ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

А. В. СКОРОХОД

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

А. В. СКОРОХОД

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1983

22.17
С 44
УДК 519.21

Скороход А. В. Стохастические уравнения для сложных систем. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 192 с.

В книге исследуются стохастические системы, описываемые марковскими процессами в сложных фазовых пространствах: пространствах неограниченно возрастающей размерности или бесконечной размерности, пространствах, не обладающих локальной евклидовостью. Основной метод исследования — системы бесконечного числа линейных стохастических уравнений специального вида. В первой главе построены стохастические дифференциальные уравнения для квазидиффузионных процессов в локально компактных пространствах, изучены условия существования и единственности, а также существования слабого решения и слабой единственности решений указанных стохастических уравнений. Рассмотрены диффузионные процессы на многообразиях с краем, в фазовых пространствах с ветвлением или со стыком компонент различной размерности. Во второй главе рассматривается асимптотическое поведение системы случайно-взаимодействующих частиц при неограниченном возрастании их числа. Установлено существование предельного распределения для нормированного числа частиц в областях, асимптотическая независимость движений отдельных частиц, получены предельные уравнения движения для одной частицы, а также найдены условия, при которых эти уравнения превращаются в стохастические диффузионные уравнения.

С $\frac{1502060000-059}{053(02)-83}$ 60-82

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятию сложной стохастической системы вряд ли можно (да и не стоит) давать точное математическое определение. Однако есть системы, для которых их сложность становится самоочевидной, — это системы с бесконечномерным фазовым пространством. Другой вид сложности связан с топологической структурой фазового пространства, он проявляется и в конечномерном случае. К сложному фазовому пространству можно отнести такие, которые состоят из нескольких компонент различной размерности. Сложные стохастические системы, рассматриваемые в книге, — это как раз системы с фазовыми пространствами указанных типов.

Хотя общая теория случайных процессов (в том числе и марковских) позволяет исследовать процессы в довольно общих фазовых пространствах, излагаемый в книге подход является новым и, по моему мнению, заслуживает внимания.

Во-первых, он позволяет строить процессы в довольно общих фазовых пространствах с помощью стохастических дифференциальных уравнений (при этом используется новый метод исследования бесконечных линейных систем таких уравнений). Во-вторых, выясняется, что при определенных условиях все бо́льшее усложнение системы (рост числа взаимодействующих в системе частиц) приводит в пределе к существенному ее упрощению: позволяет вместо системы в фазовом пространстве X^∞ рассматривать систему в X. Предлагаемый подход для стохастических систем применим и к детерминированным системам, рассматриваемым в статистической механике, и позволяет получать уравнения типа Больцмана чисто математическим путем.

Наконец следует сказать, что меня давно интересовала возможность строго математически получить из уравнений движения системы частиц вероятностное броуновское движение. Этот интерес в значительной мере и стимулировал все исследования, проводимые в книге. Мне кажется, что ситуацию с броуновским движением и диффузионными процессами здесь удалось несколько прояснить.

Хочу подчеркнуть, что книга носит чисто математический характер, все утверждения представляют собой теоремы, относящиеся к математическим объектам, а пояснения физического характера весьма иллюстративны.

В заключение хочу выразить благодарность Л. В. Лобановой и Н. Ф. Рябовой, оказавшим существенную помощь в техническом оформлении рукописи книги.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

1. Изучение систем, подверженных случайным воздействиям, составляет существенную часть исследований в физике и в механике, а в последние десятилетия и в кибернетике и в теоретической биологии. Основной математической моделью для такой системы является случайный процесс и в частности — марковский процесс. Последний класс случайных процессов был введен А. Н. Колмогоровым ([24], 1931) для описания динамических систем, находящихся под влиянием случайных воздействий, не зависимых в различные моменты времени. Им же был предложен аналитический аппарат для изучения марковских процессов — дифференциальные уравнения для вероятностей перехода процесса. Идея получения марковского процесса из динамической системы, находящейся под воздействием процесса с независимыми значениями, была реализована Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым ([2], 1939). Развитие идей Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова привело И. И. Гихмана к построению общей теории динамических систем, находящихся под воздействием случайного процесса ([5, 6], 1941), а затем к созданию теории стохастических уравнений ([7, 8], 1950—1951). Отметим, что примерно в это же время независимо теорию стохастических дифференциальных уравнений развивал японский математик К. Ито ([20], 1946; [21, 22], 1951). (Хотя К. Ито исходил из идей, далеких от физических, предложенный им подход, основанный на понятии стохастического интеграла, оказался более удобным и при описании механических и физических систем.) Стохастические дифференциальные уравнения, возникнув при формализации понятия динамической системы, находящейся под случайным воздействием, стали мощным аппаратом изучения не только реальных систем, но и самих случайных процессов.

2. В теории случайных процессов стохастические дифференциальные уравнения используются для эффективного построения широкого класса случайных процессов, в первую очередь марковских. Еще в работах К. Ито ([22], 1950) были построены диффузионные процессы на дифференцируемых многообразиях. Он же построил и одномерные разрывные процессы. Многомерные разрывные марковские процессы построены А. В. Скороходом ([31], 1961). В работах В. В. Баклана ([1], 1964), Ч. Л. Чантладзе ([38], 1964), Ю. Л. Далецкого ([15], 1967) теория стохастических дифференциальных уравнений была распространена на процессы в гильбертовом пространстве, что позволило построить некоторый класс диффузионных процессов в гильбертовом фазовом пространстве и перенести в значительной степени на эти пространства конечномерную теорию. Все это относилось к диффузионным уравнениям с гладкими коэффициентами. Уравнения с негладкими коэффициентами как для непрерывных, так и разрывных коэффициентов начали изучаться А. В. Скороходом ([31], 1961), который использовал для доказательства существования принцип компактности мер, отвечающих случайным процессам. Для диффузионных процессов с негладкими коэффициентами наиболее общие результаты получены Н. В. Крыловым ([25], 1966; [26], 1969) и Д. В. Струком и С. Р. С. Вараданом ([35], 1969). В работах Н. И. Портенко ([29, 30], 1979) рассмотрены уравнения с обобщенным сносом. Одновременно разрабатывалась теория уравнений с коэффициентами, зависящими от всего прошлого, и представления процессов в виде решений таких уравнений. Первая работа в этом направлении принадлежит К. Ито и М. Нисио ([23], 1964). В связи с задачами фильтрации случайных процессов такого рода уравнения рассматривались А. Н. Ширяевым ([39], 1965), Р. Ш. Липцером и А. Н. Ширяевым ([27], 1968), М. П. Ершовым ([18], 1972). Общая теория стохастических уравнений с коэффициентами, зависящими от всего прошлого, построена в работе И. И. Гихмана и И. И. Кадыровой ([9], 1973). Представление разрывных процессов как решений стохастических уравнений получено Б. Григелионисом ([13, 14], 1971, 1974).

3. Первая глава книги посвящена стохастическим дифференциальным уравнениям, связанным с некоторым общим классом непрерывных марковских процессов — квазидиффузионными процессами, введенными Е. Б. Дын-

киным ([17], 1963). В работе А. В. Скорохода ([32], 1966) было показано, что достаточно широкий класс непрерывных марковских процессов можно случайной заменой времени преобразовать в квазидиффузионный. Для построения стохастического уравнения использовано то обстоятельство, что для квазидиффузионного процесса x_t, какова бы ни была функция φ из области определения инфинитезимального оператора процесса A, выражение

$$\varphi(x_t) - \int_0^t A\varphi(x_s)\,ds$$

является непрерывным мартингалом с характеристикой

$$\int_0^t [A\varphi^2(x_s) - 2\varphi(x_s)\,A\varphi(x_s)]\,ds.$$

Это обстоятельство позволяет записать следующее соотношение:

$$d\varphi(x_t) = a(\varphi, x_t)\,dt + (b(\varphi, x_t), dw(t))_H, \tag{1}$$

где $a(\varphi, x) = A\varphi(x)$, $b(\varphi, x)$ — линейная по φ функция со значениями в гильбертовом пространстве H, для которой

$$(b(\varphi, x), b(\varphi, x))_H = A\varphi^2(x) - 2\varphi(x)\,A\varphi(x),$$

$w(t)$ — винеровский процесс в H с единичным корреляционным оператором. Соотношение (1) можно рассматривать как систему уравнений относительно $\varphi(x)$. Эта система переопределена, но ее удобство в инвариантности записи, она годится для любого топологического фазового пространства (не нужны ни конечномерность, ни линейность). В главе 1 построена теория уравнений вида (1) для локально компактного фазового пространства, найдены условия существования и единственности решения, слабого существования и слабой единственности, исследованы преобразования такого уравнения, сохраняющего его форму. В качестве примеров уравнений такого рода, не сводящихся к классическим диффузионным уравнениям, рассмотрены уравнения на многообразии с краем с отражением на границе, уравнения на ветвящихся многообразиях, на многообразиях с переменной размерностью. Системы с такого рода фазовыми пространствами имеют вполне разумный физический смысл. Наличие случайного возмущения не позволяет применить к ним известный для детерминированных систем метод поинтервального исследования, поскольку система, попав в критические состояния (на границу, на стык компонент различной размерности, в точку ветвления), будет многократно (точнее, бесконечно много раз) возвращаться в такие состояния, прежде чем отойдет от них на некоторое расстояние. Предложенный в главе 1 подход пока единственный, позволяющий рассматривать такого рода системы. Именно сложность фазового пространства заставляет отнести их к классу сложных систем.

4. Второй тип сложных систем рассмотрен во второй главе. Там рассматриваются системы, состоящие из большого числа случайно взаимодействующих частиц, и исследуется поведение таких систем при неограниченном возрастании их числа. Существенным отличием таких систем от систем, рассматриваемых в статистической физике (довольно полный обзор идей и методов статистической механики содержится в книге Дж. Уленбека и Дж. Форда [36]), является именно случайность взаимодействия, тогда как в статистической физике случайность входит только через начальное положение. В предположении, что взаимодействия между различными парами частиц независимы и число взаимодействий на одну частицу в единицу времени остается ограниченным, можно исследовать предельное поведение системы при неограниченном возрастании числа частиц. Уравнения движения такой системы будут стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$dz_i(t) = [A(z_i) + \sum_{j=1}^{n} a_n(z_i, z_j)]\,dt + \int f(\theta, z_i, z_j)\, p_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt),$$

где z_i определяет состояние i-ой частицы в фазовом пространстве Z, A — внешнее поле, $a_n(z_i, z_j)$ — неслучайная сила взаимодействия между i-ой и j-ой частицами, которую можно характеризовать как «дальнодействие», интеграл по стохастической пуассоновской мере $p_{ij}^{(n)}$ на $[0, \infty)\times\Theta$, где Θ — некоторое вспомогательное измеримое пространство, представляет собой импульсную случайную силу взаимодействия, которая меняет состояния частиц скачкообразно (скачком меняются импульсы взаимодействующих частиц). Решение уравнения $(z_1(t), \ldots, z_n(t))$ будет марковским процессом. Уравнение Колмогорова для распределения процесса (прямое уравнение) играет роль уравнения Лиувилля. Во второй главе вводится «статистическая» функция распределения:

$$\mu_t^{(n)}(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi_A(z_i(t))$$

(χ_A — индикатор борелевского множества A) и изучается предельное поведение этой случайной меры при $n\to\infty$.

Заметим, что распределения в Z^k

$$m_t^{(k)}(dz_1,\ \ldots,\ dz_k)=\mathsf{M}\mu_t^{(n)}(dz_1)\ \ldots\ \mu_t^{(n)}(dz_k)$$

являются аналогом частичных функций распределения в статистической механике, для них можно выписать цепочку уравнений, аналогичную цепочке Н. Н. Боголюбова (см. [3]). В нашем случае она имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t^{(k)}(z_1,\ \ldots,\ z_k)=-\sum_{r=1}^{k}\mathrm{Sp}\frac{\partial}{\partial z_r}(\rho_t^{(k)}(z_1,\ \ldots,\ z_k)A(z_r))-$$
$$-\sum_{r=1}^{k}\int\mathrm{Sp}\frac{\partial}{\partial z_r}(\rho_t^{(k+1)}(z_1,\ \ldots,\ z_{k+1})a(z_r,\ z_{k+1}))dz_{k+1}+$$
$$+\sum_{r=1}^{k}\int\int[\rho_t^{(k+1)}(z_1,\ \ldots,\ z_{r-1},\ u,\ z_{r+1},\ \ldots,\ z_{k+1})-$$
$$-\rho_t^{(k)}(z_1,\ \ldots,\ z_k)]\,\pi(u,\ z_r,\ z_{k+1})\,du\,dz_{k+1},$$

где $\rho_t^{(k)}$ — плотность меры $m_t^{(k)}$ относительно меры Лебега в Z^k (считаем Z — евклидовым пространством), $\frac{\partial}{\partial z}(\rho A)$ и $\frac{\partial}{\partial z}(\rho a)$ являются операторами, в уравнение входят их следы, $\pi(u,\ z,\ \bar z)$ — плотность распределения состояния частицы, которая перед взаимодействием находилась в точке z и взаимодействовала с частицей, находящейся в точке $\bar z$.

Пусть $a_n=a/n$, $\mathsf{M}p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt)=\frac{1}{n}m(d\theta)\,dt$, где m — конечная мера на Θ. Тогда в предположении некоторой гладкости коэффициентов уравнения справедливы следующие утверждения.

1) Мера $\mu_t^{(n)}(A)$ слабо сходится к некоторой неслучайной мере $\lambda_t(A)$, для которой выполнено уравнение

$$\frac{d}{dt}\int\lambda_t(dz)\varphi(z)=\int\left(\varphi'(z),\ A\ (z)+\int a(z,z')\lambda_t(dz')\right)\lambda_t(dz)+$$
$$+\int\int\int[\varphi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-\varphi(z)]\,m(d\theta)\,\lambda_t(dz')\,\lambda_t(dz),$$

которое можно рассматривать как аналог уравнения Больцмана в статистической физике; если существует плотность $\lambda_t(dz)$ относительно меры Лебега $\rho_t(z)$, это будет предельная одночастичная функция распределения (по терминологии статистической механики), и для нее будет справедливо уравнение

$$\frac{d}{dt}\rho_t(z) = -\mathrm{Sp}\frac{\partial}{\partial z}(\rho(z)A(z)) - \\ - \int \mathrm{Sp}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_t(z)a(z, z'))\rho_t(z')\,dz' + \\ + \int\int [\rho_t(u)\rho_t(z') - \rho_t(z)]\,\pi(u, z, z')\,du\,dz'.$$

2) Пусть начальные значения функций $z_1^{(n)}(t), \ldots, z_k^{(n)}(t)$ (это решение уравнения (1) при данном n) сходятся к $z_1(0), \ldots, z_k(0)$. Тогда совместное распределение процессов $(z_1^{(n)}(t), \ldots, z_k^{(n)}(t))$ при $n\to\infty$ сходится к совместному распределению k независимых процессов $(z_1(t), \ldots, z_k(t))$, каждый из которых является марковским процессом, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению

$$dz_i(t) = \hat{a}(t, z_i(t))\,dt + \int f(\theta, z_i(t), z')\,\hat{p}(d\theta \times dz' \times dt), \quad (2)$$

где $\hat{a}(t, z) = A(z) + \int a(z, z')\lambda_t(dz')$, а $\hat{p}$ — пуассоновская мера на $\Theta \times Z \times [0, \infty)$. Отсюда в частности вытекает, что частичные функции распределения являются в пределе произведениями одночастичных функций распределения.

3) Рассмотрим флуктуацию статистической функции распределения

$$\nu_t^{(n)}(A) = \sqrt{n}\,(\mu_t^{(n)}(A) - \lambda_t(A)).$$

При некоторых дополнительных предположениях распределения величин

$$\int \varphi(z)\,\nu_t^{(n)}(dz)$$

при $n\to\infty$ сходятся к гауссовому распределению, т. е. $\nu_t^{(n)}(A)$ слабо сходится к некоторому обобщенному гауссовому полю $\nu_t(dz)$. Это поле при $a(z) = A(z, z') = 0$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$d\int\varphi(z)\,\nu_t(dz)=$$
$$=\iiint[\varphi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-\varphi(z)]\,m(d\theta)\,[\lambda_t(dz)\,\nu_t(dz')+$$
$$+\lambda_t(dz')\,\nu_t(dz)]+$$
$$+\iiint[\varphi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-\varphi(z)]\,\gamma(d\theta\times dz\times dz'\times dt),$$

где $\gamma\,(d\theta\times dz\times dz'\times dt)$ — гауссова мера с независимыми значениями, для которой $\mathsf{M}\gamma=0$, $\mathsf{M}\gamma^2\,(d\theta\times dz\times dz'\times dt)=$ $=m\,(d\theta)\,\lambda\,(t,\ dz)\,\lambda\,(t,\ dz')\,dt$. Решение последнего уравнения можно записать в явном виде.

4) Наконец для уравнений типа (2) получено диффузионное приближение. Предполагается, что движение непрерывно, только скорость может меняться скачкообразно, кроме того, существует тормозящая сила, направленная против скорости и примерно пропорциональная ей (вязкость). Если вязкость неограниченно возрастает, то решение уравнения (2) слабо сходится к диффузионному процессу, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты исходного уравнения (2). Этот результат аналогичен гидродинамическому приближению в статистической механике (см. работу Н. Н. Боголюбова [4]). Он также служит пояснением того факта, что теоретико-вероятностный подход дает возможность описывать диффузию стохастическими уравнениями первого порядка, в то время как уравнения динамики — уравнения второго порядка. Впервые вероятностная модель получения винеровского процесса из процесса движения под воздействием случайных сил была предложена в работе А. М. Ильина и Р. З. Хасьминского [19]. Более общие классы процессов рассматривались в работах А. В. Скорохода [33] и В. А. Дубко [6].

Рассматривались лишь системы однотипных частиц. Однако распространение результатов на системы, состоящие из частиц нескольких типов, не встречает принципиальных трудностей и может быть проведено совершенно аналогично.

В книге исследуется поведение большого числа частиц лишь в предположении, что частицы заполняют ограниченное множество, или им соответствует вероятностная функция распределения. Так будет, если в начальный момент времени $\mu_0^{(n)}\,(A)$ имеет предел в виде вероятностной меры. Таким образом, исключается, например, тот случай, когда частицы в пределе распределены равномерно во всем пространстве.

Второе существенное ограничение — ограниченность (даже гладкость) сил взаимодействия. Более интересен тот случай, когда при сближении частиц силы могут неограниченно возрастать. Любые результаты, позволяющие ослабить указанные ограничения, представляли бы значительный интерес.

В книге используются без особых ссылок основные результаты из теории мартингалов, теории стохастических дифференциальных уравнений и полугрупповой теории марковских процессов. Эти результаты имеются в книгах [10, 11, 17, 28].

ГЛАВА 1

НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

При рассмотрении механических и физических систем, находящихся под воздействием случайных сил, в предположении, что случайные воздействия на непересекающихся промежутках времени независимы, естественно описывать изменение их состояния с помощью марковского процесса. Если вероятностный характер действующих сил зависит лишь от состояния процесса и не меняется со временем, то эволюция системы описывается однородным по времени марковским процессом. В этой главе рассматриваются системы с компактными и локально компактными фазовыми пространствами. Это могут быть некоторые области конечномерного евклидова пространства, причем довольно нерегулярные, если рассматриваемые системы описывают движение нескольких твердых тел со сложными связями между ними. Фазовое пространство может быть в принципе и бесконечномерным, т. е. системы могут иметь бесконечное число степеней свободы. Основная особенность рассматриваемых процессов заключается в отсутствии в фазовом пространстве линейной структуры. Поэтому непосредственная запись стохастических дифференциальных уравнений, описывающих движение частиц, невозможна. Для этого используется некоторый набор «псевдокоординат». Чтобы определить возможный вид стохастических уравнений, предварительно устанавливается вид уравнений для квазидиффузионных процессов. Затем уже независимо изучаются решения полученных уравнений. Следует отметить, что при решении механических и физических задач естественно исходить из стохастических дифференциальных уравнений, поскольку законы механики и физики формулируются в дифференциальной форме. Однако на практике на самом деле нас интересует не траектория системы в фазовом пространстве, а только вероятности, связанные с ней, например, вероятности перехода. Поэтому, построив решение стохастического дифференциального уравнения, мы далее будем изучать вероятностные характеристики марковского процесса, образованного решениями стохастического уравнения.

§ 1. Квазидиффузионные процессы

Пусть X — локально компактное метрическое пространство, $r(x, y)$ — расстояние в X, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств. Будем рассматривать непрерывные однородные марковские процессы $\{x_t\}$ в X. Обозначим через $P(t, x, B)$, $t \geqslant 0, x \in X, B \in \mathfrak{B}$ вероятность перехода процесса x_t из состояния x во множество B за время t. Относительно вероятности перехода предполагаются выполненными обычные требования: а) $P(t, x, \cdot)$ — вероятностная мера на $\mathfrak{B}$, б) $P(t, x, B)$ для всех B измерима относительно $\mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}_+$ — σ-алгебра борелевских множеств на $R_+ = [0, \infty)$, в) выполнено уравнение Чепмена—Колмогорова: при $t > 0$, $s > 0$

$$P(t+s, x, B) = \int P(t, x, dy) P(s, y, B). \tag{1}$$

Обозначим через C_0 множество непрерывных вещественных функций $\varphi(x)$ на X, для которых $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Мы будем рассматривать только регулярные феллеровские процессы — это процессы, для которых для $\varphi \in C_0$

$$\int \varphi(y) P(t, x, dy) \in C_0. \tag{2}$$

Это условие эквивалентно следующим двум: 1) меры $P(t, x, \cdot)$ при фиксированном t слабо непрерывны по x, т. е. $\int \varphi(y) P(t, x, dy)$ непрерывен по x для всякой ограниченной непрерывной функции φ; процессы с такими вероятностями перехода называются феллеровскими, 2) для всякого компакта K $\lim\limits_{x \to \infty} P(t, x, K) = 0$, это условие регулярной возвращаемости из бесконечности.

Замечание. Если X компакт, то C_0 совпадает с множеством C всех непрерывных функций, условие 2) теряет смысл и (2) эквивалентно феллеровости процесса.

Будем рассматривать C_0 как банахово пространство с нормой $\|\varphi\| = \sup|\varphi(x)|$. Свяжем с марковским процессом полугруппу линейных операторов в C_0

$$T_t\varphi(x) = \int \varphi(y) P(t, x, dy). \tag{3}$$

То, что это полугруппа, вытекает из (1): $T_{t+s} = T_t T_s$. Кроме того, $\|T\| \leqslant 1$ и $T_t\varphi \geqslant 0$, если $\varphi \geqslant 0$. Производящий оператор полугруппы, определенный для всех φ, для которых существует предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_t\varphi(x) - \varphi(x)) = A\varphi(x) \in C_0 \tag{4}$$

в смысле ограниченной поточечной сходимости, называется *инфинитезимальным оператором марковского процесса.* Его область определения будем обозначать D. Она совпадает с областью значений резольвенты полугруппы (или марковского процесса), определяемой равенством

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x)\, dt, \qquad f \in C_0. \tag{5}$$

При этом

$$AR_\lambda f = \lambda R_\lambda f - f, \qquad f \in C_0;$$
$$R_\lambda A f = \lambda R_\lambda f - f, \qquad f \in D,$$

и значит $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$, где I — единичный оператор в C_0. Используя (5), можно по резольвенте, а значит и по инфинитезимальному оператору восстановить полугруппу.

Если $\varphi \in D$, то $T_t\varphi \in D$ при $t > 0$ и

$$\frac{d}{dt} T_t\varphi(x) = T_t\varphi(x). \tag{6}$$

Отсюда вытекает соотношение

$$T_t\varphi(x) - \varphi(x) = \int_0^t T_s A\varphi(x)\, ds. \tag{7}$$

Последнее равенство допускает следующую интересную интерпретацию. Будем обозначать через P_x вероятность, вычисленную при условии, что начальное положение процесса x_t совпадало с x $(x_0 = x)$, M_x — математическое ожидание по вероятности P_x. Тогда

$$\mathsf{M}_x\varphi(x_t) = T_t\varphi(x), \quad \mathsf{M}_x\varphi(x_t) - \varphi(x) = \mathsf{M}_x\int_0^t A\varphi(x_s)\,ds,$$

или

$$\mathsf{M}_x\left[\varphi(x_t) - \varphi(x_0) - \int_0^t A\varphi(x_s)\,ds\right] = 0.$$

Пусть $\mathcal{F}_t$ — поток σ-алгебр, порожденных процессом x_t. Покажем, что процесс

$$\zeta_t = \varphi(x_t) - \int_0^t A\varphi(x_s)\,ds$$

является мартингалом относительно $\mathcal{F}_t$ по мере P_x, каково бы ни было $x \in X$. Действительно,

$$\mathsf{M}_x[\zeta_{t+h} - \zeta_t/\mathcal{F}_t] =$$

$$= \mathsf{M}_x\left[\varphi(x_{t+h}) - \varphi(x_t) - \int_t^{t+h} A\varphi(x_s)\,ds/\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \mathsf{M}\left[\varphi(x_{t+h}) - \varphi(x_t) - \int_t^{t+h} A\varphi(x_s)\,ds/x_t\right] =$$

$$= \mathsf{M}_{x_t}\left[\varphi(x_h) - \varphi(x_0) - \int_0^h A\varphi(x_s)\,ds\right] = 0;$$

мы воспользовались марковским свойством и однородностью процесса. Будем говорить, что φ принадлежит области определения $\tilde{D}$ квазиинфинитезимального оператора $\tilde{A}$, если существует такая ограниченная измеримая функция $g(x)$, что процесс

$$\varphi(x_t) - \int_0^t g(x_s)\,ds$$

является мартингалом относительно $\mathcal{F}_t$ по мере P_x, каково бы ни было $x \in X$. В этом случае на φ определен оператор $\tilde{A}$ и $\tilde{A}\varphi = g$. Из сказанного выше вытекает, что $\tilde{A}$ является расширением оператора A.

Напомним теперь определение диффузионного процесса. Непрерывный марковский процесс x_t называется *диффузион-*

ным, если X — конечномерное евклидово пространство и всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция, имеющая ограниченные производные, принадлежит $\tilde{D}$. (Это определение несколько шире общепринятого.) В частности, если $X=R^m$, x^i — координаты точки x, а $g_c(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная 1 при $|x|\leqslant c$ и стремящаяся к нулю вместе со своими производными при $x\to\infty$, то функции $x^i g_c(x)$, $x^i x^j g_c(x)$ принадлежат $\tilde{D}$. Величины

$$a^i(x)=\tilde{A}(x^i g_c(x)),\quad b^{ij}(x)=\tilde{A}(x^i x^j g_c(x))$$

при $|x|<c$ не зависят от c. Они носят название *диффузионных коэффициентов*. Через эти коэффициенты оператор $\tilde{A}$ определяется на дважды непрерывно дифференцируемых функциях с помощью формулы

$$\tilde{A}\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m} a^i(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} b^{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^i\partial x^j}. \qquad (8)$$

Заметим, что у диффузионного процесса в общепринятой терминологии коэффициенты $a^i(x)$ и $b^{ij}(x)$ должны удовлетворять дополнительному условию

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_0^s \mathsf{M}_x(|a^i(x)-a^i(x_t)|+|b^{ij}(x)-b^{ij}(x_t)|)\,dt=0.$$

Диффузионный процесс обладает следующим свойством: дважды непрерывно дифференцируемые функции, локально совпадающие с x^i, принадлежат $\tilde{D}$ и всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными производными от $x^1, \ldots, x^m$ принадлежит $\tilde{D}$. Исходя из этого свойства и определяется квазидиффузионный процесс.

Определение. Непрерывный марковский процесс x_t называется *квазидиффузионным*, если, каковы бы ни были $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \tilde{D}$ и дважды непрерывно дифференцируемая функция n переменных $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, функция $F(\varphi_1(x), \ldots \ldots, \varphi_n(x))$ принадлежит $\tilde{D}$.

В частности, отсюда вытекает, что для квазидиффузионного процесса из того, что $\varphi\in\tilde{D}$, следует принадлежность $\tilde{D}$ и функции φ^2.

Напомним, что (квадратической) характеристикой непрерывного мартингала ζ_t называется такая неубывающая непрерывная функция $\langle\zeta\rangle_t$, согласованная с потоком $\mathcal{F}_t$, что $\zeta_t^2 - \langle\zeta\rangle_t$ также является мартингалом. Определяющее квазидиффузионный процесс свойство дает возможность вычислить характеристику мартингала

$$\zeta_t = \varphi(x_t) - \int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds \tag{9}$$

при $\varphi \in \tilde{D}$. Действительно

$$\zeta_t^2 = \varphi^2(x_t) - 2\varphi(x_t)\int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds + \left(\int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds\right)^2 =$$

$$= \varphi^2(x_t) - 2\zeta_t\int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds - \left(\int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds\right)^2.$$

Используя дифференцируемость интеграла от $\tilde{A}\varphi$, можно убедиться (в частности, это вытекает из формулы Ито для мартингалов), что

$$d\left[2\zeta_t\int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds + \left(\int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds\right)^2\right] =$$

$$= 2\left[\zeta_t\tilde{A}\varphi(x_t)\,dt + \tilde{A}\varphi(x_t)\int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds\,dt + \int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds\,d\zeta_t\right] =$$

$$= 2\varphi(x_t)\,\tilde{A}\varphi(x_t)\,dt + 2\left(\int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds\right)d\zeta_t.$$

Следовательно,

$$\zeta_t^2 = \varphi^2(x_t) - \int_0^t \tilde{A}\varphi^2(x_s)\,ds - 2\int_0^t\left(\int_0^s \tilde{A}\varphi(x_u)\,du\right)d\zeta_s +$$

$$+ \int_0^t [\tilde{A}\varphi^2(x_s) - 2\varphi(x_s)\,\tilde{A}\varphi(x_s)]\,ds.$$

Поскольку $\varphi^2(x_t) - \int_0^t \tilde{A}\varphi^2(x_s)\,ds$ мартингал по определению $\tilde{A}$,

$$\int_0^t\left(\int_0^s \tilde{A}\varphi(x_u)\,du\right)d\zeta_s$$

мартингал, как стохастический интеграл по мартингалу, то

$$\zeta_t^2 - \int_0^t [\tilde{A}\varphi^2(x_s) - 2\varphi(x_s)\tilde{A}\varphi(x_s)]\,ds$$

является мартингалом. Значит,

$$\langle\zeta\rangle_t = \int_0^t [\tilde{A}\varphi^2(x_s) - 2\varphi(x_s)\tilde{A}\varphi(x_s)]\,ds. \tag{10}$$

Итак, характеристика мартингала (9) определяется формулой (10). В частности, она абсолютно непрерывная функция t и ее производная по t ограничена.

Покажем обратное: если $\langle\zeta\rangle_t = \int_0^t g(s)\,ds$, где $g(s)$ $\mathcal{F}_s$-согласованна, измерима и ограничена, то $\varphi^2 \in \tilde{D}$. Из предыдущих выкладок вытекает равенство

$$\zeta_t^2 = \varphi^2(x_t) - 2\int_0^t \left(\int_0^s \tilde{A}\varphi(x_u)\,du\right) d\zeta_s - \int_0^t 2\varphi(x_s)\tilde{A}\varphi(x_s)\,ds.$$

Так как характеристика определяется процессом однозначно, то

$$\varphi^2(x_t) - \int_0^t [g(s) + 2\varphi(x_s)\tilde{A}\varphi(x_s)]\,ds$$

является мартингалом. Заметим теперь, что $\langle\zeta\rangle_t$ является непрерывным однородным аддитивным функционалом от марковского процесса x_t. Если θ_h — операция сдвига траектории процесса: $\theta_h x_t = x_{t+h}$, то

$$\langle\zeta\rangle_{t+h} = \langle\zeta\rangle_h + \theta_h\langle\zeta\rangle_t \tag{11}$$

с вероятностью $P_x = 1$, каково бы ни было x. Это свойство вытекает из соотношения

$$\langle\zeta\rangle_t = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta_{t_{k+1}} - \zeta_{t_k})^2, \qquad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$$

(предел в смысле сходимости в среднем квадратическом по мере P_x). Из формулы (11) вытекает, что

$$\int_h^{t+h} g(s)\,ds = \int_0^t \theta_h g(s)\,ds = \int_0^t g(s+h)\,ds.$$

Используя то обстоятельство, что почти для всех s

$$g(s) = \hat{g}(s) = \overline{\lim_{\delta \downarrow 0}} \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} g(u)\, du$$

и величина справа $\mathcal{F}_s$-измерима, можем считать, что $\theta_h g(s) = g(s+h)$, поскольку это справедливо для $\hat{g}$. Положим

$$\overline{\lim_{\delta \downarrow 0}} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} g(u)\, du = f(x);$$

поскольку эта величина $\mathcal{F}_0$-измерима и значит постоянна почти всюду по мере P_x, она может зависеть от x, но является борелевской функцией x, совпадая со своим математическим ожиданием. Тогда $g(0) = f(x_0)$ и значит $g(s) = f(x_s)$ почти для всех s. Таким образом, мартингалом является процесс

$$\varphi^2(x_t) - \int_0^t [f(x_s) + 2\varphi(x_s)\tilde{A}\varphi(x_s)]\, ds,$$

откуда вытекает, что $\varphi^2 \in \tilde{D}$.

Покажем теперь, что если для всех $\varphi \in \tilde{D}$ и $\varphi^2 \in \tilde{D}$, то процесс является квазидиффузионным. Пусть $\varphi_k \in \tilde{D}$, $k = 1, \ldots, n$, а $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция в R^n. Положим

$$\zeta_k(t) = \varphi_k(x_t) - \int_0^t \tilde{A}\varphi_k(x_s)\, ds.$$

Тогда, если $\langle \zeta_k, \zeta_j \rangle_t$ — взаимная характеристика мартингалов ζ_k и ζ_j, т. е.

$$\langle \zeta_k, \zeta_j \rangle_t = \frac{1}{2}\left[\langle \zeta_k, \zeta_j \rangle_t - \langle \zeta_k \rangle_t - \langle \zeta_j \rangle_t\right],$$

то в силу формулы (10)

$$\langle \zeta_k, \zeta_j \rangle_t = \\ = \int_0^t [\tilde{A}\varphi_k(x_s)\varphi_j(x_s) - \varphi_k(x_s)\tilde{A}\varphi_j(x_s) - \varphi_j(x_s)\tilde{A}\varphi_k(x_s)]\, ds.$$

Имеем

$$F(\varphi_1(x_t), \ldots, \varphi_n(x_t)) = \\ = F\left(\zeta_1(t) + \int_0^t \tilde{A}\varphi_1(x_s)\,ds, \ldots, \zeta_n(t) + \int_0^t \tilde{A}\varphi_n(x_s)\,ds\right).$$

На основании формулы Ито (см. [11], т. 3, стр. 96) можем записать:

$$F(\varphi_1(x_t), \ldots, \varphi_n(x_t)) = F(\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial \xi_i}\left(\zeta_1(s) + \int_0^s \tilde{A}\varphi_1(x_u)\,du, \ \ldots\right) d\zeta_i(s) + \\ + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \xi_i}\left(\zeta_1(s) + \int_0^s \tilde{A}\varphi_1(x_u)\,du, \ \ldots\right) \tilde{A}\varphi_i(x_s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\left(\zeta_1(s) + \int_0^s \tilde{A}\varphi_1(x_u)\,du, \ \ldots\right) \frac{d}{ds}\langle \zeta_i, \zeta_j\rangle_s\right] ds.$$

Следовательно, $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \tilde{D}$ и

$$\tilde{A}F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \varphi_i}\tilde{A}\varphi_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}[\tilde{A}\varphi_i\varphi_j - \varphi_i\tilde{A}\varphi_j - \varphi_j\tilde{A}\varphi_i]. \quad (12)$$

Тем самым доказано, что процесс является квазидиффузионным.

Таким образом можно дать еще два эквивалентных определения квазидиффузионного процесса: 1) процесс квазидиффузионный, если $\forall \varphi \in \tilde{D}$, $\varphi^2 \in \tilde{D}$, т. е. D является алгеброй, так как $\tilde{D}$ очевидно линейно, а при $\varphi_1, \varphi_2 \in \tilde{D}$

$$\varphi_1\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)^2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2 - \frac{1}{2}\varphi_2^2 \in \tilde{D};$$

2) процесс квазидиффузионный, если для всех $\varphi \in \tilde{D}$ мартингал $\varphi(x_t) - \int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds$ имеет абсолютно непрерывную характеристику, производная которой ограничена.

§ 2. Стохастическое уравнение для квазидиффузионных процессов

Пусть x_t — квазидиффузионный процесс с квазиинфинитезимальным оператором $\tilde{A}$, имеющим область определения $\tilde{D}$. Обозначим через $\zeta_t(\varphi)$ при $\varphi \in \tilde{D}$ мартингал

$$\zeta_t(\varphi) = \varphi(x_t) - \varphi(x_0) - \int_0^t \tilde{A}\varphi(x_s)\,ds. \tag{1}$$

Тогда $\varphi(x_t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному соотношению

$$d\varphi(x_t) = \tilde{A}\varphi(x_t)\,dt + d\zeta_t(\varphi). \tag{2}$$

Чтобы получить отсюда стохастическое дифференциальное уравнение, нужно выразить $d\zeta_t(\varphi)$ через мартингал, который бы не зависел ни от φ, ни от процесса x_t. В качестве такого мартингала можно взять винеровский процесс. Для этого нам потребуется теорема о представлении семейства непрерывных мартингалов с помощью винеровского процесса.

Теорема 1. *Пусть Φ — сепарабельное линейное пространство и для всех $\varphi \in \Phi$ определены непрерывные мартингалы $\zeta_t(\varphi)$ ($\zeta_0(\varphi) = 0$) на одном и том же вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$, согласованные с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t \subset \mathfrak{S}$. Предположим, что взаимная характеристика мартингалов $\zeta_t(\varphi)$ и $\zeta_t(\psi)$ представима в виде*

$$c_t(\varphi, \psi) = \int_0^t \gamma_s(\varphi, \psi)\,ds,$$

где $\gamma_s(\varphi, \psi)$ — измеримый $\mathcal{F}_s$-согласованный ограниченный процесс (при заданных φ, ψ) и, кроме того, $c_t(\varphi, \psi)$ при каждом t есть билинейная форма на Φ^2, непрерывная в смысле сходимости по вероятности. Тогда в сепарабельном гильбертовом пространстве H можно указать такой винеровский процесс $w(t)$ с единичным корреляционным оператором, определенный на некотором расширении исходного вероятностного пространства и согласованный с некоторым потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$, таким, что $\mathcal{F}_t \subset \tilde{\mathcal{F}}_t$, и такую $\tilde{\mathcal{F}}_t$-согласованную измеримую случайную функцию $b_t(\varphi)$ из $R_+ \times \Phi$ в H, измеримую относительно $\mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{B}_\Phi$, где $\mathfrak{B}_\Phi$ — σ-алгебра борелевских множеств в Φ, что имеет место пред-

ставление

$$\zeta_t(\varphi) = \int_0^t (b_s(\varphi),\ dw(s))_H, \tag{3}$$

$(\cdot,\ \cdot)_H$ — *скалярное произведение в* H.

Доказательство. Нам понадобится следующее факторизационное представление: существует такая измеримая функция $b_s(\varphi)$ из $R_+ \times \Phi$ в H, измеримая относительно $\mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{B}_\Phi$ и F_s-согласованная, что

$$c_t(\varphi,\ \psi) = \int_0^t (b_s(\varphi), b_s(\varphi))_H\, ds. \tag{4}$$

Выберем в Φ счетное плотное множество $\Phi_0 = \{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\}$. Положим

$$\alpha_{ik}(s) = \gamma_s(\varphi_i,\ \varphi_k).$$

Для почти всех s матрица $\|\alpha_{ik}(s)\|$ неотрицательно определена. Рассмотрим на некотором другом вероятностном пространстве $\{\Theta,\ \mathfrak{C},\ \Pi\}$ числовые измеримые случайные функции $\xi_i(s,\ \omega)$, для которых для почти всех s, ω $\{\xi_i(s,\ \omega) = \xi_i(s,\ \omega,\ \theta)\}$ является гауссовой последовательностью и $\mathsf{M}_\Pi \xi_i(s,\ \omega)\,\xi_k(s,\ \omega) = \alpha_{ik}(s,\ \omega)$ (M_Π — математическое ожидание по мере Π). Существование таких процессов вытекает из приводимой ниже теоремы 2. В силу измеримости функций $\xi_i(s,\ \omega)$ гильбертово пространство H^0, порожденное величинами ξ (в качестве скалярного произведения ξ и η принимается $\mathsf{M}_\Pi \xi\eta$), будет сепарабельным. Поэтому полагая $b_s^0(\varphi) = \xi_i(s)$, $\varphi \in \Phi_0$, $\varphi = \varphi_i$, будем иметь

$$\gamma_s(\varphi,\ \psi) = (b_s^0(\varphi),\ b_s^0(\psi))_{H^0}, \qquad \varphi,\ \psi \in \Phi_0,$$

$$c_t(\varphi,\ \psi) = \int_0^t (b_s^0(\varphi),\ b_s^0(\psi))_{H^0}\, ds, \quad \varphi,\ \psi \in \Phi_0.$$

Используя непрерывность $c_t(\varphi,\ \psi)$ по φ и ψ по вероятности P, убеждаемся, что при $\varphi_{n_k} \to \varphi \in \Phi$

$$c_t\left(\varphi_{n_k} - \varphi_{n_i},\ \varphi_{n_k} - \varphi_{n_i}\right) = c_t\left(\varphi_{n_k},\ \varphi_{n_k}\right) + c_t\left(\varphi_{n_i},\ \varphi_{n_i}\right) - 2c_t\left(\varphi_{n_i},\ \varphi_{n_k}\right) \to 0$$

и значит

$$\lim_{i,k\to\infty}\int_0^t \left|b_s^0(\varphi_{n_i})-b_s^0(\varphi_{n_k})\right|_{H_0} ds=0 \text{ по вероятности } \mathsf{P}.$$

Поэтому функцию $b_s^0(\varphi)$ можно продолжить на Φ, причем будет выполнено равенство

$$c_t(\varphi,\ \psi)=\int_0^t (b_s^0(\varphi),\ b_s^0(\psi))_{H_0} ds.$$

Остается воспользоваться изометрией всех сепарабельных гильбертовых пространств и положить $b_s(\varphi)=Sb_s^0(\varphi)$, где S изометричное отображение H^0 в H. Соотношение (4) доказано.

Обозначим через Q_s оператор проектирования на замыкание области значений функции $b_s(\varphi)$, $\varphi\in\Phi$. Определим мартингалы $\eta_t(h)$, $h\in H$, согласованные с потоком $\mathcal{F}_t$ следующим образом. Пусть $\alpha_k^{(n)}$ — $\mathcal{F}_s$-согласованные измеримые функции, такие, что для почти всех s

$$\left|Q_s h-\sum \alpha_k^{(n)}(s)\, b_s(\varphi_k)\right|_H\leqslant 1/n.$$

Положим

$$\eta_t^{(n)}(h)=\sum_k\int_0^t \alpha_k^{(n)}(s)\, d\zeta_s(\varphi_k).$$

Тогда характеристика мартингала $\eta_t^{(n)}(h)-\eta_t^{(m)}(h)$ будет

$$\sum_{k,j}\int_0^t [\alpha_k^{(n)}(s)-\alpha_k^{(m)}(s)]\,[\alpha_j^{(n)}(s)-\alpha_j^{(m)}(s)]\, d\langle\zeta(\varphi_k),\ \zeta(\varphi_j)\rangle_s=$$

$$=\int_0^t\sum_{k,j}[\alpha_k^{(n)}(s)-\alpha_k^{(m)}(s)]\,[\alpha_j^{(n)}(s)-\alpha_j^{(m)}(s)]\,(b_s(\varphi_k),\ b_s(\varphi_j))_H ds=$$

$$=\int_0^t\left|\sum_k\alpha_k^{(n)}(s)\, b_s(\varphi_k)-\sum_j\alpha_j^{(m)}(s)\, b_s(\varphi_j)\right|_H^2 ds\leqslant\frac{2}{n^2}+\frac{2}{m^2}.$$

Поскольку это выражение стремится к нулю при $n, m\to\infty$, то $\eta_t^{(n)}(h)$ сходится по вероятности к мартингалу, который будет непрерывным и его характеристика будет пределом характеристики мартингала $\eta_t^{(n)}(h)$. Предельный мартингал обозначим $\eta_t(h)$. Из предыдущих вычислений видно, что характеристика мартингала будет

$$\int_0^t \Big| \sum_k \alpha_k^{(n)}(s)\ b_s(\varphi_k) \Big|_H^2 ds.$$

Переходя к пределу, находим

$$\langle \eta(h) \rangle_t = \int_0^t | Q_s h |_H^2 ds.$$

Те же соображения показывают, что взаимная характеристика мартингалов $\eta_t(h_1)$ и $\eta_t(h_2)$ будет

$$\langle \eta(h_1),\ \eta(h_2) \rangle_t = \int_0^t (Q_s h_1,\ h_2)_H ds.$$

Пусть $w_1(t)$ винеровский процесс в H с единичным корреляционным оператором, не зависящий от потока $\mathcal{F}_t$. Мартингал

$$\int_0^t (h - Q_s h,\ dw_1(s))_H$$

ортогонален любому мартингалу $\zeta_t(\varphi)$, а значит и мартингалу $\eta_t(h)$. Поэтому мартингал

$$\hat{\eta}_t(h) = \eta_t(h) + \int_0^t (h - Q_s h,\ dw_1(s))_H$$

относительно потока $\hat{\mathcal{F}}_t$, порожденного $\mathcal{F}_t$ и значениями $w_1(s)$, $s \leqslant t$, будет иметь в качестве характеристики сумму характеристик слагаемых, т. е.

$$\langle \hat{\eta}(h) \rangle_t = \int_0^t | Q_s h |_H^2 ds + \int_0^t | h - Q_s h |_H^2 ds = t\, | h |_H^2.$$

Таким образом $\hat{\eta}_t(h)$ при всяком $h \in H$ есть винеровский процесс (из известной теоремы Леви вытекает, что непрерывный мартингал с неслучайной характеристикой, пропорциональной t, есть винеровский процесс).

Взаимная характеристика мартингалов $\hat{\eta}_t(h_1)$ и $\hat{\eta}_t(h_2)$ будет $(h_1, h_2)_H$. Используя это обстоятельство убеждаемся, что

$$\langle\hat{\eta}(\alpha h)-\alpha\hat{\eta}(h)\rangle_t=0, \quad \langle\hat{\eta}(h_1+h_2)-\hat{\eta}(h_1)-\hat{\eta}(h_2)\rangle=0,$$
$$\alpha\in R, \quad h, h_1, h_2\in H.$$

Например, второе равенство следует из того, что

$$\langle\hat{\eta}(h_1+h_2)-\hat{\eta}(h_1)-\hat{\eta}(h_2)\rangle_t=$$
$$=t\,|h_1+h_2|_H^2+t\,|h_1|_H^2+t\,|h_2|_H^2-2t(h_1+h_2, h_1)_H-$$
$$-2t(h_1+h_2, h_2)_H+2t(h_1, h_2)_H=0.$$

Следовательно, с вероятностью 1

$$\hat{\eta}_t(\alpha_1h_1+\alpha_2h_2)=\alpha_1\hat{\eta}_t(h_1)+\alpha_2\hat{\eta}_t(h_2), \quad \alpha_1, \alpha_2\in R, \quad h_1, h_2\in H.$$

Итак, $\hat{\eta}_t(h)$ — линейная функция по h, и при каждом h является винеровским процессом со средним 0 и дисперсией $t\,|h|_H^2$. По определению винеровского процесса в H с единичным корреляционным оператором

$$\hat{\eta}_t(h)=(h, w(t))_H,$$

где $w(t)$ — такой процесс.

Покажем, что при таком выборе $w(t)$ выполнено равенство (3). Для этого найдем совместную характеристику мартингалов $\hat{\eta}_t(\varphi)$ и $\zeta_t(\varphi)$. Поскольку $\zeta_t(\varphi)$ при всех φ ортогонально $\hat{\eta}_t(\varphi)-\eta_t(h)$, то

$$\langle\hat{\eta}(h), \zeta(\varphi)\rangle_t=\langle\eta(h), \zeta(\varphi)\rangle_t=\lim_{n\to\infty}\langle\eta^{(n)}(h), \zeta(\varphi)\rangle_t=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^t\sum_k\alpha_k^{(n)}(s)(b_s(\varphi_k), b_s(\varphi))_H\,ds=\int_0^t(h, b_s(\varphi))_H\,ds,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^t\Big(\sum_k\alpha_k^{(n)}(s)\,b_s(\varphi_k)-h, \; b_s(\varphi)\Big)_H\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^t\Big|h-\sum_k\alpha_k^{(n)}(s)\,b_s(\varphi_k)\Big|_H^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t|b_s(\varphi)|_H^2\,ds\right)^{1/2}.$$

Итак,

$$\langle \hat{\eta}(h),\ \zeta(\varphi)\rangle_t = \int_0^t (h,\ b_s(\varphi))_H\, ds. \tag{5}$$

Если $h_t(\omega)$ произвольная ступенчатая функция со значениями в H, согласованная с $\mathcal{F}_t$, то $\int_0^t (h_s(\omega), dw(s))_H$ является мартингалом с характеристикой $\int_0^t |h_s(\omega)|^2\, ds$, а взаимная характеристика этого мартингала с $\zeta_t(\varphi)$ будет

$$\int_0^t (h_s(\omega),\ b_s(\varphi))_H\, ds.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться формулой (5) на интервалах постоянства $h_t(\omega)$. (Легко видеть, что $\hat{\eta}_t(h)$ является мартингалом при $t > s$, если $h = h(\omega)$ $\mathcal{F}_s$-измеримо и взаимная характеристика мартингалов $\zeta_t(\varphi)$ и $\hat{\eta}_t(h(\omega))$ на $[s, \infty)$ задается выражением $\int_s^t (h(\omega), b_k(\varphi))_H\, du$.)

С помощью предельного перехода убеждаемся, что

$$\left\langle \int_0^{\cdot} (h_s(\omega),\ dw(s))_H,\ \zeta(\varphi)\right\rangle_t = \int_0^t (h_s(\omega),\ b_s(\varphi))_H\, ds.$$

Подсчитаем характеристику разности

$$\zeta_t(\varphi) - \int_0^t (b_s(\varphi),\ dw(s))_H.$$

Она равна

$$\langle\zeta(\varphi)\rangle_t + \left\langle \int_0^{\cdot} (b_s(\varphi),\ dw(s))_H\right\rangle_t - 2\left\langle \zeta(\varphi),\ \int_0^{\cdot} (b_s(\varphi), dw(s))_H\right\rangle_t =$$

$$= c_t(\varphi,\ \varphi) + \int_0^t (b_s(\varphi),\ b_s(\varphi))_H ds - 2\int_0^t (b_s(\varphi),\ b_s(\varphi))_H ds = 0.$$

Формула (3) установлена и теорема доказана.

Применим доказанную теорему к семейству мартингалов $\zeta_t(\varphi)$, определяемому равенством (1). Будем рассматривать это семейство при некоторой фиксированной мере $\mathsf{P}_{\bar{x}}$. Линейное пространство Φ совпадает с $\tilde{D}$. Топологию в $\tilde{D}$ будем вводить так, чтобы выполнялись условия теоремы 1. В нашем случае функция c_t имеет вид (это вытекает из формулы (10) § 1)

$$c_t(\varphi, \psi) = \int_0^t [\tilde{A}\varphi(x_s)\psi(x_s) - \varphi(x_s)\tilde{A}\psi(x_s) - \psi(x_s)\tilde{A}\varphi(x_s)]\,ds. \tag{6}$$

Определим в $\tilde{D}$ расстояние между φ и ψ с помощью формулы

$$\rho(\varphi, \psi) = \Big[\sup_{t\geqslant 0} e^{-t}\mathsf{M}_{\bar{x}}|\varphi(x_t) - \psi(x_t)|^2 + \mathsf{M}_{\bar{x}}\int_0^\infty (\tilde{A}\varphi(x_t) - \tilde{A}\psi(x_t))^2 e^{-t}dt\Big]^{1/2}.$$

Если $\rho(\varphi, \varphi_n)\to 0$, то

$$\mathsf{M}_{\bar{x}}\sup_{t\leqslant T}|\zeta_t(\varphi) - \zeta_t(\varphi_n)|^2 \leqslant 4\mathsf{M}_{\bar{x}}|\zeta_t(\varphi) - \zeta_t(\varphi_n)|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 8\mathsf{M}_{\bar{x}}|\varphi(x_T) - \varphi_n(x_T)|^2 + 8\mathsf{M}_{\bar{x}}T\int_0^T|\tilde{A}\varphi(x_s) - \tilde{A}\varphi_n(x_s)|^2 ds \to 0.$$

Отсюда вытекает, что для всех T $\langle\zeta(\varphi) - \zeta(\varphi_n)\rangle_T \to 0$ по вероятности, а значит $c_T(\varphi - \varphi_n, \varphi - \varphi_n)\to 0$ по вероятности. Воспользуемся неравенством

$$|c_t(\varphi, \psi) - c_t(\varphi_n, \psi_n)| = |c_t(\varphi, \psi - \psi_n) + c_t(\varphi - \varphi_n, \psi) -$$
$$- c_t(\varphi - \varphi_n, \psi - \psi_n)| \leqslant [c_t(\varphi, \varphi)c_t(\psi - \psi_n, \psi - \psi_n)]^{1/2} +$$
$$+ [c_t(\psi, \psi)c_t(\varphi - \varphi_n, \varphi - \varphi_n)]^{1/2} +$$
$$+ [c_t(\varphi - \varphi_n, \varphi - \varphi_n)c_t(\psi - \psi_n, \psi - \psi_n)]^{1/2}.$$

Если $\rho(\varphi, \varphi_n)\to 0$, $\rho(\psi, \psi_n)\to 0$, то $|c_t(\varphi, \psi) - c_t(\varphi_n, \psi_n)|\to 0$ по вероятности.

Чтобы доказать сепарабельность $\tilde{D}$, заметим предварительно, что сепарабельными являются пространство C_0 с метрикой

$$\rho_1(\varphi, \psi) = [\sup_t \mathsf{M}_{\bar{x}}|\varphi(x_t) - \psi(x_t)|^2 e^{-t}]^{1/2},$$

поскольку $\rho_1(\varphi, \psi) \leqslant \|\varphi - \psi\|$, а также пространство $\mathfrak{M}$ всех ограниченных борелевских функций с метрикой

$$\rho_2(g_1, g_2) = \left[\mathsf{M}_{\bar{x}} \int_0^\infty (g_1(x_t) - g_2(x_t))^2 e^{-t} dt \right]^{1/2}.$$

Следовательно, сепарабельным будет и декартово произведение этих пространств $C_0 \times \mathfrak{M}$, наделенное метрикой

$$r((\varphi; g), (\varphi_1, g_1)) = \sqrt{\rho_1^2(\varphi, \varphi_1) + \rho_2^2(g_1, g_2)}.$$

Соотношение $\varphi \to (\varphi; \tilde{A}\varphi)$, как вытекает из определения метрик ρ и r, является изометричным отображением $\tilde{D}$ в $C_0 \times \mathfrak{M}$, отсюда и вытекает сепарабельность $\tilde{D}$ с метрикой ρ. Таким образом условия теоремы 1 выполнены, при этом

$$\gamma_s(\varphi, \psi) = \tilde{A}[\varphi(x_s)\psi(x_s)] - \varphi(x_s)\tilde{A}\psi(x_s) - \psi(x_s)\tilde{A}\varphi(x_s).$$

Поэтому гауссовы случайные функции $\xi_i(s, \omega)$, использовавшиеся при доказательстве теоремы 1, будут иметь вид $\xi_i(x_s)$, так что функция $b_s(\varphi)$ также будет иметь вид $b(\varphi, x_s)$, где $b(\varphi, x)$ — $\mathfrak{B}_\Phi \times \mathfrak{B}$-измеримая функция из $\Phi \times X$ в H, при этом

$$(b(\varphi, x), b(\varphi, x))_H = \tilde{A}\varphi^2(x) - 2\varphi(x)\tilde{A}\varphi(x) \tag{7}$$

почти для всех x по мере $P(t, \bar{x}, dx)$ (это вероятность перехода процесса) для почти всех t. Из соотношения (7) вытекает, что для тех же x выполнено равенство

$$(b(\varphi, x), b(\psi, x))_H = \\ = \tilde{A}[\varphi(x_s), \psi(x_s)] - \varphi(x_s)\tilde{A}\psi(x_s) - \psi(x_s)\tilde{A}\varphi(x_s),$$

откуда следует, что $b(\varphi, x)$ зависит от φ «почти линейно»: каковы бы ни были $\alpha_0, \alpha_1 \in R$ и $\varphi, \varphi_1 \in \tilde{D}$, соотношение

$$b(\alpha\varphi + \alpha_1\varphi_1, x) = \alpha b(\varphi, x) + \alpha_1 b(\varphi_1, x)$$

выполнено почти для всех x по мере $P(t, x, dx)$ почти для всех t. Итак уравнение (2) можно записать в виде

$$d\varphi(x_t) = \tilde{A}\varphi(x_t)\,dt + (b(\varphi, x_t), dw(t))_H. \tag{8}$$

Обозначим $\tilde{A}\varphi(x) = a(\varphi, x)$. Эта функция определена на $\tilde{D} \times X$ и линейна по φ. Используя это обозначение, можем переписать уравнение в такой форме:

$$d\varphi(x_t) = a(\varphi, x_t)\,dt + (b(\varphi, x_t), dw(t))_H, \tag{9}$$

где коэффициенты уравнения определены на $\tilde{D} \times X$, измеримы по x, линейны (в указанном выше смысле) по φ, непрерывны по φ в метрике ρ, a принимает значение из R, b — из H. Уравнение (9) решается при начальном условии $\varphi(x(0)) = \varphi(x)$. Если удастся из этого уравнения определить $\varphi(x_t)$ для φ из некоторого множества $D_0 \subset \tilde{D}$, разделяющего точки из X, то тем самым удастся определить и x_t.

Укажем, что процесс $w(t)$ существенно зависит от начального значения x, поскольку он выражается через x_t, а эти процессы при различных начальных значениях заданы на различных вероятностных пространствах. Как видно из построения функции $b(\varphi, x)$, она также зависит от x. Если можно построить функцию $b(\varphi, x)$ так, чтобы (7) удовлетворялось для всех x, то тогда эта зависимость исчезает.

Изучим теперь вопрос о том, когда процесс $w(t)$ в (9) можно выбрать $\mathcal{F}_t$-измеримым. Предположим, что область значений функции $b(\varphi, x_s)$ в H почти для всех s и x_s имеет одну и ту же размерность r (может быть $r = +\infty$). Обозначим замыкание области значений $b(\varphi, x_s)$ через H_{x_s}. Пусть $\hat{H}$ — r-мерное гильбертово пространство, а U_{x_s} — изометрическое отображение H_{x_s} в $\hat{H}$, являющееся измеримой функцией x_s. Положим

$$\hat{b}(\varphi, x) = U_x b(\varphi, x).$$

Это функция со значениями в $\hat{H}$, для которой выполнено соотношение (7). Поскольку оператор проектирования на замыкание области значений $b_s(\varphi) = \hat{b}(\varphi, x_s)$ совпадает с единичным, то $\eta_t(h) = \hat{\eta}_t(h)$ (мы используем обозначения теоремы 1), а так как $\eta_t(h)$ $\mathcal{F}_t$-измеримо, то таким будет и $\hat{\eta}_t(h) = (w(t), h)_H$, т. е. и процесс $w(t)$.

Предположим, что формула (7) выполнена для всех x и функция $b(\varphi, x)$ такова, что размерность области значений отображения $\Phi \xrightarrow{b(\varphi, x)} H$ одна и та же для всех x. Тогда, как показано выше, можно считать, что она плотна в H. Пусть, кроме того, $b(\varphi, x)$ линейно по φ при всех x и непрерывно в Φ в некоторой топологии, не зависящей от x, в которой Ф сепарабельно. Тогда соотношение

$$\int_0^t (b(\varphi, x_s), dw_s)_H = \varphi(x_t) - \varphi(x_0) - \int_0^t a(\varphi, x_s)\,ds$$

позволяет измеримым и не зависящим от процесса x_t образом определить w. Выберем плотную в Ф последовательность $\{\varphi_k\}$ и пусть $h_k(x)$ получены ортогонализацией (без нормировки) последовательности векторов $b(\varphi_k, x)$: $h_1(x) = b(\varphi_1, x)$, $h_2(x) = b(\varphi_2, x) - \frac{(b(\varphi_1, x), b(\varphi_2, x))_H}{|b(\varphi_1, x)|^2} b(\varphi_1, x)$ и т. д., причем отношение $\frac{0}{0}$ считаем равным нулю. Среди $h_k(x)$ могут быть и нули. Для всех $h \in H$ справедливо равенство

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h_k(x), h)_H}{|h_k(x)|^2} h_k(x)$$

$\left(\text{относительно } \frac{0}{0} \text{ придерживаемся того же соглашения}\right)$. Поскольку

$$h_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k(x)\, b(\varphi_k, x),$$

то

$$\int_0^t (h_k(x_s), dw(s))_H = \sum_{i=1}^{k} \int_0^t \alpha_i(x_s)\, d\left[\varphi_i(x_s) - \int_0^s a(\varphi_i, x_u)\,du\right].$$

Значит

$$(w(t), h) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{(h_k(x_s), h)_H}{|h_k(x_s)|_H^2} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x_s)\,[d\varphi_i(s) - a(\varphi_i)\, x_s))\,ds]. \tag{10}$$

Но винеровские процессы, определяемые формулой (10), при разных начальных условиях x_0 определены все равно на разных вероятностных пространствах. В то же время уравнение (9) можно решать с одним и тем же винеровским процессом при различных начальных условиях. При этом решения также будут определяться на одном и том же вероятностном пространстве. Покажем, что марковский процесс может быть реализован на одном вероятностном пространстве: можно на одном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ определить семейство случайных функций $\xi_x(t)$, измеримо зависящих от параметра $x \in X$ такое, что распределение $\xi_x(t)$ совпадает с распределением марковского процесса x по мере P_x. В том случае, когда процесс $w(t)$, входящий в уравнение (9), можно выразить по формуле (10), $\xi_x(t)$ можно выбрать так, чтобы

$$d\varphi(\xi_x(t)) = a(\varphi, \xi_x(t))\,dt + (b(\varphi, \xi_x(t)), dw(t))_H, \tag{11}$$

где $w(t)$ — один и тот же не зависящий от x винеровский процесс.

Для доказательства этих утверждений нам потребуется следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть Y — полное метрическое сепарабельное пространство, $(Z, \mathfrak{C})$ — измеримое пространство, $\{\mu_z, z \in Z\}$ — семейство вероятностных мер на σ-алгебре $\mathfrak{B}$-борелевских множеств из Y, причем $\mu_z(A)$ $\mathfrak{C}$-измеримо для всех $A \in \mathfrak{B}$. Тогда существует функция $y(z, \omega)$, определённая на $Z \times \Omega$ и измеримая относительно $\mathfrak{C} \times \mathfrak{S}$ со значениями в Y, где $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$ — некоторое вероятностное пространство (можно считать, что это отрезок $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских множеств и мерой Лебега), такая, что*

$$\mathsf{P}\{y(z, \omega) \in B\} = \mu_z(B) \qquad \forall z \in Z, \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Доказательство этой теоремы имеется в книге: Гихман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наукова Думка, 1977, с. 8, теорема 1.1.)

Замечание 1. При доказательстве теоремы 1 использовалась последовательность измеримых случайных функций $\xi_k(s, \omega)$, определенных на вероятностном пространстве $\{\Theta, \mathfrak{C}, \Pi\}$, $s \in R_+$, $\omega \in \{\Omega, \mathfrak{S}\}$ такая, что при всех s, ω ξ_k — гауссова последовательность с заданной корреляционной матрицей $a_{kj}(s, \omega)$. Для того чтобы установить существование такой последовательности с помощью теоремы 2, возьмем в качестве Y пространство всех последовательностей $\{x^k\}$ с метрикой $\rho(x, y) = \sum 2^{-k}(1 - \exp\{-|x^k - y^k|\}$ в качестве $Z - R_+ \times \Omega$, $\mathfrak{C} - \mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{S}$, μ_z — меру, отвечающую гауссовой последовательности с корреляционной матрицей $a_{kj}(s, \omega)$.

Замечание 2. Пусть Y — теперь пространство всех непрерывных функций $x(t)$ со значениями в X с метрикой

$$\rho(x(\cdot),\ y(\cdot)) = \sum_k 2^{-k}(1 - \exp\{\sup_{t\leqslant k} r_X(x(t),\ y(t))\}),$$

где r_X — метрика в X, $Z = X$, μ_z — мера P_x на Y. Тогда существует функция $y(x, \omega)$, измеримая по совокупности переменных, принимающая значения из Y и такая, что

$$\mu_x(B) = \mathsf{P}_x(B) = \mathsf{P}\{y(x,\ \omega) \in B\}$$

для любого борелевского множества B из Y. Поскольку точки Y есть X-значные функции, то $y(x, \omega) = \xi_x(\cdot, \omega)$, где $\xi_x(t, \omega)$ при каждом x непрерывный процесс, функция $\xi_x(t, \omega)$ измерима по совокупности всех своих переменных. Кроме того, при фиксированном x процессу $\xi_x(t, \omega)$ соответствует в пространстве траекторий мера P_x.

Покажем теперь, как построить процессы $\xi_x(t)$, чтобы они удовлетворяли (11) с одним и тем же винеровским процессом $w(t)$. Предположим, что $b(\varphi, x)$ таково, что выполнено соотношение (10). Выберем в H некоторый базис $\{h_k\}$ и пусть Z_1 — множество, состоящее из последовательностей числовых непрерывных функций: $z^{(1)}(t) = \{\alpha_1(t),\ \alpha_2(t),\ \ldots\}$ с топологией равномерной покоординатной сходимости на каждом конечном отрезке. Y таково, как в замечании 2. Пусть μ_x — мера, соответствующая процессу $\xi_x(t)$, построенному в замечании 2. Для всех x по мере μ_x определено отображение S из Y в Z_1, определяемое на функции x_t соотношением

$$Sx(\cdot) = \{\beta_1(\cdot),\ \beta_2(\cdot),\ \ldots\}, \qquad \beta_i(t) = (w(t),\ h_i),$$

где $w(t)$ определяется равенством (10). Это отображение измеримо. Положим $S\xi_x(\cdot) = \{\beta_i^x(\cdot),\ i = 1, 2, \ldots\}$. Последовательность $\beta_i^x(t)$ при каждом x является последовательностью независимых винеровских процессов с единичной дисперсией. Поскольку и Y и Z_1 полные сепарабельные метрические пространства и рассматриваемые в них σ-алгебры — борелевские, то существует регулярная условная вероятность $\mathsf{P}\{\xi_x(\cdot) \in B/S\xi_x(\cdot)\}$ на σ-алгебре, т. е. такая функция $\mu_{x,\,z^{(1)}}(B)$, $B \in \mathfrak{B}_Y$, $z^{(1)} \in Z_1$, $x \in X$, которая при фиксированных x, $z^{(1)}$ является мерой на $\mathfrak{B}_Y$, и измерима относительно $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}_{Z_1}$ ($\mathfrak{B}_{Z_1}$ — борелевская σ-алгебра в Z_1), и для которой

$$\mu_{x,\,S\xi_x(\cdot)}(B) = \mathsf{P}\{\xi_x(\cdot) \in B/S\xi_x(\cdot)\} \tag{12}$$

с вероятностью 1. На основании теоремы 2 существует на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mathsf{P}_1\}$ функция $\hat{\xi}(x, z^{(1)}(\cdot), t)$ такая, что

$$\mathsf{P}\{\hat{\xi}(x, z^{(1)}(\cdot), \cdot)\in B\}=\mu_{x, z^{(1)}(\cdot)}(B). \tag{13}$$

Пусть $\{\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mathsf{P}_2\}$ некоторое другое вероятностное пространство, на котором задана последовательность независимых винеровских процессов $\{\beta_k(t), k=1, 2, \ldots\}$ с единичной дисперсией. Определим на вероятностном пространстве $\{\Omega_1\times\Omega_2, \mathfrak{S}_1\times\mathfrak{S}_2, \mathsf{P}_1\times\mathsf{P}_2\}$ случайную функцию

$$\hat{\xi}(x, t)=\hat{\xi}(x, \{\beta_1(\cdot), \beta_2(\cdot), \ldots\}, t)$$

и винеровский процесс $w(t)$ со значениями в H, для которого $(w(t), h_k)=\beta_k(t)$. Тогда совместное распределение $\xi_x(t)$ и $\{\beta_1^x(t), \beta_2^x(t), \ldots\}$ совпадает с совместным распределением $\hat{\xi}(x, t)$ и $\{\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots\}$, поскольку одинаковы распределения последовательностей $\{\beta_k^x(t), k=1, 2, \ldots\}$ и $\{\beta_k(t), k=1, 2, \ldots\}$, и условное распределение $\xi_x(t)$ при фиксированной последовательности $\{\beta_k^x(t), k=1, 2, \ldots\}$ таково же, как и условное распределение $\hat{\xi}(x, t)$ при заданных $\{\beta_k(t), k=1, 2, \ldots\}$ (сравни (12) и (13)). Из совпадения совместных распределений вытекает равенство

$$(w(t), h_i)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \frac{(h_k(\hat{\xi}(x, s)), h_i)}{|h_k(\hat{\xi}(x, s))|_H^2}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(\hat{\xi}(x, s))[d\varphi_j(\hat{\xi}(x, s))-a(\varphi_j, \hat{\xi}(x, s))\,ds]. \tag{14}$$

Поскольку обе части равенства линейны по h_i, то отсюда вытекает, что формула остается справедливой, если h_i заменить на любое h. Вспоминая, что $h_k(x)$ линейно выражаются через $b(\varphi_i, x)$ и подставляя эти выражения в (14), убеждаемся последовательно в справедливости равенств

$$\int_0^t (b(\varphi_k, \hat{\xi}(x, s)), dw(s))_H=$$
$$=(\varphi_k(\hat{\xi}(x, t))-\varphi_k(x)-\int_0^t a(\varphi_k, \hat{\xi}(x, s))\,ds. \tag{15}$$

Используя плотность последовательности $\{\varphi_k\}$ в Φ можем убедиться, что формула (15) остается справедливой, если φ_k заменить на любое $\varphi \in \Phi$.

Итак мы установили, что при определенных предположениях существует марковское семейство процессов $\xi(x, t)$, удовлетворяющих одному и тому же стохастическому дифференциальному уравнению с винеровским процессом, не зависящим от начального условия.

§ 3. Существование и единственность решения стохастического дифференциального уравнения. Гладкий случай

Пусть X и C_0 по-прежнему локально компактное пространство и пространство непрерывных функций на нем, стремящихся к нулю на бесконечности, $D \subset C_0$ — некоторая алгебра функций: это линейное многообразие, замкнутое относительно умножения элементов (очевидно, C_0 также алгебра). Предположим на $D \times X$ заданы две функции: $a(\varphi, x)$ — со значениями в R и $b(\varphi, x)$ — со значениями в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве H (возможно, конечномерном). Пусть в D можно ввести такую локально выпуклую топологию, что оно будет сепарабельным, а функции $a(\varphi, x)$ и $b(\varphi, x)$ непрерывными по совокупности переменных. Кроме того, они предполагаются линейными по φ и удовлетворяющими соотношению

$$a(\varphi\psi, x) - \varphi(x)\, a(\psi, x) - \psi(x)\, a(\varphi, x) = \\ = (b(\varphi, x), \; b(\psi, x))_H \qquad (1)$$

(справа записано скалярное произведение в H). Смысл этого соотношения уже обсуждался в предыдущем параграфе. Нас будут интересовать условия существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения

$$d\varphi(x_t) = a(\varphi, x_t)\, dt + (b(\varphi, x_t), \; dw(t))_H, \qquad (2)$$

где $w(t)$ — винеровский процесс в H. Уравнение (2) решается при начальном условии $x_0 = x$ (можно рассматривать и случайные начальные условия, не зависящие от процесса w).

Очевидно из уравнения (2) в лучшем случае можно определить значения $\varphi(x_t)$ для всех $\varphi \in D$. Чтобы по этим значениям можно было восстановить сам процесс x_t, необходимо (и достаточно), чтобы функции из D разделяли точки из X, т. е. чтобы для любой пары точек $x_1 \neq x_2$ из X можно было указать такую функцию $\varphi \in D$, что $\varphi(x_1) \neq \neq \varphi(x_2)$. В дальнейшем всегда будет предполагаться, что D таким свойством обладает. Заметим, что для определения x_t достаточно знать $\varphi(x_t)$ для $\varphi \in D_0 \subset D$, где D_0 — любое подмножество функций из D, лишь бы функции из D_0 разделяли точки X.

Приведем простой пример уравнения вида (2), имеющего (и притом единственное) решение для любого начального значения. Предположим, что

$$a(\varphi, x) = A(\varphi, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)),$$
$$b(\varphi, x) = B(\varphi, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)),$$

где $A(\varphi, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ и $B(\varphi, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ определены на $D \times R^m$ и при каждом $\varphi \in D$ удовлетворяют по $\xi_1, \ldots, \xi_m$ условию Липшица:

$$|A(\varphi, \xi_1, \ldots, \xi_m) - A(\varphi, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_m)| + |B(\varphi, \xi_1, \ldots, \xi_m) - B(\varphi, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_m)|_H \leqslant L_\varphi \sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \bar{\xi}_k|.$$

В этом случае для $\varphi_1(x_t), \ldots, \varphi_n(x_t)$ получаем такую систему стохастических уравнений:

$$d\varphi_k(x_t) = A(\varphi_k, \varphi_1(x_t), \ldots, \varphi_m(x_t))\,dt + (B(\varphi_k, \varphi_1(x_t), \ldots, \varphi_m(x_t)), \quad dw(t))_H, \tag{3}$$

к которой применима классическая теория, из которой следует, что существует единственный набор функций $\eta_1(t), \ldots, \eta_m(t)$, удовлетворяющих соотношению (3), если $\eta_k(t)$ подставить туда вместо $\varphi_k(x_t)$, причем они будут измеримы относительно потока σ-алгебр, порожденных винеровским процессом $w(t)$; $\varphi(x_t)$ для остальных $\varphi \in D$ определяется из равенств

$$\varphi(x_t) = \varphi(x) + \int_0^t A(\varphi, \eta_1(s), \ldots, \eta_m(s))\,ds + \int_0^t (B(\varphi, \eta_1(s), \ldots, \eta_m(s)), dw(s))_H$$

(в правую часть входят только известные величины).

При доказательстве существования и единственности решения уравнения (2) удобно использовать решения на случайных промежутках вида $[0, \tau)$, где τ — момент выхода из некоторой окрестности, содержащей начальную точку и имеющей компактное замыкание. Предположим, что для всякой точки x существует окрестность U_x с компактным замыканием, такая, что решение (2) до момента выхода из U_x единственно. Это означает, что если $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ два решения (2), удовлетворяющих начальному условию $x(0) = \bar{x}(0) = x$, а $\tau(\bar{\tau})$ — моменты выхода процесса $x(t)$ $(\bar{x}(t))$ из окрестности U_x, то $x(t) = \bar{x}(t)$ при $t \leqslant \tau \wedge \bar{\tau}$. (Рассматриваются лишь непрерывные решения.) В частности это условие заведомо выполнено, если решения с начальным условием x не существует. Будем говорить, что в этом случае решение (2) локально единственно. Покажем, что из локальной единственности вытекает единственность. Действительно, пусть $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ два решения, удовлетворяющих начальному условию $\bar{x}(0) = x(0) = x$. Обозначим через $\mathscr{F}_t$ поток σ-алгебр, порожденных винеровским процессом и решениями $x(t)$ и $\bar{x}(t)$. Пусть $\tau = \inf[s\colon x(s) \neq \bar{x}(s)]$. Это момент остановки относительно потока $\mathscr{F}_t$, с которым согласован процесс $w(t)$. Поэтому процесс $w(t+\tau) - w(\tau)$ не зависит от $\mathscr{F}_\tau$ и является винеровским. Используя соотношения

$$\varphi(x(t+\tau)) - \varphi(x(\tau)) = \int_0^t a(\varphi, x(\tau+s))\,ds + \int_0^t (b(\varphi, x(\tau+s)), d[w(s+\tau) - w(\tau)])$$

и аналогичное соотношение для $\bar{x}(\cdot)$, можем утверждать, что $x(t+\tau) = \bar{x}(t+\tau)$ при $t < \zeta$, где ζ — момент выхода процесса $x(t+\tau)$ из окрестности $U_{x(\tau)}$. Из непрерывности процесса $x(\cdot)$ вытекает, что $\zeta > 0$. Но по определению τ существуют сколь угодно малые t такие, что $x(\tau+t) \neq \bar{x}(\tau+t)$. Таким образом предположение о конечности τ приводит к противоречию и значит $x(s) = \bar{x}(s)$ для всех $s \geqslant 0$.

Если для каждого $\bar{x}$ существует окрестность $U_{\bar{x}}$ такая, что можно указать такие коэффициенты $\bar{a}(\varphi, x)$ и $\bar{b}(\varphi, x)$, что уравнение (2) имеет решение с этими коэффициентами (т. е. при $a = \bar{a}$ и $b = \bar{b}$) и начальным условием $\bar{x}$, и, кроме того, $\bar{a}(\varphi, x) = a(\varphi, x)$, $\bar{b}(\varphi, x) = b(\varphi, x)$ при $x \in U_{\bar{x}}$, то будем говорить, что уравнение имеет локальное решение. В этом случае можно построить последовательно решение до момента выхода $x(t)$ из всех компактов, т. е. такого момента ζ, что $x(t)\to\infty$ при $t\to\zeta$. Если окажется, что $\zeta=+\infty$, то из существования локального решения будет вытекать существование решения. Приведем одно достаточное условие для того, чтобы $\zeta=+\infty$.

Лемма 1. *Пусть для уравнения* (2) *существует локальное решение и можно указать функцию* Φ, *удовлетворяющую условиям*: а) $\Phi(x)\geqslant 0$, $\Phi(x)\to\infty$ *при* $x\to\infty$; б) *для всякого компакта* $K\subset X$ *существует функция* $\varphi\in D$, *для которой* $\Phi=\varphi$ *при* $x\in K$ *и* $a(\varphi, x)\leqslant\alpha\varphi+\beta$, *где постоянные* $\alpha>0$ и $\beta>0$ *не зависят от компакта* K. *Тогда уравнение* (2) *имеет решение.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для всех $t>0$ $\mathsf{P}\{\zeta>t\}=1$. Пусть τ — момент выхода из компакта K. Поскольку

$$d(e^{-\alpha t}\varphi(x_t))=e^{-\alpha t}[-\alpha\varphi(x_t)+a(\varphi, x_t)]\,dt+$$
$$+e^{-\alpha t}(b(\varphi, x_t), d(w(t))\leqslant e^{-\alpha t}\beta\,dt+e^{-\alpha t}(b(\varphi, x_t), dw(t)),$$
$$d\left(e^{-\alpha t}\left[\varphi(x_t)+\frac{\beta}{\alpha}\right]\right)\leqslant e^{-\alpha t}(b(\varphi, x_t), dw(t)),$$

то при $t_1<t_2\leqslant\tau$

$$e^{-\alpha t_2}\left(\Phi(x_{t_2})+\frac{\beta}{\alpha}\right)-e^{-\alpha t_1}\left(\Phi(x_{t_1})+\frac{\beta}{\alpha}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\int_{t_1}^{t_2}e^{-\alpha s}(b(\varphi, x_s), dw(s)).$$

Обозначим $e^{-\alpha t}\left(\Phi(x_t)+\frac{\beta}{\alpha}\right)=\eta_t$. Тогда $\eta_{t\wedge\tau}$ является супермартингалом:

$$\mathsf{M}\left(\eta_{t_2\wedge\tau}/\mathscr{F}_{t_1\wedge\tau}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\eta_{t_1\wedge\tau}+\mathsf{M}\left(\int_{t_1\wedge\tau}^{t_2\wedge\tau}e^{-\alpha s}(b(\varphi, x_s), dw(s))/\mathscr{F}_{t_1\wedge\tau}\right)=\eta_{t_1\wedge\tau}.$$

Выберем последовательность компактов K_n так, чтобы $\bigcup K_n=X$ и $K_n\subset K_{n+1}$. Если τ_n — момент выхода из компакта K_n, то $\tau_n\uparrow\zeta$, и значит η_t является супермартингалом на $[0, \zeta)$. Поэтому будет супермартингалом последовательность $\eta_{t\wedge\tau_n}$, каково бы ни было t.

Поскольку $\mathsf{M}\eta_{t\wedge\tau_n} \leqslant \mathsf{M}\eta_{t\wedge\tau_1} \leqslant \mathsf{M}\eta_0 = \Phi(x) + \frac{\beta}{\alpha}$ (x — начальное значение x_t), то

$$\mathsf{M}\Phi(x_{t\wedge\tau_n}) \leqslant e^{\alpha t}\left[\Phi(x) + \frac{\beta}{\alpha}\right] - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Пусть $K_n = \{x\colon \Phi(x) \leqslant n\}$. Тогда $\Phi(x_{\tau_n}) = n$ и следовательно

$$n\mathsf{P}\{\tau_n \leqslant t\} \leqslant e^{\alpha t}\left[\Phi(x) + \frac{\beta}{\alpha}\right],$$

$$\mathsf{P}\{\zeta \leqslant t\} \leqslant \frac{1}{n} e^{\alpha t}\left[\Phi(x) + \frac{\beta}{\alpha}\right],$$

каково бы ни было n. Лемма доказана.

Рассмотренная связь между локальным существованием и локальной единственностью, с одной стороны, и существованием и единственностью решения уравнения (2) с другой, позволяет свести изучение уравнения (2) к изучению такого же уравнения, но для компактного фазового пространства. Пусть K — произвольное компактное множество из X и X_1 такое компактное множество, что все точки K являются внутренними точками X_1. Определим функции $\tilde{a}(\varphi, x)$ и $\tilde{b}(\varphi, x)$, $\varphi \in \tilde{D}$ так, чтобы для всех $\varphi \in D$ на X_1 существовало такое $\tilde{\varphi} \in \tilde{D}$, что $\varphi = \tilde{\varphi}$ при $x \in K$ и $\tilde{a}(\tilde{\varphi}, x) = a(\varphi, x)$, $\tilde{b}(\tilde{\varphi}, x) = b(\varphi, x)$ для $x \in K$. Если $\tilde{x}_t$ решение уравнения

$$d\tilde{x}_t = \tilde{a}(\tilde{\varphi}, x_t)\,dt + (\tilde{b}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}_t), dw(t))_H, \quad \tilde{\varphi} \in \tilde{D},$$

а τ — момент выхода из K, то $\tilde{x}_t$ при $t \leqslant \tau$ будет также решением уравнения (2). В дальнейшем в этом параграфе предполагается, что X является компактом.

Теорема единственности. *Пусть существует такое множество $D_0 \subset D$ функций, разделяющее точки из X, что при некотором l выполнено следующее условие: каковы бы ни были две случайные величины ξ и η со значениями в X при $\varphi \in D_0$,*

$$\mathsf{M}\left(|a(\varphi, \xi) - a(\varphi, \eta)|^2 + |b(\varphi, \xi) - b(\varphi, \eta)|_H^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant l \sup_{\psi \in D_0} \mathsf{M}\,|\psi(\xi) - \psi(\eta)|^2. \qquad (4)$$

Тогда решение уравнения (2) *единственно.*

Доказательство. Пусть x_t и $\bar{x}_t$ — два решения уравнения (2) с одним и тем же начальным значением.

Тогда при $\varphi \in D_0$

$$\mathsf{M}(\varphi(x_t)-\varphi(\bar{x}_t))^2=\mathsf{M}\left(\int_0^t [a(\varphi,\ x_s)-a(\varphi,\ \bar{x}_s)]\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^t (b(\varphi,\ x_s)-b(\varphi,\ \bar{x}_s),\ dw(s)\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant 2t\int_0^t \mathsf{M}[a(\varphi,\ x_s)-a(\varphi,\ \bar{x}_s)]^2\,ds+$$

$$+\int_0^t \mathsf{M}\,|\,b(\varphi,\ x_s)-b(\varphi,\ \bar{x}_s)\,|_H^2\,ds\leqslant$$

$$\leqslant(2t+1)\,l\int_0^t \sup_{\psi\in D_0}\mathsf{M}\,|\,\psi(x_s)-\psi(\bar{x}_s)\,|^2\,ds.$$

Следовательно, при $t\leqslant T$

$$\sup_{\varphi\in D_0}\mathsf{M}\,|\,\varphi(x_t)-\varphi(\bar{x}_t)\,|^2\leqslant$$

$$\leqslant(2T+1)\,l\int_0^t \sup_{\varphi\in D_0}\mathsf{M}\,|\,\varphi(x_s)-\varphi(\bar{x}_s)\,|^2\,ds.$$

Полагая $\alpha(t)=\sup\limits_{\varphi\in D_0}\mathsf{M}\,|\,\varphi(x_t)-\varphi(\bar{x}_t)\,|^2$, $l_1=(2T+1)\,l$, будем иметь

$$\alpha(t)\leqslant l_1\int_0^t \alpha(s)\,ds,$$

откуда $\alpha(t)=0$. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (4) является обобщением условия Липшица на коэффициенты уравнения, если пространство является евклидовым. В этом случае H также конечномерно,

$$a(\varphi,\ x)=\sum \alpha_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\sum \beta_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j};$$

$$b(\varphi,\ x)=\sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}b_i(x),$$

где $b_i(x) \in H$. Возьмем в качестве D_0 координатные функции $\varphi_i(x) = x_i$. Тогда

$$|a(\varphi_i, x) - a(\varphi_i, y)|^2 + |b(\varphi_i, x) - b(\varphi_i, y)|_H^2 = \\ = |a_i(x) - a_i(y)|^2 + |b_i(x) - b_i(y)|_H^2.$$

Если правая часть не превосходит $l|x-y|^2$ при всех x, y, то условие (4) будет выполнено.

Замечание 2. Как уже обсуждалось выше, достаточно доказывать локальную единственность. Поэтому достаточно требовать, чтобы для каждой замкнутой окрестности можно было указать такое множество D_0, что (4) выполняется для случайных величин ξ и η, принимающих значения из этой окрестности.

Перейдем к доказательству существования. Нам потребуются некоторые вспомогательные предложения, относящиеся к анализу.

Лемма 2. *Пусть X — компакт с расстоянием r, $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из C_X, разделяющая точки X, $D \subset C_X$ — некоторое компактное множество. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое n, что какова бы ни была $\varphi \in D$, найдется непрерывная функция $F(s_1, \ldots, s_n)$ на R^n, для которой*

$$\sup_{x \in X} |\varphi(x) - F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через $K_n \subset R^n$ образ X при отображении $x \to (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Очевидно, что K_n компакт и K_n есть образ K_{n+1} при проектировании R^{n+1} на R^n: $(s_1, \ldots, s_{n+1}) \to (s_1, \ldots, s_n)$. Определим множества

$$\Delta_{s_1, \ldots, s_n} = \{x: \varphi_1(x) = s_1, \ldots, \varphi_n(x) = s_n\}.$$

Пусть $d(\Delta_{s_1, \ldots, s_n})$ — диаметр множества $\Delta_{s_1, \ldots, s_n}$; $\delta_n(x) = d(\Delta_{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)})$. $\bigcap_n \Delta_{s_1, \ldots, s_n}$ для всякой последовательности точек $\{s_k\}$ либо пусто (если при некотором n точка $(s_1, \ldots, s_n)$ не принадлежит K_n), либо состоит из одной точки x (если $s_k = \varphi_k(x)$, такая точка x единственна, в силу того, что $\{\varphi_n\}$ разделяют точки X). Так как $\Delta_{s_1, \ldots, s_n} \supset \Delta_{s_1, \ldots, s_{n+1}}$, то $d(\Delta_{s_1, \ldots, s_n}) \to 0$ при $n \to \infty$ (если бы это было не так, то множество $\bigcap_n \Delta_{s_1, \ldots, s_n}$ содержало бы по крайней мере две точки). Значит $\delta_n(x) \downarrow 0$. Покажем, что функция $\delta_n(x)$ полунепрерывна сверху, т. е. что $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} \delta_n(x) \leqslant \delta_n(x_0)$.

Пусть

$$\Delta^{\gamma}_{s_1, \ldots, s_n} = \{x: |\varphi_1(x) - s_1| \leqslant \gamma, \ldots, |\varphi_n(x) - s_n| \leqslant \gamma\}.$$

Тогда

$$\Delta_{s_1, \ldots, s_n} = \bigcap_{\gamma > 0} \Delta^{\gamma}_{s_1, \ldots, s_n}$$

и

$$d(\Delta_{s_1, \ldots, s_n}) = \lim_{\gamma \downarrow 0} d\left(\Delta^{\gamma}_{s_1, \ldots, s_n}\right).$$

Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\gamma > 0$, что

$$d\left(\Delta^{\gamma}_{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)}\right) \leqslant d\left(\Delta_{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)}\right) + \varepsilon.$$

С другой стороны, существует такое $\delta > 0$, что при $r(x, x_0) < \delta$ $|\varphi_k(x) - \varphi_k(x_0)| < \gamma$, $k = 1, \ldots, n$. Но тогда

$$\Delta_{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)} \subset \Delta^{\gamma}_{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)},$$

$$\delta_n(x) \leqslant d\left(\Delta^{\gamma}_{\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0)}\right) \leqslant \delta_n(x_0) + \varepsilon.$$

Из этого неравенства и вытекает полунепрерывность $\delta_n(x)$ сверху. По теореме Дини монотонно убывающая к нулю последовательность полунепрерывных сверху функций на компакте сходится к нулю равномерно. Значит для всякого $\rho > 0$ можно указать такое n, что $\sup\limits_{x \in X} \delta_n(x) < \rho$. Выберем в $\Delta_{s_1, \ldots, s_n}$ произвольную точку $\hat{x}_{s_1, \ldots, s_n}$ и положим

$$F_1(s_1, \ldots, s_n) = \varphi(\hat{x}_{s_1, \ldots, s_n}).$$

Тогда

$$|F_1(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) - \varphi(x)| \leqslant \\ \leqslant \sup_{y \in \Delta_{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)}} |\varphi(y) - \varphi(\hat{x}_{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)})| \leqslant \\ \leqslant \sup_{r(x_1, x_2) < \rho} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|.$$

Оценим колебание функции $F(s_1, \ldots, s_n)$ в точке $(s_1^0, \ldots, s_n^0) \in K_n$. Возьмем $\gamma > 0$ и пусть точка $(s_1, \ldots, s_n) \in K_n$ лежит на расстоянии, не превосходящем γ, от точки $(s_1^0, \ldots, s_n^0)$. Тогда $\Delta_{s_1, \ldots, s_n} \subset \Delta^{\gamma}_{s_1^0, \ldots, s_n^0}$. Поскольку выбором γ можно сделать диаметр $\Delta^{\gamma}_{s_1^0, \ldots, s_n^0}$ сколь угодно близким к диаметру $\Delta_{s_1^0, \ldots, s_n^0}$, то при достаточно малых γ $d\left(\Delta^{\gamma}_{s_1^0, \ldots, s_n^0}\right) < \rho$. Значит

$r\left(\hat{x}_{s_1,\ldots,s_n}, \hat{x}_{s_1^0,\ldots,s_n^0}\right) < \rho$ (обе эти точки принадлежат $\Delta^{\gamma}_{s_1^0,\ldots,s_n^0}$) и

$$|F_1(s_1, \ldots, s_n) - F_1(s_1^0, \ldots, s_n^0)| = \\ = \left|\varphi\left(\hat{x}_{s_1,\ldots,s_n}\right) - \varphi\left(\hat{x}_{s_1^0,\ldots,s_n^0}\right)\right| \leqslant \\ \leqslant \sup_{r(x_1, x_2)<\rho} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|.$$

Таким образом колебание функции $F(s_1, \ldots, s_n)$ в любой точке не превосходит величины

$$\omega_\rho(\varphi) = \sup_{r(x_1, x_2)<\rho} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|.$$

Поэтому для всякого $\varepsilon_1 > 0$ можно указать такую непрерывную функцию $F(s_1, \ldots, s_n)$, заданную на K_n, что

$$\sup_{(s_1,\ldots,s_n)\in K_n} |F(s_1, \ldots, s_n) - F_1(s_1, \ldots, s_n)| < 2(\omega_\rho(\varphi) + \varepsilon_1).$$

Эту функцию можно построить, например, следующим образом. Поскольку колебание функции в точке есть нижняя грань колебаний функции в окрестности, содержащей точку, а K_n — компакт, то можно указать конечное число сфер в R^n, покрывающих K_n таких, что колебание функции φ в каждой сфере не превосходит $\omega_\rho(\varphi) + \varepsilon_1$. Выберем теперь конечное множество точек так, чтобы каждая сфера имела по крайней мере одну точку, при этом и покрытие и множество точек должно содержать минимальное число элементов. Полигональная функция, значения которой в точке $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$ выбранного множества совпадают со значениями F_1 в одной из точек сферы, которой принадлежит $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$, будет искомой.

Так как D равностепенно непрерывное множество функций, то выбирая $\rho > 0$ так, чтобы $\omega_\rho(\varphi) < 3\varepsilon/4$ при $\varphi \in D$, а затем n так, чтобы $\sup\limits_{x\in X} \delta_n(x) < \rho$, будем иметь для $\varepsilon_1 = \varepsilon/8$

$$|\varphi(x) - F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))| < \\ < |\varphi(x) - F_1(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))| + 2\omega_\rho(\varphi) + 2\varepsilon_1 \leqslant \\ \leqslant 3\omega_\rho(\varphi) + \varepsilon/4 \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Лемма без всякого изменения доказательства переносится на случай, когда D состоит из функций, принимающих значения в гильбертовом пространстве H. Нужно только под $\omega_\rho(\varphi)$ понимать величину

$$\omega_\rho(\varphi) = \sup_{r(x,y)<\rho} |\varphi(x) - \varphi(y)|_H.$$

Замечание 2. Функция из K_n в X $(s_1, \ldots, s_n) \to \to \hat{x}_{s_1,\ldots,s_n}$ может быть построена с помощью аксиомы выбора. Она представляет собой «ветвь» обратной функции к функции

$$x \to (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

поскольку $\varphi_k(\hat{x}_{s_1,\ldots,s_n}) = s_k$, $k = 1, \ldots, n$. Ни о каких регулярных свойствах такой функции говорить не приходится. В следующей лемме будет показано, что эту функцию можно выбрать борелевской.

Лемма 3. *Пусть $K_n \subset R^n$ есть образ компакта X при отображении $x \to (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Тогда существует борелевская функция $\hat{x}_n(s_1, \ldots, s_n)$, определенная на компакте K_n со значениями в X, для которой $\varphi_k(\hat{x}_n(s_1, \ldots \ldots, s_n)) = s_k$ для $k = 1, \ldots, n$, $(s_1, \ldots, s_n) \in K_n$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию, заданную на произведении компактов $X \times K_n$:

$$G(x;\ s_1, \ldots, s_n) = \sum_1^n (\varphi_k(x) - s_k)^2.$$

Эта функция непрерывна и $\inf\limits_x G(x; s_1, \ldots, s_n) = 0$ $\forall (s_1, \ldots \ldots, s_n) \in K_n$. Поэтому существует борелевская функция $\hat{x}_n(s_1, \ldots, s_n)$, для которой $G(\hat{x}_n(s_1, \ldots, s_n);\ s_1, \ldots, s_n) = 0$ (см. лемму 1.4 в книге Гихман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наукова Думка, 1977.) Лемма доказана.

Замечание. Как вытекает из доказательства леммы 2, колебание функции $\hat{x}_n(s_1, \ldots, s_n)$ в любой точке K_n не превосходит $\sup\limits_{(s_1,\ldots,s_n)} d(\Delta_{s_1,\ldots,s_n}) = \sup\limits_x \delta_n(x)$ и эта величина стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема существования. *Пусть существуют такое счетное множество $D_0 \subset D$, $D_0 = \{\varphi_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$, разделяющее точки X, и такая последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$, что при некотором l выполнено следующее условие: каковы бы ни были две случайных величины ξ и η со зна-*

чениями в X,

$$\mathsf{M}\left(|a(\varphi_k, \xi)-a(\varphi_k, \eta)|^2+|b(\varphi_k, \xi)-b(\varphi_k, \eta)|_H^2\right)\leqslant$$
$$\leqslant l\sup_{j\leqslant n}\mathsf{M}\,|\varphi_j(\xi)-\varphi_j(\eta)|^2+\varepsilon_n$$

для $k\leqslant n$. *Тогда для всех* $x\in X$ *существует решение уравнения* (2) *с начальным условием* $x_0=x$.

Доказательство. Из леммы 2 и замечания 1 вытекает, что существуют последовательности функций $\{F_{n,k}(s_1, \ldots, s_n)\}$, $\{B_{n,k}(s_1, \ldots, s_n)\}$, определенных на компакте $K_n\subset R^n$ (он указан в лемме 2) и принимающих значения в R и H соответственно, для которых

$$\sup_{x\in X}\{|F_{n,k}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))-a(\varphi_k, x)|+$$
$$+|B_{n,k}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))-b(\varphi_k, x)|_H\}\to 0.$$

Так как непрерывные функции на компактах можно равномерно аппроксимировать дифференцируемыми с ограниченными производными, то не ограничивая общности можно считать, что функции $F_{n,k}(s_1, \ldots, s_n)$ и $B_{n,k}(s_1, \ldots, s_n)$ удовлетворяют по s условию Липшица (постоянная в условии Липшица может зависеть от n и k). Рассмотрим систему стохастических уравнений в R^n:

$$d\sigma_k^{(n)}(t, \omega)=F_{n,k}(\sigma_1^{(n)}(t, \omega), \ldots, \sigma_n^{(n)}(t, \omega))\,dt+$$
$$+(B_{n,k}(\sigma_1^{(n)}(t, \omega), \ldots, \sigma_n^{(n)}(t, \omega)), dw(t))_H. \quad (5)$$

Поскольку коэффициенты системы (5) удовлетворяют условию Липшица, то она имеет и притом единственное решение. Пусть далее $\hat{x}_n(s_1, \ldots, s_n)$ — борелевская функция, для которой

$$\varphi_k(\hat{x}_n(s_1, \ldots, s_n))=s_k,\quad k=1, \ldots, n;\quad (s_1, \ldots, s_n)\in K_n,$$

существование такой функции установлено в лемме 3. Обозначим через $x(t, \omega)$ случайный процесс, со значениями в X, определяемый равенством

$$x_n(t, \omega)=\hat{x}_n(\sigma_1^{(n)}(t, \omega), \ldots, \sigma_n^{(n)}(t, \omega)).$$

Пусть далее $a_n(\varphi_k, x)=F_{n,k}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $b_n(\varphi_k, x)=$ $=B_{n,k}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ при $k\leqslant n$. Обозначим через $D_n=$ $=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Из (5) вытекает такое соотношение для процесса $x_n(t, \omega)$:

$$d\varphi(x_n(t, \omega)) = a_n(\varphi, x_n(t, \omega))\,dt + \\ + (b_n(\varphi, x_n(t, \omega)), dw(t))_H, \quad \varphi \in D_n, \tag{6}$$

$$x_n(0, \omega) = \hat{x}_n(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Обозначим $\delta_n = \sup\limits_{y \in X} \delta_n(y)$. Как было показано при доказательстве леммы 2, $\delta_n \downarrow 0$, а из леммы 3 вытекает, что

$$r(\hat{x}_n(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), x) \leqslant \delta_n.$$

Оценим для $k \leqslant n$ и $m > n$ разность $\varphi_k(x_n(t, \omega)) - \varphi_k(x_m(t, \omega))$. Имеем

$$\varphi_k(x_n(t, \omega)) - \varphi_k(x_m(t, \omega)) = \varphi_k(x_n(0, \omega)) - \varphi_k(x_m(0, \omega)) + \\ + \int_0^t [a_n(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - a_m(\varphi_k, x_m(s, \omega))]\,ds + \\ + \int_0^t (b_n(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - b_m(\varphi_k, x_m(s, \omega)), dw(s))_H.$$

При оценках интегралов будем использовать обозначения $\sup\limits_x \{|a_n(\varphi_k, x) - a(\varphi_k, x)|^2 + |b_n(\varphi_k, x) - b(\varphi_k, x)|_H^2\} = \varepsilon_{n,k}$. По построению $\varepsilon_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$ для всех k. Имеем

$$\int_0^t [a_n(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - a_m(\varphi_k, x_m(s, \omega))]\,ds = \\ = \int_0^t [a(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - a(\varphi_k, x_m(s, \omega))]\,ds + \\ + \int_0^t [a_n(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - a(\varphi_k, x_n(s, \omega))]\,ds + \\ + \int_0^t [a(\varphi_k, x_m(s, \omega)) - a_m(\varphi_k, x_m(s, \omega))]\,ds = \\ = \int_0^t [a(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - a(\varphi_k, x_m(s, \omega))]\,ds + O\left(t\left(\sqrt{\varepsilon_{nk}} + \sqrt{\varepsilon_{mk}}\right)\right).$$

Аналогично можем получить оценку

$$\int_0^t (b_n(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - b_m(\varphi_k, x_m(s, \omega)), dw(s))_H =$$
$$= \int_0^t (b(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - b(\varphi_k, x_m(s, \omega)), dw(s))_H + \alpha,$$

где $\mathsf{M}\alpha^2 = O(t(\varepsilon_{nk} + \varepsilon_{mk}))$. Замечая, наконец, что $\varphi_k(x_n(0, \omega)) = \varphi_k(x) = \varphi_k(x_m(0, \omega))$, убеждаемся, что для любого $T > 0$ существует c_T такое, что для $t \leqslant T$ справедлива оценка

$$\mathsf{M}[\varphi_k(x_n(t, \omega)) - \varphi_k(x_m(t, \omega))]^2 \leqslant c_T(\varepsilon_{nk} + \varepsilon_{mk} +$$
$$+ \mathsf{M}\int_0^t (|a(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - a(\varphi_k, x_m(s, \omega))|^2 +$$
$$+ |b(\varphi_k, x_n(s, \omega)) - b(\varphi_k, x_n(s, \omega)|_H^2) ds.$$

Следовательно, каково бы ни было $r < n < m$

$$\sup_{k \leqslant r} \mathsf{M}[\varphi_k(x_n(t, \omega)) - \varphi_k(x_m(t, \omega))]^2 \leqslant c_T(\sup_{k \leqslant r}(\varepsilon_{nk} + \varepsilon_{mk}) +$$
$$+ l\int_0^t [\sup_{j \leqslant r} \mathsf{M}(\varphi_j(x_n(s, \omega)) - \varphi_j(x_m(s, \omega)))^2 + \varepsilon_r]\, ds).$$

Из последнего неравенства вытекает, что при некоторых c_1 и c_2, зависящих от T,

$$\sup_{k \leqslant r} \mathsf{M}[\varphi_k(x_n(t, \omega)) - \varphi_k(x_m(t, \omega))]^2 \leqslant$$
$$\leqslant c_1\left(\sup_{k \leqslant r}(\varepsilon_{nk} + \varepsilon_{mk}) + \varepsilon_r\right) e^{c_2 t}.$$

Поэтому при любом r

$$\lim_{n, m \to \infty} \sup_{k \leqslant r} \mathsf{M}[\varphi_k(x_n(t, \omega)) - \varphi_k(x_m(t, \omega))]^2 = O(\varepsilon_r).$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$, убеждаемся, что для всех k и T

$$\lim_{n, m \to \infty} \sup_{t \leqslant T} \mathsf{M}[\varphi_k(x_n(t, \omega)) - \varphi_k(x_m(t, \omega))]^2 = 0. \tag{7}$$

Из этого соотношения вытекает, что $x_n(t, \omega)$ при $n \to \infty$ сходится в X по вероятности к некоторому пределу. Действительно, введем в X новую метрику

$$r_1(x, y) = \sum \alpha_k |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)|,$$

где $\alpha_k > 0$ выбраны так, что $\sum \alpha_k \|\varphi_k\| < \infty$ (если $r_1(x, y) = 0$, то $x = y$; это вытекает из того, что $\{\varphi_k\}$ разделяет точки X). Очевидно, что $r_1(x, y) \to 0$ при $r(x, y) \to 0$. Справедливо и обратное: если $r_1(x, y) \to 0$, то и $r(x, y) \to 0$ (если бы это было не так, то в силу компактности X нашлись бы последовательности $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ такие, что $r(x_n, y_n)$ не стремится к нулю, т. е. $r(x_0, y_0) > 0$, а $r_1(x_n, y_n) \to 0$, т. е. $\varphi_k(x_0) = \varphi_k(y_0)\ \forall k$). Из (6) вытекает, что

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \sup_{t \leqslant T} \mathsf{M} r_1(x_n(t, \omega), x_m(t, \omega)) = 0,$$

т. е. $x_n(t, \omega)$ сходится по вероятности в метрике r_1. Но тогда $x_n(t, \omega)$ сходится по вероятности и в метрике r. Обозначим этот предел $x(t, \omega)$. Так как $a_n(\varphi_k, x)$ равномерно сходится к $a(\varphi_k, x)$, а $x_n(t, \omega)$ сходится по вероятности к $x(t, \omega)$ и $a(\varphi_k, x)$ непрерывная функция, то $a_n(\varphi_k, x_n(t, \omega)) \to$ $\to a(\varphi_k, x(t, \omega))$ по вероятности. Точно так $b_n(\varphi_k, x_n(t, \omega)) \to$ $\to b(\varphi_k, x(t, \omega))$ по вероятности в H. Переписав соотношение (6) в проинтегрированной форме

$$\varphi_k(x_n(t, \omega)) = \varphi_k(x) + \int_0^t a_n(\varphi_k, x_n(s, \omega))\, ds + \int_0^t (b_n(\varphi_k, x_n(s, \omega)), dw(s))_H, \quad k \leqslant n,$$

а затем переходя к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что

$$\varphi_k(x(t, \omega)) = \varphi_k(x) + \int_0^t a(\varphi_k, x(s, \omega))\, ds + \int_0^t (b(\varphi_k, x(s, \omega)), dw(s))_H$$

для всех k. Если $x(t, \omega)$ выбрать сепарабельным, то $\varphi_k(x(t, \omega))$ непрерывно для всех k. Следовательно $x(t, \omega)$ непрерывно в метрике r_1, а поэтому непрерывно и в метрике r. Теорема доказана.

Замечание. В этом случае, когда выполнены условия и теоремы существования и теоремы единственности, то решение будет однородным марковским процессом (это устанавливается так же, как и в конечномерном евклидовом пространстве). Поскольку для $\varphi \in D$

$$\mathsf{M}\varphi(x(t, \omega)) = \varphi(x(0, \omega)) + \int_0^t \mathsf{M}a(\varphi, x(s, \omega))\, ds,$$

то эти функции входят в область определения инфинитезимального оператора процесса и $a(\varphi, x)$ является значением этого оператора. Легко убедиться, что каковы бы ни были $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in D$ и дважды непрерывно дифференцируемая функция на R^n $F(s_1, \ldots, s_n)$, инфинитезимальный оператор процесса определен на функции $F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ и совпадает с выражением

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} F \cdot a(\varphi_k, x) + \frac{1}{2} \sum_{k,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_k \partial \varphi_j} F \cdot (b(\varphi_k, x), b(\varphi_j, x))_H.$$

Проанализируем связь между условиями теорем существования и единственности. Поскольку пространство C_X непрерывных функций на компакте X сепарабельно, то во всяком множестве непрерывных функций можно выбрать счетное всюду плотное множество. При этом, если множество D_0 заменить на некоторое плотное в нем множество $\hat{D}_0$, то условие (4) теоремы единственности все равно будет выполнено. Таким образом D_0 и в теореме единственности можно считать счетным. Предположим, что $D_0 = \{\varphi_n, n = 1, 2, \ldots\}$. Если выполнено условие теоремы существования, то будут выполнены и условия теоремы единственности, так как каково бы ни было k,

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\{|a(\varphi_k, \xi) - a(\varphi_k, \eta)|^2 + |b(\varphi_k, \xi) - b(\varphi_k, \eta)|_H^2\} &\leqslant \\ \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \{l \sup_{j\leqslant n} \mathsf{M}\,|\varphi_j(\xi) - \varphi_j(\eta)|^2 + \varepsilon_n\} &= \\ = l \sup_n \mathsf{M}\,|\varphi_n(\xi) - \varphi_n(\eta)|^2&. \end{aligned}$$

Пусть теперь M множество вероятностных мер на X^2. Это выпуклое множество и $\int |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|^2 \mu(dx, dy)$ есть неотрицательный линейный функционал, непрерывный в топологии слабой сходимости. В этой топологии M является компактом. Поскольку

$$\sup_{j\leqslant n} \int (\varphi_j(x) - \varphi_j(y))^2 \mu(dx, dy)$$

возрастает с n и непрерывно по μ в топологии слабой сходимости, то предел при $n \to \infty$

$$\sup_j \int |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)|^2 \mu(dx, dy)$$

полунепрерывная снизу (по μ) функция. Если она окажется непрерывной, то тогда

$$\sup_{j \leq n} \int [\varphi_j(x) - \varphi_j(y)]^2 \mu(dx, dy) \to \sup \int [\varphi_j(x) - \varphi_j(y)]^2 \mu(dx, dy)$$

сходится в силу теоремы Дини равномерно по μ и поэтому

$$\varepsilon_n = \sup_{\mu \in M} \left(\sup_j \int [\varphi_j(x) - \varphi_j(y)]^2 \mu(dx, dy) - \sup_{j \leq n} \int [\varphi_j(x) - \varphi_j(y)]^2 \mu(dx, dy) \right) \downarrow 0.$$

Итак, для того чтобы условия теорем существования и единственности совпадали в случае счетного $D_0 = \{\varphi_n, n \geq 1\}$, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\Phi(\mu) = \sup_n \int [\varphi_n(x) - \varphi_n(y)]^2 \mu(dx, dy)$$

была непрерывна по μ. Для этого достаточно, например, чтобы семейство функций $\{\varphi_n\}$ было равностепенно непрерывным.

Теоремы существования и единственности очевидным образом переносятся на уравнения с коэффициентами, зависящими от времени. Предположим, что D — некоторое подмножество C_X, разделяющее точки X, и заданы функции $a_s(\varphi, x)$, $b_s(\varphi, x)$ для всех $s \geq 0$, удовлетворяющих условиям теоремы существования (теоремы единственности). Если эти функции непрерывны по s, x при фиксированном $\varphi \in D$, то уравнение

$$d\varphi(x_t) = a_t(\varphi, x_t)\, dt + (b_t(\varphi, x_t), dw_t)_H, \quad \varphi(x_0) = \varphi(x), \quad \varphi \in D \tag{8}$$

имеет (единственное) решение. Это решение будет X-значным марковским процессом.

§ 4. Предельные теоремы для решений стохастических уравнений

Существование решения стохастического уравнения в предыдущем параграфе доказывалось с помощью предельного перехода от уравнений, для которых решение заведомо существует. Предельный переход позволяет строить решения при гораздо более общих предположениях на коэффициенты уравнения. Кроме того, предельный переход в стохастическом дифференциальном уравнении, т. е. исследование характера непрерывной зависимости решения уравнения от коэффициентов, представляет самостоятельный интерес.

Установим предварительно условия компактности для семейства мер, отвечающих решениям стохастических дифференциальных уравнений. Пусть X — компакт, $C_{[0, T]}(X)$ — пространство X-значных непрерывных функций, определенных на $[0, T]$. Метризуем это пространство, полагая

$$\rho(x(\cdot),\ y(\cdot)) = \sup_{t \leqslant T} r(x(t),\ y(t)),$$

где r — метрика в X. Пусть далее Θ — произвольное параметрическое множество и для $\theta \in \Theta$ определены меры μ^θ на $C_{[0, T]}(X)$. Поскольку $C_{[0, T]}(X)$ является полным сепарабельным метрическим пространством, то определено понятие слабой сходимости для мер μ^θ, а следовательно можно говорить о слабой компактности семейства мер $\{\mu^\theta, \theta \in \Theta\}$. Известны общие условия слабой компактности семейства мер на полном метрическом сепарабельном пространстве. Применительно к пространству $C_{[0, T]}(X)$ они имеют следующий вид:

Условие слабой компактности в $C_{[0, T]}(X)$. *Для всякого* $\delta > 0$

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\theta} \mu^\theta\{x(\cdot):\ \sup_{|t_1 - t_2| \leqslant h} r(x(t_1),\ x(t_2)) > \delta\} = 0. \quad (1)$$

Пусть меры μ^θ отвечают решениям стохастического дифференциального уравнения

$$d\varphi(x_t^\theta) = a^\theta(\varphi,\ x_t^\theta)\,dt + (b^\theta(\varphi,\ x_t^\theta),\ dw_t)_H,\ \varphi \in D^\theta,\ x_0^\theta = x^\theta, \quad (2)$$

где функции $a^\theta(\varphi, x)$ и $b^\theta(\varphi, x)$ определены на $D^\theta \times X$, принимают значения из R и H соответственно, линейны по φ и такие, что уравнение (2) имеет решение, $D^\theta \subset C_X$

и функции из D^θ разделяют точки. Для всякого борелевского множества F из $C_{[0, T]}(X)$ полагаем

$$\mu^\theta(F) = \mathsf{P}\{x^\theta \in F\}.$$

Найдем условия слабой компактности для мер указанного вида.

Теорема 1. *Пусть для каждого $\theta \in \Theta$ можно указать такую последовательность функций $\{\varphi_k^\theta \in D^\theta\}$, что*

1) $\sup\limits_\theta \sup\limits_x \{|a^\theta(\varphi_k^\theta, x)| + |b^\theta(\varphi_k^\theta, x)|_H\} < \infty$ *для всех* k;

2) *если* $\delta_n(\theta, x, \varepsilon)$ *есть диаметр множества*

$$\{y\colon |\varphi_k^\theta(y) - \varphi_k^\theta(x)| \leqslant \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n\},$$

то для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{x \in X} \delta_n(\theta, x, \varepsilon) = 0.$$

Тогда семейство мер $\{\mu^\theta, \theta \in \Theta\}$, отвечающих решениям уравнения (2), *компактно.*

Доказательство. Положим

$$\eta_k^\theta(t) = \int_0^t a^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta)\, ds + \int_0^t (b_\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta), dw(s))_H.$$

Пусть

$$\gamma_k = \sup_\theta \sup_x \{|a^\theta(\varphi_k^\theta, x)| + |b^\theta(\varphi_k, x)|_H\}.$$

При всех $s_0 \in [0, T]$ и $h < \rho/\gamma_k$

$$\mathsf{P}\{\sup_{s_0 \leqslant t \leqslant s_0 + h} |\eta_k^\theta(t) - \eta_k^\theta(s_0)| > \rho\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left\{\sup_{s_0 \leqslant t \leqslant s_0 + h} \left|\int_{s_0}^t (b^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta), dw(s))_H\right| > \rho - h\gamma_k\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{M}\left(\int_{s_0}^{s_0+h} (b^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta), dw(s)\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 (\rho - h\gamma_k)^{-4}$$

(мы воспользовались известными неравенствами для мартингалов; см. [11], т. 1, с. 78, следствие).

Используя то, что

$$\int_{s_0}^t (b^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta), dw(s))_H = \int_{s_0}^t |b^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta)|_H\, dw_1(s),$$

где

$$w_1(t) - w_1(s_0) = \int_{s_0}^{t} \frac{1}{|b^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta)|_H} (b^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta), dw(s))_H$$

и поэтому $w_1(t) - w_1(s_0)$ — винеровский процесс в R, убеждаемся на основании известного неравенства для одномерных стохастических интегралов (см. [31], гл. 2, § 2, теорема 4), что

$$\mathsf{M}\left[\int_{s_0}^{s_0+h} (b^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta), dw(s))_H\right]^4 \leqslant 36\gamma_k^4 h^2.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\sup_{s_0 \leqslant t \leqslant s_0+h} |\eta_k^\theta(t) - \eta_k^\theta(s_0)| > \rho\} \leqslant \frac{4^4\gamma_k^4 h^2}{9(\rho - h\gamma_k)^4}.$$

Если найдутся такие t_1 и t_2, что $|t_2 - t_1| \leqslant h$ и $|\eta_k^\theta(t_1) - \eta_k^\theta(t_2)| > 2\rho$, то взяв такое m, что $mh \leqslant t_1 \leqslant mh + 2h$ и $mh \leqslant t_2 \leqslant mh + 2h$, будем иметь

$$2\rho < |\eta_k^\theta(t_1) - \eta_k^\theta(mh)| + |\eta_k^\theta(t_2) - \eta_k^\theta(mh)|,$$

так что

$$\sup_{mh \leqslant t \leqslant mh+2h} |\eta_k^\theta(t) - \eta_k^\theta(mh)| > \rho.$$

Поэтому

$$\mathsf{P}\{\sup_{|t_1-t_2| \leqslant h} |\eta_k^\theta(t_1) - \eta_k^\theta(t_2)| > 2\rho\} \leqslant \sum_{mh<T} \mathsf{P}\{\sup_{mh \leqslant t \leqslant mh+2h} |\eta_k^\theta(t) - \eta_k^\theta(mh)| > \rho\} \leqslant \frac{T}{h}\cdot\frac{4^4}{9}\cdot\frac{\gamma_k^4(2h)^2}{(\rho - 2h\gamma_k)^4} \leqslant \frac{4^7}{9} T\gamma_k^4\rho^{-4}h,$$

если только $h \leqslant \rho/(4\gamma_k)$. Обозначим множитель при h в правой части последнего неравенства через $\alpha_k(2\rho)$. Пусть n и ε выбраны так, что $\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{x\in X} \delta_n(\theta, x, \varepsilon) \leqslant \delta$. Тогда, если $|\varphi_k^\theta(x) - \varphi_k^\theta(y)| \leqslant \varepsilon$ при $k \leqslant n$, то $r(x, y) \leqslant \delta$. Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\sup_{|t_1-t_2| \leqslant h} r(x_{t_1}^\theta, x_{t_2}^\theta) > \delta\} \leqslant \mathsf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n}\{\sup_{|t_1-t_2| \leqslant h} |\varphi_k^\theta(x_{t_1}^\theta) - \varphi_k^\theta(x_{t_2}^\theta)| > \varepsilon\}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\{\sup_{|t_1-t_2| \leqslant h} |\varphi_k^\theta(x_{t_1}^\theta) - \varphi_k^\theta(x_{t_2}^\theta)| > \varepsilon\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)h,$$

если только $h \leqslant \frac{\varepsilon}{8 \max\limits_{k \leqslant n} \gamma_k}$. Значит для всех $\delta > 0$

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{P}\{\sup_{|t_1 - t_2| \leqslant h} r(x_{t_1}^\theta, x_{t_2}^\theta) > \delta\} = 0,$$

т. е. выполнено условие 1). Теорема доказана.

Замечание. Важный частный случай семейства стохастических дифференциальных уравнений получим, когда $D^\theta = D$ от θ не зависит. Как отмечалось в предыдущем параграфе, всегда найдется последовательность $\{\varphi_k, k = 1, 2, \ldots\}$, разделяющая точки X. Если положить $\varphi_k^\theta = \varphi_k$, то условие 2) автоматически выполняется. Следовательно, для компактности семейства $\{\mu_\theta\}$ достаточно, чтобы для всех k было

$$\sup_\theta \sup_x \{|a^\theta(\varphi_k, x)| + |b^\theta(\varphi_k, x)|_H\} < \infty.$$

Рассмотрим теперь вид предельных точек для слабокомпактного семейства мер $\{\mu^\theta, \theta \in \Theta\}$ при некоторых условиях на коэффициенты стохастического уравнения. Очевидно достаточно рассмотреть лишь случай счетного Θ.

Теорема 2. *Пусть $\theta = 1, 2, \ldots$ и последовательность мер μ^θ при $\theta \to \infty$ слабо сходится к некоторой мере μ на $C_{[0, T]}(X)$*, где μ *отвечают решению уравнения* (2), *причем $D^\theta = D$ не зависит от θ, и для всех $\varphi \in D$ существуют непрерывные по x функции $a(\varphi, x)$ и $b(\varphi, x)$ такие, что*

$$\lim_{\theta \to \infty} \sup_x \{|a(\varphi, x) - a^\theta(\varphi, x)| + |b(\varphi, x) - b^\theta(\varphi, x)|_H\} = 0. \quad (3)$$

Тогда мера μ отвечает процессу x_t, для которого при всех $\varphi \in D$ выполнено соотношение

$$d\varphi(x_t) = a(\varphi, x_t)\,dt + (b(\varphi, x_t), dw_t)_H. \quad (4)$$

Доказательство. Покажем, что для всех $\varphi \in D$ процесс

$$\eta_\varphi(t) = \varphi(x_t) - \int_0^t a(\varphi, x_s)\,ds$$

является мартингалом относительно потока $\mathcal{F}_t$, порожденного процессом x_t. Пусть $s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant t_1 < t_2$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная на X^k числовая функция. Из слабой сходимости μ^θ к μ вытекает, что

$$\lim_{\theta\to\infty}\int f(x(\cdot))\,\mu^\theta(dx)=\int f(x(\cdot))\,\mu(dx)$$

для всякой непрерывной ограниченной функции $f(x(\cdot))$, определенной на $C_{[0,T]}(X)$. Поскольку функция

$$\left[\varphi(x(t_2))-\varphi(x(t_1))-\int_{t_1}^{t_2}a(\varphi,\ x(s))\,ds\right]g(x(s_1),\ \ldots,\ x(s_k))$$

непрерывна на $C_{[0,T]}(X)$, то

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\,[\eta_\varphi(t_2)-\eta_\varphi(t_1)]\,g(x_{s_1},\ \ldots,\ x_{s_k})=\\ =\mathsf{M}\left[\varphi(x_{t_2})-\varphi(x_{t_1})-\int_{t_1}^{t_2}a(\varphi,\ x_s)\,ds\right]g(x_{s_1},\ \ldots,\ x_{s_k})=\\ =\lim_{\theta\to\infty}\mathsf{M}\left[\varphi(x^\theta_{t_2})-\varphi(x^\theta_{t_1})-\int_{t_1}^{t_2}a(\varphi,\ x^\theta_s)\,ds\right]g(x^\theta_{s_1},\ \ldots,\ x^\theta_{s_k}).\end{aligned}$$

Из уравнения (2) вытекает, что $\varphi(x^\theta_t)-\int_0^t a^\theta(\varphi,\ x_s)\,ds$ является мартингалом. Следовательно,

$$\mathsf{M}\left[\varphi(x^\theta_{t_2})-\varphi(x^\theta_{t_1})-\int_{t_1}^{t_2}a^\theta(\varphi,\ x^\theta_s)\,ds\right]g(x^\theta_{s_1},\ \ldots,\ x^\theta_{s_k})=0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to\infty}\mathsf{M}\int_{t_1}^{t_2}|a(\varphi,\ x^\theta_s)-a^\theta(\varphi,\ x^\theta_s)|\,ds\leqslant\\ \leqslant(t_2-t_1)\lim_{\theta\to\infty}\sup_x|a(\varphi,\ x)-a^\theta(\varphi,\ x)|=0,\end{aligned}$$

то

$$\mathsf{M}\,[\eta_\varphi(t_2)-\eta_\varphi(t_1)]\,g(x_{s_1},\ \ldots,\ x_{s_k})=0$$

каковы бы ни были k, $s_1<\ldots<s_k\leqslant t_1<t_2$ и непрерывная функция на X^k. Значит

$$\mathsf{M}\,[\eta_\varphi(t_2)-\eta_\varphi(t_1)/\mathscr{F}_{t_1}]=0.$$

Покажем, что взаимная характеристика мартингалов $\eta_{\varphi_1}(t)$ и $\eta_{\varphi_2}(t)$ равна

$$\int_0^t (b(\varphi_1, x_s), b(\varphi_2, x_s))_H\, ds. \tag{5}$$

Для этого достаточно показать, что мартингалом является процесс

$$\eta_{\varphi_1}(t)\,\eta_{\varphi_2}(t) - \int_0^t (b(\varphi_1, x_s), b(\varphi_2, x_s))_H\, ds,$$

т. е. что при $s_1 < s_2 < \ldots < s_k \leqslant t_1 < t_2$

$$\mathsf{M}\Big[\eta_{\varphi_1}(t_2)\,\eta_{\varphi_2}(t_2) - \eta_{\varphi_1}(t_1)\,\eta_{\varphi_1}(t_1) - \\ - \int_{t_1}^{t_2} (b(\varphi_1, x_s), b(\varphi_2, x_s))_H\, ds\Big]\, g(x_{s_1}, \ldots, x_{s_k}) = 0.$$

Для этого воспользуемся непрерывностью на $C_{[0,T]}(X)$ функционала

$$\Big[(\varphi_1(x(t_2)) - \int_0^{t_2} a(\varphi_1, x(s))\,ds)(\varphi_2(x(t_2)) - \\ - \int_0^{t_2} a(\varphi_2, x(s))\,ds) - (\varphi_1(x(t_1)) - \\ - \int_0^{t_1} a(\varphi_1, x(s))\,ds)(\varphi_2(x(t_1)) - \int_0^{t_1} a(\varphi_2, x(s))\,ds) - \\ - \int_{t_1}^{t_2} (b(\varphi_1, x(s)), b(\varphi_2, x(s)))_H\, ds\Big]\, g(x(s_1), \ldots, x(s_k))$$

и тем, что в силу уравнения (2)

$$(\varphi_1(x_t^\theta) - \int_0^t a^\theta(\varphi_1, x_s^\theta)\,ds)(\varphi_2(x_t^\theta) - \int_0^t a^\theta(\varphi_2, x_s^\theta)\,ds) - \\ - \int_0^t (b^\theta(\varphi_1, x_s^\theta), b(\varphi_2, x_s^\theta))_H\, ds$$

является мартингалом. Поэтому

$$\mathsf{M}\Big[\eta_{\varphi_1}(t_2)\,\eta_{\varphi_2}(t_2)-\eta_{\varphi_1}(t_1)\,\eta_{\varphi_2}(t_1)-$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}(b(\varphi_1,\ x_s),\ b(\varphi_2,\ x_s))_H\,ds\Big]g(x_{s_1},\ldots,x_{s_k})=$$
$$=\lim_{\theta\to\infty}\mathsf{M}\Big[\varphi_1(x^\theta_{t_2})\int_0^{t_2}(a^\theta(\varphi_2,\ x^\theta_s)-a(\varphi_2,\ x^\theta_s))\,ds-$$
$$-\varphi_1(x^\theta_{t_1})\int_0^{t_1}(a^\theta(\varphi_2,\ x^\theta_s)-a(\varphi_2,\ x^\theta_s))\,ds+$$
$$+\varphi_2(x^\theta_{t_2})\int_0^{t_2}(a^\theta(\varphi_1,\ x^\theta_s)-a(\varphi_1,\ x^\theta_s))\,ds-$$
$$-\varphi_2(x^\theta_{t_1})\int_0^{t_1}(a^\theta(\varphi_1,\ x^\theta_s)-a(\varphi_1,\ x^\theta_s))\,ds+$$
$$+\int_0^{t_2}a(\varphi_1,\ x^\theta_s)\,ds\int_0^{t_2}a(\varphi_2,\ x^\theta_s)\,ds-\int_0^{t_2}a^\theta(\varphi_1,x^\theta_s)\,ds\int_0^{t_2}a^\theta(\varphi_2,x^\theta_s)\,ds-$$
$$-\int_0^{t_1}a(\varphi_1,\ x^\theta_s)\,ds\int_0^{t_1}a(\varphi_2,\ x^\theta_s)\,ds+\int_0^{t_1}a^\theta(\varphi_1,x^\theta_s)\,ds\int_0^{t_1}a^\theta(\varphi_2,x^\theta_s)\,ds+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\big[(b^\theta(\varphi_1,\ x^\theta_s),\ b^\theta(\varphi_2,\ x^\theta_s))_H-(b(\varphi_1,\ x^\theta_s),\ b(\varphi_2,\ x^\theta_s))_H\big]\,ds\Big]\times$$
$$\times g(x_{s_1},\ldots,x_{s_k})=O\big(\varlimsup_{\theta\to\infty}\sup_x\big\{|a(\varphi_1,\ x)-a^\theta(\varphi_1,\ x)|+$$
$$+|a(\varphi_2,\ x)-a^\theta(\varphi_2,\ x)|+|b(\varphi_1,\ x)-b^\theta(\varphi_1,\ x)|_H+$$
$$+|b(\varphi_2,\ x)-b^\theta(\varphi_2,\ x)|_H\big\}\big)\to 0.$$

Итак мы установили, что $\eta_\varphi(t)$ являются мартингалами относительно потока $\mathscr{F}_t$ и взаимная их характеристика $\eta_{\varphi_1}(t)$ и $\eta_{\varphi_2}(t)$ задается выражением (5). Используя доказательство теоремы 1 § 2 (топология в $\Phi=D$ нужна была лишь для доказательства факторизационного представления (4) § 2, которое в нашем случае имеется в силу формулы (5)), убеждаемся в существовании такого винеровского процесса $w(t)$ в H, что справедлива формула (4). (Заметим, что поскольку мы имеем дело с мерами, то как обозначить указанный процесс, не имеет значения, поэтому мы можем его обозначить так же, как тот процесс, который фигурирует в уравнении (2). Более точно, нужно бы было, обозначив его через $\tilde{w}$, построить новый процесс x такой, что совместное распределение $\tilde{x}$ и w совпадало бы с совместным распределением x и $\tilde{w}$. Этот процесс $\tilde{x}$ и будет удовлетворять соотношению (2). Очевидно, что процессам x и $\tilde{x}$ соответствует одна и та же мера μ.) Теорема доказана.

Замечание. Теорему 2 можно использовать для доказательства существования решения стохастического дифференциального уравнения. Предположим, что для коэффициентов $a(\varphi, x)$ и $b(\varphi, x)$ можно указать такие последовательности $a^\theta(\varphi, x)$ и $b^\theta(\varphi, x)$, $\theta = 1, 2, \ldots$, что уравнение (2) имеет решение, причем $D^\theta = D$ не зависит от θ. Если для некоторого счетного множества $D_0 \subset D$ выполнено условие (4), то тогда выполнены условия теоремы 1 и значит семейство мер $\{\mu^\theta, \theta = 1, 2, \ldots\}$ компактно. Поэтому из последовательности μ^θ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность μ^{θ_k}. Для этой последовательности выполнены условия теоремы 2. Значит предельная мера μ будет соответствовать решению уравнения (4) для $\varphi \in D_0$. Если D_0 таково, что для всех $\varphi \in D$ можно указать такую последовательность $\varphi_n \in D_0$, что $\varphi_n(x)$, $a(\varphi_n, x)$, $b(\varphi_n, x)$ ограничены в совокупности и сходятся соответственно к $\varphi(x)$, $a(\varphi, x)$, $b(\varphi, x)$, то переходя к пределу в равенстве

$$\varphi_n(x_t) - \varphi_n(x_0) = \int_0^t a(\varphi_n, x_s)\,ds + \int_0^t (b(\varphi_n, x_s), dw_s)_H$$

убеждаемся, что уравнение (4) справедливо для всех $\varphi \in D$.

Более интересные результаты получаются, если процессы x_t^θ заданы вообще говоря на различных множествах. Чтобы можно было говорить о сходимости процессов, будем считать, что каждый процесс задан на некотором замкнутом подмножестве X^θ компактного пространства X. Функции из D^θ заданы на X^θ и для процессов x_t^θ выполнено уравнение (2). Поскольку все процессы имеют фазовым пространством X, то к ним применима теорема 1 с единственным и естественным изменением: последовательности $\{\varphi_k^\theta\}$ разделяют точки X^θ.

Теорема 3. *Пусть* $\Theta = \{1, 2, \ldots\}$, x_t^θ *является решением уравнения* (2), *где* D^θ *состоит из функций, опреде-*

ленных на X^θ. *Предположим, что существуют замкнутое подмножество* $X^0 \subset X$, *последовательность непрерывных функций* $S^\theta(x)$, *определенных на* X^θ *и принимающих значения в* X^0, *для которых* $x \in X^0$ $r(S^\theta(x), x) \to 0$ *при* $\theta \to \infty$, *а также для всех* θ *функции* $\{\varphi_k^\theta, \theta = 1, 2, \ldots\}$ *из* D^θ, *для которых выполнены условия:*

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\theta\in\Theta} \sup\limits_{x\in X^\theta} \delta_n(\theta, x, \varepsilon) = 0,$

б) $\sup\limits_{\theta\in\Theta} \sup\limits_{x\in X^\theta} \{|\varphi_k^\theta(x)| + |a^\theta(\varphi_k^\theta(x)| + |b^\theta(\varphi_k^\theta, x)|_H\} < \infty.$

Тогда семейство мер $\{\mu^\theta, \theta \in \Theta\}$, *где* μ^θ *отвечает* x^θ *на* $C_{[0,T]}(X)$, *компактно.*

Если существуют такие последовательности непрерывных функций, определенных на X^0, $\{\varphi_k(x)\}$, $\{a_k(x)\}$, $\{b_k(x)\}$, *принимающих значения из* R, R *и* H *соответственно, что*

$$\lim_{\theta\to\infty} \sup_{x\in X^\theta} \{|\varphi_k^\theta(x) - \varphi_k(S^\theta(x))| + |a^\theta(\varphi_k^\theta, x) - a_k(S^\theta(x))| + |b^\theta(\varphi_k^\theta, x) - b_k(S^\theta x)|_H\} = 0,$$

то всякая предельная мера μ *семейства* $\{\mu^\theta, \theta \in \Theta\}$ *отвечает случайному процессу* x_t, *для которого*

$$d\varphi_k(x_t) = a_k(x_t)\,dt + (b_k(x_t), dw_t)_H, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Доказательство. Компактность семейства $\{\mu^\theta, \theta \in \Theta\}$ вытекает из теоремы 1. Соотношение (6) доказывается аналогично тому, как в теореме 2 доказывалось соотношение (4). Отличие в доказательстве, связанное с тем, что функции φ_k^θ теперь зависят от θ и заданы на различных множествах, проследим, доказав, что $\eta_k(t) = \varphi_k(x_t) - \int_0^t a_k(x_s)\,ds$ является мартингалом.

Поскольку мартингалом является $\varphi_k^\theta(x_t^\theta) - \int_0^t a^\theta(\varphi_k^\theta, x_s)\,ds$, то

$$\mathsf{M}\left[\varphi_k^\theta(x_{t_2}^\theta) - \varphi_k^\theta(x_{t_1}^\theta) - \int_{t_1}^{t_2} a^\theta(\varphi_k^\theta, x_s^\theta)\,ds\right] g(x_{s_1}^\theta, \ldots, x_{s_m}^\theta) = 0,$$

каковы бы ни были m, $s_1 < \ldots < s_m \leqslant t_1 < t_2$ и функция $g(x_1, \ldots, x_m)$, непрерывная на X^m. Поэтому

$$\lim_{\theta\to\infty} \mathsf{M}\Bigg[\varphi_k(S^\theta(x^\theta_{t_2})) - \varphi_k(S^\theta(x^\theta_{t_1})) - \\ - \int_{t_1}^{t_2} a_k(S^\theta(x^\theta_s))\,ds\Bigg] g(S^\theta(x^\theta_{s_1}), \ldots, S^\theta(x^\theta_{s_m})) = 0. \qquad (7)$$

Остается заметить, что последовательность процессов $S^\theta(x^\theta_t)$ также слабо сходится к процессу x_t, так как для любой непрерывной ограниченной функции $f(x(\cdot))$ на $C_{[0,T]}(X)$

$$\lim_{\theta\to\infty} \mathsf{M}\,|f(x^\theta(\cdot)) - f(S^\theta(x^\theta(\cdot)))| = 0.$$

Поэтому предел в левой части (7) равен

$$\mathsf{M}\Bigg[\varphi_k(x_{t_2}) - \varphi_k(x_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_2} a_k(x_s)\,ds\Bigg] g(x_{s_1}, \ldots, x_{s_m})$$

и значит $\eta_k(t)$ — мартингал. Аналогично устанавливается, что взаимная характеристика мартингалов $\eta_k(t)$ и $\eta_i(t)$ равна

$$\int_0^t (b_k(x_s),\ b_i(x_s))_H\,ds.$$

Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3 может быть также, как и теорема 2 (см. замечание к последней), использована для доказательства существования решения стохастического уравнения. При этом существенно то, что компакт X всегда можно аппроксимировать «конечномерными» компактами. Поясним смысл последнего утверждения. Прежде всего X можно вложить изометрично в линейное пространство ограниченных числовых последовательностей $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ с нормой

$$\|\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}\| = \sup_k |\alpha_k|.$$

Это вложение осуществляет функция $x \to \{r(x, x_1), r(x, x_2), \ldots\}$, где $\{x_k\}$ — последовательность, плотная в X. Действительно,

$$r(x, y) = \sup_k |r(x, x_k) - r(y, x_k)|.$$

Поэтому X сразу можно считать компактным множеством некоторого сепарабельного банахова пространства (таким будет замыкание линейной оболочки образа X при указанном вложении). Взяв в качестве X^θ пересечение X с линейной оболочкой конечной $1/\theta$-сети в X, получим компакт, лежащий в конечномерном подпространстве, — его естественно считать конечномерным.

Следствие. *Пусть X — компакт в некотором гильбертовом пространстве, а множество функций D таково, что при $\varphi \in D$ и $\varphi(Px) \in D$, где P — оператор проектирования на некоторое конечномерное подпространство. Если существует такая последовательность конечномерных проекторов P_n, что $P_n x \to x$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} \{|a(\varphi(P_n), P_n x) - a(\varphi, x)| + \\ + |b(\varphi(P_n), P_n x) - b(\varphi, x)|_H\} = 0$$

и на множестве $X^n = P_n X$ стохастическое уравнение

$$d\varphi(P_n x_t^n) = a(\varphi(P_n), P_n x_t^n) + (b(\varphi(P_n), P_n x_t^n), dw_t)_H$$

имеет решение, то уравнение (4) имеет решение.

§ 5. Слабые решения

Решения стохастического уравнения в условиях теоремы единственности (см. § 3) обладают следующим важным свойством: они измеримы относительно потока σ-алгебр $\mathscr{F}_t$, порожденного входящим в уравнение винеровским процессом. Такие решения называются сильными. Если решение не обязательно измеримо относительно $\mathscr{F}_t$ (начальное значение считается неслучайным), то оно называется слабым; в этом случае оно существует на некотором расширении вероятностного пространства, которое может быть получено добавлением к винеровскому процессу w_t независимой равномерно распределенной величины. Последнее утверждение по сути установлено в § 2, где показано, как по семейству распределений построить решение стохастического уравнения и винеровский процесс, при этом нельзя было утверждать, что решение однозначно определяется винеровским процессом, так что решения рассматривались как слабые. Вообще задание слабого решения эквивалентно заданию совместного распределения процессов x_t и w_t. Если слабое решение x_t построено на вероятностном пространстве, порожденном процессом w_t и равномерно распределенной величиной ξ, то существует такая функция $g_t(s, z(\cdot))$, $s \in [0, 1]$, что

$$x_t = g_t(\xi, w(\cdot)).$$

Для всякой другой равномерно распределенной величины $\hat{\xi}$ процесс $\hat{x}_t = g_t(\hat{\xi}, w(\cdot))$ будет также решением. Поэтому на вероятностном пространстве, порожденном $w(\cdot)$, ξ и $\hat{\xi}$, будет два решения, если только $g_t(s, z(\cdot))$ действительно зависит от s. Если решение единственно, то $g_t(s, w(\cdot))$ от s не зависит, и значит x_t — функция лишь $w(\cdot)$, т. е. является сильным решением (см. [11], т. 3, с. 340).

Для слабых решений вводится понятие слабой единственности. Решение уравнения

$$d\varphi(x_t) = a(\varphi, x_t)\,dt + (b(\varphi, x_t), dw(t))_H, \quad \varphi \in D, \; x_0 = x \tag{1}$$

называется слабо единственным, если для всяких двух решений x_t и $\bar{x}_t$ этого уравнения соответствующие им на $C_{[0,\infty)}(X)$ меры совпадают.

Теорема 1. *Пусть X — локально компактное пространство, D — всюду плотно в пространстве C_0 функций $\varphi(x)$, для которых $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$, $a(\varphi, x) \in C_0$, $(b(\varphi, x), h)_H \in C_0$ при $\varphi \in C_0$, $h \in H$. Для того чтобы решение уравнения* (1) *было слабо единственным при любом начальном значении $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая полугруппа операторов T_t на C_0, что $\|T_t\|_t$ локально ограничена и для всех $\varphi \in D$ с $T_t\varphi \in D$:*

$$\frac{d}{dt} T_t\varphi(x) = T_t a(\varphi, x) \tag{2}$$

(*т. е. D входит в область определения D_A инфинитезимального оператора A полугруппы T_t и $A\varphi(x) = a(\varphi, x)$*). *Если X — компакт, решение* (1) *существует и слабо единственно, то x_t является однородным марковским процессом, а отвечающая ему полугруппа операторов удовлетворяет соотношению* (2).

Доказательство. Пусть x_t — решение (1). Тогда

$$d_s T_{t-s}\varphi(x_s) = \left[\frac{d}{ds} T_{t-s}\varphi(y)\right]_{y=x(s)} ds + T_{t-s}[a(\varphi, x_s)]\,ds + \\ + T_{t-s}\left[(b(\varphi, y), dw_s)_H\right]_{y=x_s} \tag{3}$$

и значит $\mathsf{M} d_s T_{t-s}\varphi(x_s)=0$. Поэтому

$$\mathsf{M}[T_t\varphi(x)-\varphi(x_t)]=0, \quad \mathsf{M}\varphi(x_t)=T_t\varphi(x).$$

Поскольку последнее соотношение справедливо на D, а D плотно в C_0, то оно справедливо и для всех $\varphi \in C_0$, в частности при $f \in C_0$ $\mathsf{M}f(x_t)$ как функция начального значения принадлежит C_0. Пусть $u>0$. Используя равенство

$$T_t\varphi(x_u)-\varphi(x_{t+u})=\int_0^t T_{t-s}[(b(\varphi, y), dw_{s+u})]_{y=x_{s+u}},$$

которое получается из (3), если в нем заменить x_s на x_{s+u}, получаем

$$\mathsf{M}[\varphi(x_{t+u})/x_v, \ v \leqslant u]=T_t\varphi(x_u), \qquad \varphi \in D,$$

значит для всех $f \in C_0$

$$\mathsf{M}[f(x_{t+u})/x_v, \ v \leqslant u]=T_tf(x_u). \tag{4}$$

Умножая это соотношение на $f_1(x_u)$, где $f_1 \in C_0$ и беря математическое ожидание и учитывая, что $f_1(x)\,T_tf(x) \in C_0$, находим

$$\mathsf{M}f_1(x_u)\,f(x_{t+u})=T_u[f_1(x)\,T_tf(x)].$$

Аналогично находим, что для любых $t_1<t_2<\ldots<t_n$, f_1, $f_2, \ldots, f_n \in C_0$

$$\mathsf{M}f_1(x_{t_1})\,f_2(x_{t_2})\ldots f_n(x_{t_n})= \\ =T_{t_1}[f_1(x)\,T_{t_2-t_1}[f_2(x)\ldots T_{t_n-t_{n-1}}f_n(x)]]. \tag{5}$$

Очевидно, что математические ожидания в левой части (5) однозначно определяют меру, отвечающую процессу x_t. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим функцию $S_t(\varphi, x)$, определяемую для всех $\varphi \in C_0$, $t>0$, $x \in X$ равенством

$$S_t(\varphi, x)=\mathsf{M}\varphi(x_t), \tag{6}$$

где x_t — решение (1) с начальным условием $x_0=x$. Предположим, что $x_n \to x$. Легко убедиться, используя теорему 1 § 4, что последовательность мер μ_{x_n}, отвечающих решению (1) с начальным условием $x(0)=x_n$, компактна. На основании теоремы 2 § 4 всякая предельная точка этой последовательности является мерой, отвечающей некоторому решению уравнения (1) с начальным условием $x(0)=x$. В силу слабой единственности эта мера единственна. Итак, последовательность мер $\{\mu_{x_n}\}$ слабо компактна и имеет единственную предельную точку μ_x, отвечающую решению (1) с начальным условием $x_0=x$. Поэтому μ_{x_n} слабо сходится к μ_x. В частности, функция $S_t(\varphi, x)$ непрерывна по x. Рассмотрим решение $\hat{x}_t$ уравнения (1) со случайным начальным условием $x(0)=\eta$, где η не зависит от винеровского процесса w_t. Пусть $\hat{\mu}$ — мера, отвечающая этому решению, а $\hat{\mu}(A/\eta)$ — условная мера (вероятность при заданном начальном значении). Легко убедиться, что для всякого счетного множества $D_0 \subset D$

$$\mathsf{P}\left\{\varphi(\hat{x}_t) - \varphi(\eta) = \int_0^t a(\varphi, \hat{x}_s)\,ds + \int_0^t (b(\varphi, \hat{x}_s), dw_s)_H, \quad \varphi \in D_0, \ t \geqslant 0/\eta\right\} = 1$$

с вероятностью 1. Поэтому $\hat{\mu}(A/\eta)$ отвечает решению (1) почти для всех η, если D заменить на D_0. Выбирая D_0 так, чтобы оно было плотно в C_0 и плотно в D, относительно топологии, в которой непрерывны $a(\varphi, \cdot)$ и $b(\varphi, \cdot)$, убеждаемся, что $\hat{\mu}(A/\eta)$ на самом деле отвечает решению (1) почти для всех η, если $x_0=\eta$, т. е. $\hat{\mu}(A/\eta)=\mu_\eta$ с вероятностью 1.

Рассмотрим решение уравнения (1) в момент $t+s$, $t>0$, $s>0$, представив его следующим образом:

$$\varphi(x_{t+s}) - \varphi(x_s) = \int_0^t a(\varphi, x_{s+u})\,du + \int_0^t (b(\varphi, x_{s+u}), d(w_{s+u} - w_s))_H.$$

Так как $w_{s+u} - w_s$ есть винеровский процесс по u, который не зависит от x_s, то в силу сказанного выше для всякого набора $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и функции $f_1(x), \ldots, f_n(x) \in C_0$

$$\mathsf{M}\left[\prod_{k=1}^n f_k(x_{s+t_k})/x_s\right] = \int \left(\prod_{k=1}^n f_k(x_{t_k})\right) \mu_{x_s}(dx(\cdot)).$$

Значит

$$\mathsf{M} f(x_s) \prod_{k=1}^n f_k(x_{s+t_k}) = S_s\left(f(\cdot)\int \prod_{k=1}^n f_k(x_{t_k})\,\mu_{\cdot}(dx(\cdot)),\ x\right) = \int f(x_s) \prod_{k=1}^n f_k(x_{s+t_k})\,\mu_x(dx(\cdot)). \qquad (7)$$

Из формулы (7) вытекает, что при $t_1 < \ldots < t_{n+1}$, $f_1, \ldots$ $\ldots, f_{n+1} \in C_0$.

$$\int \prod_{k=1}^{n+1} f_k(x_{t_k}) \mu_x(dx(\cdot)) =$$
$$= S_{t_1}(f_1(\cdot) S_{t_2-t_1}(f_2(\cdot) \ldots S_{t_{n+1}-t_n}(f_{n+1}, \cdot) \ldots), x),$$

откуда

$$\mathsf{M} f_1(x_{t_1}) \ldots f_{n+1}(x_{t_{n+1}}) = \mathsf{M} f_1(x_{t_1}) \ldots f_n(x_{t_n}) S_{t_{n+1}-t_n}(f_{n+1}, x_{t_n}).$$

Значит

$$\mathsf{M}(f(x_{t+u})/x_v, v \leqslant u) = S_t(f, x_u)$$

с вероятностью 1. Поэтому процесс x_t является однородным марковским и его вероятность перехода $P(t, x, dy)$ удовлетворяет соотношению

$$\int P(t, x, dy) = S_t(f, x),$$

т. е. $S_t(f, x) = T_t f(x)$, где T_t — полугруппа, отвечающая этому марковскому процессу. При $\varphi \in D$ $T_t\varphi(x) - \varphi(x) = \int_0^t \mathsf{M} a(\varphi, x_s)\, ds$, где x_s — решение (1) с начальным условием $x(0) = x$.

Из непрерывности $a(\varphi, x)$ и процесса x_s вытекает, что

$$\frac{d}{dt} T_t \varphi(x) = \mathsf{M} a(\varphi, x_t) = T_t a(\varphi, x),$$

т. е. выполнено (2). Теорема доказана.

Изучим теперь вопрос об абсолютной непрерывности мер, отвечающих решениям стохастических дифференциальных уравнений с различными коэффициентами. При этом мы построим некоторый класс преобразований случайных процессов, переводящих слабые решения одного стохастического дифференциального уравнения в решения другого. Тем самым будет получен некоторый новый метод построения слабого решения — метод абсолютной непрерывной замены меры.

Пусть x_t — решение уравнения (1). Будем считать, что процесс x_t определен на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$, на котором задан входящий в уравнение винеровский процесс w_t. Рассмотрим другое вероятностное пространство, отличающееся от исходного лишь мерой —

$\{\Omega, \mathfrak{S}, \tilde{\mathsf{P}}\}$, где

$$\tilde{\mathsf{P}}(A)=\int_A \rho(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega),$$

где $\rho(\omega)\geqslant 0$, $\int \rho(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)=1$. Процесс x_t на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \tilde{\mathsf{P}}\}$ будет иметь другое распределение. Нас будет интересовать тот случай, когда и на новом вероятностном пространстве x_t будет удовлетворять уравнению вида (1) с некоторыми другими коэффициентами и другим винеровским процессом. Обозначим через $\mathscr{F}_t$ поток σ-алгебр, порожденный процессом x_t на исходном вероятностном пространстве,

$$\rho_t(\omega)=\mathsf{M}(\rho(\omega)/\mathscr{F}_t),$$

$\rho_t(\omega)$ — неотрицательный мартингал, причем для всякой $\mathscr{F}_t$-измеримой величины ξ

$$\tilde{\mathsf{M}}\xi=\int \xi(\omega)\,\tilde{\mathsf{P}}(d\omega)=\mathsf{M}\rho_t(\omega)\,\xi.$$

Обозначим через $J(\mathsf{P})$ совокупность процессов $\xi(t)$, согласованных с $\mathscr{F}_t$ и имеющих дифференциал Ито:

$$d\xi(t)=\alpha(t)\,dt+d\beta_t,$$

где $\alpha(t)$ — интегрируемый (по t) $\mathscr{F}_t$-измеримый процесс, а β_t — $\mathscr{F}_t$-мартингал с абсолютно непрерывной характеристикой. Очевидно в нашем случае $\varphi(x_t)\in J(\mathsf{P})$ для всех $\varphi\in D$. Если x_t удовлетворяет уравнению типа (1) и на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \tilde{\mathsf{P}}\}$, $\varphi(x_t)\in J(\tilde{\mathsf{P}})$ для $\varphi\in D$. Это будет выполнено, например, если $J(\mathsf{P})\subset J(\tilde{\mathsf{P}})$.

Предположим, что мартингал $\rho_t(\omega)$ представим в виде

$$\rho_t(\omega)=1+\int_0^t (c_s(\omega),\ dw_s)_H, \tag{8}$$

где $c_s(\omega)$ — $\mathscr{F}_s$-измеримая H-значная функция. (В том случае, когда σ-алгебра $\mathscr{F}_t$ порождена винеровским процессом, т. е. для сильного решения x_t формула (8) всегда имеет место, что вытекает из вида $\mathscr{F}_t$-измеримых величин (см. [11], т. 3, стр. 320). Нам потребуется следующий результат Н. В. Гирсанова (см. [11], т. 3, стр. 330).

Лемма. *Если* $\rho_t(\omega)$ *и справедлива формула* (8), *где* $|c_s(\omega)|_H^2\,\rho_s^{-2}(\omega)$ — *локально интегрируемая по* s *функция, то* $J(\mathsf{P})\subset J(\tilde{\mathsf{P}})$ *и для* $\eta(t)\in J(\mathsf{P})$, *для которого*

$$d\eta(t)=a_t(\omega)\,dt+(b_t(\omega),\ dw_t),$$

имеет место соотношение

$$d\eta(t) = [\alpha_t(\omega) + (b_t(\omega),\ c_t(\omega))\rho_t^{-1}(\omega)]\,dt + (b_t(\omega),\ d\tilde{w}_t), \qquad (9)$$

где $\tilde{w}(t) = w(t) - \int_0^t \rho_s^{-1}(\omega)\,c_s(\omega)\,ds$ — *винеровский процесс на* $\{\Omega,\ \mathfrak{S},\ \tilde{\mathsf{P}}\}$.

В доказательстве нуждается лишь то, что $\tilde{w}_t$ является винеровским процессом на $\{\Omega,\ \mathfrak{S},\ \tilde{\mathsf{P}}\}$. Рассмотрим $(\tilde{w}_t,\ z)_H$. Покажем, что это локальный мартингал. Для этого достаточно показать, что локальным мартингалом на $\{\Omega,\ \mathfrak{S},\ \mathsf{P}\}$ будет $\rho_t(\omega)(\tilde{w}_t,\ z)_H$. Но

$$d[\rho_t(\omega)(\tilde{w}(t),\ z)_H] = (\tilde{w},\ z)_H\,d\rho_t(\omega) + \\ + \rho_t(\omega)(z,\ dw_t) - (c_t(\omega),\ z)\,dt + (c_t(\omega),\ z)\,dt,$$

откуда вытекает, что $\rho_t(\omega)(\tilde{w}_t,\ z)_H$ представимо стохастическим интегралом, т. е. является локальным мартингалом. Легко видеть, что характеристики $\tilde{w}_t$ и w_t совпадают. Лемма доказана.

Из формулы (9) вытекает, что на вероятностном пространстве $\{\Omega,\ \mathfrak{S},\ \tilde{\mathsf{P}}\}$ выполнено соотношение

$$d\varphi(x_t) = [a(\varphi,\ x_t) + (b(\varphi,\ x_t),\ \rho_t^{-1}(\omega)\,c_t(\omega))_H]\,dt + \\ + (b(\varphi,\ x_t),\ d\tilde{w}_t)_H.$$

Таким образом, если x_t удовлетворяет на вероятностном пространстве $\{\Omega,\ \mathfrak{S},\ \tilde{\mathsf{P}}\}$ уравнению

$$d\varphi(x_t) = \tilde{a}(\varphi,\ x_t)\,dt + (\tilde{b}(\varphi,\ x_t),\ d\tilde{w}_t)_H,$$

то

$$\tilde{b}(\varphi,\ x) = b(\varphi,\ x),$$

$$\tilde{a}(\varphi,\ x_t) = a(\varphi,\ x_t) + (b(\varphi,\ x_t),\ \rho_t^{-1}(\omega)\,c_t(\omega))_H. \qquad (10)$$

Предположим, что соотношение (10) выполнено при некоторой функции $c_t(\omega)$. Тогда оно выполнено и при

$$\tilde{c}_t(\omega) = \mathsf{M}(\rho_t^{-1}(\omega)\,c_t(\omega)/x_t) = c_t(x_t),$$

т. е. для всех t, $\varphi \in D$

$$\tilde{a}(\varphi,\ x_t) = a(\varphi,\ x_t) + (b(\varphi,\ x_t),\ c_t(x_t)).$$

Теорема 2. *Пусть x_t — решение уравнения (1) и существует такая ограниченная измеримая функция $c(x)$ со значениями в H, что*

$$a_1(\varphi,\ x) - a(\varphi,\ x) = (b(\varphi,\ x),\ c(x))_H. \qquad (11)$$

Тогда существует решение уравнения

$$d\varphi(x_t^{(1)}) = a_1(\varphi, x_t^{(1)})\,dt + (b(\varphi, x_t^{(1)}), dw_t), \quad \varphi \in D, \quad x_0^{(1)} = x, \tag{12}$$

для которого соответствующая на $C_{[0,T]}(X)$ *ему мера* μ_T^1 *будет абсолютно непрерывна относительно меры* μ_T, *соответствующей решению* $x(t)$ *уравнения* (1) *на* $C_{[0,T]}(X)$, *при этом почти всюду по мере* μ_T

$$\frac{d\mu_T^{(1)}}{d\mu_T}(x(\cdot)) = \exp\left\{\int_0^T (c(x_s), dw(s))_H - \frac{1}{2}\int_0^T |c(x_s)|_H^2\,ds\right\}. \tag{13}$$

Если решение (1) *слабо единственно, то слабо единственным будет и решение* (12) *и в этом случае формула* (13) *справедлива для любых решений* (1) *и* (12).

Доказательство. Пусть $\rho_t(\omega)$ задается правой частью (13), если положить $T = t$. Тогда

$$d\rho_t(\omega) = \rho_t(\omega)(c(x_s), dw(s)).$$

Кроме того, $\mathsf{M}\rho_t^2(\omega) \leqslant \mathsf{M}\exp\left\{2\int_0^t (c(x_s), dw(s))_H\right\}$ в силу ограниченности $|c(x)|_H$ (см. [11, 3], с. 337). Поэтому $\mathsf{M}\rho_t(\omega) = 1$ и можно утверждать, что мера $\mu_T^{(1)}$, для которой выполнено (13), отвечает решению уравнения (12), если в нем процесс w_t заменить на процесс $\tilde{w}_t = w_t - \int_0^t c(x_s)\,ds$, который является винеровским на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathsf{P}\}$, а $\tilde{\mathsf{P}}(A) = \int_A \rho_T(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega)$. Тем самым существование слабого решения доказано. Точно так, если мера $\bar{\mu}_T^{(1)}$ отвечает некоторому слабому решению (12), находим, что мера $\bar{\mu}_T$, для которой

$$\frac{d\bar{\mu}_T}{d\bar{\mu}_T^{(1)}}(x^{(1)}(\cdot)) = \exp\left\{-\int_0^T (c(x_s^{(1)}), dw(s))_H - \frac{1}{2}\int_0^T |c(x_s^{(1)})|_H^2\,ds\right\},$$

будет отвечать некоторому решению (1). Если μ_T^1 и $\bar{\mu}_T^1$ различны, то будут различны и меры μ_T и $\bar{\mu}_T$. Таким образом из единственности слабого решения (1) вытекает слабая единственность решения (12). Теорема доказана.

Замечание. Если уравнение (1) имеет единственное (сильное) решение, то про уравнение (12) можно утверждать, что оно имеет лишь слабо единственное решение.

Рассмотрим теперь преобразование фазового пространства, при котором уравнение типа (1) опять переходит в уравнение такого же типа. Пусть $\tilde{X}$ — некоторый другой компакт и $S(x)$ непрерывная функция, отображающая X на $\tilde{X}$. Нас будут интересовать условия, при которых для процесса $\tilde{x}_t = S(x_t)$ можно написать уравнение типа (1), если x_t — решение (1). Обозначим через $\tilde{D}$ множество функций φ из $C_{\tilde{X}}$, для которых $\tilde{\varphi}(S(x)) \in D$. Тогда для $\tilde{\varphi} \in \tilde{D}$ будем иметь

$$d\tilde{\varphi}(\tilde{x}_t) = a(\tilde{\varphi}(S), x_t)\,dt + (b(\tilde{\varphi}(s), x_t), dw_t)_H. \tag{14}$$

Теорема 3. *Если существует такое $\tilde{D}_0 \subset \tilde{D}$, что при $\tilde{\varphi} \in \tilde{D}_0$*

$$a(\tilde{\varphi}(S), x) = \tilde{a}(\tilde{\varphi}, S(x)), \qquad b(\tilde{\varphi}(S), x) = U(\tilde{\varphi}, x)\,\tilde{b}(\tilde{\varphi}, S(x)),$$

где $\tilde{a}(\tilde{\varphi}, \tilde{x})$, $\tilde{b}(\tilde{\varphi}, \tilde{x})$ линейны по $\tilde{\varphi}$ и измеримы, принимают значения в R, H, $U(\tilde{\varphi}, \tilde{x})$ — в пространстве унитарных операторов на H, то $\tilde{x}_t$ удовлетворяет соотношению

$$d\tilde{\varphi}(\tilde{x}_t) = \tilde{a}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}_t)\,dt + (\tilde{b}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}_t), d\tilde{w}_t), \quad \tilde{\varphi} \in \tilde{D}_0, \quad \tilde{x}_0 = S(x), \tag{15}$$

где $\tilde{w}_t$ — некоторый винеровский процесс.

Доказательство сразу вытекает из (14), если туда подставить $a(\tilde{\varphi}(S), x)$, $b(\tilde{\varphi}(s), x)$ и в качестве винеровского процесса $\tilde{w}_t$ взять

$$\tilde{w}_t = \int_0^t U(\tilde{\varphi}, x_s)\,dw(s).$$

То, что этот процесс является винеровским в H, вытекает из того, что для $z \in H$

$$(z, \tilde{w}_t) = \int_0^t (U^{-1}(\tilde{\varphi}, x_s)\,z, dw_s)_H$$

есть мартингал с характеристикой

$$\int_0^t |U^{-1}(\varphi, x_s)\,z|_H^2\,ds = (z, z)\,t.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если S отображает X на $\tilde{X}$ взаимнооднозначно, то можно взять в качестве $\tilde{D}$ множество тех $\tilde{\varphi}$, для которых $\tilde{\varphi}(S^{-1}) \in D$, $\tilde{a}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}) = a(\varphi(s), S^{-1}(\tilde{x}))$, $\tilde{b}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}) = b(\tilde{\varphi}(S), S^{-1}(\tilde{x}))$, $U = J$, где J — единичный оператор.

§ 6. Стохастические уравнения в R^m

В этом параграфе рассматриваются уравнения для процессов на компактах из R^m. Нас будут в основном интересовать процессы, не описывающиеся с помощью классических диффузионных уравнений. Классический диффузионный процесс определяется во всем пространстве R^m, множество D состоит из дважды непрерывно дифференцируемых функций,

$$a(\varphi,\ x)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{m} b_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j},$$

$$b(\varphi,\ x)=\left(\sum_{i=1}^{m}\sigma_{i1}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i},\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m}\sigma_{im}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right),$$

где $a_i(x)$, $b_{ij}(x)$ — некоторые непрерывные функции на R^m, матрица $(b_{ij}(x))_{i,\ j=1,\ \ldots,\ m}$ неотрицательно определена, матрица $(\sigma_{ij}(x))_{i,\ j=1,\ \ldots,\ m}$ есть неотрицательный корень квадратный из матрицы $(b_{ij}(x))$, вектор $b(\varphi,\ x)$ принадлежит R^m (в скобках выписаны его координаты), при этом $H=R^m$. Если $w_1(t),\ \ldots,\ w_m(t)$ — независимые одномерные диффузионные процессы, то прочее определяется системой стохастических уравнений

$$dx^i(t)=a_i(x(t))\,dt+\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(x(t))\,dw_j(t); \tag{1}$$

здесь $x^i(t)$ i-ая координата вектора $x(t)$.

Весьма близка к классическому случаю задача исследования стохастического дифференциального уравнения на гладком многообразии (его можно рассматривать как некоторое подмножество конечномерного евклидова пространства). Рассматривая окрестности, в которых существуют координаты, мы можем для этих координат писать систему вида (1). Такая система решается до момента выхода из этой окрестности, после чего переходим к новой системе координат и т. д. Заметим, что в этом случае уже естественно рассматривать уравнение в такой форме, какая рассматривалась в §§ 3, 5, при этом множество D должно содержать такие функции, чтобы из них можно было построить систему координат для любой окрестности.

Оба рассмотренных случая характерны тем, что в D входят гладкие функции и множество X локально евклидово. Первая особенность нарушается при взаимно однозначных непрерывных, но не гладких отображениях пространства. Такое преобразование является частным случаем преобразования стохастического дифференциального уравнения, рассмотренного в теореме 3 § 5. Более интересны с физической точки зрения нарушения локальной евклидовости. Укажем некоторые возможные здесь случаи.

1. *Появление у фазового пространства края* (*границы*). В этом случае нужно задавать поведение процесса на границе: поглощение или различного рода отражения. И само наличие границы, и характер влияния границы на дальнейшее движение имеют вполне определенный физический смысл. Заметим, что поглощающая граница не приводит к новым математическим трудностям, поскольку локальный подход к решению уравнения сам основан на построении решения до момента выхода процесса из области, т. е. его попадания на некоторую границу. Процессы с отражением на границе при наличии случайных возмущений существенно отличаются от детерминированных процессов с границей. Последние допускают поинтервальное решение определяющих их уравнений: решаем уравнение, пока решение не выйдет на границу, влияние границы позволяет найти граничные условия для отраженной траектории, которая затем отыскивается с помощью уравнения внутри области, пока траектория опять не выйдет на границу и т. д. В стохастическом случае траектория частицы, выходящая с границы, должна, вообще говоря, бесконечное число раз вернуться на границу, прежде чем отойдет от нее настолько, чтобы влияние границы перестало сказываться. Поэтому здесь поинтервальное решение невозможно.

2. *Появление или исчезновение у системы одной или нескольких степеней свободы*. Пример такого движения — диффузия молекул, которые могут диссоциировать на ионы: при объединении двух ионов в молекулу теряется несколько степеней свободы, при распадении молекулы на ионы — появляются новые степени свободы. В этом примере и само движение, и переходы системы в состояния с различным числом состояний свободы происходят случайным образом. В классической механике рассматриваются системы, у которых возникают (или распадаются) связи, т. е. меняется число степеней свободы. Определение движения таких систем можно проводить

поинтервально, рассматривая такие интервалы времени, на которых число степеней свободы системы не меняется. Как и в случае 1, для стохастических систем этот метод не приемлем, так как такие системы, находясь в той точке фазового пространства, окрестности которой содержат компоненты различной размерности (т. е. с различным числом степеней свободы), будут бесконечное число раз за сколь угодно малое время переходить с компоненты на компоненту, прежде чем отойдут от исходной точки на некоторое расстояние и обоснуются на одной из компонент. Для систем указанного вида фазовое пространство представляет собой объединение нескольких многообразий различной размерности, имеющих общие точки, — в этих точках и нарушается локальная евклидовость.

3. *Многообразия с точками ветвления* (*или самопересечения*). Локальная евклидовость здесь нарушается в точках ветвления. Такого рода фазовое пространство имеют системы, состояние которых описывается некоторым множеством непрерывно меняющихся параметров и дискретным параметром, принимающим конечное (или счетное) множество значений. Каждая ветвь многообразия отвечает определенному состоянию дискретного параметра, в точках ветвления система может изменять значение дискретного параметра. В стохастических системах, как и в двух предыдущих случаях, переход с ветви на ветвь происходит не мгновенно, система бесконечное число раз перейдет с одной ветви на ветвь, прежде чем удалится на некоторое расстояние от точки ветвления. Простейшим примером такого движения может служить движение электрона в окрестности разветвления проводника. Поскольку на систематическое движение электрона, вызванное электрическим полем, накладывается тепловая диффузия, то прежде чем выбрать направление движения в точке ветвления, он многократно будет переходить через точку ветвления с одной ветви проводника на другую.

Далее рассмотрены стохастические дифференциальные уравнения в фазовых пространствах перечисленных трех типов в предположении, что процесс в окрестности регулярной точки (это внутренние точки, у которых имеются евклидовы окрестности) является диффузионным.

Процесс с отражением на границе. Пусть G — связная область с гладкой границей Γ в пространстве R^m, $X = G \cup \Gamma$. На Γ задано векторное поле $\nu(x)$, $\nu(x) \in R^m$, $|\nu(x)| = 1$, если

$n(x)$ — внутренняя нормаль к Γ в точке x, то $(\nu(x), n(x)) > 0$. В G задан дифференциальный оператор второго порядка

$$a(\varphi, x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{m} b_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}. \qquad (2)$$

Наша цель построить процесс x_t в X, который локально внутри G был бы диффузионным и удовлетворял уравнению (1) ($\sigma_{ij}(x)$ определяются по $b_{ij}(x)$ так, как указано выше), а попав на границу в точке x, отражается от нее в направлении $\nu(x)$. Последнее означает, что при $x_0 = x \in \Gamma$ $x_t - x_0 \sim |x_t - x_0| \, \nu(x_0)$. Для записи стохастического уравнения для процесса с отражением на границе (см. напр., [10], § 23) использовались граничные процессы — неубывающие непрерывные процессы, растущие только в тех точках t, в которых $x_t \in \Gamma$. Использование уравнений § 3 позволяет исключить граничные процессы из рассмотрения.

Обозначим через D множество дважды непрерывно дифференцируемых функций в области G, для которых при $x \in \Gamma$ $(\varphi'(x), \nu(x)) = 0$; здесь $\varphi'(x)$ — вектор-производная функции (ее градиент). Будем говорить, что x_t является процессом с отражением на границе Γ в направлении $\nu(x)$, удовлетворяющим внутри G уравнению (1), если для всех $\varphi \in D$ выполнено соотношение

$$d\varphi(x_t) = a(\varphi, x_t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sigma_{ij}(x_t) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x_t)\, dw_j(t). \qquad (3)$$

В окрестности каждой точки границы можно проделать такое гладкое преобразование, чтобы граница перешла в часть гиперплоскости, а $\nu(x)$ совпало с нормалью к гиперплоскости. Поэтому, используя принцип локализации, достаточно рассмотреть тот случай, когда G есть полупространство $x^1 > 0$, Γ — гиперплоскость $x^1 = 0$ (здесь $x^1, \ldots, x^m$ — координаты точки x), $\nu(x)$ — нормаль к этой гиперплоскости.

Т е о р е м а 1. *Пусть в уравнении* (3) *функции* $a_i(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ *определены при* $x \in G \cup \Gamma = \{x: x^1 \geqslant 0\}$, *равномерно непрерывно ограничены и матрица* (σ_{ij}) *невырожденна, а* D *состоит из дважды непрерывно дифференцируемых в* G *функций с ограниченными производными, для* *которых* $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots, x^m)=0$. *Тогда существует слабо единственное решение уравнения* (3), *удовлетворяющее следующему дополнительному условию: мера Лебега тех моментов времени, в которые процесс находится на границе, равна* 0 (*такой процесс называется* *процессом с мгновенным отражением*).

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\tilde{X}=R^m$ уравнение

$$d\tilde{\varphi}(\tilde{x}_t)=\tilde{a}(\tilde{\varphi}, x_t)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{x}_t)\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x^i}(\tilde{x}_t)\,d\tilde{w}_j(t), \tag{4}$$

где

$$\tilde{a}(\tilde{\varphi}, x)=\sum_{i=1}^{m}\tilde{a}_i(x)\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x^i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{m}\tilde{\sigma}_{ik}(x)\sigma_{jk}(x)\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^i\partial x^j},$$

$$\begin{gathered}
\tilde{a}_i(x)=\tilde{a}_i(x^1, x^2, \ldots, x^m)=a_i(|x^1|, x^2, \ldots, x^m),\quad i>1,\\
\tilde{a}_1(x)=\tilde{a}_1(x^1, x^2, \ldots, x^m)=a_1(|x^1|, x^2, \ldots, x^m)\operatorname{sign}x^1,\\
\tilde{\sigma}_{11}(x)=\tilde{\sigma}_{11}(x^1, x^2, \ldots, x^m)=\sigma_{11}(|x^1|, x^2, \ldots, x^m),\\
\tilde{\sigma}_{1i}(x)=\sigma_{1i}(|x^1|, x^2, \ldots, x^m)\operatorname{sign}x^1,\\
\tilde{\sigma}_{i1}(x)=\sigma_{i1}(|x^1|, x^2, \ldots, x^m)\operatorname{sign}x^1,\\
\tilde{\sigma}_{ij}(x)=\sigma_{ij}(|x^1|, x^2, \ldots, x^m),\quad i, j>1,
\end{gathered}$$

$\tilde{D}$ — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций. Существование и единственность решения уравнения (4) ($\tilde{a}$, вообще говоря, разрывно) вытекает из результатов Струка и Варадана [35]. Обозначим через $\tilde{D}_0$ множество тех функций из $\tilde{D}$, которые четны по x^1 $\left(\text{тогда } \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(0, x^2, \ldots\right.$ $\left.\ldots, x^m)=0\right)$. Пусть $S(x)$ отображает $\tilde{X}$ в $X=G\cup\Gamma$ по формуле $S(x)=(|x^1|, x^2, \ldots, x^m)$. Для всех $\tilde{\varphi}\in\tilde{D}_0$ $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(S(x))$, где $\varphi\in D$, а при $\varphi\in D$, $\varphi(S(x))\in\tilde{D}_0$. Далее, поскольку функция $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ нечетна при f, четном по x^1, а $\frac{\partial^2 f}{(\partial x^1)^2}$ — четна, то

$$\hat{b}(\varphi(S), x)=\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{\sigma}_{i1}(x)\frac{\partial\varphi(S(x))}{\partial x^i}, \ldots, \sum_{i=1}^{m}\tilde{\sigma}_{im}(x)\frac{\partial\varphi(S(x))}{\partial x^i}\right)=$$

$$\left(\operatorname{sign}x^1\left[\sigma_{11}(S(x))\frac{\partial\varphi(S(x))}{\partial x^1}\operatorname{sign}x^1+\sum_{i=2}^{m}\sigma_{i1}(S(x))\frac{\partial\varphi(S(x))}{\partial x^i}\right], \ldots\right.$$

$$\ldots, \left[\sigma_{1m}(S(x))\frac{\partial\varphi(S(x))}{\partial x^1}\operatorname{sign} x^1 + \sum_{i=2}^{m}\sigma_{im}(S(x))\frac{\partial\varphi(S(x))}{\partial x^i}\right]\right) = \\ = U(x)\,b(\varphi,\ S(x)),$$

где унитарный оператор $U(x)$ в естественном базисе R^m имеет матрицу с элементами $u_{ij}(x) = \delta_{ij}$ при $i + j > 2$, $u_{11}(x) = \operatorname{sign} x^1$. Если положить $w_k(t) = \tilde{w}_k(t)$ при $k = 2$, $3, \ldots, m$, $w_1(t) = \int_0^t \operatorname{sign} \tilde{x}_s^1 d\tilde{w}_1(s)$, то в силу теоремы 3 § 5 процесс $x_t = S(\tilde{x}_t)$ удовлетворяет уравнению (3). Из существования и слабой единственности решения уравнения (4) вытекает существование и слабая единственность решения уравнения (3). Для этого достаточно доказать, что каждое решение уравнения (3) представимо в виде $S(\tilde{x}_t)$, где $\tilde{x}_t$ — решение уравнения (4). Действительно, пусть x_t — решение уравнения (3). Введем случайную функцию δ_t, обладающую следующими свойствами: а) δ_t принимает значения ± 1 и 0, причем $\delta_t = 0$ тогда и только тогда, когда $x_t \in \Gamma$, и δ_t непрерывно во всех точках, где $\delta_t \neq 0$; б) условные распределения δ_s, $s \leqslant t$ и $-\delta_s$, $s \leqslant t$ при заданном x_s, $s \leqslant t$ одинаковы. Положим $\tilde{x}_t = (\delta_t x_t^1,\ x_t^2,\ \ldots,\ x_t^m)$. Тогда для дважды непрерывно дифференцируемой функции $\tilde{\varphi}(x)$, определенной на R^m, для которой $\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x^1}(0,\ x^2,\ \ldots,\ x^m) = 0$, можем записать во всех точках t, для которых $x_t \overline{\in} \Gamma$:

$$\partial\tilde{\varphi}(\tilde{x}_t) = \chi_{\{\delta_t=+1\}}\, d\varphi_1(x_t) + \chi_{\{\delta_t=-1\}}\, d\varphi_2(x_t),$$

где $\varphi_1(x) = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in X$, $\varphi_2(x) = \tilde{\varphi}(-x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^m)$, $x \in X$, φ_1, $\varphi_2 \in D$. Поэтому, в силу (3):

$$d\tilde{\varphi}(\tilde{x}_t) = \chi_{\{\delta_t=+1\}}\, a(\varphi_1,\ \tilde{x}_t)\,dt + \chi_{\{\delta_t=-1\}}\, a(\varphi_2,\ \tilde{x}_t)\,dt + \\ + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\sigma_{ij}(\tilde{x}_t)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^i}(\tilde{x}_t)\,\chi_{\{\delta_t=+1\}} + \right. \\ \left. + \sigma_{ij}(S(\tilde{x}_t))\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^i}(S(\tilde{x}_t))\,\chi_{\{\delta_t=-1\}}\right] dw_j(t).$$

Поскольку $\delta_t = \operatorname{sign}\tilde{x}_t^1$, то

$$\chi_{\{\delta_t=+1\}}\, a(\varphi_1,\ S(\tilde{x}_t)) + \chi_{\{\delta_t=-1\}}\, a(\varphi_2,\ S(\tilde{x}_t)) = \tilde{a}(\tilde{\varphi},\ \tilde{x}_t),$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sigma_{ij}(\tilde{x}_t)\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^i}(\tilde{x}_t)\chi_{\{\delta_t=+1\}}+\sigma_{ij}(S(\tilde{x}_t))\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^i}(S(\tilde{x}_t))\chi_{\{\delta_t=-1\}}\right]=$$

$$=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{x}_t)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x^i}(\tilde{x}_t), & j>1;\\ \operatorname{sign}\tilde{x}_t^1\sum_{i=1}^{m}\tilde{\sigma}_{i1}(\tilde{x}_t)\dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x^i}(\tilde{x}_t), & j=1.\end{cases}$$

Следовательно, для всех t, для которых $\delta_t\neq 0$, выполнено равенство (4). Остается заметить, что мера Лебега тех t, для которых $\delta_t=0$, равна нулю. Поэтому равенство (4) можно интегрировать, т. е. оно справедливо вообще в силу определения стохастического дифференциала. Теорема доказана.

Процессы с меняющимся числом степеней свободы. Рассмотрим точку, окрестность которой содержит компоненты фазового пространства различной размерности. Как будет показано ниже, достаточно рассматривать стык двух компонент, — их можно присоединять по одной. Может оказаться, что точка стыка находится на краю (границе) одной (или обеих) компонент. Такие процессы могут быть получены методом, изложенным в теореме 1, из процессов без границы. Приведем характерные примеры стыковки двумерной и одномерной компонент:

1) $X=\{(x^1, x^2): x^1\geqslant 0\}\cup\{(x^1, x^2): x^2=0\}$ — здесь обе компоненты имеют край;

2) $X=\{(x^1, x^2, x^3): x^3=0\}\cup\{(x^1, x^2, x^3): x^1=0, x^2=0, x^3>0\}$ — одномерная компонента имеет край;

3) $X=\{(x^1, x^2, x^3): x^3=0, x^1\geqslant 0\}\cup\{(x^1, x^2, x^3): x^1=0, x^2=0\}$ — двумерная компонента имеет край;

4) $X=\{(x^1, x^2, x^3): x^3=0\}\cup\{(x^1, x^2, x^3): x^1=0, x^3=0\}$ — край отсутствует.

Из процесса вида 4) можно получить процессы остальных видов, меняя x^1 на $|x^1|$, или x^3 на $|x^3|$. При этом нужно так подбирать коэффициенты в области 4), чтобы указанное отображение позволило применить теорему 3 § 5. В теореме 1 указано, как выбирать коэффициенты для замены x^1 на $|x^1|$.

Рассмотрим стохастическое уравнение в области 4). Пусть H состоит из функций множества D, заданных на X и дважды непрерывно дифференцируемых на каждой компоненте. Пока процесс не попадает в точку стыка, то он на каждой компоненте является обыкновенным диффузионным процессом. В этом случае в качестве H можно взять R^2. Положим

$$a(\varphi, x) = \begin{cases} a_1(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1} + a_2(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}\Big[b_{11}(x)\dfrac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2} + \\ \quad + 2b_{12}(x)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^1 \partial x^2} + b_{22}(x)\dfrac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2}\Big], \quad x_3 = 0; \\ a_3(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^3} + \dfrac{1}{2} b_{33}(x)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^3}, \quad x_1 = x_2 = 0; \end{cases}$$

$$b(\varphi, x) = \begin{cases} \Big(\sigma_{11}(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1} + \sigma_{12}(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \\ \sigma_{21}(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1} + \sigma_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^2}\Big), \quad x_3 = 0; \\ \Big(\sigma_{23}(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^3}, \quad \sigma_{23}(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^3}\Big), \quad x_1 = x_2 = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad \sigma_{13}^2 = \sigma_{23}^2 = b_{33}.$$

Тогда на каждой компоненте решение уравнения

$$d\varphi(x_t) = a(\varphi, x_t)\,dt + (b(\varphi, x_t), dw(t)), \tag{6}$$

где $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ — винеровский процесс в R^2, будет диффузионным процессом. Теперь нужно только определить поведение процесса в точке стыка, т. е. характер перехода процесса с компоненты на компоненту. Характер перехода определяется поведением функций из D в точке стыка, которое выражается определенными условиями сопряжения производных функции φ по разным компонентам в точке стыка. Для выяснения возможных условий сопряжения покажем, как можно получить уравнение (6) с коэффициентами вида (5) с помощью отображения пространства R^4 и X и теоремы 3 § 5. Пусть S отображает R^4 в X по формуле

$$S(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1, x^2, 0) \text{ при } x^4 > 0,$$
$$S(x^1, x^2, x^3, x^4) = (0, 0, x^3) \text{ при } x^4 < 0.$$

Тогда при $\varphi \in D$ функция $\tilde{\varphi}(x^1, x^2, x^3, x^4) = \varphi(S(x^1, x^2, x^3, x^4))$ будет дважды непрерывно дифференцируемой при $x^4 \neq 0$. Если в R^4 имеется процесс $\tilde{x}_t$ такой, что процесс $x_t = S(\tilde{x}_t)$ удовлетворяет уравнению (6), то коэффициенты $\tilde{a}(\tilde{\varphi}, x)$,

$\tilde{b}(\tilde{\varphi}, x)$ уравнения для $\tilde{x}_t$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} &\tilde{a}(\varphi(S), x^1, x^2, x^3, x^4) = a(\varphi, S(x^1, x^2, x^3, x^4)),\\ &\tilde{b}(\varphi(S), x^1, x^2, x^3, x^4) = U(x)\, b(\varphi, S(x^1, x^2, x^3, x^4)), \end{aligned} \tag{7}$$

где $U(x^1, x^2, x^3, x^4)$ — унитарный оператор в R^2. Кроме того, процесс $\tilde{x}_t$ должен обладать следующим свойством: при $\tilde{x}_t^4 > 0$ и $(\tilde{x}_t^1)^2 + (\tilde{x}_t^2)^2 \to 0$ должно и $\tilde{x}_t^3 \to 0$, $\tilde{x}_t^1 \to 0$; а при $\tilde{x}_t^4 < 0$ и $|\tilde{x}_t^3| \to 0$ должно и $(\tilde{x}_t^1)^2 + (\tilde{x}_t^2)^2 \to 0$ и $\tilde{x}_t^4 \to 0$. Эти требования вытекают из условий непрерывности процессов $\tilde{x}_t$ и $S(\tilde{x}_t)$ при $\tilde{x}_t^4 = 0$. Пусть

$$\tilde{a}_i(x^1, x^2, x^3, x^4) = \begin{cases} a_i(x^1, x^2), & x^4 > 0;\\ 0, & x^4 < 0, \quad i = 1, 2; \end{cases}$$

$$\tilde{a}_3(x^1, x^2, x^3, x^4) = \begin{cases} 0, & x^4 > 0;\\ a_3(x^3), & x^4 < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{a}_4(x^1, x^2, x^3, x^4) = \begin{cases} x^1 a_1(x^1, x^2) + x^2 a_2(x^1, x^2) + \\ \qquad + \sum\limits_{i, k=1}^{2} \sigma_{ik}^2(x^1, x^2), & x^4 > 0;\\ -x^3 a_3(x^3) - (\sigma_{13}^2(x^3) + \sigma_{23}^2(x^3)), & x^4 < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4) = \begin{cases} \sigma_{ik}(x^1, x^2), & x^4 > 0;\\ 0, & x^4 < 0; \end{cases} \quad i = 1, 2; \ k = 1, 2;$$

$$\tilde{\sigma}_{i3}(x^1, x^2, x^3, x^4) = \begin{cases} 0, & x^4 > 0;\\ \sigma_{i3}(x^3), & x^4 < 0; \end{cases} \quad i = 1, 2;$$

$$\tilde{\sigma}_{i4}(x^1, x^2, x^3, x^4) = \begin{cases} x^1 \sigma_{i1}(x^1, x^2) + x^2 \sigma_{i2}(x^1, x^2), & x^4 > 0;\\ -x^3 \sigma_{i3}(x^3), & x^4 < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$d\tilde{x}_t^k = \tilde{a}_k(\tilde{x}_t) + \tilde{\sigma}_{1k}(\tilde{x}_t)\, d\tilde{w}_1(t) + \tilde{\sigma}_{2k}(\tilde{x}_t)\, d\tilde{w}_k(t), \tag{8}$$

которую можно записать в виде

$$d\tilde{\varphi}(\tilde{x}_t) = \tilde{a}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}_t)\, dt + (\tilde{b}(\tilde{\varphi}, \tilde{x}_t), d\tilde{w}_t), \tag{9}$$

где

$$\tilde{a}(\tilde{\varphi}, x) = \sum_{k=1}^{4} \tilde{a}_k(x) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{4} \tilde{b}_{ij}(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j},$$

$$\hat{b}(\varphi, x) = \left(\sum_{k=1}^{4} \tilde{\sigma}_{1k}(x) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k}, \sum_{k=1}^{4} \tilde{\sigma}_{2k}(x) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k}\right),$$

$$\hat{b}_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{2} \sigma_{ki}(x) \sigma_{kj}(x).$$

Если $\tilde{x}_t$ — решение уравнения (8), то тогда используя формулу Ито и вид коэффициентов уравнения, убеждаемся, что

$$d[(\tilde{x}_t^1)^2 + (\tilde{x}_t^2)^2 - \tilde{x}_t^4] = 0$$

$$\text{при } \tilde{x}_t^4 > 0, \quad d[(\tilde{x}_t^3)^2 + \tilde{x}_t^4] = 0 \quad \text{при } \tilde{x}_t^4 < 0.$$

Пусть начальные условия таковы, что $(\tilde{x}_0^1)^2 + (\tilde{x}_0^2)^2 - \tilde{x}_0^4 = 0$ при $\tilde{x}_0^4 > 0$, или $(\tilde{x}_0^3) = -\tilde{x}_0^4$ при $\tilde{x}_0^4 < 0$. Тогда

$$(\tilde{x}_t^1)^2 + (\tilde{x}_t^2)^2 - \chi_{\{\tilde{x}_t^4 > 0\}} \tilde{x}_t^4 = 0,$$

$$(\tilde{x}_t^3)^2 + \chi_{\{\tilde{x}_t^4 < 0\}} \tilde{x}_t^4 = 0.$$

Поэтому процесс $S(\tilde{x}_t) = x_t$ является непрерывным. Для него выполнены соотношения (7), если U — единичный оператор. На основании теоремы 3 § 5 процесс x_t будет решением уравнения (6) с коэффициентами (5). Уравнение (8) имеет особенность при $x^4 = 0$, поскольку в этом случае $\tilde{\sigma}_{i4} = 0$ с вероятностью 1 (при $\tilde{x}_t^4 = 0$ и $(\tilde{x}_t^1)^2 + (\tilde{x}_t^2)^2 + (\tilde{x}_t^3) = 0$), $\tilde{a}_4$ меняет знак. Поэтому решение уравнения (8) при заданном начальном условии, вообще говоря, неединственно. Описывая возможные решения этого уравнения, с помощью построенного отображения можно получить все решения уравнения (6), поскольку отображение S взаимно однозначно отображает область значений процесса x_t на X: $S^{-1}(x) = (x^1, x^2, 0, (x^1)^2 + (x^2)^2)$ при $x^3 = 0$, $S^{-1}(x) = (0, 0, x^3, -(x^3)^2)$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Заметим, во-первых, что в том случае, когда точка $(0, 0)$ на плоскости (x_1, x_2) недостижима, то процесс происходит на одной компоненте и решение уравнения (8) единственно. Если же точка 0 достижима, то в окрестности точки 0 можно задать положительную гармоническую функцию всюду, кроме точки 0, равную нулю в точке 0 (это будет, например, вероятность достичь границы единичной окружности раньше, чем точки 0). Обозначим ее $\varphi_1(x)$. Кроме того, точка 0 должна быть такова, чтобы процесс мог начинаться в точке 0. Это означает, что точка 0 регулярна.

Если она регулярна и для одномерного процесса на прямой $(0, 0, x^3)$, то существует положительная гармоническая всюду, кроме точки 0 функции $\varphi_2(x_3)$. Пусть x_t — решение уравнения (6), являющееся марковским процессом. Если ψ — гармоническая функция для этого процесса в окрестности точки 0 и $\psi > 0$ на $(0, 0, x^3)$, $\psi < 0$ на $(x^1, x^2, 0)$, то при некоторых $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ $\psi(x^1, x^2, 0) = -c_1\varphi_1(x^1, x^2)$, $\psi(0, 0, x^3) = c_2\varphi_2(x^3)$. Теперь в качестве D можно выбрать множество таких функций φ, которые кроме упомянутых условий гладкости удовлетворяют еще следующему условию: для всякого φ существует такое c, что $\varphi - c\psi$ имеет в точке 0 первые производные, равные нулю.

Детальное исследование вопросов существования и единственности для уравнений типа (6) или (8) должно опираться на развитую теорию поведения решений стохастических уравнений в окрестностях особой точки. Однако здесь полностью изучен лишь одномерный случай.

Рассмотрим теперь стык двух пространств различной размерности в общем случае. Пусть $X = (R^n \times R^m) \cup (R^l \times R^m)$, причем точки $(0, z)$, $0 \in R^n$, $z \in R^m$ и $(0, z)$, $0 \in R^l$, $z \in R^m$ отождествляются. Другими словами, X рассматривается как подмножество пространства $R^n \times R^m \times R^l$, состоящее из точек вида (x, z, y), $x \in R^n$, $z \in R^m$, $y \in R^l$, для которых или $x = 0$, или $y = 0$. Если L_1 состоит из точек $(x, z, 0)$, а L_2 — из точек $(0, z, y)$, то на L_1 и L_2 заданы стохастические дифференциальные уравнения рассматриваемого нами вида. Тем самым задано и уравнение на $L_1 \cup L_2$: если φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на каждом компоненте, то при $(x_t, z_t, y_t) \bar{\in} L_1 \cap L_2$ можно для этого процесса записать уравнение, используя уравнения на отдельных компонентах. Чтобы получить это уравнение с помощью преобразования пространства из уравнения в евклидовом пространстве, введем еще одну координату $u \in R$:

$$u_t = |x_t|^2, \text{ если } y_t = 0; \quad u_t = -|y_t|^2, \text{ если } x_t = 0,$$

где (x_t, z_t, y_t) — решение исходного уравнения. Теперь уравнение можно переписать в $R^n \times R^m \times R^l \times R$ в виде обычного уравнения, а с помощью отображения

$$S(x_t, z_t, y_t, u_t) = \begin{cases} (x_t, z_t, 0), & u_t > 0; \\ (0, z_t, y_t), & u_t < 0 \end{cases}$$

перевести его в исходное. Если (x_t, z_t, y_t, u_t) — решение уравнения с начальным условием $u_0 = |x_0|^2$, $y_0 = 0$ или $u_0 = -|y_0|^2$, $x_0 = 0$, то отображение S переведет это решение в непрерывный процесс, который будет удовлетворять исходному уравнению. Заметим, что при $u = 0$ получаем такую же особенность как и выше.

Ветвление фазового пространства. Оно довольно просто сводится к рассмотрению стыков пространств различной размерности и учету влияния границы. Продемонстрируем это на простейшем примере — стыке трех одномерных ветвей: $X = \{1, 2, 3\} \times (0, \infty) \cup \{0\}$ — это объединение трех лучей, точка 0 принадлежит каждому. Пусть $\tilde{X}$ — множество в трехмерном пространстве, состоящее из плоскости $(x^1, x^2, 0)$ и прямой $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$. Отображение $\tilde{X}$ в X, определяемое равенствами $S(0, 0, 0) = 0$, $S(x^1, x^2, 0) = (1, (x^1)^2 + (x^2)^2)$ при $(x^1)^2 + (x^2)^2 > 0$, $S(0, 0, x^3) = (2, x^3)$ при $x^3 > 0$, $S(0, 0, x^3) = (3, -x^3)$ при $x^3 < 0$, непрерывно, если X снабдить естественной топологией. Поэтому уравнение для процесса в X можно получить с помощью отображения уравнения в $\tilde{X}$; уравнения последнего вида мы уже рассматривали.

ГЛАВА 2

СЛУЧАЙНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

В этой главе рассматриваются системы, состоящие из большого числа одинаковых частиц, которые двигаются по законам механики под влиянием сил внешнего поля, а также сил парных взаимодействий между частицами. Силы взаимодействия между частицами имеют две составляющие: одна — дальнодействие (например, силы тяготения, электрические, электромагнитные силы), эта составляющая предполагается неслучайной, вторая — близкодействие (результат столкновения) — носит импульсный характер, скорость частиц при таком взаимодействии меняется скачком, она предполагается случайной. Случайный характер последнего взаимодействия можно пояснить сложностью геометрической формы частиц, наличием квантовомеханических эффектов, наличием внутренних степеней свободы, на которые может переходить часть энергии соударения и т. п. Наша цель — исследовать предельное поведение таких систем в предположении, что число частиц неограниченно увеличивается, а их суммарная масса остается неизменной, при этом соответственно меняются и размеры частиц. Оказывается, что существует предельное распределение для массы частиц по объему и при изучении движения отдельной частицы достаточно лишь знать это распределение, а не движение каждой частицы, т. е. воздействие остальных частиц на данную усредняется. Если затем предположить, что количество взаимодействий частицы со средой в единицу времени возрастает до бесконечности, то в пределе получается диффузионный процесс, в частности, может получиться процесс броуновского движения. Таким образом находит объяснение то обстоятельство, что для диффузионного процесса мы имеем уравнение первого порядка, а уравнения Ньютона для описания движения частиц — второго порядка.

§ 1. Стохастические уравнения для системы случайно взаимодействующих частиц

Пусть X — фазовое пространство, в котором происходит движение частицы. Это может быть просто трехмерное пространство, если для описания движения достаточно описать движение центра тяжести, или более сложное пространство, если частицы имеют некоторую пространственную форму (если их можно рассматривать, как твердые тела, то кроме координат центра тяжести нужно еще иметь углы Эйлера, если форма тела может меняться со временем, то нужно еще задавать параметры, определяющие форму тела). Обозначим через V пространство скоростей. Для линейных X пространство V можно считать совпадающим с X, для более сложных они вообще различны. Однако, если X можно поместить в некоторое линейное пространство, то и V будет лежать в том же линейном пространстве. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что X — линейное пространство, а V совпадает с X и для пространства скоростей будем использовать то же обозначение — X.

Пусть в X имеется n частиц. Будем обозначать положение i-ой частицы через x_i (в момент времени t — $x_i(t)$), а ее скорость — v_i ($v_i(t)$). Пусть $A(x, v)$ — сила внешнего поля, действующего на частицу, находящуюся в положении x и имеющую скорость v, а $a(x, y, v, u)$ — сила «дальнодействия», воздействующая на ту же частицу со стороны частицы, находящейся в положении y и имеющей скорость u. Для описания «близкодействия» будем предполагать, что взаимодействия различных пар частиц происходят независимо, и воспользуемся $\frac{n(n-1)}{2}$ (число пар) независимыми пуассоновскими мерами, которые и будут определять величину и момент случайного взаимодействия. Вообще при характеристике случайного взаимодействия следует задать условную вероятность того, что за время Δt первая частица изменит свою скорость на данную величину Δv, при условии, что заданы положения и скорости обеих частиц. Если для борелевских множеств $C \subset X$

$$\mathsf{P}\{\Delta v \in C/x,\ y,\ u,\ v\} = \mu(C, x, y, u, v)\,\Delta t, \tag{1}$$

где μ — конечная мера на X, то условное распределение совпадает с точностью до $o(\Delta t)$ с распределением величины

$$\int f(\theta,\ x,\ y,\ u,\ v)\, p(d\theta \times dt), \tag{2}$$

где $p(d\theta \times dt)$ — пуассоновская случайная мера с независимыми значениями, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}_+$ пространства $\Theta \times R_+$, $(\Theta,\ \mathfrak{C})$ — некоторое измеримое пространство; функция $f(\theta,\ x,\ y,\ u,\ v)$ — измеримая функция на $\Theta \times X^4$ со значениями в X. Относительно пуассоновской меры предполагаем, что

$$\mathsf{M}p(d\theta \times dt) = m(d\theta)\, dt,$$

где m — некоторая мера на Θ, а f такова, что

$$m(\{\theta\colon \quad f(\theta,\ x,\ y,\ v,\ u) \in C\}) = \mu(C,\ x,\ y,\ u,\ v) \tag{3}$$

(существование такой функции f для произвольной меры μ и характер зависимости f от параметров обсуждалось в § 2 гл. 1.) Поскольку при достаточно малых Δt с точностью до $o(\Delta t)$ интеграл (2) с вероятностью $1 - m(\Theta)\Delta t$ равен нулю, а с вероятностью $m(\Theta)\Delta t$ совпадает с $f(\tilde\theta,\ x,\ y,\ v,\ u)$, где $\tilde\theta$ — случайная величина в Θ, для которой

$$P\{\tilde\theta \in C\} = \frac{m(C)}{m(\Theta)},$$

то из (3) вытекает, что распределение (2) совпадает с правой частью (1). Обозначим через $p_{ij}(d\theta \times dt)$ пуассоновскую меру, определяющую взаимодействие i-ой и j-ой частицы, $p_{ij} = p_{ji}$; для разных пар $(i,\ j)$ эти меры независимы. Таким образом, если на промежутке $[t,\ t + dt]$ произошло взаимодействие i-ой и j-ой частицы, то $v_i(t)$ претерпела скачок

$$\int_{\Theta} f(\theta,\ x_i(t),\ x_j(t),\ v_i(t),\ v_j(t))\, p_{ij}(d\theta \times dt).$$

Из закона сохранения количества движения вытекает, что $f(\theta,\ x,\ y,\ v,\ u) = -f(\theta,\ y,\ x,\ u,\ v)$. Теперь можем записать систему стохастических дифференциальных уравнений для системы частиц:

$$dv_i(t) = \Big[A(x_i,\ v_i) + \sum_j a(x_i,\ x_j,\ v_i,\ v_j)\Big] dt + \\ + \sum_j \int_{\Theta} f(\theta,\ x_i,\ v_i,\ x_j,\ v_j)\, p_{ij}(d\theta \times dt), \tag{4}$$

$$dx_i(t) = v_i(t)\, dt$$

(функции x_i, x_j, v_i, v_j, входящие в правые части (4), рассматриваются также в момент t, как и слева; в тех случаях, когда они входят в соотношения в различные моменты времени, будем указывать аргумент). Уравнения вида (4) рассматривались, например, в [10] и [31]. Условия существования и единственности решения системы уравнений (4) будут, например, такие:

$$\sup_{x, y, v, u} \left\{ \frac{|A(x, v) - A(\bar{x}, \bar{v})| + |a(x, y, v, u) - a(\bar{x}, \bar{y}, \bar{v}, \bar{u})|}{|x-\bar{x}| + |v-\bar{v}| + |y-\bar{y}| + |u-\bar{u}|} + \right. \\ \left. + |f(\theta, x, v, y, u)| \right\} < \infty$$

и, кроме того, $f(\theta, x, v, y, u)$ непрерывна по x, v, y, u по мере $m(d\theta)$.

Нас будет интересовать «статистическая функция распределения» системы частиц, определяющая число частиц, координаты и скорости которых попадают в заданное множество в данный момент t. Это — мера $\mu_t(dx \times dv)$, заданная на X^2 следующим соотношением: для всякой непрерывной ограниченной функции $g(x, v)$ на X^2

$$\int g(x, v)\, \mu_t(dx \times dv) = \frac{1}{n} \sum_i g(x_i(t), v_i(t)). \qquad (5)$$

Удобнее характеризовать состояние частицы парой $(x; v)$ и в качестве фазового пространства взять $Z = X^2$. Пусть $\tilde{A}$, $\tilde{a}$, $\tilde{f}$ — функции со значениями в Z, для которых

$$\tilde{A}(z) = (v; A(x, v)), \quad \tilde{a}(z, z') = (0; a(x, v, x', v')),$$
$$\tilde{f}(\theta, z, z') = (0; f(\theta, x, v, x', v')),$$

где $z = (x, v)$, $z' = (x', v')$. Тогда систему уравнений (4) можно переписать так:

$$dz_i(t) = \left[\tilde{A}(z_i) + \sum_j \tilde{a}(z_i, z_j)\right] dt + \\ + \sum_j \int_\Theta \tilde{f}(\theta, z_i, z_j)\, p_{ij}(d\theta \times dt). \qquad (6)$$

Пусть $\varphi(z)$ — непрерывно дифференцируемая функция, ограниченная вместе со своей производной. На основании формулы Ито можем записать:

$$d\varphi(z_i(t)) = \left(\varphi'(z_i), \tilde{A}(z_i) + \sum_j \tilde{a}(z_i, z_j)\right) dt + \\ + \sum_j \int_\Theta [\varphi(z_i + \tilde{f}(\theta, z_i, z_j)) - \varphi(z_i)]\, p_{ij}(d\theta \times dt). \qquad (7)$$

Введем центрированные меры

$$q_{ij}(d\theta \times dt) = p_{ij}(d\theta \times dt) - m(d\theta)\,dt.$$

Выражая в уравнениях (7) p_{ij} через q_{ij}, затем складывая их по i, получим такое соотношение для статистической функции распределения:

$$d\int \varphi(z)\,\mu_t(dz) =$$

$$= \left\{\int (\varphi'(z), \bar{A}(z))\,\mu_t(dz) + n\int\int \left\{(\varphi'(z), \tilde{a}(z, z')) + \int_\Theta [\varphi(z + \tilde{f}(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\,m(d\theta)\right\}\mu_t(dz)\,\mu_t(dz')\right\}dt + \frac{1}{n}\sum_{i, j}\int [\varphi(z_i + \tilde{f}(\theta, z_i, z_j)) - \varphi(z_i)]\,q_{ij}(d\theta \times dt) \quad (8)$$

(здесь для удобства записи предположено, что $\tilde{a}(z, z) = 0$, $\tilde{f}(\theta, z, z) = 0$, поэтому слагаемые в суммах при $i = j$ считаются равными нулю). Сумма интегралов по q_{ij} есть сумма мартингалов. Подсчитаем характеристику мартингала

$$\zeta_n(\varphi, t) = \frac{1}{n}\sum_{i, j}\int_0^t\int_\Theta [\varphi(z_i(s) + \tilde{f}(\theta, z_i(s), z_j(s))) - \varphi(z_i(s))]\,q_{ij}(d\theta \times ds). \quad (9)$$

Так как $q_{ij} = q_{ji}$, а для разных пар они независимы, а $\tilde{f}(\theta, z_i, z_j) = -\tilde{f}(\theta, z_j, z_i)$, то

$$\mathsf{M}\zeta_n^2(\varphi, t) =$$

$$= \mathsf{M}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i<j}\int_0^t\int_\Theta [\varphi(z_i(s) + \tilde{f}(\theta, z_i(s), z_j(s))) + \varphi(z_j(s) - \tilde{f}(\theta, z_i(s), z_j(s))) - \varphi(z_i(s)) - \varphi(z_j(s))]\,q_{ij}(d\theta \times ds)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i<j}\mathsf{M}\int_0^t\int_\Theta [\varphi(z_i(s) + \tilde{f}(\theta, z_i(s), z_j(s))) + \varphi(z_j(s) - \tilde{f}(\theta, z_i(s), z_j(s))) - \varphi(z_i(s)) - \varphi(z_j(s))]^2\,m(d\theta)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\mathsf{M}\int_0^t\int_\Theta\int\int [\varphi(z + \tilde{f}(\theta, z, z')) + \varphi(z' + \tilde{f}(\theta, z', z)) - \varphi(z) - \varphi(z')]^2\,\mu_s(dz)\,\mu_s(dz')\,m(d\theta)\,ds. \quad (10)$$

Используя этот подсчет, можно записать и взаимную характеристику двух мартингалов:

$$\langle \zeta_n(\varphi, t), \zeta_n(\psi, t)\rangle =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t \iint \int_\Theta [\varphi(z + \tilde f(\theta, z, z')) + \varphi(z' + \tilde f(\theta, z', z)) -$$
$$- \varphi(z) - \varphi(z')][\psi(z + \tilde f(\theta, z, z')) + \psi(z' + \tilde f(\theta, z', z)) -$$
$$- \psi(z) - \psi(z')]\, m(d\theta)\, \mu_s(dz)\, \mu_s(dz')\, ds. \qquad (11)$$

В статистической физике для изучения статистической функции распределения используются моментные функции (их называют иногда корреляционными). Положим

$$m_t^{(k)}(A_1, \ldots, A_k) = \mathsf{M}\mu_t(A_1) \ldots \mu_t(A_k).$$

Очевидно, что $m_t^{(k)}(A_1, \ldots, A_k)$ является мерой по каждому из аргументов $A_1, \ldots, A_k$. Для моментных функций можно получить систему уравнений, в которой k-ая функция выражается через $k+1$-ую (такая система носит название «зацепляющейся»). Для вывода этой системы применим формулу Ито к произведению

$$\prod_{l=1}^{k} \varphi_l(z_{i_l}(t)),$$

где $\varphi_l \in C_Z^1$, i_l — произвольные индексы, не превосходящие n. Будем иметь

$$d\prod_{l=1}^{k} \varphi_l(z_{i_l}(t)) =$$
$$= \sum_{r=1}^{t} \prod_{\substack{1 \leqslant l \leqslant k \\ l \neq r}} \varphi_l(z_{i_l}(t)) \Big[(\varphi_r'(z_{i_r}(t)), \tilde A(z_{i_r}(t)) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \tilde a(z_{i_r}(t), z_j(t))]\, dt +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_\Theta [\varphi_r(z_{i_r}(t) + \tilde f(\theta, z_{i_r}(t), z_j(t)) -$$
$$- \varphi_r(z_{i_r}(t))]\, p_{i_r j}(d\theta \times dt).$$

Возьмем математическое ожидание и просуммируем по i_l от 1 до n для всех l.

Получим

$$n^k \frac{d}{dt} \int \ldots \int \varphi_1(z_1) \ldots \varphi_k(z_k)\, m_t^{(k)}(dz_1, \ldots, dz_k) =$$
$$= n^k \sum_{r=1}^{k} \mathsf{M} \int \ldots \int \prod_{\substack{1 \leqslant l \leqslant k \\ l \neq r}} \varphi_l(z_l) \left[(\varphi_r'(z_r),\ \tilde{A}(z_r)) + \right.$$
$$+ n \int \tilde{a}(z_r,\ z_{k+1})\, \mu_t(dz_{k+1}) + n \int\limits_{\Theta}\!\int [\varphi_r(z_r + \tilde{f}(\theta,\ z_r,\ z_{k+1})) -$$
$$- \varphi_r(z_r)]\, m(d\theta)\, \mu_t(dz_{k+1}) \prod_{l=1}^{k} \mu_t(dz_l),$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \int \ldots \int \varphi_1(z_1) \ldots \varphi_k(z_k)\, m_t^{(k)}(dz_1, \ldots, dz_k) =$$
$$= \sum_{r=1}^{k} \Bigg[\int \ldots \int \prod_{\substack{1 \leqslant l \leqslant k \\ l \neq r}} \varphi_l(z_l)\, (\varphi_r'(z_r),\ A(z_r))\, m_t^{(k)}(dz_1, \ldots, dz_k) +$$
$$+ n \int \ldots \int \prod_{1 \leqslant l \leqslant k} \varphi_l(z_l) \Bigg[(\varphi_r'(z_r),\ \tilde{a}(z_r,\ z_{k+1})) +$$
$$+ \int\limits_{\Theta} [\varphi_r(z_r + \tilde{f}(\theta,\ z_r,\ z_{k+1})) -$$
$$- \varphi(z_r)]\, m(d\theta) \Bigg] m_t^{(k+1)}(dz_1, \ldots, dz_{k+1}) \Bigg]. \qquad (12)$$

Если предположить, что $m_t^{(k)}(dz_1, \ldots, dz_k)$ имеют плотности относительно меры Лебега:

$$m_t^{(k)}(A_1, \ldots, A_k) = \int\limits_{A_1} \ldots \int\limits_{A_k} \rho_t^{(k)}(z_1, \ldots, z_k)\, dz_1 \ldots dz_k$$

и

$$n \int \chi_A(z + f(\theta,\ z,\ z'))\, m(d\theta) = \int\limits_{A} \pi(u,\ z,\ z')\, du,$$

то из (12) получится следующая система уравнений для плотностей $\rho_t^{(k)}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t^{(k)}(z_1, \ldots, z_k) = -\sum_{r=1}^{k} \operatorname{Sp}\frac{\partial}{\partial z_r}\left(\rho_t^{(k)}(z_1, \ldots, z_k) A_k(z_r)\right) -$$
$$- n\sum_{r=1}^{k}\int \operatorname{Sp}\frac{\partial}{\partial z_r}\left(\rho_t^{(k+1)}(z_1, \ldots, z_{k+1})\, a(z_r, z_{k+1})\right) dz_{k+1} +$$
$$+\sum_{r=1}^{k}\iint \left[\rho_t^{(k+1)}(z_1, \ldots, z_{r-1}, u, z_r, \ldots, z_{k+1}) -\right.$$
$$\left. - \rho_t^{(k)}(z_1, \ldots, z_k)\right]\pi(u, z_r, z_{k+1})\, du\, dz_{k+1},$$

$\left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho A)\right.$ и $\frac{\partial}{\partial z}(\rho a)$ являются линейными операторами, в уравнение входят их следы$\left.\right)$.

§ 2. Задача об асимптотическом поведении статистической функции распределения. Условия компактности

Основная цель этой главы — изучение поведения системы частиц при неограниченном возрастании их числа. При этом характеристики системы (они определяют коэффициенты системы стохастических уравнений) будут зависеть определенным образом от n. Характер этой зависимости диктуется физическими соображениями. Будем рассматривать систему уравнений в форме (4) § 1. Коэффициент A есть сила внешнего поля, действующая на единичную массу. Если внешнее поле неизменно, то A не меняется с n. Коэффициент $a(x, y, v, u)$ есть сила, действующая на единичную массу в точке x со стороны частицы, помещенной в точке y. Естественно считать, что она пропорциональна массе (или, скажем, заряду) частицы. Если общая масса (заряд) с ростом числа частиц не меняется, то a должно быть обратно пропорционально n. Поэтому будем считать, что

$$a_n(x, y, v, u) = \frac{1}{n}a(x, y, v, u),$$

где a уже от n не зависит (a_n — это тот коэффициент, который будет входить в уравнение (4) § 1 для n частиц). Функция $f(\theta, x, v, y, u)$ определяет изменение скорости одной частицы в результате случайного взаимодействия с другой. Это изменение не может зависеть от абсолютных значений масс (или зарядов) частиц, а только от их отношения. Поскольку частицы предполагаются одинаковыми, то функцию f также будем считать не зависящей от n. Наконец, рассмотрим зависимость от n случайных мер $p_{ij}(d\theta\times dt)$, определяющих моменты и скачки скорости при взаимодействии i-ой и j-ой частицы. Будем предполагать, что среднее число взаимодействий, приходящихся на 1 частицу, остается примерно неизменным. Поскольку m (Θ) представляет собой среднее число скачков меры $p_{ij}(d\theta\times dt)$, то среднее число взаимодействий в единицу времени i-ой частицы с остальными (в предположении, что f в нуль не обращается) будет $(n-1)\,m\,(d\theta)$. Поэтому будем предполагать, что

$$\mathsf{M}p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt)=\frac{1}{n}\,m\,(d\theta)\,dt,$$

где мера m не меняется с n ($p_{ij}^{(n)}$ — пуассоновская мера, входящая в уравнение (4) § 1, для n частиц).

Если перейти к уравнению вида (6) § 1, то из вида коэффициентов $\tilde{A}(z)$, $\tilde{a}(z, z')$, $\tilde{f}(\theta, z, z')$ вытекает, что у них зависимость от n такая же, как и у A, a, f. Таким образом, будем рассматривать такую систему стохастических уравнений:

$$dz_i^{(n)}(t)=\left[A\left(z_i^{(n)}\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a\left(z_i^{(n)},\ z_j^{(n)}\right)\right]dt+ \\ +\sum_{j=1}^{n}\int_{\Theta}f\left(\theta,\ z_i^{(n)},\ z_j^{(n)}\right)p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt) \qquad (1)$$

(для упрощения записи, поскольку здесь рассматривается лишь фазовое пространство Z, мы не будем ставить значок $\sim$ над коэффициентами уравнения). Иногда в дальнейшем вместо $z_i^{(n)}$ будем писать z_i, если это не вызовет недоразумений. Обозначим через $\mu_t^{(n)}(dz)$ статистическую функцию распределения для системы (1). В дальнейшем будет изучаться асимптотическое поведение меры $\mu_t^{(n)}(dz)$ при $n\to\infty$.

Рассмотрим некоторые свойства случайных мер в конечномерном евклидовом пространстве Z. Случайная мера — это функция $\mu(\omega, B)$, заданная на $\{\Omega, \mathfrak{A}\}\times\mathfrak{B}$, где $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}\}$ — вероятностное пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств в Z. Функция $\mu(\omega, B)$ измерима по ω для фиксированного B и является мерой по B для всех ω. Статистическая функция распределения является примером случайной меры. Мы будем рассматривать лишь нормированные меры, для которых $\mu(\omega, Z)=1$.

Последовательность случайных мер μ_n слабо сходится по распределениям к случайной мере μ, если для всякого конечного набора $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_k(z)$ функций из C_Z совместное распределение величин

$$\int \varphi_1(z)\,\mu_n(dz), \ \ldots, \ \int \varphi_k(z)\,\mu_n(dz) \tag{2}$$

сходится к совместному распределению величин

$$\int \varphi_1(z)\,\mu(dz), \ \ldots, \ \int \varphi_k(z)\,\mu(dz). \tag{3}$$

Теорема 1. *Если для всякого набора $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_k(z)$ из C_Z существует предельное распределение для величин (2), то существует такая случайная мера μ, что μ_n слабо по распределениям сходится к μ.*

Доказательство. Пусть $m_n(A)=\mathsf{M}\mu_n(A)$. Очевидно для всякой функции $\varphi(z)\in C_Z$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi(z)\,m_n(dz).$$

Поэтому последовательность мер m_n слабо сходится на Z к некоторой конечной мере и, следовательно,

$$\lim_{r\to\infty}\sup_n m_n(\{z\colon |z|>r\})=0.$$

Так как

$$\mathsf{P}\{\mu_n(\{z\colon |z|>r\})>\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}m_n(\{z\colon |z|\geqslant r\}),$$

то

$$\lim_{r\to\infty}\sup_n \mathsf{P}\{\mu_n(\{z\colon |z|>r\})>\varepsilon\}=0. \tag{4}$$

Обозначим через C_Z^0 множество функций из C_Z, которые стремятся к нулю на бесконечности. Пусть $\{l(\varphi, \omega), \ \varphi\in C_Z^0\}$ такое семейство величин на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}\}$, что совместная характеристическая функция величин $l(\varphi_1, \omega), \ldots, l(\varphi_n, \omega)$ определяется соотношением

$$\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m} l(\varphi_k, \omega)\right\}=\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\exp\left\{i\int\sum_{k=1}^{m}\varphi_k(z)\,\mu_n(dz)\right\}. \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что с вероятностью 1

$$l(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2,\ \omega)=\alpha l(\varphi_1,\ \omega)+\beta l(\varphi_2,\ \omega), \tag{6}$$

$$l(\varphi,\ \omega)\geqslant 0 \quad \text{при } \varphi\geqslant 0. \tag{7}$$

Выберем такую последовательность неотрицательных функций $\{\psi_k\in C_Z^0\}$, чтобы для всякого $\psi\geqslant 0$, $\psi\in C_Z^0$

$$\inf_k\|\psi_k-\psi\|=0.$$

Обозначим через L линейную оболочку последовательности $\{\psi_k\}$ с рациональными коэффициентами, т. е. совокупность функций вида

$$\sum_1^m \alpha_i\psi_i(z),$$

где α_i — рациональны. Если $C\in\Omega$, множество тех ω, для которых выполнено (6) для всех φ_1, $\varphi_2\in L$ и рациональных α и β, а также (7) для всех $\varphi\in L$, $\varphi\geqslant 0$, то $\mathsf{P}(C)=1$. Положим при $\omega\in C$

$$l^*(\varphi,\ \omega)=\lim_{\substack{\|\psi-\varphi\|\to 0\\ \psi\in L}} l(\psi,\ \omega).$$

Тогда $\mathsf{P}\{l^*(\varphi,\ \omega)=l(\varphi,\ \omega)\}=1$ для всех $\varphi\in C_Z^0$ и $l^*(\varphi,\ \omega)\geqslant 0$ при $\varphi\geqslant 0$, $\omega\in C$, $l^*(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2,\ \omega)=\alpha l^*(\varphi_1,\ \omega)+\beta l^*(\varphi_2,\ \omega)$ при вещественных α и β, φ_1, $\varphi_2\in C_Z^0$. Следовательно, для всех $\omega\in C$ $l^*(\varphi,\ \omega)$ представляет собой неотрицательный линейный функционал. Поэтому существует такая мера $\mu(\omega,\ A)$, что для $\varphi\in C_Z^0$

$$l^*(\varphi,\ \omega)=\int\varphi(z)\,\mu(\omega,\ dz), \qquad \omega\in C. \tag{8}$$

Используя измеримость $l^*(\varphi,\ \omega)$ относительно ω для всех φ, легко установить, что $\mu(\omega,\ A)$ измерима по ω для всех борелевских множеств A. Из соотношений (4) и (5) вытекает, что последовательность случайных мер μ_n слабо сходится к случайной мере $\mu(\omega,\ dz)$, определяемой равенством (8). Действительно, если $\|\varphi_j\|\leqslant\gamma$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, $\varphi_j\in C_Z$, а $\varphi_j^r = \varphi_j$ при $|z| \leqslant r$, $\varphi_j^r \in C_Z^0$, $\|\varphi_j^r\| \leqslant \gamma$, то

$$\left| \mathsf{M} \exp\left\{ i \int \sum_1^m \varphi_k(z)\,\mu_n(dz) \right\} - \right.$$
$$\left. - \mathsf{M} \exp\left\{ i \int \sum_1^m \varphi_k(z)\,\mu(dz) \right\} \right| \leqslant$$
$$\leqslant m\gamma \mathsf{M}\,\{\mu_n(\{z:\ |z|>r\}) + \mu(\{z:\ |z|>r\})\} +$$
$$+ \left| \mathsf{M} \exp\left\{ i \int \sum_1^m \varphi_k^r(z)\,\mu_n(dz) \right\} - \right.$$
$$\left. - \mathsf{M} \exp\left\{ i \int \sum_1^m \varphi_k^r(z)\,\mu(dz) \right\} \right|.$$

Второе слагаемое стремится к нулю в силу (5), а первое выбором r можно сделать сколь угодно малым для всех n одновременно на основании (4). Теорема доказана.

Последовательность случайных мер $\mu_n(dz)$ называется слабо компактной по распределению, если всякая ее подпоследовательность содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся по распределению.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность случайных мер $\mu_n(dz)$ была слабо компактной по распределению, необходимо и достаточно, чтобы для нее выполнялось соотношение* (4).

Доказательство. Необходимость. Если семейство мер $\mu_n(dz)$ слабо компактно по распределению, то последовательность мер $m_n(dz) = \mathsf{M}\mu_n(dz)$ будет слабо компактной и значит

$$\lim_{r\to\infty} \sup_n m_n(\{z:\ |z|>r\}) = 0.$$

Из этого соотношения (4) было уже получено при доказательстве теоремы 1. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество функций L выбрано так, как в теореме 1. Поскольку оно счетно, то можно из любой подпоследовательности выбрать такую $\{n_k\}$, чтобы совместное распределение величин $\int \varphi_1(z)\,\mu_{n_k}(dz), \ldots$ $\ldots, \int \varphi_m(z)\,\mu_{n_k}(dz)$ имело предел для любых m и $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_m \in L$. Возьмем произвольные $f_1, \ldots, f_m \in C_Z$ и выберем $\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_m}$ из L так, чтобы $\sup\limits_{|z|\leqslant r} |f_i(z) - \varphi_{k_i}(z)| \leqslant \varepsilon$. Поскольку

$$\overline{\lim}\left|\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\int f_j(z)\,\mu_{n_l}(dz)\right\}-\right.$$
$$\left.-\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\int \varphi_{kj}(z)\,\mu_{n_l}(dz)\right\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}|\lambda_j|\left(\varepsilon+2\,\overline{\lim_{l\to\infty}}\,\mathsf{M}\mu_{n_l}(\{z\colon\,|z|\geqslant r\})\right) \qquad (9)$$

и правую часть можно сделать сколь угодно малой выбором ε и r, то существует предел

$$\lim_{l\to\infty}\mathsf{M}\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\int f_j(z)\,\mu_{\nu_l}(dz)\right\}, \qquad (10)$$

который будет представлять собой в силу (9) равномерный предел в каждой ограниченной по $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ области непрерывных по $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ функций. Поэтому предел (10) будет характеристической функцией. Таким образом, для всех $f_1, \ldots, f_m \subset C_Z$ существует предельное совместное распределение величин

$$\int f_1(z)\,\mu_{n_l}(dz), \ldots, \int f_m(z)\,\mu_{n_l}(dz).$$

Значит, на основании теоремы 1, последовательность случайных мер $\mu_{n_l}(dz)$ слабо сходится по распределению. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для того чтобы последовательность случайных мер $\mu_n(dz)$ была слабо компактна по распределению, необходимо и достаточно, чтобы последовательность числовых мер $\mathsf{M}\mu_n(dz)=m_n(dz)$ была слабо компактна.*

Следствие 2. *Для того чтобы последовательность случайных мер $\mu_n(dz)$ была слабо компактна по распределению достаточно, чтобы существовала непрерывная неотрицательная функция $\psi(z)$, для которой $\psi(z)\to\infty$ при $z\to\infty$, такая, что последовательность случайных величин $\int\psi(z)\,\mu_n(dz)$ ограничена по вероятности. Если последовательность $\mu_n(dz)$ слабо компактна по распределению, то существует такая функция $\psi(z)\geqslant 0$, что $\psi(z)\to\infty$ при $z\to\infty$ и $\sup_n \mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_n(dz)<\infty$.*

Действительно,

$$\sup_n \mathsf{P}\{\mu_n(\{z\colon |z|>r\})>\varepsilon\}\leqslant$$
$$\leqslant \sup_n \mathsf{P}\left\{\frac{1}{\inf\limits_{|z|>r}\psi(z)}\int \psi(z)\,\mu_n(dz)>\varepsilon\right\}=$$
$$=\sup_n \mathsf{P}\left\{\int \psi(z)\,\mu_n(dz)>\varepsilon\inf_{|z|>r}\psi(z)\right\}\to 0$$

при $r\to\infty$ для всех $\varepsilon>0$. Далее, из компактности мер $m_n(dz)$ вытекает, что существует такая последовательность $r_k\to\infty$, что $m_n(\{z\colon |z|>r_k\})\leqslant 2^{-k}$. Если $\psi(z)$ такая непрерывная функция, что $k\leqslant\psi(z)\leqslant k+1$ при $r_k\leqslant|z|\leqslant\leqslant r_{k+1}$, то $\int \psi(z)\,m_n(dz)\leqslant\sum\limits_k (k+1)\,2^{-k}$.

Следствие 3. *Пусть имеется k последовательностей случайных мер $\{\mu_n^1,\ldots,\mu_n^k\}$, каждая из которых слабо компактна по распределению. Тогда последовательность случайных мер $\mu_n^1\times\mu_n^2\times\ldots\times\mu_n^k$ в Z^k также слабо компактна по распределению.*

Это вытекает из слабой компактности мер

$$\mathsf{M}\mu_n^1(dz_1)\,\mu_n^2(dz_2)\ldots\mu_n^k(dz_k)\leqslant$$
$$\leqslant(\mathsf{M}\,[\mu_n^1(dz_1)]^k)^{1/k}\times\ldots\times(\mathsf{M}\,[\mu_n^k(dz_k)]^k)^{1/k}\leqslant$$
$$\leqslant(\mathsf{M}\mu_n^1(dz_1)\ldots\mathsf{M}\,\mu_n^k(dz_k))^{1/k}$$

(мы воспользовались тем, что $0\leqslant\mu_n^i\leqslant 1$).

§ 3. Предельная теорема для скачкообразных процессов

В этом параграфе рассматривается система частиц при отсутствии внешнего поля и сил дальнего взаимодействия между частицами. Между ними есть только случайные силы, которые мгновенно меняют положение частицы. Кроме того предполагается, что между моментами взаимодействия частицы неподвижны. Конечно с физической точки зрения системы частиц с такими взаимодействиями бессмысленны. Однако, как мы увидим в дальнейшем, такие искусственные системы достаточно хорошо аппроксимируют системы, которые были описаны выше. С другой стороны, системы со скачкообразными изменениями более просты для изучения с математической точки зрения.

Итак, пусть имеется система стохастических уравнений

$$dz_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Theta} f(\theta, z_i, z_j)\, p_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt), \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

с начальными условиями $z_i(0) = z_i^0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $\mathsf{M} p_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt) = \frac{1}{n}\, m(d\theta)\, dt$, *где* m — *конечная мера;*

2) *существует такое* L, *что*

$$\int |f(\theta, z_1, z_2) - f(\theta, z_1', z_2')|\, m(d\theta) \leqslant L(|z_1 - z_1'| + |z_2 - z_2'|),$$

$$\int |f(\theta, z_1, z_2)|\, m(d\theta) \leqslant L(1 + |z_1| + |z_2|);$$

3) *для всех* $\varphi \in C_Z$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi(z)\, \mu_0^{(n)}(dz) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(z_i^0) = \int \varphi(z)\, \lambda_0(dz),$$

где $\lambda_0(dz)$ — *некоторая неслучайная мера на* Z.

Тогда для всех $t > 0$ *последовательность мер* $\mu_t^{(n)}(dz)$ *слабо сходится по распределению к неслучайной мере* λ_k (dz), *являющейся единственным решением уравнения:* $\forall \varphi \in C_Z$

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(z)\, \lambda_t(dz) =$$
$$= \int \int \int_{\Theta} [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_t(dz)\, \lambda_t(dz'), \tag{2}$$

для которого при $\varphi \in C_Z$ *функция* $\int \varphi(z)\, \lambda_t(dz)$ *непрерывна по* $t \geqslant 0$ *и при* $t = 0$ *совпадает с* $\int \varphi(z)\, \lambda_0(dz)$.

Доказательство. 1. Установим сначала, что (2) имеет единственное решение с требуемыми свойствами. Пусть $\bar{\lambda}_t(dz)$ — другое решение, для которого $\bar{\lambda}_0(dz) = \lambda_0(dz)$ и $\bar{\lambda}_t(dz)$ непрерывно. Записав (2) для $\bar{\lambda}_t(dz)$, вычитая два уравнения и интегрируя по t от 0 до t, получим

$$\int \varphi(z)\lambda_t(dz) - \int \varphi(z)\bar\lambda_t(dz) =$$

$$= \int_0^t \int\int\int_\Theta [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta) \times$$

$$\times \lambda_s(dz)[\lambda_s(dz') - \bar\lambda_s(dz')]\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int\int\int_\Theta [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)] \times$$

$$\times m(d\theta)\bar\lambda_s(dz')[\lambda_s(dz) - \bar\lambda_s(dz)]\, ds. \qquad (3)$$

Обозначим через L_1 множество функций $\varphi \in C_Z$, для которых $\|\varphi\| \leqslant 1$ и $|\varphi(z) - \varphi(z')| \leqslant |z - z'|$. Пусть $\varphi \in L_1$. Рассмотрим функции

$$\psi_1(z') = \int\int_\Theta [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\lambda_t(dz),$$

$$\psi_2(z) = \int\int_\Theta [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\lambda_t(dz').$$

Очевидно

$$|\psi_k(z)| \leqslant 2m(\Theta),$$

$$|\psi_1(z') - \psi_1(\bar z')| \leqslant \int |f(\theta, z, z') - f(\theta, z, \bar z')|\, m(d\theta)\lambda_t(dz),$$

$$|\psi_2(z) - \psi_2(\bar z)| \leqslant \int |f(\theta, z, z') - f(\theta, \bar z, z')|\, m(d\theta)\lambda_t(dz') +$$

$$+ |z - \bar z|\, m(\Theta) + |\varphi(z) - \varphi(\bar z)|\, m(\Theta),$$

значит, $|\psi_k(z) - \psi_k(\bar z)| \leqslant (L + 2m(\Theta))|z - \bar z|$. Поэтому при $\lambda = \dfrac{1}{L+2m(\Theta)}$ функции $\lambda\psi_1(z)$ и $\lambda\psi_2(z)$ принадлежат L_1. Следовательно,

$$\sup_{\varphi \in L_1} \left| \int \varphi(z)\lambda_t(dz) - \int \varphi(z)\bar\lambda_t(dz) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\lambda}\int_0^t \sup_{\psi \in L_1} \left| \int \psi(z)\lambda_s(dz) - \int \psi(z)\bar\lambda_s(dz) \right| ds.$$

Отсюда вытекает, что $\int \varphi(z)\lambda_t(dz) = \int \varphi(z)\bar\lambda_t(dz)$ для $\varphi \in L_1$. Но тогда меры λ_t и $\bar\lambda_t$ совпадают. Единственность решения уравнения (2) доказана.

2. Покажем, что для всех t последовательность случайных мер $\mu_t^{(n)}$ слабо компактна по распределениям. Пусть $\psi(\lambda)$, $\lambda > 0$ — функция, обладающая свойствами: 1) $\psi(\lambda)$ непрерывна, неотрицательна и $\psi(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, 2) $\psi(\lambda)$ полуаддитивна: $\psi(\alpha+\beta) \leqslant \psi(\alpha)+\psi(\beta)$ при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 3) $\psi(\lambda)$ выпукла вверх, 4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int \psi(|z|)\,\mu_0^{(n)}(dz) < \infty$. Тогда

$$d\int \psi(|z|)\,\mu_t^{(n)}(dz) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n} \int [\psi(|z_i + f(\theta, z_i, z_j)|) - \psi(|z_i|)]\, p_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt).$$

Используя свойства ψ, можем записать:

$$\int [\psi(|z_i + f(\theta, z_i, z_j)|) - \psi(|z_i|)]\, m(d\theta) \leqslant$$
$$\leqslant \int \psi(|f(\theta, z_i, z_j)|)\, m(d\theta) = m(\Theta) \int \psi(|f(\theta, z_i, z_j)|) \frac{m(d\theta)}{m(\Theta)} \leqslant$$
$$\leqslant m(\Theta)\, \psi\left(\int |f(\theta, z_i, z_j)| \frac{m(d\theta)}{m(\Theta)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant m(\Theta)\, \psi\left(\frac{L}{m(\Theta)}(1 + |z_i| + |z_j|)\right).$$

Очевидно, функция $\psi(\lambda)$ — возрастающая. Если r такое целое число, что $\frac{L}{m(\Theta)} \leqslant r$, то

$$\psi\left(\frac{L}{m(\Theta)}(1 + |z_i| + |z_j|)\right) \leqslant r\,(\psi(1) + \psi(|z_i|) + \psi(|z_j|)).$$

Поэтому

$$\mathsf{M} d\int \psi(|z|)\,\mu_t^{(n)}(dz) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \int_{\Theta} [\psi(z_i + f(\theta, z_i, z_j)) - \psi(z_i)]\, m(d\theta)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2rm(\Theta) \int \psi(|z|)\,\mu_t^{(n)}(dz)\, dt + r\psi(1)\, m(\Theta)\, dt.$$

Отсюда

$$\mathsf{M}\int \psi(|z|)\,\mu_t^{(n)}(dz) \leqslant \left[\int \psi(|z|)\,\mu_t^{(0)}(dz) + c\right] \exp\{2rm(\Theta)\, t\},$$

где c — некоторая постоянная. Значит

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{M} \int \psi(|z|)\, \mu_t^{(n)}(dz) < \infty.$$

На основании следствия 2 § 2 заключаем, что $\mu_{t_1}^{(n)}$ — компактная по распределениям последовательность мер.

3. Из следствия 3 § 2 вытекает, что для любого конечного набора $t_1, \ldots, t_m$ будут компактными и меры $\mu_{t_1}^{(n)} \times \ldots \times \mu_{t_m}^{(n)}$. Поэтому для всех $t_1, \ldots, t_m$ можно выбрать так подпоследовательность n_l, чтобы, каковы бы ни были функции $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_m(z) \in C_Z$, совместное распределение

$$\int \varphi_1(z)\, \mu_{t_1}^{(n)}(dz), \ldots, \int \varphi_m(z)\, \mu_{t_m}^{(n)}(dz) \tag{4}$$

сходилось к совместному распределению величин

$$\int \varphi_1(z)\, \nu_{t_1}(dz), \ldots, \int \varphi_m(z)\, \nu_{t_m}(dz), \tag{5}$$

где $\nu_{t_1}, \ldots, \nu_{t_m}$ — некоторые случайные меры. Используя диагональный метод Кантора, убеждаемся, что существует такая подпоследовательность n_l и такие случайные меры $\nu_t(dz)$, определенные для всех рациональных t, что совместное распределение величин (4) сходится к совместному распределению величин (5), каковы бы ни были рациональные числа $t_1, \ldots, t_m$ и $\varphi_k \in C_Z$. Заметим теперь, что из (1) вытекает соотношение: при $h > 0$

$$\int \varphi(z)\, \mu_{t+h}^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\, \mu_t^{(n)}(dz) =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \int_t^{t+h} \int_\Theta [\varphi(z_i + f(\theta, z_i, z_j)) - \varphi(z_i)]\, p_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds).$$

Следовательно,

$$\mathsf{M} \left| \int \varphi(z)\, \mu_{t+h}^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\, \mu_t^{(n)}(dz) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n^2} \int_t^{t+h} \int_\Theta \sum_{i,j=1}^{n} |\varphi(z_i + f(\theta, z_i, z_j)) - \varphi(z_i)|\, m(d\theta)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant 2\|\varphi\|\, m(\Theta)\, h. \tag{6}$$

Поэтому, подставляя в это соотношение n_l вместо n, а затем переходя к пределу, убеждаемся, что для всех рациональных t и h

$$\mathsf{M}\left|\int \varphi(z)\,\nu_{t+h}(dz)-\int \varphi(z)\,\nu_t(dz)\right|\leqslant 2\,\|\varphi\|\,m(\Theta)\,h.$$

Из последнего неравенства вытекает, что для всех иррациональных t и для всех $\varphi\in C_Z$ существует предел в смысле сходимости в среднем

$$\lim_{s\to t}\int \varphi(z)\,\nu_s(dz),$$

где s принимает рациональные значения. Обозначим этот предел $\nu_t[\varphi]$.

Очевидно для $\nu_t[\varphi]$ справедливо неравенство

$$\mathsf{M}\,|\,\nu_{t+h}[\varphi]-\nu_t[\varphi]\,|\leqslant 2\,\|\varphi\|\,m(\Theta)\,h. \tag{7}$$

Используя неравенства (6) и (8), легко убедиться, что совместное распределение величин (4) сходится для всех t_1, $t_2,\ldots,t_m\geqslant 0$ и $\varphi_1,\ldots,\varphi_m\in C_Z$ к совместному распределению величин $\nu_{t_1}[\varphi_1],\ldots,\nu_{t_m}[\varphi_m]$. Поэтому на основании теоремы 1 § 2 существуют такие меры ν_t для всех вещественных $t\geqslant 0$, что $\nu_t[\varphi]=\int \varphi(z)\,\nu_t(dz)$.

4. Запишем теперь для $\mu_t^{(n)}(dz)$ соотношение (8) § 1, учитывая, что $\tilde{A}=0$, $\tilde{a}=0$, а вместо меры $m(d\theta)$ нужно писать $\frac{1}{n}m(d\theta)$. Будем иметь

$$\int \varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)=$$
$$=\iint\int_{\Theta}[\varphi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-\varphi(z)]\,m(d\theta)\,\mu_t^{(n)}(dz)\,\mu_t^{(n)}(dz')+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Theta}[\varphi(z_i+f(\theta,\ z_i,\ z_j))-\varphi(z_i)]\,q_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt).$$

Проинтегрировав это равенство по t от 0 до t, получим

$$\int \varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)=\int \varphi(z)\,\mu_0^{(n)}(dz)+$$
$$+\int_0^t\iint\int_{\Theta}[\varphi(z+f(\theta,z,z'))-\varphi(z)]\,m(d\theta)\,\mu_s^{(n)}(dz)\,\mu_s^{(n)}(dz')\,ds+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_{\Theta}[\varphi(z_i+f(\theta,\ z_i,\ z_j))-\varphi(z_i)]\,q_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt). \tag{8}$$

Обозначим $\int [\varphi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-\varphi(z)]\,m(d\theta)=\Phi(z,\ z')$; это — непрерывная ограниченная функция двух переменных, $\sup\limits_{z,\,z'}|\Phi(z,\ z')|\leqslant 2m(\Theta)\|\varphi\|$. Поскольку

$$\int\int \Phi(z,\ z')\,\mu_s^{(n)}(dz)\,\mu_s^{(n)}(dz')=\frac{1}{n^2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\Phi(z_i(s),\ z_j(s)),$$

то по формуле Ито

$$\begin{aligned}
d_s\int\int \Phi(z,\ z')\,\mu_s^{(n)}(dz)\,\mu_s^{(n)}(dz')=\\
=\frac{1}{n^2}\sum_{i,\,j,\,k}\Big[\int_\Theta \{\Phi(z_i(s)+f(\theta,\ z_i(s),\ z_k(s),\ z_j(s))-\\
-\Phi(z_i(s),\ z_j(s))\}\,p_{ik}^{(n)}(d\theta\times ds)+\\
+\int_\Theta \{\Phi(z_i(s),\ z_j(s)+f(\theta,\ z_j(s),\ z_k(s)))-\\
-\Phi(z_i(s),\ z_j(s))\}\,p_{jk}^{(n)}(d\theta\times ds)\Big]+\\
+\frac{1}{n^2}\sum_{i,\,j}\int_\Theta [\Phi(z_i(s)+f(\theta,\ z_i(s),\ z_j(s)),\ z_j(s)-\\
-f(\theta,\ z_i(s),\ z_j(s)))-\Phi(z_i(s),\ z_j(s))]\,p_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\Big|\int\int \Phi(z,\ z')\,\mu_{t+h}^{(n)}(dz)\,\mu_{t+h}^{(n)}(dz')-\\
-\int\int \Phi(z,\ z')\,\mu_t^{(n)}(dz)\,\mu_t^{(n)}(dz')\Big|\leqslant\\
\leqslant 2\sup_{z,\,z'}|\Phi(z,\ z')|\Big(2+\frac{1}{n}\Big)m(\Theta)\,h\leqslant 12m^2(\Theta)\|\varphi\|\,h. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Используя эту оценку убеждаемся, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\Big|\int_0^t\int\int \Phi(z,\ z')\,\mu_s^{(n)}(dz)\,\mu_s^{(n)}(dz')\,ds-\\
-\sum_{k=1}^{r}\frac{t}{r}\int\int \Phi(z,\ z')\,\mu_{kt/r}^{(n)}(dz)\,\mu_{kt/r}^{(n)}(dz')\Big|\leqslant\\
\leqslant\sum_{k=1}^{r}\int_{(k-1)t/r}^{kt/r}\Big|\int\int \Phi(z,\ z')\,\mu_s^{(n)}(dz)\,\mu_s^{(n)}(dz')-\\
-\int\int \Phi(z,\ z')\,\mu_{kt/r}^{(n)}(dz)\,\mu_{kt/r}^{(n)}(dz')\Big|\,ds\leqslant\\
\leqslant\sum_{k=1}^{r}\int_{(k-1)t/r}^{kt/r}\Big(\frac{kt}{r}-s\Big)ds\cdot 12m^2(\Theta)\|\varphi\|=6m^2(\Theta)\|\varphi\|\frac{t^2}{r}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

5. Покажем, что для всех непрерывных ограниченных функций $\Phi(z, z')$ на Z^2 и $t_1, \ldots, t_m \geqslant 0$ совместное распределение величин

$$\iint \Phi(z, z')\, \mu_{t_1}^{(n_l)}(dz)\, \mu_{t_1}^{(n_l)}(dz'), \ldots \\ \ldots, \iint \Phi(z, z')\, \mu_{t_m}^{(n_l)}(dz)\, \mu_{t_m}^{(n_l)}(dz') \quad (11)$$

сходится к совместному распределению величин

$$\iint \Phi(z, z')\, \nu_{t_1}(dz)\, \nu_{t_1}(dz'), \ldots, \iint \Phi(z, z')\, \nu_{t_m}(dz)\, \nu_{t_m}(dz'). \quad (12)$$

Предположим, что

$$\Phi(z, z') = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(z)\, \psi_k(z'), \quad \varphi, \psi \in C_Z. \quad (13)$$

Тогда, используя соотношения

$$\iint \Phi(z, z')\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz)\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz') = \\ = \sum_{k=1}^{N} \int \varphi_k(z)\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz) \int \psi_k(z')\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz')$$

и сходимость совместного распределения величин

$$\left\{ \int \varphi_k(z)\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz), \int \psi_k(z)\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz),\ k = 1, \ldots, N;\ i = 1, \ldots, m \right\}$$

к совместному распределению величин

$$\left\{ \int \varphi_k(z)\, \nu_{t_i}(dz), \int \psi_k(z)\, \nu_{t_i}(dz),\ k = 1, \ldots, N;\ i = 1, \ldots, m \right\},$$

убеждаемся, что совместное распределение величин (11) сходится к совместному распределению величин (12). Но для произвольных $\Phi(z, z')$ и для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такую функцию $\Phi_\varepsilon(z, z')$ вида (13), что

$$\mathsf{M} \left| \iint \Phi(z, z')\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz)\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz') - \right. \\ \left. - \iint \Phi_\varepsilon(z, z')\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz)\, \mu_{t_i}^{(n_l)}(dz') \right| \leqslant \varepsilon, \quad (14)$$

$$\mathsf{M} \left| \iint \Phi(z, z')\, \nu_{t_i}(dz)\, \nu_{t_i}(dz') - \right. \\ \left. - \iint \Phi_\varepsilon(z, z')\, \nu_{t_i}(dz)\, \nu_{t_i}(dz') \right| \leqslant \varepsilon$$

для всех $i=1, \ldots, m$. (Для этого нужно, чтобы $|\Phi(z, z') - \Phi_\varepsilon(z, z')| < \varepsilon/2$ при $|z| \leqslant \alpha$, $|z'| \leqslant \alpha$, а

$$\sup_{n_l, i} \sup_{z, z'} [|\Phi(z, z')| + |\Phi_\varepsilon(z, z')|] \times$$
$$\times \left(\mathsf{M}\mu_{t_i}^{(n_l)}(\{z : |z| > \alpha\}) + \mathsf{M}\nu_{t_i}(\{z : |z| > \alpha\})\right) \leqslant \varepsilon/4.)$$

Из сходимости совместного распределения величин (11) при замене Φ на Φ_ε к совместному распределению величин (12) (при той же замене) и неравенств (14) вытекает утверждение этого пункта.

6. Используя оценку (10) и результат предыдущего пункта можем убедиться, что совместное распределение величин

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{t}{r} \iint \Phi(z, z')\, \mu_{kt/r}^{(n_l)}(dz)\, \mu_{kt/r}^{(n_l)}(dz')$$

и

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{t}{q} \iint \Phi(z, z')\, \mu_{kt/q}^{(n_l)}(dz)\, \mu_{kt/q}^{(n_l)}(dz')$$

при $l \to \infty$ сходится к совместному распределению величин

$$\sum_{1}^{r} \frac{t}{r} \iint \Phi(z, z')\, \nu_{kt/r}(dz)\, \nu_{kt/r}(dz')$$

и

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{t}{q} \iint \Phi(z, z')\, \nu_{kt/q}(dz)\, \nu_{kt/q}(dz') \tag{15}$$

и

$$\mathsf{M}\left| \sum_{k=1}^{r} \frac{t}{r} \iint \Phi(z, z')\, \nu_{kt/r}(dz)\, \nu_{kt/r}(dz') - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{q} \frac{t}{r} \iint \Phi(z, z')\, \nu_{kt/q}(dz)\, \nu_{kt/q}(dz') \right| \leqslant$$
$$\leqslant 6m^2(\Theta)\, \|\varphi\|\, t^2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{q}\right).$$

С другой стороны, из оценки (9) и результата п. 5 вытекает, что $\iint \Phi(z, z')\, \nu_s(dz)\, \nu_s(dz')$ стохастически непрерывно по s, поэтому

$$\lim_{q\to\infty}\sum_{k=1}^{q}\frac{t}{q}\iint\Phi(z,\ z')\,\nu_{kt/q}(dz)\,\nu_{kt/q}(dz')=$$
$$=\int_0^t\iint\Phi(z,\ z')\,\nu_s(dz)\,\nu_s(dz')\,ds$$

в смысле сходимости по вероятности. Поэтому, переходя в (15) к пределу при $q\to\infty$, получаем

$$\mathsf{M}\left|\sum_{k=1}^{r}\frac{t}{r}\iint\Phi(z,\ z')\,\nu_{kt/r}(dz)\,\nu_{kt/r}(dz')-\right.$$
$$\left.-\int_0^t\iint\Phi(z,\ z')\,\nu_s(dz)\,\nu_s(dz')\,ds\right|\leqslant 6m^2(\Theta)\,\|\varphi\|\frac{t^2}{r}.\tag{16}$$

Из оценок (10) и (16), произвольности r и сходимости совместного распределения величин

$$\int\varphi(z)\,\mu_t^{(n_l)}(dz)\quad\text{и}\quad\sum_{k=1}^{r}\frac{t}{r}\iint\Phi(z,\ z')\,\mu_{kt/r}^{(n_l)}(dz)\,\mu_{kt/r}^{(n_l)}(dz')$$

к совместному распределению величин

$$\int\varphi(z)\,\nu_t(dz)\quad\text{и}\quad\int_0^t\iint\Phi(z,\ z')\,\nu_s(dz)\,\nu_s(dz')\,ds$$

и существования неслучайного предела $\lim\limits_{l\to\infty}\int\varphi(z)\,\mu_0^{(n_l)}(dz)=$ $=\int\varphi(z)\,\lambda_0(dz)$, а также оценки

$$\mathsf{M}\left(\frac{1}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\int_\Theta[\varphi(z_i+f(\theta,\ z_i,\ z_j))-\varphi(z_i)]\,q_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt)\right)^2=$$
$$=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

из соотношения (8) получаем следующее равенство:

$$\int\varphi(z)\,\nu_t(dz)=\int\varphi(z)\,\lambda_0(dz)+\int_0^t\iiint_\Theta[\varphi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-$$
$$-\varphi(z)]\,m(d\theta)\,\nu_s(dz)\,\nu_s(dz')\,ds.\tag{17}$$

Соотношение (17) выполняется при каждом $\varphi \in C_Z$ и $t > 0$ с вероятностью 1. Легко видеть, что если оно выполнено для некоторого счетного множества функций из C_Z^0, плотного в C_Z^0, и всех рациональных t, то оно выполнено и для всех φ из C_Z и $t > 0$. Поэтому существует такое множество $\Lambda \in \Omega$, что $\mathsf{P}(\Lambda) = 1$ и соотношение (17) справедливо для всех $\varphi \in C_Z$ при $\omega \in \Lambda$. При $\omega \in \Lambda$ $\int \varphi(z) \nu_t(dz)$ является непрерывной функцией t, так как непрерывна левая часть (17). Если $\omega \in \Lambda$ и $\omega_1 \in \Lambda$, то из единственности решения уравнения (2) вытекает, что $\nu_t(\omega, dz) = \nu_t(\omega_1, dz)$. Следовательно, при $\omega \in \Lambda$ $\nu_t(\omega, dz)$ не зависит от ω и совпадает с единственным решением уравнения (2) (то, что решение (2) существует, вытекает из того, что Λ не пусто, так как $\mathsf{P}(\Lambda) = 1$).

7. Обозначим через $\lambda_t(dz)$ единственное решение уравнения (2). Покажем, что $\int \varphi(z) \mu_t^{(n)}(dz)$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $\int \varphi(z) \lambda_t(dz)$ (поскольку последняя величина неслучайна, то сходимость по вероятности эквивалентна сходимости по распределению). Если это не так, то для некоторой функции $\varphi \in C_Z$ можно указать такую последовательность n_l, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\int \varphi(z) \mu_t^{(n_l)}(dz) - \int \varphi(z) \lambda_t(dz)\right| > \varepsilon\right\} > \varepsilon \tag{18}$$

для всех l. Как вытекает из пп. 3—6, можно считать, что эта последовательность n_l такова, что меры $\mu_t^{(n_l)}(dz)$ слабо по распределениям сходятся к некоторым мерам $\nu_t(dz)$, для которых выполнено (17). Но тогда $\nu_t(dz) = \lambda_t(dz)$ и

$$\lim_{n \to \infty} \int \varphi(z) \mu_t^{(n_l)}(dz) = \int \varphi(z) \lambda_t(dz),$$

что противоречит (18). Теорема доказана.

Интерес представляет тот случай, когда с ростом n число взаимодействий на одну частицу растет до бесконечности. Для описания такой ситуации можно воспользоваться уравнением (1), для которого мера $m(d\theta)$ бесконечна, но функция $f(\theta, z, z')$ зависит от n таким образом, что она отлична от нуля лишь на множестве $\Theta_n \subset \Theta$ и $m(\Theta_n) < \infty$. Поэтому будем рассматривать уравнение вида (1), в котором вместо функции $f(\theta, z, z')$ фигурирует $f_n(\theta, z, z') = \chi_{\Theta_n}(\theta) f(\theta, z, z')$, где f уже от n не зависит. Тогда его можно переписать еще следующим образом:

$$dz_i^{(n)}(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\Theta_n} f(\theta,\ z_i^{(n)},\ z_j^{(n)})\,p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt). \qquad (1')$$

Будем предполагать, что «суммарное» воздействие в единицу времени остается ограниченным, т. е. $\sup_n\int_{\Theta_n}|f(\theta,\,z,\,z')|\times\times m(d\theta)<\infty$. Естественно считать, что $\Theta_n\subset\Theta_{n+1}$ и $\Theta==\bigcup\Theta_n$. Тогда последнее условие эквивалентно тому, что $\int_{\Theta}|f(\theta,\ z,\ z')|\,m(d\theta)<\infty$. Исследуем условия слабой компактности по распределению для статистических функций распределения уравнения (1′). Пусть $\psi(z)$ — полуаддитивная положительная при $z\neq 0$ функция, равная $|z|$ в некоторой окрестности точки 0 и стремящаяся к ∞ при $z\to\infty$;

$$\mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)=\mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_0^{(n)}(dz)+$$
$$+\mathsf{M}\int_0^t\int\int\int_{\Theta_n}[\psi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-\psi(z)]\times$$
$$\times\, m(d\theta)\,\mu_s^{(n)}(dz)\,\mu_s^{(n)}(dz')\,ds\leqslant\mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_0^{(n)}(dz)+$$
$$+\mathsf{M}\int_0^t\int\int\int_{\Theta_n}\psi(f(\theta,\ z,\ z'))\,m(d\theta)\,\mu_s^{(n)}(dz)\,\mu_s^{(n)}(dz')\,ds.$$

Пусть существует такая функция $\psi(z)$ с указанными свойствами, что при некотором c

$$\int_{\Theta}\psi(f(\theta,\ z,\ z'))\,m(d\theta)\leqslant c\,(1+\psi(z)+\psi(z')). \qquad (19)$$

Тогда

$$\mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)\leqslant\left[\mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_0^{(n)}(dz)+ct\right]+$$
$$+\,2c\int_0^t\mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_s^{(n)}(dz)\,ds$$

и

$$\mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)\leqslant\left[\mathsf{M}\int\psi(z)\,\mu_0^{(n)}(dz)+ct\right]e^{2ct}. \qquad (20)$$

Таким образом для слабой компактности по распределению последовательности $\mu_i^{(n)}$ достаточно ограниченности $\mathsf{M}\int\psi(z)\times\times\mu_0^{(n)}(dz)$ и выполнения условия (19).

Для исследования асимптотического поведения $\mu_i^{(n)}$ рассмотрим наряду с системой уравнений (1′) еще систему

$$dz_i^{(n,m)}(t)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Theta_m} f(\theta,\ z_i^{(n,m)},\ z_j^{(n,m)})\,p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt) \tag{21}$$

с теми же начальными условиями, что и для системы (1). Здесь m будет фиксировано, $n>m$. Обозначим статистическую функцию распределения для этой системы через $\mu_i^{(n,m)}(dz)$. Оценим разность между интегралами по $\mu_i^{(n)}$ и $\mu_i^{(n,m)}$. Имеем

$$\begin{aligned}
d\psi(z_i^{(n)}(t)-z_i^{(n,m)}(t))&=\\
=\sum_{j=1}^{n}\int_{\Theta_m}&[\psi(z_i^{(n)}+f(\theta,\ z_i^{(n)},\ z_j^{(n)})-z_i^{(n,m)}-\\
&-f(\theta,\ z_i^{(n,m)},\ z_j^{(n,m)}))-\psi(z_i^{(n)}-z_i^{(n,m)})\,p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt)+\\
&+\sum_{j=1}^{n}\int_{\Theta_n\setminus\Theta_m}[\psi(z_i^{(n)}+f(\theta,\ z_i^{(n)},\ z_j^{(n)})-z_i^{(n,m)})-\\
&\qquad-\psi(z_i^{(n)}-z_i^{(n,m)})]\,p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt).
\end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение по времени с учетом того, что $z_i^{(n)}(0)=z_i^{(n,m)}(0)$ и беря математическое ожидание, а затем используя полуаддитивность ψ, получим

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}\psi(z_i^{(n)}(t)-z_i^{(n,m)}(t))&\leqslant\\
\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int_{\Theta}&\mathsf{M}\psi(f(\theta,\ z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))-\\
&-f(\theta,\ z_i^{(n,m)}(s),\ z_j^{(n,m)}(s)))\,m(d\theta)\,ds+\\
&+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int_{\Theta_n\setminus\Theta_m}\mathsf{M}\psi(f(\theta,\ z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)))\,m(d\theta)\,ds.
\end{aligned}$$

Пусть

$$\sup_{z,z'}\frac{1}{1+\psi(z)+\psi(z')}\int_{\Theta\setminus\Theta_m}\psi(f(\theta,\ z,\ z'))\,m(d\theta)=\varepsilon_m\to 0 \tag{22}$$

и существует постоянная L, для которой

$$\int_{\Theta} \psi(f(\theta, z, z') - f(\theta, \bar{z}, \bar{z}'))\, m(d\theta) \leqslant$$
$$\leqslant L[\psi(z - \bar{z}) + \psi(z' - \bar{z}')]. \tag{23}$$

Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}\psi(z_i^{(n)}(t) - z_i^{(n,m)}(t)) \leqslant$$
$$\leqslant 2L\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \mathsf{M}\psi(z_i^{(n)}(s) - z_i^{(n,m)}(s))\, ds +$$
$$+ \varepsilon_m \int_0^t \left(1 + 2\int \psi(z)\,\mu_s^{(n)}(dz)\right) ds.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}\psi(z_i^{(n)}(t) - z_i^{(n,m)}(t)) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_m e^{2Lt}\left[t + 2\int_0^t \int \psi(z)\,\mu_s^{(n)}(dz)\, ds\right].$$

Используя оценку (20) убеждаемся, что

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}\psi(z_i^{(n)}(t) - z_i^{(n,m)}(t)) = O(\varepsilon_m)$$

равномерно по n и на каждом конечном промежутке времени, если только $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{M}\int \psi(z)\,\mu_0^{(n)}(dz) < \infty$. Пусть $\varphi(z) \in C_Z$ и $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant K|z_1 - z_2|$. Тогда при некотором K_1 $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant K_1\psi(z_1 - z_2)$. Поэтому

$$\mathsf{M}\left|\int \varphi(z)\,\mu_t^{(n,m)}(dz) - \int \varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\varphi(z_i^{(n)}(t)) - \varphi(z_i^{(n,m)}(t))| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{K_1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{M}\psi(z_i^{(n)}(t) - z_i^{(n,m)}(t)) = O(\varepsilon_m).$$

Предположим, что для системы (21) для каждого m выполнены условия теоремы 1 и $\lambda_t^{(m)}(dz)$ — предельная статистическая функция. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{M}\left|\int \varphi(z)\mu_t^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\lambda_t^{(m)}(dz)\right| = O(\varepsilon_m),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{M}\left|\int \varphi(z)\mu_t^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\lambda_t^{(l)}(dz)\right| = O(\varepsilon_l)$$

и

$$\overline{\lim_{m,\,l\to\infty}} \left|\int \varphi(z)\lambda_t^{(m)}(dz) - \int \varphi(z)\lambda_t^{(l)}(dz)\right| = 0$$

для всех $\varphi \in C_Z$, для которых φ удовлетворяет условию Липшица. Используя неравенство

$$\int \psi(z)\lambda_t^{(m)}(dz) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{M} \sum_{i=1}^{n} \psi(z_i^{(n,\,m)}(t)) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(z_i^{(n)}(t)) + \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(z_i^{(n)}(t) - z_i^{(n,\,m)}(t)) \leqslant c_1,$$

где c_1 — некоторая постоянная, убеждаемся, что множество мер $\{\lambda_t^{(m)}(dz)\}$ компактно. Поэтому для всех $\varphi \in C_Z$

$$\lim_{m\to\infty} \int \varphi(z)\lambda_t^{(m)}(dz) = \int \varphi(z)\lambda_t(dz),$$

где $\lambda_t(dz)$ — некоторая нормированная мера на Z. При этом для всех $\varphi \in C_Z$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\left|\int \varphi(z)\mu_t^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\lambda_t(dz)\right| = 0$$

(это соотношение справедливо для φ, удовлетворяющих условию Липшица, и выполняется на классе функций, замкнутом относительно ограниченной сходимости, равномерной на каждом компакте).

Записав соотношение (2) для меры $\lambda_t^{(m)}$ и интегрируя его по t, получим

$$\int \varphi(z)\lambda_t^{(m)}(dz) = \int \varphi(z)\lambda_0(dz) + \int_0^t \int\int \int_{\Theta_m} [\varphi(z) + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\lambda_s^{(m)}(dz)\lambda_s^{(m)}(dz')\,ds;$$

здесь $\lambda_0(dz)$ — предельная мера для $\mu_0^{(n)}(dz)$. Используя существование и равномерную ограниченность интегралов $\int \psi(z)\lambda_s^{(m)}(dz)$ и оценку

$$\int\limits_{\Theta\setminus\Theta_m} \psi(f\theta,\ z,\ z'))\, m(d\theta) \leqslant \varepsilon_m (1+\psi(z)+\psi(z')),$$

убеждаемся, что для $\varphi \in C_Z$, удовлетворяющих условию Липшица, справедливо соотношение

$$\int \varphi(z)\lambda_t(dz) = \int \varphi(z)\lambda_0(dz) + \int\limits_0^t \int\int\int\limits_\Theta [\varphi(z)+f(\theta,\ z,\ z')) -$$
$$- \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_s(dz)\, \lambda_s(dz')\, ds,$$

дифференцируя которое, получаем (2). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1′. *Пусть выполнены условия:*

1) $\mathsf{M}p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt) = \frac{1}{n}m(d\theta)\,dt$, *где* m — *σ-конечная мера,*

2) *существует такая непрерывная функция* $\psi(z)$, *совпадающая с* $|z|$ *в окрестности точки* 0 *и стремящаяся к* ∞ *при* $|z|\to\infty$, *что выполнены соотношения* (19) *и* (23) *при некоторых* c, L, 3) *последовательность измеримых подмножеств* $\Theta_n \subset \Theta$ *возрастает,* $\bigcup\limits_n \Theta_n = \Theta$, *для всех* n $m(\Theta_n) < \infty$ *и выполнено* (22), *а также при некотором* L_m *неравенства*

$$\int\limits_{\Theta_m} |f(\theta,\ z,\ z')\, m(d\theta) \leqslant L_m (1+|z|+|z'|),$$

$$\int\limits_{\Theta_m} |f(\theta,\ z,\ z') - f(\theta,\ \bar z,\ \bar z')|\, m(d\theta) \leqslant L_m (|z-\bar z|+|z'-\bar z'|),$$

4) *статистическая функция распределения для решения* (1′) $\mu_0^{(n)}(dz)$ *сходится к предельной* мере $\lambda_0(dz)$ *и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int \psi(z)\mu_0^{(n)}(dz)$.

Тогда для всех $t>0$ *последовательность мер* $\mu_t^{(n)}$ (*статистических распределений для решения уравнения* (1′) *в момент* t) *слабо сходится по распределению к неслучайной мере* $\lambda_t(dz)$, *такой, что для всех* $\varphi \in C_Z$, *удовлетворяющих условию Липшица, выполняется соотношение* (2).

Замечание 1. Как показано выше, решение уравнения (2) в условиях теоремы 1 можно получить как слабый предел $\lambda_t^{(m)}(dz)$ решений уравнения

$$\frac{d}{dt}\int\varphi(z)\lambda_t^{(m)}(dz)=\iint\int\limits_{\Theta_m}[\varphi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-\varphi(z)]\times$$
$$\times m(d\theta)\lambda_t^{(m)}(dz)\lambda_t^{(m)}(dz') \qquad (2')$$

с начальным условием $\lambda_0^{(m)}(dz)=\lambda_0(dz)$. Если условие 3) теоремы выполняется с постоянными $L_m=L$, не зависимыми от m, то тогда предел $\lambda_t^{(m)}(dz)$ существует, какова бы ни была последовательность Θ_m, для которой $m(\Theta_m)<\infty$, $\Theta_m\subset\Theta_{m+1}$ и $\bigcup\Theta_m=\Theta$, причем предел не зависит от выбора Θ_m. В этом смысле решение уравнения (2) единственно.

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы 1, то выполнены и условия теоремы 1'. Для этого можно положить $\Theta_n=\Theta$, а в качестве $\psi(z)$ взять функцию $\psi(|z|)$, где $\psi(|z|)$ — та функция, которая введена при доказательстве теоремы 1 в п. 2 (очевидно, ее можно выбрать равной $|z|$ в окрестности нуля). Проверим выполнение условий (19) и (23). Имеем

$$\int\limits_\Theta\psi(|f(\theta,\ z,\ z')|)m(d\theta)\leqslant m(\Theta)\psi\left(\frac{1}{m(\Theta)}\int\limits_\Theta|f(\theta,\ z,\ z')|m(d\theta)\right)\leqslant$$
$$\leqslant m(\Theta)\psi\left[\frac{L}{m(\Theta)}[1+|z|+|z'|]\right)\leqslant c[1+\psi(|z|)+\psi(|z'|)]$$

при некотором c (мы использовали выпуклость вверх $\psi(\lambda)$ и полуаддитивность). Аналогично

$$\int\limits_\Theta\psi(|f(\theta,\ z,\ z')-f(\theta,\ \bar z,\ \bar z')|)m(d\theta)\leqslant$$
$$\leqslant m(\Theta)\psi\left(\frac{L}{m(\Theta)}(|z-\bar z|+|z'-\bar z'|)\right)\leqslant$$
$$\leqslant c_1[\psi(|z-\bar z|)+\psi(|z'-\bar z'|)].$$

Условие (22) выполняется тривиально, так как $\Theta\setminus\Theta_m=\varnothing$ и значит интеграл равен 0.

Рассмотрим теперь предельное поведение отдельной частицы в предположении, что статистическая функция распределения системы стремится к неслучайному пределу. Поскольку уравнения системы симметричны относительно отдельных частиц, то будем рассматривать именно первую частицу:

$$dz_1^{(n)}(t)=\sum_{j=2}^{n}\int\limits_\Theta f(\theta,\ z_1^{(n)},\ z_j^{(n)})p_{1j}^{(n)}(d\theta\times dt).$$

Обозначим через $\mathscr{F}_t^{(n)}$ σ-алгебру, порожденную величинами $z_i^{(n)}(s)$ при $s \leqslant t$ и значениями случайных мер $p_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds)$ на $\Theta \times [0, t]$. Пусть $u(t, z)$ — непрерывная ограниченная функция на $[0, \infty) \times Z$, для которой $\frac{\partial u}{\partial t}(t, z)$ также непрерывна и ограничена и при некотором L $|u(t, z) - u(t, z_1)| \leqslant \leqslant L|z - z_1|$. На основании формулы Ито можем записать

$$u(t+h,\ z_1^{(n)}(t+h)) - u(t,\ z_1^{(n)}(t)) =$$
$$= \int_t^{t+h} \frac{\partial u}{\partial s}(s,\ z_1^{(n)}(s))\,ds + \sum_{j=2}^{n} \int_t^{t+h} \int_\Theta [u(s,\ z_1^{(n)}(s) +$$
$$+ f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))) - u(s,\ z_1^{(n)}(s))]\, p_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds).$$

Возьмем условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_t^{(n)}$. Получим

$$\mathsf{M}[u(t+h,\ z_1^{(n)}(t+h))/\mathscr{F}_t^{(n)}] =$$
$$= u(t,\ z_1^{(n)}(t)) + \mathsf{M}\Bigg(\int_t^{t+h} \Bigg[\frac{\partial u}{\partial s}(s,\ z_1^{(n)}(s)) +$$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} \int_\Theta [u(s,\ z_1^{(n)}(s) + f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)) -$$
$$- u(s,\ z_1^{(n)}(s))]\, m(d\theta)\Bigg]\, ds/\mathscr{F}_t^{(n)}\Bigg) =$$
$$= u(t,\ z_1^{(n)}(t)) + \mathsf{M}\Bigg(\int_t^{t+h} \Bigg[\frac{\partial u}{\partial s}(s,\ z_1^{(n)}(s)) +$$
$$+ \int_\Theta \int [u(s,\ z_1^{(n)}(s) + f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z)) -$$
$$- u(s,\ z_1^{(n)}(s))\Bigg]\, m(d\theta)\, \mu_s^{(n)}(dz)\, ds/\mathscr{F}_t^{(n)}\Bigg).$$

Предположим, что конечномерные распределения процессов $z_1^{(n)}(t)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого случайного процесса $\bar{z}(t)$. Положим $F(s, z, z') = \int [u(s, z + f(\theta, z, z')) - u(s, z)]\, m(d\theta) + \frac{\partial}{\partial s} u(s, z)$. Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1′ (из замечания 2 вытекает, что они выполнены и в условиях теоремы 1). Тогда $F(s, z, z')$ — ограниченная непрерывная функция. Поэтому

$$\sup_{\substack{|z-z_1|\leqslant\varepsilon\\ |z|\leqslant c}}\left|\int F(s,\ z,\ z')\mu_s^{(n)}(dz')-\int F(s,\ z_1,\ z')\mu_s^{(n)}(dz')\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{z,\ z'}|F(s,\ z,\ z')|\,\mu_s^{(n)}(\{z\colon\ |z|>r\})+$$
$$+\sup_{|z'|\leqslant r}\ \sup_{\substack{|z-z_1|\leqslant\varepsilon\\ |z|\leqslant c}}|F(s,\ z,\ z')-F(s,\ z_1,\ z')|,$$

т. е. $\int F(s,\ z,\ z')\mu_s^{(n)}(dz')$ равномерно непрерывна по z в каждой ограниченной области равномерно относительно n. Используя сходимость по вероятности $\int F(s,\ z,\ z')\mu_s^{(n)}(dz')$ к $\int F(s,\ z,\ z')\lambda_s(dz')$, получаем, что для всех $c>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\sup_{|z|\leqslant c}\left|\int F(s,\ z,\ z')\mu_s^{(n)}(dz')-\int F(s,\ z,\ z')\lambda_s(dz')\right|=0.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathsf{M}\left|\mathsf{M}\left(\int_t^{t+h}\left[\int F(s,\ z_1^{(n)}(s),\ z')\mu_s^{(n)}(dz')-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\int F(s,\ z_1^{(n)}(s),\ z')\lambda_s(dz')\right]ds/\mathcal{F}_t^{(n)}\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_t^{t+h}\left[\mathsf{M}\sup_{|z|\leqslant r}\left|\int F(s,\ z,\ z')\mu_s^{(n)}(dz')-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int F(s, z, z')\lambda_s(dz')\right|+2\sup_{z,\ z'}|F(s, z, z')|\,\mathsf{P}\{|z_1^{(n)}(s)|>r\}\right]ds\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_t^{t+h}\sup_{z,\ z'}|F(s,\ z,\ z')|\,\mathsf{P}\{|\tilde z(s)|>r\}\,ds$$

и, поскольку правая часть стремится к нулю при $r\to\infty$, то

$$\mathsf{M}(u(t+h),\ z_1^{(n)}(t+h)/\mathcal{F}_t^{(n)})=u(t,\ z_1^{(n)}(t))+$$
$$+\mathsf{M}\left(\int_t^{t+h}F(s,\ z_1^{(n)}(s),\ z')\lambda_s(dz)\,ds/\mathcal{F}_t^{(n)}\right)+\alpha_n, \tag{24}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{M}|\alpha_n|=0$.

Пусть $t_1<t_2<\ldots<t_k\leqslant t$ и $g(z_1,\ \ldots,\ z_k)$ — непрерывная ограниченная функция на Z^k. Положим

$$\hat F(s,\ z)=\int F(s,\ z,\ z')\lambda_s(dz').$$

Это — ограниченная непрерывная функция своих переменных. Если для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{|s-s_1|\leqslant h} \mathsf{P}\{|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n)}(s_1)| > \varepsilon\} = 0, \qquad (25)$$

то на основании теоремы о сходимости распределений интегралов (см. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов — М.: Наука, 1965, стр. 628) совместное распределение величин

$$z_1^{(n)}(t_1), \ \ldots, \ z_1^{(n)}(t_k), \qquad \int_t^{t+h} \hat{F}(s, \ z_1^{(n)}(s))\, ds$$

сходится к совместному распределению величин

$$\tilde{z}_1(t), \ \ldots, \ \tilde{z}_1(t_k), \qquad \int_t^{t+h} \hat{F}(s, \ \tilde{z}_1(s))\, ds.$$

Умножив (24) на $g(z_1^{(n)}(t_1), \ldots, z_1^{(n)}(t_k))$ и беря безусловное математическое ожидание, а затем переходя к пределу, находим

$$\mathsf{M}g(\tilde{z}(t_1), \ \ldots, \ \tilde{z}(t_k))\, u(t+h, \ \tilde{z}(t+h)) =$$
$$= \mathsf{M}g(\tilde{z}(t_1), \ \ldots, \ \tilde{z}(t_k)) \left[u(t, \ \tilde{z}(t)) + \int_t^{t+h} \hat{F}(s, \ \tilde{z}(s))\, ds \right]. \qquad (26)$$

Проверим, что и в условиях теоремы $1'$ условие (25) выполняется. Пусть $\psi(z)$ — функция, указанная в условии теоремы $1'$. Тогда, используя (19), получим:

$$\mathsf{M}\psi(z_1^{(n)}(t)) - \psi(z_1^{(n)}(0)) =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} \mathsf{M} \int_0^t \int_\Theta [\psi(z_1^{(n)}(s) + f(\theta, \ z_1^{(n)}(s), \ z_j^{(n)}(s))) -$$
$$- \psi(z_1^{(n)}(s))]\, m(d\theta)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} \mathsf{M} \int_0^t \int_\Theta \psi(f(\theta, \ z_1^{(n)}(s), \ z_j^{(n)}(s)))\, m(d\theta)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{n} \sum_{j=2}^{n} \mathsf{M} \int_0^t (1 + \psi(z_1^{(n)}(s)) + \psi(z_j^{(n)}(s)))\, ds =$$
$$= ct + c \int_0^t \mathsf{M}\psi(z_1^{(n)}(s))\, ds + c \int_0^t \mathsf{M} \int \psi(z)\, \mu_s^{(n)}(dz)\, ds.$$

Воспользовавшись неравенством (20) убеждаемся, что в условиях теоремы 1′ $\sup_n \mathsf{M}\psi(z_1^{(n)}(t)) \leqslant \sup_n \psi(z_1^{(n)}(0)) + A(t)$, где $A(t)$ — некоторая возрастающая функция. Далее

$$\mathsf{M}\psi(z_1^{(n)}(t+h) - z_1^{(n)}(t)) =$$

$$= \frac{1}{n}\mathsf{M}\sum_{j=2}^{n}\int_t^{t+h}\int_\Theta [\psi(z_1^{(n)}(s) + f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)) -$$

$$- z_1^{(n)}(t)) - \psi(z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n)}(t))]\, m(d\theta)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\mathsf{M}\sum_{j=2}^{n}\int_t^{t+h}\int_\Theta \psi(f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)))\, m(d\theta)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant c\int_t^{t+h}\mathsf{M}\left[1 + \psi(z_1^{(n)}(s)) + \int \psi(z)\, \mu_s^{(n)}(dz)\right] ds = O(h)$$

равномерно относительно n, если только $z_1^{(n)}(0)$ имеет предел.

Обозначим через $\mathcal{F}_t$ σ-алгебру, порожденную величинами $\tilde{z}(s)$ при $s \leqslant t$. Расписывая соотношение (26) и учитывая произвольность g, получаем

$$\mathsf{M}[u(t+h,\ \tilde{z}(t+h))/\mathcal{F}_t] =$$

$$= u(t,\ \tilde{z}(t)) + \mathsf{M}\Bigg(\int_t^{t+h}\left[\frac{\partial}{\partial s}u(s,\ \tilde{z}(s)) + \right.$$

$$+ \int\int [u(s,\ \tilde{z}(s) + f(\theta,\ \tilde{z}(s),\ z)) -$$

$$\left. - u(s,\ \tilde{z}(s))]\, m(d\theta)\, \lambda_s(dz)\right] ds/\mathcal{F}_t\Bigg). \tag{27}$$

Рассмотрим пуассоновскую меру с независимыми значениями $\hat{p}(d\theta \times dz \times ds)$ на $\Theta \times Z \times [0,\ \infty)$, для которой $\mathsf{M}\hat{p}(d\theta \times dz \times ds) = m(d\theta)\, \lambda_s(dz)\, ds$. Пусть $\hat{z}(t)$ — решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\hat{z}(t) = \int_\Theta\int_Z f(\theta,\ \hat{z}(t),\ z)\, \hat{p}(d\theta \times dz \times ds). \tag{28}$$

Предположим, что это уравнение имеет единственное решение на любом временном промежутке с произвольным начальным условием. Обозначим через $\hat{z}_{z,s}(t)$ решение уравнения (28) на отрезке $[s, \infty)$, удовлетворяющее начальному условию $\hat{z}_{z,s}(s)=z$. Пусть

$$v(s, z)=\mathsf{M}\varphi(\hat{z}_{z,s}(t+h)).$$

Если функция v для всех φ, удовлетворяющих условию Липшица, удовлетворяет сама условию Липшица, то тогда она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial s}v(s, z)=$$
$$=-\iint[v(s, z+f(\theta, z, z')-v(s, z))]\,m(d\theta)\,\lambda_s(dz') \qquad (29)$$

$\left(\text{в частности, существует производная } \frac{\partial}{\partial s}v(s, z) \text{ и она непрерывна и ограничена}\right)$. Действительно, используя равенство

$$\mathsf{M}v(s+\delta, \hat{z}_{s,z}(z+\delta))=$$
$$=\mathsf{M}\varphi(\hat{z}_{s+\delta,\, \hat{z}_{s,z}(s+\delta)}(t+h))=\mathsf{M}\varphi(\hat{z}_{s,z}(t+h))=v(s, z),$$

справедливое при $s+\delta<t+h$, будем иметь на основании формулы Ито:

$$\frac{1}{\delta}[v(s+\delta, z)-v(s+\delta, \hat{z}_{s,z}(s, \delta))]=$$
$$=-\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\iint[v(s+\delta, \hat{z}_{s,z}(s+\tau)+f(\theta, \hat{z}_{s,z}(s+\tau), z))-$$
$$-v(s+\delta, \hat{z}_{s,z}(s+\tau))]\,\hat{p}(d\theta\times dz\times d\tau).$$

Взяв математическое ожидание и переходя к пределу при $\delta\downarrow 0$, получим справа правую часть (29), а слева будет правая производная v по s. Поскольку правая часть (29) непрерывна по s, то отсюда вытекает, что существует и обычная производная, которая, естественно, совпадает с правой. Соотношение (29) доказано. Подставим $v(s, z)$ в равенство (27). Тогда в силу (29) выражение под интегралом $\int_t^{t+h}$ обратится в нуль. Учитывая, что $u(t+h, z)=\varphi(z)$, получим

$$\mathsf{M}[\varphi(\bar{z}(t+h))/\mathscr{F}_t]=u(t, \bar{z}(t)). \qquad (30)$$

Поскольку это равенство справедливо для всех φ, удовлетворяющих условию Липшица, то отсюда следует, что условное распределение $\tilde{z}(t+h)$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ зависит лишь от $\tilde{z}(t)$. Поэтому $\tilde{z}(t)$ будет марковским процессом. Далее,

$$u(t, \tilde{z}(t)) = \mathsf{M}[\varphi(\hat{z}_{t,z}(t+h))]_{z=\tilde{z}(t)} = \\ = \int \hat{\mathsf{P}}(t, \tilde{z}(t), t+h, dz')\varphi(z'),$$

где $\hat{\mathsf{P}}(t, z, t+h, dz')$ — вероятность перехода марковского процесса, порождаемого решениями уравнения (28). Значит,

$$\mathsf{M}[\varphi(\tilde{z}(t+h))/\mathcal{F}_t] = \int \hat{\mathsf{P}}(t, \tilde{z}(t), t+h, dz')\varphi(z'). \quad (31)$$

Отсюда вытекает, что вероятности перехода процессов $\hat{z}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ совпадают, а значит, совпадают и их конечномерные распределения, если только совпадают начальные значения.

Из ограниченности по вероятности процессов $z_1^{(n)}(t)$ при условии, что $z_1^{(n)}(0) = \tilde{z}(0)$ — не меняется с n — вытекает, что последовательность процессов $z_1^{(n)}(t)$ компактна по распределению. С другой стороны, при высказанных предположениях всякий предельный по распределениям процесс для некоторой подпоследовательности $z_1^{(n_l)}(t)$ будет марковским процессом, являющимся решением уравнения (28) с начальным условием $\hat{z}(0) = \tilde{z}(0)$ (точнее, его распределения будут совпадать с распределениями решения (28)). Отсюда вытекает, что $z_1^{(n)}(t)$ будут сходиться по распределению к решению уравнения (28) с начальным условием $\hat{z}(0) = \tilde{z}(0)$.

Установим, наконец, условие, при котором функция $v(s, z)$ удовлетворяет условию Липшица по z, если ему удовлетворяет φ. Имеем при $|\varphi(z) - \varphi(\tilde{z})| \leqslant L|z - \tilde{z}|$:

$$|v(s, z) - v(s, \tilde{z})| \leqslant L\mathsf{M}|\hat{z}_{s,z}(t+h) - \hat{z}_{s,\tilde{z}}(t+h)|.$$

Предположим, что

$$\int\int |f(\theta, z, z') - f(\theta, \tilde{z}, z')|\, m(d\theta)\lambda_\tau(dz') \leqslant K|z - \tilde{z}|. \quad (32)$$

Тогда

$$\mathsf{M}|\hat{z}_{s,z}(t) - \hat{z}_{s,\tilde{z}}(t)| \leqslant |z - \tilde{z}| + \int_s^t \int\int \mathsf{M}|f(\theta, \hat{z}_{s,z}(\tau), z') - \\ - f(\theta, \hat{z}_{s,\tilde{z}}(\tau), z')|\, m(d\theta)\lambda_\tau(dz')\,d\tau \leqslant \\ \leqslant |z - \tilde{z}| + K\int_s^t \mathsf{M}|\hat{z}_{s,z}(\tau) - \hat{z}_{s,\tilde{z}}(\tau)|\,d\tau.$$

Значит,

$$\mathsf{M}\,|\hat{z}_{s,z}(t)-\hat{z}_{s,\bar{z}}(t)|\leqslant|z-\bar{z}|\,e^{K(t-s)},$$
$$|v(s,\ z)-v(s,\ \bar{z})|\leqslant Le^{K(t+h-s)}\,|z-\bar{z}|.$$

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1′ *и условие* (32). *Если* $z_1^{(n)}(0)=\bar{z}(0)$, *то конечномерные распределения последовательности процессов* $z_1^{(n)}(t)$ *сходятся к конечномерным распределениям процесса* $\hat{z}(t)$, *являющегося решением стохастического дифференциального уравнения* (28) *с начальным условием* $\hat{z}(0)=\bar{z}(0)$.

Из доказанной теоремы в частности вытекает, что движения различных частиц в пределе являются независимыми.

§ 4. Предельная теорема для статистических функций распределения. Общий случай

Рассмотрим предельное поведение статистической функции распределения для системы уравнений вида (1) § 2. Нам понадобятся результаты о компактности последовательности статистических функций распределения для таких систем, а также некоторые оценки разности интегралов по статистическим функциям распределения для двух разных систем.

Лемма 1. *Пусть для системы* (1) § 2 *можно указать функцию* $\rho(t)$, *определенную, непрерывную и возрастающую на* $[0,\ \infty)$ *до бесконечности, для которой существует и непрерывна* $\rho'(t)$, *при некотором* c

$$\rho(t+h)\leqslant c\,[\rho(t)+\rho(h)]$$

и такую, что коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям:

1) *при некотором* c_1 *выполнены неравенства*

а) $\dfrac{\rho'(|z|)}{|z|}(A(z)+a(z,\ z'),\ z)\leqslant c_1[\rho(|z|)+\rho(|z'|)]$;

б) $\int\rho(|f(\theta,\ z,\ z')|)\,m(d\theta)\leqslant c_1[\rho(z)+\rho(|z'|)]$;

2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\int\rho(|z|)\,\mu_0^{(n)}(dz)<\infty$.

Тогда можно указать такую возрастающую функцию $c_1(t)$, что для всех t

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{M} \int \rho(|z|)\,\mu_t^{(n)}(dz) \leqslant c_1(t).$$

Доказательство. На основании формулы Ито можем записать:

$$\rho(|z_i^{(n)}(t)|) + \rho(|z_i^{(n)}(0)|) + \int_0^t \frac{\rho'(|z_i^{(n)}(s)|)}{|z_i^{(n)}(s)|}\Bigl(A(z_i^{(n)}(s)) +$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a(z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s),\ z_i^{(n)}(s))\,ds +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int_\Theta [\rho(|z_i^{(n)}(s) + f(\theta,\ z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))|) -$$
$$-\rho(|z_i^{(n)}(s)|)]\,m(d\theta)\,dS$$

(мы воспользовались тем, что производная по z от функции $\rho(z)$ в направлении u равна $\rho'(|z|)\frac{(z,\ u)}{|z|}$). Возьмем математическое ожидание в последнем равенстве. Используя а) и б), а также неравенства

$$\frac{\rho'(|z_i|)}{|z_i|}\left(A(z_i) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a(z_i,\ z_j),\ z_i\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho(|z_i|)}{|z_i|}\left(A(z_i) + a(z_i,\ z_j),\ z_i\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\rho(|z_i|) + \rho(|z_j|)] = c_1\left[\rho(|z_i|) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(|z_j|)\right],$$

$$\int_\Theta [\rho(z_i + f(\theta,\ z_i,\ z_j)) - \rho(z_i)]\,m(d\theta) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + c_1)m(\Theta)\rho(|z_i|) + \int_\Theta \rho(|f(\theta,\ z_i,\ z_j)|)\,m(d\theta) \leqslant$$
$$\leqslant [(1 + c_1)m(\Theta) + c_1]\rho(|z_i|) + c_1\rho(|z_i|),$$

убеждаемся, что

$$\mathsf{M}\rho(|z_i^{(n)}(t)|) \leqslant \rho(|z_i^{(n)}(0)|) + \\ + ((1+c_1)m(\Theta)+2c_1)\int_0^t \mathsf{M}\rho(|z_i^{(n)}(s)|)\,ds + \\ + \frac{2c_1}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^t \mathsf{M}\rho(|z_j^{(n)}(s)|)\,ds.$$

Суммируя по i и разделив на n, будем иметь:

$$\mathsf{M}\int \rho(|z|)\,\mu_t^{(n)}(dz) \leqslant \int \rho(|z|)\,\mu_0^{(n)}(dz) + \\ + ((1+c_1)m(\Theta)+4c_1)\int_0^t \int \mathsf{M}\rho(|z|)\,\mu_s^{(n)}(dz)\,ds.$$

Отсюда вытекает следующее неравенство:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{M}\int \rho(|z|)\,\mu_t^{(n)}(dz) \leqslant \\ \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int \rho(|z|)\,\mu_0^{(n)}(dz) \exp\{[(1+c_1)m(\Theta)+4c_1]\,t\},$$

которое и доказывает теорему.

Замечание 1. Если мера $m(\Theta)$ может быть лишь σ-конечной, то вместо условия 1, б) нужно наложить условие 1, б′):

$$\int [\rho(|z+f(\theta,\ z,\ z')|) - \rho(|z|)]\,m(d\theta) \leqslant c_1(\rho(|z|)+\rho(|z'|)). \tag{1}$$

Используя эту оценку можно, точно так, как в доказательстве леммы, получить неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{M}\int \rho(|z|)\,\mu_t^{(n)}(dz) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int \rho(|z|)\,\mu_0^{(n)}(dz)\, e^{4c_1 t}. \tag{2}$$

Если последовательность $\mu_0^{(n)}(dz)$ компактна, то найдется достаточно медленно возрастающая функция $\rho(t)$ $(t\to\infty)$, такая, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int \rho(|z|)\,\mu_0^{(n)}(dz) < \infty$. Эту функцию можно выбрать выпуклой вверх. Посмотрим, когда для таких $\rho(t)$ будет выполняться условие 1). Пусть $A(|z|) \leqslant c(1+|z|)$.

Тогда

$$\frac{\rho'(|z|)}{|z|}(A(z),\ z) \leqslant c\rho'(|z|)[1+|z|] \leqslant c_1\rho(|z|),$$

так как при указанном выборе $\rho(t)$ $\rho'(t)$ ограничено, $\rho'(|z|)|z| \leqslant \rho(|z|)-\rho(0)$. Для того чтобы было

$$\frac{\rho'(|z|)}{|z|}(a(z,\ z'),\ z) \leqslant c_1(\rho(|z|)+\rho(|z'|)),$$

достаточно выполнения условия $|a(z,\ z')| \leqslant c(1+|z|+ +\rho(|z'|))$. Отметим, что поскольку в уравнение для $z_i^{(n)}(t)$ входит $\int a(z_i^{(n)}(t),\ z')\mu_i^{(n)}(dz')$ и это выражение должно быть ограниченным при $n\to\infty$, то предположение о том, что $|a(z,\ z')|$ по z' оценивается величиной $\rho(|z'|)$, не очень ограничительно.

Для выполнения условия 1, б) при $m(\Theta)<\infty$ достаточно, чтобы

$$\int f(\theta,\ z,\ z')\,m(d\theta) \leqslant c(1+|z|+|z'|).$$

Действительно, в силу выпуклости вверх функции $\rho(t)$ будем иметь

$$\int \rho(|f(\theta,z,z')|)\,m(d\theta) \leqslant m(\Theta)\,\rho\left(\frac{1}{m(\Theta)}\int |f(\theta,\ z,\ z')\,m(d\theta)\right) \leqslant$$
$$\leqslant m(\Theta)\,\rho\left(c\,\frac{|z|+|z'|+1}{m(\Theta)}\right).$$

Итак, если $A(z)$ и $\int f(\theta,\ z,\ z')\,m(d\theta)$ линейно ограничены на бесконечности (такая ограниченность обычно требуется для коэффициентов стохастических дифференциальных уравнений), то для выполнения условий леммы нужно найти такое выпуклое вверх $\rho(t)$, чтобы выполнялось условие 2) и при некотором c имело место неравенство

$$|a(z,\ z')| \leqslant c(1+|z|+\rho(|z'|)).$$

В физических задачах силы взаимодействия зависят лишь от $|z-z'|$, при этом изменения скоростей случайно взаимодействующих частиц не превосходит суммы их скоростей, так что $|f(\theta,\ z,\ z')| \leqslant |z|+|z'|$ (напомним, что z — это пара $(x;\ v)$ — радиус-вектор и скорость, так что $|v| \leqslant |z|$). Так что для таких систем будет иметь место компактность, если $A(z)$ линейно ограничено.

Замечание 2. Пусть $|A(z)| \leqslant c(1+|z|)$, $|a(z, z')| \leqslant c(1+|z|+\rho(|z'|))$ и выполнено условие (1) для некоторой возрастающей к $+\infty$ выпуклой вверх функции $\rho(t)$, $t \in [0, \infty)$. Тогда при некотором c_1 выполнено (2).

Пусть $\bar{z}_i^{(n)}$ — решение системы

$$d\bar{z}_i(t) = \left(\bar{A}(\bar{z}_i^{(n)}) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{a}(\bar{z}_i^{(n)}, \bar{z}_j^{(n)})\right) dt + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int \bar{f}(\theta, z_i^{(n)}, z_j^{(m)})\, p_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt),$$

$\bar{z}_i^{(n)}(0) = z_i^{(n)}(0)$, $\bar{\mu}_t^{(n)}$ — статистическая функция распределения для этой системы.

Лемма 2. *Пусть* $\lambda(t)$ *и* $\rho(t)$ — *две функции, определенные на* $[0, \infty)$, *такие, что*

а) *для всех* $t \in [0, \infty)$ *существует* $\lambda'(t)$, $\lambda'(t) > 0$ *при* $t > 0$, $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(0) = 0$;

б) *для всех* $z, h \in Z$ *при некотором* c *выполнены неравенства*

$$\lambda(|z+h|) - \lambda(|z|) - \lambda'(|z|)\frac{(z, h)}{|z|} \leqslant c\lambda(|h|),$$

$$\lambda(|z+h|) \leqslant c[\lambda(|z|) + \lambda(|h|)],$$

в) $\rho(t) \to +\infty$ *при* $t \to \infty$.

Положим

$$b(z, z') = A(z) + a(z, z') + \int f(\theta, z, z')\, m(d\theta),$$

$$\bar{b}(z, z') = \bar{A}(z) + \bar{a}(z, z') + \int \bar{f}(\theta, z, z')\, m(d\theta).$$

Если при некотором c_1 *выполнены неравенства*

1) $(b(z, z') - b(\bar{z}, \bar{z}'), z - \bar{z})\lambda'(|z - \bar{z}|) \leqslant$
$$\leqslant c_1|z - \bar{z}|[\lambda(|z - \bar{z}|) + \lambda(|z' - \bar{z}'|)],$$

2) $\int \lambda(|f(\theta, z, z') - f(\theta, \bar{z}, \bar{z}')|)\, m(d\theta) \leqslant$
$$\leqslant c_1[\lambda(|z - \bar{z}|) + \lambda(|z' - \bar{z}'|)],$$

3) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \mathsf{M} \int \rho(z)\bar{\mu}_t^{(n)}(dz) \leqslant c(t)$, *где* $c(t)$ — *некоторая возрастающая функция, то существует такая возрастающая*

функция $c_1(t)$, *что для всех* n

$$\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda(|z_i^{(n)}(t)-\bar{z}_i^{(n)}(t)|)\leqslant\delta c_1(t),$$

где

$$\delta=\sup_{z,\,z'}\Big\{|b(z,\ z')-\bar{b}(z,\ z')|+\\+\int\lambda(|f(\theta,\ z,\ z')-\bar{f}(\theta,\ z,\ z')|)\,m(d\theta)\Big\}(\rho(z)+\rho(z'))^{-1}.$$

Доказательство. Применяя формулу Ито к $\lambda(|z_i^{(n)}(t)-\bar{z}_i^{(n)}(t)|)$, находим:

$$\lambda(|z_i^{(n)}(t)-\bar{z}_i^{(n)}(t)|)=\\=\int_0^t\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda'(|z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)|)}{|z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)|}(b(z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))-\\-\bar{b}(\bar{z}_i^{(n)}(s),\ \bar{z}_j^{(n)}(s),\ z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)))\,ds+\\+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int[\lambda(|z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)+f(\theta,\ z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))-\\-\bar{f}(\theta,\ z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))|)-\lambda(|z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)|)-\\-\lambda'(|z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)|)\Big(\frac{z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)}{|z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)|},\\f(\theta,\ z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))-\bar{f}(\theta,\ z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))\Big)\Big]\,p_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds).$$

Возьмем математическое ожидание этого выражения и просуммируем по i. Используя свойства функции $\lambda(t)$, получим:

$$\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda(|z_i^{(n)}(t)-\bar{z}_i^{(n)}(t)|)\leqslant\\\leqslant c_1\int_0^t\mathsf{M}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda(|z_i^{(n)}(s)-\bar{z}_i^{(n)}(s)|)+\\+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda(|z_j^{(n)}(s)-\bar{z}_j^{(n)}(s)|)\Big]ds+\\+\int_0^t\frac{1}{n^2}\sum_{i,\,j=1}^{n}\mathsf{M}\,|b(\bar{z}_i^{(n)}(s),\ \bar{z}_j^{(n)}(s))-\bar{b}(z_i^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)|\,ds+$$

$$+c\int_0^t \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \int_\Theta \mathsf{M}\lambda(|f(\theta, z_i^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s)) -$$

$$- \bar{f}(\theta, \bar{z}_i^{(n)}(s), \bar{z}_j^{(n)}(s))|)\, m(d\theta)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2c_1(1+c^2)\int_0^t \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda(|z_i^{(n)}(s) - \bar{z}_i^{(n)}(s)|)\, ds +$$

$$+\int_0^t \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \mathsf{M}(|b(\bar{z}_i^{(n)}(s), \bar{z}_j^{(n)}(s)) + \bar{b}(z_i^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s))|) +$$

$$+c_2\int_\Theta \lambda(|f(\theta, z_i^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s)) -$$

$$- \bar{f}(\theta, \bar{z}_i^{(n)}(s), \bar{z}_j^{(n)}(s))|)\, m(d\theta)\, ds) \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left[\int_0^t \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda(|z_i^{(n)}(s) - \bar{z}_i^{(n)}(s)|)\, ds + \right.$$

$$\left. + \delta\int_0^t \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \rho(|\bar{z}_i^{(n)}(s)|)\, ds\right],$$

где c_2 — некоторая постоянная. Следовательно,

$$\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \lambda(|z_i^{(n)}(t) - \bar{z}_i^{(n)}(t)|) \leqslant c_2\delta\int_0^t \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^u \rho(|\bar{z}_i^{(n)}(s)|)\, ds e^{c_2 t}.$$

Отсюда и из условия 3) вытекает доказательство леммы.

Замечание. Примером функции $\lambda(t)$, удовлетворяющей условиям а) и б), могут служить функции вида

$$\lambda(t) = \frac{t\,[(1+t)^\alpha - 1]}{1+t}, \quad \lambda(t) = \frac{t\ln(1+t)}{1+t},$$

$$\lambda(t) = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Условие 1) будет выполняться, если $|b(z, z')| \leqslant c\,[\lambda(|z|) + \lambda(|z'|)]$ и, кроме того, удовлетворяется условие Липшица.

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов системы* (1) § 2 *выполнены следующие условия:*

1) *при некотором* $c > 0$

$$|A(z) - A(\bar{z})| + |a(z, z') - a(\bar{z}, \bar{z}')| +$$

$$+\int |f(\theta, z, z') - f(\theta, \bar{z}, \bar{z}')|\, m(d\theta) \leqslant c\,(|z - \bar{z}| + |z' - \bar{z}'|),$$

2) *существуют функции* $\lambda(t)$ *и* $\rho(t)$, *обладающие свойствами:*

а) *для всех* $t \in [0, \infty)$ *они непрерывны, дифференцируемы,* $\lambda'(t) > 0$, $\rho'(t) > 0$, $\lambda(0) = 0$, $\rho(0) = 0$, $\lambda'(0) = 0$,

б) *для всех* z, $h \in Z$ *при некотором* c *выполнены неравенства*

$$\lambda(|z+h|) - \lambda(|z|) - \lambda'(|z|)\frac{(z, h)}{|z|} \leqslant c\lambda(|h|),$$
$$\lambda(|z+h|) \leqslant c[\lambda(|z|) + \lambda(|h|)],$$

в) $\rho(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, $\rho(t_1 + t_2) \leqslant c[\rho(t_1) + \rho(t_2)]$ *и выполнены условия* а) *и* б) *леммы* 1,

г) $n\lambda\left(\frac{1}{n}|A(z) + a(z, z')|\right) \leqslant \varepsilon_n[1 + \rho(|z|) + \rho(|z'|)]$, *где* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$,

д) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int \rho(|z|)\mu_0^{(n)}(dz) < \infty$,

е) $\lim\limits_{\gamma\to\infty} \sup\limits_{|z|+|z'|\geqslant\gamma} \dfrac{|A(z)| + |a(z, z')| + \int |f(\theta, z, z')| m(d\theta)}{\rho(|z|) + \rho(|z'|)} = 0.$

Тогда для всех t *последовательность мер* $\mu_t^{(n)}(dz)$ *слабо по распределению сходится к неслучайной мере* $\lambda_t(dz)$, *при этом для* $\varphi \in C_Z$ *функция* $\int \varphi(z)\lambda_t(dz)$ *непрерывна по* t, *совпадает с* $\int \varphi(z)\lambda_0(dz)$ *при* $t = 0$ *и для всех* $\varphi \in C_Z^1$

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(z)\lambda_t(dz) = \int\left(\varphi'(z), A(z) + \int a(z, z')\lambda_t(dz')\right)\lambda_t(dz) +$$
$$+ \iiint [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\lambda_t(dz)\lambda_t(dz'). \quad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим измеримое пространство $(\bar{\Theta}, \bar{\mathfrak{C}})$, где $\bar{\Theta}$ получается из Θ добавлением одной точки $\bar{\theta}$, а σ-алгебра $\bar{\mathfrak{C}}$ состоит из множеств σ-алгебры $\mathfrak{C}$ и множеств вида $C \cup \{\bar{\theta}\}$, где $C \in \mathfrak{C}$, $\{\bar{\theta}\}$ — одноточечное множество, содержащее $\bar{\theta}$. Положим $\bar{m}(C) = m(C)$ при $C \in \mathfrak{C}$, $\bar{m}(C \cup \{\bar{\theta}\}) = m(C) + \bar{m}$, где $C \in \mathfrak{C}$, $\bar{m} > 0$ — некоторое натуральное число, $\bar{m}(d\theta)$ — мера на $\bar{\mathfrak{C}}$. Определим, наконец, функцию $\bar{f}(\theta, z, z')$ при $\theta \in \bar{\Theta}$: $\bar{f}(\theta, z, z') = f(\theta, z, z')$ для $\theta \in \Theta$, $\bar{f}(\bar{\theta}, z, z') = \frac{1}{\bar{m}}[A(z) + a(z, z')]$. Пусть $\bar{z}_i^{(n)}(t)$ является решением системы уравнений

$$d\bar{z}_i^{(n)}(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\Theta}\bar{f}(\theta,\ \bar{z}_i^{(n)},\ \bar{z}_j^{(n)})\,\bar{p}_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt),\tag{4}$$

где $\bar{p}_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt)$ — пуассоновская мера с независимыми значениями на $\bar{\Theta}\times[0,\ \infty)$, для которой $\mathsf{M}\bar{p}_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt)=$ $=\frac{1}{n}\bar{m}(d\theta)\,dt$. Начальные условия для $\bar{z}_i^{(n)}(t)$: $\bar{z}_i^{(n)}(0)=$ $=z_i^{(n)}(0)$. Имеем:

$$\int_{\bar{\Theta}}|\bar{f}(\theta,\ z,\ z')|\,m(d\theta)=$$

$$=\int_{\Theta}|f(\theta,\ z,\ z')|\,m(d\theta)+|a(z,\ z')+A(z)|\leqslant c\,(1+|z|+|z'|),$$

$$\int_{\bar{\Theta}}|\bar{f}(\theta,\ z,\ z')-\bar{f}(\theta,\ \bar{z},\ \bar{z}')|\,\bar{m}(d\theta)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\Theta}|f(\theta,\ z,\ z')-f(\theta,\ \bar{z},\ \bar{z}')|\,m(d\theta)+$$

$$+|a(z,\ z')-a(\bar{z},\ \bar{z}')|+|A(z)-A(\bar{z})|\leqslant$$

$$\leqslant c\,(|z-\bar{z}|+|z'-\bar{z}'|).$$

Следовательно, для системы (4) выполнены условия теоремы 1 § 3. Для всех $\varphi\in C_Z$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi(z)\,\bar{\mu}_t^{(n)}(dz)=\int\varphi(z)\,\bar{\lambda}_t(dz)$$

в смысле сходимости по вероятности, $\bar{\lambda}_t(dz)$ — неслучайная вероятностная мера, для которой

$$\frac{d}{dt}\int\varphi(z)\,\bar{\lambda}_t(dz)=$$

$$=\iiint[\varphi(z+\bar{f}(\theta,\ z,\ z'))-\varphi(z)]\,m(d\theta)\,\bar{\lambda}_t(dz)\,\bar{\lambda}_t(dz).\tag{5}$$

Для системы (4) $\bar{A}(z)=0$, $\bar{a}(z,\ z')=0$ и

$$\bar{b}(z,\ z')=\int_{\Theta}\bar{f}(\theta,\ z,\ z')\,\bar{m}(d\theta)=$$

$$=A(z)+a(z,\ z')+\int_{\Theta}f(\theta,\ z,\ z')\,m(d\theta)=b(z,\ z'),$$

а

$$\int \lambda(|f(\theta, z, z') - \bar{f}(\theta, z, z')|)\, \bar{m}(d\theta) =$$
$$= \bar{m}\lambda\left(\frac{|A(z) + a(z, z')|}{\bar{m}}\right) \leqslant \varepsilon_{\bar{m}}(\rho(|z|) + \rho(|z'|)).$$

В силу леммы 2

$$\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda(|z_i^{(n)}(t) - \bar{z}_i^{(n)}(t)|) \leqslant \varepsilon_{\bar{m}} c_1(t), \tag{6}$$

где $c_1(t)$ — не зависящая от n и $\bar{m}$ возрастающая функция.

Из леммы 1 вытекает, что

$$\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [\rho(|z_i^{(n)}(t)|) + \rho(|\bar{z}_i^{(n)}(t)|)] \leqslant \bar{c}_1(t), \tag{7}$$

где $\bar{c}_1(t)$ — возрастающая функция, не зависящая от $\bar{m}$ и n. Пусть $\varphi \in C_Z$. Для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое c_ε, что

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon(1 + \rho(x) + \rho(y)) + c_\varepsilon\lambda(|x - y|).$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\varphi(z_i^{(n)}(t)) - \varphi(\bar{z}_i^{(n)}(t))| \leqslant \varepsilon(1 + 2\bar{c}_1(t)) + c_\varepsilon\varepsilon_{\bar{m}} c_1(t).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{M}\left|\int \varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\,\bar{\lambda}_t(dz)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(1 + 2\bar{c}_1(t)) + c_\varepsilon\varepsilon_{\bar{m}} c_1(t). \tag{8}$$

Пусть $\tilde{m} > \bar{m}$ и $\tilde{\lambda}_t(dz)$ — предельная статистическая функция для системы вида (6), в которой вместо $\bar{m}$ фигурирует $\tilde{m}$. Из неравенства (8) вытекает, что

$$\left|\int \varphi(z)\,\tilde{\lambda}_t(dz) - \int \varphi(z)\,\bar{\lambda}_t(dz)\right| \leqslant 2\varepsilon(1 + 2\bar{c}_1(t)) + c_\varepsilon(\varepsilon_{\bar{m}} + \varepsilon_{\tilde{m}})\,c_1(t)$$

и значит левая часть неравенства стремится к нулю при $\bar{m}$, $\tilde{m} \to \infty$. Это означает, что меры $\bar{\lambda}_t(dz)$ слабо сходятся к некоторой мере $\lambda_t(dz)$ при $\bar{m} \to \infty$. Переходя в (8) к пределу при $\bar{m} \to \infty$, получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{M}\left|\int \varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\,\lambda_t(dz)\right| = 0$$

(в силу произвольности $\varepsilon > 0$). Отсюда вытекает существование предельной функции распределения для последовательности $\mu_t^{(n)}(dz)$. Обозначим $\bar{\lambda}_t(dz)$, полученную при данном выборе $\bar{m}$, через $\lambda_t^{\bar{m}}(dz)$. Интегрируя равенство (5), подставив туда предварительно значение $\bar{f}$ и меры $\bar{m}(d\theta)$, будем иметь:

$$\int \varphi(z)\lambda_t^{\bar{m}}(dz) = \int \varphi(z)\lambda_0(dz) + \\ + \int_0^t \iiint [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_s^{\bar{m}}(dz)\, \lambda_s^{\bar{m}}(dz')\, ds + \\ + \int_0^t \bar{m}\left[\varphi\left(z + \frac{1}{\bar{m}}(A(z) + a(z, z'))\right) - \varphi(z)\right] \lambda_s^{\bar{m}}(dz)\, \lambda_s^{\bar{m}}(dz')\, ds. \quad (9)$$

Из слабой сходимости $\lambda_t^{\bar{m}}$ к λ_t вытекает, что левая часть (9) сходится к $\int \varphi(z)\lambda_t(dz)$. Кроме того, для всех s функции

$$\iiint [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_s^{\bar{m}}(dz)\, \lambda_s^{\bar{m}}(dz')$$

ограничены и сходятся к функции

$$\iiint [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_s(dz)\, \lambda_s(dz')$$

$\left(\int \left[\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)\right] m(d\theta)\right.$ — непрерывная ограниченная функция двух переменных, а $\lambda_s^{\bar{m}}(dz)\lambda_s^{\bar{m}}(dz')$ слабо сходится в $\left.Z^2\right)$. Поэтому второе слагаемое в правой части (9) сходится к

$$\int_0^t \iiint [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_s(dz)\, \lambda_s(dz')\, ds.$$

Пусть теперь $\varphi(z) \in C_Z^1$. Тогда функции $\bar{m}\left[\varphi\left(z + \frac{1}{\bar{m}}(A(z) + a(z, z'))\right) - \varphi(z)\right]$ ограничены величиной $O(|A(z)| + |a(z, z')|)$ и сходятся к $(\varphi'(z), A(z) + a(z, z'))$ равномерно на каждом компакте, так как в силу условия д) для всякого $\delta > 0$ существует такое γ, что

$$\int\limits_{|z|+|z'|>\gamma} (|A(z)| + |a(z, z')|)\, \lambda_s^{\bar m}(dz)\, \lambda_s^{\bar m}(dz') \leqslant$$

$$\leqslant \delta \int\limits_{|z|+|z'|>\gamma} (\rho(|z|) + \rho(|z'|))\, \lambda_s^{\bar m}(dz)\, \lambda_s^{\bar m}(dz') \leqslant$$

$$\leqslant 2\delta \int \rho(z)\, \lambda_s^{\bar m}(dz) \leqslant 2\delta c_1(t) \quad (10)$$

на основании (8). Какова бы ни была ограниченная непрерывная функция $\psi(t)$, равная t при $|t| \leqslant \gamma$,

$$\lim_{\bar m \to \infty} \int\limits_0^t \iint \psi\Big(\bar m\Big[\varphi\Big(z + \frac{1}{\bar m}(A(z) +$$

$$+ a(z, z'))\Big) - \varphi(z)\Big]\Big)\, \lambda_s^{\bar m}(dz)\, \lambda_s^{\bar m}(dz')\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \iint \psi((\varphi'(z),\ A(z) + a(z,\ z')))\, \lambda_s(dz)\, \lambda_s(dz')\, ds.$$

Используя это равенство и оценку (10), убеждаемся, что

$$\lim_{\bar m \to \infty} \int\limits_0^t \iint \bar m\Big[\varphi\Big(z + \frac{1}{\bar m}(A(z) + a(z,\ z'))\Big) -$$

$$- \varphi(z)\Big]\, \lambda_s(dz)\, \lambda_s(dz')\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t (\varphi'(z),\ A(z) + a(z,\ z'))\, \lambda_s(dz)\, \lambda_s(dz')\, ds.$$

Переходя в (9) к пределу при $\bar m \to \infty$ с учетом предыдущих равенств, убеждаемся в справедливости уравнения (5). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема справедлива и для того случая, когда мера $m(d\theta)$ σ-конечна. Единственное отличие в доказательстве заключается в том, что хотя $\int [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)$ уже не обязательно будет ограниченной функцией, но она непрерывна и для всякого $\delta > 0$ можно указать такое γ, что при $|z| + |z'| > \gamma$

$$\Big|\int [\varphi(z + f(\theta,\ z,\ z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\Big| \leqslant \delta(\rho(z) + \rho(|z'|))$$

для $\varphi \in C_Z^1$ в силу условия д). Отсюда получаем, используя оценку (7), что

$$\lim_{\overline{m}\to\infty} \int_0^t \iiint [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \\ - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_s^{\overline{m}}(dz)\, \lambda_s^{\overline{m}}(dz')\, ds = \\ = \int_0^t \iiint [\varphi(z+f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_s(dz)\, \lambda_s(dz').$$

Замечание 2. Если функции $|A(z)|$, $|a(z, z')|$ и $\int |f(\theta, z, z')|\, m(d\theta)$ ограничены, то условие 2) теоремы выполнено, если взять любые $\lambda(t)$ и $\rho(t)$, для которых выполнено а), б), в), е) (условия а), б), в) не связаны с коэффициентами уравнения, а при компактности $\mu_0^{(n)}$ всегда существует $\rho(t)$, для которого выполнено е)). Действительно, $m\lambda\left(\frac{1}{m}|A(z)+a(z, z')|\right) \to \lambda'(0)=0$ равномерно по z, z', так что г) будет иметь место при $\varepsilon_n = \sup_{z, z'} n\lambda\left(\frac{1}{n}|A(z)+ + a(z, z')|\right)$, д) вытекает из ограниченности числителя и того, что знаменатель стремится к бесконечности.

Рассмотрим теперь предельное поведение единичной частицы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $z_1^{(n)}(0)$ *сходится к* $z_1(0)$. *Тогда конечномерные распределения процесса* $z_1^{(n)}(t)$ *сходятся к конечномерным распределениям процесса* $\bar z(t)$, *являющегося решением стохастического дифференциального уравнения*

$$d\bar z(t) = \bar a(t, \bar z(t))\, dt + \int_Z \int_\Theta f(\theta, \bar z(t), z')\, \bar p(d\theta \times dz' \times dt)$$

с начальным условием $\bar z(0) = z_1(0)$, *где* $\bar p(d\theta \times dz \times dt)$ — *пуассоновская мера с независимыми значениями на* $\Theta \times Z \times \times [0, \infty)$, *для которой* $\mathsf{M}\bar p(d\theta \times dz \times dt) = m(d\theta)\, \lambda_t(dz)\, dt$, $a(t, z) = A(z) + \int a(z, z')\, \lambda_t(dz')$, *а* $\lambda_t(dz)$ — *предельная статистическая функция системы, существование которой утверждается в теореме* 1.

Доказательство. Пусть $z_i^{(n,r)}(t)$ — решение системы уравнений

$$dz_i^{(n,r)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\bar\Theta} f_r(\theta,\ z_i^{(n,r)},\ z_j^{(n,r)})\, p_{ij}^{(n,r)}(d\theta \times dt), \tag{11}$$

где $z_i^{(n,r)}(0) = z_i(0)$, а меры $p_{ij}^{(n,r)}$ и функции f_r такие, как в уравнении (4), если $\bar m = r$. Из теоремы 2 § 3 вытекает, что конечномерные распределения $z_1^{(n,r)}(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\hat z_r(t)$, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\hat z_r(t) = \int_Z \frac{1}{r}[A(\hat z_r(t)) + a(\hat z_r(t),\ z')]\, \bar p_r(\{\theta\} \times dz' \times dt) +$$
$$+ \int_\Theta \int_Z f(\theta,\ \hat z_r(t),\ z')\, \bar p_r(d\theta \times dz' \times dt) \tag{12}$$

с начальным условием $z_1(0)$, пуассоновская мера $\bar p_r(d\theta \times \times dz \times dt)$ на $\bar\Theta \times Z \times [0,\ \infty)$ имеет независимые значения, $\mathsf{M}\bar p_r(\{\theta\} \times dz \times dt) = r\lambda_t^{(r)}(dz)\ dt$, $\mathsf{M}\bar p(d\theta \times dz \times dt) = m(d\theta)\lambda_t^{(r)}(dz)\,dt$ при $d\theta \in \Theta$, $\lambda_t^{(r)}(dz)$ — предельная статистическая функция распределения для системы (12). Используя оценки леммы 2, получаем:

$$\mathsf{M}\lambda(|z_1^{(n)}(t) - z_1^{(n,r)}(t)|) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathsf{M}\int_0^t \Big\{\int_\Theta [\lambda(|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s) +$$
$$+ f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)) - f(\theta,\ z_1^{(n,r)}(s),\ z_j^{(n,r)})(s))|) -$$
$$- \lambda(|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s)|) -$$
$$- \frac{\lambda'(|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s)|)}{|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s)|}(f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)) -$$
$$- f(\theta,\ z_1^{(n,r)}(s),\ z_j^{(n,r)}(s)),\ z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s))]\, m(d\theta) +$$
$$+ r\Big[\lambda\Big(\Big|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s) + \frac{1}{r}(A(z_1^{(n)}(s)) +$$
$$+ a(z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)))\Big|\Big) - \lambda(|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s)|) -$$
$$- \frac{\lambda'(|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s)|)}{r\,|z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s)|}(A(z_1^{(n)}(s)) +$$
$$+ a(z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)),\ z_1^{(n)}(s) - z_1^{(n,r)}(s))\Big\}\, ds.$$

Воспользовавшись свойством функции $\lambda(t)$, получаем:

$$\mathsf{M}\lambda(|z_1^{(n)}(t)-z_1^{(n,r)}(t)|)\leqslant cc_1\int_0^t \mathsf{M}\lambda(|z_1^{(n)}(s)-z_1^{(n,r)}(s)|)\,ds+$$

$$+\mathsf{M}\frac{cc_1}{n}\sum_{j=1}^n\int_0^t \lambda(|z_j^{(n)}(s)-z_j^{(n,r)}(s)|)\,ds+$$

$$+\mathsf{M}\frac{c}{n}r\int_0^t\sum_{j=1}^n \lambda\left(\frac{1}{r}|A(z_1^{(n)}(s))+a(z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))|\right)ds\leqslant$$

$$\leqslant cc_1\int_0^t \mathsf{M}\lambda(|z_1^{(n)}(s)-z_1^{(n,r)}(s)|)\,ds+cc_1\varepsilon_r c_1(t)+$$

$$+c\varepsilon_r\int_0^t \mathsf{M}\left(\rho(|z_1^{(n)}(s)|)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\rho(|z_j^{(n)}(s)|)\right)ds.$$

В условиях теоремы 1 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_0^t\rho(|z_j^{(n)}(s)|)\,ds<\infty$ (это вытекает из леммы 1 и замечания 1 к ней). Используя выкладки, проведенные в лемме 1, можем записать неравенство

$$\mathsf{M}\rho(|z_1^{(n)}(t)|)\leqslant\rho(|z_1^{(n)}(0)|)+$$

$$+2c_1\int_0^t \mathsf{M}\rho(|z_1^{(n)}(s)|)\,ds+2c_1\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\int_0^t\rho(|z_j^{(n)}(s)|)\,ds.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{M}\rho(|z_1^{(n)}(t)|)\leqslant$$

$$\leqslant\left[\varlimsup_{n\to\infty}\rho(|z_1^{(n)}(0)|)+2c_1\varlimsup_{n\to\infty}\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\int_0^t\rho(|z_j^{(n)}(s)|)\,ds\right]e^{2c_1t}. \quad (13)$$

Отсюда вытекает существование такой возрастающей функции $c_2(t)$, что выполнено неравенство

$$\mathsf{M}\lambda(|z_1^{(n)}(t)-z_1^{(n,r)}(t)|)\leqslant$$

$$\leqslant cc_1\int_0^t \mathsf{M}\lambda(|z_1^{(n)}(s)-z_1^{(n,r)}(s)|)\,ds+\varepsilon_r c_2(t),$$

а значит и неравенство

$$\mathsf{M}\lambda\left(\left|z_1^{(n)}(t)-z_1^{(n,r)}(t)\right|\right)\leqslant\varepsilon_r c_2(t)\,e^{cc_1t}.$$

Переходя к пределу в неравенстве

$$\mathsf{M}\lambda\left(\left|z_1^{(n,r)}(t)-z_1^{(n,l)}(t)\right|\right)\leqslant c\,(\varepsilon_r+\varepsilon_l)\,c_2(t)\,e^{cc_1t},$$

получаем

$$\mathsf{M}\lambda\left(\left|\tilde z_l(t)-\tilde z_r(t)\right|\right)\leqslant c\,(\varepsilon_r+\varepsilon_l)\,c_2(t)\,e^{cc_1t},$$

где конечномерные распределения $\tilde z_l(t)$ совпадают с конечномерными распределениями $\hat z_l(t)$. Отсюда следует, что конечномерные распределения процессов $\hat z_r(t)$ при $r\to\infty$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого процесса. Если этот процесс обозначить $\hat z(t)$, то тогда к его конечномерным распределениям будут сходиться конечномерные распределения процессов $z_1^{(n)}(t)$. Действительно, если $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ — равномерно непрерывные во всем пространстве ограниченные функции, то при $t_1<\ldots<t_m$

$$\left|\mathsf{M}\prod_{j=1}^m\varphi_j\left(z_1^{(n)}(t_j)\right)-\mathsf{M}\prod_{j=1}^m\varphi_j\left(\hat z(t_j)\right)\right|\leqslant\left|\mathsf{M}\prod_{j=1}^m\varphi_j\left(z_1^{(n)}(t_j)\right)-\right.$$
$$\left.-\mathsf{M}\prod_{j=1}^m\varphi_j\left(z_1^{(n,r)}(t_j)\right)\right|+\left|\mathsf{M}\prod_{j=1}^m\varphi_j\left(z_1^{(n,r)}(t_j)\right)-\mathsf{M}\prod_{j=1}^m\varphi_j\left(\hat z_r(t_j)\right)\right|+$$
$$+\left|\mathsf{M}\prod_{j=1}^m\varphi_j\left(\hat z_r(t_j)\right)-\mathsf{M}\prod_{j=1}^m\varphi_j\left(\hat z(t_j)\right)\right|.$$

Второе слагаемое справа стремится к нулю при $n\to\infty$, первое стремится к нулю равномерно по n при $r\to\infty$, а третье стремится к нулю при $r\to\infty$.

Пусть $\varphi\in C_Z^1$. Тогда, каковы бы ни были непрерывная ограниченная функция $\Phi(z_1,\ldots,z_m)$ на Z^m и $t_1<\ldots<t_m<t$ имеет место равенство

$$\mathsf{M}\Phi\left(\hat z_r(t_1),\ldots,\hat z_r(t_m)\right)\left[\varphi\left(\hat z_r(t)\right)-\varphi\left(\hat z_r(t_m)\right)\right]=$$
$$=\mathsf{M}\Phi\left(\hat z_r(t_1),\ldots,\hat z_r(t_m)\right)\int_{t_m}^{t}\int_Z\left(r\left[\varphi\left(\hat z_r(s)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{1}{r}\left(A\left(\hat z_r(s)\right)+a\left(\hat z_r(s),\ z\right)\right)\right)-\varphi\left(\hat z_r(s)\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\int_\Theta\left[\varphi\left(\hat z_r(s)+f\left(\theta,\hat z_r(s),z\right)\right)-\varphi\left(\hat z_r(s)\right)\right]\right)\lambda_s^{(r)}(dz)\,ds.\quad(14)$$

Функция

$$\psi_r(s, z) = \int_Z \left(r\left[\varphi\left(z + \frac{1}{r}(A(z) + a(z, z'))\right) - \varphi(z)\right] + \right.$$
$$\left. + \int_\Theta [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\right) \lambda_s^{(r)}(dz')$$

при $r \to \infty$ равномерно сходится к функции

$$\psi(s, r) = (\varphi'(z), \bar{a}(s, z)) + \\ + \int_\Theta \int_Z [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \lambda_s(dz'). \quad (15)$$

Левая часть равенства (14) при $r \to \infty$ сходится к

$$\mathsf{M}\Phi(\hat{z}(t_1), \ldots, \hat{z}(t_m))[\varphi(\hat{z}(t)) - \varphi(\hat{z}(t_m))].$$

Если будет доказано, что

$$\lim_{r\to\infty} \mathsf{M}\Phi(\hat{z}_r(t_1), \ldots, \hat{z}_r(t_m)) \int_{t_m}^{t} \psi_r(s, \hat{z}_r(s))\, ds = \\ = \mathsf{M}\Phi(\hat{z}(t_1), \ldots, \hat{z}(t_m)) \int_{t_m}^{t} \psi(s, \hat{z}(s))\, ds, \quad (16)$$

то тогда в (14) можно будет перейти к пределу и получить равенство

$$\mathsf{M}\Phi(\hat{z}(t_1), \ldots, \hat{z}(t_m))[\varphi(\hat{z}(t)) - \varphi(\hat{z}(t_m))] = \\ = \mathsf{M}\Phi(\hat{z}(t_1), \ldots, \hat{z}(t_m)) \left\{ \int_{t_m}^{t} (\varphi'(\hat{z}(s)), \bar{a}(s, \hat{z}(s)))\, ds + \right. \\ \left. + \int_{t_m}^{t} \int_\Theta [\varphi(\hat{z}(s) + f(\theta, \hat{z}(s), z')) - \varphi(\hat{z}(s))]\, m(d\theta)\, \lambda_s(dz')\, ds. \right. \quad (17)$$

Для доказательства (16) достаточно показать, что процессы $\hat{z}_r(t)$ равномерно относительно r стохастически непрерывны. Имеем:

$$\mathsf{M}\lambda(|\hat{z}_r(t+h) - \hat{z}_r(t)|) = \\ = \mathsf{M} \int_t^{t+h} \int_Z \left[\left|\lambda\left(\left|\hat{z}_r(s) + \frac{1}{r}(A(z) + a(z, z'))\right|\right)\right| - \right.$$

$$-\lambda(|\hat{z}_r(s)|)\Big]r+\int\limits_{\Theta}[\lambda(|\hat{z}_r(s)+f(\theta,\ \hat{z}_r(s),\ z')|)-$$

$$-\lambda(|\hat{z}_r(s)|)]\,m(d\theta)\,\lambda_s^{(r)}(dz')\,ds\leqslant c_2\mathsf{M}\int\limits_t^{t+h}\lambda(|\hat{z}_r(s)|)\,ds=O(h).$$

Мы использовали свойства функции $\lambda(t)$ и равномерную ограниченность $\mathsf{M}\lambda(\hat{z}_r(s))$, которая вытекает из предыдущих оценок. Отсюда вытекает равенство (17). Значит $\hat{z}(t)$ является марковским процессом, который обладает следующим свойством: для всякой функции $\varphi\in C_Z^1$ процесс

$$\varphi(\hat{z}(t))-\int\limits_0^t\Big[(\varphi'(\hat{z}(s)),\ \bar{a}(s,\ \hat{z}(s)))+$$

$$+\int\limits_{\Theta}\int\limits_{Z}[\varphi(\hat{z}(s)+f(\theta,\ \hat{z}(s),\ z))-\varphi(\hat{z}(s))]\,m(d\theta)\,\lambda_s(dz)\Big]\,ds$$

является мартингалом. Отсюда и вытекает, что конечномерные распределения процесса $\hat{z}(t)$ совпадают с конечномерными распределениями процесса $\bar{z}(t)$, указанного в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости распределений функционалов от процессов $z_1^{(n)}(t)$. Для этого нам понадобится исследование компактности распределений процессов типа $z_1^{(n)}(t)$ в пространстве функций без разрывов второго рода. Обозначим через $D_{[0,T]}(X)$, где X — некоторое конечномерное линейное пространство функций $x(t)$, $t\in[0,\ T]$, у которых существуют в каждой точке $t\in[0,\ T)$ пределы справа, $t\in(0,\ T]$ — пределы слева, $x(t+)=x(t)$, $t<T$, $x(T)=x(T-)$. В $D_{[0,T]}(X)$ вводится метрика ρ_D (см., например, [11], т. 1, гл. 6, § 5). Слабая сходимость и компактность мер в $D_{[0,T]}(X)$ определяется обычным образом. Пусть $\xi_n(t)$ — последовательность случайных процессов с траекториями в $D_{[0,T]}(X)$. Будем говорить, что она компактна в $D_{[0,T]}(X)$, если последовательность мер μ_n, отвечающих этим процессам, слабо компактна в $D_{[0,T]}(X)$.

Лемма 3. *Пусть $\xi_n(t)$, $t\in[0,\ T]$ — последовательность процессов со значениями в Z, $F\subset C_Z$ — множество финитных функций, плотное в пространстве всех финитных функций из C_Z. Для того чтобы последовательность процессов $\xi_n(t)$ в пространстве $D_{[0,T]}(Z)$ была компактна,* *необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:*

а) *последовательность величин* $\sup\limits_{t\leqslant T}|\xi_n(t)|$ *ограничена по вероятности;*

б) *для всякой* $\varphi\in F$ *последовательность процессов* $\varphi(\xi_n(t))$ *компактна в* $D_{[0,T]}(R)$.

Доказательство. Необходимость условий а) и б) очевидна. Для доказательства достаточности можно рассмотреть лишь процессы $\xi_n(t)$, которые при некотором c удовлетворяют условию $|\xi_n(t)|\leqslant c$, так как из условия а) вытекает, что для достаточно больших T $\sup\limits_n \mathsf{P}\{\sup\limits_{t\leqslant T}|\xi_n(t)|>c\}$ можно сделать сколь угодно малым. Покажем теперь, что для всякого набора $\varphi_1,\ldots,\varphi_m\in F$ последовательность процессов $(\varphi_1(\xi_n(t)),\ldots,\varphi_m(\xi_n(t)))$ в R^m компактна в $D_{[0,T]}(R^m)$. Оценим величину

$$\gamma_n(\varepsilon,h)=\mathsf{P}\left\{\sup_{\substack{0<s_1<s_2<s_3\leqslant T\\ |s_3-s_1|\leqslant h}}\min\left[\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(\xi_n(s_1))-\varphi_k(\xi_n(s_2))|^2;\right.\right.$$
$$\left.\left.\sum_{k=1}^{m}|\varphi_k(\xi_n(s_2))-\varphi_k(\xi_n(s_3))|^2\right]>\varepsilon\right\}.$$

Обозначим для $\varphi,\ \psi\in F,\ h>0$

$$\Delta_n(\varphi,\psi,h)=\sup_{\substack{0\leqslant s_1<s_2<s_3\leqslant T\\ |s_3-s_1|\leqslant h}}\min[|\varphi(\xi_n(s_1))-$$
$$-\varphi(\xi_n(s_2))|;\ |\psi(\xi_n(s_2))-\psi(\xi_n(s_3))|].$$

Тогда $\gamma_n(\varepsilon,h)\leqslant\mathsf{P}\left\{\max\limits_{i,j}\Delta_n(\varphi_i,\varphi_j,h)>\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\right\}$, так как, если

$$\sum_{k=1}^{m}(\varphi_k(\xi_n(s_1))-\varphi_k(\xi_n(s_2)))^2>\varepsilon$$

и $\sum\limits_{k=1}^{m}(\varphi_k(\xi_n(s_2))-\varphi_k(\xi_n(s_3)))^2>\varepsilon$, то найдутся такие $i,\ j$, что

$$|\varphi_i(\xi_n(s_1))-\varphi_i(\xi_n(s_2))|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}},$$
$$|\varphi_j(\xi_n(s_2))-\varphi_j(\xi_n(s_3))|>\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}.$$

Поэтому

$$\gamma_n(\varepsilon, h) \leqslant \sum_{i,j=1}^{m} \mathsf{P}\left\{\Delta_n(\varphi_i, \varphi_j, h) > \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{m} \left[\mathsf{P}\left\{\Delta_n(\varphi_i+\varphi_j, \varphi_i+\varphi_j, h) > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\right\} + \right.$$

$$\left. + \mathsf{P}\left\{\Delta_n(\varphi_i, \varphi_i, h) > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\right\} + \mathsf{P}\left\{\Delta_n(\varphi_j, \varphi_j, h) > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}\right\}\right].$$

Мы воспользовались тем, что если

$$|\varphi_i(\xi_n(s_1)) - \varphi_i(\xi_n(s_2))| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}},$$

$$|\varphi_j(\xi_n(s_2)) - \varphi_j(\xi_n(s_3))| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}},$$

$$\min[|\varphi_i(\xi_n(s_1)) - \varphi_i(\xi_n(s_2))|; \ \ |\varphi_i(\xi_n(s_2)) - \varphi_i(\xi_n(s_3))|] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}},$$

$$\min[|\varphi_j(\xi_n(s_1)| - \varphi_j(\xi_n(s_2))|; \ \ |\varphi_j(\xi_n(s_2)) - \varphi_j(\xi_n(s_3))|] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}},$$

то

$$|\varphi_i(\xi_n(s_1)) - \varphi_i(\xi_n(s_2))| - |\varphi_j(\xi_n(s_1)) - \varphi_j(\xi_n(s_2))| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}},$$

$$|\varphi_j(\xi_n(s_2)) - \varphi_j(\xi_n(s_3)| - |\varphi_i(\xi_n(s_2)) - \varphi_i(\xi_n(s_3))| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}},$$

а значит

$$|\psi_{i,j}(\xi_n(s_1)) - \psi_{i,j}(\xi_n(s_2))| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$$

и

$$|\psi_{i,j}(\xi_n(s_2)) - \psi_{i,j}(\xi_n(s_3))| > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}},$$

где $\psi_{i,j} = \varphi_i + \varphi_j$. Поэтому $\sup\limits_n \gamma_n(\varepsilon, h) \to 0$ для всех $\varepsilon > 0$ при $h \to 0$. Кроме того, из условия б) вытекает, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h\to 0} \sup_n \mathsf{P}\left\{\sup_{s\leqslant h} \sum_{k=1}^{m} [(\varphi_k(\xi_n(s)) - \varphi_k(\xi_n(0)))^2 + \right.$$
$$\left. + (\varphi_k(\xi_n(T-s)) - \varphi_k(\xi_n(T)))^2] > \varepsilon\right\} = 0.$$

Отсюда и вытекает, что последовательность процессов $(\varphi_1(\xi_n(t)), \ldots, \varphi_m(\xi_n(t)))$ компактна. Если $X = R^m$ и $|\varphi_k(x) - x^k| \leqslant \delta$ при $|x| \leqslant c$ (x^k — k-ая координата x), то $\sup_t |\xi_n(t) - \eta_n(t)| \leqslant \sqrt{m}\,\delta$, где $\eta_n(t)$ имеет k-ой координатой $\varphi_k(\xi_n(t))$. Из компактности $\eta_n(t)$ в $D_{[0,T]}(R^{(m)})$ и произвольности $\delta > 0$ вытекает доказательство леммы.

Замечание. Если последовательность процессов $\xi_n(t)$ имеет вид $\xi_n(t) = \alpha_n(t) + \beta_n(t)$, где $\alpha_n(t)$ — последовательность непрерывных процессов, а $\beta_n(t)$ — процессов в $D_{[0,T]}(X)$, причем и $\alpha_n(t)$ и $\beta_n(t)$ компактны, то и последовательность $\xi_n(t)$ компактна.

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 для любого $T > 0$ последовательность мер μ_n в $D_{[0,T]}(Z)$, отвечающих процессам $z_1^{(n)}(t)$, слабо сходится к мере $\bar\mu$, отвечающей процессу $\bar z(t)$, определенному в теореме 2.*

Доказательство. Достаточно проверить слабую компактность последовательности процессов $z_1^{(n)}(t)$ в $D_{[0,T]}(Z)$. Покажем, что $z_1^{(n)}(t)$ равномерно относительно n ограничены на каждом отрезке. Пусть $\rho_1(t)$ — функция, удовлетворяющая условиям: $\rho_1(t) \leqslant \rho(t)$; $|\rho_1'(t)| \leqslant 1$; $\rho_1(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Тогда

$$\rho_1(|z_1^{(n)}(t)|) \leqslant \rho_1(|z_1^{(n)}(0)|) + \\ + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t |\rho_1'(z_1^{(n)}(s))| \Bigl(\frac{z_1^{(n)}(s)}{|z_1^{(n)}(s)|},\ A(z_1^{(n)}(s))\Bigr) + \\ + a(z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))|\,ds + \\ + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\int_\Theta |\rho_1(|z_1^{(n)}(s) + f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))|) - \\ - \rho_1(|z_1^{(n)}(s)|)|\,p_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds).$$

Так как правая часть монотонно возрастает с t, то

$$\sup_{t \leqslant T} \rho_1(|z_1^{(n)}(t)|) \leqslant \rho(|z_1^{(n)}(0)|) + \\ + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T |A(z_1^{(n)}(s)) + a(z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))|\,ds + \\ + \sum_{j=1}^{n}\int_0^T\int_\Theta |f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))|\,p_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds).$$

Поэтому на основании свойства 2д) теоремы 1 при некотором c_2

$$\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}\rho_1(|z_1^{(n)}(t)|)\leqslant\rho(|z_1^{(n)}(0)|)+$$
$$+c_2\left[\mathsf{M}\int_0^T\rho(|z_1^{(n)}(s)|)\,ds+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{M}\int_0^T\rho(|z_j^{(n)}(s)|)\,ds\right].$$

Правая часть этого неравенства ограничена на основании неравенств (7) и (13). Таким образом условие а) леммы 3 выполнено. Записывая последнее неравенство для z_i (вместо z_1) и суммируя по i, получим:

$$\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_1(|z_i^{(n)}(t)|)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\rho(|z_i^{(n)}(0)|)+$$
$$+2c_2\int_0^T\mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho(|z_i^{(n)}(s)|)\,ds. \qquad (18)$$

Из этого неравенства вытекает, что величины

$$\sup_{t\leqslant T}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_1(|z_i^{(n)}(t)|)$$

ограничены по вероятности.

Далее, пусть $\varphi\in C_Z^1$ и финитна. Тогда

$$\varphi(z_1^{(n)}(t))=\varphi(z_1^{(n)}(0))+\alpha_n(t)+\beta_n(t),$$

где

$$\alpha_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t(\varphi'(z_1^{(n)}(s)),\ A(z_1^{(n)}(s))+a(z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s)))\,ds,$$

$$\beta_n(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^t[\varphi(z_1^{(n)}(s)+f(\theta,\ z_1^{(n)}(s),\ z_j^{(n)}(s))-$$
$$-\varphi(z_1^{(n)}(s))]\,p_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds).$$

В силу замечания к лемме 3 достаточно доказать отдельно компактность $\alpha_n(t)$, отдельно — $\beta_n(t)$. Из ограниченности и финитности $\varphi'(z)$ и условия 2д) теоремы 1 вытекает, что для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое c_ε, что $(\varphi'(z),$

$A(z)+a(z, z')) \leqslant c_\varepsilon + \varepsilon\rho(|z'|)$. Поэтому

$$|\alpha_n(t+h)-\alpha_n(t)| \leqslant c_\varepsilon h + \varepsilon \int_t^{t+h} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \rho(|z_j^{(n)}(s)|)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant c_\varepsilon h + \varepsilon \int_0^T \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \rho(|z_j^{(n)}(s)|)\,ds.$$

Из этого неравенства вытекает следующее:

$$\lim_{h\to 0}\sup_n \mathsf{P}\left\{\sup_{|s_1-s_2|\leqslant h} |\alpha_n(s_1)-\alpha_n(s_2)|>\delta\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}\sup_n \mathsf{M}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \int_0^T \rho(|z_j^{(n)}(s)|)\,ds.$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, то последовательность $\alpha_n(t)$ компактна. Так как при некотором c'

$$|\beta_n(t+h)-\beta_n| \leqslant$$
$$\leqslant c' \sum_{j=1}^n \int_t^{t+h}\int |f(\theta, z_1^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s))|\, p_{1j}^{(n)}(d\theta\times ds),$$

то достаточно доказать компактность последовательности процессов

$$\beta_n(t)=\sum_{j=1}^n \int_0^t \int |f(\theta, z_1^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s))|\, p_{1j}^{(n)}(d\theta\times ds).$$

Введем случайные величины $\tau_{n,N}=\inf\left[t\leqslant T, \sup_{s\leqslant t}(\rho(z_1^{(n)}(s))+\right.$ $\left.+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \rho(|z_i^{(n)}(s)|)>N\right]$; если множество таких t пусто, то полагаем $\tau_{n,N}=T$. Из (18) и ограниченности правой части этого неравенства вытекает, что $\mathsf{P}\{\tau_{n,N}=T\}$ выбором достаточно большого N можно сделать сколь угодно близким к единице для всех n. Положим $\tilde\beta_n^{(N)}(t)=\beta_n(\min[t, \tau_{n,N}])$. Если для всех N последовательность, $\tilde\beta_n^{(N)}(t)$ компактна, то в силу соотношения

$$\mathsf{P}\{\tilde\beta_n^{(N)}(t)=\beta_n(t),\ t\leqslant T\}=\mathsf{P}\{\tau_{n,N}=T\}$$

отсюда будет вытекать компактность последовательности β_n. Для доказательства компактности $\tilde\beta_n^{(N)}(t)$ заметим, что если

σ-алгебра $\mathcal{F}_t^{(n)}$ порождена $p_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt)$ при $s \leqslant t$; $i, j \leqslant n$, то для $h > 0$

$$\mathsf{M}[\tilde{\beta}_n^{(N)}(t+h) - \tilde{\beta}_n^{(N)}(t)/\mathcal{F}_t^{(n)}] = \\ = \mathsf{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\min[t,\tau_{n,N}]}^{\min[t+h,\tau_{n,N}]}\int_{\Theta}|f(\theta, z_1^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s)|\,m(d\theta) \times \right. \\ \left. \times ds/\mathcal{F}_t^{(n)}\right] \leqslant c_1 \int_{\min[t,\tau_{N,n}]}^{\min[t+h,\tau_{N,n}]} \mathsf{M}\left[\rho(|z_1^{(n)}(s)|) + \right. \\ \left. + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(|z_j^{(n)}(s)|)/\mathcal{F}_t^{(n)}\right] ds \leqslant c_1 Nh$$

(мы воспользовались свойством 2д теоремы 1). Поэтому для $t_1 < t_2 < t_3$

$$\mathsf{M}\,|\tilde{\beta}_n^{(N)}(t_3) - \tilde{\beta}_n^{(N)}(t_2)| \cdot |\tilde{\beta}_n^{(N)}(t_2) - \tilde{\beta}_n^{(N)}(t_1)| \leqslant \\ \leqslant \mathsf{M}\,|\tilde{\beta}_n^{(N)}(t_2) - \tilde{\beta}_n^{(N)}(t_1)| \cdot \mathsf{M}[\tilde{\beta}_n^{(N)}(t_3) - \tilde{\beta}_n^{(N)}(t_2)/\mathcal{F}_{t_2}^{(n)}] \leqslant \\ \leqslant c_1^2 N^2 (t_3 - t_2)(t_2 - t_1) \leqslant c_1^2 N^2 (t_3 - t_1)^2.$$

Из этой оценки и теоремы Ченцова (см. [11], т. 1, стр. 508, теорема 3) вытекает компактность последовательности $\tilde{\beta}_n^{(N)}(t)$, а значит и доказательство теоремы.

Замечание. В условиях теоремы 1 последовательность процессов $\eta_\varphi^{(n)}(t) = \int \varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)$ также будет слабо компактна в $D_{[0,T]}(R)$ для $\varphi \in C_Z$ и поэтому величина $\sup\limits_{t \leqslant T}\left|\eta_\varphi^{(n)}(t) - \int \varphi(z)\,\lambda_t(dz)\right|$ будет сходиться к нулю по вероятности. Для доказательства компактности последовательности процессов $\eta_\varphi^{(n)}(t)$ заметим, что для $\varphi \in C_Z^1$ при некотором c'

$$|\eta_\varphi^{(n)}(t+h) - \eta_\varphi^{(n)}(t)| \leqslant \\ \leqslant c' \frac{1}{n}\sum_{i,j}\int_t^{t+h}\int_{\Theta}|f(\theta, z_i^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s))|\,p_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds),$$

так что достаточно показать компактность последовательности

$$\hat{\beta}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_{\Theta}|f(\theta, z_i^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s))|\,p_{ij}(d\theta \times ds).$$

Если положить

$$\hat{\tau}_{n,N}=\inf\left[t\leqslant T;\ \sup_{s\leqslant t}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho\left(\left|z_i^{(n)}(s)\right|\right)>N\right],$$

то компактность $\hat{\beta}_n(\min[t,\ \hat{\tau}_{n,N}])$ доказывается точно так, как и последовательности $\tilde{\beta}_n^{(N)}(t)$ при доказательстве теоремы 3.

Рассмотрим теперь совместное предельное поведение нескольких частиц. Не ограничивая общности можно считать, что это частицы $1, 2, \ldots, k$. Выпишем для них уравнения:

$$dz_i^{(n)}(t)=\left(A\left(z_i^{(n)}\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a\left(z_i^{(n)},\ z_j^{(n)}\right)\right)dt+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{\Theta}f\left(\theta,\ z_i^{(n)},\ z_j^{(n)}\right)p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt).$$

Первые два члена справа асимптотически эквивалентны величине $\bar{a}(t,\ z_i^{(n)}(t))$. Третью сумму справа запишем в следующем виде:

$$\int_{\Theta}\int_{Z}f\left(\theta,\ z_i^{(n)}(t),\ z\right)p_i^{(n)}(d\theta\times dz\times dt),$$

где

$$p_i^{(n)}(d\theta\times B\times dt)=\sum_{j=1}^{n}\chi_B\left(z_j^{(n)}(t)\right)p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt).$$

Как показано при доказательстве теоремы 2 $p_i^{(n)}(d\theta\times dz\times dt)$ при $n\to\infty$ слабо сходится к пуассоновской мере с независимыми значениями $p_i(d\theta\times dz\times dt)$, для которой $\mathsf{M}p_i(d\theta\times dz\times dt)=m(d\theta)\lambda_t(dz)\,dt$. Заметим теперь, что при $i\neq l$

$$\mathsf{M}\left(p_i^{(n)}(d\theta\times B\times dt)\,p_l^{(n)}(d\theta'\times B'\times dt)/\mathscr{F}_t^{(n)}\right)=$$
$$=\frac{1}{n}\chi_B\left(z_l^{(n)}(t)\right)\chi_B\left(z_j^{(n)}(t)\right)m(d\theta)\,m(d\theta')\,dt+$$
$$+\mathsf{M}\left(p_i^{(n)}(d\theta\times B\times dt)/\mathscr{F}_t^{(n)}\right)\times$$
$$\times\mathsf{M}\left(p_l^{(n)}(d\theta'\times B'\times dt)/\mathscr{F}_t^{(n)}\right)+O(1/n).$$

Из этого соотношения вытекает асимптотическая независимость пуассоновских мер $p_i^{(n)}$ и $p_l^{(n)}$ и, более того, асимптотическая независимость в совокупности мер $p_1^{(n)}, \ldots, p_k^{(n)}$. Поэтому из доказательства теоремы 2 вытекает, что при условии, что $z_i^{(n)}(0)$, $i=1, \ldots, k$ сходятся к $z_i(0)$, совместное распределение процессов $\{z_i^{(n)}(t),\ i=1, \ldots, k\}$ сходится к совместному распределению процессов $\{\bar{z}_i(t),\ i=1, \ldots, k\}$, являющихся решением системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\bar{z}_i(t)=\bar{a}(t,\ z_i(t))\,dt+\int f(\theta,\ \bar{z}_i(t),\ z)\,p_i(d\theta\times dz\times dt), \qquad \bar{z}_i(0)=z_i(0), \tag{19}$$

где $p_i(d\theta\times dz\times dt)$ — независимые между собой пуассоновские меры, для которых $\mathsf{M}p_i(d\theta\times dz\times dt)=m(d\theta)\,\lambda_t(dz)\,dt$.

Поскольку эти меры независимы, то и процессы $\bar{z}_i(t)$ независимы между собой. Используя это обстоятельство и сходимость в $D_{[0,T]}(Z)$ распределений $z_i^{(n)}(t)$ к распределению процесса $\bar{z}_i(t)$, убеждаемся, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $z_i^{(n)}(0)$ *при* $n\to\infty$ *сходится к* $z_i(0)$. *Тогда распределение* k-*мерного процесса* $(z_1^{(n)}(t), \ldots, z_k^{(n)}(t))$ *слабо сходится в* $D_{[0,T]}(Z^k)$ *к распределению процесса* $(\bar{z}_1(t), \ldots, \bar{z}_k(t))$, *являющегося решением системы* (19) *с независимыми пуассоновскими мерами* p_i.

Следствие. *Если* $z_1^{(n)}(0), \ldots, z_k^{(n)}(0)$ *ограничены, то каковы бы ни были ограниченные непрерывные в метрике* ρ_D *функции на* $D_{[0,T]}(Z)$ $G_1(z(\cdot)), \ldots, G_k(z(\cdot))$, *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathsf{M}\prod_{i=1}^{k}G_i(z_i^{(n)}(\cdot))-\prod_{i=1}^{k}\mathsf{M}G_i(z_i^{(n)}(\cdot))\right)=0.$$

Поскольку это соотношение достаточно проверить на подпоследовательностях, для которых существуют $\lim z_i^{(n)}(0)$, $i=1, 2, \ldots, k$, то оно вытекает из независимости $\bar{z}_1(t), \ldots$ $\ldots, \bar{z}_k(t)$.

§ 5. Флуктуации

Рассмотрим систему такого вида, как в предыдущем параграфе. Пусть $\mu_t^{(n)}(dz)$ — статистическая функция распределения системы, $\lambda_t(dz)$ — предельная статистическая функция распределения. Для достаточно больших n и достаточно хороших множеств A $\lim\mu_t^{(n)}(A)=\lambda_t(A)$. Нас будет интересовать отклонение $\mu_t^{(n)}(A)-\lambda_t(A)$ — флуктуация числа частиц в фазовом объеме A. С этой целью будет изучаться предельное поведение последовательности случайных (знакопеременных) мер

$$\nu_t^{(n)}(A) = \sqrt{n}\,[\mu_t^{(n)}(A) - \lambda_t(A)].$$

Эти меры в совокупности имеют неограниченную вариацию (вариация $\nu_t^{(n)}$ равна $2\sqrt{n}$). Поэтому рассчитывать на то, что в пределе получится случайная мера, не приходится. Свяжем с $\nu_t^{(n)}$ линейную случайную функцию, заданную на C_Z:

$$\nu_t^{(n)}(\varphi) = \int \varphi(z)\,\nu_t^{(n)}(dz)$$

и будем изучать предельное распределение $\nu_t^{(n)}(\varphi)$; возможно, оно будет существовать не для всех φ, а только для φ из некоторого линейного подмножества $L \subset C_Z$. Если для всех $\varphi \in L$ существует предельное распределение величины $\nu_t^{(n)}(\varphi)$, и оно совпадает с распределением $\nu_t(\varphi)$, то тогда для любого конечного набора $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \subset L$ совместное распределение величин $\nu_t^{(n)}(\varphi_1), \ldots, \nu_t^{(n)}(\varphi_m)$ сходится к совместному распределению $\nu_t(\varphi_1), \ldots, \nu_t(\varphi_m)$. Это вытекает из того, что для всех $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in R$ $\sum \alpha_k\varphi_k \in L$, и значит существует

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \nu_t^{(n)}(\varphi_k)\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{M}\exp\left\{i\nu_t^{(n)}\left(\sum_{1}^{m}\alpha_k\varphi_k\right)\right\};$$

непрерывность правой части по $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ вытекает из компактности семейства распределений векторов $\{(\nu_t^{(n)}(\varphi_1), \ldots$ $\ldots, \nu_t^{(n)}(\varphi_m)),\ n = 1, 2, \ldots\}$.

Остановимся сначала на чисто разрывных процессах. Если $\varphi \in C_Z$, то на основании формулы Ито

$$d\int \varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz) =$$
$$= \iiint [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\,\mu_t^{(n)}(dz)\,\mu_t^{(n)}(dz')\,dt +$$
$$+ \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \int [\varphi(z_i^{(n)} + f(\theta, z_i^{(n)}, z_j^{(n)})) - \varphi(z_i^{(n)})]\, q_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt).$$

Запишем уравнение для предельной статистической функции распределения (уравнение (2) § 3):

$$d\int \varphi(z)\,\lambda_t(dz) =$$
$$= \iiint [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\,\lambda_t(dz)\,\lambda_t(dz')\,dt. \quad (1)$$

Вычитая это уравнение из предыдущего и умножая разность на $\sqrt{n}$, получим после простых преобразований:

$$d \int \varphi(z)\, \nu_t^{(n)}(dz) = $$
$$= \iiint [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \mu_t^{(n)}(dz)\, \nu_t^{(n)}(dz')\, dt + $$
$$+ \iiint [\varphi(z + f(\theta, z, z')) - $$
$$- \varphi(z)]\, m(d\theta)\, \nu_t^{(n)}(dz)\, \lambda_t(dz')\, dt + d\eta_n(\varphi, t), \qquad (2)$$

где

$$d\eta_n(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \int_\Theta [\varphi(z_i^{(n)}(t) + $$
$$+ f(\theta, z_i^{(n)}(t), z_j^{(n)}(t))) + \varphi(z_j^{(n)}(t)) + f(\theta, z_j^{(n)}(t), z_i^{(n)}(t)) - $$
$$- \varphi(z_i^{(n)}(t)) - \varphi(z_j^{(n)}(t))]\, q_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt). \qquad (3)$$

Процесс $\eta_n(\varphi, t)$ представляет собой мартингал, скачки которого не превосходят величины $4\|\varphi\| \frac{1}{\sqrt{n}}$. Характеристика этого мартингала равна

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \int_0^t \int_\Theta [\varphi(z_i^{(n)}(s) + f(\theta, z_i^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s))) + $$
$$+ \varphi(z_j^{(n)}(s) + f(\theta, z_j^{(n)}(s), z_i^{(n)}(s))) - $$
$$- \varphi(z_i^{(n)}(s)) - \varphi(z_j^{(n)}(s))]^2\, m(d\theta)\, ds = $$
$$= \frac{1}{2} \int_0^t \iiint [Q_\theta \varphi(z, z')]^2\, m(d\theta)\, \mu_s^{(n)}(dz)\, \mu_s^{(n)}(dz')\, ds,$$

где $Q_\theta \varphi(z, z') = \varphi(z + f(\theta, z, z')) + \varphi(z' + f(\theta, z, z')) - \varphi(z) - \varphi(z')$. При $n \to \infty$ характеристика мартингала $\eta_n(\varphi, t)$ сходится к неслучайной функции времени

$$\frac{1}{2} \int_0^t \iiint [Q_\theta \varphi(z, z')]^2\, m(d\theta)\, \lambda_s(dz)\, \lambda_s(dz')\, ds. \qquad (4)$$

Отсюда вытекает, что конечномерные распределения последовательности мартингалов $\eta_n(\varphi, t)$ компактны. Если $\hat{\eta}(\varphi, t)$ — процесс, конечномерные распределения которого являются предельными для конечномерных распределений $\eta_n(\varphi, t)$, то $\hat{\eta}(\varphi, t)$ будет непрерывным мартингалом с неслучайной характеристикой (4). Поэтому $\hat{\eta}(\varphi, t)$ является гауссовским процессом с независимыми приращениями. Поскольку конечномерные распределения $\hat{\eta}(\varphi, t)$ полностью определяются характеристикой, то последовательность конечномерных распределений $\eta_n(\varphi, t)$ имеет единственную предельную точку, поэтому эта последовательность сходится. Таким образом установлено, что конечномерные распределения процессов $\eta_n(\varphi, t)$ сходятся к конечномерным распределениям гауссовского процесса с независимыми приращениями, у которого среднее равно нулю, а дисперсия совпадает с выражением (4). Пусть $\gamma(d\theta \times dz \times dz' \times ds)$ — гауссова случайная мера с независимыми значениями на $\Theta \times Z^2 \times [0, \infty)$, для которой

$$\mathsf{M}\gamma(d\theta \times dz \times dz' \times ds) = 0,$$
$$\mathsf{M}\gamma^2(d\theta \times dz \times dz' \times ds) = m(d\theta)\lambda_s(dz)\lambda_s(dz')\,ds.$$

Тогда для всякой измеримой ограниченной функции $g(\theta, z, z', s)$ случайный процесс

$$\zeta(t) = \int_0^t \int_\Theta \int_Z \int_Z g(\theta, z, z', s)\,\gamma(d\theta \times dz \times dz' \times ds)$$

будет гауссовским процессом с независимыми приращениями, для которого

$$\mathsf{M}\zeta(t) = 0,$$
$$\mathsf{M}\zeta^2(t) = \int_0^t \int_\Theta \int_Z \int_Z g^2(\theta, z, z', s)\,m(d\theta)\lambda_s(dz)\lambda_s(dz')\,ds.$$

Поэтому конечномерные распределения процесса $\hat{\eta}(\varphi, t)$ совпадают с конечномерными распределениями процесса

$$\zeta_\varphi(t) = \int_0^t \int\int\int Q_\theta\varphi(z, z')\,\gamma(d\theta \times dz \times dz' \times ds).$$

Предположим, что $\nu_t^{(n)}(\varphi)$ имеют предельное распределение, совпадающее с распределением $\nu_t(\varphi)$. Совершив в (1) предельный переход, получим следующее уравнение для $\nu_t(\varphi)$:

$$d\nu_t(\varphi) = \int\int\int Q_\theta\varphi(z, z')\,m(d\theta)\,\nu_t(dz)\,\lambda_t(dz')\,dt + d\zeta_\varphi(t). \qquad (5)$$

Введем оператор $S_t\varphi$ в C_Z, определяемый формулой

$$S_t\varphi(z) = \int\int Q_\theta\varphi(z, z')\,m(d\theta)\,\lambda_t(dz'). \qquad (6)$$

Это — ограниченный оператор в C_Z. Уравнение (4) можно переписать в виде

$$d\nu_t(\varphi) = \nu_t(S_t\varphi)\,dt + d\zeta_\varphi(t). \tag{7}$$

Покажем, как можно решить уравнение (7). Пусть при $s < t$ семейство линейных операторов U_s^t в C_Z удовлетворяет соотношениям

$$\frac{d}{d_s} U_s^t\varphi = -S_s U_s^t\varphi, \quad U_t^t\varphi = \varphi. \tag{8}$$

(Существование таких операторов вытекает из ограниченности S_s.) Тогда из (7) получим

$$d_s\nu_s(U_s^t\varphi) = \nu_s(dU_s^t\varphi) + d\nu_s(\psi)\,|_{\psi=U_s^t\varphi} =$$
$$= -\nu_s(S_sU_s^t\varphi)\,ds + \nu_s(S_sU_s^t\varphi)\,ds + d_s\zeta_\psi(s)\,|_{\psi=U_s^t\varphi} =$$
$$= \int\int\int Q_\theta U_s^t\varphi(z, z')\,\gamma(d\theta\times dz\times dz'\times ds).$$

Поэтому

$$\nu_t(\varphi) = \nu_0(U_0^t\varphi) + \int_0^t \int\int\int Q_\theta U_s^t\varphi(z, z')\,\gamma(d\theta\times dz\times dz'\times ds). \tag{9}$$

Ниже мы обоснуем формулу (9).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия: 1) существует предельная статистическая функция распределения $\lambda_t(dz)$ и для нее выполнено уравнение (1); 2) для всех $\varphi \in C_Z$ существует предел*

$$\nu_0(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left[\int \varphi(z)\,\mu_0^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\,\lambda(dz)\right],$$

3) *если $\hat{C}_Z$ — множество тех $\varphi \in C_Z$, для которых существует $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)$, то для всех $\varphi \in \hat{C}_Z$, какова бы ни была конечная мера $\mu(dz)$ на Z, $\int \varphi(z' + f(\theta, z', z))\,m(d\theta)\times$ $\times\mu(dz') \in \hat{C}_Z$.*

Тогда для всех $\varphi \in C_Z$ распределение $\nu_t^{(n)}(\varphi)$ сходится к распределению величины $\nu_t(\varphi)$, определяемой равенством (9).

Доказательство. Обозначим через $S_t^{(n)}(\omega)$ ограниченный случайный оператор на C_Z, определяемый равенством

$$S_t^{(n)}(\omega)\varphi(z)=\int\int[\varphi(z+f(\theta, z, z'))-\varphi(z)]\,m(d\theta)\,\lambda_t(dz')+$$
$$+\int\int[\varphi(z'+f(\theta, z', z))-\varphi(z')]\,m(d\theta)\,\mu_t^{(n)}(dz'). \qquad (10)$$

Уравнение (2) с помощью этого оператора может быть записано в следующем виде:

$$d\nu_t^{(n)}(\varphi)=\nu_t^{(n)}(S_t^{(n)}(\omega)\varphi)\,dt+d\eta_n(\varphi, t).$$

Определим семейство случайных операторов $U_s^t(n, \omega)\varphi$, $0\leqslant s\leqslant t$, $\varphi\in C_Z$, $U_t^t(n, \omega)\varphi=\varphi$, для которых

$$\frac{d}{ds}U_s^t(n, \omega)\varphi=-S_s^{(n)}(\omega)\,U_s^t(n, \omega)\varphi. \qquad (11)$$

Обозначим $\mu_t^{(n)}(\varphi)=\int\varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)$. Тогда

$$\mu_t^{(n)}(\varphi)-\mu_0^{(n)}(U_0^t(n, \omega)\varphi)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\varkappa_n+1}\left[\mu_{\tau_i}^{(n)}\left(U_{\tau_i}^t(n, \omega)\varphi\right)-\mu_{\tau_{i-1}}^{(n)}\left(U_{\tau_{i-1}}^t(n, \omega)\varphi\right)\right],$$

где $0<\tau_1<\ldots<\tau_{\varkappa_n}$, все моменты скачков n-мерного процесса $(z_1^{(n)}(s), \ldots, z_n^{(n)}(s))$ на $[0, t]$, а $\tau_0=0$, $\tau_{\varkappa_n+1}=t$. Поскольку состояние n-мерного процесса на интервалах (τ_{i-1}, τ_i) не меняется, то $\mu_{\tau_i}^{(n)}=\mu_{\tau_i+0}^{(n)}=\mu_{\tau_{i+1}-0}^{(n)}$. Следовательно,

$$\mu_{\tau_i}^{(n)}\left(U_{\tau_i}^t(n, \omega)\varphi\right)-\mu_{\tau_{i-1}}^{(n)}\left(U_{\tau_{i-1}}^t(n, \omega)\varphi\right)=$$
$$=\mu_{\tau_i}^{(n)}\left(U_{\tau_i}^t(n, \omega)\varphi\right)-\mu_{\tau_i-0}^{(n)}\left(U_{\tau_i}^t(n, \omega)\varphi\right)+$$
$$+\mu_{\tau_{i-1}}^{(n)}\left(U_{\tau_i}^t(n, \omega)\varphi-U_{\tau_{i-1}}^t(n, \omega)\varphi\right).$$

Кроме того,

$$U_{\tau_i}^t(n, \omega)\varphi-U_{\tau_{i-1}}^t(n, \omega)\varphi=-\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}S_u^{(n)}(\omega)\,U_u^t(n,\omega)\varphi\,du,$$

$$\mu_{\tau_{i-1}}^{(n)}\left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}S_u^{(n)}(\omega)\,U_u^t(n,\omega)\varphi\,du\right)=$$
$$=\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\mu_u^{(n)}(S_u^{(n)}(\omega)\,U_u^t(n, \omega)\varphi)\,du.$$

Заметим, наконец, что если в момент τ_i поменяли свое состояние процессы $z_k^{(n)}$ и $z_j^{(n)}$ (т. е. произошло взаимодействие k-ой и j-ой частиц) и $p_{kj}(\{\bar\theta\}\times\{\tau_i\})=1$, то

$$\mu_{\tau_i}^{(n)}(\varphi)-\mu_{\tau_i-0}^{(n)}(\varphi)=$$
$$=\frac{1}{n}[\varphi(z_k^{(n)}(\tau_i-0)+f(\bar\theta,\ z_k^{(n)}(\tau_i-0),\ z_j^{(n)}(\tau_i-0)))-$$
$$-\varphi(z_k^{(n)}(\tau_i-0))+\varphi(z_j^{(n)}(\tau_i-0)+$$
$$+f(\bar\theta,\ z_j^{(n)}(\tau_i-0),\ z_k^{(n)}(\tau_i-0)))-\varphi(z_j^{(n)}(\tau_i-0))]=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k,\ j=1}^{n}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}[\varphi(z_k^{(n)}(s-0)+$$
$$+f(\theta,z_k^{(n)}(s-0),z_j^{(n)}(s-0)))-\varphi(z_k^{(n)}(s-0))]\,p_{kj}^{(n)}(d\theta\times ds).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\varkappa_n}\left[\mu_{\tau_i}^{(n)}\left(U_{\tau_i}^t(n,\ \omega)\,\varphi\right)-\mu_{\tau_i-0}^{(n)}\left(U_{\tau_i}^t(n,\ \omega)\,\varphi\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k,\ j=1}^{n}\int\int_0^t[U_s^t(n,\ \omega)\,\varphi(z_k^{(n)}(s-0)+$$
$$+f(\theta,\ z_k^{(n)}(s-0),\ z_j^{(n)}(s-0)))-$$
$$-U_s^t(n,\ \omega)\,\varphi(z_k^{(n)}(s-0))]\,p_{kj}^{(n)}(d\theta\times ds)$$

(интеграл в правой части понимается как обычный интеграл при каждом ω; его нельзя понимать как стохастический, поскольку интегрируемая функция зависит от будущего). Итак, справедливо равенство

$$\mu_t^{(n)}(\varphi)-\mu_0^{(n)}(U_0^t(n,\ \omega)\,\varphi)=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k,\ j=1}^{n}\int\int_0^t[U_s^t(n,\ \omega)\,\varphi(z_k^{(n)}(s-0)+$$
$$+f(\theta,\ z_k^{(n)}(s-0),\ z_j^{(n)}(s-0)))-$$
$$-U_s^t(n,\ \omega)\,\varphi(z_k^{(n)}(s-0))]\,p_{kj}^{(n)}(d\theta\times ds)-$$
$$-\int_0^t\mu_s^{(n)}(S_s^{(n)}(\omega)\,U_s^t(n,\ \omega)\,\varphi)\,ds. \tag{12}$$

Имеем далее:

$$\frac{d}{ds}\int U_s^t(n,\omega)\varphi(z)\lambda_s(dz)=$$
$$=-\int S_s^{(n)}(\omega)U_s^t(n,\omega)\varphi(z)\lambda_s(dz)+$$
$$+\iiint[U_s^t(n,\omega)\varphi(z+f(\theta,z,z'))-$$
$$-U_s^t(n,\omega)\varphi(z)]\,m(d\theta)\lambda_s(dz)\lambda_s(dz)\lambda_s(dz')\,ds,$$

$$\int\varphi(z)\lambda_t(dz)-\int U_0^t(n,\omega)\varphi(z)\lambda_0(dz)=$$
$$=-\int_0^t\int S_s^{(n)}(\omega)U_s^t(n,\omega)\varphi(z)\lambda_s(dz)\,ds+$$
$$+\int_0^t\iiint[U_s^t(n,\omega)\varphi(z+f(\theta,z,z'))-$$
$$-U_s^t(n,\omega)\varphi(z)]\,m(d\theta)\lambda_s(dz)\lambda_s(dz')\,ds.$$

Вычитая последнее равенство из (12), умножая на $\sqrt{n}$ и произведя простые преобразования (с учетом вида оператора $S_s^{(n)}(\omega)$), находим:

$$\nu_t^{(n)}(\varphi)-\nu_0^{(n)}(U_0^t(n,\omega)\varphi)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k,j=1}^{n}\int_0^t\int[U_s^t(n,\omega)\varphi(z_k^{(n)}(s-0)+$$
$$+f(\theta,z_k^{(n)}(s-0),z_j^{(n)}(s-0)))-$$
$$-U_s^t(n,\omega)\varphi(z_k^{(n)}(s-0))]\,q_{kj}^{(n)}(d\theta\times ds)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k,j=1}^{n}\int_0^t[U_s^t\varphi(z_k^{(n)}(s)+f(\theta,z_k^{(n)}(s),z_j^{(n)}(s)))-$$
$$-U_s^t\varphi(z_k^{(n)}(s))]\,q_{kj}^{(n)}(d\theta\times ds)+\chi_\varphi^{(n)}(t),$$

где U_s^t определяется формулой (8), а

$$\chi_\varphi^{(n)}(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k,j=1}^{n}\int_0^t\int\Psi_{k,j}^{(n)}(\varphi,\theta,s)\,q_{kj}^{(n)}(d\theta\times ds),$$

$$\Psi_{kj}^{(n)}(\varphi,\theta,s)=[U_s^t(n,\omega)-U_s^t]\varphi(z_k^{(n)}(s-0)+$$
$$+f(\theta,z_k^{(n)}(s-0),z_j^{(n)}(s-0)))-$$
$$-[U_s^t(n,\omega)-U_s^t]\varphi(z_k^{(n)}(s-0)).\quad(13)$$

Из формулы (10) следует, что $\|S_t^{(n)}(\omega)\|\leqslant 4m(\Theta)$. Из условия 3) теоремы 1 вытекает, что для всех $\varphi\in\hat{C}_Z$ и

$S_t^{(n)}(\omega)\varphi \in \hat{C}_Z$

$$\| S_t^{(n)}(\omega)\varphi - S_t\varphi \| \to 0.$$

Используя равенство

$$U_s^t(n, \omega)\varphi = \varphi + \int_s^t S_u^{(n)}(\omega)\,du + \dots$$
$$+ \int\limits_{s<u_1<\dots<u_k<t} \cdots \int S_{u_1}^{(n)}(\omega)\dots S_{u_k}^{(n)}(\omega)\varphi\,du_1\dots du_k + \dots$$

и оценку

$$\left\| \int\limits_{s<u_1<\dots<u_k<t} \cdots \int S_{u_1}^{(n)}(\omega)\dots S_{u_k}^{(n)}(\omega)\varphi\,du_1\dots du_k \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(4m(\Theta))^k}{k!}(t-s)^k \|\varphi\|,$$

можем убедиться, что $\| U_s^t(n, \omega)\varphi - U_s^t\varphi \| \to 0$ для всех $\varphi \in \hat{C}_Z$. Следовательно, $\nu_0^{(n)}(U_0^t(n, \omega)\varphi) \to \nu_0(U_0^t\varphi)$. Повторяя рассуждения, с помощью которых был найден вид предельного распределения для процесса $\eta_n(\varphi, t)$, определяемого равенством (3), убеждаемся, что предельное распределение процесса

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k, j=1}^{n} \int_0^t [U_s^t\varphi(z_k^{(n)}(s) + f(\theta, z_k^{(n)}(s), z_j^{(n)}(s))) -$$
$$- U_s^t\varphi(z_k^{(n)}(s))]\, q_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds)$$

совпадает с распределением процесса

$$\int_0^t \int\int\int Q_\theta U_s^t\varphi(z, z')\,\gamma(d\theta \times dz \times dz' \times ds).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $\chi_\varphi^{(n)}(t) \to 0$ по вероятности. Имеем

$$\mathsf{M}[\chi_\varphi^{(n)}(t)]^2 =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k, j, l, i=1}^{n} \int_0^t \int_0^t \int\int \mathsf{M}\Psi_{kj}^{(n)}(\varphi, \theta_1, s_1)\,\Psi_{li}^{(n)}(\varphi, \theta_2, s_2) \times$$
$$\times q_{kj}^{(n)}(d\theta_1 \times ds_1)\, q_{li}^{(n)}(d\theta_2 \times ds_2) +$$
$$+ \frac{1}{n} \sum_{k, j=1}^{n} \int_0^t \int_\Theta \mathsf{M}[\Psi_{kj}^{(n)}(\varphi, \theta, s)]^2 [q_{kj}^{(n)}(d\theta \times ds)]^2.$$

Для вычисления математических ожиданий в правой части последнего равенства нам потребуются некоторые вспомогательные построения. Будем рассматривать $\mathcal{F}_t^{(n)}$-измеримые величины, где $\mathcal{F}_t^{(n)}$ — σ-алгебра, порожденная мерами $p_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds)$, $i, j\leqslant n$ при $s\leqslant t$. Пусть ξ — такая величина. Обозначим через $\xi_{ij}^r(d\theta\times ds)$ значение этой величины при условии, что $p_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds)=r$, $r=0, 1$. Тогда

$$\xi-[\xi_{ij}^0(d\theta\times ds)+(\xi_{ij}^1(d\theta\times ds)-\xi_{ij}^0(d\theta\times ds))\,p_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds)]$$

отлично от нуля лишь тогда, когда $p_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds)>1$, а вероятность этого события $O(n^{-1}m(d\theta)\,ds)^2$.

Заметим, что ξ_{ij}^0 и ξ_{ij}^1 от $p_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds)$ не зависят. Нас будут интересовать величины ξ, выражающиеся через $z_k^{(n)}(s)$, $s\leqslant t$. Укажем, как в этом случае вычисляются $\xi_{ij}^0(d\theta\times ds)$ и $\xi_{ij}^1(d\theta\times ds)$. Для этого построим предварительно процессы

$$z_k^{(n)}(d\theta\times ds,\ u,\ 0,\ i,\ j),\qquad z_k^{(n)}(d\theta\times ds,\ u,\ 1,\ i,\ j).$$

$z_k^{(n)}(B, u, 0, i, j)$, где B — измеримое множество в $\Theta\times[0, \infty)$, является решением уравнения (1) § 3, если в нем пуассоновская мера $p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt)$ заменена на пуассоновскую меру $p_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt\setminus B)$. $z_k^{(n)}(B, u, 1, i, j)$ при $B=C\times[t_1, t_2]$ удовлетворяет точно такому уравнению на $[0, t_1]$ и (t_1, ∞) и, кроме того

$$z_i^{(n)}(t_1)-z_i^{(n)}(t_1-0)=f(\bar\theta,\ z_i^{(n)}(t_1-0),\ z_j^{(n)}(t_1-0)),$$

$$z_j^{(n)}(t_1)-z_j^{(n)}(t_1-0)=f(\bar\theta,\ z_j^{(n)}(t_1-0),\ z_i^{(n)}(t_1-0)),$$

где $\bar\theta\in C$. Если $\xi=F(z_1^{(n)}(\cdot), \ldots, z_n^{(n)}(\cdot))$ — некоторая измеримая функция от $z_1^{(n)}(\cdot), \ldots, z_n^{(n)}(\cdot)$, то для вычисления $\xi_{ij}^0(d\theta\times ds)$ нужно в качестве аргументов функции F взять процессы $z_k^{(n)}(d\theta\times ds, \cdot, 0, i, j)$, а для вычисления $\xi_{ij}^1(d\theta\times ds)$ — процессы $z_k^{(n)}(d\theta\times ds, 1, i, j)$.

Пусть $s_1<s_2$, $C_n\in\Theta$ и $\bigcap C_n=\{\bar\theta\}$. Тогда $\mathsf{M}\xi_{ij}^0(C_n\times\times[s_1, s_2])\to\mathsf{M}\xi_{ij}^0(s, \bar\theta)$, а $\mathsf{M}\xi_{ij}^1(C_n\times[s_1, s_2])\to\mathsf{M}\xi_{ij}^1(s, \bar\theta)$ при $s_1\to s$, $s_2\to s$, $n\to\infty$, где $\xi_{ij}^1(s, \bar\theta)$ является результатом подстановки в выражение для F процессов $z_k^{(n)}(\bar\theta, s, u, 1, i, j)$, которые получаются из $z_k^{(n)}(C\times[s_1, s_2], u, 1, i, j)$ при $C=\{\bar\theta\}$, $s_1=s_2=s$. Заметим, что процессы $z_k^{(n)}(\bar\theta, s, u, 1, i, j)$ по u удовлетворяют при $u\neq s$ той же системе уравнений, что и $z_k^{(n)}(u)$, а в точке $u=s_1$ $z_k^{(n)}(s-0)=$

$= z_k^{(n)}(s)$, $k \neq i, j$; $z_i^{(n)}(s) - z_i^{(n)}(s-0) = f(\bar{\theta}, \; z_i^{(n)}(s-0)$, $z_j^{(n)}(s-0))$, $z_j^{(n)}(s) - z_j^{(n)}(s-0) = f(\bar{\theta}, z_j^{(n)}(s-0), z_j^{(n)}(s-0))$.
Для вычисления $\mathsf{M}\xi[q_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds)]^2$ воспользуемся независимостью ξ_{ij}^0 и ξ_{ij}^1 от $q_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds)$. Будем иметь:

$$\mathsf{M}\xi[q_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds)]^2 = \mathsf{M}\xi_{ij}^0(d\theta \times ds)\, m(d\theta)\, ds +$$
$$+ \mathsf{M}[\xi_{ij}^1(d\theta \times ds) - \xi_{ij}^0(d\theta \times ds)]\mathsf{M}[q_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds)]^2 p_{ij}^{(n)}(d\theta \times ds) +$$
$$+ o\left(\frac{m(d\theta)\, ds}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathsf{M}\xi_{ij}^0(d\theta \times ds)\, m(d\theta)\, ds +$$
$$+ \frac{1}{n}\mathsf{M}[\xi_{ij}^1(d\theta \times ds) - \xi_{ij}^0(d\theta \times ds)]\, m(d\theta)\, ds +$$
$$+ o\left(\frac{m(d\theta)\, ds}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathsf{M}\xi_{ij}^1(d\theta \times ds)\, m(d\theta)\, ds + o\left(\frac{m(d\theta)\, ds}{n}\right).$$

Обозначим через $\hat{\Psi}_{ij}^{(n)}(\varphi, \theta_1, s_1, d\theta \times ds)$ величину $\xi_{ij}^1(d\theta \times ds)$, вычисленную для $\xi = [\Psi_{ij}^{(n)}(\varphi, \theta_1, s_1)]^2$. Тогда

$$\int_0^t \int_\Theta \mathsf{M}[\Psi_{ij}^{(n)}(\varphi, \theta, s)]^2 [q_{ij}(d\theta \times ds)]^2 =$$
$$= \frac{1}{n}\int_0^t \int_\Theta \mathsf{M}\hat{\Psi}_{ij}^{(n)}(\varphi, \theta, s, \theta, s)\, m(d\theta)\, ds.$$

При вычислении $\hat{\Psi}_{ij}^{(n)}(\varphi, \theta, s, \theta, s)$ нужно будет функции $z_k^{(n)}(\theta, s, u, 1, i, j)$ подставить в выражение для $U_s^t(n, \omega)$. Обозначим результат этой подстановки через $\hat{U}_s^t(n, \omega)$, а результат такой подстановки в оператор $S_u^n(\omega)$ — через $\hat{S}_u^n(\omega)$. Заметим, что для вычисления оператора $\hat{S}_u^n(\omega)$ нужно в правую часть выражения (10) вместо $\mu_u^{(n)}(dz')$ подставить $\hat{\mu}_u^n(dz')$ — статистическую функцию распределения для $\{z_k^{(n)}(\theta, s, u, 1, i, j), k = 1, \ldots, n\}$. Если $z_k^{(n)}(\theta, s, u, 1, i, j) \neq z_k^{(n)}(u)\,(s < u < t)$, то либо $k = i$ или $k = j$, либо k-ая частица взаимодействовала в некоторый момент $u_1 \in [u, s]$ с l-ой частицей, для которой $z_l^{(n)}(u_1 - 0) \neq z_l^{(n)}(\theta, s, u_1 - 0, 1, i, j)$. Обозначим через $\rho_n(u)$ число частиц, для которых $z_k^{(n)}(u_1)$ и $z_k^{(n)}(\theta, s, u_1, 1, i, j)$ на $[s, u]$ не совпадают. Тогда

$$\mathsf{P}\{\rho_n(u + \Delta u) - \rho_n(u) > 1\} = o(\Delta u),$$
$$\mathsf{P}\{\rho_n(u + \Delta u) - \rho_n(u) = 1/\rho_n(u) = m\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant m \\ r > m}} p_{lr}^{(n)}(\Theta \times \Delta u) = 1\right\} = \frac{m(n-m)}{n} m(\Theta)\, \Delta u + o(\Delta u) \qquad (14)$$

(должно произойти взаимодействие одной из m фиксированных частиц с одной из остальных $n-m$ частиц).

Из соотношения (14) вытекает, что

$$\mathsf{M}(\rho_n^2(u+\Delta u)/\rho_n(u)) = \\ = \rho_n^2(u) + 2\rho_n(u)\,\mathsf{M}[\rho_n(u+\Delta u) - \rho_n(u)/\rho_n(u)] + \\ + \mathsf{M}([\rho_n(u+\Delta u) - \rho_n(u)]^2/\rho_n(u)) \leqslant \\ \leqslant \rho_n^2(u) + 2\rho_n(u)\frac{\rho_n(u)(n-\rho_n(u))}{n} m(\Theta)\,\Delta u + \\ + \frac{\rho_n(u)(n-\rho_n(u))}{n} m(\Theta)\,\Delta u + o(\Delta u).$$

Поэтому

$$\frac{d}{du}\mathsf{M}\rho_n^2(u) \leqslant [3\mathsf{M}\rho_n^2(u) + \mathsf{M}\rho_n(u)]\,m(\Theta) \leqslant \\ \leqslant \frac{7}{2} m(\Theta)\,\mathsf{M}\rho_n^2(u) + \frac{1}{2} m(\Theta),$$

$$\frac{d}{du}\left(\mathsf{M}\rho_n^2(u) + \frac{1}{7}\right) \leqslant \frac{7}{2} m(\Theta)\left(\mathsf{M}\rho_n^2(u) + \frac{1}{7}\right),$$

$$\mathsf{M}\rho_n^2(u) \leqslant \left(4 + \frac{1}{7}\right)\exp\left\{\frac{7}{2} m(\Theta)(u-s)\right\} - \frac{1}{7}$$

(мы воспользовались тем, что $\rho(s) = 2$). Легко видеть, что

$$\left|\int \varphi(z)\,\mu_u^{(n)}(dz) - \int \varphi(z)\,\hat{\mu}_u^{(n)}(dz)\right| \leqslant \frac{\|\varphi\|}{n}\rho_n(u) \leqslant \frac{\|\varphi\|}{n}\rho_n(t).$$

Из этого неравенства вытекает, что $\|S_u^{(n)}(\omega) - \hat{S}_u^{(n)}(\omega)\| \leqslant \leqslant \frac{2m(\Theta)}{n}\rho_n(t)$. Кроме того, $\|S_u^{(n)}(\omega)\| \leqslant 4m(\Theta)$, $\|\hat{S}_u^{(n)}(\omega)\| \leqslant \leqslant 4m(\Theta)$ и значит $\|U_u^t(n,\ \omega)\| \leqslant e^{4m(\Theta)(t-u)}$, $\|\hat{U}_u^t(\omega)\| \leqslant \leqslant e^{4m(\Theta)(t-u)}$. Значит

$$\|U_u^t(n,\ \omega) - \hat{U}_u^t(n,\omega)\| \leqslant \int_u^t \|S_\tau^{(n)}(\omega)\,U_\tau^t(n,\ \omega) - \\ - \hat{S}_\tau^{(n)}(\omega)\,\hat{U}_\tau^t(n,\omega)\|\,d\tau \leqslant \int_u^t \|S_\tau^{(n)}(\omega) - \hat{S}_\tau^{(n)}(\omega)\|\cdot\|U_\tau^t(n,\omega)\|\,d\tau + \\ + \int_u^t \|\hat{S}_\tau^{(n)}(\omega)\|\cdot\|U_\tau^t(n,\ \omega) - \hat{U}_\tau^t(n,\ \omega)\|\,d\tau \leqslant \\ \leqslant \frac{c_1}{n}\rho_n(t) + c_1\int_u^t \|U_\tau^t(n,\ \omega) - \hat{U}_\tau^t(n,\ \omega)\|\,d\tau,$$

где c_1 — некоторая постоянная. Из последнего неравенства находим

$$\|U_u^t(n,\ \omega) - \hat{U}_u^t(n,\ \omega)\| \leqslant \frac{c_1}{n}\rho_n(t)\,e^{c_1(t-u)}. \tag{15}$$

Следовательно, существует такая постоянная c_2, что

$$\mathsf{M}\hat{\Psi}_{ij}^{(n)}(\varphi,\ \theta,\ s,\ \theta,\ s)\leqslant\frac{c_2}{n}+\mathsf{M}[\Psi_{ij}^{(n)}(\varphi,\ \theta,\ s)]^2,$$

и значит,

$$\int_0^t\int_\Theta \mathsf{M}[\Psi_{ij}^{(n)}(\varphi,\ \theta,\ s)]^2[q_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds)]^2\leqslant\frac{c_2}{n^2}m(\Theta)\,t+\\+\frac{1}{n}\int_0^t\int_\Theta \mathsf{M}[\Psi_{ij}^{(n)}(\varphi,\ \theta,\ s)]^2 m(d\theta)\,ds.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{n}\sum_{k,\,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Theta \mathsf{M}[\Psi_{kj}^{(n)}(\varphi,\ \theta,\ s)]^2[q_{ij}^{(n)}(d\theta\times ds)]^2=\\=O\left(\frac{1}{n}\right)+\int_0^t\int_\Theta\frac{1}{n^2}\sum_{k,\,j=1}^{n}\mathsf{M}[\Psi_{kj}^{(n)}(\varphi,\ \theta,\ s)]^2 m(d\theta)\,ds=\\=O\left(\frac{1}{n}\right)+\mathsf{M}\int_0^t\int_\Theta\int\int\{[(U_s^t(n,\ \omega)-U_s^t)\varphi](z+f(\theta,\ z,\ z'))-\\-[(U_s^t(n,\ \omega)-U_s^t)\varphi](z)\}^2\mu_{s-0}^{(n)}(dz)\,\mu_{s-0}^{(n)}(dz')\,m(d\theta)\,ds.$$

Используя ограниченность подынтегральной функции и то, что $\|U_s^t(n,\ \omega)\varphi-U_s^t\varphi\|\to 0$, убеждаемся, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k,\,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Theta \mathsf{M}[\Psi_{kj}^{(n)}(\varphi,\ \theta,\ s)]^2[q_{kj}^{(n)}(d\theta\times ds)]^2=0.$$

Вычисление величины $\mathsf{M}\xi q_{kj}^{(n)}(d\theta_1\times ds_1)\,q_{li}^{(n)}(d\theta_2\times ds_2)$ проводится аналогично вычислению $\mathsf{M}\xi[q_{kj}^{(n)}(d\theta\times ds)]^2$. Введем величины $\xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 0)$, $\xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 1,\ 0)$, $\xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 1)$, $\xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 1,\ 1)$, которые вычислены в предположениях:

1) $p_{kj}^{(n)}(d\theta_1\times ds_1)=0,\quad p_{li}^{(n)}(d\theta\times ds_2)=0;$
2) $p_{kj}^{(n)}(d\theta_1\times ds_1)=1,\quad p_{li}^{(n)}(d\theta_2\times ds_2)=0;$
3) $p_{kj}^{(n)}(d\theta_1\times ds_1)=0,\quad p_{li}^{(n)}(d\theta_2\times ds_2)=1;$
4) $p_{kj}^{(n)}(d\theta_1\times ds_1)=1,\quad p_{li}^{(n)}(d\theta_2\times ds_2)=1,$

$d\theta_1$, $d\theta_2$ — множества из $\mathfrak{C}$, содержащие соответственно точки θ_1 и θ_2, для которых $m(d\theta_1)$ и $m(d\theta_2)$ достаточно малы, а

ds_1 и ds_2 — малые интервалы, содержащие s_1 и s_2. Тогда с вероятностью $1 - o\left(\frac{m(d\theta_1)\,m(d\theta_2)}{n^2}\,ds_1 ds_2\right)$ выполнено равенство

$$\begin{aligned}\xi = \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 0) &+ \\ + [\xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 1,\ 0) - \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 0)]\, p_{kj}^{(n)}(d\theta_1 \times ds_1) &+ \\ + [\xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 1) - \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 0)]\, p_{li}^{(n)}(d\theta_2 \times ds_2) &+ \\ + [\xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 1,\ 1) - \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 0) &- \\ - \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 1,\ 0) - \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 1)]\, p_{kj}^{(n)}(d\theta_1 &\times \\ \times ds_1)\, p_{li}^{(n)}(d\theta_2 \times ds_2).&\end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned}\mathsf{M}\xi q_{kj}^{(n)}(d\theta_1 \times ds_1)\, q_{li}^{(n)}(d\theta_2 \times ds_2) = \mathsf{M}\,[\xi(k,\ j,\ l,\ 1,\ 1) &+ \\ + \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 0) - \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 1,\ 0) &- \\ - \xi(k,\ j,\ l,\ i,\ 0,\ 1)]\,\frac{m(d\theta_1)\,m(d\theta_2)}{n^2}\,ds_1 ds_2 &+ \\ + o\left(\frac{m(d\theta_1)\,m(d\theta_2)}{n^2}\,ds_1 ds_2\right).&\end{aligned}$$

Обозначим предельное значение величины $[\xi(k, j, l, i, 1, 1) + \xi(k, j, l, i, 0, 0) - \xi(k, j, l, i, 1, 0) - \xi(k, j, l, i, 0, 1)]$, когда $d\theta_1$ стягивается к θ_1, $d\theta_2$ — к θ_2, ds_1 — к s_1, ds_2 — к s_2 через $\nabla\xi(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2)$. Для вычисления этой величины нужно в выражении для ξ через $z_r^{(n)}(u)$ подставить функции $z_r^{(n)}(0, 0, u)$, $z_r^{(n)}(0, 1, u)$, $z_r^{(n)}(1, 0, u)$, $z_r^{(n)}(1, 1, u)$, где $z_r^{(n)}(0, 0, u) = z_r^{(n)}(u)$, $z_r^{(n)}(1, 1, u)$ удовлетворяет уравнению (1) § 3 при $u \neq s_1$, $u \neq s_2$ и, кроме того,

$$\begin{aligned}z_k^{(n)}(s_1) - z_k^{(n)}(s_1 - 0) &= f(\theta_1,\ z_k^{(n)}(s_1 - 0),\ z_j^{(n)}(s_1 - 0)),\\ z_k^{(n)}(s_2) - z_k^{(n)}(s_2 - 0) &= f(\theta_2,\ z_k^{(n)}(s_2 - 0),\ z_j^{(n)}(s_2 - 0)),\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}z_l^{(n)}(s_2) - z_l^{(n)}(s_2 - 0) &= f(\theta_1, z_l^{(n)}(s_2 - 0),\ z_i^{(n)}(s_2 - 0)),\\ z_i^{(n)}(s_2) - z_i^{(n)}(s_2 - 0) &= f(\theta_2, z_i^{(n)}(s_2 - 0),\ z_l^{(n)}(s_2 - 0)),\end{aligned} \tag{17}$$

$z_r^{(n)}(0, 1, u)$ удовлетворяет той же системе при $u \neq s_2$ и соотношениям (17), а $z_r^{(n)}(1, 0, u)$ — той же системе при $u \neq s_1$ и соотношениям (16). Величина $\nabla\xi(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2)$ будет сумма первых результатов подстановки минус сумму двух других: т. е., если $\xi = F(z_1^{(n)}(\cdot), \ldots)$, то

$$\begin{aligned}\nabla\xi(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2) = F(z_1^{(n)}(0, 0, \cdot), \ldots) + F(z_1^{(n)}(1, 1, \cdot), \ldots) &- \\ - F(z_1^{(n)}(1,\ 0,\ \cdot), \ldots) - F(z_1^{(n)}(0,\ 1,\ \cdot), \ldots).&\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathsf{M}\xi q_{kj}^{(n)}(d\theta_1\times ds_1)\, q_{li}^{(n)}(d\theta_2\times ds_2)=$$
$$=\mathsf{M}\nabla\xi(\theta_1,\ \theta_2,\ s_1,\ s_2)\,\frac{m(d\theta_1)\,m(d\theta_2)\,ds_1ds_2}{n^2}.$$

Пусть $s_1<s_2$. Введем величины

$$\nabla_1\xi(\theta_1,\ \theta_2,\ s_1,\ s_2)=F(z_1^{(n)}(0,\ 1,\ \cdot),\ldots)-F(z_1^{(n)}(0,\ 0,\ \cdot),\ldots),$$
$$\nabla_2\xi(\theta_1,\ \theta_2,\ s_1,\ s_2)=F(z_1^{(n)}(1,\ 1,\ \cdot),\ldots)-F(z_1^{(n)}(1,\ 0,\ \cdot)\ldots)$$

(аргументы в правых частях у функции F совпадают на $[0,\ s_2)$). Очевидно,

$$\mathsf{M}\,|\nabla\xi(\theta_1,\ \theta_2,\ s_1,\ s_2)|\leqslant$$
$$\leqslant\mathsf{M}\,|\nabla_1\xi(\theta_1,\ \theta_2,\ s_1,\ s_2)|+\mathsf{M}\,|\nabla_2\xi(\theta_1,\ \theta_2,\ s_1,\ s_2)|.$$

Пусть $\xi=\Psi_{kj}(\varphi,\ \theta_1,\ s_1)\,\Psi_{li}(\varphi,\ \theta_2,\ s_2)$. Покажем, как оценивается $\mathsf{M}\nabla_m\xi(\theta_1,\ \theta_2,\ s_1,\ s_2)$, $m=1,\ 2$. Обе эти величины оцениваются одинаково — остановимся на $\nabla_2\xi$. Обозначим через $U_s^t(n,\ \omega,\ 1,\ 1)$ оператор $U_s^t(n,\ \omega)$, если в его выражение через $z_r^{(n)}(\cdot)$ вместо этих процессов подставлены $z^{(n)}(1,\ 1,\ \cdot)$, $U_s^t(n,\ \omega,\ 1,\ 0)$ аналогично выражается через $z_r^{(n)}(1,\ 0,\ \cdot)$. Очевидно, $U_{s_1}^{s_2}(n,\ \omega,\ 1,\ 0)=U_{s_1}^{s_2}(n,\ \omega,\ 1,\ 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\nabla_2\xi={}&Q_\theta[U_{s_1}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 1)-U_{s_1}^t]\times\\
&\times\varphi(z_k^{(n)}(s_1-0),\ z_j^{(n)}(s_1-0))\,Q_\theta[U_{s_2}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 1)-\\
&-U_{s_2}^t]\,\varphi(z_l^{(n)}(1,\ 0,\ s_2-0),\ z_i^{(n)}(1,\ 0,\ s_2-0))-\\
&-Q_\theta[U_{s_1}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 0)-U_{s_1}^t]\,\varphi(z_k^{(n)}(s_1-0),\ z_j^{(n)}(s_1-0))\times\\
&\times Q_\theta[U_{s_2}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 0)-U_{s_2}^t]\,\varphi(z_l^{(n)}(1,\ 0,\ s_2-0),\\
&z_i^{(n)}(1,\ 0,\ s_2-0))=Q_\theta[U_{s_1}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 1)-U_{s_1}^t]\times\\
&\times\varphi(z_k^{(n)}(s_1-0),\ z_j^{(n)}(s_1-0))\,Q_\theta[U_{s_2}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 1)-\\
&-U_{s_2}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 0)]\,\varphi(z_l^{(n)}(1,\ 0,\ s_2-0),\ z_i^{(n)}(1,\ 0,\ s_2-0))+\\
&+Q_\theta[U_{s_1}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 1)-U_{s_1}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 0)]\,\varphi(z_k^{(n)}(s_1-0),\\
&z_j^{(n)}(s_1-0))\,Q_\theta[U_{s_2}^t(n,\ \omega,\ 1,\ 0)-U_{s_2}^t]\times\\
&\times\varphi(z_l^{(n)}(1,\ 0,\ s_2-0),\ z_i^{(n)}(1,\ 0,\ s_2-0)).
\end{aligned}$$

Из оценки (15) вытекает, что существует случайная величина $\eta_1^{(n)}$, не зависящая от s, для которой $\mathsf{M}(\eta_1^{(n)})^2$ ограничено и

$$\|U_s^t(n,\ \omega,\ 1,\ 1)-U_s^t(n,\ \omega,\ 1,\ 0)\|\leqslant\frac{1}{n}\eta_1^{(n)}.$$

Значит

$$|\nabla_2\xi| \leqslant \frac{1}{n}\|Q_\theta\|^2 \eta_1^{(n)} (\|U_{s_1}^t(n, \omega, 1, 1)\varphi - U_{s_1}^t\varphi\| + \\ + \|U_{s_2}^t(n, \omega, 1, 0)\varphi - U_{s_2}^t\varphi\|) = \\ = \frac{1}{n}\|Q_\theta\|^2 \eta_1^{(n)} (\|U_{s_1}^t(n, \omega)\varphi - U_{s_1}^t\varphi\| + \\ + \|U_{s_2}^t(n, \omega)\varphi - U_{s_2}^t\varphi\| + O\left(\frac{1}{n}\right))$$

(вторично использована оценка типа (15)). Точно так

$$|\nabla_1\xi| \leqslant \frac{1}{n}\|Q_\theta\|^2 \eta_2^{(n)} (\|U_{s_1}^t(n, \omega)\varphi - U_{s_1}^t\varphi\| + \\ + \|U_{s_2}^t(n, \omega)\varphi - U_{s_2}^t\varphi\| + O\left(\frac{1}{n}\right)).$$

Значит

$$\frac{1}{n}\sum_{k, j, l, i=1}^{n} \iint\limits_{0<s_1<s_2<t} \iint \mathsf{M}\Psi_{kj}^{(n)}(\varphi, \theta_1, s_1)\times \\ \times \Psi_{li}^{(n)}(\varphi, \theta_2, s_2)\, q_{kj}^{(n)}(d\theta_1\times ds_1)\, q_{li}^{(n)}(d\theta_2\times ds_2) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{n^4}\sum_{k, j, l, i=1}^{n} \iint\limits_{0<s_1<s_2<t} \iint \|Q_\theta\|^2 \mathsf{M}(\eta_1^{(n)} + \eta_2^{(n)})\times \\ \times(\|U_{s_1}^t(n, \omega)\varphi - U_{s_1}^t\varphi\| + \|U_{s_2}^t(n, \omega)\varphi - U_{s_2}^t\varphi\|)\times \\ \times m(d\theta_1)\, m(d\theta_2)\, ds_1 ds_2 + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ = O\left(\frac{1}{n} + \left(\int_0^t \mathsf{M}\|U_s^t(n, \omega)\varphi - U_s^t\varphi\|^2 ds\right)^{1/2}\right).$$

Поскольку это выражение стремится к нулю при $n\to\infty$, то $\mathsf{M}[\chi_\varphi^{(n)}(t)]^2 \to 0$. Теорема доказана.

Пусть теперь имеется система вида (1) § 2. Предположим, что $\varphi \in C_Z^1$. Тогда на основании формулы Ито

$$d\varphi(z_i^{(n)}(t)) = (\varphi'(z_i^{(n)}(t)), A(z_i^{(n)}(t))) + \\ + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a(z_i^{(n)}(t), z_j^{(n)}(t))\,dt + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_\Theta [\varphi(z_i^{(n)}(t) + \\ + f(\theta, z_i^{(n)}(t), z_j^{(n)}(t))) - \varphi(z_i^{(n)}(t))]\, m(d\theta)\, dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{\Theta}[\varphi(z_i^{(n)}(t)+f(\theta,\ z_i^{(n)}(t),\ z_j^{(n)}(t)))-$$
$$-\varphi(z_i^{(n)}(t))]\,q_{ij}^{(n)}(d\theta\times dt).$$

Следовательно,

$$d\int\varphi(z)\,\mu_t^{(n)}(dz)=\Big\{\int(\varphi'(z),\ A(z)+$$
$$+\int a(z,\ z')\,\mu_t^{(n)}(dz'))\,\mu_t^{(n)}(dz)+\int\int\int[\varphi(z+f(\theta,\ z,\ z'))-$$
$$-\varphi(z)]\,m(d\theta)\,\mu_t^{(n)}(dz)\,\mu_t^{(n)}(dz')\Big\}\,dt+d\eta_n(\varphi,\ t),\qquad(18)$$

где последнее слагаемое справа определяется равенством (3). Предположим, что выполнены условия теоремы 1 § 4 и, значит, существует предельная статистическая функция распределения $\lambda_t(dz)$, удовлетворяющая уравнению (3) § 4. Вычитая это уравнение из уравнения (18) после группировки членов и умножения на $\sqrt{n}$, получим

$$d\int\varphi(z)\,\nu_t^{(n)}(dz)=\int(\varphi'(z),\ a_n(t,\ z))\,\nu_t^{(n)}(dz)+$$
$$+\int(\varphi'(z'),\ a(z,\ z'))\,\lambda_t(dz')\,\nu_t^{(n)}(dz)+$$
$$+\int S_t^{(n)}(\omega)\,\varphi(z)\,\nu_t^{(n)}(dz)+d\eta_n(\varphi,\ t),$$

где ограниченный случайный оператор $S_t^{(n)}(\omega)\varphi$ на C_Z определяется равенством (10), а

$$a_n(t,\ z)=A(z)+\int a(z,\ z')\,\mu_t^{(n)}(dz).$$

Пусть имеется семейство случайных операторов $V_s^t(n,\ \omega)$ на C_Z, для которых при $\varphi\in C_Z^1$ и $V_s^t(n,\ \omega)\varphi\in C_Z^1$ и для $\varphi\in C_Z^1$

$$\frac{d}{ds}V_s^t(n,\ \omega)\,\varphi(z)=-([V_s^t(n,\ \omega)\,\varphi]'(z),\ a_n(z,\ t))-$$
$$-R_s^{(n)}(\omega)\,V_s^t(n,\ \omega)\,\varphi(z),\quad s<t;\quad V_t^t(n,\ \omega)\,\varphi(z)=\varphi(z),\qquad(19)$$

где

$$R_s^{(n)}(\omega)\,\varphi(z)=\int(\varphi'(z'),\ a(z,\ z'))\,\lambda(dz')+S_s^{(n)}(\omega)\,\varphi(z).\qquad(20)$$

Пусть, кроме того, имеется семейство ограниченных операторов V_s^t на C_Z, для которого при $\varphi\in C_Z^1$

$$\frac{d}{ds}V_s^t\varphi(z)=-([V_s^t\varphi]'(z),\ \bar a(t,\ z))-\int([V_s^t\varphi]'(z),$$
$$a(z,\ z'))\,\lambda_t(dz')-S_sV_s^t\varphi(z),\quad s<t,\quad V_t^t\varphi(z)=\varphi(z).\qquad(21)$$

Если для всех $\varphi \in C_Z^1$ $\| V_s^t(n, \omega)\varphi(z) - V_s^t\varphi(z) \| \to 0$ и $\| V_s^t(n, \omega) \|$ равномерно ограничены, то заменяя в доказательстве теоремы 1 $U_s^t(n, \omega)\varphi$ на $V_s^t(n, \omega)\varphi$, $U_s^t\varphi$ на $V_s^t\varphi$, оператор $S_s^{(n)}(\omega)$ — на оператор

$$S_s^{(n)}(\omega)\varphi(z) + \int (\varphi'(z'), a(z, z'))\lambda_t(dz') + (\varphi'(z), a_n(t, z)),$$

получим, что для всех $\varphi \in C_Z^1$ распределение величины $\int \varphi(z)\nu_t^{(n)}(dz)$ сходится к распределению величины

$$\nu_t(\varphi) = \nu_0(V_0^t\varphi) + \int_0^t \iiint Q_\theta V_s^t\varphi(z, z')\gamma(d\theta \times dz \times dz' \times ds), \quad (22)$$

где гауссова мера с независимыми значениями такая же, как и в равенстве (9).

Приведем одно достаточное условие, при котором сформулированное утверждение выполнено.

Лемма. *Пусть выполнены условия теорем* 1 § 4 *и* 1 § 5, $a(z, z')$ *и* $A(z)$ *ограничены и непрерывно дифференцируемы по* z *и оператор*

$$B_t\varphi(z) = \int (\varphi'(z'), a(z, z'))\lambda_t(dz')$$

можно продолжить как ограниченный с C_Z^1 *на* $\hat{C}_Z$. *Тогда существуют случайные операторы* $V_s^t(n, \omega)$, *удовлетворяющие уравнению* (19), $\| V_s^t(n, \omega) \|$ *равномерно ограничена по* n *и* $0 < s < t$ *при всяком фиксированном* t, *и для всех* $\varphi \in \hat{C}_Z$ $\| V_s^t(n, \omega)\varphi - V_s^t\varphi \| \to 0$.

Доказательство. Будем искать операторы $V_s^t(n, \omega)$ в виде $V_s^t(n, \omega) = W_s^t(n, \omega) Y_s^t(n, \omega)$, где

$$\frac{d}{ds} W_s^t(n, \omega)\varphi = -([W_s^t(n, \omega)\varphi]'(z), a_n(t, z)),$$

$$s < t, \quad W_t^t(n, \omega)\varphi = \varphi. \quad (23)$$

Уравнение (23) можно решить следующим образом. Обозначим через $\zeta_s^t(n, z)$ решение обыкновенного дифференциального уравнения в Z

$$\frac{d}{ds}\zeta_s^t(n, z) = a_n(s, \zeta_s^t(n, z)), \quad s < t, \quad \zeta_t^t(n, z) = z. \quad (24)$$

Решение его существует, единственно, непрерывно дифференцируемо по z, поскольку a_n ограничено и непрерывно дифференцируемо по z. Если $W_s^t(n, \omega)\varphi = u_n(s, t, z, \omega)$, то

$$\frac{\partial}{\partial s} u_n(s, t, z, \omega) + \left(\frac{\partial}{\partial z} u_n(s, t, z, \omega), a_n(s, z)\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{ds}u_n(s,\ t,\ \zeta_s^t(n,\ \omega),\ \omega)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial s}u_n(s,\ t,\ z,\ \omega)+\left(u_n'(s,\ t,\ z,\ \omega),\ \frac{d}{ds}\zeta_s^t(n,\ z)\right)=0$$

в силу равенства (24). Значит

$$u_n(s,\ t,\ \zeta_s^t(n,\ \omega),\ \omega)=u_n(t,\ t,\ \zeta_t^t(n,\ z))=\varphi(z).$$

Откуда

$$u(s,\ t,\ z,\ \omega)=\varphi([\zeta_s^t]^{-1}(n,\ z)),$$

где $[\zeta_s^t]^{-1}(n,\ z)$ — функция, обратная к $\zeta_s^t(n,\ z)$. Легко убедиться, что она совпадает с решением уравнения

$$\frac{d}{dz}\eta_s^t(n,\ z)=-a_n(t,\ \eta_s^t(n,\ z)),\quad t>s,\quad \eta_s^s(n,\ z)=z.$$

Таким образом, $W_s^t(n,\ \omega)\varphi(z)=\varphi(\eta_s^t(n,\ z))$. Отсюда вытекает, что $\|W_s^t(n,\ \omega)\|=1$. Оператор $W_s^t(n,\ \omega)$ обратим: поскольку $\eta_s^t(n,\ \zeta_s^t(n,\ z))=z$, то $[W_s^t(n,\omega)]^{-1}\varphi(z)=\varphi(\zeta_s^t(n,\ z))$. Из этой формулы вытекает, что и $\|W_s^t(n,\ \omega)\|=1$. Легко, наконец, убедиться, что для всякого c

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|z|\leqslant c}[\,|\zeta_s^t(n,\ z)-\zeta_s^t(z)|+|\eta_s^t(n,\ z)-\eta_s^t(z)|\,]=0,$$

где

$$\frac{d}{ds}\zeta_s^t(z)=\bar a(s,\ \zeta_s^t(z)),\qquad s<t,\quad \zeta_t^t(z)=z,$$
$$\frac{d}{d\eta}\eta_s^t(z)=-\bar a(t,\ \eta_s^t(z)),\quad t>s,\quad \eta_s^s(z)=z.$$

Это вытекает из того, что $a_n(t,\ z)$ стремится равномерно к $\bar a(t,\ z)$ на каждом ограниченном множестве. Подставим в уравнение (19) $V=WY$. Получим такое соотношение:

$$W_s^t(n,\ \omega)\frac{d}{ds}Y_s^t(n,\ \omega)\varphi=(B_s+S_s^{(n)}(\omega))\,W_s^t(n,\ \omega)\,Y_s^t(n,\ \omega)\,\varphi,$$

откуда

$$\frac{d}{ds}Y_s^t(n,\omega)\,\varphi=[W_s^t(n,\omega)]^{-1}(B_s+S_s^{(n)}(\omega))\,W_s^t(n,\omega)\,Y_s^t(n,\omega)\varphi.$$

Теперь доказательство леммы вытекает из того, что операторы $[W_s^t(n,\ \omega)]^{-1}(B_s+S_s^{(n)}(\omega))\,W_s^t(n,\ \omega)$ ограничены, переводят $\hat{C}_Z$ в $\hat{C}_Z$ и для всех $\varphi \in \hat{C}_Z$

$$\|[W_s^t(n, \omega)]^{-1}(B_s + S_s^{(n)}(\omega)) W_s^t(n, \omega)\varphi - \\ - (W_s^t)^{-1}(B_s + S_s) W_s^t\varphi\| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Из доказанной леммы и предыдущих рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия: 1) функции $A(z)$ и $a(z, z')$ ограничены, удовлетворяют при некотором K условию*

$$|A(z) - A(\bar{z})| + |a(z, z') - a(\bar{z}, \bar{z}')| \leqslant \\ \leqslant K(|z - \bar{z}| + |\bar{z}' - z'|)$$

и существуют непрерывные производные $A'_z(z)$, $a'_z(z, z')$; 2) $\int |f(\theta, z, z')| m(d\theta)$ ограничено, при некотором K

$$\int |f(\theta, z, z') - f(\theta, \bar{z}, \bar{z}')| m(d\theta) \leqslant K(|z - \bar{z}| + |z' - \bar{z}'|)$$

и для всех $\varphi \in \hat{C}_Z$

$$\int \varphi(z + f(\theta, z, z')) m(d\theta) \mu(dz') \in \hat{C}_Z,$$

какова бы ни была конечная мера μ на Z; 3) оператор $B_t(\varphi) = \int (\varphi'(z'), a(z, z')) \lambda_t(dz')$, где $\lambda_t(dz)$ — предельная статистическая функция распределения, может быть продолжен с C_Z^1 на $\hat{C}_Z$ и переводит $\hat{C}_Z$ в $\hat{C}_Z$ как ограниченный оператор, 4) для всех $\varphi \in \hat{C}_Z$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int \varphi(z) \nu_0^{(n)}(dz)$.

Тогда для всех $\varphi \in \hat{C}_Z$ величина $\int \varphi(z) \nu_t^{(n)}(dz)$ имеет предельное распределение, совпадающее с распределением величины (22).

§ 6. Предельная теорема для функционалов

Рассмотрим систему вида (1) § 2 в условиях теоремы 1 § 4. В § 4 изучалось предельное поведение статистической функции распределения $\mu_t^{(n)}$. Эта функция дает лишь представление о распределении частиц в фазовом пространстве в каждый момент времени и не дает возможности судить о характере движения частиц. Теоремы 2 и 3 § 4 описывают предельное движение каждой отдельной частицы, но также не позволяют судить о движении всей совокупности в целом. В этом параграфе мы рассмотрим результаты, относящиеся к изучению предельного поведения системы.

Пусть $D_{[0,T]}(Z)$ — пространство функций без разрывов второго рода (они определены в § 4), $G(z(\cdot))$ — непрерывная в метрике ρ_D ограниченная функция. Нас будет интересовать предельное поведение среднего

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G(z_i^{(n)}(\cdot)), \tag{1}$$

где $z_i^{(n)}$ удовлетворяет системе уравнений (1) § 2.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 § 4. *Тогда величина* (1) *при* $n \to \infty$ *сходится по вероятности к* $\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot))$, *где* $\hat{z}(t)$ — *решение стохастического дифференциального уравнения*

$$d\hat{z}(t) = \bar{a}(t, \hat{z}(t))\,dt + \int_\Theta \int_Z f(\theta, \hat{z}(t), z')\,\bar{p}(d\theta \times dz' \times dt) \tag{2}$$

с начальным условием $\hat{z}(0)$, *имеющим распределение* $\lambda_0(dz)$ *и не зависящим от пуассоновской меры* $\bar{p}$, *определенной в теореме* 2 § 4.

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G(z_i^{(n)}(\cdot))\right] = 0. \tag{3}$$

Из следствия из теоремы 4 § 4 вытекает, что для всякого $c > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{\{|z_i^{(n)}(0)|\leqslant c,\ |z_j^{(n)}(0)|\leqslant c\}} [\mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot)) \times \\ \times G(z_j^{(n)}(\cdot)) - \mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot))\,\mathsf{M}G(z_j^{(n)}(\cdot))] = 0.$$

Поэтому при некотором c_1

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathsf{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G(z_i^{(n)}(\cdot))\right] = \\ = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} [\mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot))\,G(z_j^{(n)}(\cdot)) - \\ - \mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot))\,\mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot))] \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j} c_1\big(\chi_{\{|z_i^{(n)}(0)|>c\}} + \\ + \chi_{\{|z_j^{(n)}(0)|>c\}}\big) = 2c_1\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu_0^{(n)}(\{z\colon |z| > c\}).$$

Поскольку правую часть выбором c можно сделать сколь угодно малой, то имеет место (3). Тем самым установлено, что величина (1) имеет предел тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M} G(z_i^{(n)}(\cdot)) \tag{4}$$

и предел величины (1) совпадает с (4). Пусть мера ν_n на $D_{[0,T]}(Z)$ определена равенством

$$\int G(z)\,\nu_n(dz) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{M} G(z_i^{(n)}(\cdot))$$

для всякой непрерывной в метрике ρ_D ограниченной функции G. Тогда

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{(n)},$$

где мера $\mu_i^{(n)}$ на $D_{[0,T]}(Z)$ соответствует процессу $z_i^{(n)}(t)$. Обозначим через μ_z меру, соответствующую решению уравнения (2) с начальным условием $\hat{z}(0) = z$. Само это решение обозначим через $\hat{z}(t, z)$. Поскольку при некотором c

$$|\bar{a}(t, z) - \bar{a}(t, z_1)| + \\ + \int |f(\theta, z, z') - f(\theta, z_1, z')|\, m(d\theta) \leqslant c\,|z - z_1|,$$

то

$$\sup_{s\leqslant t} |\hat{z}(s, z) - \hat{z}(t, z_1)| \leqslant \\ \leqslant |z - z_1| + \int_0^t |\bar{a}(s, \hat{z}(s, z)) - \bar{a}(s, \hat{z}(s, z_1))|\, ds + \\ + \int_0^t \iint |f(\theta, \hat{z}(s, z), z') - f(\theta, \hat{z}(s, z_1), z')|\, \bar{p}(d\theta \times dz' \times ds),$$

$$\mathsf{M} \sup_{s\leqslant t} |\hat{z}(s, z) - \hat{z}(s, z_1)| \leqslant \\ \leqslant |z - z_1| + c\mathsf{M} \int_0^t |\hat{z}(s, z) - \hat{z}(s, z_1)|\, ds.$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}\sup_{s\leqslant t}|\hat{z}(s,\ z)-\hat{z}(s,\ z_1)|\leqslant|z-z_1|e^{cT}.$$

Отсюда вытекает, что $\int G(z(\cdot))\mu_z(dz(\cdot))=\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z)$ непрерывно по z. Из теоремы 3 § 4 вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}[\mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot))-\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z_i^{(n)}(0))]=0,$$

если $|z_i^{(n)}(0)|\leqslant c_1$, где c_1 — произвольная постоянная. Имеем

$$\int G(z(\cdot))\nu_n(dz(\cdot))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int G(z(\cdot))\mu_i^{(n)}(dz(\cdot))=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot))=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z_i^{(n)}(0)))+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot))-\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z_i^{(n)}(0))]=$$

$$=\int\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z))\mu_0^{(n)}(dz)+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\mathsf{M}G(z_i^{(n)}(\cdot))-\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z_i^{(n)}(0)))]\chi_{\{|z_i^{(0)}(0)|\leqslant c_1\}}+$$

$$+O(\mu_0^{(n)}(\{z\colon\ |z|>c_1\})).$$

Из непрерывности $\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z))$ по z вытекает, что первое слагаемое справа стремится к $\int\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z))\lambda_0(dz)$, второе слагаемое, как было показано выше, стремится к нулю, а третье выбором c_1 можно сделать сколь угодно малым для всех n. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\int G(z(\cdot))\nu_n(dz(\cdot))=$$

$$=\int\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot,\ z))\lambda_0(dz)=\int\int G(z(\cdot))\mu_z(dz(\cdot))\lambda_0(dz).$$

Правая часть есть предел величины (4) и значит величина (3) сходится по вероятности к правой части последнего равенства. Остается заметить, что $\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot))=\int\int G(z(\cdot))\times$ $\times\mu_z(dz(\cdot))\lambda_0(dz)$. Теорема доказана.

При исследовании взаимодействий частиц надо рассматривать функционалы, зависящие от траекторий нескольких частиц. Пусть $G(z_1(\cdot), \ldots, z_k(\cdot))$ — непрерывная в метрике ρ_D функция на $D_{[0, T]}(Z^k)$. Рассмотрим величину

$$\frac{1}{n^k} \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^{n} G(z_{i_1}^{(n)}(\cdot), \ldots, z_{i_k}^{(n)}(\cdot)). \tag{5}$$

Используя теорему 4 § 4 можно точно так, как и теорему 1, доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 § 4. *Тогда величина* (5) *при* $n \to \infty$ *сходится по вероятности к величине* $\mathsf{M}G(\hat{z}_1(\cdot), \ldots, \hat{z}_k(\cdot))$, *где* $\hat{z}_1(t), \ldots, \hat{z}_k(t)$ — *независимые между собой процессы, каждый из которых распределен, как процесс* $\hat{z}(t)$, *определенный уравнением* (2).

Приведем некоторые примеры применения сформулированных теорем. Пусть в фазовом пространстве Z выделена область S и нас интересует число частиц, которые побывают в этой области. Обозначим через S' границу области S. Предположим, что вероятность события $\{$в некоторый момент $\tau \leqslant T$ $\hat{z}(\tau) \in S'$, но $\hat{z}(t) \in S \cup S'$ для всех $t \leqslant T$ или $\hat{z}(t) \in X \setminus S$ для всех $t \leqslant T\}$, равна нулю. Тогда функция

$$G(z(\cdot)) = \begin{cases} 1, & \text{если при некотором } t \leqslant T \ z(t) \in S; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

непрерывна по $z(\cdot)$ в ρ_D во всех точках $z(\cdot) \in D_{[0, T]}(Z)$, кроме тех, для которых $G(z(\cdot)) = 0$, но $z(t)$ в некоторой точке попадает на S'. При сформулированном предположении $G(z(\cdot))$ непрерывна почти всюду по мере $\hat{\mu}$, отвечающей на $D_{[0, T]}(Z)$ процессу $\hat{z}(t)$. Как известно (см. [11], т. 1, стр. 437, лемма), если последовательность мер μ_n слабо сходится к мере $\hat{\mu}$ в $D_{[0, T]}(Z)$, то распределение $G(z(\cdot))$ по мере $\hat{\mu}_n$ сходится к распределению $G(z(\cdot))$ по мере $\hat{\mu}$ для всех G, которые непрерывны (в метрике ρ_D) почти всюду по мере $\hat{\mu}$. Значит, если ψ_n — число частиц, попадавших в область S в течение времени $[0, T]$, то при высказанных предположениях $\frac{\psi_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} G(z_i^{(n)}(\cdot))$ сходится к величине $\mathsf{M}G(\hat{z}(\cdot))$, которая совпадает с вероятностью того, что процесс $\hat{z}(t)$ в некоторый момент попадает в область S.

Рассмотрим теперь число «столкновений» между частицами. Будем считать, что произошло столкновение, если в некоторый момент времени t $z_i(t) - z_j(t) \in V$, где V — некоторая область в Z. Определим функции $G(z_1(\cdot), z_2(\cdot))$ на $D_{[0, T]}(Z^2)$:

$$G(z_1(\cdot), z_2(\cdot)) = \begin{cases} 1, & \text{если при некотором } t \leqslant T \ z_1(t) - z_2(t) \in V; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Число «столкновений» равно $\sum\limits_{i \neq j} G(z_i^{(n)}(\cdot), z_j^{(n)}(\cdot))$. Если вероятность события $\{G(\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot)) = 0\}$ и при некотором $t \leqslant T$ $\hat{z}_1(t) - \hat{z}_2(t) \in V'\}$ равна нулю, то функционал G почти всюду непрерывен по мере $\hat{\mu}^2$, соответствующей предельному процессу. Поэтому на основании теоремы 2

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} G(z_i^{(n)}(\cdot), z_j^{(n)}(\cdot)) \to \mathsf{M} G(\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot))$$

по вероятности. Величина справа совпадает с вероятностью того, что разность двух независимых процессов $\hat{z}_1(t) - \hat{z}_2(t)$, каждый из которых распределен, как $\hat{z}(t)$, в некоторый момент попадет в область V.

§ 7. Диффузионная аппроксимация

Переформулируем полученные результаты для системы уравнений вида (4) § 1. При указанной ранее зависимости коэффициентов уравнения от n такая система примет вид:

$$dv_i^{(n)}(t) = \Big[A(x_i^{(n)}(t), v_i^{(n)}(t)) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a(x_i^{(n)}(t), x_j^{(n)}(t), v_i^{(n)}(t), v_j^{(n)}(t)) \Big] dt + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Theta} f(\theta, x_i^{(n)}(t), v_i^{(n)}(t), x_j^{(n)}(t), v_j^{(n)}(t))\, p_{ij}^{(n)}(d\theta \times dt); \quad (1)$$

здесь $x_i^{(n)}(t)$ — радиус-вектор i-ой частицы в момент t, $v_i^{(n)}(t)$ — ее скорость,

Пусть выполнены условия:

1) При некоторых $c > 0$, $\alpha > 1$, $0 < \alpha_1 < \alpha$

$$|A(x, v) - A(\bar{x}, \bar{v})| \leqslant c(|x - \bar{x}| + |v - \bar{v}|),$$
$$|A(x, v)| \leqslant c(1 + |x|^{\alpha_1} + |v|),$$

$$|a(x,\ y,\ v,\ u)| \leqslant c(1+|x|+|y|+|u|+|v|),$$
$$|a(x,\ y,\ v,\ u)-a(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{v},\ \bar{u})| \leqslant$$
$$\leqslant c(|x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|+|v-\bar{v}|+|u-\bar{u}|),$$
$$\int_{\Theta} |f(\theta,\ x,\ v,\ y,\ u)-f(\theta,\ \bar{x},\ \bar{v},\ \bar{y},\ \bar{u})|^{\alpha}\, m(d\theta) \leqslant$$
$$\leqslant c(|x-\bar{x}|^{\alpha}+|y-\bar{y}|^{\alpha}+|v-\bar{v}|^{\alpha}+|u-\bar{u}|^{\alpha});$$
$$\int_{\Theta} |f(\theta,\ x,\ v,\ y,\ u)|^{\alpha}\, m(d\theta) \leqslant c(1+|x|^{\alpha}+|v|^{\alpha}+|y|^{\alpha}+|u|^{\alpha}).$$

2) Обозначим через $\mu_t^{(n)}(dx,\ dv)$ статистическую функцию распределения системы: для всякой ограниченной непрерывной функции $\varphi(x,\ v)$

$$\int \varphi(x,\ v)\,\mu_t^{(n)}(dx,\ dv) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i^{(n)}(t),\ v_i^{(n)}(t)),$$

последовательность мер $\mu_t^{(n)}(dx,\ dv)$ слабо сходится к мере $\lambda_0(dx,\ dv)$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int (|x|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_1})\,\mu_t^{(n)}(dx,\ dv) < \infty.$$

Если выполнены эти условия, то выполнены условия теоремы 1 § 4 с функциями $\rho(z)=\rho(x,\ v)=|x|^{\alpha_1}+|v|^{\alpha_1}$, $\lambda(|z|)=|z|^{\alpha}$. Поэтому будут справедливы следующие утверждения, вытекающие из теорем 1, 2 § 4.

I. Для всех $t>0$ статистическая функция распределения $\mu_t^{(n)}(dx,\ dv)$ слабо сходится по вероятности к неслучайной вероятностной мере $\lambda_t(dx,\ dv)$, при этом для всех $\varphi \in C_{X^2}$ $\int \varphi(x,\ v)\,\lambda_t(dx,\ dv)$ непрерывно по $t>0$, $t \geqslant 0$ и для $t>0$ для всякой функции $\varphi(x,\ v) \in C_{X^2}$ и непрерывно дифференцируемой по $x,\ v$ выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x,\ v)\,\lambda_t(dx,\ dv) =$$
$$= \int \Big[(\varphi'_x(x,\ v),\ v) + (\varphi'_v(x,\ v),\ A(x,\ v)) +$$
$$+ \int a(x,\ y,\ v,\ u)\,\lambda_t(dy,\ du)\Big]\lambda_t(dx,\ dv) +$$
$$+ \iiint [\varphi(x,\ v+f(\theta,\ x,\ v,\ y,\ u)) - \varphi(x,\ v)] \times$$
$$\times\, m(d\theta)\,\lambda_t(dy,\ du)\,\lambda_t(dx,\ dv). \qquad (2)$$

Мера $\lambda_t(dx, dv)$ является пределом при $r \to \infty$ мер $\lambda_t^{(r)}(dx, dv)$, которые однозначно определяются соотношением

$$\frac{d}{dt}\int \varphi(x, v)\lambda_t^{(r)}(dx, dv) =$$
$$= r\iint\left[\varphi\left(x + \frac{1}{r}v,\ v + \frac{1}{r}(A(x, v) + a(x, y, v, u))\right. -\right.$$
$$- \varphi(x, v)\Big]\lambda_t^{(r)}(dy, du)\lambda_t^{(r)}(dx, dv) +$$
$$+ \iiint[\varphi(x, v + f(\theta, x, v, y, u)) - \varphi(x, v)] \times$$
$$\times m(d\theta)\lambda_t^{(r)}(dy, du)\lambda_t^{(r)}(dx, dv). \qquad (3)$$

II. Обозначим

$$\bar{a}_t(x, v) = A(x, v) + \int a(x, y, v, u)\lambda_t(dy, du),$$

и пусть $p(d\theta \times dx \times dv \times dt)$ — пуассоновская мера на $\Theta \times X^2 \times [0, \infty)$, для которой

$$\mathsf{M}p(d\theta \times dx \times dv \times dt) = m(d\theta)\lambda_t(dx, dv)\,dt.$$

Если $x_1^{(n)}(0) \to x(0)$, $v_1^{(n)}(0) \to v(0)$, то конечномерные распределения и распределения функционалов, непрерывных на $D_{[0, T]}(X^2)$ в метрике ρ_D, для процессов $(x_1^{(n)}(t), v_1^{(n)}(t))$ сходятся к конечномерным распределениям и распределениям тех же функционалов для процесса $(\bar{x}_1(t), \bar{v}_1(t))$, являющегося решением стохастического уравнения

$$d\bar{v}_1(t) = \bar{a}_t(x_1(t), \bar{v}_1(t))\,dt +$$
$$+ \iiint f(\theta, \bar{x}_1(t), \bar{v}_1(t), x, v)\,p(d\theta \times dx \times dv \times dt) \qquad (4)$$

с начальным условием $\bar{v}_1(0) = v_1(0)$, где

$$\bar{x}_1(t) = x_0 + \int_0^t \bar{v}_1(s)\,ds.$$

В этом параграфе будем исследовать уравнение (4) в предположении, что скорость неограниченно возрастает за счет роста $\bar{a}_t$ и увеличения числа скачков скачкообразной составляющей (роста меры m). Оказывается, что в том случае, когда имеется определенное «торможение», т. е. среднее от приращения скорости направлено против скорости, то хотя $v(t)$ становится неограниченным, но $x(t)$ остается ограниченным и конечномерные распределения процесса $x(t)$ в пределе совпадают с конечномерными распределениями некоторого диффузионного процесса. Это до некоторой степени объясняет то обстоятельство, что уравнения, получаемые в теории вероятностей для броуновского движения, являются уравнениями первого порядка, а уравнения движения частиц (уравнения Ньютона) — второго порядка.

Будем рассматривать семейство уравнений вида (4) с коэффициентами, зависящими от малого параметра ε, и исследовать поведение решения при $\varepsilon \to 0$. Пусть $x_\varepsilon(t)$, $v_\varepsilon(t)$ являются решениями уравнения

$$dv_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(-M(t, x_\varepsilon)v_\varepsilon + a(t, x_\varepsilon) + \alpha(t, x_\varepsilon, v_\varepsilon))\,dt + \\ + \int f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon, v_\varepsilon)\,q_\varepsilon(d\theta \times dt), \qquad (5)$$

где $M(t, x)$ — некоторый строго положительный оператор в X, $a(t, x) \in X$, $\alpha_\varepsilon(t, x, v) = o(1)$ равномерно по t, x и v, $q_\varepsilon(d\theta \times dt) = p_\varepsilon(d\theta \times dt) - m_\varepsilon(t, d\theta)\,dt$, где $m_\varepsilon(t, d\theta)\,dt = \mathsf{M}p_\varepsilon(d\theta \times dt)$, $p_\varepsilon(d\theta \times dt)$ — пуассоновская мера на $\Theta \times [0, \infty)$ (очевидно, $\Theta \times X^2$ можно взять за новое Θ). Строгая положительность оператора $M(t, x)$ и означает наличие требуемого торможения. Заметим, что торможение в вязкой среде будет пропорционально скорости и направлено в противоположную скорости сторону, т. е. в данном случае $M(t, x) = \mu(t, x)E$, где E — единичный оператор, μ — коэффициент, зависящий от свойств среды в момент t в точке x.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \sup\limits_{x, v, t} \varepsilon^3 \int |f_\varepsilon(\theta, x, v)|^4 m_\varepsilon(t, d\theta) < \infty$;

2) *существует такое* $g_\varepsilon(\theta, x)$, *что* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{\theta, x} |g_\varepsilon(\theta, x)| = 0$ *и*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x, v, t} \int |\varepsilon f_\varepsilon(\theta, x, v) - g_\varepsilon(\theta, x)|^2 m_\varepsilon(t, d\theta) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t, x} \int |g_\varepsilon(\theta, x)|^4 m_\varepsilon(t, d\theta) = 0.$$

3) *существует неотрицательный оператор* $B(t, x)$ *такой, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{x, v, t} \left| \int (g_\varepsilon(\theta, x), z)^2 m_\varepsilon(t, d\theta) - (B(t, x)z, z) \right| = 0,$$

$$z \in X;$$

4) *функции* $a(t, x)$, $B(t, x)$, $M(t, x)$ *непрерывны по совокупности переменных и ограничены.*

5) *при некотором* $\gamma > 0$ $(M(t, x)v, v) \geqslant \gamma(v, v)$, *существуют непрерывные производные оператора* $M(t, x)$ *по* t *и* x,

6) *функции* $a(t, x)$, $B(t, x)$ *и* $[M(t, x)]'_x$ *удовлетворяют условию Липшица по* x *с постоянной, не зависящей от* t.

Тогда, если $x_\varepsilon(0) \to x(0)$ *и* $|v_\varepsilon(0)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, *то конечномерные распределения процесса* $x_\varepsilon(t)$ *слабо сходятся в* $D_{[0,T]}(X)$ *к распределениям диффузионного процесса* $x(t)$, *являющегося решением стохастического дифференциального уравнения*

$$dx(t) = \tilde{a}(t, x(t))\,dt + \tilde{B}(t, x(t))\,dw(t) \tag{6}$$

с начальным условием $x(0)$; здесь $w(t)$ — *винеровский процесс в* X,

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{B}(t, x) = (M^{-1}(t, x)B(t, x)M^{*^{-1}}(t, x))^{1/2}, \\ &\tilde{a}(t, x) = M^{-1}(t, x)a(t, x) + \\ &\quad + \sum_{j,k,l=1}^{r} (D(t, x)e_k, e_l)([M^{-1}(t, x)]'_x(e_k)e_l, e_j)e_j, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где

$$D(t, x) = \int_0^\infty e^{-sM(t,x)}B(t, x)e^{-sM^*(t,x)}ds,$$

$\{e_1, \ldots, e_{yr}\}$ — *ортонормированный базис в* X,

$[M^{-1}]'_x(u)$ — *производная от оператора* M^{-1} *в направлении* u,

M^* — *оператор, сопряженный* M.

Доказательство теоремы разобьем на несколько пунктов.

1. Покажем, что величина $\mathsf{M}\varepsilon(v_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))$ ограничена. Действительно, по формуле Ито

$$\begin{aligned} \mathsf{M}d(v_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) = 2\mathsf{M}\Big\{\frac{1}{\varepsilon}[-M(t, x_\varepsilon(t))v_\varepsilon(t) + \\ + a(t, x_\varepsilon(t)) + \alpha_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)), v_\varepsilon(t))]\Big\}dt + \\ + \int_\Theta |f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^2 m_\varepsilon(t, d\theta)\,dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^2 \leqslant -\frac{2\gamma}{\varepsilon}\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^2 + \frac{c_1}{\varepsilon^2}, \tag{8}$$

где c_1 — некоторая постоянная (мы воспользовались ограниченностью $a(t, x)$, $\alpha_\varepsilon(t, x, v)$, $B(t, x)$, условиями 2), 3), 5)). Из неравенства (8) вытекает, что

$$\varepsilon\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^2 \leqslant \max\left[\varepsilon\,|v_\varepsilon(0)|^2, \frac{c_1}{2\gamma}\right]. \tag{9}$$

2. Покажем теперь ограниченность величины $\varepsilon^2\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^4$. Снова используя формулу Ито, находим

$$\begin{aligned} d\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^4 \leqslant 4\mathsf{M}\Big(\frac{1}{\varepsilon}[-M(t, x_\varepsilon(t))\,v_\varepsilon(t) + a(t, x_\varepsilon(t)) +{} \\ + \alpha_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))], v_\varepsilon(t)\Big)\,|v_\varepsilon(t)|^2\,dt +{} \\ + \mathsf{M}\int_\Theta \{6\,|f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^2 \cdot |v_\varepsilon(t)|^2 +{} \\ + 4\,|f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^3 \cdot |v_\varepsilon(t)| +{} \\ + |f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^4\}\, m_\varepsilon(t, d\theta)\,dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Имеем далее:

$$\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^2\int |f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^2\, m_\varepsilon(t, d\theta) \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon^2}\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^2,$$

$$\int |f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^4\, m_\varepsilon(t, d\theta) \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon^3},$$

$$\begin{aligned} \mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|\int |f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^3\, m_\varepsilon(t, d\theta) \leqslant{} \\ \leqslant \frac{1}{2}\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^2\int |f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^2\, m_\varepsilon(t, d\theta) +{} \\ + \frac{1}{2}\mathsf{M}\int |f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))|^4\, m_\varepsilon(t, d\theta) \leqslant{} \\ \leqslant \frac{c_1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^3}\right). \end{aligned}$$

Далее для всех $\gamma_1 > 0$

$$(a(t, x) + \alpha_\varepsilon, v) \leqslant \gamma_1\,|v|^2 + \frac{1}{4\gamma_1}\,|a(t, x) + \alpha_\varepsilon|^2.$$

Поэтому из неравенства (10) вытекает существование такой постоянной c_2, что

$$\frac{d}{dt}\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^4 \leqslant -\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathsf{M}\,|v_\varepsilon(t)|^4 + \frac{c^2}{\varepsilon^3}.$$

Значит
$$\varepsilon^2 \mathsf{M} |v_\varepsilon(t)|^4 \leqslant \max\left[\varepsilon^2 |v_\varepsilon(0)|^4, \frac{c_2}{\gamma}\right].$$

3. Перепишем уравнение (5) в виде

$$M(t, x_\varepsilon(t))\, dx_\varepsilon(t) = a(t, x_\varepsilon(t))\, dt + \int \varepsilon f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) \times \times q_\varepsilon(d\theta \times dt) + \alpha_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))\, dt - \varepsilon dv_\varepsilon(t).$$

Отсюда

$$x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0) = \int_0^t M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))\, a(s, x_\varepsilon(s))\, ds + + \int_0^t \int_\Theta \varepsilon M^{-1}(s, x_\varepsilon(s)) f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(s), v_\varepsilon(s))\, q_\varepsilon(d\theta \times ds) - - \varepsilon \int_0^t M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))\, dv_\varepsilon(s) + \alpha_\varepsilon(t), \tag{11}$$

где $\alpha_\varepsilon(t)$ стремится к нулю равномерно по t. Используя условие 2) можем убедиться, что

$$\int_0^t \int_\Theta \varepsilon M^{-1}(s, x_\varepsilon(s)) f_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(s), v_\varepsilon(s))\, q_\varepsilon(d\theta \times ds) = = \int_0^t \int_\Theta M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))\, g_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(s))\, q_\varepsilon(d\theta \times ds) + \beta_\varepsilon(s),$$

где $\beta_\varepsilon(s)$ — квадратично интегрируемый мартингал, характеристика которого стремится к нулю. Поэтому $\beta_\varepsilon(t)$ сходится по вероятности к нулю равномерно на каждом конечном интервале.

Воспользуемся дифференцируемостью $M^{-1}(s, x)$ по совокупности переменных и проинтегрируем интеграл по dv_ε в равенстве (11) по частям. Получим

$$\int_0^t M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))\, dv_\varepsilon(s) = M^{-1}(t, x_\varepsilon(t))\, v_\varepsilon(t) - - M^{-1}(0, x_\varepsilon(0), v_\varepsilon(0)) - \int_0^t [M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))]'_s\, v_\varepsilon(s)\, ds - - \int_0^t [M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))]'_x (v_\varepsilon(s))\, v_\varepsilon(s)\, ds$$

(здесь $[\ ]'_s$ — частная производная оператора по s, а $[\ ]'_x(v)$ — частная производная оператора по x в направлении v, от v она зависит линейно). Поскольку операторы $M^{-1}(t, x)$ и $[M^{-1}(t, x)]'_t$ ограничены, то $\varepsilon M^{-1}(t, x_\varepsilon(t))\, v_\varepsilon(t)$, $\varepsilon M^{-1}(t, x_\varepsilon(0))\, v_\varepsilon(0)$ и

$$\varepsilon \int_0^t [M^{-1}(\varepsilon, x_\varepsilon(s)]'_s\, v_\varepsilon(s)\, ds$$

стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом уравнение (11) можно переписать в виде

$$x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0) = \int_0^t M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))\, a(s, x_\varepsilon(s))\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int_\Theta M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))\, g_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(s))\, q_\varepsilon(d\theta \times ds) +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t [M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))]'_x(v_\varepsilon(s))\, v_\varepsilon(s)\, ds + \delta_\varepsilon(t), \qquad (12)$$

где $\delta_\varepsilon(t)$ — случайный процесс, который равномерно относительно t сходится к нулю по вероятности при $\varepsilon \to 0$.

4. Покажем, что $\delta_\varepsilon(t)$ в (12) таково, что для всех $T > 0$ величина $\sup\limits_{t \leqslant T} |\delta_\varepsilon(t)| \to 0$ по вероятности. Для этого достаточно показать, что для всех T

$$\sup_{t \leqslant T} \varepsilon |v_\varepsilon(t)| \to 0 \qquad (13)$$

по вероятности. Если в формуле, с помощью которой было получено (8), не брать математического ожидания, то найдем

$$d(v_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) \leqslant$$

$$\leqslant \left[-\frac{2\gamma}{\varepsilon}(v_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) + \frac{c_1}{\varepsilon^2}\right] dt + \frac{2}{\varepsilon} \int_\Theta (v, \varepsilon f)\, q_\varepsilon(d\theta \times dt).$$

Рассмотрим это неравенство при $t \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$. Будем иметь:

$$de^{\frac{\gamma}{\varepsilon} t} |v_\varepsilon(t)|^2 \leqslant e^{\frac{\gamma}{\varepsilon} t} \frac{c_1}{\varepsilon^2} dt + \frac{2}{\varepsilon} \int_\Theta e^{\frac{\gamma}{\varepsilon} t} (v, \varepsilon f)\, q_\varepsilon(d\theta \times dt),$$

$$e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}t}\,|v_\varepsilon(t)|^2 \leqslant |v_\varepsilon(k\varepsilon)|^2 e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}\varepsilon k} + \frac{c_1}{\varepsilon^2}\int\limits_{k\varepsilon}^{t} e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}s}\,ds + \int\limits_{k\varepsilon}^{t}\int\limits_{\Theta} e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}s}(v,\ \varepsilon f)\,q_\varepsilon(d\theta\times ds),$$

$$\sup_{k\varepsilon\leqslant t\leqslant(k+1)\varepsilon}|v_\varepsilon(t)|^2 \leqslant e^{\gamma}\left[|v_\varepsilon(k\varepsilon)|^2 + \frac{c_1}{\varepsilon\gamma}(1-e^{-\gamma})\right] + \sup_{k\varepsilon\leqslant t\leqslant(k+1)\varepsilon}\left|\int\limits_{k\varepsilon}^{t}\int\limits_{\Theta} e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}(s-k\varepsilon)}(v,\ \varepsilon f)\,q_\varepsilon(d\theta\times ds)\right|.$$

Если $\psi_\varepsilon(s) = \exp\left\{\frac{\gamma}{\varepsilon}(s-k\varepsilon)\right\}$ при $k\varepsilon < s \leqslant (k+1)\varepsilon$, то

$$\sup_{t\leqslant T}|v_\varepsilon(t)|^2 \leqslant \frac{c_1}{\varepsilon\gamma}(e^{\gamma}-1) + e^{\gamma}\sup_{k\leqslant T/\varepsilon}|v_\varepsilon(k\varepsilon)|^2 + 2\sup_{t\leqslant T}\left|\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Theta}\psi_\varepsilon(s)(v_\varepsilon(s),\ f_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(s),\ v_\varepsilon(s)))\,q_\varepsilon(d\theta\times ds)\right|. \qquad (14)$$

Заметим, что

$$\mathsf{P}\{\varepsilon^2\sup_{k\leqslant T/\varepsilon}|v_\varepsilon(k\varepsilon)|^2>\lambda\} \leqslant \sum_{k\leqslant T/\varepsilon}\mathsf{P}\{\varepsilon^2|v_\varepsilon(k\varepsilon)|^2>\lambda\} \leqslant \sum_{k\leqslant T/\varepsilon}\frac{\mathsf{M}\varepsilon^4|v_\varepsilon(k\varepsilon)|^4}{\lambda^2} \leqslant \frac{T}{\varepsilon\lambda^2}\varepsilon^4\sup_{t\leqslant T}\mathsf{M}|v_\varepsilon(t)|^4 = O(\varepsilon).$$

Далее:

$$\mathsf{M}\sup_{t\leqslant T}\left|\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Theta}\psi_\varepsilon(s)(v_\varepsilon(s),\ f_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(s),\ v_\varepsilon(s)))\,q_\varepsilon(d\theta\times ds)\right|^2 \leqslant 4\mathsf{M}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Theta}\psi_\varepsilon^2(s)(v_\varepsilon(s),\ f_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(s),\ v_\varepsilon(s)))^2 m_\varepsilon(s,\ d\theta)\,ds \leqslant 4e^{2\gamma}\frac{1}{\varepsilon^2}c_1\mathsf{M}\int\limits_{0}^{T}|v_\varepsilon(s)|^2\,ds = O(\varepsilon^{-3}).$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\varepsilon^2\sup_{t\leqslant T}\left|\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Theta}\psi_\varepsilon(s)(v_\varepsilon(s),\ f_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(s)\,v_\varepsilon(s)))\,q_\varepsilon(d\theta\times ds)\right| = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Таким образом, после умножения неравенства (14) на ε^2 каждый член в правой части стремится к нулю по вероятности. Соотношение (13) доказано.

5. Покажем теперь, что семейство мер, отвечающих в $C_{[0,T]}(X)$ процессам $\zeta_\varepsilon(t)=\varepsilon\int\limits_0^t [M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))]'_x(v_\varepsilon(s))\,v_\varepsilon(s)\,ds$, компактно. В силу предположений, наложенных на оператор M, $|[M^{-1}(s, x)]'_x(v)\,v| \leqslant c_3|v|^2$, где c_3 — некоторая постоянная. Поэтому при $0 \leqslant t < t+h \leqslant T$

$$|\zeta_\varepsilon(t+h)-\zeta_\varepsilon(t)| \leqslant c_3\int\limits_t^{t+h} \varepsilon\,|v_\varepsilon(s)|^2\,ds \leqslant$$

$$\leqslant c_3\sqrt{h}\sqrt{\int\limits_0^T \varepsilon^2|v_\varepsilon(s)|^4\,ds}.$$

Поскольку в пункте 2 доказано, что $\mathsf{M}\int\limits_0^T \varepsilon^2|v_\varepsilon(s)|^4\,ds$ равномерно ограничено, то из последнего неравенства и вытекает требуемое.

6. Семейство мер, отвечающих процессам $x_\varepsilon(t)$ в $D_{[0,T]}(X)$, также компактно. Действительно, обозначим

$$a_1(t, x) = M^{-1}(t, x)\,a(t, x),$$
$$h_\varepsilon(0, t, x) = M^{-1}(t, x)\,g_\varepsilon(t, x),$$
$$\eta_\varepsilon(t) = \zeta_\varepsilon(t) + \delta_\varepsilon(t).$$

Тогда

$$x_\varepsilon(t)-x_\varepsilon(0)=$$
$$=\int\limits_0^t a_1(s, x_\varepsilon(s))\,ds + \int\limits_0^t h_\varepsilon(0, s, x_\varepsilon(s))\,q_\varepsilon(d\theta\times ds) + \eta_\varepsilon(t).$$

Ограниченность по вероятности $\sup\limits_{t\leqslant T}|x_\varepsilon(t)|$ вытекает из ограниченности $a_1(s, x)$ и $\int h_\varepsilon(0, s, x)\,m_\varepsilon(s, d\theta)$ и ограниченности по вероятности $\sup\limits_{t\leqslant T}|\eta_\varepsilon(T)|$. Функции $\int\limits_0^t a_1(s, x_\varepsilon(s))\,ds$ равномерно непрерывны, а компактность стохастических интегралов вытекает из неравенства

$$\mathsf{M}\left[\left|\int_t^{t+h} h_\varepsilon(\theta, s, x_\varepsilon(s))\, q_\varepsilon(d\theta \times ds)\right|^2 \Big/ \mathcal{F}_t^{(\varepsilon)}\right] \leqslant c_4 h,$$

где $\mathcal{F}_t^{(\varepsilon)}$ — σ-алгебра, порожденная величинами $x_\varepsilon(s)$, $v_\varepsilon(s)$, $s \leqslant t$, а c_4 — некоторая постоянная.

7. Рассмотрим теперь предельное поведение интегралов вида

$$\varepsilon \int_0^t \varphi(x_\varepsilon(s))(v_\varepsilon(s), z)(v_\varepsilon(s), u)\, ds,$$

где $\varphi(x)$ — ограниченная непрерывная функция, z и u принадлежат X. Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{M}\left|\varepsilon \int_0^t \varphi(x_\varepsilon(s))(v_\varepsilon(s), z)(v_\varepsilon(s), u)\, ds - \right.$$
$$\left. - \int_0^t \varphi(x_\varepsilon(s))\,(D(s, x_\varepsilon(s))\, z, u)\, ds\right| = 0. \qquad (15)$$

($D(t, x)$ определено в формулировке теоремы.) Поскольку $\varphi(x)$ ограничена и непрерывна, то при $0 = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_n = t$

$$\mathsf{M}\left|\varepsilon \int_0^t \varphi(x_\varepsilon(s))(v_\varepsilon(s), z)(v_\varepsilon(s), u)\, ds - \right.$$
$$\left. - \varepsilon \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(x_\varepsilon(t_{k-1}))(v_\varepsilon(s), z)(v_\varepsilon(s), u)\, ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathsf{M}\,[\varphi(x_\varepsilon(s)) - \varphi(x_\varepsilon(t_{k-1}))]^2\, ds\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\mathsf{M}\int_0^t \varepsilon^2 |v_\varepsilon(s)|^4\, ds\right)^{1/2} |z| \cdot |u|$$

и правая часть может быть сделана сколь угодно малой выбором достаточно малого $\max_k (t_k - t_{k-1})$ в силу компактности мер, отвечающих $x_\varepsilon(t)$ в $D_{[0, T]}(X)$. Поэтому для доказательства (15) достаточно показать, что для достаточно малых $h>0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{M}\left|\varepsilon \int_t^{t+h} (v_\varepsilon(s),\ z)(v_\varepsilon(s),\ u)\,ds - \right.$$
$$\left. - \int_t^{t+h} (D(s,\ x_\varepsilon(s))\,z,\ u)\,ds\right| = 0.$$

А для доказательства этого соотношения достаточно показать, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \mathsf{M}\left|\varepsilon \int_t^{t+h} (v_\varepsilon(s),\ z)(v_\varepsilon(s),\ u)\,ds - \right.$$
$$\left. - \int_t^{t+h} (D(s, x_\varepsilon(s))\,z, u)\,ds\right| = o(h) \qquad (16)$$

равномерно относительно t. Из уравнения (12) и оценки (9) вытекает соотношение

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sup_{t\leqslant s\leqslant t+h} \mathsf{M}\,|x_\varepsilon(s) - x_\varepsilon(t)| = 0. \qquad (17)$$

Используя непрерывность и ограниченность $D(t,\ x)$ и это соотношение, находим:

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \mathsf{M}\left|\int_t^{t+h} (D(s,\ x_\varepsilon(s))\,z,\ u)\,ds - h(D(t,\ x_\varepsilon(t))\,z,\ u)\right| =$$
$$= o(h). \qquad (18)$$

Пусть $\hat{v}_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t)$, а при $t \leqslant s \leqslant t+h$ выполнено равенство

$$d\hat{v}_\varepsilon(s) = -\frac{1}{\varepsilon} M(t,\ x_\varepsilon(t))\,\hat{v}_\varepsilon(s) + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Theta g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\,q_\varepsilon(d\theta\times ds).$$

Тогда

$$d(v_\varepsilon(s) - \hat{v}_\varepsilon(s)) =$$
$$= -\frac{1}{\varepsilon} M(t,\ x_\varepsilon(t))\,(v_\varepsilon(s) - \hat{v}_\varepsilon(s))\,ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}[a(s,\ x_\varepsilon(s)) + \alpha_\varepsilon(s,\ x_\varepsilon(s),\ v_\varepsilon(s))]\,ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}[M(t,\ x_\varepsilon(t)) - M(s,\ x_\varepsilon(s))]\,v_\varepsilon(s)\,ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Theta [\varepsilon f_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(s),\ v_\varepsilon(s)) - g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))]\,q_\varepsilon(d\theta\times ds).$$

И значит (сравни с п. 1):

$$\frac{d}{ds}\mathsf{M}|v_\varepsilon(s)-\hat v_\varepsilon(s)|^2\leqslant\frac{-2\gamma}{\varepsilon}\mathsf{M}|v_\varepsilon(s)-\hat v_\varepsilon(s)|^2+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\mathsf{M}(\|M(t,\ x_\varepsilon(t))-M(s,\ x_\varepsilon(s))\|\cdot|v_\varepsilon(s)|+$$
$$+|a(s,\ x_\varepsilon(s))|+\alpha_\varepsilon|v_\varepsilon(s)-\hat v_\varepsilon(s)|)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\mathsf{M}|\varepsilon f_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(s),\ v_\varepsilon(s))-g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))|^2m_\varepsilon(s,\ d\theta),\qquad(19)$$

где $\alpha_\varepsilon\to0$. Из условия 2) теоремы вытекает, что

$$\int\mathsf{M}|\varepsilon f_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(s),\ v_\varepsilon(s))-g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))|^2m_\varepsilon(s,\ d\theta)=\beta_\varepsilon,$$

где $\beta_\varepsilon\to0$. Обозначим

$$\varlimsup_{\varepsilon\to0}\sup_{t\leqslant s\leqslant t+h}\mathsf{M}(\|M(t,\ x_\varepsilon(t))-M(s,\ x_\varepsilon(s))\|^2+$$
$$+\int_\Theta|g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))-g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(s))|^2m_\varepsilon(s,\ d\theta))=\delta_\varepsilon(h).$$

Из (17) вытекает, что $\lim\limits_{h\to0}\varlimsup\limits_{\varepsilon\to0}\delta_\varepsilon(h)=0$. Воспользовавшись неравенствами

$$\mathsf{M}(\|M(t,\ x_\varepsilon(t))-M(s,\ x_\varepsilon(s))\||v_\varepsilon(s)|+$$
$$+|a(s,\ x_\varepsilon(s))|)|v_\varepsilon(s)-\hat v_\varepsilon(s)|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma\mathsf{M}|v_\varepsilon(s)-\hat v_\varepsilon(s)|^2+\frac{1}{\gamma}\mathsf{M}(\|M(t,\ x_\varepsilon(t))-$$
$$-M(s,\ x_\varepsilon(s))\||v_\varepsilon(s)|^2+|a(s,\ x_\varepsilon(s))|^2),$$

$$\mathsf{M}\|M(t,\ x_\varepsilon(t))-M(s,\ x_\varepsilon(s))\|^2|v_\varepsilon(s)|^2\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\mathsf{M}\|M(t,\ x_\varepsilon(t))-M(s,\ x_\varepsilon(s))\|^4}\sqrt{\mathsf{M}|v_\varepsilon(s)|^4}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{4\sup_{t,\,x}\|M(t,\ x)\|^2\cdot\delta_\varepsilon(h)}\sqrt{\mathsf{M}|v_\varepsilon(s)|^4}=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\delta_\varepsilon(h)}\right),$$

из (19) получаем, что для всех достаточно малых ε существует постоянная H такая, что

$$\frac{d}{ds}\mathsf{M}|v_\varepsilon(s)-\hat v_\varepsilon(s)|^2\leqslant-\frac{\gamma}{\varepsilon}\mathsf{M}|v_\varepsilon(s)-\hat v_\varepsilon(s)|^2+\frac{H}{\varepsilon^2}\sqrt{\delta_\varepsilon(H)}.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\mathsf{M}|v_\varepsilon(s)-\hat v_\varepsilon(s)|^2\leqslant\frac{H}{\gamma\varepsilon}\sqrt{\delta_\varepsilon(h)}$$

и значит

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \varepsilon \mathsf{M}\,|v_\varepsilon(s)-\hat{v}_\varepsilon(s)|^2\,ds = \frac{H}{\gamma}\sqrt{\delta_\varepsilon(h)}.$$

Поэтому для доказательства (16) остается доказать, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathsf{M}\left|\varepsilon\int_t^{t+h}(\hat{v}_\varepsilon(s),\ z)(\hat{v}_\varepsilon(s),\ u)\,ds - {} - h(D(t,\ x_\varepsilon(t))\,z,\ u)\right| = o(h). \qquad (20)$$

Из уравнения для $\hat{v}_\varepsilon(s)$ находим

$$\hat{v}_\varepsilon(s) = \exp\left\{-\frac{s-t}{\varepsilon}M(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}v_\varepsilon(t) + {} + \frac{1}{\varepsilon}\int_t^s\int_\Theta \exp\left\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\,q_\varepsilon(d\theta\times d\tau),$$

$$\varepsilon\int_t^{t+h}\left(\hat{v}_\varepsilon(s) - \exp\left\{-\frac{s-t}{\varepsilon}M(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}v_\varepsilon(t),\ z\right)\times$$
$$\times\left(\hat{v}_\varepsilon(s) - \exp\left\{-\frac{s-t}{\varepsilon}M(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}v_\varepsilon(t),\ u\right)ds =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+h}ds\left[\int_t^s\int_\Theta\left(\exp\left\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}z,\right.\right.$$
$$\left.g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\right)q_\varepsilon(d\theta\times d\tau)\int_t^s\int_\Theta\left(\exp\left\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}u,\right.$$
$$\left.g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\right)q_\varepsilon(d\theta\times d\tau).$$

Так как $\mathsf{M}\varepsilon'|v_\varepsilon(t)|^2$ ограничено, а

$$\left\|\exp\left\{-\frac{s-t}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}\right\| \leqslant e^{-\frac{\gamma(s-t)}{\varepsilon}},$$

то выражение слева эквивалентно $\varepsilon\int_t^{t+h}(\hat{v}_\varepsilon(s),\ z)(\hat{v}_\varepsilon(s),\ u)\,ds$ в среднем равномерно по t при $\varepsilon\to 0$. Выражение справа на основании формулы Ито можно переписать так:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_t^s\int\limits_\Theta \Big(\exp\Big\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\Big\}z,$$

$$g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\Big)\Big(\exp\Big\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\Big\}u,$$

$$g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\Big)p_\varepsilon(d\theta\times d\tau)\,ds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_\Theta\int\limits_\Theta\iint\limits_{\substack{0<\tau<\tau_1<s\\0<\tau_1<\tau<s}}\Big(\exp\Big\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\Big\}z,$$

$$g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\Big)\Big(\exp\Big\{-\frac{s-\tau_1}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\Big\}u,$$

$$g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\Big)q_\varepsilon(d\theta\times dt)\,q_\varepsilon(d\theta_1\times dt_1)\,ds.$$

Обозначим множитель при $q_\varepsilon(d\theta\times d\tau)\,q_\varepsilon(d\theta_1\times d\tau_1)$ под интегралом через $\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau_1,\ \theta,\ \theta_1)$. Имеем:

$$\mathsf{M}\Big[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_\Theta\int\limits_\Theta\iint\limits_{0<\tau<\tau_1<s}[\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau_1,\ \theta,\ \theta_1)+$$

$$+\psi_\varepsilon(s,\ \tau_1,\ \tau,\ \theta_1,\ \theta)]\,q_\varepsilon(d\theta\times d\tau)\,q_\varepsilon(d\theta_1\times d\tau_1)\,ds\Big]^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\varepsilon^2}\mathsf{M}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_\Theta\int\limits_\Theta\int\limits_0^{\tau_1}\Big[\int\limits_{\tau_1}^{t+h}\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau_1,\ \theta,\ \theta_1)\,ds\Big]^2\times$$

$$\times\, m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,m_\varepsilon(\tau_1,\ d\theta_1)\,d\tau\,d\tau_1+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon^2}\mathsf{M}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_\Theta\int\limits_\Theta\int\limits_0^{\tau_1}\Big[\int\limits_{\tau_1}^{t+h}\psi_\varepsilon(s,\ \tau_1,\ \tau,\ \theta_1,\ \theta)\,ds\Big]^2\times$$

$$\times\, m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,m_\varepsilon(\tau_1,\ d\theta_1)\,d\tau\,d\tau_1.$$

Покажем, что оба слагаемых справа стремятся к нулю. Достаточно рассмотреть первое, так как второе получается перестановкой z и u. Имеем:

$$J=\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_t^{\tau_1}\int\limits_{\tau_1}^{t+h}\int\limits_{\tau_1}^{t+h}\int\limits_\Theta\int\limits_\Theta \mathsf{M}\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau_1,\ \theta,\ \theta_1)\times$$

$$\times\,\psi_\varepsilon(s_1,\ \tau,\ \tau_1,\ \theta,\ \theta_1)\,ds\,ds_1\times m(\tau,\ d\theta)\,(m(\tau_1,\ d\theta_1)\,d\tau\,d\tau_1=$$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\iiiint\limits_{t<\tau<\tau_1<s<s_1<t+h}\int\limits_\Theta\int\limits_\Theta \mathsf{M}\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau_1,\ \theta,\ \theta_1)\times$$

$$\times\,\psi_\varepsilon(s_1,\ \tau,\ \tau_1,\ \theta,\ \theta_1)\,ds\,ds_1 m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,m_\varepsilon(\tau_1,\ d\theta_1)\,d\tau\,d\tau_1.$$

Сделав замену переменных $\tau_1-\tau=\varepsilon\sigma_1$, $s-\tau_1=\varepsilon\sigma_2$, $s-s_1=\varepsilon\sigma_3$, $\tau=\tau$ и учитывая, что

$$\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau_1,\ \theta,\ \theta_1)=\hat{\psi}\left(\frac{s-\tau}{\varepsilon},\ \frac{s-\tau_1}{\varepsilon},\ \theta,\ \theta_1\right),$$

где

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(\alpha,\ \beta,\ \theta,\ \theta_1)|\,d\alpha\,d\beta\leqslant\frac{|z|\cdot|u|}{\gamma^2}|g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))|\,|g_\varepsilon(\theta_1,\ x_\varepsilon(t))|,$$

убеждаемся, что $J=O(\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь

$$\mathsf{M}\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\int_t^{t+h}\int_t^s\int_\Theta\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau,\ \theta,\ \theta)\,q_\varepsilon(d\theta\times d\tau)\,ds\right)^2=$$

$$=\mathsf{M}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_t^{t+h}\int_\Theta\left[\int_\tau^{t+h}\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau,\ \theta,\ \theta)\,ds\right]^2 m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,d\tau=$$

$$=\mathsf{M}\frac{2}{\varepsilon^2}\iiint\limits_{t<\tau<s<s_1<t+h}\int_\Theta\psi_\varepsilon(s,\ \tau,\ \tau,\ \theta,\ \theta)\times$$

$$\times\psi_\varepsilon(s_1,\ \tau,\ \tau,\ \theta,\ \theta)\,m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,d\tau\,ds\,ds_1\leqslant\frac{2}{\gamma^2}(|u|^2+$$

$$+|z|^2)\int_t^{t+h}\int_\Theta\mathsf{M}\,|g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))|^4\,m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,d\tau\to 0$$

в силу условия 2) теоремы. Итак установлено, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathsf{M}\left|\varepsilon\int_t^{t+h}(\hat{v}_\varepsilon(s),\ z)(\hat{v}_\varepsilon(s),\ u)\,ds-\right.$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+h}\int_t^s\int_\Theta\left(\exp\left\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}z,\ g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}u,\ g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\right)\times$$

$$\left.\times\, m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,d\tau\,ds\right|=0.$$

Но

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_t^{s}\int\limits_{\Theta}\left(\exp\left\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}z,\ g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left\{-\frac{s-\tau}{\varepsilon}M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\right\}u,\ g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\right)m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,d\tau\,ds=$$

$$=\int\limits_t^{t+h}\int\limits_0^{h/\varepsilon}\int\limits_{\Theta}(\exp\{-\sigma M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\}z,\ g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t))\times$$

$$\times(\exp\{-\sigma M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\}u,\ g_\varepsilon(\theta,\ x_\varepsilon(t)))\,m_\varepsilon(\tau,\ d\theta)\,d\sigma\,d\tau=$$

$$=\int\limits_t^{t+h}\int\limits_0^{h/\varepsilon}(B(t,\ x_\varepsilon(t))\exp\{-\sigma M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\}z,$$

$$\exp\{-\sigma M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\}u)\,d\sigma\,d\tau+o(1)=$$

$$=h\int\limits_0^{\infty}(B(t,\ x_\varepsilon(t))\exp\{-\sigma M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\}z,$$

$$\exp\{-\sigma M^*(t,\ x_\varepsilon(t))\}u)\,d\sigma+o(1)=$$

$$=h(D(t,\ x_\varepsilon(t))z,\ u)+o(h).$$

Последнее соотношение показывает справедливость (20). Следовательно (15) справедливо.

8. Рассмотрим теперь мартингалы в X

$$\mu_\varepsilon(t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\Theta}h_\varepsilon(\theta,\ s,\ x_\varepsilon(s))\,q_\varepsilon(d\theta\times ds),$$

где $h_\varepsilon(\theta,\ s,\ x)=M^{-1}(s,\ x)\,g_\varepsilon(\theta,\ x)$. Из условия 3) вытекает, что для всякого $t,\ h>0$ и $u\in Z$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\mathsf{M}[(\mu_\varepsilon(t+h)-\mu_\varepsilon(t),\ u)^2-$$

$$-\int\limits_t^{t+h}(B(s,\ x_\varepsilon(s))\,M^{-1*}(s,\ x_\varepsilon(s))u,$$

$$M^{-1}(s,\ x_\varepsilon(s))u)\,ds/\mathcal{F}_t^{(\varepsilon)}]|=0. \qquad (21)$$

Покажем, что совокупность мер, отвечающих процессам $\mu_\varepsilon(t)$ в $D_{[0,T]}(X)$, компактна и все предельные при $\varepsilon\to 0$ меры сосредоточены на $C_{[0,T]}(X)$. Для этого оценим

$$\mathsf{M}(|\mu_\varepsilon(t+h)-\mu_\varepsilon(t)|^2/\mathscr{F}_t^{(\varepsilon)})=$$
$$=\int_t^{t+h}\mathsf{M}\left(\int_\Theta |h_\varepsilon(\theta,\ s,\ x_\varepsilon(s))|^2 m_\varepsilon(s,\ d\theta)/\mathscr{F}_t^{(\varepsilon)}\right)ds\leqslant c_4 h, \qquad (22)$$

где c_4 — некоторая постоянная. Эта оценка вытекает из условий 3), 4), 5). Значит, семейство мер, отвечающих $\mu_\varepsilon(t)$, компактно в $D_{[0,T]}(X)$ (см. [11], т. 1, стр. 508).

Далее, на основании формулы Ито:

$$\mathsf{M}(\mu_\varepsilon(t+h)-\mu_\varepsilon(t),\ z)^4=$$
$$=\mathsf{M}\int_t^{t+h}\int_\Theta 6(\mu_\varepsilon(s)-\mu_\varepsilon(t),\ z)^2(h_\varepsilon(\theta,\ s,\ x_\varepsilon(s)),\ z)^2\times$$
$$\times m_\varepsilon(s,\ d\theta)\,ds+\mathsf{M}\int_t^{t+h}4(\mu_\varepsilon(s)-\mu_\varepsilon(t),\ z)\times$$
$$\times\int_\Theta (h_\varepsilon(\theta,\ s,\ x_\varepsilon(s)),\ z)^3 m_\varepsilon(s,\ d\theta)\,ds+$$
$$+\mathsf{M}\int_t^{t+h}\int_\Theta (h_\varepsilon(\theta,\ s,\ x_\varepsilon(s)),\ z)^4 m_\varepsilon(s,\ d\theta)\,ds.$$

Из условий 2) и 3) и оценки (22) вытекает существование постоянной c_5 и величины $\hat\beta_\varepsilon$, которая стремится к нулю вместе с ε, таких, что $\mathsf{M}|\mu_\varepsilon(t+h)-\mu_\varepsilon(t)|^4\leqslant c_5(h^2+\hat\beta_\varepsilon h)$. Значит, $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\,\mathsf{M}|\mu_\varepsilon(t+h)-\mu_\varepsilon(t)|^4\leqslant c_5 h^2$. Отсюда, на основании теоремы Колмогорова ([11], т. 1, стр. 237) заключаем, что любой предельный процесс в смысле слабой сходимости распределений для процессов $\mu_\varepsilon(t)$ будет непрерывным процессом. Предположим, что сходятся распределения двумерных процессов $\{\mu_\varepsilon(t);\ x_\varepsilon(t)\}$ к некоторому предельному $\{\bar\mu(t),\ \bar x(t)\}$. Тогда на основании (21) для всякой непрерывной функции $\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_{2k})$ на X^{2k}, $t_1<t_2<\ldots<t_k\leqslant t$, $h>0$, $u\in X$

$$\mathsf{M}\varphi(\bar x(t_1),\ \ldots,\ \bar x(t_k),\ \bar\mu(t_1),\ \ldots,\ \mu(t_k))\Bigg[(\bar\mu(t+h)-\bar\mu(t),\ u)-$$
$$-\int_t^{t+h}(B(s,\ \bar x(s))M^{-1*}(s,\ \bar x(s))u,\ M^{-1*}(s,\ \bar x(s))u)\,ds\Bigg]=0.$$

Значит $(\tilde{\mu}(t), u)$ является непрерывным мартингалом с характеристикой

$$\int_0^t (M^{-1}(s, \bar{x}(s))\,B(s, \bar{x}(s))\,M^{-1*}(s, \bar{x}(s))\,u,\ u)\,ds. \qquad (23)$$

9. Выбирая в X ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_r\}$ и воспользовавшись формулой (15), можем записать:

$$\varepsilon \int_0^t [M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))]'_x (v_\varepsilon(s))\, v_\varepsilon(s)\,ds =$$

$$= \sum_{k,\,l=1}^{r} \varepsilon \int_0^t (e_k, v_\varepsilon(s))\,(e_l, v_\varepsilon(s))\,[M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))]'_x (e_k)\, e_l\,ds \sim$$

$$\sim \sum_{j,\,k,\,l=1}^{r} \int_0^t (D(s, x_\varepsilon(s))\,e_k,\ e_l) \times$$

$$\times ([M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))]'_x (e_k)\, e_l,\ e_j)\,ds \cdot e_j.$$

Перепишем соотношение (12) в виде

$$x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0) = \int_0^t \tilde{a}(s, x_\varepsilon(s))\,ds +$$

$$+ \int_0^t \int_\Theta M^{-1}(s, x_\varepsilon(s))\,g_\varepsilon(\theta, x_\varepsilon(s))\,q_\varepsilon(d\theta \times ds) + \hat{\delta}_\varepsilon(t),$$

где $\hat{\delta}_\varepsilon(t)$ сходится к нулю по вероятности ($\tilde{a}$ определено в равенствах (7)).

Пусть распределения $x_{\varepsilon_n}(t)$ при $\varepsilon_n \to 0$ сходятся к распределениям некоторого процесса $\bar{x}(t)$. Используя компактность в $D_{[0,T]}(X)$ мер, отвечающих процессам $x_{\varepsilon_n}(t)$, убеждаемся, что распределения процессов $x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(0) - \int_0^t \tilde{a}(s, x_\varepsilon(s))\,ds$ будут сходиться к распределениям процесса $\bar{x}(t) - \bar{x}(0) - \int_0^t \tilde{a}(s, \bar{x}(s))\,ds$. Из п. 8 вытекает, что этот процесс будет непрерывным мартингалом, а характеристика этого мартингала, умноженного скалярно на u, задается выражением (23). Поэтому (см. гл. 1)

$$x(t) - x(0) - \int_0^t \tilde{a}(s,\ x(s)) = \int_0^t \tilde{B}(s,\ x(s))\, dw(s), \qquad (24)$$

где $\tilde{B}$ определено равенствами (7). Соотношение (24) эквивалентно (6). Таким образом, всякая предельная в смысле слабой сходимости точка для распределений $x_\varepsilon(t)$ в $D_{[0,T]}(X)$ при $\varepsilon \to 0$ является мерой, отвечающей решению уравнения (6). Так как в условиях теоремы это решение единственно, то такая предельная точка единственна. Из компактности семейства мер и единственности предельной точки и вытекает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Баклан В. В. Уравнения в вариационных производных и марковские процессы в гильбертовом пространстве. — ДАН СССР, 1964, т. 159, с. 707—710.

[2] Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. Про рівняння Фоккера—Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом, заснованим на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана. — Зап. каф. мат. физ. АН УССР, 1939, т. 4, с. 5—158.

[3] Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.: Гостехиздат, 1946.

[4] Боголюбов Н. Н. Рівняння Гідродинаміки в статистичній механіці. — Зб. праць ін-ту Мат., 1948, № 10, с. 41.

[5] Гихман И. И. Про вплив випадкового процесу на динамічну систему. — Научные записки Киевского ун-та, 1941, т. 5, с. 119—132.

[6] Гихман И. И. Про граничні переходи в динамічних системах. — Научные записки Киевского ун-та, 1941, т. 5, с. 141—149.

[7] Гихман И. И. Об одной схеме образования случайных процессов. — ДАН СССР, 1947, т. 58, с. 961—964.

[8] Гихман И. И. К теории дифференциальных уравнений случайных функций. — Укр. матем. ж., 1950, т. 2, с. 37—63; 1951, т. 3, с. 317—339.

[9] Гихман И. И., Кадырова И. И. Некоторые результаты исследования стохастических дифференциальных уравнений. — Сб. Теория случайных проц., I. — Киев: Наукова думка, 1973, с. 51—68.

[10] Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наукова думка, 1968.

[11] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. — М.: Наука, т. 1 (1971), т. 2 (1973), т. 3 (1975)

[12] Григелионис Б. Об одном критерии марковости для случайных процессов. — Лит. мат. сб., 1970, т. 10, № 2, с. 253—261.

[13] Григелионис Б. О представлении целочисленных случайных мер как стохастических интегралов по пуассоновской мере. — Лит. мат. сб., 1971, т. 11, № 1, с. 93—101.

[14] Григелионис Б. О представлении стохастическими интегралами мартингалов, интегрируемых с квадратом. — Лит. мат. сб., 1974, т. 14, № 4, с. 53—69.

[15] Далецкий Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения. — Успехи матем. наук, 1967, т. 22, № 4, с. 3—54.

[16] Дубко В. А. Стохастические дифференциальные уравнения в некоторых задачах математической физики, кандидатская диссерт. — Киев, 1979.
[17] Дынкин Е. Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз, 1963.
[18] Ершов М. П. О представлениях процессов Ито. — Теория вероятн. и ее примен. 1972, т. 17, № 1, с. 164—172.
[19] Ильин А. М., Хасьминский Р. З. Об уравнениях броуновского движения. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, с. 466—491.
[20] Ито К. (Ito K.) On stochastic integral equation. — Proc. Japan Acad. Tokyo, 1946, v. 22, p. 32—35.
[21] Ито К. (Ito K.) On stochastic differential equations. — Mem. Am. Math. Soc., 1951, v. 4, p. 1—51.
[22] Ито К. (Ito K.) Stochastic differential equations in a differential manifold, I. — Nagoya Math., J., 1950, v. l, p. 35—47; II. — Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A, 1953, v. 28, № 1, p. 81—85.
[23] Ито К., Низио М. (Ito K., Nisio M.) Stationary solutions of stochastic differential equations. — J. Math. Kyoto Univ., 1964, v. 4, p. 1—75.
[24] Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. — Успехи матем. наук, 1938, т. 5, с. 5—41.
[25] Крылов Н. В. О квазидиффузионных процессах. — Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, с. 424—443.
[26] Крылов Н. В. О стохастических интегральных уравнениях Ито. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, с. 340—348.
[27] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, т. 104, с. 135—180.
[28] Мейер П. А. Вероятность и потенциалы. — М.: Мир, 1973.
[29] Портенко Н. И. Диффузионные процессы с обобщенным коэффициентом переноса. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, с. 62—77.
[30] Портенко Н. И. Стохастические дифференциальные уравнения с обобщенным вектором переноса. — Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. 24, № 2, с. 332—347.
[31] Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961.
[32] Скороход А. В. О локальном строении непрерывных марковских процессов. — Теория вероятн. и ее примен. 1966, т. 11, с. 381—423.
[33] Скороход А. В. Стохастические уравнения для квазидиффузионных процессов/В сб. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний, Тр. конференции. — Киев: Наукова думка, 1979, с. 211—219.
[34] Скороход А. В. Об асимптотическом поведении систем большого числа случайно взаимодействующих частиц/ сб. Случайные процессы в задачах математической физики. — Киев: Ин-т математики, 1979, с. 113—138.
[35] Струк Д., Варадан С. (Strook D. W., Varadhan S. R. S.) Diffusion processes with continuous coefficients, I, II. — Comm. Pure Appl. Math., 1969, v. 12, p. 345—400, 479—530.

[36] Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. — М.: Мир, 1965.
[37] Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
[38] Чантладзе Т. Л. О стохастическом дифференциальном уравнении в гильбертовом пространстве. — Сообщ. АН Груз. ССР, 1964, т. 33, с. 529—534.
[39] Ширяев А. Н. Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. — Trans. 4th Prague Confer. Inform. Theory (1965). — Prague, 1967, p. 131—203.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Анатолий Владимирович Скороход

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

(Серия: «Теория вероятностей
и математическая статистика»).

Редактор *А. С. Чистопольский*

Технический редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *Л. С. Сомова*

ИБ № 12115

Сдано в набор 05.04.82. Подписано к печати 28.02.83. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 11,28. Тираж 5000 экз. Заказ № 1698. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12