведем такую операцию в каждом слое. Число полученных деревьев, очевидно, равно $n!n_1! \ \ldots \ n_n!$. Ясно, что среди полученных деревьев не все различны, каждое дерево встречается несколько раз. Одинаковые деревья появились по двум причинам: во-первых, каждая вершина кратности r приводит к появлению $r!$ одинаковых деревьев, что дает $\prod_{r,\,t=0}^{n} (r!)^{m_r(t)}$ одинаковых деревьев; во-вторых, $m_r(t)!$ перестановок поддеревьев с корнями одинаковой кратности r в слое высоты t приводят к $m_r(t)!$ повторениям одного и того же дерева, что дает еще $\prod_{r,\,t=0}^{n} m_r(t)!$ одинаковых деревьев. В результате этих двух причин число появлений каждого дерева равно

$$\prod_{r,\,t=0}^{n} m_r(t)!\,(r!)^{m_r(t)}.$$

Учитывая, что число деревьев в T_n равно $(n+1)^{n-1}$, для $\mathsf{P}\{\|\mu_r(t,\ T_n)\|=M\}$ получаем выражение, стоящее в правой части (5).

√ В силу леммы 1 изучение характеристик случайного дерева, выражающихся через случайные величины $\mu_r(t,\ T_n)$, $t,\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, и, в частности, числа вершин $\mu_r(T_n)$, имеющих кратность r, высоты дерева τ_n, числа вершин $\mu(t,\ T_n)$ высоты t, сводится к изучению условных распределений соответствующих характеристик ветвящегося процесса $\mu(t,\ G)$ при условии, что $\nu(G)=n+1$. В §§ 3, 4 приведены результаты об условных распределениях характеристик общего критического ветвящегося процесса при условии, что $\nu=n$ и $n\to\infty$.

Отметим связь ветвящихся процессов с обобщенной схемой размещения частиц. Рассмотрим начинающийся с одной частицы однородный ветвящийся процесс $\mu(t)$, $t=0,\ 1,\ \ldots$, в котором число потомков одной частицы равно r с вероятностью p_r, $r=0,\ 1,\ \ldots$ Для этого процесса, как и в § 1, $\mu_r(t)$ обозначает случайную величину, равную числу частиц в ветвящемся процессе в момент t, имеющих ровно r прямых потомков, $t,\ r=0,\ 1,\ \ldots$; ν — общее число частиц, существовавших в процессе за все время его эволюции, τ — время до вырождения процесса, $\mu_r=\sum_{t=0}^{\infty}\mu_r(t)$ — число частиц, имеющих ровно r прямых потомков.

Введем независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$, имеющие распределение числа потомков одной частицы:

$$\mathsf{P}\{\xi_1=r\}=p_r,\qquad r=0,\ 1,\ \ldots \tag{6}$$

С последовательностью $\xi_1, \ldots, \xi_N$ этих случайных величин свяжем обобщенную схему размещения n частиц в N ячеек, в которой совместное распределение заполнений ячеек $\eta_1, \ldots, \eta_N$ задается равенствами

$$\mathsf{P}\{\eta_1=k_1, \ldots, \eta_N=k_N\}= \\ =\mathsf{P}\{\xi_1=k_1, \ldots, \xi_N=k_N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}. \qquad (7)$$

Обозначим, как обычно, $\mu_r(n, N)$ число ячеек, содержащих ровно r частиц в обобщенной схеме размещения n частиц по N ячейкам, или, что то же, число случайных величин среди $\eta_1, \ldots, \eta_N$, принявших значение r, $r=0, 1, \ldots, n$.

Оказывается, что для ветвящегося процесса $\mu(t)$ совместное распределение случайных величин μ_r при условии, что $\nu=n+1$, совпадает с совместным распределением случайных величин $\mu_r(n, n+1)$ в описанной выше обобщенной схеме размещения n частиц по $n+1$ ячейкам.

Лемма 2. *Если* $\mathsf{P}\{\nu=n+1\}>0$, *то*

$$\mathsf{P}\{\mu_r=k_r,\ r=0, 1, \ldots, n \mid \nu=n+1\}= \\ =\mathsf{P}\{\mu_r(n, n+1)=k_r,\quad r=0, 1, \ldots, n\}.$$

Доказательство. Из (6) и (7) следует (см. лемму 1.1.3), что если $k_0+\ldots+k_n=N$, $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$, то

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, N)=k_r, r=0, 1, \ldots, n\}=\frac{N!\, p_0^{k_0}\ldots p_n^{k_n}}{k_0!\ldots k_n!\,\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}}.$$

Поэтому для целых неотрицательных $k_0, \ldots, k_n$, удовлетворяющих соотношениям $k_0+\ldots+k_n=n+1$, $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$,

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, n+1)=k_r,\ r=0, 1, \ldots, n\}= \\ =\frac{(n+1)!\, p_0^{k_0}\ldots p_n^{k_n}}{k_0!\ldots k_n!\,\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}=r\}}. \qquad (8)$$

С другой стороны, согласно лемме 1.5 при таких $k_0, \ldots, k_n$ для ветвящегося процесса $\mu(t)$

$$\mathsf{P}\{\mu_r=k_r,\ r=0, 1, \ldots, n;\ \nu=n+1\}= \\ =\frac{(n+1)!\, p_0^{k_0}\ldots p_n^{k_n}}{k_0!\ldots k_n!\,(n+1)}. \qquad (9)$$

Учитывая, что согласно лемме 1.3

$$\mathsf{P}\{\nu=n+1\}=\frac{1}{n+1}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}=n\},$$

из равенства (9) находим, что

$$\mathsf{P}\{\mu_r = k_r,\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ n \mid \nu = n+1\} = \\ = \frac{(n+1)!\, p_0^{k_0} \ldots p_n^{k_n}}{k_0! \ldots k_n!\, \mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{n+1} = n\}}. \quad (10)$$

Утверждение леммы следует из (8) и (10).

При изучении условных распределений для некоторых ветвящихся процессов можно использовать преобразование, которое переводит ветвящийся процесс в критический и не изменяет условных распределений.

Будем называть допустимыми те положительные θ, для которых определено значение $F(\theta)$ производящей функции

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r z^r. \quad (11)$$

Для допустимого θ положим

$$p_r^{(\theta)} = \theta^r p_r / F(\theta), \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots, \quad (12)$$

и наряду с ветвящимся процессом $\mu(t)$ рассмотрим ветвящийся процесс $\mu^{(\theta)}(t)$, в котором число потомков одной частицы имеет распределение (12). Его характеристики будем обозначать теми же буквами, что и для $\mu(t)$, снабжая их индексом θ.

Рассмотрим матрицы $\|\mu_r(t)\|$ и $\|\mu_r^{(\theta)}(t)\|$, $t, r = 0, 1, \ldots, n$, и матрицу $M = \|m_r(t)\|$ такого же размера, составленную из целых неотрицательных чисел.

Лемма 3. *Для любой матрицы M, любого допустимого θ и любого n, для которого* $\mathsf{P}\{\nu = n+1\} > 0$,

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t)\| = M \mid \nu = n+1\} = \mathsf{P}\{\|\mu_r^{(\theta)}(t)\| = M \mid \nu^{(\theta)} = n+1\}. \quad (13)$$

Доказательство. Для матрицы $M = \|m_r(t)\|$, $t,\ r = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, с целыми неотрицательными элементами обозначим $n_t = m_0(t) + \ldots + m_n(t)$. Чтобы равенство $\|\mu_r(t)\| = M$ могло иметь положительную вероятность, необходимо, чтобы выполнялись соотношения (2). Как и ранее, матрицу M, для которой эти соотношения выполнены, назовем допустимой. Для допустимой матрицы

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t)\| = M\} = \prod_{t=0}^{n} \frac{n_t!\, p_0^{m_0(t)} \ldots p_n^{m_n(t)}}{m_0(t)! \ldots m_n(t)!},$$

поэтому в силу (12)

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r^{(\theta)}(t)\| = M\} = \frac{\theta^n}{F^{n+1}(\theta)} \mathsf{P}\{\|\mu_r(t)\| = M\}. \quad (14)$$

Пусть $\xi_{\theta 1}, \ldots, \xi_{\theta, n+1}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение (12). Согласно лемме 1.3

$$\mathsf{P}\{\nu^{(\theta)}=n+1\}=\frac{1}{n+1}\mathsf{P}\{\xi_{\theta 1}+\ldots+\xi_{\theta, n+1}=n\}=$$
$$=\frac{\theta^n\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}=n\}}{(n+1)F^{n+1}(\theta)}=\frac{\theta^n}{F^{n+1}(\theta)}\mathsf{P}\{\nu=n+1\}. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует утверждение леммы для допустимых матриц M. Для недопустимой матрицы при условии, что $\mathsf{P}\{\nu=n+1\}>0$, равенство верно, так как обе вероятности в (13) равны нулю.

Во многих случаях анализ предельного поведения характеристик ветвящегося процесса $\mu^{(\theta)}(t)$ упрощается, если выбрать $\theta=\alpha$ так, чтобы процесс $\mu^{(\alpha)}(t)$ стал критическим.

Для процесса $\mu(t)$ выполнено условие A, если существует такое $\alpha>0$, что $F(\alpha)=\alpha F'(\alpha)$ и в точке α конечна левая производная $F''(\alpha)$. Процесс $\mu^{(\alpha)}(t)$ в этом случае является критическим с конечной дисперсией числа потомков одной частицы, равной

$$B_\alpha=\alpha^2F''(\alpha)/F(\alpha).$$

В §§ 3, 4 изучаются условные распределения характеристик критического ветвящегося процесса с конечной дисперсией числа потомков одной частицы. Результаты, полученные для такого процесса, с помощью леммы 3 легко переносятся на любые ветвящиеся процессы, удовлетворяющие условию A.

§ 3. Предельные теоремы для условных распределений критического ветвящегося процесса

Рассмотрим критический ветвящийся процесс $\mu(t)$ с производящей функцией числа потомков одной частицы, равной

$$F(z)=\sum_{r=0}^{\infty}p_rz^r, \quad (1)$$

и дисперсией числа потомков одной частицы B. Изучение условных распределений характеристик этого ветвящегося процесса начнем со случайных величин μ_r, равных числу частиц в ветвящемся процессе $\mu(t)$, имеющих ровно r потомков.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение числа потомков одной частицы в процессе $\mu(t)$, и $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_{n+1}^{(r)}$ независимы, одинаково распределены и

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(r)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k \mid \xi_1\neq r\}, \qquad k=0, 1, \ldots$$

Заметим, что если максимальный шаг распределения числа потомков одной частицы равен d, то общее число частиц, существовавших в процессе до его вырождения, с положительными вероятностями может принимать лишь значения вида $n=sd+1$, где s — целые числа. Случайная величина $\xi_1^{(r)}$ имеет максимальный шаг распределения d_r, кратный d, но, вообще говоря, не равный d. Обозначим

$$\sigma_r^2=p_r(1-p_r-(1-r)^2 p_r/B). \tag{2}$$

Теорема 1. *Если $p_r>0$, максимальный шаг распределения числа потомков одной частицы равен d, максимальный шаг распределения $\xi_1^{(r)}$ равен d_r, то при $s\to\infty$ равномерно относительно целых k, для которых*

$$u=(kd_r/d-np_r)/(\sigma_r\sqrt{n})$$

лежит в любом конечном интервале,

$$\mathsf{P}\left\{\mu_r=\frac{kd_r}{d} \mid \nu=sd_r+1\right\}=\frac{d_r}{d\sigma_r\sqrt{2\pi n}}\,e^{-u^2/2}(1+o(1)).$$

Доказательство. В силу леммы 2.2, если $\mathsf{P}\{\nu=n+1\}>0$, то

$$\mathsf{P}\{\mu_r=l \mid \nu=n+1\}=\mathsf{P}\{\mu_r(n, n+1)=l\}, \tag{3}$$

где $\mu_r(n, n+1)$ — число ячеек, содержащих ровно r частиц, в обобщенной схеме размещения n частиц в $n+1$ ячейку, задаваемой случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$. Согласно лемме 1.2.1 в обобщенной схеме размещения частиц

$$\mathsf{P}\{\mu_r(n, n+1)=l\}=$$
$$=C_{n+1}^l p_r^l(1-p_r)^{n-l+1}\frac{\mathsf{P}\{\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_{n-l+1}^{(r)}=n-lr\}}{\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}=n\}}. \tag{4}$$

При выполнении условий теоремы для сумм $\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}$ и $\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_{n-l+1}^{(r)}$, входящих в (4), справедливы локальные предельные теоремы о сходимости к нормальному распределению на решетке с соответствующим шагом.

Если $n=sd_r$, то при $s\to\infty$

$$\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}=n\}=\frac{d}{\sqrt{2\pi nB}}(1+o(1)), \tag{5}$$

поскольку максимальный шаг распределения ξ_1 равен d, $\mathsf{M}\xi_1=1$ и $\mathsf{D}\xi_1=B$. Если $n=sd_r$, $l=kd_r/d$, то при $s\to\infty$ равномерно относительно целых k, для которых $u=(l-np_r)/(\sigma_r\sqrt{n})$ лежит в любом конечном интервале,

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_{n-l}^{(r)}=n-lr\}=$$

$$=\frac{d_r\sqrt{p_r(1-p_r)}}{\sigma_r\sqrt{2\pi nB}}e^{-\frac{u^2(1-r)^2p_r}{2B(1-p_r)}}(1+o(1)), \tag{6}$$

поскольку максимальный шаг распределения $\xi_1^{(r)}$ равен d_r,

$$\mathsf{M}\xi_1^{(r)}=\frac{1-rp_r}{1-p_r},\quad \mathsf{D}\xi_1^{(r)}=\frac{B(1-p_r-(1-r)^2p_r/B)}{(1-p_r)^2}=\frac{B\sigma_r^2}{p_r(1-p_r)^2}.$$

При $n\to\infty$ равномерно относительно целых $l=np_r+u\sigma_r\sqrt{n}$, для которых u лежит в любом конечном интервале,

$$C_{n+1}^l p_r^l(1-p_r)^{n-l+1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi np_r(1-p_r)}}e^{-\frac{(l-np_r)^2}{2np_r(1-p_r)}}(1+o(1))=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi np_r(1-p_r)}}e^{-\frac{u^2\sigma_r^2}{2p_r(1-p_r)}}(1+o(1)). \tag{7}$$

Подставляя выражения (5), (6) и (7) в (4), находим, что при $s\to\infty$ равномерно относительно целых k, для которых $u=(kd_r/d-np_r)/(\sigma_r\sqrt{n})$ лежит в любом конечном интервале,

$$\mathsf{P}\left\{\mu_r(n,\ n+1)=\frac{kd_r}{d}\right\}=\frac{d_r}{d\sigma_r\sqrt{2\pi n}}e^{-u^2/2}(1+o(1)). \tag{8}$$

Утверждение теоремы следует теперь из (8) и (3).

Рассмотрим условные распределения $\mu(t)$ при условии, что $\nu=n$ и $n\to\infty$.

Теорема 2. *Если максимальный шаг распределения числа потомков одной частицы равен d, то для любых фиксированных целых положительных $k_1,\ldots,k_t$, кратных d, при $n=sd+1\to\infty$*

$$\mathsf{P}\{\mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t\mid\nu=n\}\to$$
$$\to k_t\mathsf{P}\{\mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t\}.$$

Доказательство. Обозначим ν_m общее число частиц в начинающемся с m частиц критическом ветвящемся процессе с производящей функцией числа потомков одной частицы, задаваемой равенством (1). Для процесса $\mu(t)$, начинающегося с одной частицы,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\mu(0)=1,\ \mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t,\ \nu=n\}=\\ =\mathsf{P}\{\mu(0)=1,\ \mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t\}\times\\ \times\mathsf{P}\{\nu_{k_t}=n-1-k_1-\ldots-k_{t-1}\},\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\mu(0)=1,\ \mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t\mid\nu=n\}=\\ =\mathsf{P}\{\mu(0)=1,\ \mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t\}\times\\ \times\frac{\mathsf{P}\{\nu_{k_t}=n-1-k_1-\ldots-k_{t-1}\}}{\mathsf{P}\{\nu=n\}}.\end{aligned}\qquad(9)$$

Используя представление (1.9), находим, что

$$\mathsf{P}\{\nu=n\}=\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_n=n-1\}/n,$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\nu_{k_t}=n-1-k_1-\ldots-k_{t-1}\}=\\ =\frac{k_t}{n-1-k_1-\ldots-k_{t-1}}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n-1-k_1-\ldots-k_{t-1}}=\\ =n-1-k_1-\ldots-k_t\},\end{aligned}$$

где $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ — независимые случайные величины с распределением числа потомков одной частицы. Учитывая, что $\mathsf{M}\xi_1=1$, $\mathsf{D}\xi_1=B$ и максимальный шаг распределения ξ_1 равен d, и используя лемму 1.4, получаем соотношения

$$\mathsf{P}\{\nu=n\}=\frac{d}{n\sqrt{2\pi Bn}}(1+o(1)),$$

$$\mathsf{P}\{\nu_{k_t}=n-1-k_1-\ldots-k_{t-1}\}=\frac{k_t d}{n\sqrt{2\pi Bn}}(1+o(1)).$$

Подставляя эти выражения в (9), находим, что при $n=sd+1\to\infty$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\mu(0)=1,\ \mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t\mid\nu=n\}=\\ =k_t\mathsf{P}\{\mu(0)=1,\ \mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t\}(1+o(1)).\end{aligned}$$

Заметим, что для целых положительных $k_1,\ \ldots,\ k_t$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\mu(0)=1,\ \mu(1)=k_1,\ \ldots,\ \mu(t)=k_t\}=\\ =\mathsf{P}\{\xi_1=k_1\}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{k_1}=k_2\}\ldots\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{k_{t-1}}=k_t\}.\end{aligned}$$

В частности, для $t=1$ при $n\to\infty$ по значениям, кратным d, для любого фиксированного $k=1,\ 2,\ \ldots$

$$\mathsf{P}\{\mu(1)=k\mid\nu=n\}\to kp_k.\qquad(10)$$

Рассмотрим теперь условные распределения $\mu(t)$ при $n,\ t\to\infty$.

Теорема 3. *Если в критическом ветвящемся процессе $\mu(t)$ дисперсия числа потомков одной частицы равна B, то при $n,\ t\to\infty$, $tn^{-1/2}\to 0$ для любого фиксированного $x>0$*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{2\mu(t)}{Bt}\leqslant x\mid \nu=n\right\}\to 1-e^{-x}-xe^{-x}.$$

Доказательство. Для произвольных положительных $x_1<x_2$ обозначим

$$k_1=x_1Bt/2,\qquad k_2=x_2Bt/2.$$

Справедливы равенства

$$\mathsf{P}\left\{x_1\leqslant\frac{2\mu(t)}{Bt}\leqslant x_2\mid\nu=n\right\}=\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}\mathsf{P}\{\mu(t)=k\mid\nu=n\}=$$

$$=\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}\sum_{s=1}^{n-k}\mathsf{P}\{\mu(t)=k,\ \nu(t)=s\}\frac{\mathsf{P}\{\nu_k=n-s\}}{\mathsf{P}\{\nu=n\}},\tag{11}$$

где ν — общее число частиц за все время эволюции процесса $\mu(t)$, начинающегося с одной частицы, ν_k — общее число частиц за все время эволюции начинающегося с k частиц ветвящегося процесса с производящей функцией числа потомков одной частицы, задаваемой равенством (1), $\nu(t)=\mu(0)+\ldots+\mu(t-1)$. Согласно лемме 1.3

$$\mathsf{P}\{\nu_k=n\}=\frac{k}{n}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_n=n-k\},$$

где случайные величины $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ независимы и имеют производящую функцию (1). Обозначая d максимальный шаг распределения ξ_1 и учитывая, что $\mathsf{M}\xi_1=1$ и $\mathsf{D}\xi_1=B$, с помощью локальной теоремы 1.4.2 о сходимости к нормальному распределению находим, что

$$\mathsf{P}\{\nu=n\}=\frac{1}{n}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_n=n-1\}=\frac{d}{n\sqrt{2\pi Bn}}(1+o(1)),\tag{12}$$

и если $s/n\to 0$, то равномерно относительно k, $k_1\leqslant k\leqslant k_2$,

$$\mathsf{P}\{\nu_k=n-s\}=\frac{kd}{n\sqrt{2\pi Bn}}(1+o(1)).\tag{13}$$

Выберем $\gamma=t/\sqrt{n}$ и разобьем суммирование в (11) по параметру s на две части: на сумму по s от 1 до γn и на сумму от γn до $n-k$. Согласно (12) и (13)

$$\mathsf{P}\{\nu_k=n-s\}/\mathsf{P}\{\nu=n\}=k(1+o(1)) \qquad (14)$$

равномерно относительно $s\leqslant\gamma n$ и k, $k_1\leqslant k\leqslant k_2$. Используя (14), находим, что

$$I_1(k_1, k_2)= \\ =\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}\sum_{1\leqslant s\leqslant\gamma n}\mathsf{P}\{\mu(t)=k,\ \nu(t)=s\}\frac{\mathsf{P}\{\nu_k=n-s\}}{\mathsf{P}\{\nu=n\}}= \\ =\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}k\sum_{1\leqslant s\leqslant\gamma n}\mathsf{P}\{\mu(t)=k,\ \nu(t)=s\}(1+o(1))= \\ =\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}k\Big(\mathsf{P}\{\mu(t)=k\}-\sum_{s>\gamma n}\mathsf{P}\{\mu(t)=k,\ \nu(t)=s\}\Big)\times \\ \times(1+o(1))=\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}k\mathsf{P}\{\mu(t)=k\}(1+o(1))- \\ -I_2(k_1, k_2)(1+o(1)),$$

где

$$I_2(k_1, k_2)=\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}k\sum_{s>\gamma n}\mathsf{P}\{\mu(t)=k,\ \nu(t)=s\}.$$

Учитывая, что $\mathsf{M}\nu(t)=t$, и применяя неравенство Чебышёва, находим, что

$$\mathsf{P}\{\nu(t)>\gamma n\}\leqslant\frac{\mathsf{M}\nu(t)}{\gamma n}=\frac{t}{\gamma n}.$$

С использованием этого неравенства для $I_2(k_1, k_2)$ получаем оценку

$$I_2(k_1, k_2)\leqslant k_2\mathsf{P}\{\nu(t)>\gamma n\}\leqslant\frac{x_2Bt^2}{2\gamma n}=\frac{x_2B\gamma}{2},$$

и при выполнении условий теоремы $I_2(k_1, k_2)\to 0$.

Согласно теореме 1.2 при $t\to\infty$

$$\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}=\frac{2}{Bt}(1+o(1)),$$

поэтому при $x=2k/(Bt)$

$$k\mathsf{P}\{\mu(t)=k\}=x\mathsf{P}\{\mu(t)=k\,|\,\mu(t)>0\}(1+o(1)).$$

Согласно теореме 1.3 распределение $2\mu(t)/(Bt)$ при $t\to\infty$ слабо сходится к показательному распределению, поэтому при n, $t\to\infty$, $t^2/n\to 0$

$$\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}k\mathsf{P}\{\mu(t)=k\}= \\ =\sum_{x_1\leqslant x\leqslant x_2}x\mathsf{P}\left\{\frac{2\mu(t)}{Bt}=x\,|\,\mu(t)>0\right\}(1+o(1))= \\ =\int_{x_1}^{x_2}xe^{-x}\,dx\,(1+o(1))$$

и, следовательно,

$$I_1(k_1, k_2) \to \int_{x_1}^{x_2} xe^{-x}\,dx. \tag{15}$$

Оценим теперь

$$I_3(k_1, k_2) = \sum_{k_1 \leqslant k \leqslant k_2} \sum_{s > \gamma n} \mathsf{P}\{\mu(t)=k, \ \nu(t)=s\} \frac{\mathsf{P}\{\nu_k = n-s\}}{\mathsf{P}\{\nu = n\}}.$$

Докажем, что в условиях теоремы

$$I_3(k_1, k_2) \to 0. \tag{16}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и покажем, что, начиная с некоторых значений параметров t и n, величина $I_3(k_1, k_2) \leqslant \varepsilon$. При достаточно малом ε существуют такие y_1 и y_2, что $y_1 = 2l_1/(Bt)$, $y_2 = 2l_2/(Bt)$, $l_1 \leqslant k_1$, $l_2 \geqslant k_2$, и

$$\int_{y_1}^{y_2} xe^{-x}\,dx = 1 - \varepsilon/2.$$

Поскольку

$$1 \geqslant \mathsf{P}\{l_1 \leqslant \mu(t) \leqslant l_2 \mid \nu = n\} = I_1(l_1, l_2) + I_3(l_1, l_2),$$

для любых l_1, l_2 справедлива оценка

$$I_3(l_1, l_2) \leqslant 1 - I_1(l_1, l_2)$$

и, кроме того,

$$I_3(k_1, k_2) \leqslant I_3(l_1, l_2) \leqslant 1 - I_1(l_1, l_2). \tag{17}$$

Как только что доказано, в условиях теоремы

$$I_1(l_1, l_2) \to \int_{y_1}^{y_2} xe^{-x}\,dx = 1 - \varepsilon/2,$$

поэтому, начиная с некоторых значений параметров t и n, величина $I_1(l_1, l_2) \geqslant 1 - \varepsilon$ и из (17) следует оценка

$$I_3(k_1, k_2) \leqslant 1 - I_1(l_1, l_2) \leqslant \varepsilon.$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из (11), (15) и (16), поскольку

$$\int_0^x ye^{-y}\,dy = 1 - e^{-x} - xe^{-x}.$$

§ 4. Условное распределение момента вырождения критического ветвящегося процесса

Рассмотрим начинающийся с одной частицы критический ветвящийся процесс $\mu(t)$, для которого число потомков одной частицы имеет производящую функцию

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r z^r$$

и дисперсию B. Из теоремы 3.3 следует, что при t, $n \to \infty$ и $t/\sqrt{n} \to 0$ процесс $\mu(t)$ с общим числом частиц $\nu = n$ не вырождается с вероятностью, стремящейся к единице. Вырождение процесса происходит в моменты t, имеющие порядок $\sqrt{n}$. Условное распределение $\mu(t)$ при $t/\sqrt{n} \to x$, $0 < x < \infty$, складывается из стремящейся к положительной постоянной вероятности $\mathsf{P}\{\mu(t) = 0 \mid \nu = n\} = \mathsf{P}\{\tau \leqslant t \mid \nu = n\}$, где τ — момент вырождения процесса $\mu(t)$, и вероятностей $\mathsf{P}\{\mu(t) = k \mid \nu = n\}$, где k — целые положительные числа. Прежде чем изучить эти составляющие условного распределения $\mu(t)$, продолжим исследования характеристик критического ветвящегося процесса, начатые в § 1. Обозначим

$$\nu(0) = 0, \quad \nu(t) = \mu(0) + \mu(1) + \ldots + \mu(t-1), \quad t = 1, 2, \ldots$$

Введем производящие функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\nu = n\} z^n,$$

$$F_t(y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\mu(t) = k, \ \nu(t) = n\} y^k z^n, \tag{1}$$

$$f_t(z) = F_t(0, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\mu(t) = 0, \ \nu = n\} z^n,$$

$$\Delta_t(z) = f(z) - f_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\mu(t) > 0, \ \nu = n\} z^n.$$

Лемма 1. *Для производящей функции $f(z)$ справедливо равенство*

$$f(z) = zF(f(z)). \tag{2}$$

Доказательство. Учитывая эволюцию начальной частицы, запишем формулу полной вероятности

$$\mathsf{P}\{\nu = n\} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\mu(1) = m\} \mathsf{P}\{\nu = n \mid \mu(1) = m\}. \tag{3}$$

При $\mu(1)=m$ потомки m частиц, составляющих первое поколение процесса, порождают m независимых ветвящихся процессов, в каждом из которых общее число частиц до вырождения имеет такое же распределение, как и в исходном ветвящемся процессе. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\nu=n \mid \mu(1)=m\}=\sum_L \mathsf{P}\{\nu=l_1\}\ \ldots\ \mathsf{P}\{\nu=l_m\},$$

где суммирование по L означает суммирование по целым положительным $l_1, \ldots, l_m$, $l_1+\ldots+l_m=n-1$. Подставляя это выражение в (3), умножая обе части полученного равенства на z^n и суммируя по n, находим, что

$$f(z)=z\sum_{m=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\mu(1)=m\}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_L \mathsf{P}\{\nu=l_1\}z^{l_1}\ldots\mathsf{P}\{\nu=l_m\}z^{l_m}=$$
$$=z\sum_{m=0}^{\infty}p_m\left(\sum_{l=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\nu=l\}z^l\right)^m=zF(f(z)).$$

Лемма 2. *Для производящей функции $F_t(y, z)$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &F_{t+1}(y, z)=zF(F_t(y, z)), \qquad t=0, 1, \ldots, \\ &F_0(y, z)=y. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей леммы, по формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}\{\mu(t+1)=k,\ \nu(t+1)=n\}=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\mu(1)=m\}\mathsf{P}\{\mu(t+1)=k, \nu(t+1)=n \mid \mu(1)=m\}=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}p_m\sum_{LK}\mathsf{P}\{\mu(t)=k_1, \nu(t)=l_1\}\ldots\mathsf{P}\{\mu(t)=k_m, \nu(t)=l_m\},$$

где суммирование по LK означает суммирование по целым положительным $l_1, \ldots, l_m$ и целым неотрицательным $k_1, \ldots, k_m$ таким, что $l_1+\ldots+l_m=n-1$, $k_1+\ldots+k_m=k$. Умножая обе части равенства на $y^k z^n$ и суммируя по k и n, находим, что

$$F_{t+1}(y, z)=z\sum_{m=0}^{\infty}p_m F_t^m(y, z)=zF(F_t(y, z)),$$

при этом

$$F_0(y, z)=\mathsf{P}\{\mu(0)=1,\ \nu(0)=0\}\,y=y.$$

Докажем локальную предельную теорему для условного распределения $\mathsf{P}\{\nu=n\mid\mu(t)>0\}$. Для этого найдем оценки характеристической функции

$$\varphi_t(\theta)=\Delta_t(e^{i\theta})/\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}$$

в различных областях изменения θ.

Лемма 3. *При* $|z|\leqslant 1$ *и* $k=0,\ 1,\ \ldots,\ t$

$$|\Delta_t(z)|\leqslant|\Delta_k(z)|(1-p_0(1-|f(z)|))^{t-k}. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что $f_t(z)=F_t(0,\ z)$, поэтому функции $f(z)$ и $f_t(z)$ удовлетворяют соотношениям (2) и (4) и

$$\Delta_t(z)=z(F(f(z))-F(f_t(z)))=$$
$$=z\Delta_{t-1}(z)\sum_{k=1}^{\infty}p_k\sum_{l=1}^{k}f_{t-1}^{l-1}(z)f^{k-l}(z).$$

Поскольку $|f(z)|\leqslant 1$, $|f_t(z)|\leqslant 1$ при $|z|\leqslant 1$, из полученного равенства, учитывая критичность процесса, находим, что

$$\Delta_t(z)|\leqslant|\Delta_{t-1}(z)|\sum_{k=1}^{\infty}p_k(k|f(z)|+(1-|f(z)|))=$$
$$=|\Delta_{t-1}(z)|(|f(z)|+(1-p_0)(1-|f(z)|))=$$
$$=|\Delta_{t-1}(z)|(1-p_0(1-|f(z)|)).$$

Отсюда следует оценка (5).

Следствие 1. *Если максимальный шаг распределения числа потомков одной частицы равен d, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $q<1$, что при $\varepsilon\leqslant|\theta|\leqslant\pi/d$*

$$|\Delta_t(e^{i\theta})|\leqslant q^t. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку $\Delta_0(z)=f(z)$, оценка (5) при $k=0$ дает неравенство

$$|\Delta_t(z)|\leqslant(1-p_0(1-|f(z)|))^t. \tag{7}$$

Максимальный шаг распределения ν равен d, поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $q_1<1$, что $|f(e^{i\theta})|\leqslant q_1$ при $\varepsilon\leqslant|\theta|\leqslant\pi/d$. Оценка (6) следует теперь из (7) при $q=1-p_0(1-q_1)<1$.

Лемма 4. *При* $z\to 1$, $|z|\leqslant 1$,

$$f(z)=1-\sqrt{2(1-z)/B}\,(1+o(1)).$$

Доказательство. Поскольку для производящей функции $F(z)$ существует левая производная $F''(1)=B$

и $F'(1)=1$, из уравнения (2) получаем, что

$$f(z)=z(f(z)+B(1-f(z))^2/2)+\varepsilon(z)(1-f(z))^2,$$

где $\varepsilon(z)\to 0$ при $z\to 1$, $|z|\leqslant 1$. Разрешая это квадратное уравнение относительно $f(z)$ и выбирая ветвь корня из условия $0\leqslant f(z)\leqslant 1$ при действительных z, $0\leqslant z\leqslant 1$, приходим к указанному в лемме выражению.

Следствие 2. *Найдутся такие положительные* ε, c_1, c_2, *что при* $|\theta|\leqslant\varepsilon$

$$|\Delta_t(e^{i\theta})|\leqslant c_1 t^{-1}e^{-c_2 t\sqrt{|\theta|}}. \tag{8}$$

Доказательство. В силу леммы 4 при $\theta\to 0$

$$|f(e^{i\theta})|=\left|1-\sqrt{2(1-e^{i\theta})/B}\,(1+o(1))\right|=1-\sqrt{|\theta|/B}\,(1+o(1))$$

и найдутся такие положительные постоянные c_3 и ε, что при $|\theta|\leqslant\varepsilon$

$$|f(e^{i\theta})|\leqslant 1-c_3\sqrt{|\theta|}. \tag{9}$$

Для любого натурального k при $|z|\leqslant 1$

$$|\Delta_k(z)|\leqslant\Delta_k(1)=\mathsf{P}\{\mu(k)>0\}$$

и согласно теореме 1.2 при $k\to\infty$

$$\mathsf{P}\{\mu(k)>0\}=\frac{2}{Bk}(1+o(1)), \tag{10}$$

поэтому найдется такое c_4, что

$$|\Delta_k(z)|\leqslant c_4k^{-1}. \tag{11}$$

Учитывая оценки (9) и (11), из (5) получаем, что существует такое $\varepsilon>0$, что при $|\theta|\leqslant\varepsilon$

$$|\Delta_t(e^{i\theta})|\leqslant c_4k^{-1}\left(1-c_3p_0\sqrt{|\theta|}\right)^{t-k}\leqslant c_4k^{-1}e^{-c_3p_0\sqrt{|\theta|}(t-k)}.$$

Выбирая $k=[t/2]$, получаем утверждение леммы.

Рассмотрим теперь поведение характеристической функции $\varphi_t(\theta)$ в окрестности нуля.

Лемма 5. *Если* n, $t\to\infty$ *так, что* $t(B/n)^{1/2}\to x$, *где* x — *положительная постоянная, то при любом фиксированном* θ

$$\varphi_t\left(\frac{\theta}{n}\right)\to\frac{x\sqrt{-2i\theta}\,e^{-x\sqrt{-2i\theta}}}{1-e^{-x\sqrt{-2i\theta}}}. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку левая производная $F''(1)=B$, для $F(z)$ справедливо разложение

$$F(z)=F(z_0)+F'(z_0)(z-z_0)+(F''(z_0)+\varepsilon_1(z, z_0))(z-z_0)^2/2,$$

где $\varepsilon(z, z_0)\to 0$ при $z\to z_0$, $|z|\leqslant 1$, равномерно относительно z_0, $|z_0|\leqslant 1$. Поэтому в силу (2) и (4)

$$\Delta_t(z)=z(F(f(z))-F(f_t(z)))=$$
$$=z\Delta_{t-1}(z)F'(f(z))-z(F''(f(z))+\varepsilon_2(t, z))\Delta_{t-1}^2(z)/2, \quad (13)$$

где $\varepsilon_2(t, z)\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно относительно $|z|\leqslant 1$. Обозначим S_t множество точек z, $|z|\leqslant 1$, в которых $\Delta_t(z)=0$. Из (13) следует, что $S_{t-1}\subseteq S_t$ и для $|z|\leqslant 1$, $z\notin S_t$,

$$\left|\frac{\Delta_t(z)}{\Delta_{t-1}(z)}-zF'(f(z))\right|\leqslant c\Delta_{t-1}(1),$$

где c — некоторая постоянная и $\Delta_{t-1}(1)=\mathbf{P}\{\mu(t-1)>0\}\to 0$ при $t\to\infty$. Учитывая, что $F'(1)=1$, находим, что в достаточно малой окрестности единицы $\Delta_t(z)/\Delta_{t-1}(z)$ близко к единице и, следовательно, начиная с некоторого t_0, множества нулей функций $\Delta_t(z)$ и $\Delta_{t-1}(z)$ в этой окрестности совпадают. С другой стороны, при фиксированном t при $z\to 1$, $|z|\leqslant 1$,

$$\Delta_t(z)\to\mathbf{P}\{\mu(t)>0\}>0$$

и в круге $|z|\leqslant 1$ существует окрестность точки единица, в которой $|\Delta_t(z)|>0$ для $t=0, 1, \ldots, t_0$.

Таким образом, в круге $|z|\leqslant 1$ существует окрестность точки единица, в которой $|\Delta_t(z)|>0$ при всех $t=0, 1, \ldots$ В этой окрестности

$$\Delta_{t-1}(z)=\frac{\Delta_t(z)}{zF'(f(z))}(1+\varepsilon_3(t, z)), \quad (14)$$

где $\varepsilon_3(t, z)\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно относительно z из этой окрестности.

Из (13) и (14) следует, что

$$\Delta_t(z)=zF'(f(z))\Delta_{t-1}(z)-\left(\frac{F''(f(z))}{2F'(f(z))}+\varepsilon(t, z)\right)\Delta_t(z)\Delta_{t-1}(z), \quad (15)$$

где $\varepsilon(t, z)\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно относительно $\sqrt{z}$ в этой окрестности.

Обозначим $h_t(z)=1/\Delta_t(z)$, $a(z)=zF'(f(z))$, $b(z)=F''(f(z))/(2F'(f(z)))$. В этих обозначениях в рассматриваемой окрестности единицы уравнение (15) после деления обеих его частей на $\Delta_t(z)\Delta_{t-1}(z)$ принимает вид

$$h_{t-1}(z)=a(z)h_t(z)-b(z)-\varepsilon(t,\ z). \tag{16}$$

Вводя производящую функцию

$$H(u)=\sum_{t=0}^{\infty} h_t(z)u^t$$

и учитывая, что $\Delta_0(z)=f(z)$, из уравнения (16) находим, что

$$H(u)=\frac{1}{f(z)(1-u/a(z))}+\frac{ub(z)}{a(z)(1-u)(1-u/a(z))}+$$
$$+\frac{1}{a(z)(1-u/a(z))}\sum_{t=1}^{\infty}\varepsilon(t,\ z)u^t,$$

откуда, разлагая $u/(1-u)(1-u/a(z))$ на простые дроби, для $h_t(z)$ получаем выражение

$$h_t(z)=\frac{1}{a^t(z)}\left(\frac{1}{f(z)}+\frac{b(z)(1-a^t(z))}{1-a(z)}+\sum_{l=1}^{t}\varepsilon(l,\ z)a^l(z)\right). \tag{17}$$

Используя существование второй производной $F''(1)=B$ и лемму 4, легко находим, что при $n,\ t\to\infty,\ t(B/n)^{1/2}\to x$, $0<x<\infty$ и $z=e^{i\theta/n}$

$$\begin{aligned} a(z)&=1-\sqrt{-2iB\theta/n}\,(1+o(1)),\\ a^t(z)&=e^{-x\sqrt{-2i\theta}}(1+o(1)),\\ b(z)&=B/2\,(1+o(1)).\end{aligned} \tag{18}$$

Поскольку в рассматриваемой окрестности единицы $|\varepsilon(l,\ z)|\leqslant\varepsilon(l)$, $\varepsilon(l)\to 0$ при $l\to\infty$ и в силу критичности ветвящегося процесса $|a(z)|=|zF'(z)|\leqslant F'(1)=1$, при $t\to\infty$

$$\frac{1}{t}\left|\sum_{l=0}^{t}\varepsilon(l,\ z)a^l(z)\right|\leqslant\frac{1}{t}\sum_{l=0}^{t}\varepsilon(l)\to 0.$$

Подставляя эти оценки в (17) и учитывая равенство

$$\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}=2/(Bt)(1+o(1)),$$

находим, что в условиях теоремы выполняется соотношение (12).

Прямым следствием леммы 5 является следующее утверждение.

Теорема 1. *В критическом ветвящемся процессе $\mu(t)$ условное распределение ν/n при условии $\mu(t)>0$ при $n, t \to \infty$, $t(B/n)^{1/2} \to x$, $0 < x < \infty$, слабо сходится к распределению с характеристической функцией*

$$\psi(\theta) = \frac{x\sqrt{-2i\theta}\, e^{-x\sqrt{-2i\theta}}}{1-e^{-x\sqrt{-2i\theta}}}$$

и плотностью распределения

$$g(y) = \frac{x}{y\sqrt{2\pi y}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2x^2}{y} - 1\right) e^{-k^2x^2/2y}, \qquad y > 0.$$

Доказательство. В условиях теоремы характеристическая функция $\varphi_t(\theta/n)$ условного распределения ν/n при условии $\mu(t)>0$, как показано в лемме 5, сходится к

$$\psi(\theta) = \frac{x\sqrt{-2i\theta}\, e^{-x\sqrt{-2i\theta}}}{1-e^{-x\sqrt{-2i\theta}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\theta), \qquad \theta \neq 0,$$

где

$$\psi_k(\theta) = x\sqrt{-2i\theta}\, e^{-kx\sqrt{-2i\theta}}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Поскольку $\psi_k(\theta)$ является преобразованием Фурье функции

$$g_k(y) = \frac{x}{y\sqrt{2\pi y}} \left(\frac{k^2x^2}{y} - 1\right) e^{-k^2x^2/2y}, \qquad y > 0,$$

характеристической функции $\psi(\theta)$ соответствует указанная в теореме плотность

$$g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(y).$$

Для критического ветвящегося процесса справедлив и локальный вариант этого утверждения.

Теорема 2. *Если $n, t \to \infty$ так, что $t(B/n)^{1/2} \to x$, $0 < x < \infty$, то для критического ветвящегося процесса $\mu(t)$ с распределением числа потомков одной частицы, имеющим максимальный шаг d и дисперсию B, равномерно относительно целых s в любом интервале вида $0 < y_0 \leqslant y = (sd+1)/n \leqslant y_1 < \infty$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu}{n} = y \mid \mu(t) > 0\right\} = \frac{d}{n} g(y)(1+o(1)),$$

где, как и в теореме 1,

$$g(y)=\frac{x}{y\sqrt{2\pi y}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2x^2}{y}-1\right)e^{-k^2x^2/2y}.$$

Доказательство. Как показано в теореме 1, плотности $g(y)$ соответствует характеристическая функция $\psi(\theta)$. Так как $\psi(\theta)$ абсолютно интегрируема, для нее справедлива формула обращения и

$$g(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta y}\psi(\theta)\,d\theta.$$

С другой стороны, по формуле обращения для целочисленных случайных величин

$$\mathsf{P}\{\nu=sd+1\mid\mu(t)>0\}=\frac{d}{2\pi}\int_{-\pi/d}^{\pi/d}e^{-iu(sd+1)}\varphi_t(u)\,du=$$

$$=\frac{d}{2\pi n}\int_{-\pi n/d}^{\pi n/d}e^{-i\theta y}\varphi_t\left(\frac{\theta}{n}\right)d\theta,$$

где $y=(sd+1)/n$. Покажем, что при выполнении условий теоремы разность

$$R(y)=2\pi nd^{-1}\mathsf{P}\{\nu=sd+1\mid\mu(t)>0\}-2\pi g(y)$$

стремится к нулю равномерно относительно $y=(sd+1)/n$. Представим эту разность в виде суммы четырех интегралов: $R(y)=I_1+I_2+I_3+I_4$, где

$$I_1=\int_{|\theta|\leqslant A}e^{-i\theta y}\left(\varphi_t\left(\frac{\theta}{n}\right)-\psi(\theta)\right)d\theta,$$

$$I_2=-\int_{|\theta|>A}e^{-i\theta y}\psi(\theta)\,d\theta,$$

$$I_3=\int_{A<|\theta|\leqslant\varepsilon n}e^{-i\theta y}\varphi_t\left(\frac{\theta}{n}\right)d\theta,$$

$$I_4=\int_{\varepsilon n<|\theta|\leqslant\pi n/d}e^{-i\theta y}\varphi_t\left(\frac{\theta}{n}\right)d\theta,$$

выбор постоянных A и ε будет ясен из последующего.

Величину $|I_2|$ в силу абсолютной интегрируемости $\psi(\theta)$ можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно большого A.

В силу (10) и следствия 2 найдутся такие положительные постоянные c, g и ε, что при $|\theta/n| \leqslant \varepsilon$

$$\left|\varphi_t\left(\frac{\theta}{n}\right)\right| = |\Delta_t(e^{i\theta/n})|/\mathsf{P}\{\mu(t) > 0\} \leqslant ce^{-g\sqrt{|\theta|}}.$$

Для такого ε

$$|I_3| \leqslant \int\limits_{A<|\theta|\leqslant\varepsilon n} \left|\varphi_t\left(\frac{\theta}{n}\right)\right| d\theta \leqslant c \int\limits_{A<|\theta|} e^{-g\sqrt{|\theta|}} d\theta$$

и $|I_3|$ можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

При любом фиксированном A интеграл $I_1 \to 0$, поскольку в силу леммы 5 при выполнении условий теоремы $\varphi_t(\theta/n) \to \psi(\theta)$ равномерно в любом конечном интервале.

Наконец, используя оценку следствия 1, находим, что для некоторого $q < 1$

$$|I_4| \leqslant n \int\limits_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi/d} |\varphi_t(u)|\,du \leqslant 2\pi n d^{-1} q^t$$

и в условиях теоремы $|I_4| \to 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь условное распределение момента вырождения τ критического ветвящегося процесса при условии, что общее число частиц ν до вырождения процесса равно n.

Теорема 3. *Если в критическом ветвящемся процессе $\mu(t)$ распределение числа потомков одной частицы имеет максимальный шаг d, дисперсию B и $n = sd + 1$, то при целых $s \to \infty$ для любого фиксированного $x > 0$*

$$\mathsf{P}\left\{\left(\frac{B}{n}\right)^{1/2} \tau \leqslant x \,\middle|\, \nu = n\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - k^2x^2)\, e^{-k^2x^2/2} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\mathsf{P}\{\tau \leqslant t \mid \nu = n\} = \mathsf{P}\{\mu(t) = 0,\ \nu = n\}/\mathsf{P}\{\nu = n\} =$$
$$= 1 - \frac{\mathsf{P}\{\mu(t) > 0\}\,\mathsf{P}\{\nu = n \mid \mu(t) > 0\}}{\mathsf{P}\{\nu = n\}}.$$

Согласно теореме 1.2 при $t \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\mu(t) > 0\} = 2/(Bt)\,(1 + o(1))$$

и согласно лемме 1.4 при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\nu = n\} = \frac{d}{n\sqrt{2\pi B n}}(1 + o(1)),$$

поэтому при $x=t(B/n)^{1/2}$

$$\mathsf{P}\left\{\left(\frac{B}{n}\right)^{1/2}\tau\leqslant x\mid\nu=n\right\}=$$
$$=1-\frac{2n\sqrt{2\pi}}{xd}\,\mathsf{P}\{\nu=n\mid\mu(t)>0\}\,(1+o(1)).$$

Используя теорему 2 при $y=1$, из последнего соотношения получаем, что

$$\mathsf{P}\left\{\left(\frac{B}{n}\right)^{1/2}\tau\leqslant x\mid\nu=n\right\}=$$
$$=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(1-k^2x^2)e^{-k^2x^2/2}\,(1+o(1))=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1-k^2x^2)\,e^{-k^2x^2/2}\,(1+o(1)).$$

Теорема 4. *Если n, $t\to\infty$ так, что $t(B/n)^{1/2}\to\beta$, где β — положительная постоянная, то совместное распределение $(2\mu(t)/(Bt),\ \nu(t)/n)$ при условии, что $\mu(t)>0$, слабо сходится к распределению с характеристической функцией*

$$\psi(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{\operatorname{sh}(\beta\sqrt{-2i\theta_2})}{\beta\sqrt{-2i\theta_2}}-i\theta_1\left(\frac{\operatorname{sh}(\beta\sqrt{-i\theta_2/2})}{\beta\sqrt{-i\theta_2/2}}\right)^2\right)^{-1}.$$

Доказательство. Обозначим

$$R_t(y,z)=F_t(y,z)-F_t(0,z)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathsf{P}\{\mu(t)=k,\ \nu(t)=n\}\,y^kz^n,$$

где производящая функция $F_t(y,z)$ определена соотношением (1). Характеристическая функция условного распределения $(\mu(t),\ \nu(t))$ при условии, что $\mu(t)>0$, равна

$$\varphi_t(\theta_1,\theta_2)=R_t(e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2})/\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}. \tag{19}$$

С использованием функций

$$\Delta_t(y,z)=f(z)-F_t(y,z),\quad t=0,1,\ldots,$$

где $f(z)$ определена соотношением (1), функцию $R_t(y,z)$ можно представить в виде

$$R_t(y,z)=\Delta_t(0,z)-\Delta_t(y,z)$$

и, следовательно,

$$\varphi_t(\theta_1,\theta_2)=\frac{\Delta_t(0,e^{i\theta_2})-\Delta_t(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2})}{\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}}. \tag{20}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что в условиях теоремы для любых фиксированных θ_1, θ_2

$$\varphi_t(2\theta_1/(Bt),\ \theta_2/n) \longrightarrow \psi(\theta_1,\ \theta_2).$$

Функция $\Delta_t(0,\ z) = \Delta_t(z)$ изучена в лемме 5, функция $\Delta_t(y,\ z)$ исследуется аналогично. Используя равенства (2) и (4), так же, как при доказательстве леммы 5, находим, что

$$\Delta_t(y,\ z) = zF'(f(z))\,\Delta_{t-1}(y,\ z) - \\ - z\,(F''(f(z)) + \varepsilon_1(t,\ y,\ z))\,\Delta^2_{t-1}(y,\ z)/2, \qquad (21)$$

где $\varepsilon_1(t,\ y,\ z) \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow \infty$ равномерно относительно $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$. Обозначим S_t множество точек $(y,\ z)$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, в которых $\Delta_t(y,\ z) = 0$. Из (21) ясно, что $S_{t-1} \subseteq S_t$ и для $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, $(y,\ z) \notin S_{t-1}$,

$$\left| \frac{\Delta_t(y,\ z)}{\Delta_{t-1}(y,\ z)} - zF'(f(z)) \right| \leqslant c\,|\Delta_{t-1}(y,\ z)|,$$

где c — некоторая постоянная и

$$|\Delta_{t-1}(y,\ z)| \leqslant \mathsf{P}\{\mu(t) > 0\}.$$

Учитывая, что $F'(1) = 1$ и $f(z) \longrightarrow 1$ при $z \longrightarrow 1$, находим, что в достаточно малой окрестности точки $(1,\ 1)$ отношение $\Delta_t(y,\ z)/\Delta_{t-1}(y,\ z)$ близко к единице и, следовательно, начиная с некоторого значения t_0, множества нулей функций $\Delta_t(y,\ z)$ и $\Delta_{t-1}(y,\ z)$ в этой окрестности совпадают. С другой стороны, используя представление $f(z)$ из леммы 4 и тот факт, что производные

$$\frac{\partial F_t(1,\ 1)}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial F_t(1,\ 1)}{\partial z} = \mathsf{M}\nu(t) = t,$$

легко находим, что при $y \longrightarrow 1$, $z \longrightarrow 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, при любом фиксированном $t = 0,\ 1,\ \ldots,\ t_0$

$$\Delta_t(y,\ z)/\Delta_{t-1}(y,\ z) \longrightarrow 1.$$

Поэтому при любом t множество нулей функции $\Delta_t(y,\ z)$ в достаточно малой окрестности точки $(1,\ 1)$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, совпадает с множеством нулей функции $\Delta_0(y,\ z) = f(z) - y$, состоящим из одной точки $(1,\ 1)$. Итак, в множестве $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$ существует окрестность точки $(1,\ 1)$, в которой для любого t функция $\Delta_t(y,\ z)$ обращается в нуль лишь в точке $(1,\ 1)$. В этой окрестности с исключенной точкой $(1, 1)$

$$\Delta_{t-1}(y, z)=\frac{\Delta_t(y, z)}{zF'(f(z))}(1+\varepsilon_2(t, y, z)), \qquad (22)$$

где $\varepsilon_2(t, y, z)$ ограничена и стремится к нулю при $t\to\infty$ равномерно относительно (y, z) из этой окрестности. Из (21) и (22) следует, что в этой окрестности

$$\Delta_t(y, z)=zF'(f(z))\Delta_{t-1}(y, z)-\\ -(F''(f(z))/(2F'(f(z)))+\varepsilon(t, y, z))\Delta_t(y, z)\Delta_{t-1}(y, z),$$

где $|\varepsilon(t, y, z)|\leqslant\varepsilon(t)$ для всех $t=0, 1, \ldots$ и $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Таким образом, $\Delta_t(y, z)$ удовлетворяют таким же соотношениям, что и $\Delta_t(z)$. Поэтому, вводя для функций $h_t(y, z)=1/\Delta_t(y, z)$ производящую функцию

$$H(u)=\sum_{t=0}^{\infty}h_t(y, z)u^t$$

и учитывая, что $\Delta_0(y, z)=f(z)-y$, так же, как при доказательстве леммы 5, приходим к равенству

$$h_t(y, z)=\\ =\frac{1}{a^t(z)}\left(\frac{1}{f(z)-y}+\frac{b(z)(1-a^t(z))}{1-a(z)}+\sum_{l=1}^{t}\varepsilon(l, y, z)a^l(z)\right), \qquad (23)$$

где, как и ранее,

$$a(z)=zF'(f(z)), \quad b(z)=F''(f(z))/(2F'(f(z))).$$

Используя лемму 4 и соотношения (18), находим, что при $n, t\to\infty$, $t(B/n)^{1/2}\to\beta$, $0<\beta<\infty$, $y=e^{2i\theta_1/(Bt)}$, $z=e^{i\theta_2/n}$

$$\begin{aligned} &a(z)=1-\sqrt{-2iB\theta_2/n}(1+o(1)), \quad b(z)=B/2+o(1),\\ &a^t(z)=e^{-\beta\sqrt{-2i\theta_2}}(1+o(1)),\\ &f(z)-y=1-\sqrt{2(1-z)/B}(1+o(1))-y=\\ &\qquad =-\sqrt{-2i\theta_2/(Bn)}-2i\theta_1/(Bt)+o(t^{-1}). \end{aligned} \qquad (24)$$

Поскольку

$$\frac{1}{t}\left|\sum_{l=0}^{t}\varepsilon(l, y, z)a^l(z)\right|\leqslant\frac{1}{t}\sum_{l=0}^{t}\varepsilon(l)\to 0,$$

$$\mathbf{P}\{\mu(t)>0\}=2/(Bt)(1+o(1)),$$

из соотношений (23) и (24) следует, что

$$\Delta_t\left(e^{2i\theta_1/(Bt)},\ e^{i\theta_2/n}\right)/\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}=$$
$$=e^{-\beta\sqrt{-2i\theta_2}}\left(\frac{1}{-i\theta_1-\beta\sqrt{-i\theta_2/2}}+\frac{1-e^{-\beta\sqrt{-2i\theta_2}}}{\beta\sqrt{-2i\theta_2}}\right)^{-1}(1+o(1)). \quad (25)$$

Согласно лемме 5 в условиях теоремы

$$\frac{\Delta_t\left(0,\ e^{i\theta_2/n}\right)}{\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}}=\frac{\beta\sqrt{-2i\theta_2}\,e^{-\beta\sqrt{-2i\theta_2}}}{1-e^{-\beta\sqrt{-2i\theta_2}}}(1+o(1)). \quad (26)$$

Используя (25) и (26), находим, что характеристическая функция

$$\varphi_t\left(\frac{2\theta_1}{Bt},\ \frac{\theta_2}{n}\right)=\frac{\Delta_t\left(0,\ e^{i\theta_2/n}\right)-\Delta_t\left(e^{2i\theta_1/(Bt)},\ e^{i\theta_2/n}\right)}{\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}}$$

стремится к пределу, который преобразуется к виду

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\beta\sqrt{-2i\theta_2}\right)}{\beta\sqrt{-2i\theta_2}}-i\theta_1\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\beta\sqrt{-i\theta_2/2}\right)}{\beta\sqrt{-i\theta_2/2}}\right)^2\right)^{-1},$$

где $\operatorname{sh}\theta=(e^{\theta}-e^{-\theta})/2$ — гиперболический синус θ.

Теорема 5. *Если $n,\ t\to\infty$ так, что $t(B/n)^{1/2}\to\beta$, где β — положительная постоянная, то при любых фиксированных положительных $x_1<x_2$*

$$\mathsf{P}\left\{x_1\leqslant\frac{2\mu(t)}{Bt}\leqslant x_2\,|\,\nu=n\right\}\to F(x_1,\ x_2),$$

где

$$F(x_1,\ x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\int_0^1\frac{x}{(1-y)^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2\beta^2}{8(1-y)}}\,dG_\beta(x,\ y)$$

и функция распределения $G_\beta(x,\ y)$ имеет характеристическую функцию

$$\psi(\theta_1,\ \theta_2)=\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\beta\sqrt{-2i\theta_2}\right)}{\beta\sqrt{-2i\theta_2}}-i\theta_1\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\beta\sqrt{-i\theta_2/2}\right)}{\beta\sqrt{-i\theta_2/2}}\right)^2\right)^{-1}.$$

Доказательство. Для произвольных положительных $x_1<x_2$ обозначим

$$k_1=x_1tB/2,\qquad k_2=x_2tB/2.$$

Как и в доказательстве теоремы 3.3,

$$\mathsf{P}\{x_1\leqslant 2\mu(t)/(Bt)\leqslant x_2\,|\,\nu=n\}=$$
$$=\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}\sum_{s=1}^{n-k}\mathsf{P}\{\mu(t)=k,\ \nu(t)=s\}\frac{\mathsf{P}\{\nu_k=n-s\}}{\mathsf{P}\{\nu=n\}}. \quad (27)$$

Используя представление (1.9), находим, что

$$\mathsf{P}\{\nu_k=n-s\}=\frac{k}{n-s}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n-s}=n-s-k\}, \quad (28)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{n-s}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение числа потомков одной частицы в ветвящемся процессе $\mu(t)$. В силу локальной предельной теоремы 1.4.2

$$\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{n-s}=n-s-k\}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi B(n-s)}}e^{-\frac{k^2}{2B(n-s)}}(1+o(1)) \quad (29)$$

равномерно относительно целых k, для которых $k/\sqrt{n-s}$ лежит в любом конечном интервале. Для произвольного γ, $0<\gamma<1$, разобьем суммирование в (27) по параметру s на две части: на сумму по s от 1 до $(1-\gamma)n$ и на сумму от $(1-\gamma)n$ до $n-k$. При $x=2k/(Bt)$ и $y=s/n$ согласно (3.12), (28) и (29)

$$\mathsf{P}\{\nu_k=n-s\}/\mathsf{P}\{\nu=n\}=\frac{k}{(1-s/n)^{3/2}}e^{-\frac{k^2}{2Bn(1-s/n)}}(1+o(1))=$$
$$=\frac{k}{(1-y)^{3/2}}e^{-\frac{x^2\beta^2}{8(1-y)}}(1+o(1)) \quad (30)$$

равномерно относительно целых k и s, для которых $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, $y\leqslant 1-\gamma$. Учитывая, что согласно теореме 1.2 при $t\to\infty$

$$\mathsf{P}\{\mu(t)>0\}=2/(Bt)(1+o(1)),$$

с использованием (30) находим, что

$$I_1(k_1, k_2)=$$
$$=\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}\sum_{1\leqslant s\leqslant(1-\gamma)n}\mathsf{P}\{\mu(t)=k, \quad \nu(t)=s\}\frac{\mathsf{P}\{\nu_k=n-s\}}{\mathsf{P}\{\nu=n\}}=$$
$$=\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2}\sum_{1\leqslant s\leqslant(1-\gamma)n}\mathsf{P}\{\mu(t)=k, \ \nu(t)=s\,|\,\mu(t)>0\}\times$$
$$\times\frac{x}{(1-y)^{3/2}}e^{-\frac{x^2\beta^2}{8(1-y)}}(1+o(1)).$$

Обозначая $G_{(n)}(x, y)$ функцию условного распределения $(2\mu(t)/(Bt),\ \nu(t)/n)$ при условии $\mu(t)>0$, получаем, что

$$I_1(k_1, k_2)=A_n(k_1, k_2)(1+o(1)), \quad (31)$$

где

$$A_n(k_1, k_2) = \sum_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} \sum_{0 \leqslant y \leqslant 1-\gamma} \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-\frac{x^2\beta^2}{8(1-y)}} dG_{(n)}(x, y).$$

Согласно теореме 4 при $t \to \infty$ условное распределение $(2\mu(t)/(Bt), \nu(t)/n)$ при условии $\mu(t) > 0$ слабо сходится к распределению с характеристической функцией $\psi(\theta_1, \theta_2)$. Поэтому, обозначая $G_\beta(x, y)$ функцию распределения, определяемую характеристической функцией $\psi(\theta_1, \theta_2)$, из (31) в силу слабой сходимости $G_{(n)}(x, y)$ к $G_\beta(x, y)$ для любого γ, $0 < \gamma < 1$, находим, что

$$I_1(k_1, k_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{1-\gamma} \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-\frac{x^2\beta^2}{8(1-y)}} dG_\beta(x, y)(1 + o(1)). \tag{32}$$

Для оценки величины

$$I_2(k_1, k_2) = \sum_{k_1 \leqslant k \leqslant k_2} \sum_{(1-\gamma)n \leqslant s \leqslant n-k} \mathsf{P}\{\mu(t) = k, \nu(t) = s\} \frac{\mathsf{P}\{\nu_k = n-s\}}{\mathsf{P}\{\nu = n\}}$$

воспользуемся равенством

$$\delta(\beta) + F(0, \infty) = 1, \tag{33}$$

где

$$\delta(\beta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - k^2\beta^2) e^{-k^2\beta^2/2},$$

$$F(0, \infty) = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-x^2\beta^2/8(1-y)} dG_\beta(x, y).$$

Покажем, что выбором достаточно малого γ величину $I_2(k_1, k_2)$ можно сделать сколь угодно малой. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $z_1 \leqslant x_1$, $z_2 \geqslant y_2$ и γ так, что

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_0^{1-\gamma} \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-x^2\beta^2/8(1-y)} dG_\beta(x, y) \geqslant 1 - \delta(\beta) - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{34}$$

Согласно теореме 3 при $n \to \infty$, $t(B/n)^{1/2} \to \beta$

$$\delta_n(\beta) = \mathsf{P}\{\mu(t) = 0 \mid \nu = n\} \to \delta(\beta),$$

поэтому, начиная с некоторого n,

$$|\delta(\beta) - \delta_n(\beta)| \leqslant \varepsilon/3. \tag{35}$$

Обозначим $l_1 = z_1tB/2$, $l_2 = z_2tB/2$. Поскольку

$$\mathsf{P}\{\mu(t) = 0 \mid \nu = n\} + I_1(l_1, l_2) + I_2(l_1, l_2) \leqslant 1,$$

для $I_2(k_1, k_2)$ справедлива оценка

$$I_2(k_1, k_2) \leqslant I_2(l_1, l_2) \leqslant 1 - I_1(l_1, l_2) - \delta_n(\beta). \tag{36}$$

Согласно (32)

$$I_1(l_1, l_2) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \int\limits_0^{1-\gamma} \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-x^2\beta^2/8(1-y)} dG_\beta(x, y)(1+o(1))$$

и в силу (34), начиная с некоторого n,

$$I_1(l_1, l_2) \geqslant 1 - \delta(\beta) - \varepsilon/3. \tag{37}$$

Из (35), (36) и (37) следует, что, начиная с некоторого n,

$$I_2(k_1, k_2) \leqslant \delta(\beta) - \delta_n(\beta) + 2\varepsilon/3 \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, при $\gamma \to 0$ величина $I_2(k_1, k_2)$ стремится к нулю, кроме того, в силу ограниченности функции $(1-y)^{-3/2} e^{-x^2\beta^2/(8(1-y))}$ в области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $0 \leqslant y < 1$ при $\gamma \to 0$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{1-\gamma}^{1} \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-x^2\beta^2/8(1-y)} dG_\beta(x, y) \to 0.$$

Поэтому отсюда для вероятности

$$\mathsf{P}\{x_1 \leqslant 2\mu(t)/(Bt) \leqslant x_2 \mid \nu = n\} = I_1(k_1, k_2) + I_2(k_1, k_2)$$

получаем выражение, указанное в формулировке теоремы.

§ 5. Предельные распределения характеристик случайного дерева

Рассмотрим множество T_n всех корневых деревьев, некорневые вершины которых занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$, и корень имеет номер 0. Как и ранее, каждому элементу из T_n припишем вероятность $(n+1)^{-n+1}$, так что характеристики деревьев из T_n становятся случайными величинами. В § 2 изучена связь характеристик случайных деревьев из T_n с характеристиками ветвящегося процесса $\mu(t, G)$, в котором число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона. В силу леммы 2.1 распределение любой характеристики случайного дерева из T_n, выражающейся через случайные величины $\mu_r(t, T_n)$, $t, r = 0, 1, \ldots, n$, совпадает с условным распределением соответствующей характеристики ветвящегося процесса $\mu(t, G)$ при условии, что общее число частиц ν в ветвящемся процессе равно $n+1$. В силу леммы 2.3 в качестве процесса $\mu(t, G)$ можно взять критический ветвящийся процесс, для которого число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона с параметром, равным единице, так что для этого процесса

$$p_r = \frac{1}{r!} e^{-1}, \quad r = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Таким образом, предельные теоремы для характеристик случайного дерева получаются, если приведенные в предыдущих параграфах результаты для общего критического ветвящегося процесса применить к критическому процессу $\mu(t, G)$ с распределением числа потомков одной частицы, задаваемым равенством (1).

Начнем с изучения кратностей вершин случайного дерева из множества T_n. Рассмотрим случайные величины $\mu_r(T_n)$, равные числу вершин кратности r в случайном дереве из T_n.

Теорема 1. *Если $n \to \infty$, то для любого фиксированного r равномерно относительно целых $k = np_r + u\sigma_r\sqrt{n}$, для которых u лежит в любом конечном интервале,*

$$\mathsf{P}\{\mu_r(T_n) = k\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi n}} e^{-u^2/2}(1 + o(1)),$$

где $\sigma_r^2 = p_r(1 - p_r - (1-r)^2 p_r)$ и p_r задается равенством (1).

Доказательство. В силу лемм 2.1 и 2.3

$$\mathsf{P}\{\mu_r(T_n) = k\} = \mathsf{P}\{\mu_r(G) = k \mid \nu(G) = n+1\},$$

где $\mu_r(G)$ — число частиц, имеющих ровно r потомков в критическом ветвящемся процессе, в котором число потомков одной частицы имеет распределение (1).

В силу леммы 2.2 распределение случайных величин μ_r, равных числу частиц в ветвящемся процессе, имеющих ровно r потомков, совпадает с распределением случайных величин $\mu_r(n, n+1)$, равных числу ячеек, содержащих ровно r частиц в обобщенной схеме размещения n частиц в $n+1$ ячейку. Для процесса $\mu(t, G)$ эта схема оказывается классической схемой размещения частиц. Используя теорему 3.1 и учитывая при этом, что дисперсия числа потомков одной частицы в процессе $\mu(t, G)$ равна единице, получаем утверждение теоремы.

Обозначим $\eta_{(n+1)}(T_n)$ максимальную кратность вершин случайного дерева из T_n. В силу лемм 2.1, 2.2 и 2.3 распределение $\eta_{(n+1)}(T_n)$ совпадает с распределением максимального заполнения в классической схеме размещения n частиц в $n+1$ ячейку. Применяя для классической схемы теорему 1.5.2, для $\eta_{(n+1)}(T_n)$ получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если $n\to\infty$ и $r=r_n$ выбрано так, что $np_r=ne^{-1}/r!\to\lambda$, где λ—положительная постоянная, то*

$$\mathsf{P}\{\eta_{(n+1)}(T_n)=r-1\}\to e^{-\lambda},$$
$$\mathsf{P}\{\eta_{(n+1)}(T_n)=r\}\to 1-e^{-\lambda}.$$

Рассмотрим теперь распределение случайных величин $\mu(t, T_n)$, равных числу вершин в слое высоты t случайного дерева. Начнем с распределения в первых t слоях дерева.

Теорема 3. *Для любых целых положительных $k_1, \ldots, k_t$ при $n\to\infty$*

$$\mathsf{P}\{\mu(1, T_n)=k_1, \ldots, \mu(t, T_n)=k_t\}\to$$
$$\to\mathsf{P}\{1+\xi_1=k_1\}\mathsf{P}\{1+\xi_1+\ldots+\xi_{k_1}=k_2\}\ldots$$
$$\ldots\mathsf{P}\{1+\xi_1+\ldots+\xi_{k_{t-1}}=k_t\},$$

где независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ имеют распределение (1).

Доказательство. В силу лемм 2.1 и 2.3

$$\mathsf{P}\{\mu(1, T_n)=k_1, \ldots, \mu(t, T_n)=k_t\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\mu(1, G)=k_1, \ldots, \mu(t, G)=k_t\mid\nu(G)=n+1\},$$

где $\mu(t, G)$—критический ветвящийся процесс с распределением числа потомков одной частицы, равным (1). Применяя к этому процессу теорему 3.2, находим, что при $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\{\mu(1, G)=k_1, \ldots, \mu(t, G)=k_t\mid\nu(G)=n+1\}\to$$
$$\to k_t\mathsf{P}\{\mu(1, G)=k_1, \ldots, \mu(t, G)=k_t\}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку, как легко проверить,

$$k_t\mathsf{P}\{\mu(1, G)=k_1, \ldots, \mu(t, G)=k_t\}=$$
$$=k_t\mathsf{P}\{\xi_1=k_1\}\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{k_1}=k_2\}\ldots$$
$$\ldots\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_{k_{t-1}}=k_t\}=$$
$$=\mathsf{P}\{1+\xi_1=k_1\}\mathsf{P}\{1+\xi_1+\ldots+\xi_{k_1}=k_2\}\ldots$$
$$\ldots\mathsf{P}\{1+\xi_1+\ldots+\xi_{k_{t-1}}=k_t\},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и имеют распределение (1).

Рассмотрим число вершин $\mu(t, T_n)$ в нижних слоях дерева при n, $t\to\infty$, $t/\sqrt{n}\to 0$.

Теорема 4. *Если $n, t\to\infty$ так, что $t/\sqrt{n}\to 0$, то для любого фиксированного $x>0$*

$$\mathsf{P}\{2\mu(t, T_n)/t\leqslant x\}\to 1-e^{-x}-xe^{-x}.$$

Доказательство. В силу лемм 2.1 и 2.3

$$\mathsf{P}\{2\mu(t, T_n)/t\leqslant x\}=\mathsf{P}\{2\mu(t, G)/t\leqslant x\,|\,\nu(G)=n+1\}.$$

Учитывая, что в критическом ветвящемся процессе $\mu(t, G)$ дисперсия числа потомков одной частицы равна единице, и применяя теорему 3.3, приходим к утверждению теоремы.

Предельное распределение высоты τ_n случайного дерева получим как следствие теоремы 4.3.

Теорема 5. *При $n\to\infty$ для любого фиксированного $x>0$*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\tau_n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}\to\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1-k^2x^2)\,e^{-k^2x^2/2}. \tag{2}$$

Доказательство. В силу лемм 2.1 и 2.3

$$\mathsf{P}\{\tau_n/\sqrt{n}\leqslant x\}=\mathsf{P}\{(\tau(G)-1)/\sqrt{n}\leqslant x\,|\,\nu(G)=n+1\},$$

где $\tau(G)$ — момент вырождения критического ветвящегося процесса $\mu(t, G)$ с дисперсией числа потомков одной частицы, равной единице. Применяя теорему 4.3, получаем утверждение (2).

Распределение вершин в высоких слоях случайного дерева складывается из вероятности $\mathsf{P}\{\mu(t, T_n)=0\}=\mathsf{P}(\tau_n<t)$ и вероятностей $\mathsf{P}\{\mu(t, T_n)=k\}$, где k — целые положительные числа. Если n, $t\to\infty$ так, что $t/\sqrt{n}\to\beta$, $0<\beta<\infty$, то согласно теореме 5 вероятность

$$\mathsf{P}\{\mu(t, T_n)=0\}=\mathsf{P}\{\tau_n<t\}=\mathsf{P}\{\tau_n/\sqrt{n}<t/\sqrt{n}\}$$

стремится к положительной постоянной

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1-k^2\beta^2)\,e^{-k^2\beta^2/2}.$$

Поведение вероятностей $\mathsf{P}\{\mu(t, T_n)=k\}$, $k=1, 2, \ldots$, в этих условиях описывается следующей теоремой.

Теорема 6. *Если n, $t\to\infty$ так, что $t/\sqrt{n}\to\beta$, где β — положительная постоянная, то при любых* *фиксированных* $0 < x_1 < x_2$

$$\mathsf{P}\{x_1 \leqslant 2\mu(t, T_n)/t \leqslant x_2\} \to F(x_1, x_2),$$

где

$$F(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_0^1 \frac{x}{(1-y)^{3/2}} e^{-x^2\beta^2/8(1-y)} \, dG_\beta(x, y)$$

и функция распределения $G_\beta(x, y)$ *имеет характеристическую функцию*

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\operatorname{sh}(\beta\sqrt{-2i\theta_2})}{\beta\sqrt{-2i\theta_2}} - i\theta_1\left(\frac{\operatorname{sh}(\beta\sqrt{-i\theta_2/2})}{\beta\sqrt{-i\theta_2/2}}\right)^2\right)^{-1}.$$

Доказательство. В силу лемм 2.1 и 2.3 для любого фиксированного целого k

$$\mathsf{P}\{\mu(t, T_n) = k\} = \mathsf{P}\{\mu(t, G) = k \mid \nu(G) = n+1\}.$$

Утверждение теоремы получается прямым применением к процессу $\mu(t, G)$ теоремы 4.5.

Результаты о предельном поведении условных распределений характеристик критических ветвящихся процессов можно использовать и при изучении случайных деревьев из классов с ограничениями на кратности вершин. Пусть R — множество целых неотрицательных чисел, содержащее 0 и не совпадающее с множеством $\{0, 1\}$. Обозначим $T_{n,R}$ подмножество T_n тех деревьев, кратности вершин которых принимают значения только из R. Введем событие

$$A_R = \{\mu_r(T_n) = 0, \ r \notin R\}.$$

Ясно, что если $\mathsf{P}(A_R) > 0$, то условное распределение на T_n при условии A_R является равномерным распределением на множестве $T_{n,R}$.

Рассмотрим ветвящийся процесс $\mu(t, G_R)$, для которого число потомков одной частицы имеет распределение

$$p_r(R, \lambda) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r! P(R, \lambda)}, \qquad r \in R, \tag{3}$$

где

$$P(R, \lambda) = \sum_{r \in R} \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}.$$

Пусть $\mu_r(t, T_{n,R})$ — число вершин в случайном дереве из $T_{n,R}$, имеющих высоту t и кратность r,

$$\mu_r(T_{n,R}) = \sum_{t=0}^{n} \mu_r(t, T_{n,R}),$$

$\tau_{n,R}$ — высота случайного дерева из $T_{n,R}$, $\mu_r(t, G_R)$ — число частиц в процессе $\mu(t, G_R)$ в момент t, имеющих ровно r потомков, t, $r=0, 1, \ldots$, $\nu(G_R)$ — число частиц, существовавших в процессе $\mu(t, G)$ за все время его эволюции, $\tau(G_R)$ — момент вырождения процесса $\mu(t, G_R)$,

$$\mu_r(G_R)=\sum_{t=0}^{\infty}\mu_r(t, G_R),$$
$$A_{R,G}=\{\mu_r(G)=0, \quad r\notin R\}.$$

Применение результатов предыдущих параграфов при изучении характеристик случайного дерева из $T_{n,R}$ опирается на следующую лемму. Пусть $\|\mu_r(t, T_{n,R})\|$, $\|\mu_r(t, G_R)\|$ — матрицы, составленные соответственно из случайных величин $\mu_r(t, T_{n,R})$, $\mu_r(t, G_R)$, $t, r=0, 1, \ldots, n$, и $M=\|m_r(t)\|$ — матрица того же размера, составленная из целых неотрицательных чисел.

Лемма 1. *Если* $\mathsf{P}\{\nu(G_R)=n+1\}>0$, *то*

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, T_{n,R})\|=M\}= \\ =\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, G_R)\|=M \mid \nu(G_R)=n+1\}. \quad (4)$$

Доказательство. В силу леммы 2.1

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, T_n)\|=M \mid A_R\}= \\ =\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, G)\|=M \mid \nu(G)=n+1,\ A_{R,G}\}. \quad (5)$$

Ясно, что

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, T_n)\|=M \mid A_R\}=\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, T_{n,R})\|=M\}.$$

Остается показать, что

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, G)\|=M \mid \nu(G)=n+1,\ A_{R,G}\}= \\ =\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, G_R)\|=M \mid \nu(G_R)=n+1\}. \quad (6)$$

Для матрицы $M=\|m_r(t)\|$ обозначим $n_t=m_0(t)+\ldots+m_n(t)$. Для того чтобы равенство $\|\mu_r(t, T_{n,R})\|=\|m_r(t)\|$ имело положительную вероятность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$n_0=1,\ n_t=m_1(t-1)+2m_2(t-1)+\ldots+nm_n(t-1), \\ t=1, \ldots, n+1;$$
$$n_0+n_1+\ldots+n_{n+1}=n+1,$$
$$m_r(t)=0, \quad r\notin R, \quad t=0, 1, \ldots, n.$$

Матрицу M, для которой эти соотношения выполняются, назовем *R-допустимой*. Ясно, что равенство (6) справедливо, если матрица M не является R-допустимой. Для R-допустимой матрицы докажем соотношение (6), выписав явные выражения вероятностей, стоящих в левой и правой частях равенства. Согласно лемме 1.5

$$\mathsf{P}\{\mu_r(t, G)=0,\ r\notin R;\ \nu(G)=n+1\}= \\ =\frac{(n+1)!}{n+1}\sum_K \frac{p_0^{k_0}\ldots p_n^{k_n}}{k_0!\ldots k_n!}, \qquad (7)$$

где суммирование производится по множеству K целых неотрицательных $k_0, \ldots, k_n$ таких, что $k_0+\ldots+k_n=n+1$, $k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n$, $k_r=0$ для $r\notin R$.

С другой стороны, согласно лемме 1.3 для процесса $\mu(t, G_R)$

$$\mathsf{P}\{\nu(G_R)=n+1\}=\frac{1}{n+1}\mathsf{P}\{\xi_1^{(R)}+\ldots+\xi_{n+1}^{(R)}=n\},$$

где $\xi_1^{(R)}, \ldots, \xi_{n+1}^{(R)}$ — независимые случайные величины с распределением (3). Поэтому, учитывая (7), находим, что

$$\mathsf{P}\{\nu(G_R)=n+1\}=\mathsf{P}\{\nu(G)=n+1,\ A_{R,G}\}/P^{n+1}(R, \lambda). \qquad (8)$$

Для R-допустимой матрицы M согласно (3)

$$\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, G_R)\|=M\}= \\ =\prod_{t=0}^{n}\frac{n_t!}{m_0(t)!\ldots m_n(t)!}p_0^{m_0(t)}(R, \lambda)\ldots p_n^{m_n(t)}(R, \lambda)= \\ =\frac{1}{P^{n+1}(R, \lambda)}\prod_{t=0}^{n}\frac{n_t!}{m_0(t)!\ldots m_n(t)!}p_0^{m_0(t)}\ldots p_n^{m_n(t)}= \\ =\mathsf{P}\{\|\mu_r(t, G)\|=M\}/P^{n+1}(R, \lambda). \qquad (9)$$

Из (8) и (9) следует равенство (6). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случайную величину $\mu_r(T_{n,R})$, равную числу вершин в случайном дереве из $T_{n,R}$, имеющих кратность r, и высоту $\tau_{n,R}$ случайного дерева из $T_{n,R}$. Из леммы 1, если, конечно, $\mathsf{P}\{\nu(G_R)=n+1\}>0$, сразу следует, что

$$\mathsf{P}\{\mu_r(T_{n,R})=k\}=\mathsf{P}\{\mu_r(G_R)=k\mid \nu(G_R)=n+1\}, \qquad (10)$$

$$\mathsf{P}\{\tau_{n,R}=k\}=\mathsf{P}\{\tau(G_R)-1=k\mid \nu(G_R)=n+1\}, \qquad (11)$$

причем параметр λ в процессе $\mu(t, G_R)$ согласно лемме 2.3 можно выбирать произвольно. Обозначим $F_\lambda(z)$

производящую функцию распределения (3), равную

$$F_\lambda(z) = \frac{1}{P(R, \lambda)} \sum_{r \in R} \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}.$$

Для любого множества R, содержащего 0 и не совпадающего с множеством $\{0, 1\}$, найдется такое λ_R, что $F'_{\lambda_R}(1) = 1$, причем $F''_{\lambda_R}(1) = B_R < \infty$.

Обозначим d_R максимальный шаг распределения (3) и $d_{r,R}$ максимальный шаг распределения, для которого все значения множества $R \setminus r$ имеют положительную вероятность. Введем также обозначения

$$p_{r,R} = p_r(R, \lambda_R), \qquad r \in R,$$
$$\sigma^2_{r,R} = p_{r,R}(1 - p_{r,R} - (1-r)^2 p_{r,R}/B_R).$$

Применяя теорему 3.1 и равенство (10), приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. *Если R содержит более двух элементов, то для $r \in R$, $n = sd_{r,R} + 1$ равномерно относительно целых k, для которых*

$$u = (kd_{r,R}/d_R - np_{r,R})/(\sigma_{r,R}\sqrt{n})$$

лежит в любом конечном интервале, при целых $s \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\mu_r(T_{n,R}) = kd_{r,R}/d_R\} = \frac{d_{r,R}}{d_R \sigma_{r,R}\sqrt{2\pi n}} e^{-u^2/2}(1 + o(1)).$$

Применяя теорему 4.3 и равенство (11), приходим к следующему утверждению.

Теорема 8. *Если $n \to \infty$ по таким значениям, для которых $T_{n,R}$ непусто, то для любого фиксированного положительного x*

$$\mathsf{P}\left\{\left(\frac{B_R}{n}\right)^{1/2} \tau_{n,R} \leqslant x\right\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - k^2x^2) e^{-k^2x^2/2}.$$

В утверждения теорем 7 и 8 входят постоянные B_R, приведем значения B_R для некоторых множеств R: $B_{\{0,1,2,\ldots\}} = 1$; $B_{\{0,r\}} = r - 1$, $r \geqslant 2$; $B_{\{0,2,3,\ldots\}} = (1 - e^{-1})^{-1} = 1{,}5819\ldots$; $B_{\{0,1,2\}} = 2 - \sqrt{2} = 0{,}5857\ldots$; $B_{\{0,1,2,3\}} = 0{,}8427\ldots$; $B_{\{0,1,2,3,4\}} = 0{,}9507\ldots$; $B_{\{0,1,2,3,4,5\}} = 0{,}9875\ldots$

§ 6. Дополнения и литературные ссылки

Изложение гл. II основано на статьях [32—34]. В § 1 приводятся известные свойства простейшего ветвящегося процесса [64], доказательства лемм 1.3 и 1.5 содержатся в [32]. Впервые на возможность связи случайных деревьев и ветвящихся процессов, для которых число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона, обращено внимание в [66]. В форме, приведенной в лемме 2.1, эта связь отмечена в [32]. Лемма 2.2 о связи с обобщенной схемой размещения частиц содержится в [32]. Прямое сведение задачи о кратностях вершин случайного дерева к классической схеме размещения впервые изложено в [70]. Результат, приведенный в этой статье, отличается от результата леммы 2.2, поскольку в [70] по определению кратность корня на единицу меньше принятой в настоящей книге.

Изучение условных распределений ветвящегося процесса $\mu(t)$ при условии, что общее число частиц ν в этом процессе равно n, начато в статье [93]. Результаты о числе частиц $\nu(t)$, существовавших в ветвящемся процессе до момента t, и числе частиц ν, существовавших в процессе за все время его эволюции, содержатся в [12, 64, 82, 105]. Лемма 2.3 является обобщением леммы 1 статьи [93] и леммы 4 статьи [32].

Теорема 3.1 содержится в [34], при $d=d_r=1$ она доказана в [32]. Теорема 3.2 приведена в [93]. Теорема 3.3 содержится в [34] и является модификацией теоремы 1 из [93], в [32] доказан следующий локальный вариант этого утверждения.

Теорема 1. *Если распределение числа потомков одной частицы в критическом ветвящемся процессе* $\mu(t)$ *имеет конечный* r*-й момент при некотором* $r\geqslant 2$ *и максимальный шаг этого распределения равен единице, то при* $n, t\to\infty$, $t^2n^{-(1+4/(2r+1))}\to 0$ *равномерно относительно целых* k, *для которых* $x=2k/(Bt)$ *лежит в любом интервале вида* $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1<\infty$,

$$\mathsf{P}\{\mu(t)=k\mid\nu=n\}=2xe^{-x}/(Bt)\,(1+o(1)).$$

Пока не удается усилить эту теорему и доказать ее утверждение в той же области изменения параметров n и t, в которой справедлива интегральная теорема 3.3.

Теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 доказаны в [32], утверждение теоремы 4.4 использовалось в [93] при доказательстве теоремы 4.5. Встречающиеся в § 4 формулы обращения преобразования Фурье можно найти в [39, 44].

Связь случайных деревьев с ветвящимися процессами впервые была использована для получения предельных распределений характеристик случайных деревьев из T_n в статьях [32, 33], теоремы 5.1 и 5.2 приведены в [70]. Асимптотическая нормальность числа вершин нулевой кратности установлена в [107], единичной кратности — в [100]. Согласно теореме 5.2 при $n \to \infty$ максимальная кратность вершин дерева с вероятностью, стремящейся к единице, принимает одно из двух значений r или $r+1$, при этом r удовлетворяет условию $np_r \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, откуда следует, что $r = \ln n / \ln\ln n\,(1+o(1))$. Таким образом, среднее значение максимальной кратности имеет порядок $\ln n/\ln\ln n$, этот результат получен в [101].

Теорема 5.3 приведена в [85], прямым комбинаторным методом она доказана Г. Н. Багаевым, теорема 5.4 содержится в [32]. Теорема 5.5 впервые доказана в [68, 108], приведенное в книге доказательство изложено в [33]. Утверждение теоремы 5.6 в другой форме получено в [68], вариант, приведенный в книге, является прямым следствием теоремы 4.5, доказанной в [93].

В статье [68] показано, что если $n, t \to \infty$ так, что $t/\sqrt{n} \to \beta$, где β — положительная постоянная, то для любого фиксированного $x > 0$

$$\mathsf{P}\{\mu(t,\ T_n)/\sqrt{n} \leqslant x\} \to F_\beta(x),$$

где функция распределения $F_\beta(x)$ имеет скачок в точке $x=0$, равный

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-\beta^2k^2)\, e^{-\beta^2k^2/2},$$

и при $x > 0$

$$\frac{dF_\beta(x)}{dx} = \frac{4}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^k}{dx^k} g_{\beta,k}\left(k + \frac{2x}{\beta}\right), \qquad (1)$$

где

$$g_{\beta,k}(x) = (1-\beta^2x^2)(x-k)\, e^{-\beta^2x^2/2}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Как утверждается в [68], скачок функции $F_\beta(x)$ равен пределу вероятности того, что слой высоты t случайного дерева пуст, и, следовательно, для высоты τ_n случайного дерева из T_n справедливо утверждение теоремы 5.5: при

$n \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\tau_n/\sqrt{n} \leqslant \beta\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-\beta^2 k^2) e^{-\beta^2 k^2/2}.$$

В [68] приведено равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-\beta^2 k^2) e^{-\beta^2 k^2/2} = \frac{(2\pi)^{5/2}}{\beta^3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 e^{-2\pi^2 k^2/\beta^2},$$

получаемое дифференцированием по β равенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta e^{-\beta^2 k^2/2} = \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi^2 k^2/\beta^2}.$$

Заметим, что формула (1) позволяет уточнить результат теоремы 4.5 о предельном поведении условного распределения общего ветвящегося процесса: из (1) следует, что в теореме 4.5

$$F(x_1, x_2) = \int_{\beta x_1/2}^{\beta x_2/2} p(x)\, dx,$$

где

$$p(x) = \frac{4}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^k}{dx^k} g_{\beta, k}\left(k + \frac{2x}{\beta}\right).$$

Рассмотрим расстояния от концевых вершин дерева до корня, максимум этих расстояний по всем концевым вершинам равен высоте дерева. В статье [85] идеи работы [32] о связи случайных деревьев с ветвящимися процессами использованы для нахождения наименьшей высоты $d(T_n)$ концевых вершин случайного дерева из T_n. Приведем основной результат статьи [85].

Теорема 2. *При $n \to \infty$ для любого фиксированного $k = 2, 3, \ldots$*

$$\mathsf{P}\{d(T_n) \geqslant k\} \to \pi_k,$$

где

$$\pi_k = \exp \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i$$

и α_i задаются рекуррентным соотношением

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{i+1} = e^{\alpha_i} - e^{-1} - 1, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Возможность использовать связь ветвящихся процессов $\mu(t, G_R)$ и деревьев с ограничениями R на кратности вершин впервые отмечена в [33].

Деревья удобно использовать для описания и анализа различных, в том числе вычислительных, алгоритмов. Вопросы, связанные с этим кругом задач, рассматриваются в [1, 25, 40, 58]. Представляют интерес задачи о случайном блуждании на дереве. Дерево случайно выбирается из какого-то класса деревьев и считается ориентированным от корня к концевым вершинам. Блуждание начинается в корневой вершине, в каждой вершине с равными вероятностями выбирается одна из выходящих из нее дуг, и блуждающая точка перемещается в концевую вершину этой дуги. Блуждание заканчивается в концевой вершине дерева. Характеристики такого и аналогичных ему блужданий рассмотрены в статьях [84, 102, 106].

ГЛАВА III

СЛУЧАЙНЫЕ ЛЕСА И ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Связь лесов и отображений

Рассмотрим множество Σ_n всех однозначных отображений множества $X_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Граф $\Gamma_n^{(s)}$ отображения $s\in\Sigma_n$ состоит из связных компонент, каждая из которых содержит ровно один контур. Если убрать дуги, соединяющие циклические вершины графа $\Gamma_n^{(s)}$, то оставшаяся часть графа образует лес, корневыми вершинами которого являются циклические вершины графа $\Gamma_n^{(s)}$. Деревья этого леса будем называть *деревьями отображения*.

Как обычно, будем изучать множество Σ_n с равномерным распределением, при котором каждому элементу $s\in\Sigma_n$ приписана вероятность n^{-n}. В таком случае числовые характеристики отображения из Σ_n становятся случайными величинами. Для случайного отображения из Σ_n обозначим $\mu_r(\Sigma_n)$ число деревьев, содержащих r некорневых вершин, $\lambda^{(n)}$ число циклических точек; лес случайного отображения σ, принимающего значения из Σ_n, содержит $\lambda^{(n)}$ деревьев; располагая в неубывающем порядке объемы этих деревьев, построим вариационный ряд $\eta_{(1)}(\Sigma_n)\leqslant\leqslant\eta_{(2)}(\Sigma_n)\leqslant\ldots\leqslant\eta_{(\lambda^{(n)})}(\Sigma_n)$.

Кратности вершин случайного отображения изучены в § 1.5. В этой главе изучаются случайные величины $\lambda^{(n)}$, $\eta(\Sigma_n)=\eta_{(\lambda^{(n)})}(\Sigma_n)$, $\mu_r(\Sigma_n)$ и высота отображения $\tau(\Sigma_n)$, равная максимальной высоте деревьев случайного отображения.

Ясно, что распределения ряда характеристик случайного отображения из Σ_n можно получить, усредняя по распределению $\lambda^{(n)}$ распределения соответствующих характеристик леса. Придадим этому утверждению более точный смысл.

Рассмотрим множество $F_{n, N}$ всех лесов, состоящих из N корневых деревьев, корни которых занумерованы числами 1, 2, ..., N, а остальные n вершин занумерованы числами 1, 2, ..., n.

Лемма 1. *Число $a_{n, N}$ лесов в $F_{n, N}$ равно $N(n+N)^{n-1}$.*

Доказательство. Введем производящую функцию

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n, N} \frac{x^n}{n!}.$$

Учитывая, что число корневых деревьев с n некорневыми вершинами, у которых корень имеет номер 0, равно $(n+1)^{n-1}$, находим, что число лесов, в которых k-е дерево содержит ровно n_k некорневых вершин, $k=1, \ldots, N$, равно

$$\frac{n!}{n_1! \ldots n_N!}(n_1+1)^{n_1-1} \ldots (n_N+1)^{n_N-1}, \tag{1}$$

где $n!/(n_1! \ldots n_N!)$ — число разбиений n вершин на N упорядоченных групп, а $(n_k+1)^{n_k-1}$ — число деревьев, которые можно построить из k-й группы вершин каждого разбиения. Следовательно,

$$a_{n, N}=\sum_{n_1+\ldots+n_N=n} \frac{n!}{n_1! \ldots n_N!}(n_1+1)^{n_1-1} \ldots (n_N+1)^{n_N-1}.$$

Умножая обе части этого равенства на $x^n/n!$ и суммируя по n, находим, что

$$A_N(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1} x^n}{n!}\right)^N=\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)^N, \tag{2}$$

где функция $\theta(x)$ определяется рядом

$$\theta(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1} x^n}{n!} \tag{3}$$

и удовлетворяет равенству

$$\theta(x) e^{-\theta(x)}=x. \tag{4}$$

В силу (2) утверждение леммы равносильно равенству

$$A_N(x)=\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)^N=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N(n+N)^{n-1} x^n}{n!}. \tag{5}$$

Проведем доказательство (5) индукцией по N. При $N=1$ эта формула верна, так как из (3) следует, что

$$\frac{\theta(x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}x^n}{n!}.$$

Для проведения индукции получим вспомогательное соотношение для функции $\theta(x)$. Дифференцируя равенство

$$\theta(x)=xe^{\theta(x)}$$

и заменяя $e^{\theta(x)}$ на $\theta(x)/x$, получаем тождество

$$\theta(x)\,\theta'(x)=\theta'(x)-\theta(x)/x,$$

умножая обе части которого на $N\theta^{N-2}(x)$, приходим к соотношению

$$N\theta^{N-1}(x)\,\theta'(x)=N\theta^{N-2}(x)\,\theta'(x)-N\theta^{N-1}(x)/x.$$

Заменяя в этом соотношении аргумент на t и интегрируя по t от 0 до x, приходим к окончательному тождеству

$$\theta^N(x)=\frac{N}{N-1}\,\theta^{N-1}(x)-N\int_0^x\frac{\theta^{N-1}(t)\,dt}{t}. \tag{6}$$

Предполагая, что верна формула

$$\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)^{N-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(N-1)\,(n+N-1)^{n-1}\,x^n}{n!},$$

и подставляя это выражение в (6), находим, что

$$\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)^{N}=\frac{N}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+N-1)^{n-1}\,x^n}{n!}-$$

$$-\frac{N}{x^N}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(N-1)\,(n+N-1)\,t^{n+N-2}}{n!}\,dt=$$

$$=\frac{N}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+N-1)^{n-1}\,x^n}{n!}-\frac{N}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(N-1)\,(n+N-1)^{n-2}\,x^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N\,(n+N-1)^{n-2}\,x^{n-1}}{(n-1)\,!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N\,(n+N)^{n-1}\,x^n}{n!}.$$

Таким образом, формула (5) доказана.

Зададим на $F_{n,N}$ равномерное распределение, приписав каждому элементу этого множества вероятность $(N(n+N)^{n-1})^{-1}$, и обозначим η_k число некорневых вершин в дереве с корнем, имеющим номер k, $k=1, \ldots$ $\ldots, N$. В силу (1)

$$\mathsf{P}\{\eta_1=n_1, \ldots, \eta_N=n_N\}=\frac{n!\,(n_1+1)^{n_1-1} \ldots (n_N+1)^{n_N-1}}{N\,(n+N)^{n-1}\, n_1! \ldots n_N!}, \tag{7}$$

где $n_1, \ldots, n_N$ — целые неотрицательные числа и $n_1+\ldots$ $\ldots+n_N=n$.

Как показано в примере 1.3.4, если $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathsf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{(k+1)^{k-1}}{k!}\, x^k e^{-\theta(x)}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{8}$$

где параметр x может принимать любое фиксированное значение из интервала $0<x\leqslant e^{-1}$, то

$$\mathsf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}=\frac{N\,(n+N)^{n-1}}{n!}\, x^n e^{-N\theta(x)}$$

и для целых неотрицательных $n_1, \ldots, n_N$ таких, что $n_1+\ldots+n_N=n$,

$$\mathsf{P}\{\eta_1=n_1, \ldots, \eta_N=n_N\}= \\ =\mathsf{P}\{\xi_1=n_1, \ldots, \xi_N=n_N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}.$$

Таким образом, для изучения объемов деревьев можно использовать обобщенную схему размещения частиц по ячейкам, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение (8).

Для случайного леса из $F_{n,N}$ обозначим $\mu_r(F_{n,N})$ число деревьев объема r и $\eta(F_{n,N})$ максимальный объем деревьев. Распределения характеристик случайного леса и случайного отображения из Σ_n связаны простыми соотношениями.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\mathsf{P}\{\mu_r(\Sigma_n)=k \mid \lambda^{(n)}=N\}=\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,N})=k\}, \tag{9}$$
$$\mathsf{P}\{\eta(\Sigma_n)=k \mid \lambda^{(n)}=N\}=\mathsf{P}\{\eta(F_{n-N,N})=k\}. \tag{10}$$

Доказательство. Событие $\lambda^{(n)}=N$ выделяет из Σ_n подмножество отображений, в которых число циклических вершин равно N. Если в графах этого подмножества отображений удалить ребра, соединяющие циклические вершины, фиксировать одно из C_n^N множеств циклических вершин, фиксировать одну из $N!$ подстановок, которые образуют эти вершины, то оставшееся множество графов совпадает с множеством лесов $F_{n-N,\,N}$, если циклические вершины перенумеровать по возрастанию номеров числами $1, 2, \ldots, N$, а нециклические вершины также по возрастанию номеров занумеровать числами $1, 2, \ldots, n-N$. Ясно, что отсюда с помощью формулы полной вероятности получаются утверждения (9) и (10).

Используя лемму 2, распределения $\mu_r(\Sigma_n)$ и $\eta(\Sigma_n)$ можно получить, усредняя распределения $\mu_r(F_{n-N,\,N})$ и $\eta(F_{n-N,\,N})$ по распределению числа циклических точек.

Лемма 3. *Для любого целого* $N=1, 2, \ldots, n$

$$\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}=\frac{N\,(n-1)!}{n^N\,(n-N)!}. \tag{11}$$

Доказательство. Из рассуждений, использованных при доказательстве леммы 2, ясно, что число $a_n(N)$ всех отображений из Σ_n с N циклическими точками равно

$$a_n(N)=C_n^N N!\,N n^{n-N-1},$$

где C_n^N — число способов выбрать N циклических вершин, $N!$ — число способов образовать из них циклы, Nn^{n-N-1} — число лесов, которые можно построить из $n-N$ некорневых вершин с N циклическими вершинами в качестве корней. Разделив $a_n(N)$ на число всех отображений в Σ_n, получаем утверждение леммы.

Лемма 4. *Если $n\to\infty$, то равномерно относительно целых N, для которых $z=N/\sqrt{n}$ лежит в любом интервале вида $0<z\leqslant c<\infty$,*

$$\sqrt{n}\,\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}/\sqrt{n}=z\}=ze^{-z^2/2}\,(1+o(1)).$$

Доказательство. Применяя формулу Стирлинга, находим, что при $n\to\infty$ равномерно относительно $z=N/\sqrt{n}\leqslant c<\infty$

$$n!=n^n\sqrt{n}\,e^{-n}\sqrt{2\pi}\,(1+o(1)),$$
$$(n-N)!=n^{n-N}\sqrt{n}\,e^{-n}\sqrt{2\pi}\,e^{z^2/2}\,(1+o(1)).$$

Подставляя эти выражения в (11), приходим к утверждению леммы.

§ 2. Объемы деревьев в случайном отображении

Рассмотрим случайные величины $\mu_r(\Sigma_n)$, равные числу деревьев в случайном отображении из Σ_n, содержащих ровно r некорневых вершин. Для получения предельных распределений $\mu_r(\Sigma_n)$ изучим вначале случайные величины $\mu_r(F_{n,N})$, равные числу деревьев в случайном лесе из $F_{n,N}$, а затем усредним полученные результаты по распределению числа циклических точек $\lambda^{(n)}$ в случайном отображении. Как показано в примере 1.3.4 и в предыдущем параграфе, для изучения случайных величин $\mu_r(F_{n,N})$ можно использовать обобщенную схему размещения частиц, которая задается распределением (1.8).

Положим в (1.8) параметр $x=e^{-1}$ и рассмотрим обобщенную схему размещения частиц, в которой определяющие ее случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют распределение

$$p_k=\mathsf{P}\{\xi_1=k\}=\frac{(k+1)^{k-1}}{k!}e^{-(k+1)}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots \tag{1}$$

Обозначим η_k число некорневых вершин в дереве с номером k, $k=1, \ldots, N$, случайного леса из $F_{n,N}$. Как показано в предыдущем параграфе, совместное распределение $\eta_1, \ldots, \eta_N$ удовлетворяет соотношению (1.2.2): для любых неотрицательных целых $n_1, \ldots n_N$ таких, что $n_1+\ldots+n_N=n$,

$$\mathsf{P}\{\eta_1=n_1, \ldots, \eta_N=n_N\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\xi_1=n_1, \ldots, \xi_N=n_N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}$$

Поэтому согласно лемме 1.2.1

$$\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n,N})=k\}=C_N^k p_r^k(1-p_r)^{N-k}\frac{\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}}, \tag{2}$$

где $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(r)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k \mid \xi_1\neq r\}.$$

Для получения предельного распределения $\mu_r(F_{n,N})$ достаточно исследовать предельные распределения сумм

$$\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N, \quad \zeta_N^{(r)}=\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_N^{(r)}.$$

Лемма 1. *При $N\to\infty$ равномерно относительно целых k, для которых $z=k/N^2$ лежит в любом интервале* *вида* $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$,

$$N^2\mathsf{P}\{\zeta_N/N^2 = z\} = \frac{1}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{1}{2z}}(1 + o(1)).$$

Доказательство. В примере 1.3.4 для вероятности $\mathsf{P}\{\zeta_N = k\}$ получено явное выражение:

$$\mathsf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{N(N+k)^{k-1}}{k!} x^{-k} e^{-N\theta(x)}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots$$

Поскольку в силу (1.4) $\theta(e^{-1}) = 1$, при $x = e^{-1}$ из этого равенства следует, что в случае, когда слагаемые имеют распределение (1),

$$\mathsf{P}\{\zeta_N = k\} = \frac{N(N+k)^{k-1}}{k!} e^{-(N+k)}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots \tag{3}$$

Используя формулу Стирлинга и учитывая, что при $N \to \infty$ и $k = zN^2$

$$(N+k)^{k-1} = k^{k-1} e^{N - \frac{1}{2z}}(1 + o(1)),$$

приходим к утверждению леммы.

Заметим, что лемму 1 можно доказать и с использованием характеристических функций. В силу (1), (1.3) и (1.4) характеристическая функция случайной величины ξ_1 равна

$$f(t) = e^{-it}\theta(e^{-1+it}) = \exp\{\theta(e^{-1+it}) - 1\}. \tag{4}$$

Согласно (1.12.13) при $t \to 0$

$$1 - \theta(e^{-1+it}) = \sqrt{-2it} + o(\sqrt{|t|})$$

и, следовательно,

$$f(t) = \exp\{-\sqrt{-2it} + o(\sqrt{|t|})\}. \tag{5}$$

Характеристическая функция суммы ζ_N/N^2 равна $f^N(t/N^2)$, и, как следует из (5), при любом фиксированном t и $N \to \infty$

$$f^N\left(\frac{t}{N^2}\right) \to e^{-\sqrt{-2it}}.$$

Функция $\exp\{-\sqrt{-2it}\} = \exp\{-\sqrt{|t|}(1 - it/|t|)\}$ является характеристической функцией устойчивого закона с показателем $\alpha = 1/2$, имеющего плотность

$$\frac{1}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{1}{2z}}, \quad z > 0$$

Поэтому распределение ζ_N/N^2 при $N\to\infty$ слабо сходится к распределению с такой плотностью. Максимальный шаг распределения (1) равен единице, и для ζ_N справедлива локальная предельная теорема, сформулированная в виде леммы 1.

Рассмотрим теперь предельное поведение суммы $\zeta_N^{(r)}$.

Лемма 2. *Если* $N\to\infty$, $s=N(1-p_r)(1+o(1))$, *то для любого фиксированного* r *равномерно относительно целых* k, *для которых* $z=k/N^2$ *лежит в любом интервале вида* $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$,

$$N^2\mathbf{P}\left\{\frac{1}{N^2}\zeta_s^{(r)}=z\right\}=\frac{1}{z\sqrt{2\pi z}}e^{-\frac{1}{2z}}(1+o(1)).$$

Доказательство. Характеристическая функция суммы $\zeta_s^{(r)}/N^2$ равна

$$\varphi_s(t)=\left(\frac{f(t/N^2)-p_re^{itr/N^2}}{1-p_r}\right)^s.$$

Преобразуя $\varphi_s(t)$ с помощью (5), находим, что при $N\to\infty$ и любом фиксированном t

$$\varphi_s(t)\to e^{-\sqrt{-2it}}.$$

Поскольку максимальный шаг распределения случайной величины $\xi_1^{(r)}$ равен единице, для $\zeta_s^{(r)}/N^2$ справедлива локальная предельная теорема о сходимости к устойчивому закону с показателем $\alpha=1/2$, составляющая содержание леммы 2.

Утверждение теоремы сохраняется и в случае, когда вместе с N и параметр $r\to\infty$. Однако в этом случае прямое применение теоремы 1.4.1 невозможно, так как распределение слагаемых зависит от N, и несмотря на то, что справедливость утверждения в этом случае несомненна, оно требует специального доказательства.

Лемма 3. *Если* $N, r\to\infty$, $s=N(1-p_r)(1+o(1))$, *то равномерно относительно целых* k, *для которых* $z=k/N^2$ *лежит в любом интервале вида* $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$,

$$N^2\mathbf{P}\left\{\frac{1}{N^2}\zeta_s^{(r)}=z\right\}=\frac{1}{z\sqrt{2\pi z}}e^{-\frac{1}{2z}}(1+o(1)).$$

Доказательство. По формуле обращения

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{N^2}\zeta_s^{(r)}=z\right\}=\frac{1}{2\pi N^2}\int_{-\pi N^2}^{\pi N^2}e^{-izt}\varphi_s\left(\frac{t}{N^2}\right)dt,$$

где

$$f_r(t) = \mathsf{M}\exp\{it\xi_1^{(r)}\} = \frac{f(t) - p_r e^{itr}}{1 - p_r}.$$

Характеристическая функция $\exp\{-\sqrt{-2it}\}$ абсолютно интегрируема, поэтому

$$\frac{1}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{1}{2z}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt-\sqrt{-2it}}\,dt$$

и разность

$$R_s = 2\pi N^2 \mathsf{P}\left\{\frac{1}{N^2}\zeta_s^{(r)} = z\right\} - \sqrt{2\pi}z^{-3/2}e^{-\frac{1}{2z}}$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-izt}\left(f_r^s\left(\frac{t}{N^2}\right) - e^{-\sqrt{-2it}}\right)dt,$$

$$I_2 = \int_{A<|t|\leqslant \varepsilon N^2} e^{-izt} f_r^s\left(\frac{t}{N^2}\right)dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon N^2<|t|\leqslant \pi N^2} e^{-izt} f_r^s\left(\frac{t}{N^2}\right)dt,$$

$$I_4 = -\int_{A<|t|} e^{-izt-\sqrt{-2it}}\,dt,$$

в которых постоянные A и ε будут выбраны позднее. Покажем, что выбором достаточно больших N и r величина $|R_s|$ может быть сделана сколь угодно малой. Для этого оценим приведенные выше интегралы.

Ясно, что выбором достаточно большого A величину $|I_4|$ можно сделать сколь угодно малой.

Так же, как в доказательстве леммы 2, убеждаемся, что при N, $r \to \infty$

$$\varphi_s(t) = f_r^s(t/N^2) \to e^{-\sqrt{-2it}},$$

так что при любом фиксированном A интеграл $I_1 \to 0$.

Можно показать, что найдутся такие положительные постоянные c и ε, что при $|t| \leqslant \varepsilon$

$$|\varphi_s(t)| \leqslant e^{-c\sqrt{|t|}}.$$

Поэтому при таком ε

$$|I_2| \leqslant \int_{A<|t|\leqslant \varepsilon N^2} |\varphi_s(t)|\,dt \leqslant 2\int_A^{\infty} e^{-c\sqrt{t}}\,dt$$

и величину $|I_2|$ выбором достаточно большого A можно сделать сколь угодно малой.

Наконец, при $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$

$$|f(t)| \leqslant q_1 < 1,$$

так как максимальный шаг распределения (1) равен единице. Учитывая, что при $r \to \infty$ вероятность $p_r \to 0$, убеждаемся, что при $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$, начиная с некоторого значения r,

$$|f_r(t)| \leqslant \frac{q_1 + p_r}{1 - p_r} \leqslant q < 1.$$

Используя это неравенство при оценке интеграла I_3, находим, что $|I_3| \leqslant 2\pi N^2 q^s$ и при $N \to \infty$ эта величина стремится к нулю.

Леммы 1, 2 и 3 позволяют доказать следующие утверждения о предельном поведении случайных величин $\mu_r(F_{n,N})$.

Теорема 1. *Пусть n, $N \to \infty$, тогда для любого фиксированного r равномерно относительно $z = n/N^2$ в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$ и равномерно относительно целых k, для которых*

$$u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$$

лежит в любом конечном интервале,

$$\mathbf{P}\{\mu_r(F_{n,N}) = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_r (1-p_r)}} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы используем представление (2). В условиях теоремы $N - k = N(1-p_r)(1+o(1))$, поэтому в силу леммы 2

$$N^2 \mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{1}{2z}} (1 + o(1))$$

равномерно относительно z и k в указанных в теореме областях. Используя лемму 1, находим, что

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\} / \mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = 1 + o(1). \tag{6}$$

В условиях теоремы равномерно относительно целых k, для которых u_r лежит в любом конечном интервале,

$$C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_r (1-p_r)}} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)). \tag{7}$$

Утверждение теоремы следует из (2), (6) и (7).

Теорема 2. *Пусть n, N, $r \to \infty$ так, что $r^3/n \to 0$, тогда равномерно относительно $z = n/N^2$ в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$ и равномерно относительно целых k, для которых $u_r = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r}$ лежит в любом конечном интервале,*

$$\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n,N}) = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_r}} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)).$$

Доказательство. Применяя леммы 1 и 3, находим, что в условиях теоремы справедливо сооотношение (6) равномерно относительно z и k в указанных в теореме областях. При $r \to \infty$ вероятность $p_r = (r\sqrt{2\pi r})^{-1}(1 + o(1))$, поэтому $Np_r \to \infty$ и равномерно относительно целых k, для которых u_r лежит в любом конечном интервале,

$$C_N^k p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N p_r}} e^{-u_r^2/2} (1 + o(1)). \qquad (8)$$

Утверждение теоремы следует из (2), (6) и (8).

Теорема 3. *Если n, N, $r \to \infty$, так, что $r = (n/(2\pi\beta^2))^{1/3}(1 + o(1))$, $\beta > 0$, то равномерно относительно $z = N/\sqrt{n}$ в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$ для любого фиксированного $k = 0, 1, \ldots$*

$$\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n,N}) = k\} = \frac{(z\beta)^k e^{-z\beta}}{k!}(1 + o(1)).$$

Доказательство. В условиях теоремы справедливо соотношение (6) и $Np_r = z\beta(1 + o(1))$, поэтому для любого фиксированного $k = 0, 1, \ldots$

$$C_N^k p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \frac{(z\beta)^k e^{-z\beta}}{k!}(1 + o(1)), \qquad (9)$$

и утверждение теоремы следует из (2), (6) и (9).

Рассмотрим теперь случайные величины $\mu_r(\Sigma_n)$.

Теорема 4. *Если $n \to \infty$, то для любой последовательности $r = r_n$ такой, что $r_n^3/n \to 0$, равномерно относительно целых k, для которых $z = k/(p_r\sqrt{n})$ лежит в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$,*

$$p_r\sqrt{n}\,\mathsf{P}\{\mu_r(\Sigma_n)/(p_r\sqrt{n}) = z\} = ze^{-z^2/2}(1 + o(1)).$$

Доказательство. В силу соотношения (1.9)

$$p_r\sqrt{n}\,\mathsf{P}\{\mu_r(\Sigma_n) = k\} = p_r\sqrt{n} \sum_{N=k}^{n-kr} \mathsf{P}\{\lambda^{(n)} = N\}\,\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,N}) = k\}. \qquad (10)$$

При оценке суммы, стоящей в правой части этого равенства, используется то, что вероятность $\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N})=k\}$ как функция параметра N имеет резко выраженный максимум в точке $N=k$, а функция $\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}$ в окрестности этой точки почти постоянна.

Разобьем область суммирования по N на три части:

$$M_1=\{N:\ k\leqslant N<z\sqrt{n}-n^{7/24}p_r^{-5/12}\},$$
$$M_2=\{N:\ z\sqrt{n}-n^{7/24}p_r^{-5/12}\leqslant N\leqslant z\sqrt{n}+n^{7/24}p_r^{-5/12}\},$$
$$M_3=\{N:\ z\sqrt{n}+n^{7/24}p_r^{-5/12}<N\leqslant n-kr\}.$$

Основной вклад в сумму, стоящую в правой части (10), дает слагаемое

$$S_2=p_r\sqrt{n}\sum_{N\in M_2}\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}\,\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N})=k\}.$$

В силу леммы 1.4 при $N\in M_2$

$$\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}=\frac{1}{\sqrt{n}}ze^{-z^2/2}(1+o(1))$$

и асимптотически не зависит от N, поэтому

$$S_2=p_rze^{-z^2/2}(1+o(1))\sum_{N\in M_2}\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N}\}=k\}.$$

Для оценки вероятности $\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N})\}$ применим теоремы 1 и 2. Заметим, что, поскольку приближения (7) и (8) справедливы равномерно относительно целых k, для которых $|u_r|/(Np_r(1-p_r))^{1/12}$ лежит в любом конечном интервале, утверждения теорем 1 и 2 справедливы для таких k. Поэтому, полагая

$$N=z\sqrt{n}+yn^{1/4}\sqrt{(1-p_r)/p_r},$$

где $|y|\leqslant(p_r\sqrt{n})^{1/12}/\sqrt{1-p_r}$, для $N\in M_2$ из теорем 1 и 2 получаем равенство

$$\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N})=k\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}e^{-u_r^2/2}(1+o(1))=$$
$$=\frac{1}{n^{1/4}\sqrt{2\pi zp_r(1-p_r)}}e^{-y^2/2z}(1+o(1)).$$

Подставляя это выражение в S_2, находим, что

$$S_2=ze^{-z^2/2}\sum_{N\in M_2}\frac{\sqrt{p_r}}{n^{1/4}\sqrt{2\pi z(1-p_r)}}e^{-\frac{y^2}{2z}}(1+o(1)).$$

Стоящая в правой части сумма представляет собой интегральную сумму функции $(2\pi)^{-1/2}\exp\{-u^2/2\}$ с шагом $\left(n^{1/4}\sqrt{2\pi z(1-p_r)/p_r}\right)^{-1}$. Заменяя суммирование интегрированием и учитывая, что пределы интегрирования стремятся к бесконечности, поскольку $p_r\sqrt{n}\to\infty$, окончательно получаем

$$S_2=ze^{-z^2/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du\,(1+o(1))=ze^{-z^2/2}(1+o(1)).$$

Остается показать, что оставшаяся часть суммы (10) стремится к нулю. Оценим величину

$$S_1=p_r\sqrt{n}\sum_{N\in M_1}\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}\,\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N})=k\}.$$

При $N\in M_1$, $r=o(n^{1/3})$ и $k=zp_r\sqrt{n}$ согласно леммам 1, 2 и 3

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-N-kr\}/\mathsf{P}\{\zeta_N=n-N\}\to 1$$

и найдется такая постоянная c_1, что отношение вероятностей не превосходит этой постоянной. Поэтому в силу (2) при $N\in M_1$

$$\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N})=k\}\leqslant c_1C_N^kp_r^k(1-p_r)^{N-k}$$

и, учитывая, что согласно лемме 1.4

$$\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}\leqslant c_2/\sqrt{n},$$

получаем оценку

$$S_1\leqslant cp_r\sum_{N\in M_1}C_N^kp_r^k(1-p_r)^{N-k},\tag{11}$$

где c — некоторая постоянная. Стоящая в правой части оценки (11) сумма содержит не более $z\sqrt{n}$ слагаемых, кроме того, величины $C_N^kp_r^k(1-p_r)^{N-k}$ с ростом N сначала монотонно возрастают до тех пор, пока $N\leqslant k/p_r$, а затем, при $N\geqslant k/p_r$, монотонно убывают, поэтому максимальным в сумме (11) является слагаемое с наибольшим значением $N\in M_1$, равное

$$C_{N_1}^kp_r^k(1-p_r)^{N_1-k},$$

где $N_1=z\sqrt{n}-n^{7/24}p_r^{-5/12}+O(1)$. Применяя для оценки этого слагаемого соотношения (7) и (8), находим, что

$$C_{N_1}^kp_r^k(1-p_r)^{N_1-k}=\frac{1}{n^{1/4}\sqrt{2\pi zp_r(1-p_r)}}e^{-y_1^2/2}(1+o(1)),$$

где $y_1=(p_r\sqrt{n})^{1/12}/\sqrt{1-p_r}$. Отсюда для S_1 следует оценка

$$S_1\leqslant\frac{cp_rz\sqrt{n}}{n^{1/4}\sqrt{2\pi zp_r(1-p_r)}}e^{-y_1^2/2}(1+o(1)).$$

Поскольку $p_r\sqrt{n}\to\infty$, из этой оценки следует, что $S_1\to 0$.

Оценим теперь сумму

$$S_3=p_r\sqrt{n}\sum_{N\in M_3}\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N})=k\}. \tag{12}$$

Согласно (3)

$$\mathsf{P}\{\zeta_N=n-N\}=\frac{Nn^{n-N-1}}{(n-N)!}e^{-n}$$

и согласно лемме 1.3

$$\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}=\frac{N\,(n-1)!}{n^N\,(n-N)!}.$$

С помощью этих равенств из (2) и (12) получаем, что

$$S_3\leqslant c_1p_rn\sum_{N\in M_3}C_N^kp_r^k(1-p_r)^{N-k}\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-N-kr\}, \tag{13}$$

где c_1 — некоторая постоянная. Из доказательства леммы 3 видно, что существует постоянная c_2 такая, что

$$\mathsf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-N-kr\}\leqslant c_2/N^2,$$

кроме того, существует постоянная c_3 такая, что

$$\sum_{N\in M_3}\frac{1}{N^2}\leqslant\frac{c_3}{\sqrt{n}}.$$

Подставляя эти оценки в (13), находим, что

$$S_3\leqslant c_2p_rn\sum_{N\in M_3}\frac{1}{N^2}C_N^kp_r^k(1-p_r)^{N-k}\leqslant$$
$$\leqslant cp_r\sqrt{n}C_{N_2}^kp_r^k(1-p_r)^{N_2-k},$$

где $N_2=z\sqrt{n}+n^{7/24}p_r^{-5/12}+O(1)$. Применяя нормальное приближение для биномиальной вероятности, так же, как и при оценке S_1, находим, что

$$S_3\leqslant cp_r\sqrt{n}\frac{1}{n^{1/4}\sqrt{2\pi zp_r(1-p_r)}}e^{-y_2^2/2},$$

где $y_2=(p_r\sqrt{n})^{1/12}/\sqrt{1-p_r}$ и, следовательно, $S_3\to 0$.

Теорема 5. *Если* $n \to \infty$ *и* $r = (n/(2\pi\beta^2))^{1/3}(1+o(1))$, $0 < \beta < \infty$, *то для любого фиксированного* $k = 0, 1, \ldots$

$$\mathsf{P}\{\mu_r(\Sigma_n) = k\} \to \int_0^\infty \frac{(\beta z)^k e^{-\beta z}}{k!} z e^{-z^2/2}\, dz.$$

Доказательство. Положим $z = N/\sqrt{n}$, тогда согласно теореме 3 равномерно относительно z в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$ для любого фиксированного $k = 0, 1, \ldots$

$$\mathsf{P}\{\mu_r(F_{n-N,\,N}) = k\} = \frac{(z\beta)^k e^{-z\beta}}{k!}(1+o(1)).$$

Используя это соотношение и лемму 1.4, из (2) получаем:

$$\mathsf{P}\{\mu_r(\Sigma_n) = k\} = \sum_{z_0\sqrt{n} \leqslant N \leqslant z_1\sqrt{n}} \frac{z}{\sqrt{n}} e^{-z^2/2} \frac{(\beta z)^k e^{-\beta z}}{k!} + \delta,$$

где величина δ может быть сделана сколь угодно малой выбором n, z_0 и z_1. В правой части полученного равенства стоит интегральная сумма функции

$$\frac{(\beta z)^k e^{-\beta z}}{k!} z e^{-z^2/2}$$

с шагом $n^{-1/2}$. Выбором z_0, z_1 и n можно добиться того, чтобы эта сумма, а значит и $\mathsf{P}\{\mu_r(\Sigma_n) = k\}$, сколь угодно мало отличалась от интеграла от указанной функции в пределах от 0 до ∞.

§ 3. Максимальный объем деревьев в случайном отображении

Рассмотрим случайную величину $\eta(\Sigma_n)$, равную максимальному объему дерева случайного отображения из Σ_n. Для этой случайной величины справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$ *для любого фиксированного* $z > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta(\Sigma_n) \leqslant z\right\} \to 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \Gamma(s/2+1)}{s!\,\pi^{s/2}} I_s(z), \qquad (1)$$

где

$$I_s(z)=\int\limits_X\cdots\int\frac{(1-x_1-\ldots-x_s)^{(s-1)/2}}{(x_1\ldots x_s)^{3/2}}\,dx_1\ldots dx_s,$$

$$X=\{x_i\geqslant z,\ i=1,\ \ldots,\ s,\ x_1+\ldots+x_s\leqslant 1\}.$$

Ясно, что для любого $z>0$ ряд в правой части (1) обрывается и представляет собой конечную сумму, в частности, при $1/2<z\leqslant 1$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta(\Sigma_n)\leqslant z\right\}\to 2-z^{-1/2}.$$

Для доказательства теоремы 1 изучим вначале предельное поведение случайных величин $\eta(F_{n,N})$, равных максимальному объему дерева в случайном лесе из $F_{n,N}$, а затем усредним результат по распределению числа циклических вершин $\lambda^{(n)}$ в случайном отображении.

Так же, как и в § 2, для изучения случайной величины $\eta(F_{n,N})$ используем обобщенную схему размещения n частиц в N ячеек, в которой случайные величины $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_N$ имеют распределение (2.1).

Согласно лемме 1.2.2

$$\mathsf{P}\{\eta(F_{n,N})\leqslant r\}=(1-P_r)^N\frac{\mathsf{P}\{\overline{\zeta}_N^{(r)}=n\}}{\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}},\tag{2}$$

где

$$P_r=\mathsf{P}\{\xi_1>r\},$$

$$\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N,\quad \overline{\zeta}_N^{(r)}=\overline{\xi}_1^{(r)}+\ldots+\overline{\xi}_N^{(r)},$$

$\overline{\xi}_1^{(r)},\ \ldots,\ \overline{\xi}_N^{(r)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathsf{P}\{\overline{\xi}_1^{(r)}=k\}=\mathsf{P}\{\xi_1=k\,|\,\xi_1\leqslant r\},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ r.$$

Таким образом, для получения предельного распределения $\eta(F_{n,N})$ достаточно исследовать предельные распределения сумм $\zeta^{(N)}$ и $\overline{\zeta}_N^{(r)}$, а также найти асимптотику вероятности $P_r=\mathsf{P}\{\xi_1>r\}$.

Согласно лемме 2.1 при $N\to\infty$ равномерно относительно целых k, для которых $z=k/N^2$ лежит в любом интервале вида $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$,

$$N^2\mathsf{P}\left\{\frac{1}{N^2}\zeta_N=z\right\}=\frac{1}{z\sqrt{2\pi z}}e^{-1/2z}(1+o(1)).\tag{3}$$

Докажем локальную предельную теорему для $\overline{\zeta}_N^{(r)}$.

Лемма 1. *Пусть n, $N \to \infty$ так, что $n/N^2 \to \gamma$, $r = zn$, где γ и z — положительные постоянные. Тогда равномерно относительно целых k, для которых $v = k/N^2$ лежит в любом конечном интервале вида $0 < v_0 \leqslant v \leqslant v_1 < \infty$,*

$$N^2 \mathsf{P}\left\{\frac{1}{N^2}\bar{\zeta}_N^{(r)} = v\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{E(0,\, z\gamma)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} I_s(z\gamma,\ v),$$

где

$$I_0(u,\ v) = v^{-3/2} e^{-1/2v},$$

$$I_s(u,\ v) = \int\limits_{X_s(u,\, v)} \frac{\exp\{-1/(2(v - x_1 - \ldots - x_s))\}\, dx_1 \ldots dx_s}{(2\pi)^{s/2}\quad (x_1 \ldots x_s (v - x_1 - \ldots - x_s))^{3/2}},$$

$$X_s(u,\ v) = \{x_i \geqslant u,\ i = 1,\ \ldots,\ s,\ x_1 + \ldots + x_s \leqslant v\},$$
$$s = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$E(t,\ u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_u^{\infty} y^{-3/2} e^{-ity}\, dy, \qquad u > 0. \tag{4}$$

Доказательство. Характеристическая функция распределения (2.1) равна

$$f(t) = \exp\{\theta(e^{-1+it}) - 1\},$$

поэтому, как нетрудно видеть, характеристическая функция суммы $\bar{\zeta}_N^{(r)}/N^2$ имеет вид

$$\varphi_N^{(r)}(t) = \left(\frac{f\left(\dfrac{t}{N^2}\right) - \sum\limits_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk/N^2}}{1 - P_r}\right)^N. \tag{5}$$

Согласно (2.5) при $t \to 0$

$$f(t) = \exp\left\{-\sqrt{-2it} + o\left(\sqrt{|t|}\right)\right\},$$

поэтому при $N \to \infty$ для любого фиксированного t

$$\varphi_N^{(r)}(t) = \frac{1 + o(1)}{(1 - P_r)^N} e^{-\sqrt{-2it}} \left(1 - (1 + o(1)) \sum_{k=r+1}^{\infty} p_r e^{itk/N^2}\right). \tag{6}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk/N^2} = \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{(k+1)!} e^{itk/N^2 - (k+1)} =$$

$$= e^{-it/N^2} \sum_{k=r+2}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} e^{(it/N^2 - 1)k}.$$

При $k > r = zn$

$$\frac{k^{k-1}}{k!} e^{-k} = \frac{1}{k\sqrt{2\pi k}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

поэтому при $n,\ N \to \infty,\ n/N^2 \to \gamma$

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk/N^2} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=r+2}^{\infty} k^{-3/2} e^{itk/N^2} =$$

$$= \frac{1}{N\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma z}^{\infty} y^{-3/2} e^{ity}\, dy\, (1 + o(1)) = \frac{E(t,\ \gamma z)}{N}(1 + o(1)), \qquad (7)$$

где функция $E(t,\ u)$ определена формулой (4). Легко видеть, что из (7) следует, что

$$P_r = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k = \frac{E(0,\ \gamma z)}{N}(1 + o(1)), \qquad (8)$$

поэтому из (6) и (7) находим, что при $n,\ N \to \infty,\ n/N^2 \to \gamma$ для любого фиксированного t

$$\varphi_N^{(r)}(t) = \exp\{-\sqrt{-2it} - E(t,\ \gamma z) + E(0,\ \gamma z)\}(1 + o(1)). \qquad (9)$$

Поскольку $E(t,\ \gamma z)$ является преобразованием Фурье функции

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{u\sqrt{2\pi u}}, & u \geqslant \gamma z, \\ 0, & u < \gamma z, \end{cases}$$

разлагая $\exp\{-E(t,\ \gamma z)\}$ в ряд по степеням $E(t,\ \gamma z)$ и учитывая, что $\exp\{-\sqrt{-2it}\}$ является характеристической функцией с плотностью $(y\sqrt{2\pi y}\exp\{1/(2y)\})^{-1}$, $y > 0$, находим, что $\varphi_N^{(r)}(t)$ сходится в каждой точке t к характеристической функции распределения с плотностью

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{E(0,\ \gamma z)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} I_s(z\gamma,\ v).$$

По формуле обращения

$$\mathsf{P}\{\overline{\zeta}_N^{(r)} = k\} = \mathsf{P}\{\overline{\zeta}_N^{(r)}/N^2 = v\} = \frac{1}{2\pi N^2} \int_{-\pi N^2}^{\pi N^2} e^{-ivt} \varphi_N^{(r)}(t)\, dt. \qquad (10)$$

Нетрудно видеть, что

$$\left| e^{-\sqrt{-2it}-E(t,\, \gamma z)+E(0,\, \gamma z)} \right| \leqslant c e^{-\sqrt{|t|}}, \tag{11}$$

где c — некоторая постоянная. Поэтому справедлива формула обращения и

$$g(v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ivt-\sqrt{-2it}-E(t,\, \gamma z)+E(0,\, \gamma z)}\, dt.$$

Отсюда и из (10) следует, что разность

$$2\pi N^2 \mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)}/N^2 = v\} - 2\pi g(v)$$

можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-itv} \left(\varphi_N^{(r)}(t) - e^{-\sqrt{-2it}-E(t,\, \gamma z)+E(0,\, \gamma z)}\right) dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{A<|t|\leqslant \varepsilon N^2} e^{-itv} \varphi_N^{(r)}(t)\, dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon N^2<|t|\leqslant \pi N^2} e^{-itv} \varphi_N^{(r)}(t)\, dt,$$

$$I_4 = -\int\limits_{A<|t|} e^{-itv-\sqrt{-2it}-E(t,\, \gamma z)+E(0,\, \gamma z)}\, dt,$$

в которых постоянные A и ε будут выбраны позднее.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что каждый из этих интегралов может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно больших n и N. Из (9) следует, что при любом фиксированном A интеграл I_1 стремится к нулю.

Учитывая неравенство (11), для I_4 получаем оценку

$$|I_4| \leqslant 2 \int\limits_{A}^{\infty} e^{-c\sqrt{t}}\, dt$$

и величина $|I_4|$ может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно большого A.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ для $|t| \leqslant \varepsilon$ справедливо неравенство

$$|f(t)| \leqslant e^{-\sqrt{|t|/2}},$$

поэтому из (5) следует, что

$$|I_2| \leqslant 2(1-P_r)^{-N} \int_A^{\varepsilon N^2} (e^{-\sqrt{t}/(2N)}+P_r)^N\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{1+P_r e^{\sqrt{\varepsilon}/2}}{1-P_r}\right)^N \int_A^{\infty} e^{-\sqrt{t}/2}\, dt.$$

Отсюда и из (8) получаем, что

$$|I_2| \leqslant c_1 \int_A^{\infty} e^{-\sqrt{t}/2}\, dt,$$

где c_1 — некоторая постоянная. Таким образом, величина $|I_2|$ выбором достаточно большого A может быть сделана сколь угодно малой.

Оценим теперь I_3. Если $0<\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$, то $|f(t)| \leqslant \leqslant q_1 < 1$, кроме того, из (8) следует, что, начиная с некоторого значения параметра r,

$$(q_1+P_r)/(1-P_r) \leqslant q < 1,$$

поэтому для I_3 справедлива оценка

$$|I_3| \leqslant \int_{\varepsilon N^2 \leqslant |t| \leqslant \pi N^2} |\varphi_N^{(r)}(t)|\, dt \leqslant N^2 \int_{\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \pi} |\varphi_N^{(r)}(uN^2)|\, du \leqslant$$
$$\leqslant N^2 \int_{\varepsilon \leqslant |u| \leqslant \pi} \left(\frac{q_1+P_r}{1-P_r}\right)^N du \leqslant 2\pi N^2 q^N$$

и при $N \to \infty$ величина I_3 стремится к нулю.

Лемма 1 позволяет доказать следующее утверждение о предельном поведении $\eta(F_{n,N})$.

Теорема 2. *При n, $N \to \infty$ для любого фиксированного положительного z равномерно относительно $x = n/N^2$ в любом интервале вида $0 < x_0 \leqslant x \leqslant x_1 < \infty$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta(F_{n,N}) \leqslant z\right\} = x^{3/2} e^{1/2x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} I_s(zx, x)(1+o(1)),$$

где $I_s(zx, x)$ определены в лемме 1.

Доказательство. Предположение о несправедливости утверждения теоремы приводит к существованию последовательности n, $N \to \infty$, для которой $n/N^2 \to \gamma$, где γ — положительная постоянная, и соотношение

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta(F_{n,N})\leqslant z\right\}\to\gamma^{3/2}e^{1/2\gamma}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}I_s(z\gamma,\gamma) \quad (12)$$

не выполняется при некотором $z>0$. Поэтому для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что соотношение (12) справедливо для любого фиксированного положительного z.

Итак, будем предполагать, что n, $N\to\infty$ и $n/N^2\to\gamma$, $0<\gamma<\infty$. Из (8) следует, что при $r=zn$

$$(1-P_r)^N\to e^{-E(0,\gamma z)}, \quad (13)$$

где функция $E(t, u)$ определена равенством (4). Из (3) следует, что

$$N^2\mathsf{P}\{\zeta_N=n\}\to\frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi\gamma}}e^{-1/2\gamma}. \quad (14)$$

Согласно лемме 1

$$N^2\mathsf{P}\{\bar{\zeta}_N^{(r)}=n\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{E(0,\gamma z)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}I_s(z\gamma,\gamma). \quad (15)$$

Соотношение (12), а с ним и утверждение теоремы следуют теперь из (2), (13), (14) и (15).

Докажем теперь теорему 1. Ясно, что в условиях теоремы

$$\mathsf{P}\{\eta(F_{n-N,N})/n\leqslant z\}=\mathsf{P}\{\eta(F_{n,N})/n\leqslant z\}(1+o(1))$$

и согласно (1.10) для доказательства теоремы 1 остается провести усреднение результата теоремы 2 по распределению $\lambda^{(n)}$ числа циклических точек в случайном отображении:

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta(\Sigma_n)\leqslant z\right\}=\sum_{N=1}^{n}\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}\,\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta(F_{n-N,N})\leqslant z\right\}.$$

Обозначим $y=N/\sqrt{n}$ и с помощью леммы 1.4 и теоремы 2 перепишем это равенство в виде

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta(\Sigma_n)\leqslant z\right\}=\sum_{y_0\leqslant y\leqslant y_1}\frac{1}{y^2\sqrt{n}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}I_s(zy^{-2},y^{-2})+\delta,$$

где величина δ может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно малого положительного y_0 и достаточно большого y_1. Стоящая в правой части последнего равенства сумма представляет собой интегральную сумму для функции

$$h(y)=\frac{1}{y^2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}I_s(zy^{-2},\ y^{-2})$$

с шагом $n^{-1/2}$. Отсюда следует, что выбором y_0, y_1 и n разность между $\mathsf{P}\{\eta(\Sigma_n)/n\leqslant z\}$ и интегралом от $h(y)$ в пределах от 0 до ∞ может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому при выполнении условий теоремы

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta(\Sigma_n)\leqslant z\right\}\to\int_0^{\infty}y^{-2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\times$$
$$\times\int\limits_{X_s(zy^{-2},\ y^{-2})}\frac{\exp\{-1/(2(y^{-2}-x_1-\ldots-x_s))\}\,dx_1\ldots dx_s\,dy}{(2\pi)^{s/2}(x_1\ldots x_s(y^{-2}-x_1-\ldots-x_s))^{3/2}}.$$

Сделав замену переменных $u_1=x_1y^2,\ \ldots,\ u_s=x_sy^2$, $v=y/\sqrt{1-u_1-\ldots-u_s}$ и проведя в каждом слагаемом суммы интегрирование по переменному v, приходим к утверждению теоремы.

§ 4. Ветвящиеся процессы и случайные леса

Ранее было установлено, что совместное распределение объемов деревьев $\eta_1,\ \ldots,\ \eta_N$ в случайном лесе из $F_{n,\,N}$ удовлетворяет соотношению (1.2.2), которое можно переписать в следующей форме: для любых целых положительных $n_1,\ \ldots,\ n_N$

$$\mathsf{P}\{\eta_1+1=n_1,\ \ldots,\ \eta_N+1=n_N\}=\mathsf{P}\{\nu^{(1)}=n_1,\ \ldots,\ \nu^{(N)}=n_N\mid\nu^{(1)}+\ldots+\nu^{(N)}=n+N\},\quad(1)$$

где случайные величины $\nu^{(1)},\ \ldots,\ \nu^{(N)}$ независимы и имеют распределение

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)}=k\}=\frac{k^{k-1}}{k!}e^{-k},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots\qquad(2)$$

В теории ветвящихся процессов распределение (2) представляет собой распределение общего числа частиц в начинающемся с одной частицы ветвящемся процессе $\mu(t,\ G)$, в котором число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона с параметром, равным единице, а распределение суммы $\nu^{(1)}+\ldots+\nu^{(N)}$ совпадает с распределением общего числа чгстиц в таком ветвящемся процессе, начинающемся с N частиц. Соотношение (1) является проявлением общей связи между ветвящимися процессами и случайными лесами, аналогичной связи между ветвящимися процессами и случайными деревьями, рассмотренной в гл. II.

Любая вершина леса из $F_{n, N}$ соединяется с корнем своего дерева единственным путем. Число ребер, составляющих этот путь, называется *высотой вершины леса*. Будем считать все ребра каждого дерева леса направленными от корня и назовем кратностью вершины число выходящих из нее ребер. Для случайного леса из $F_{n, N}$ обозначим $\mu_{r, j}(t, F_{n, N})$ число вершин дерева j, имеющих высоту t и кратность r, $t, r = 0, 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, N$.

Рассмотрим начинающийся с N частиц ветвящийся процесс $\mu(t, G^N)$, в котором число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона с параметром λ. Потомки каждой из N частиц, с которых начинается процесс $\mu(t, G^N)$, образуют N независимых ветвящихся процессов, каждый из которых начинается с одной частицы. Занумеруем начальные частицы числами $1, 2, \ldots$ $\ldots, N$ и обозначим $\mu(t, G^{(j)})$ процесс, начинающийся с частицы с номером j, $j = 1, \ldots, N$. Пусть $\mu_{r, j}(t, G^N)$ означает число частиц, существующих в процессе $\mu(t, G^{(j)})$ в момент t и имеющих ровно r прямых потомков, $t, r = 0, 1, \ldots$; $j = 1, \ldots, N$.

Рассмотрим трехмерные матрицы $\|\mu_{r, j}(t, F_{n, N})\|$, $\|\mu_{r, j}(t, G^N)\|$, $t, r = 0, 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, N$, и матрицу $M = \|m_{r, j}(t)\|$ того же размера, составленную из целых неотрицательных чисел. Обозначим $n_j(n+1) = 0$, $n_j(t) = m_{0, j}(t) + \ldots + m_{n, j}(t)$, $t = 0, 1, \ldots, n$.

Для того чтобы равенство $\|\mu_{r, j}(t, F_{n, N})\| = M$ имело положительную вероятность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{t=0}^{n} n_j(t) = n + N,$$

$$n_j(0) = 1, \quad n_j(t) = m_{1, j}(t-1) + 2m_{2, j}(t-1) + \ldots$$
$$\ldots + nm_{n, j}(t-1),$$
$$t = 1, 2, \ldots, n+1; \quad j = 1, \ldots, N.$$

Матрицу M, для которой выполняются эти соотношения, назовем допустимой.

Обозначим $\nu(G^N)$ общее число частиц, существовавших в ветвящемся процессе $\mu(t, G^N)$ до его вырождения.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t, F_{n,N})\| = M\} = \\ = \mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t, G^N)\| = M \mid \nu(G^N) = n+N\}. \quad (3)$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1.3

$$\mathsf{P}\{\nu(G^N) = n+N\} = \frac{N}{n+N}\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{n+N} = n\},$$

где случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+N}$ независимы и имеют распределение числа потомков одной частицы в ветвящемся процессе $\mu(t, G^N)$. Поскольку в процессе $\mu(t, G^N)$ число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона с параметром λ,

$$\mathsf{P}\{\nu(G^N) = n+N\} = \frac{N\lambda^n(n+N)^{n-1}}{n!}e^{-\lambda(n+N)}. \quad (4)$$

Для допустимой матрицы M

$$\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t, G^N)\| = M\} = \\ = \prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n} n_j(t)! \prod_{r=0}^{n}\frac{1}{m_{r,j}(t)!}\left(\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}\right)^{m_{r,j}(t)} = \\ = e^{-\lambda(n+N)}\lambda^n \prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n} n_j(t)! \prod_{r=0}^{n}\frac{1}{m_{r,j}(t)!\,(r!)^{m_{r,j}(t)}}.$$

Отсюда с помощью (4) получаем, что

$$\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t, G^N)\| = M \mid \nu(G^N) = n+N\} = \\ = \frac{n!}{N(n+N)^{n-1}}\prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n} n_j(t)! \prod_{r=0}^{n}\frac{1}{m_{r,j}(t)!\,(r!)^{m_{r,j}(t)}}.$$

Найдем теперь вероятность $\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t, F_{n,N})\| = M\}$. Для допустимой матрицы существует лес такой, что $\|\mu_{r,j}(t, F_{n,N})\| = M$. С его помощью построим все леса из $F_{n,N}$, для которых выполняется это равенство. Перенумеруем некорневые вершины этого леса числами $1, 2, \ldots, n$, это можно сделать $n!$ способами. В дереве с номером корня j содержится $n_j(t)$ вершин высоты t, являющихся корнями $n_j(t)$ поддеревьев. В каждом из $n!$ лесов, полученных перенумерацией вершин, переставим эти $n_j(t)$ поддеревьев $n_j(t)!$ способами. Проведем эту операцию в каждом слое. Число полученных лесов, очевидно, равно

$$n!\prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n} n_j(t)!.$$

Ясно, что среди полученных лесов не все различны. Одинаковые леса появились по двум причинам: во-первых, каждая вершина кратности r приводит к появлению $r!$ одинаковых лесов, что дает

$$\prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n}\prod_{r=0}^{n} (r!)^{m_{r,j}(t)}$$

одинаковых лесов; во-вторых, $m_{r,j}(t)!$ перестановок поддеревьев с корнями одинаковой кратности r в слое t дерева с номером j приводит к $m_{r,j}(t)!$ повторениям одного и того же леса, что дает еще

$$\prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n}\prod_{r=0}^{n} m_{r,j}(t)!$$

одинаковых лесов. В результате этих двух причин число появлений каждого леса равно

$$\prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n}\prod_{r=0}^{n} m_{r,j}(t)!\,(r!)^{m_{r,j}(t)}.$$

Учитывая, что число лесов в $F_{n,N}$ равно $N(n+N)^{n-1}$, получаем формулу

$$\mathbf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ F_{n,N})\|=M\}=$$

$$=\frac{n!}{N(n+N)^{n-1}}\prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n} n_j(t)!\prod_{r=0}^{n}\frac{1}{m_{r,j}(t)!\,(r!)^{m_{r,j}(t)}}.$$

Таким образом, для допустимых матриц M утверждение леммы доказано. Остается заметить, что для недопустимой матрицы обе вероятности в (3) равны нулю.

Утверждение леммы 1 при $N=1$ совпадает с утверждением леммы 2.2.1. Для случайных лесов с ограничениями на кратности вершин справедлив аналог леммы 2.5.1.

Пусть R — множество целых неотрицательных чисел, содержащее 0 и не совпадающее с $\{0,\ 1\}$. Обозначим $F_{n,N,R}$ подмножество тех лесов из $F_{n,N}$, кратности вершин которых принимают значения только из R. Обозначим $\mu_r(F_{n,N})$ число вершин случайного леса из $F_{n,N}$, имеющих кратность r, и рассмотрим событие

$$A_R=\{\mu_r(F_{n,N})=0,\ r\notin R\}.$$

Ясно, что если $\mathsf{P}(A_R)>0$, то условное распределение на $F_{n,N}$ при условии A_R является равномерным на множестве $F_{n,N,R}$. На множестве $F_{n,N,R}$ с равномерным распределением обозначим $\mu_{r,j}(t,\ F_{n,N,R})$ случайную величину, равную числу вершин в j-м дереве случайного леса из $F_{n,N,R}$, имеющих кратность r и высоту t, r, $t=0,\ 1,\ \ldots,\ n$; $j=1,\ \ldots,\ N$.

Рассмотрим начинающийся с N частиц ветвящийся процесс $\mu(t,\ G_R^N)$, для которого число потомков одной частицы имеет распределение

$$p_r(R,\ \lambda)=\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!\,P(R,\ \lambda)},\qquad r\in R, \tag{5}$$

где

$$P(R,\ \lambda)=\sum_{r\in R}\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}.$$

Занумеруем начальные частицы этого процесса и обозначим $\mu_{r,j}(t,\ G_R^N)$ число частиц в момент t в процессе, начинающемся с частицы с номером j, каждая из которых имеет ровно r прямых потомков, $t,\ r=0,\ 1,\ \ldots;\ j=1,\ldots,\ N$; $\nu(G_R^N)$ — общее число частиц, существовавших в процессе $\mu(t,\ G_R^N)$ за все время его эволюции,

$$\mu_r(G_R^N)=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\mu_{r,j}(t,\ G_R^N),$$

$$A_{R,G}=\{\mu_r(G_R^N)=0,\ r\notin R\}.$$

Рассмотрим трехмерные матрицы $\|\mu_{r,j}(t,\ G_R^N)\|$, $\|\mu_{r,j}(t,\ F_{n,N,R})\|$, $t,\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ n$; $j=1,\ \ldots,\ N$, и матрицу $M=\|m_{r,j}(t)\|$ того же размера, составленную из целых неотрицательных чисел.

Лемма 2. *Если* $\mathsf{P}\{\nu(G_R^N)=n+N\}>0$, *то*

$$\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ F_{n,N,R})\|=M\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ G_R^N)\|=M\mid\nu(G_R^N)=n+N\}.$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ F_{n,N})\|=M\mid A_R\}=$$
$$=\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ G^N)\|=M\mid\nu(G^N)=n+N,\ A_{R,G}\}. \tag{6}$$

Ясно, что

$$\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ F_{n,N})\|=M\mid A_R\}=\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ F_{n,N,R})\|=M\}.$$

Остается показать, что

$$\|\{\mu_{r,j}(t, G^N)\| = M \mid \nu(G^N) = n+N, A_{R,G}\} = \\ = \mathbf{P}\{\|\mu_{r,j}(t, G_R^N)\| = M \mid \nu(G_R^N) = n+N\}. \quad (7)$$

Обозначим

$$n_j(n+1) = 0, \ n_j(t) = m_{0,j}(t) + \ldots + m_{n,j}(t), \\ j = 1, \ldots, N, \quad t = 0, 1, \ldots, n.$$

Для того чтобы равенство $\|\mu_{r,j}(t, F_{n,N,R})\| = M$ имело положительную вероятность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{t=0}^{n} \sum_{j=1}^{N} n_j(t) = n+N, \quad m_{r,j}(t-1) = 0, \quad r \notin R,$$

$$n_j(0) = 1, \quad n_j(t) = m_{1,j}(t-1) + 2m_{2,j}(t-1) + \ldots \\ \ldots + nm_{n,j}(t-1), \\ t = 1, \ldots, n+1, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Матрицу M, для которой эти соотношения выполняются, назовем R-допустимой. Ясно, что равенство (6) справедливо, если M не является R-допустимой. Для R-допустимой матрицы M докажем соотношение (7), выписав явные выражения вероятностей, стоящих в левой и правой частях равенства. Согласно лемме 2.1.5

$$\mathbf{P}\{\nu(G^N) = n+N, \ \mu_r(t, G^N) = 0, \ r \notin R\} = \\ = \frac{N\,(n+N)!}{n+N} \sum_K \frac{p_0^{k_0} \ldots p_n^{k_n}}{k_0! \ldots k_n!}, \quad (8)$$

где

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

и суммирование проводится по множеству K целых неотрицательных чисел $k_0, \ldots, k_n$ таких, что

$$k_0 + \ldots + k_n = n+N, \quad k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n, \\ k_r = 0, \quad r \notin R.$$

С другой стороны, для процесса $\mu(t, G_R^N)$

$$\mathbf{P}\{\nu(G_R^N) = n+N\} = \frac{N}{n+N} \mathbf{P}\{\xi_1^{(R)} + \ldots + \xi_{n+N}^{(R)} = n\},$$

где $\xi_1^{(R)}, \ldots, \xi_{n+N}^{(R)}$ — независимые случайные величины с распределением (5). Поэтому, учитывая (8), находим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\nu(G_R^N)=n+N\}&=\\&=\mathsf{P}\{\nu(G^N)=n+N,\ A_{R,G}\}/(P(R,\ \lambda))^{n+N}.\end{aligned}\tag{9}$$

Для R-допустимой матрицы M согласно (5)

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ G_R^N)\|=M\}&=\\&=\prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n}n_j(t)!\prod_{r=0}^{n}\frac{1}{m_{r,j}(t)!}(p_r(R,\ \lambda))^{m_{r,j}(t)}=\\&=\frac{1}{(P(R,\lambda))^{n+N}}\prod_{j=1}^{N}\prod_{t=0}^{n}n_j(t)!\prod_{r=0}^{n}\frac{1}{m_{r,j}(t)!}p_r^{m_{r,j}(t)}=\\&=\mathsf{P}\{\|\mu_{r,j}(t,\ G^N)\|=M\}/(P(R,\ \lambda))^{n+N}.\end{aligned}$$

Из этого равенства с учетом (9) получаем равенство (7).

Лемма 1 позволяет свести изучение распределения любой характеристики случайного леса из $F_{n,N}$, выражающейся через случайные величины $\mu_{r,j}(t,\ F_{n,N})$, $t,\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ n$; $j=1,\ \ldots,\ N$, к изучению условного распределения соответствующей характеристики ветвящегося процесса $\mu(t,\ G^N)$ при условии, что общее число частиц $\nu(G^N)$ в этом процессе равно $n+N$. Лемма 2 играет аналогичную роль для множества лесов $F_{n,N,R}$ с ограничениями на кратности вершин деревьев.

§ 5. Высота случайного отображения

В графе отображения $s\in\Sigma_n$ каждая вершина лежит в некотором дереве, и в этом дереве для нее определена высота. Максимальная высота вершин отображения называется *высотой отображения* $s\in\Sigma_n$. Обозначим $\tau(\Sigma_n)$ высоту случайного отображения из Σ_n. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *При $n\to\infty$ для любого фиксированного $x>0$*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\tau(\Sigma_n)}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}\to\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-k^2x^2/2}.$$

Обозначим $\tau(F_{n,N})$ высоту случайного леса из $F_{n,N}$, равную максимальной высоте вершин леса. Легко видеть (см. лемму 1.2), что для любого k

$$\mathsf{P}\{\tau(\Sigma_n)=k\mid\lambda^{(n)}=N\}=\mathsf{P}\{\tau(F_{n-N,N})=k\},\tag{1}$$

поэтому распределение $\tau(\Sigma_n)$ можно получить усреднением распределения $\tau(F_{n,N})$ по распределению числа циклических точек $\lambda^{(n)}$ в случайном отображении из Σ_n.

Обозначим $\tau(G^N)$ момент вырождения случайного процесса $\mu(t, G^N)$. Случайные величины $\tau(F_{n,N})$ и $\tau(G^N)-1$ одинаково выражаются соответственно через случайные величины $\mu_{r,j}(t, F_{n,N})$ и $\mu_{r,j}(t, G^N)$, t, $r=0, 1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, N$, и, следовательно, в силу леммы 3.1

$$\mathsf{P}\{\tau(F_{n,N})=k\}=\mathsf{P}\{\tau(G^N)-1=k \mid \nu(G^N)=n+N\}. \quad (2)$$

Поэтому доказательство теоремы 1 начнем с изучения условного распределения времени жизни ветвящегося процесса $\mu(t, G^N)$ при условии $\nu(G^N)=n+N$. Согласно лемме 3.1 в распределении Пуассона числа потомков одной частицы в этом процессе параметр λ можно выбирать произвольно, выбором $\lambda=1$ процесс $\mu(t, G^N)$ можно сделать критическим.

Рассмотрим общий критический ветвящийся процесс $\mu(t)$, $\mu(0)=N$, с распределением числа потомков одной частицы, задаваемым производящей функцией

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n. \quad (3)$$

Будем предполагать, что дисперсия числа потомков одной частицы конечна и равна B.

Процесс $\mu(t)$ при $\mu(0)=N$ естественным образом разбивается на N независимых процессов $\mu^{(1)}(t), \ldots, \mu^{(N)}(t)$, каждый из которых начинается с одной частицы и имеет распределение числа потомков одной частицы с производящей функцией (3). Обозначим $\tau^{(j)}$ момент вырождения процесса $\mu^{(j)}(t)$ и $\nu^{(j)}$ общее число частиц, существовавших в процессе $\mu^{(j)}(t)$ за все время его эволюции; τ_N — момент вырождения процесса $\mu(t)$, $\mu(0)=N$, и ν_N — общее число частиц, существовавших в этом процессе за все время его эволюции.

Введем независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины $\nu_t^{(1)}, \ldots, \nu_t^{(N)}$, имеющие распределение

$$\mathsf{P}\{\nu_t^{(1)}=k\}=\mathsf{P}\{\nu^{(1)}=k \mid \tau^{(1)}<t\}, \quad (4)$$

и обозначим

$$\nu_{N,t}=\nu_t^{(1)}+\ldots+\nu_t^{(N)}.$$

Лемма 1. *Если* $\mathsf{P}\{\nu_N = n+N\} > 0$, *то для любого целого положительного* t

$$\mathsf{P}\{\tau_N < t \mid \nu_N = n+N\} = (\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t\})^N \frac{\mathsf{P}\{\nu_{N,\,t} = n+N\}}{\mathsf{P}\{\nu_N = n+N\}}. \quad (5)$$

Доказательство. Поскольку процесс $\mu(t)$, $\mu(0) = N$, состоит из N независимых процессов $\mu^{(1)}(t), \ldots, \mu^{(N)}(t)$,

$$\mathsf{P}\{\tau_N < t \mid \nu_N = n+N\} = \frac{\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t, \ldots, \tau^{(N)} < t, \nu_N = n+N\}}{\mathsf{P}\{\nu_N = n+N\}} =$$
$$= (\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t\})^N \frac{\mathsf{P}\{\nu_N = n+N \mid \tau^{(1)} < t, \ldots, \tau^{(N)} < t\}}{\mathsf{P}\{\nu_N = n+N\}}.$$

Ясно, что с помощью случайных величин $\nu_t^{(1)}, \ldots, \nu_t^{(N)}$ вероятность $\mathsf{P}\{\nu_N = n+N \mid \tau^{(1)} < t, \ldots, \tau^{(N)} < t\}$ можно записать в виде

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)} + \ldots + \nu^{(N)} = n+N \mid \tau^{(1)} < t, \ldots, \tau^{(N)} < t\} =$$
$$= \mathsf{P}\{\nu_t^{(1)} + \ldots + \nu_t^{(N)} = n+N\} = \mathsf{P}\{\nu_{N,\,t} = n+N\}.$$

Как видно из леммы 1, для изучения предельного поведения условного распределения τ_N при условии, что $\nu_N = n+N$, нужно получить локальную предельную теорему для $\nu_{N,\,t}$. Как и в § 2.4, введем производящие функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\nu^{(1)} = n\} z^n,$$

$$f_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\mu^{(1)}(t) = 0,\ \nu^{(1)} = n\} z^n,$$

$$\Delta_t(z) = f(z) - f_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\mu^{(1)}(t) > 0,\ \nu^{(1)} = n\} z^n.$$

Учитывая, что $\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t, \nu^{(1)} = n\} = \mathsf{P}\{\mu^{(1)}(t) = 0, \nu^{(1)} = n\}$, для производящей функции $\psi_t(z)$ распределения (4) получаем выражение

$$\psi_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\nu^{(1)} = n \mid \tau^{(1)} < t\} z^n = \frac{f_t(z)}{\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t\}},$$

которое можно записать в следующем виде:

$$\psi_t(z) = \frac{f(z) - \Delta_t(z)}{\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t\}}. \quad (6)$$

Для получения локальной теоремы оценим характеристическую функцию $\psi_t(e^{i\theta})$ слагаемого суммы $\nu_{N,\,t}$ при $t \to \infty$.

Лемма 2. *Если распределение* (3) *имеет математическое ожидание, равное единице, дисперсию B и его максимальный шаг равен единице, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $q < 1$, что при $\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi$, начиная с некоторого t,*

$$|\psi_t(e^{i\theta})| \leqslant q.$$

Доказательство. Из (6) следует, что

$$|\psi_t(e^{i\theta})| \leqslant \frac{|f(e^{i\theta})| + |\Delta_t(e^{i\theta})|}{\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t\}}. \tag{7}$$

Максимальный шаг распределения общего числа частиц $\nu^{(1)}$ в критическом ветвящемся процессе $\mu^{(1)}(t)$ равен единице, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $q_1 < 1$, что при $\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi$

$$|f(e^{i\theta})| \leqslant q_1.$$

В силу теоремы 2.1.2 при $t \to \infty$

$$\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t\} = 1 - \frac{2}{Bt} + o\left(\frac{1}{t}\right), \tag{8}$$

где B — дисперсия числа потомков одной частицы в критическом ветвящемся процессе $\mu^{(1)}(t)$, и в силу следствия 2.3.1 существует такое $q_2 < 1$, что при $\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi$

$$|\Delta_t(e^{i\theta})| \leqslant q_2^t. \tag{9}$$

Из (7), (8) и (9) получаем, что при $t \to \infty$ равномерно относительно θ, $\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi$,

$$|\psi_t(e^{i\theta})| \leqslant (q_1 + q_2^t)(1 + o(1)).$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как при $t \to \infty$ правая часть полученного неравенства стремится к q_1 и $q_1 < 1$.

Лемма 3. *Найдутся такие положительные постоянные ε, c_1 и c_2, что при $|\theta| \leqslant \varepsilon$*

$$|\psi_t(e^{i\theta})| \leqslant 1 - c_1\sqrt{|\theta|} + c_2/t.$$

Доказательство. Согласно равенству (2.4.9) существуют такие положительные постоянные c_1 и ε, что при $|\theta| \leqslant \varepsilon$

$$|f(e^{i\theta})| \leqslant 1 - c_1\sqrt{|\theta|}. \tag{10}$$

При $|z| \leqslant 1$

$$|\Delta_t(z)| \leqslant \Delta_t(1) = \mathsf{P}\{\mu^{(1)}(t) > 0\},$$

поэтому согласно (8) найдутся такие постоянные c_3 и c_4, что

$$|\Delta_t(e^{i\theta})| \leqslant c_3/t, \tag{11}$$

$$1/\mathsf{P}\{\tau^{(1)} < t\} \leqslant 1 + c_4/t. \tag{12}$$

Утверждение леммы следует из (7), (10), (11) и (12).

Рассмотрим теперь поведение характеристической функции $\varphi_N(\theta) = \psi_t^N(e^{i\theta})$ суммы $\nu_{N,t} = \nu_t^{(1)} + \ldots + \nu_t^{(N)}$ в окрестности нуля. Обозначим

$$f(x, \theta) = \frac{x\sqrt{-2i\theta}\,(1 + e^{-x\sqrt{-2i\theta}})}{1 - e^{-x\sqrt{-2i\theta}}}. \tag{13}$$

Лемма 4. *Если $n, N, t \to \infty$ так, что $t(B/n)^{1/2} \to x$, где x — положительная постоянная, то при любом фиксированном θ равномерно относительно $z = N/\sqrt{Bn}$ в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$*

$$\varphi_N\left(\frac{\theta}{n}\right) = e^{-\frac{z}{x} f(x,\theta) + \frac{2z}{x}}(1 + o(1)). \tag{14}$$

Доказательство. При $n \to \infty$ согласно лемме 2.4.4

$$f(e^{i\theta/n}) = 1 - \sqrt{-2i\theta/(Bn)}\,(1 + o(1))$$

и согласно лемме 2.4.5

$$\frac{\Delta_t(e^{i\theta/n})}{\mathsf{P}\{\mu^{(1)}(t) > 0\}} \to \frac{x\sqrt{-2i\theta}\,e^{-x\sqrt{-2i\theta}}}{1 - e^{-x\sqrt{-2i\theta}}}.$$

Учитывая эти соотношения и соотношение (8), из (6) получаем, что

$$\varphi_N\left(\frac{\theta}{n}\right) = \psi_t^N(e^{i\theta/n}) = e^{-\frac{z}{x} f(x,\theta) + \frac{2z}{x}}(1 + o(1)).$$

Отметим одно свойство функции $f(x, \theta)$.

Лемма 5. *Существует такая положительная постоянная c, что для любых положительных x и z*

$$\left|e^{-\frac{z}{x} f(x,\theta)}\right| \leqslant e^{-cz\sqrt{|\theta|}}.$$

Доказательство. Обозначим $\rho = x\sqrt{|\theta|}$, нетрудно видеть, что

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\rho}f(x, \theta) = \frac{1-e^{-2\rho}+2e^{-\rho}\sin\rho}{1-2e^{-\rho}\cos\rho+e^{-2\rho}}.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Re} f(x, \theta)/\rho$ как функция ρ положительна, непрерывна и при $\rho \to 0$ стремится к бесконечности, а при $\rho \to \infty$ стремится к единице. Поэтому найдется такое $c > 0$, что

$$\min_{\rho} \operatorname{Re} f(x, \theta)/\rho \geqslant c.$$

Утверждение леммы следует теперь из очевидного соотношения

$$\left| e^{-\frac{z}{x} f(x, \theta)} \right| = e^{-\frac{z}{x}\operatorname{Re} f(x, \theta)}.$$

Лемма 6. *Если распределение* (3) *имеет математическое ожидание, равное единице, дисперсию B и его максимальный шаг равен единице, то при $n \to \infty$ равномерно относительно целых N, для которых $z = N/\sqrt{Bn}$ лежит в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$,*

$$\mathsf{P}\{\nu_N = n + N\} = \frac{z}{n\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1.3

$$\mathsf{P}\{\nu_N = n + N\} = \frac{N}{n+N}\mathsf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_{n+N} = n\},$$

где случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{n+N}$ независимы и имеют распределение числа потомков одной частицы. Применяя локальную предельную теорему 1.4.2, находим, что

$$\mathsf{P}\{\nu_N = n + N\} = \frac{N}{(n+N)\sqrt{2\pi B(n+N)}} e^{-\frac{N^2}{2B(n+N)}}(1 + o(1)) =$$

$$= \frac{z}{n\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}(1 + o(1))$$

равномерно относительно z, $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$.

Полученные в предыдущих леммах оценки позволяют доказать следующую локальную теорему.

Лемма 7. *Если распределение* (3) *имеет математическое ожидание, равное единице, дисперсию B, его максимальный шаг равен единице и n, N, $t \to \infty$ так, что*

$t\sqrt{B/n}\to x$, где x — положительная постоянная, то равномерно относительно $z=N/\sqrt{Bn}$ в любом интервале вида $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$ и равномерно относительно целых k, для которых $y=k/n$ лежит в любом интервале вида $0<y_0\leqslant y\leqslant y_1<\infty$,

$$n\mathsf{P}\{\nu_{N,\,t}=k\}=\frac{e^{2z/x}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta y-zf(x,\,\theta)/x}\,d\theta\,(1+o(1)).$$

Доказательство. По формуле обращения

$$\mathsf{P}\{\nu_{N,\,t}=k\}=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi n}^{\pi n}e^{-i\theta y}\varphi_N\left(\frac{\theta}{n}\right)d\theta.$$

Покажем, что в условиях теоремы разность

$$R_n(z,\,y)=2\pi n\mathsf{P}\{\nu_{N,\,t}=k\}-e^{\frac{2z}{x}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta y-\frac{z}{x}f(x,\,\theta)}\,d\theta$$

стремится к нулю равномерно относительно целых положительных k и $z=N/\sqrt{Bn}$ из любого интервала вида $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$. Представим эту разность в виде суммы интегралов:

$$I_1=\int_{|\theta|\leqslant A}e^{-i\theta y}\left(\varphi_N\left(\frac{\theta}{n}\right)-e^{\frac{2z}{x}-\frac{z}{x}f(x,\,\theta)}\right)d\theta,$$

$$I_2=\int_{A<|\theta|\leqslant\varepsilon n}e^{-i\theta y}\,\varphi_N\left(\frac{\theta}{n}\right)d\theta,$$

$$I_3=\int_{\varepsilon n<|\theta|\leqslant\pi n}e^{-i\theta y}\,\varphi_N\left(\frac{\theta}{n}\right)d\theta,$$

$$I_4=-\int_{|\theta|>A}e^{2z/x-zf(x,\,\theta)/x}d\theta,$$

в которых постоянные A и ε будут выбраны позднее.

В силу леммы 5

$$|I_4|\leqslant e^{\frac{2z_1}{x}}\int_{|\theta|>A}e^{-cz_0\sqrt{|\theta|}}\,d\theta$$

и выбором достаточно большого A величину $|I_4|$ можно сделать сколь угодно малой.

В силу леммы 3 найдутся такие постоянные c_1, c_2 и ε, что

$$|\psi_t(e^{i\theta/n})| \leqslant 1 - c_1\sqrt{|\theta|/n} + c_2/t,$$

поэтому для такого ε

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A<|\theta|\leqslant\varepsilon n} (1 - c_1\sqrt{|\theta|/n} + c_2/t)^N\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{c_2}{t}\right)^N \int\limits_{A<|\theta|\leqslant\varepsilon n} \left(1 - \frac{c_1\sqrt{|\theta|}}{\sqrt{n}\,(1+c_2/t)}\right)^N d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_A^\infty e^{-g\sqrt{\theta}}\,d\theta,$$

где C и g — положительные постоянные. Таким образом, выбором достаточно большого A величину $|I_2|$ можно сделать сколь угодно малой.

При любом фиксированном A интеграл I_1 стремится к нулю в силу леммы 4. Наконец, используя оценку леммы 2, находим, что

$$|I_3| \leqslant 2\pi n q^N$$

и в условиях теоремы $I_3 \to 0$.

В качестве следствия леммы 7 получим предельную теорему для условного распределения момента вырождения τ_N ветвящегося процесса $\mu(t)$, $\mu(0)=N$, при условии, что общее число частиц в этом процессе равно $n+N$.

Теорема 2. *Если распределение* (3) *имеет математическое ожидание, равное единице, дисперсию B и его максимальный шаг равен единице, то при $n\to\infty$ для любого фиксированного $x>0$ равномерно относительно целых N, для которых $z=N/\sqrt{Bn}$ лежит в любом интервале вида $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$,*

$$\mathsf{P}\{\tau_N\sqrt{B/n}\leqslant x \mid \nu_N = n+N\} =$$

$$= \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{z^2/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta - zf(x,\theta)/x}\, d\theta\,(1+o(1)).$$

Доказательство. Положим $t = x\sqrt{n/B}$. В условиях теоремы согласно (8)

$$(\mathsf{P}\{\tau^{(1)}<t\})^N = e^{-2z/x}(1+o(1)), \tag{15}$$

согласно лемме 7

$$\mathsf{P}\{\nu_{N,\,t}=n+N\}=\frac{e^{2z/x}}{2\pi n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta-zf(x,\,\theta)/x}d\theta\,(1+o(1)) \qquad (16)$$

и согласно лемме 6

$$\mathsf{P}\{\nu_N=n+N\}=\frac{z}{n\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}(1+o(1)). \qquad (17)$$

Подставляя (15), (16) и (17) в представление (5), получаем утверждение теоремы.

Используя равенство (2) и применяя теорему 2 к процессу $\mu(t,\,G^N)$, в котором число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda=1$, приходим к следующему утверждению о высоте случайного леса.

Теорема 3. *Если $n\to\infty$, то для любого фиксированного $x>0$ равномерно относительно целых N, для которых $z=N/\sqrt{n}$ лежит в любом интервале вида $0<z_0<$ $<z<z_1<\infty$,*

$$\mathsf{P}\{\tau(F_{n,\,N})/\sqrt{n}\leqslant x\}=$$
$$=\frac{1}{z\sqrt{2\pi}}e^{z^2/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta-zf(x,\,\theta)/x}d\theta\,(1+o(1)).$$

Докажем теперь теорему 1. Для ее доказательства достаточно усреднить результат теоремы 3 по распределению числа циклических точек $\lambda^{(n)}$ в случайном отображении из Σ_n. Действительно, согласно (1)

$$\mathsf{P}\{\tau(\Sigma_n)/\sqrt{n}\leqslant x\}=$$
$$=\sum_{N=1}^{n}\mathsf{P}\{\lambda^{(n)}=N\}\,\mathsf{P}\{\tau(F_{n-N,\,N})/\sqrt{n}\leqslant x\}$$

и в силу леммы 1.4

$$\mathsf{P}\{\tau(\Sigma_n)/\sqrt{n}\leqslant x\}=$$
$$=\sum_{z_0\sqrt{n}\leqslant N\leqslant z_1\sqrt{n}}\frac{z}{\sqrt{n}}e^{-z^2/2}\,\mathsf{P}\{\tau(F_{n-N,\,N})/\sqrt{n}\leqslant x\}+\delta, \qquad (18)$$

где выбором достаточно малого z_0 и достаточно больших z_1 и n величина δ может быть сделана сколь угодно малой.

Используя теорему 3, находим, что

$$\sum_{z_0\sqrt{n} \leqslant N \leqslant z_1\sqrt{n}} \frac{z}{\sqrt{n}} e^{-z^2/2} \mathsf{P}\{\tau(F_{n-N,\,N})/\sqrt{n} \leqslant x\} =$$
$$= \sum_{z_0\sqrt{n} \leqslant N \leqslant z_1\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta - zf(x,\,\theta)/x}\, d\theta\, (1 + o(1)).$$

Стоящая в правой части этого равенства сумма представляет собой интегральную сумму функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta - zf(x,\,\theta)/x}\, d\theta$$

переменного z с шагом $1/\sqrt{n}$ в пределах от z_0 до z_1. Поэтому при $n \to \infty$ и любых фиксированных z_0 и z_1

$$\sum_{z_0\sqrt{n} \leqslant N \leqslant z_1\sqrt{n}} \frac{z}{\sqrt{n}} e^{-z^2/2} \mathsf{P}\{\tau(F_{n-N,\,N})/\sqrt{n} \leqslant x\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_0}^{z_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta - zf(x,\,\theta)/x}\, d\theta\, dz\, (1 + o(1)). \qquad (19)$$

Поскольку интеграл $\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta - zf(x,\,\theta)/x}\, d\theta\, dz$ существует и равен $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta} \frac{x\, d\theta}{f(x,\,\theta)}$, из (18) и (19) следует, что

$$\mathsf{P}\{\tau(\Sigma_n)/\sqrt{n} \leqslant x\} \to \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta} \frac{d\theta}{f(x,\,\theta)}.$$

Для доказательства теоремы остается заметить, что

$$\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta} \frac{d\theta}{f(x,\,\theta)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2x^2/2}.$$

Действительно, обозначая

$$g(\theta) = \frac{1 - e^{-\sqrt{-i\theta}}}{\sqrt{-i\theta}\left(1 + e^{-\sqrt{-i\theta}}\right)},$$

находим, что

$$\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta} \frac{d\theta}{f(x,\,\theta)} = \frac{1}{2x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta/(2x^2)} g(\theta)\, d\theta.$$

При $\theta \neq 0$

$$g(\theta)=\frac{1}{\sqrt{-i\theta}}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-k\sqrt{-i\theta}}}{\sqrt{-i\theta}}.$$

Учитывая теперь, что функция $1/\sqrt{-i\theta}$ является преобразованием Фурье функции $1/\sqrt{\pi y}$, $y>0$, а функция $\exp\{-k\sqrt{-i\theta}\}/\sqrt{-i\theta}$ является преобразованием Фурье функции $\frac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-\frac{k^2}{4y}}$, $y>0$, при $y=1/(2x^2)$ находим, что

$$\frac{1}{2x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta/(2x^2)} g(\theta)\,d\theta=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-k^2x^2/2}.$$

§ 6. Дополнения и литературные ссылки

Первые четыре параграфа гл. III опираются на статьи [48—50, 54] Ю. Л. Павлова, а в § 5 изложены результаты статьи [22] И. Б. Калугина. Лемма 1.1 содержится в [62], лемма 1.2 использована в [48, 49, 54], леммы 1.3 и 1.4 доказаны в [86].

Статьи [48—54, 21] посвящены изучению случайных лесов из множества $F_{n,N}$ при n, $N\to\infty$. В этих работах основное внимание уделено изучению случайных величин $\mu_r(F_{n,N})$, равных числу деревьев случайного леса из $F_{n,N}$, содержащих ровно r некорневых вершин, и случайной величины $\eta(F_{n,N})$, равной максимальному объему дерева в случайном лесе из $F_{n,N}$. Получено полное описание предельных распределений этих случайных величин при всех соотношениях между стремящимися к бесконечности параметрами n и N. Для случайных величин $\mu_r(F_{n,N})$ и $\eta(F_{n,N})$ достигнута такая же полнота описания, как для случайных величин $\mu_r(n, N)$ и максимального заполнения ячеек в классической схеме размещения n частиц по N ячейкам, вплоть до переходных явлений в асимптотическом поведении случайной величины $\mu_1(F_{n,N})$, аналогичных результатам для $\mu_1(n, N)$ в классической схеме размещения частиц. Приведем результаты, описывающие поведение максимального объема $\eta(F_{n,N})$ деревьев в случайном лесе из $F_{n,N}$.

Обозначим

$$a = \frac{n}{n+N} \exp\left\{-\frac{n}{n+N}\right\},$$

$$p_r(a) = \frac{(r+1)^{r-1}}{r!} a^r \exp\left\{-\frac{n}{n+N}\right\}, \qquad r = 0, 1, \ldots$$

Теорема 1 [48]. *Если $n, N \to \infty$, $n/N \to 0$ и $r = r(n, N)$ выбрано так, что $Np_r(a) \to \infty$, $Np_{r+1}(a) \to \lambda$, где λ — некоторая неотрицательная постоянная, то*

$$\mathsf{P}\{\eta(F_{n,N}) = r\} \to e^{-\lambda},$$

$$\mathsf{P}\{\eta(F_{n,N}) = r+1\} \to 1 - e^{-\lambda}.$$

Теорема 2 [48]. *Если $n, N \to \infty$, $n/N \to \gamma$ и $r = r(n, N)$ выбрано так, что $Np_r(a) \to \lambda$, где γ и λ — некоторые положительные постоянные, то для любого целого фиксированного k*

$$\mathsf{P}\{\eta(F_{n,N}) \leqslant r+k\} \to \exp\{-\lambda b^{k+1}(1-b)^{-1}\},$$

где

$$b = \frac{\gamma}{1+\gamma} \exp\left\{\frac{1}{1+\gamma}\right\}.$$

Теорема 3 [48]. *Если $n, N, n/N \to \infty$, $n/N^2 \to 0$, то*

$$\mathsf{P}\{\beta\eta(F_{n,N}) - u \leqslant z\} \to e^{-e^{-z}},$$

где

$$\beta = \beta(n, N) = -\ln\left(\frac{n}{n+N} \exp\left\{\frac{N}{n+N}\right\}\right),$$

а величина u выбрана так, что

$$u^{3/2} e^u = N\sqrt{\beta}/\sqrt{2\pi}.$$

Предельное распределение $\eta(F_{n,N})$ в случае, когда $n, N \to \infty$, $n/N^2 \to \gamma$, где γ — некоторая положительная постоянная, приведено в теореме 3.2, доказательство которой содержится в [48]. Если $n, N \to \infty$ так, что $n/N^2 \to \infty$, то максимальное дерево содержит почти все вершины отображения, в этом случае справедливо следующее утверждение, доказанное в [50].

Теорема 4 [50]. *Если n, N, $n/N^2 \to \infty$, то для любого фиксированного положительного z*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{n-\eta(F_{n,N})}{N^2} \leqslant z\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2y}}\, dy.$$

Результаты о случайных величинах $\mu_r(\Sigma_n)$ и $\eta(\Sigma_n)$ для отображений из Σ_n в §§ 2, 3 получаются усреднением соответствующих результатов для случайных лесов по распределению числа циклических точек $\lambda^{(n)}$. Этот подход реализован в статьях [48—50, 54]. Интегральный вариант теоремы 2.4 при фиксированном r, теорема 2.5 и теорема 3.1 впервые доказаны в [66]. Лемма 3.1 и теорема 3.2, а также доказательство теоремы 3.1, изложенное в § 3, содержатся в [48].

Связь начинающегося с N частиц ветвящегося процесса $\mu(t, G^N)$, в котором число потомков одной частицы имеет распределение Пуассона, со случайными лесами из $F_{n,N}$ впервые описана Ю. Л. Павловым [51]. Леммы 4.1 и 4.2 являются прямыми обобщениями соответствующих результатов статьи [32] о случайных деревьях и доказаны И. Б. Калугиным. Результат, аналогичный лемме 4.1, приведен в [21].

С использованием связи ветвящихся процессов и случайных лесов Ю. Л. Павловым [53] получено полное описание предельных распределений высоты случайного леса из $F_{n,N}$ при $n \to \infty$ и различном характере поведения числа деревьев N. В книге, в теореме 5.3, приведено предельное распределение высоты $\tau(F_{n,N})$ случайного леса при $n \to \infty$ и тех значениях N, для которых $z = N/\sqrt{n}$ лежит в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$. Остальные случаи поведения N охватываются следующими теоремами, доказанными Ю. Л. Павловым в статье [53].

Теорема 5 [53]. *Пусть $n \to \infty$, $n/N^2 \to \infty$. Тогда для любого фиксированного $x > 0$*

$$\mathsf{P}\{\tau(F_{n,N})/\sqrt{n} \leqslant x\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-k^2x^2)\, e^{-k^2x^2/2}.$$

При $N=1$ из этой теоремы получается предельное распределение высоты случайного дерева. Таким образом, при достаточно малом (относительно n) числе деревьев предельное распределение высоты леса совпадает с предельным распределением высоты дерева с тем же числом вершин.

Теорема 6 [53]. *Пусть n, $N \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$, $n/N^2 \to 0$.*

Тогда для любого фиксированного x

$$\mathsf{P}\left\{\tau(F_{n,N})\ln\left(1+\frac{N}{n}\right)-\ln\frac{2N^2}{n}\leqslant x\right\}\to e^{-e^{-x}}.$$

Положим $F(s)=e^{\lambda(s-1)}$. Пусть для целых положительных r выражение $F^{*r}(s)$ означает r-кратную итерацию функции $F(s)$, т. е.

$$F^{*1}(s)=F(s),\quad F^{*(r+1)}(s)=F(F^{*r}(s)),\quad r=1,\ 2,\ \ldots$$

Теорема 7 [53]. *Пусть n, $N \to \infty$ так, что $n/N \to b$ и целые $t=t(n,\ N)$ выбраны так, что $N\lambda^t \to \beta$, где b и β — положительные постоянные, $\lambda=n/(n+N)$.*

Тогда для любого целого фиксированного m

$$\mathsf{P}\{\tau(F_{n,N})<t+m\}\to\exp\{-\beta K(b/(1+b))^m\},$$

где

$$K=\lim_{r\to\infty}\frac{1-F^{*r}(0)}{\lambda^r}.$$

Теорема 8 [53]. *Пусть n, $N \to \infty$ так, что $n/N \to 0$ и целые $t=t(n,\ N)$ выбраны так, что $N\lambda^t \to \infty$, $N\lambda^{t+1} \to \gamma$, где γ — неотрицательная постоянная, $\lambda=n/(n+N)$.*
Тогда

$$\mathsf{P}\{\tau(F_{n,N})=t\}\to e^{-\gamma},$$
$$\mathsf{P}\{\tau(F_{n,N})=t+1\}\to 1-e^{-\gamma}.$$

Предельное распределение высоты случайного отображения из Σ_n впервые получено в статье [57] Г. В. Проскуриным. В этой статье изучается предельное распределение числа вершин в верхних слоях случайного отображения. Обозначим $\mu(t,\ \Sigma_n)$ число вершин высоты t в случайном отображении из Σ_n.

Теорема 9 [57]. *Пусть n, $t \to \infty$ так, что $t/\sqrt{n}\to\alpha$, где α — некоторая положительная постоянная. Тогда для любого фиксированного $x>0$*

$$\mathsf{P}\{\mu(t,\ \Sigma_n)/\sqrt{n}\leqslant x\}\to F_\alpha(x),$$

где функция распределения $F_\alpha(x)$ имеет скачок в точке $x=0$, равный

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{2}},$$

и при $x>0$

$$\frac{dF_\alpha(x)}{dx} = \frac{4}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \frac{d^k}{dx^k} g_{\alpha,k}\left(k+\frac{2x}{\alpha}\right),$$

где

$$g_{\alpha,k}(x) = (x-k)^{k-1} e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{2}}, \qquad k=1, 2, \ldots$$

Из этой теоремы, как утверждается в [57], следует, что скачок функции $F_\alpha(x)$ асимптотически равен вероятности

$$\mathsf{P}\{\mu(t, \Sigma_n)=0\} = \mathsf{P}\{\tau(\Sigma_n) < t\}$$

и при $n \to \infty$ для любого фиксированного $\alpha > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} \tau(\Sigma_n) < \alpha\right\} \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{\alpha^2 k^2}{2}}. \tag{1}$$

Приведенный в § 5 вывод соотношения (1) предложен в статье [22] И. Б. Калугина.

В ряде работ рассматриваются подмножества Σ_n с равномерным распределением, выделяемые из Σ_n различными ограничениями на характеристики отображения.

В статьях [52, 54] рассмотрены характеристики случайного отображения из множества $\Sigma_n^{(m)}$ всех однозначных отображений множества из n элементов в себя, граф которых содержит ровно m компонент связности. Изучение этого класса отображений проводится по той же схеме, которая принята в настоящей книге, при изучении всего класса отображений Σ_n. Результаты, полученные для лесов, усредняются по распределению числа циклических точек $\lambda^{(n, m)}$ случайного отображения из $\Sigma_n^{(m)}$. При этом оказывается, что предельное распределение числа циклических точек $\lambda^{(n, m)}$ отличается от предельного распределения числа циклических точек $\lambda^{(n)}$ в случайном отображении из Σ_n.

Теорема 10 [54]. *Если $n \to \infty$, $m \ln m / \ln n \to 0$, то равномерно относительно целых N, для которых $z = N/\sqrt{n}$*

лежит в любом интервале вида $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$,

$$\sqrt{n}\,\mathsf{P}\{\lambda^{(n,\,m)}/\sqrt{n} = z\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-z^2/2} + o(1). \qquad (2)$$

В [54] усреднением по распределению (2) распределений случайной величины $\mu_r(F_{n,\,N})$, приведенных в теоремах 2.1, 2.2 и 2.3, получены следующие результаты для случайных величин $\mu_r(\Sigma_n^{(m)})$, равных числу деревьев, содержащих ровно r некорневых вершин, в случайном отображении из $\Sigma_n^{(m)}$. Напомним, что

$$p_r = \frac{(r+1)^{r-1}}{r!}\,e^{-r-1}, \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots$$

Теорема 11 [54]. *Пусть* $n \to \infty$, $m \ln m/\ln n \to 0$. *Тогда, если* $r^3/n \to 0$, *то равномерно относительно целых* k, *для которых* $z = k/(p_r\sqrt{n})$ *лежит в любом интервале вида* $0 < z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < \infty$,

$$p_r\sqrt{n}\,\mathsf{P}\left\{\frac{1}{p_r\sqrt{n}}\,\mu_r(\Sigma_n^{(m)}) = z\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-z^2/2} + o(1);$$

если $r = (n/(2\pi\beta^2))^{1/3}(1 + o(1))$, $\beta > 0$, *то для любого фиксированного* $k = 0,\ 1,\ \ldots$

$$\mathsf{P}\{\mu_r(\Sigma_n^{(m)}) = k\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{(\beta z)^k}{k!}\,e^{-\beta z - z^2/2}\,dz + o(1).$$

Случайные отображения из $\Sigma_n^{(1)}$ изучаются в статьях [2, 3].

В статьях А. А. Грушо [18, 20] рассматривается подмножество $\Sigma_{n,\,r}$ отображений из Σ_n, в которых кратности вершин не превосходят некоторого фиксированного числа $r \geqslant 2$. Характеристики случайных отображений из $\Sigma_{n,\,r}$ изучаются методом перевала с использованием производящих функций, приемы получения которых разработаны в [67]. Приведем некоторые характерные результаты, полученные в статьях [18, 20].

Обозначим

$$P(x) = P_r(x) = \sum_{k=0}^{r} \frac{x^k}{k!},$$

и пусть

$$B = B_r = \alpha^2 P''(\alpha)/P(\alpha) = \alpha^2 \sum_{k=0}^{r-2} \frac{\alpha^k}{k!} \Bigg/ \sum_{k=0}^{r} \frac{\alpha^k}{k!},$$

где $\alpha=\alpha_r$ — корень уравнения

$$xP'(x)=P(x), \qquad x>0. \tag{3}$$

Заметим, что $B=B_r$ есть дисперсия случайной величины ξ_r с распределением

$$\mathsf{P}\{\xi_r=k\}=\frac{\alpha^k}{k!\,P_r(\alpha)}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ r,$$

которое можно интерпретировать как распределение числа потомков одной частицы в критическом ветвящемся процессе, поскольку в силу (3)

$$\mathsf{M}\xi_r=\alpha P'(\alpha)/P(\alpha)=1.$$

Обозначим $\tau(\Sigma_{n,r})$ высоту случайного отображения из $\Sigma_{n,r}$ и $\lambda_r^{(n)}$ число циклических точек в таком отображении.

Теорема 12 [18]. *При $n\to\infty$ равномерно относительно целых k, для которых $z=k\sqrt{B/n}$ лежит в любом интервале вида $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$,*

$$\sqrt{n/B}\,\mathsf{P}\{\lambda_r^{(n)}\sqrt{B/n}=z\}=ze^{-z^2/2}+o(1).$$

Теорема 13. [20]. *При $n\to\infty$ для любого фиксированного $x>0$*

$$\mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{B}{n}}\,\tau(\Sigma_{n,r})\leqslant x\right\}\to\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{k^2x^2}{2}}.$$

В статье [20] доказан и локальный вариант этого утверждения.

Теорема 14 [20]. *При $n\to\infty$ равномерно относительно целых k, для которых $z=k\sqrt{B/n}$ лежит в любом интервале вида $0<z_0\leqslant z\leqslant z_1<\infty$,*

$$\sqrt{\frac{n}{B}}\,\mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{B}{n}}\,\tau(\Sigma_{n,r})=z\right\}=$$
$$=2z\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}m^2e^{-\frac{m^2z^2}{2}}+o(1).$$

Сравнивая эти и другие результаты, полученные в статье [18] для случайного отображения из $\Sigma_{n,r}$, $r\geqslant 2$, с соответствующими результатами, относящимися к случайным отображениям из Σ_n, приходим к выводу, что даже в случае самого сильного ограничения при $r=2$

вид предельных распределений остается таким же, как и в случае отсутствия каких-либо ограничений, изменяются лишь нормирующие постоянные.

И. Б. Калугин [23] рассмотрел подмножество $\Sigma_{n,R}$ отображений из Σ_n, в которых кратности вершин принимают значения только из множества R, содержащего нуль и не равного множеству $\{0, 1\}$. В частности, при $R=\{0, 1, \ldots, r\}$ множество $\Sigma_{n,R}$ совпадает с множеством $\Sigma_{n,r}$, рассмотренным в статьях А. А. Грушо.

Пусть $\xi(\lambda)$ — случайная величина с распределением

$$\mathsf{P}\{\xi(\lambda)=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!\,P(R,\lambda)},\qquad k\in R, \tag{4}$$

где

$$P(R, \lambda)=\sum_{k\in R}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Существует такое α_R, что $\mathsf{M}\xi(\alpha_R)=1$. Положим $B_R= =\mathsf{D}\xi(\alpha_R)$.

Для числа циклических точек $\lambda_R^{(n)}$ и высоты $\tau(\Sigma_{n,R})$ случайного отображения из множества $\Sigma_{n,R}$ с равномерным распределением справедливы теоремы 12 и 13, в которых B следует положить равным B_R.

Неожиданный эффект появляется, если рассмотреть подмножество $\Sigma^*_{n,R}$ отображений из Σ_n, в которых кратности вершин деревьев отображения принимают значения только из множества R, содержащего нуль. Казалось бы, незначительное отличие этого множества от $\Sigma_{n,R}$ (ограничения на кратности несколько отличаются лишь для циклических вершин) приводит, как утверждается в [23], к существенному различию в строении графов случайных отображений из этих множеств.

Пусть $\Lambda_R^{(n)}$ и $\tau(\Sigma^*_{n,R})$ — соответственно число циклических точек и высота случайного отображения из множества $\Sigma^*_{n,R}$ с равномерным распределением. Для случайной величины $\xi(\lambda)$ с распределением (4) обозначим

$$a_R=\mathsf{M}\xi(1),\quad b_R^2=\mathsf{D}\xi(1).$$

Если R не совпадает с множеством целых неотрицательных чисел, то $a_R<1$.

Теорема 15 [23]. *При $n \to \infty$ равномерно относительно целых k, для которых*

$$z = (k - (1 - a_R)\, n)/(b_R \sqrt{n})$$

лежит в любом конечном интервале,

$$\mathsf{P}\left\{\frac{\Lambda_R^{(n)} - (1 - a_R)\, n}{b_R \sqrt{n}} = z\right\} = \frac{1}{b_R \sqrt{2\pi n}}\, e^{-z^2/2}\,(1 + o\,(1)).$$

Теорема 16 [23]. *Пусть $n \to \infty$ и целые $t = t\,(n)$ выбраны так, что $na^t \to \beta$, где β — положительная постоянная.*

Тогда для любого целого фиксированного m

$$\mathsf{P}\,\{\tau\,(\Sigma_{n,\,R}^*) \leqslant t + m\} = \exp\,\{-K_R \beta a^m\} + o\,(1),$$

где константа K_R зависит только от множества R.

Поскольку $t = t\,(n)$ имеет порядок $\ln n$, случайные отображения из $\Sigma_{n,\,R}^*$ имеют много циклических точек и, как следствие, высоту порядка $\ln n$, а не $\sqrt{n}$, как это имеет место для отображений из $\Sigma_{n,\,R}$.

В [59] рассмотрены случайные отображения, в которых высота деревьев не превосходит заданного числа и длины циклов принимают значения из фиксированного множества целых чисел $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$. Свойства случайных отображений из этого класса подробно изложены в монографии [63]. Отметим лишь наиболее характерную особенность, к которой приводит ограничение высоты фиксированным числом: число циклических точек при $n \to \infty$ распределено асимптотически нормально со средним и дисперсией, пропорциональными n, что приводит к существенным отличиям в поведении характеристик таких отображений по сравнению со случайными отображениями из всего класса Σ_n однозначных отображений.

Несколько в стороне от результатов, подробно излагаемых в настоящей монографии, лежат результаты о характеристиках случайных отображений, описывающих расположение вершины с фиксированным номером в графе случайного отображения. К таким характеристикам относятся число вершин в компоненте, содержащей фиксированную вершину, высота фиксированной вершины, равная длине пути до циклической точки, порядок вершины, равный длине контура компоненты, в которой лежит эта вершина. Поскольку распределения на обычно рассматриваемых подмножествах Σ_n инвариантны относительно перенумерации вершин, распределения перечисленных характеристик вершин с фиксированным номером совпадают с распределениями соответствующих характеристик случайно выбранной вершины, номер которой имеет распределение, не зависящее от строения случайного отображения.

Обозначим $\zeta(S_n)$ длину цикла случайной подстановки из S_n, в котором лежит вершина с фиксированным номером. Несколько неожиданно оказывается, что случайная величина $\zeta(S_n)$ имеет равномерное распределение на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Действительно, учитывая, что число α_r циклов длины r имеет математическое ожидание, равное $1/r$, находим, что

$$\mathsf{P}\{\zeta(S_n)=r\}=\sum_{k=0}^{n}\mathsf{P}\{\alpha_r=k\}\mathsf{P}\{\zeta(S_n)=r\mid\alpha_r=k\}=$$
$$=\sum_{1\leqslant k\leqslant n/r}\mathsf{P}\{\alpha_r=k\}\frac{rk}{n}=\frac{r}{n}\mathsf{M}\alpha_r=\frac{1}{n}.$$

Для случайного отображения из Σ_n обозначим $\zeta(\Sigma_n)$ объем компоненты и $\alpha(\Sigma_n)$ длину контура компоненты, в которой лежит фиксированная вершина, и $h(\Sigma_n)$ высоту этой вершины. В [69] показано, что распределение $\zeta(\Sigma_n)/n$ слабо сходится к распределению с плотностью $(4(1-x))^{-1/2}$, $0<x<1$. Предельные распределения $\alpha(\Sigma_n)/\sqrt{n}$ и $h(\Sigma_n)/\sqrt{n}$, как показано в [69], одинаковы и имеют плотность

$$\int_x^\infty e^{-t^2/2}\,dt,\quad x\geqslant 0.$$

Рассмотренные случайные отображения имеют равномерное распределение на каком-либо подмножестве множества Σ_n всех однозначных отображений. Исключение составляют исследования, проведенные в статьях [69, 111]. Пусть $X(1), \ldots, X(n)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$\mathsf{P}\{X(1)=j\}=P_j,\quad j=1, \ldots, n,\quad \sum_{j=1}^{n}P_j=1.$$

Рассмотрим случайное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя, граф которого содержит дуги $\{i, X(i)\}$, $i=1, \ldots, n$. Класс таких случайных отображений рассмотрен в статьях

[69, 111]. В статье [111] отмечено интересное свойство таких отображений. Рассмотрим вспомогательную задачу о связности графа с вершинами $0, 1, \ldots, r$ и r дугами $\{i, Y(i)\}$, $i=1, \ldots, r$, где $Y(1), \ldots, Y(r)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathsf{P}\{Y(1)=j\}=Q_j, \quad j=0, 1, \ldots, r, \quad \sum_{j=0}^{r} Q_j = 1.$$

Обозначим Q вероятность связности такого графа. В [111] доказано следующее интересное равенство.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$Q=Q_0.$$

Для графа случайного отображения с дугами $\{i, X(i)\}$, $i=1, \ldots, n$, из леммы 1 вытекает следующее утверждение. При случайном отображении вершина с номером 1 переходит в $X(1)$, вершина с номером $X(1)$ — в $X(X(1))$. Обозначим $X^k(1)=X(X^{k-1}(1))$, где $X^1(1)=X(1)$, и рассмотрим последовательность $X^1(1)$, $X^2(1)$, ... Пусть N — наименьшее k, для которого $X^k(1) \in \{1, X^1(1), \ldots, X^{k-1}(1)\}$. Другими словами, N есть число вершин, появившихся в последовательности $1, X^1(1), X^2(1), \ldots$ до первого повторения какой-либо вершины. Рассмотрим случайную величину

$$W=P_1+\sum_{k=1}^{N-1} P_{X^k(1)}$$

и обозначим S событие, состоящее в том, что граф с дугами $\{i, X(i)\}$, $i=1, \ldots, n$, связен.

Лемма 2 [111]. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}\{S \mid W\}=W.$$

Из леммы 2 следует, что для графа с дугами $\{i, X(i)\}$, $i=1, \ldots, n$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 17 [111]. *Справедливо равенство*

$$\mathsf{P}(S)=\mathsf{M}W.$$

Выписывая выражение для математического ожидания $\mathsf{M}W$ при условии, что начальная вершина траектории случайно выбирается из множества всех вершин, получаем явную формулу для вероятности связности графа такого случайного отображения. Ранее из других соображений явное выражение для вероятности связности такого графа получено в статье [69]. В этой статье подробно рассмотрен случай, когда $P_1 \geqslant P_2 = \ldots = P_n$. Вершину с номером 1 в этом отображении естественно назвать притягивающим центром, а класс таких отображений — случайными отображениями с одним притягивающим центром. Ясно, что наличие притягивающего центра вносит своеобразие в строение графа такого отображения по сравнению с графом случайного отображения из Σ_n. В статье [69] подробно изучены особенности строения графов с одним притягивающим центром.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. — М.: Мир, 1979.
2. Багаев Г. Н. Распределение числа вершин в компоненте неразложимого отображения.— ДАН БССР, 1977, **21**, № 12, 1061—1063.
3. Багаев Г. Н. Предельные распределения метрических характеристик случайного неразложимого отображения.— Комбинаторный и асимптотический анализ.— Красноярск: 1977, 55—61.
4. Бендер Э. А. Асимптотические методы в теории перечислений.— В кн.: Перечислительные задачи комбинаторного анализа.— М.: Мир, 1979, 266—310.
5. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Асимптотическая нормальность некоторых величин, связанных с цикловой структурой случайных подстановок.— Матем. сб., 1976, **99**, № 1, 121—133.
6. Болотников Ю. В., Сачков В. Н., Тараканов В. Е. О некоторых классах случайных величин на циклах подстановок.— Матем. сб., 1979, **108**, № 1, 91—104.
7. Болотников Ю. В., Тараканов В. Е. Предельные распределения в задачах о циклах случайных подстановок.— Комбинаторный и асимптотический анализ.— Красноярск: 1977, 62—68.
8. Вершик А. М. Шмидт А. А. Симметрические группы высокой степени.— ДАН СССР, 1972, **2** № 2, 269 —272.
9. Вершик А. М., Шмидт А. А. Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп, I. Теория вероятн. и ее примен., 1977, **22**, № 1, 72—87.
10. Вершик А. М., Шмидт А. А. Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп, II.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, **23**, № 1, 42—54.
11. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1965.
12. Висков О. В. Несколько замечаний о ветвящихся процессах.— Матем. заметки, 1970, **8**, № 4, 409—418.
13. Гаврилов Г. П., Лисковец В. А., Пермяков П. П., Селиванов Б. И. О некоторых тенденциях теории перечисления.— В кн.: Перечислительные задачи комбинаторного анализа.— М.: Мир, 1979, 336—362.
14. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.— М.: Наука, 1969.
15. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.— М.—Л.: ГИНТЛ, 1949.

16. Гончаров В. Л. О распределении циклов в перестановках.— ДАН СССР, 1942, **35**, № 9, 299—301.
17. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1944, **8**, № 1, 3—48.
18. Грушо А. А. Случайные отображения ограниченной кратности.— Теория вероятн. и ее примен., 1972, **17**, № 3, 440—449.
19. Грушо А. А. Распределение высоты фиксированной точки в случайном корневом дереве.— Комбинаторный и асимптотический анализ.—Красноярск: 1975, 123—135.
20. Грушо А. А. Распределение высоты отображений ограниченной кратности.— Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа.— Красноярск: 1976, 7—18.
21. Калинина Н. Б., Павлов Ю. Л. Распределение кратностей вершин в случайном лесе.— Ветвящиеся процессы.— Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1981, 10—15.
22. Калугин И. Б. Высота случайного отображения.—Вероятностные процессы и их приложения.— М.: 1983.
23. Калугин И. Б. Число циклических точек и высота случайного отображения с ограничениями на кратности вершин.— Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Вероятностные методы в дискретной математике».—Петрозаводск: 1983, 35—36.
24. Керов С. В., Вершик А. М. Асимптотика меры Планшереля на симметрической группе и предельные формы таблиц Юнга.— ДАН СССР, 1977, **233**, № 6, 1024—1027.
25. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ.— М.: Мир, т. 1, 1976; т. 2, 1977; т. 3, 1978.
26. Колчин В. Ф. О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме.—Теория вероятн. и ее примен., 1969, **14**, № 3, 476—487.
27. Колчин В. Ф. Один класс предельных теорем для условных распределений.— Литовск. матем. сб., 1968, **8**, № 1, 53—63.
28. Колчин В. Ф. Одна задача о размещении частиц по ячейкам и циклы случайных подстановок.— Теория вероятн. и ее примен., 1971, **16**, № 1, 67—82.
29. Колчин В. Ф. О распределении одной статистики в полиномиальной схеме.— Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., 1973, **32**, 73—91.
30. Колчин В. Ф. Задача о размещении частиц по ячейкам и случайные отображения.— Теория вероятн. и ее примен., 1976, **21**, № 1, 48—62.
31. Колчин В. Ф. Новое доказательство асимптотической нормальности логарифма порядка случайной подстановки.— Комбинаторный и асимптотический анализ.— Красноярск: 1977, 82—93.
32. Колчин В. Ф. Ветвящиеся процессы, случайные деревья и обобщенная схема размещения частиц.— Матем. заметки, 1977, **21**, № 5, 691—705.
33. Колчин В. Ф. Момент вырождения ветвящегося процесса и высота случайного дерева.— Матем. заметки, 1978, **24**, № 6, 859—870.
34. Колчин В. Ф. Ветвящиеся процессы и случайные деревья.— В кн.: Вопросы кибернетики. Комбинаторный анализ и теория графов.— М.: 1980, 85—97.

35. Колчин В. Ф. Ветвящиеся процессы и случайные деревья.— Тезисы докладов III Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, т. 1.— Вильнюс: 1981, 237—238.
36. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения.— М.: Наука, 1976.
37. Колчин В. Ф., Чистяков В. П. Комбинаторные задачи теории вероятностей.— ВИНИТИ, Итоги науки и техники. Сер. «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика», 1974, 11, 5—45.
38. Колчин В. Ф., Чистяков В. П. К цикловой структуре случайных подстановок.— Матем. заметки, 1975, **18**, № 6, 929—938.
39. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1974.
40. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход.— М.: Мир, 1978.
41. Минеев М. П., Павлов А. И. О числе подстановок специального вида.— Матем. сб., 1976, **99**, № 3, 468—476.
42. Миталаускас А. А., Статулявичус В. А. Локальные теоремы и асимптотические разложения для сумм независимых решетчатых случайных величин.— Литовск. матем. сб., 1966, **6**, № 4, 569—583.
43. Миталаускас А. А., Статулявичус В. А. О локальных предельных теоремах.— Литовск. матем. сб., 1974, **14**, № 4, 129—144.
44. Оберхеттингер Ф. Преобразования Фурье распределений и их обращения.— М.: Наука, 1979.
45. Павлов А. И. Об одной теореме Эрдеша и Турана.— В кн.: Вопросы кибернетики. Комбинаторный анализ и теория графов.— М.: 1980, 57—66.
46. Павлов А. И. О числе решений уравнения $x^k=a$ в симметрической группе.—Матем. сб., 1980, **112**, № 3, 380—395.
47. Павлов А. И. О предельном распределении числа циклов и логарифма порядка одного класса подстановок.— Матем. сб., 1981, **114**, № 4, 611—642.
48. Павлов Ю. Л. Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, **22**, № 3, 523—533.
49. Павлов Ю. Л. Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе.— Матем. сб., 1977, **103**, № 3, 392—403.
50. Павлов Ю. Л. Один случай предельного распределения максимального объема дерева в случайном лесе.— Матем. заметки, 1979, **25**, № 5, 751—760.
51. Павлов Ю. Л. Случайный лес и одна задача о ветвящихся процессах.— Математические вопросы моделирования сложных объектов.— Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1979, 41—48.
52. Павлов Ю. Л. Предельные распределения некоторых характеристик случайных отображений с одним циклом.— Математические вопросы моделирования сложных объектов.— Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1979, 48—55.
53. Павлов Ю. Л. Предельные распределения высоты случайного леса.—Теория вероятн. и ее примен., 1983, **28**, № 3., 449—457.

54. Павлов Ю. Л. Предельные распределения одной характеристики случайного отображения.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, **27**, № 4, 841—846.
55. Петров В. В. Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.
56. Прахар К. Распределение простых чисел.— М.: Мир, 1967.
57. Проскурин Г. В. О распределении числа вершин в слоях случайного отображения.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, **18**, № 4, 346—352.
58. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы.— М.: Мир, 1980.
59. Сачков В. Н. Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту.— Теория вероятн. и ее примен., 1972, **17**, № 4, 679—694.
60. Сачков В. Н. Случайные отображения ограниченной высоты.— Теория вероятн. и ее примен., 1973, **18**, № 1, 122—132.
61. Сачков В. Н. Об экстремальных точках пространства симметричных стохастических матриц.— Матем. сб., 1975, **96**, № 3, 447—457.
62. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики.— М.: Наука, 1977.
63. Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе.— М.: Наука, 1978.
64. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы.— М.: Наука, 1971.
65. Сиражд и нов С. Х., Азларов Т. А., Зупаров Т. М. Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых.— Ташкент: Фан, 1975.
66. Степанов В. Е. Предельные распределения некоторых характеристик случайных отображений.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, **14**, № 4, 639—653.
67. Степанов В. Е. Комбинаторная алгебра и случайные графы.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, **14**, № 3, 393—420.
68. Степанов В. Е. О распределении числа вершин в слоях случайного дерева.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, **14**, № 1, 64—77.
69. Степанов В. Е. Случайные отображения с одним притягивающим центром.— Теория вероятн. и ее примен., 1971, **16**, № 1, 148—157.
70. Степанов В. Е. Случайные графы.— Вопросы кибернетики. Труды семинара по комбинаторной математике.— М.: Сов. радио, 1973, 164—185.
71. Тараканов В. Е., Чистяков В. П. О цикловой структуре случайных подстановок.— Матем. сб., 1975, **96**, № 4, 594—600.
72. Фомин А. С. Локальные предельные теоремы для серий одинаково распределенных решетчатых случайных величин.— Проблемы алгебры и функционального анализа.— Петрозаводск: 1978, 32—46.
73. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М.: Мир 1977.
74. Balakrishnan V., Sankaranarayanan G., Suyambulingom C. Ordered cycle lengths in a random permutation.— Pacif. J. Math., 1971, **36**, № 3, 603—613.
75. Best M. R. The distribution of some variables on a symmetric groups.— Proc. Kon. ned. akad. wet., 1970, A **73**, № 5, 385—402.

76. Bovey J. D. The probability that some power of a permutation has small degree.— Bull. London Math. Soc., 1980, **12**, № 1, 47—51.
77. Bovey J. D. An approximate probability distribution for the order of elements of the symmetric group.— Bull. London Math. Soc., 1980, **12**, № 1, 41—46.
78. Bovey J. D., Williamson A. The probability of generating the symmetric group.— Bull. London Math. Soc., 1978, **10**, № 2, 91—96.
79. Chowla S., Herstein I. N., Moore K. On recursions connected with symmetric groups.— Can. J. Math., 1951, **3**, № 3, 328—334.
80. Clarke L. E. On Cayley formula for counting trees.— J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 132, 411—475.
81. Dixon J. D. The probability of generating the symmetric group.— Math. Z., 1969, **110**, № 3, 199—205.
82. Dwass M. The total progeny in a branching process.— J. Appl. Prob., 1969, **6**, № 3, 682—686.
83. Erdös P., Turan P., On some problems of statistical group theory. III.— Acta math. Acad. sci. hung., 1967, **18**, №№ 3—4, 309—320.
84. Göbel F., Jagers A. A. Random walks on graphs.— Stoch. Processes Appl., 1974, **2**, № 4, 311—336.
85. Grimmett G. R. Random labelled trees and their branching networks.— J. Austral. Math. Soc., 1980, A **30**, № 2, 229—237.
86. Harris B. Probability distributions related to random mappings.— Ann. Math. Stat., 1960, **31**, № 4, 1045—1062.
87. Harris B. The asymptotic distribution of the order of elements in symmetric semigroups.— J. Comb. theory, 1973, A **15**, № 1, 66—74.
88. Holst L. A unified approach to limit theorems for urn models.— J. Appl. Prob., 1979, **16**, № 1, 154—162.
89. Holst L., Two conditional limit theorems with applications.— Ann. Statist, 1979, **7**, № 3, 551—557.
90. Holst L. Asymptotic normality of sum-functions of spacings.— Ann. Prob., 1979, **7**, № 6, 1066—1072.
91. Holst L. On conditional limit theorems.— Тезисы докладов III Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике.— Вильнюс: 1981, т. 3, 128.
92. Katz M. Probability of indecomposability of a random mapping fanction.— Ann. Math. Stat., 1955, **26**, № 3, 512—517.
93. Kennedy D. P. The Galton—Watson process conditioned on the total progeny.— J. Appl. Prob., 1975, **12**, № 4, 800—806.
94. Kruskal J. B. The expected numder of components under random mapping function.— Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 6, 392—397.
95. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig, Berlin, B. G. Teubner, B 1, 1909.
96. Meir A., Moon J. W. On nodes of degree two in random trees.— Mathematika, 1968, **15**, № 2, 188—192.
97. Meir A. Moon J. W. The distance between points in a random trees.— J. Comb. theory, 1970, **8**, № 1, 99—103.
98. Meir A., Moon J. W. On the altitude of nodes in random trees.— Canad. J. Math., 1978, **30**, № 5, 997—1015.

99. Moon J. W. Varois proofs of Cayley's formula for counting trees.— A Seminar on graph theory.— New York: 1967, 70—78.
100. Moon J. W. A problem on random trees.— J. Comb. theory, 1971, **10**, № 2, 201—205.
101. Moon J. W. On the maximum degree in a random tree.— Michigan Math. J., 1968, **15**, № 4, 429—432.
102. Moon J. W. Random walks on random trees.— J. Austral. Math. Soc., 1973, **15**, № 1, 42—53.
103. Moser L., Wyman M. On the solutions of $x^d=1$ in symmetric groups.— Canad. J. Math., 1955, **7**, № 2, 159—168.
104. Mutafchiev L. R. Limit properties of components of random mappings.— Доклады Болгарской АН, 1978, **31**, № 10, 1257—1260.
105. Pakes A. G. Some limit theorems for the total progeny of a branching process.— Advances in Appl. Prob., 1971, **3**, № 1, 176—192.
106. Pearce L. H. Random walks on trees.— Discr. Math., 1980, **30**, № 3, 269—276.
107. Renyi A. Some remarks on the theory of trees.— Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., 1959, **4**, № 7, 3—85.
108. Renyi A., Szekeres G. On the height of trees.— J. Austral. Math. Soc., 1967, **7**, № 4, 497—507.
109. Riordan J. Enumeration of linear graphs for mappings of finite sets.— Ann. Math. Statist., 1962, **33**, № 1, 178—185.
110. Robinson R. W., Schwenk A. I. The distribution of degrees in a large random tree.— Discr. Math., 1975, **12**, 4, 359—372.
111. Ross S. M. A random graph.— J. Appl. Prob., 1981, **18**, № 1, 309—315.
112. Shepp L. A., Lloyd S. P. Ordered cycle lengths in random permutations.— Trans. Amer. Math. Soc., 1966, **121**, № 2, 340—357

Валентин Федорович Колчин

СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(Серия «Теория вероятностей
и математическая статистика»)

Редактор *И. Е. Морозова*
Техн. редактор *Е. В. Морозова*
Корректоры *И. Я. Кришталь, Е. В. Сидоркина*

ИБ № 12003

Сдано в набор 17.06.83. Подписано к печати 14.12.83. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 10,92. Условн. кр.-отт. 10,92. Уч.-изд. л. 12,11. Тираж 3450 экз. Заказ № 2044/24.
Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано в типографии № 2 изд-ва «Наука» Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.
Заказ №2044/24

Отпечатано в Подольском филиале
ПО «Периодика», г. Подольск, ул. Кирова, д. 25