

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин,  
И.В. Станкевич

# Математические модели прикладной механики

**В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин, И. В. Станкевич**

# **Математические модели прикладной механики**

*Допущено Учебно-методическим  
объединением вузов по университетскому  
политехническому образованию  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки  
151600 «Прикладная математика»*



**Москва**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н. Э. Баумана**

**2 0 1 6**

УДК 517.9+536.2

ББК 22.311

З-35

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *М. П. Галанин*  
д-р физ.-мат. наук, профессор *А. В. Манжиров*

**Зарубин, В. С.**

З-35 Математические модели прикладной механики : учебное пособие / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин, И. В. Станкевич. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. — 279, [9] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4483-0

Изложены основы построения и анализа математических моделей механических систем, идейное ядро которых составляют математические модели стержней, пластинок и оболочек, что позволяет строить адекватные математические модели в виде совокупности соотношений, достаточно полно и точно отражающих свойства и поведение сложных конструктивных элементов современного технологического оборудования и машиностроения. Содержание учебного пособия соответствует курсам лекций, читаемых в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Для студентов старших курсов, изучающих такие дисциплины, как «Механика деформируемого твердого тела», «Теория упругости и пластичности», «Динамика и прочность машин», «Сопrotивление материалов», «Теория оболочек», «Строительная механика конструкций», и аспирантов математических, физических, естественнонаучных кафедр университетов и технических вузов. Может быть полезно научным сотрудникам и инженерам, занятым в области математического моделирования сложных процессов механического деформирования.

УДК 517.9+536.2

ББК 22.311

ISBN 978-5-7038-4483-0

© Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.,  
Станкевич И. В., 2016

© Оформление. Издательство  
МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016

Посвящается памяти  
Всеволода Ивановича Феодосьева  
(1916–1991)

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Движение и равновесие механических систем, конструктивные элементы которых считают абсолютно жесткими или же сводят к системе материальных точек, изучают в курсе теоретической механики [18]. Однако реальные элементы механических систем под действием нагрузок подвержены *деформированию*, что приводит к необходимости рассматривать *напряженно-деформированное состояние* таких элементов, являющееся предметом изучения механики деформируемого твердого тела. Определение напряженно-деформированного состояния для любого элемента конструкции — необходимый этап анализа его работоспособности, оценки долговечности и надежности.

Несмотря на многообразие конструктивных элементов механических систем, в большинстве случаев анализ напряженно-деформированного состояния этих элементов можно свести к сравнительно небольшому числу так называемых *расчетных схем*, отражающих наиболее существенные особенности рассматриваемой конструкции, поведения ее материала и условий ее нагружения. Одновременно при обосновании расчетной схемы конкретного элемента конструкции следует аргументированно отбросить факторы, несущественные для рассматриваемой ситуации. Такое упрощение необходимо, поскольку полный учет всех свойств и особенностей реального элемента конструкции принципиально невозможен вследствие их очевидной неисчерпаемости [38].

При решении многих прикладных задач, возникающих в инженерной практике, возможно рациональное упрощение расчет-

ных схем, которое не приводит к потере достоверности результатов количественного анализа, но делает эти результаты более ясными и удобными для интерпретации. Такие упрощенные расчетные схемы принято относить к разделу механики, обычно называемому прикладной механикой. В частности, к ним относятся расчетные схемы, используемые в курсах сопротивления материалов и строительной механики различных типов конструкций и сооружений. При этом один из основных приемов упрощения расчетных схем связан с принятием и обоснованием так называемых **кинематических гипотез**, устанавливающих определенные ограничения на изменение геометрических характеристик элементов конструкции при их нагружении. В сочетании с использованием *принципа возможных перемещений* и анализом *возможной работы* приложенной внешней нагрузки это позволяет выявить в расчетной схеме рассматриваемой механической системы наиболее существенные свойства и пренебречь влиянием менее существенных. Результатом такого упрощения являются широко используемые в прикладной механике расчетные схемы **стержня** (тэла, одно из измерений которого существенно больше двух других) и **оболочки** (тэла, толщина которого значительно меньше двух других измерений). Если множество равноотстоящих от поверхностей оболочки точек, называемое **срединной поверхностью**, принадлежит плоскости, то говорят о расчетной схеме **пластины** (или **пластинки**, подчеркивая этим ее малую толщину по сравнению с двумя другими размерами).

Рассмотрение расчетных схем элементов конструкции механических систем является основным содержанием прикладной механики и позволяет строить адекватные **математические модели** в виде совокупности соотношений, достаточно полно и точно отражающих свойства и поведение таких элементов. Адекватные математические модели дают возможность не только получить достоверную информацию о напряженно-деформированном состоянии элементов конструкции на стадии проектирования технического устройства, но и выбрать рациональные режимы его эксплуатации, проанализировать предельно допустимые значения его рабочих характеристик и вероятность

возникновения аварийных ситуаций. Именно построению и количественному анализу математических моделей прикладной механики посвящено данное учебное пособие.

Пособие состоит из семи глав, параграфы в которых имеют двойную нумерацию (например, 2.3 — третий параграф во второй главе). Ссылки в тексте на параграфы и главы набраны полужирным шрифтом (например, см. **1.3** или см. **2**). Аналогично пронумерованы формулы и рисунки (например, (3.4) — четвертая формула в третьей главе, рис. 1.6 — шестой рисунок в первой главе).

Структура пособия отражает блочно-модульное построение курса «Математические модели технических систем», занимающего ключевое место в профессиональном цикле подготовки инженеров-математиков по специальности «Прикладная математика». Пособие содержит материал одного из разделов этого курса, посвященного математическим моделям механических систем. Каждая глава соответствует блоку, а каждый параграф — модулю, т. е. логически замкнутой порции материала, имеющей самостоятельное значение при изучении курса. Модули и блоки тесно связаны между собой в теоретическом, методическом и терминологическом отношениях. Эти связи поддержаны реализованным в пособии развитым справочным аппаратом.

В конце помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, содержащий в алфавитном порядке (по существу в именительном падеже) все введенные в пособие и выделенные **полужирным курсивом** термины с указанием страницы, на которой они определены или описаны. Выделение термина **светлым курсивом** означает, что в данном параграфе он отнесен к ключевым словам и для понимания излагаемого материала читателю должно быть известно его значение. Справочный аппарат пособия дополнен помещенным после этого предисловия списком основных обозначений, единиц измерения физических величин и используемых сокращений. В этом списке наряду с краткой расшифровкой обозначений указаны параграфы, где они введены и более подробно объяснены.

Математическое моделирование невозможно без знания многих разделов математики. Это относится и к изучению матема-

тических моделей прикладной механики, которое основано на широком использовании междисциплинарных связей. Поэтому перед работой с данным пособием необходимо в целях самоконтроля выполнить приведенные несложные задания. В конце каждого задания имеется ссылка на книги из списка рекомендуемой литературы, в которых при возникновении затруднений можно найти все необходимые сведения. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий *курсивом*, далее будем считать известными (эти термины в основном тексте пособия не выделены и в предметный указатель не входят).

### **Задания для самопроверки**

1. Что понимают под *сплошной средой* и *твердым телом*, *правилом суммирования по одинаковым латинским индексам*? Дайте определения *первого* и *второго* *законов термодинамики*. Какой *тензор второго ранга* можно привести к *главным осям*? [13]

2. Дайте определения *внутренней*, *граничной* и *предельной точек множества*, *открытого* и *замкнутого множеств* (соответственно *открытой* и *замкнутой областей*), *замыкания множества* и *отображения множеств*, *функций возрастающей* и *взаимно однозначной*, *непрерывной* и *непрерывно дифференцируемой*, *четной* и *нечетной*. Что называют *главной нормалью* и *бинормалью*, *кривизной*, *радиусом кривизны* и *кручением* *пространственной кривой*? Напишите формулу *дифференциала длины дуги плоской кривой*. [14, 17, 23]

3. Что такое *модуль вектора*, *радиус-вектор*, *коллинеарные векторы*, *скалярное произведение векторов*, *скалярный квадрат вектора*, *орты репера ортогональной системы координат*, *симметрическая*, *кососимметрическая*, *диагональная* и *единичная матрицы*, *матрица-столбец*, *ранг матрицы*, *характеристическое уравнение квадратной матрицы*? Перечислите *аксиомы линейного пространства*, *скалярного умножения* и *нормы* в таком пространстве. Что такое *базис линейного пространства*? Запишите *тривиальную линейную комбинацию функций  $x^n$*  для  $n = \overline{2, 5}$ . Дайте определение *евклидова пространства*. В каком случае это *пространство* будет *полным*?

Какими свойствами обладают *собственные значения* и *собственные векторы* симметрической матрицы? При каком условии *однородная система линейных алгебраических уравнений* имеет *нетривиальное решение*? [15, 16]

4. Что называют *частной производной* и *производной по направлению* функции многих переменных? Что понимают под *внешней нормалью к кривой* или *поверхности*, ограничивающей некоторую область? Как записать формулу *дифференциала площади гладкой поверхности* и что такое *линия кривизны* на такой поверхности? Какую *поверхность* называют *минимальной*? [7, 17]

5. Сформулируйте свойства *определенного интеграла с переменным верхним пределом*. Что называют *кратным* (в том числе *двойным* и *тройным*), *криволинейным* и *поверхностным интегралами*, *скалярным* и *векторным полями*? Напишите формулы *Остроградского — Гаусса* и *Стокса*. Как представить *дифференциальные операторы Гамильтона* и *Лапласа* в ортогональной системе координат? [7, 11]

6. В чем различие между *общим* и *частным решениями* обыкновенного *дифференциального уравнения*? Запишите *частичную сумму* и *остаток ряда Тейлора*. В чем различие между *ортогональной* и *ортонормированной системами функций*. Как найти *коэффициенты Фурье* при разложении на отрезке непрерывной функции в *тригонометрический ряд Фурье*? Каковы признаки *дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка гиперболического, параболического и эллиптического типов*? К какому из этих типов относят *уравнения Лапласа* и *Пуассона*? [1, 5, 6, 21]

7. Дайте определение *главного вектора* и *главного момента* системы сил, действующих на твердое тело. [18]

8. Что понимают под *математическим моделированием* применительно к техническим устройствам и каковы его основные этапы? Какую роль играют математические модели в естественно-научных и инженерных дисциплинах? Каковы структура и свойства математических моделей? Приведите их классификацию. [12]

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ◆ — окончание примера 1.1
- $x \in X$  — элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$  (например,  $M \in V$  — точка  $M$  принадлежит телу, занимающему область  $V$  или имеющему объем  $V$ ) 1.1
- $n = \overline{1, N}$  — число  $n \in \mathbb{N}$  принимает последовательно все значения из множества  $\mathbb{N}$  натуральных чисел от 1 до  $N$  включительно 2.1
- $\cup$  — символ операции объединения множеств 2.2
- $\cap$  — символ операции пересечения множеств 2.2
- $V' \subset V$  — подмножество  $V'$  включено в множество  $V$  ( $V$  включает  $V'$ ) 1.1
- $S_s \subseteq S$  — подмножество  $S_s$  включено в множество  $S$  или совпадает с ним 2.2
- $\forall$  — квантор всеобщности ( $\forall x$  — для любого  $x$ ) 2.2
- $|\cdot|$  — абсолютное значение числа или модуль вектора 1.2
- $\mathbf{0}$  — нулевой вектор 1.2
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  1.2
- $\det(\cdot)$  — определитель квадратной матрицы 1.2
- $\nabla$  — дифференциальный оператор Гамильтона 3.4
- $\nabla^2$  — дифференциальный оператор Лапласа Д.2.3
- $[a, b]$  — отрезок с концами в точках  $a, b \in \mathbb{R}$  2.3
- $(a, b)$  — интервал с концами в точках  $a, b \in \mathbb{R}$  2.3
- $A$  — работа силовых факторов 2.1
- $\mathbf{b}$  — вектор плотности объемных сил 1.1
- $b_i$  — проекции вектора плотности объемных сил на координатные оси  $Ox_i, i = 1, 2, 3$  2.2
- $E$  — продольный модуль упругости (модуль Юнга) 1.4

- $e_i$  — орты репера ортогональной системы координат ( $i = 1, 2, 3$ ) **1.2**
- $e_{ijk}$  — символ Леви-Чивиты ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) **Д.2.1**
- $F$  — площадь поперечного сечения **1.4**
- $g$  — вектор ускорения свободного падения **1.1**
- $I_{j\hat{\varepsilon}}$  —  $j$ -й инвариант тензора деформации ( $j = 1, 2, 3$ ) **1.3**
- $I_{j\hat{\sigma}}$  —  $j$ -й инвариант тензора напряжений ( $j = 1, 2, 3$ ) **1.3**
- $I_2$  — единичная матрица третьего порядка, соответствующая единичному тензору второго ранга с компонентами  $\delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  **1.2**
- $J_k$  — осевой момент инерции сечения относительно координатной оси  $Ox_k$ ,  $k = 1, 2$  **Д.2.1**
- $J_K$  — геометрический параметр сечения, пропорциональный жесткости стержня при его кручении **Д.2.1**
- $J_p$  — полярный момент инерции сечения **Д.2.1**
- $L$  — длина **1.4**
- $M$  — вектор момента силы **Д.2.1**
- $n$  — единичный вектор нормали к поверхности или к кривой **1.1**
- $n_i$  — проекции единичного вектора нормали на координатные оси  $Ox_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  **1.2**
- $n_p$  — коэффициент запаса по прочности **2.3**
- $n_t$  — коэффициент запаса по текучести **1.5**
- $Ox_i$  — оси ортогональной системы координат ( $i = 1, 2, 3$ ) **1.2**
- $P$  — вектор силы **1.1**
- $P$  — модуль вектора силы **2.3**
- $p$  — вектор плотности поверхностных сил **1.1**
- $p$  — давление **1.1**
- $Q$  — вектор силы в поперечном сечении **Д.2.1**
- $\tilde{r}$  — радиус кривизны осевой линии стержня **Д.2.1**
- $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$  — главные радиусы кривизны поверхности **Д.2.3**
- $S$  — поверхность или ее площадь **1.1**

- $S_{\xi_k}$  — статический момент площади сечения относительно координатной оси  $O\xi_k$ ,  $k = 2, 3$  **Д.2.1**
- $\hat{\mathbf{s}}$  — девиатор напряжений **1.2**
- $t$  — время **1.3**
- $U$  — объемная плотность потенциальной энергии деформации **1.4**
- $U_\Phi$  — объемная плотность потенциальной энергии формоизменения **1.5**
- $\mathbf{u}$  — вектор перемещения **1.3**
- $u_i$  — проекции вектора перемещения на оси  $Ox_i$  ортогональной системы координат ( $i = 1, 2, 3$ ) **1.3**
- $V$  — пространственная область или ее объем **1.1**
- $W$  — потенциальная энергия деформации **5.3**
- $w$  — прогиб мембраны или другого деформируемого элемента **Д.2.3**
- $\Gamma$  — контур, ограничивающий плоскую область **Д.2.3**
- $\delta_{ij}$  — символ Кронекера ( $i, j = 1, 2, 3$ ) **1.2**
- $\gamma$  — угловая деформация **1.3**
- $\varepsilon$  — линейная деформация **1.3**
- $\hat{\varepsilon}$  — тензор деформации **1.3**
- $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформации ( $i, j = 1, 2, 3$ ) **1.3**
- $\kappa$  — 1) объемный модуль упругости (модуль всестороннего сжатия) **1.4**;  
2) кривизна осевой линии **Д.2.1**
- $\kappa_1, \kappa_2$  — главные кривизны поверхности **Д.7.3**
- $\tilde{\kappa}$  — кручение осевой линии **Д.2.1**
- $\mu$  — модуль сдвига **1.4**
- $\nu$  — коэффициент поперечного сужения (коэффициент Пуассона) **1.4**
- $\rho$  — плотность материала тела **1.1**
- $\sigma$  — нормальное напряжение **1.2**

$\sigma$	— вектор напряжения	<b>1.2</b>
$\hat{\sigma}$	— тензор напряжений	<b>1.2</b>
$\sigma_{ij}$	— компоненты тензора напряжений ( $i, j = 1, 2, 3$ )	<b>1.2</b>
$\sigma_r$	— радиус круга Мора	<b>1.5</b>
$\tau$	— касательное напряжение	<b>1.2</b>
$\tau_{\text{окт}}$	— октаэдрическое касательное напряжение	<b>1.5</b>

### Единицы измерения физических величин

кг, м, с — килограмм, метр и секунда — основные единицы измерения массы, расстояния и времени

Дж = Н · м = кг · м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> — джоуль — единица измерения работы и энергии **1.4**

Дж/м<sup>3</sup> = Н/м<sup>2</sup> — единица измерения объемной плотности потенциальной энергии деформации **1.4**

Н = кг · м/с<sup>2</sup> — ньютон — единица измерения силы **1.1**

Н/м<sup>3</sup> = кг/(м<sup>2</sup> · с<sup>2</sup>) — единица измерения объемной плотности сил **1.1**

Па = Н/м<sup>2</sup> = кг/(м · с<sup>2</sup>) — паскаль — единица измерения давления или поверхностной плотности сил **1.1**

### Используемые сокращения

ЖРД — жидкостный ракетный двигатель **7.3**

ОДУ — обыкновенное дифференциальное уравнение **2.3**

СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений **1.2**

# 1. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Элементы конструкций механических систем подвержены действию различных сил. Это действие вызывает *деформирование* материала элементов конструкции, что приводит к изменению их формы и размеров. При интенсивном силовом воздействии может произойти разрушение элемента конструкции или же столь существенное изменение его формы и размеров, что он станет непригодным для выполнения своих функций. Оценка опасности выхода из строя элемента конструкции механической системы связана с анализом возникающего в таком элементе как твердом теле *напряженно-деформированного состояния*, порождаемого действующими силами.

## 1.1. Силы, действующие на твердое тело

Рассмотрим твердое тело в виде пространственной области, которая заполнена непрерывной материальной средой, получившей название *сплошной среды*. Действующие на тело силы в общем случае могут быть распределены по его объему  $V$  и по ограничивающей этот объем поверхности  $S$ . Такие *силы* называют соответственно *объемными* и *поверхностными*. Примером объемной силы является сила тяжести, а поверхностной — сила давления. Первые характеризуют вектором *плотности объемных сил* [13, п. 3.5]

$$\mathbf{b}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta V}, \quad M \in \Delta V, \quad (1.1)$$

где  $\Delta \mathbf{B}$  — вектор равнодействующей сил, распределенных по объему  $\Delta V \subset V$  в окрестности точки  $M$ .

Аналогично вектор *плотности поверхностных сил*

$$\mathbf{p}(N) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S}, \quad N \in \Delta S, \quad (1.2)$$

где  $\Delta \mathbf{P}$  — вектор равнодействующей сил, распределенных по участку  $\Delta S \subset S$  поверхности тела в окрестности ее точки  $N$ .

Возможность операции предельного перехода в (1.1) и (1.2) непосредственно связана с введенным понятием сплошной среды. Модули векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{p}$  измеряют соответственно в ньютонах на кубический метр ( $\text{Н/м}^3$ ) и в паскалях ( $\text{Па} = \text{Н/м}^2$ ). Вектор  $\mathbf{p}(N)$  плотности поверхностных сил называют также *полным напряжением* в окрестности точки  $N \in S$ .

**Пример 1.1.** Если тело находится в однородном поле тяготения, характеризуемом вектором  $\mathbf{g}$  ускорения свободного падения, то на массу  $\Delta m$  в объеме  $\Delta V$  действует сила тяжести  $\mathbf{P} = \mathbf{g} \Delta m$ . Тогда, согласно (1.1),

$$\mathbf{b} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g} \Delta m}{\Delta V} = \mathbf{g} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho \mathbf{g},$$

где  $\rho$  — плотность материала тела.

При действии внешнего давления  $p$  на плоский участок  $\Delta S$  поверхности тела равнодействующая  $\Delta \mathbf{P} = -p \Delta S \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к этому участку, внешней по отношению к телу. В этом случае из (1.2) следует

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{-p \Delta S \mathbf{n}}{\Delta S} = -p \mathbf{n}.$$

Можно показать, что и в случае произвольной криволинейной поверхности при действии внешнего давления вектор  $\mathbf{p}$  плотности поверхностных сил в точке поверхности с единичным вектором  $\mathbf{n}$  внешней нормали равен  $-p \mathbf{n}$ . ♦

В *расчетных схемах* элементов конструкции механических систем используют не только силы, распределенные по объему или поверхности, но и так называемые *сосредоточенные силы*, приложенные в отдельных точках твердого тела. Однако в действительности сосредоточенных сил не существует [29]. Все

реальные силы — это силы контактного взаимодействия между телами или же результат действия на тело некоторого силового поля (поля тяготения, электрического или магнитного).

При соприкосновении двух абсолютно жестких тел их контакт на участках с выпуклыми поверхностями возможен в одной точке. В случае реальных твердых тел вследствие *деформирования* их материала в области контакта возникает площадка обычно малых, но все же конечных размеров с некоторым распределением поверхностных сил. В связи с этим используемую в расчетных схемах сосредоточенную силу следует рассматривать как равнодействующую этих распределенных поверхностных сил на достаточно малом участке поверхности.

Силу тяжести, действующую на твердое тело в поле тяготения, обычно прикладывают как сосредоточенную силу в центре масс этого тела. В действительности эта сила распределена по объему тела и ее приведение к центру масс основано на теоремах статики, справедливых для абсолютно жестких тел [29]. Однако при определенных допущениях такое приведение возможно и в расчетных схемах для реальных твердых тел.

В некоторых случаях (например, при взаимодействии тела из электропроводного материала с электромагнитным полем) в теле и на его поверхности могут возникнуть распределенные объемные и поверхностные моменты сил [13]. Здесь такие моменты рассматривать не будем.

## 1.2. Напряженное состояние твердого тела

Пусть точка  $N$  принадлежит гладкому участку поверхности  $S$  тела, т.е. в этой точке определен только один единичный вектор  $\mathbf{n}(N)$  внешней нормали к  $S$  и через эту точку можно провести плоскость, касательную к этой поверхности. Тогда приложенную в окрестности точки  $N \in S$  силу с вектором плотности  $\mathbf{p}(N)$  можно единственным образом разложить на нормальную  $\sigma(N) = \mathbf{p}(N) \cdot \mathbf{n}(N)$  и касательную  $\tau(N)$  составляющие (рис. 1.1), причем  $|\mathbf{p}| = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ . Первую из них называют *нормальным напряжением*, а вторую — *касательным напряжением* по отношению к касательной плоскости в точке  $N \in S$ .

Напряжения возникают не только на площадках в окрестности точек, принадлежащих поверхности тела. Если твердое тело объемом  $V$ , находящееся в равновесии под действием заданной системы внешних сил, мысленно рассечь на две части произвольно ориентированной плоскостью, проходящей через фиксированную точку  $M \in V$ , и затем одну часть отбросить, то для сохранения равновесия оставшейся части в общем случае необходимо к сечению этой плоскостью приложить систему поверхностных сил, которые заменят действие отброшенной части тела на оставшуюся и вызовут в окрестности точек этой плоскости соответствующие полные напряжения. Ясно, что вектор  $\mathbf{p}(M) = \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(M)$  полного напряжения в окрестности точки  $M \in V$  зависит от того, каким образом через эту точку проведена секущая плоскость, т. е. от направления единичного вектора  $\mathbf{n}(M)$  внешней нормали к этой плоскости. Совокупность пар векторов  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(M)$  и  $\mathbf{n}(M)$  определяет **напряженное состояние** в точке  $M \in V$ .

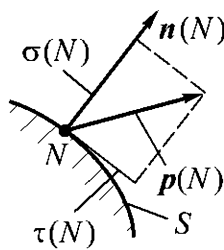


Рис. 1.1

Чтобы полностью описать напряженное состояние в некоторой точке, нет необходимости рассматривать все возможные пары векторов  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$  и  $\mathbf{n}$ . Можно доказать, что для этого достаточно задать векторы полных напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках, содержащих данную точку.

Пусть  $\boldsymbol{\sigma}^{(n_1)}$  — вектор напряжения, действующий на площадке с единичной внешней нормалью  $\mathbf{n}_1$ . Тогда

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n_1)} = \sigma_1^{(n_1)} \mathbf{n}_1 + \sigma_2^{(n_1)} \mathbf{n}_2 + \sigma_3^{(n_1)} \mathbf{n}_3,$$

где  $\sigma_j^{(n_1)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , — проекции вектора  $\boldsymbol{\sigma}^{(n_1)}$  на направления трех взаимно перпендикулярных единичных нормалей  $\mathbf{n}_j$ , которые задают ориентацию элементарных площадок, содержащих рассматриваемую точку  $M \in V$ .

Очевидно, что векторы  $\boldsymbol{\sigma}^{(n_2)}$  и  $\boldsymbol{\sigma}^{(n_3)}$  могут быть представлены аналогично, и в итоге можно записать:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n_i)} = \sigma_j^{(n_i)} \mathbf{n}_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Здесь и далее использовано правило суммирования слагаемых по одинаковым латинским индексам (в данном случае по индексу  $j$ ).

Если в качестве единичных внешних нормалей в (1.3) выбрать орты  $e_i$  репера ортогональной системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , то девять коэффициентов  $\sigma_j^{(e_i)} = \sigma_{ji}$  в (1.3) образуют **тензор напряжений**  $\hat{\sigma}$ , являющийся **тензором второго ранга**. Этот тензор определяет пространственную меру напряженного состояния в рассматриваемой точке. **Компоненты**  $\sigma_{ji}$  этого **тензора** зависят от ориентации площадки, проходящей через эту точку. Компоненты  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$ , которые соответствуют проекциям на направления ортов  $e_i$  векторов полного напряжения в площадках, перпендикулярных этим ортам, являются нормальными напряжениями, а компоненты  $\sigma_{ji}$  при  $i \neq j$ , которые соответствуют проекциям этих векторов, лежащим в плоскостях указанных площадок, — касательными напряжениями. Тензору напряжений можно поставить в соответствие матрицу третьего порядка

$$A_{\hat{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Если диагональный элемент этой матрицы положительный, то соответствующее **напряжение** является **растягивающим**, а если он отрицательный — **сжимающим**.

Поместим в рассматриваемую точку начало прямоугольной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  и в окрестности этой точки выделим элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $dx_i$ , каждое из которых параллельно соответствующей координатной оси  $Ox_i$  (рис. 1.2). Если длины ребер устремить к нулю, то параллелепипед будет стягиваться в рассматриваемую точку и в пределе все его грани пройдут через эту точку. В этом смысле напряжения, изображенные на рис. 1.2, можно рассматривать как напряжения во взаимно перпендикулярных площадках, пересекающихся в этой точке.

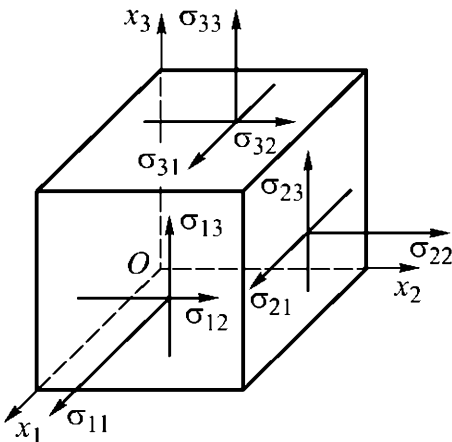


Рис. 1.2

Первый индекс изображенных на видимых гранях параллелепипеда напряжений  $\sigma_{ji}$  указывает номер оси, перпендикулярной грани параллелепипеда, в которой действует данное напряжение, а второй индекс — номер оси, параллельно которой направлено это напряжение. На невидимых гранях действуют соответствующие напряжения, но противоположно направленные [38]. Это обеспечивает выполнение трех условий равновесия параллелепипеда в виде равенства нулю суммы проекций всех действующих на гранях сил на каждую из координатных осей. Для равенства нулю суммы моментов действующих сил относительно, например, координатной оси  $Ox_1$  необходимо, чтобы выполнялось условие

$$(\sigma_{23} dx_1 dx_3) dx_2 = (\sigma_{32} dx_1 dx_2) dx_3.$$

Аналогичные условия следуют из равенства нулю суммы моментов относительно координатных осей  $Ox_2$  и  $Ox_3$ . В итоге получим  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$  при  $i \neq j$ , т. е. матрица (1.4) является симметрической, а соответствующий ей *тензор напряжений* — *симметричным*. Отсюда вытекает так называемое **правило парности касательных напряжений** [38]: на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярных к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра.

Известно [16], что симметрическую матрицу можно привести к диагональному виду. Для этого необходимо найти ее собственные значения  $\sigma_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ , являющиеся действительными корнями характеристического уравнения этой матрицы, а затем определить ортогональную систему собственных векторов как новый базис  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , в котором следует рассматривать полученную диагональную матрицу. Применительно к тензору напряжений это означает, что на гранях прямоугольного параллелепипеда, построенного в новой системе координат, будут действовать лишь нормальные напряжения, называемые **главными напряжениями**. При этом координатные оси новой системы координат называют **главными осями тензора напряжений**.

Характеристическим уравнением матрицы (1.4) является равенство нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (1.5)$$

что соответствует имеющему три действительных корня  $\sigma_\beta$  кубическому уравнению

$$\sigma^3 - I_{1\hat{\sigma}}\sigma^2 + I_{2\hat{\sigma}}\sigma - I_{3\hat{\sigma}} = 0, \quad (1.6)$$

где

$$I_{1\hat{\sigma}} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$\begin{aligned} I_{2\hat{\sigma}} &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \\ &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1; \end{aligned}$$

$$I_{3\hat{\sigma}} = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \quad (1.7)$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Главные напряжения не зависят от исходной системы координат, в которой определена матрица (1.4). Поэтому коэффициенты характеристического уравнения сохраняют постоянные значения в любой системе координат, в том числе и при переходе к главным осям тензора напряжений. Эти коэффициенты называют **инвариантами тензора напряжений**. Каждый собственный вектор  $\mathbf{x}_\beta$  матрицы  $A_{\hat{\sigma}}$  является нетривиальным решением соответствующей однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(A_{\hat{\sigma}} - \sigma_\beta I_2)\mathbf{x}_\beta = \mathbf{0},$$

где  $I_2$  — единичная матрица третьего порядка, соответствующая **единичному тензору второго ранга**;  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор.

Корни  $\sigma_\beta$  кубического уравнения (1.6) принято нумеровать в соответствии с условием  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Если все корни отличны

от нуля, то говорят о **трехосном напряженном состоянии**. При  $I_{3\hat{\sigma}} = 0$  один из корней равен нулю, что соответствует **двухосному (плоскому) напряженному состоянию**. Если же  $I_{2\hat{\sigma}} = I_{3\hat{\sigma}} = 0$ , то нулю равны два корня и **напряженное состояние** называют **одноосным**. Если во всех точках тела в фиксированной системе координат напряженное состояние определено одним и тем же тензором напряжений, то и ориентация главных осей этого тензора и его главные напряжения одинаковы во всем объеме этого тела. В этом случае говорят, что **напряженное состояние** тела является **однородным**.

**Пример 1.2.** Формальному способу нахождения главных напряжений можно дать механическую интерпретацию. Рассмотрим элементарный тетраэдр, который образован координатными плоскостями первого октанта исходной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  и плоскостью, заданной единичным вектором  $\mathbf{n}$  нормали, внешней по отношению к области, занятой таким тетраэдром (рис. 1.3). Если  $dF$  — площадь грани тетраэдра, наклонной к координатным осям, то площадь его грани, перпендикулярной оси  $Ox_i$ , равна  $dF_i = n_i dF$ , где  $n_i$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{n}$ .

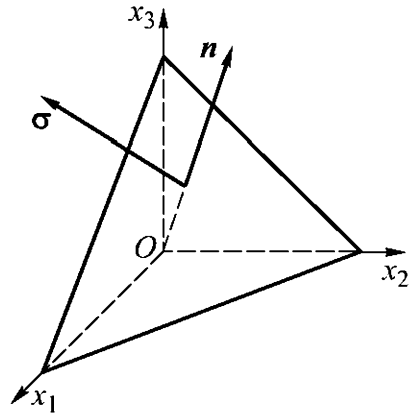


Рис. 1.3

Пусть напряженное состояние в точке, расположенной в начале системы координат  $Ox_1x_2x_3$ , определяет тензор напряжений  $\hat{\sigma}$  с компонентами, являющимися элементами матрицы (1.4). Поэтому на каждой грани, проходящей через эту точку и перпендикулярной оси  $Ox_i$ , действуют напряжения, равные по абсолютному значению элементам в  $i$ -й строке этой матрицы, но обратные им по знаку. Из условия равновесия тетраэдра запишем

$$\bar{\sigma}_1 dF = \sigma_{11} dF_1 + \sigma_{21} dF_2 + \sigma_{31} dF_3;$$

$$\bar{\sigma}_2 dF = \sigma_{12} dF_1 + \sigma_{22} dF_2 + \sigma_{32} dF_3;$$

$$\bar{\sigma}_3 dF = \sigma_{13} dF_1 + \sigma_{23} dF_2 + \sigma_{33} dF_3,$$

или

$$\bar{\sigma}_i = \sigma_{ji} n_j,$$

где  $\bar{\sigma}_i$  — проекции вектора  $\sigma$  полного напряжения в наклонной грани тетраэдра на ось  $Ox_i$ .

Вектор  $n$  будет ортом одной из главных осей тензора  $\hat{\sigma}$  при условии его коллинеарности вектору  $\sigma$ , т. е. при выполнении равенств  $\sigma_i = \sigma n_i$ , где  $\sigma$  — главное напряжение тензора  $\hat{\sigma}$ , соответствующее этой главной оси. С учетом этих равенств получим  $\sigma n_i = \sigma_{ji} n_j$ , что приводит к однородной СЛАУ

$$(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) n_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.8)$$

где  $\delta_{ji}$  — **символ Кронекера**, названный по имени немецкого математика Л. Кронекера (1823–1891) и равный нулю при  $j \neq i$  и единице при  $j = i$ .

Эта СЛАУ имеет нетривиальное решение относительно направляющих косинусов при равенстве нулю определителя  $\det(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji})$ , который совпадает с определителем (1.5). Таким образом, приходим к тому же кубическому уравнению (1.6). ♦

После подстановки каждого корня  $\sigma_\beta$  кубического уравнения (1.6) в СЛАУ (1.8) ранг ее матрицы будет меньше трех, поскольку определитель матрицы равен нулю, т. е. уравнения этой СЛАУ линейно зависимы. Однако если из любых двух уравнений этой СЛАУ выразить, например,  $n_2$  и  $n_3$  через  $n_1$  и подставить в известное равенство для направляющих косинусов

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad (1.9)$$

то можно вычислить  $n_1$ , а затем найти  $n_2$  и  $n_3$ . В итоге будет определен вектор  $n_\beta = e_\beta$ , соответствующий главному напряжению  $\sigma_\beta$  и входящий в искомый базис  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

**Пример 1.3.** Пусть в ортогональной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  однородное напряженное состояние тела определено тензором напряжений  $\hat{\sigma}$ , все компоненты которого имеют одинаковое значение  $\sigma_0 > 0$ , т. е. соответствующая этому тензору матрица

$$A_{\hat{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

В этом случае из (1.7) получаем  $I_{1\hat{\sigma}} = 3\sigma_0$  и  $I_{2\hat{\sigma}} = I_{3\hat{\sigma}} = 0$ , а из (1.6) находим  $\sigma_1 = 3\sigma_0$  и  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Таким образом, напряженное состояние в рассматриваемой точке является одноосным.

Первые два уравнения СЛАУ (1.8) при  $\sigma = \sigma_1 = 3\sigma_0$  имеют вид

$$-2\sigma_0 n_1^{(I)} + \sigma_0 n_2^{(I)} + \sigma_0 n_3^{(I)} = 0; \quad \sigma_0 n_1^{(I)} - 2\sigma_0 n_2^{(I)} + \sigma_0 n_3^{(I)} = 0.$$

Отсюда следует равенство  $n_2^{(I)} = n_3^{(I)} = n_1^{(I)}$  и с учетом равенства (1.9)  $n_1^{(I)} = \pm 1/\sqrt{3}$ , т.е. единичный вектор  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1$  составляет равные углы с координатными осями  $Ox_i$ .

Подстановка в СЛАУ (1.8) вместо  $\sigma$  нулевого значения  $\sigma_2$  каждое из уравнений этой СЛАУ приводит в данном случае к равенству  $n_1^{(II)} + n_2^{(II)} + n_3^{(II)} = 0$ . Несложно проверить, что это равенство соответствует условию ортогональности  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$  собственных векторов матрицы (1.10), т.е. единичный вектор  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_2$  лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}_1$ . Однако для однозначного определения направляющих косинусов вектора  $\mathbf{n}_2$  имеющихся соотношений недостаточно, что допускает произвольный выбор ориентации этого вектора. Например, приняв  $n_1^{(II)} = -2n_2^{(II)} = -2n_3^{(II)}$  и удовлетворив тем самым условие ортогональности, с учетом (1.9) получим

$$n_2^{(II)} = n_3^{(II)} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad n_1^{(II)} = \mp \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Единичный вектор  $\mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3$  лежит в той же плоскости, т.е.  $n_1^{(III)} + n_2^{(III)} + n_3^{(III)} = 0$ , и, кроме того, он перпендикулярен вектору  $\mathbf{n}_2$ . Это означает, что  $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$ , и приводит к дополнительному условию

$$\mp \frac{n_1^{(III)}}{\sqrt{3/2}} \pm \frac{n_2^{(III)}}{\sqrt{6}} \pm \frac{n_3^{(III)}}{\sqrt{6}} = 0, \quad \text{или} \quad 2n_1^{(III)} = n_2^{(III)} + n_3^{(III)}.$$

Таким образом,  $n_1^{(III)} = 0$  и  $n_2^{(III)} = -n_3^{(III)}$ . Отсюда, учитывая (1.9), находим

$$n_2^{(III)} = -n_3^{(III)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Выбор знаков направляющих косинусов можно подчинить условию получения правой тройки ортов главных осей рассматриваемого тензора напряжений. Если принять

$$n_1^{(I)} = n_2^{(I)} = n_3^{(I)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_2^{(III)} = -n_3^{(III)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то получим

$$n_1^{(II)} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad n_2^{(II)} = n_3^{(II)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Рассматриваемое однородное одноосное напряженное состояние можно создать, например, путем растяжения кругового цилиндра, приложив к каждому из его торцов распределенные силы с поверхностной плотностью  $3\sigma_0$ , направленные по внешним нормальям к этим торцам [38]. ♦

**Пример 1.4.** Пусть однородное напряженное состояние в теле определено тензором напряжений  $\hat{\sigma}$ , которому в ортогональной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  соответствует матрица

$$A_{\hat{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 & \tau_0 \\ \tau_0 & \tau_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Согласно (1.7), получим  $I_{1\hat{\sigma}} = 0$ ,  $I_{2\hat{\sigma}} = -3\tau_0^2$  и  $I_{3\hat{\sigma}} = 2\tau_0^3$ . Для характеристического уравнения

$$\sigma^3 - 3\tau_0^2\sigma - 2\tau_0^3 = 0$$

подбором несложно найти один из корней, равный  $\sigma = -\tau_0$ . После деления левой части этого уравнения на  $\sigma + \tau_0$  приходим к квадратному уравнению

$$\sigma^2 - \tau_0\sigma - 2\tau_0^2 = 0,$$

корни которого равны  $2\tau_0$  и  $-\tau_0$ . Таким образом, при  $\tau_0 > 0$  обозначим  $\sigma_1 = 2\tau_0$  и  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\tau_0$ . Напряженное состояние является трехосным.

При  $\sigma = \sigma_1 = 2\tau_0$  первые два уравнения СЛАУ (1.8) примут вид

$$-2\tau_0 n_1^{(I)} + \tau_0 n_2^{(I)} + \tau_0 n_3^{(I)} = 0; \quad \tau_0 n_1^{(I)} - 2\tau_0 n_2^{(I)} + \tau_0 n_3^{(I)} = 0,$$

т. е. они идентичны уравнениям в примере 1.3. Это означает, что

$$n_2^{(I)} = n_3^{(I)} = n_1^{(I)} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подстановка в СЛАУ (1.8) вместо  $\sigma$  значения  $\sigma_2 = -\tau_0$  каждое из уравнений этой СЛАУ приводит в данном случае к равенству

$$n_1^{(II)} + n_2^{(II)} + n_3^{(II)} = 0,$$

которое соответствует условию ортогональности  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$  собственных векторов матрицы (1.11), т. е. единичный вектор  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_2$  лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}_1$ . Такой же вывод следует и после подстановки в СЛАУ (1.8) вместо  $\sigma$  значения  $\sigma_3 = -\tau_0$ . Как и в примере 1.3, для однозначного определения направляющих косинусов векторов  $\mathbf{n}_2$  и  $\mathbf{n}_3$  имеющих соотношений недостаточно, что допускает произвольный выбор ориентации этих векторов. В частности, можно принять

$$n_1^{(II)} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad n_2^{(II)} = n_3^{(II)} = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

тогда

$$n_1^{(III)} = 0, \quad n_2^{(III)} = -n_3^{(III)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Рассматриваемое однородное трехосное напряженное состояние возникнет, например, в случае, если к растяжению кругового цилиндра в условиях примера 1.3 поверхностными силами с плотностью  $2\tau_0$  добавить осесимметричное сжатие по его боковой поверхности распределенными силами с плотностью  $-\tau_0$ . Практически такое нагружение можно осуществить, поместив цилиндр в сосуд с внутренним давлением  $p = \tau_0$  и приложив к его торцам растягивающие поверхностные силы плотностью  $3\tau_0$ . ♦

Отметим, что если к торцам цилиндра, упомянутого в примере 1.4, вместо растягивающих сил приложить распределенные сжимающие силы с интенсивностью  $-\tau_0 = -p$ , то в цилиндре возникнет однородное трехосное напряженное состояние, тензору напряжений которого соответствует диагональная матрица  $-pI_2$ , т. е. элементы на ее главной диагонали равны  $-p$ . Несложно убедиться, что вид этой матрицы не зависит от выбора ортогональной системы координат. Такой же **тензор**, называемый **шаровым** и являющийся частным случаем **изотропного тензора**, описывает **однородное напряженное состояние всестороннего сжатия** в любом твердом теле, если все его поверхности подвержены действию одинакового **давления**  $p$ , называемого в этом случае **гидростатическим**.

Любой тензор напряжений  $\hat{\sigma}$ , которому соответствует матрица (1.4), можно представить в виде суммы шарового тензора, которому соответствует матрица  $\sigma_c I_2$ , и **девиатора** напряжений  $\hat{s}$ , которому соответствует матрица

$$A_{\hat{s}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_c & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_c & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_c \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где  $\sigma_c = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 = \sigma_{ii}/3$  — **среднее напряжение**.

### 1.3. Деформированное состояние твердого тела

Наряду с математическими моделями систем материальных точек в механике рассматривают модели *сплошной среды*. При изучении свойств сплошной среды точкой часто называют как точку пространства, так и частицу этой среды. В дальнейшем термин «точка» будем использовать только для обозначения места в неподвижном пространстве, а термин «**частица сплошной среды**» — для обозначения малого элемента сплошной среды [13].

В любой момент времени  $t$  объем  $V$  сплошной среды, ограниченный поверхностью  $S$ , занимает некоторую область пространства. Если в выбранной системе координат в этот момент времени установлено соответствие частиц некоторого объема

сплошной среды и точек пространства, это означает, что определена **конфигурация сплошной среды**. Непрерывный переход от **начальной конфигурации** в момент времени  $t = t_0$  к некоторой последующей, обычно называемой **актуальной конфигурацией**, в общем случае связан с изменением расстояний между частицами среды. Такой переход называют **процессом деформации** или просто **деформированием**. Под **деформацией** обычно понимают изменение формы или размеров области, занятой сплошной средой. В дальнейшем этот термин будем связывать с количественной мерой изменения расстояний между частицами среды при деформировании.

Расстояние между начальным и конечным положениями частицы  $M_0$  сплошной среды ( $M_0 \in V$ ) при деформировании равно модулю  $|u|$  **вектора перемещения** этой частицы. В ортогональной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  проекции этого вектора обозначим через  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (рис. 1.4). Их можно рассматривать как непрерывные и дифференцируемые функции координат  $x_i$  положения этой частицы до деформирования сплошной среды. В этой же системе координат выделим еще одну частицу  $M \in V$ , бесконечно близкую к первой и имеющей до деформирования координаты  $x_i + dx_i$ , причем квадрат расстояния между этими частицами составит  $(ds_0)^2 = dx_i dx_i$ , а направляющие косинусы отрезка  $M_0M$   $n_i = dx_i/ds_0$ .

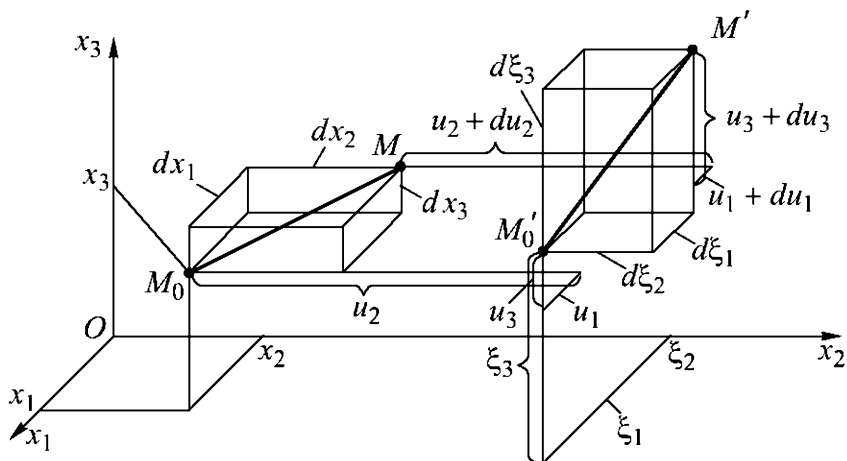


Рис. 1.4

После деформирования первая частица перейдет в положение  $M'_0 \in V$  и будет иметь координаты  $\xi_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3)$ , а вторая — в положение  $M' \in V$  с координатами  $\xi_i + d\xi_i$  (см. рис. 1.4), где

$$d\xi_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Теперь квадрат расстояния между этими частицами

$$(ds)^2 = d\xi_i d\xi_i = dx_i dx_i + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} dx_i dx_j,$$

или

$$(ds)^2 = (ds_0)^2 + 2\tilde{\varepsilon}_{ij} dx_i dx_j,$$

где

$$2\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.13)$$

**Относительное удлинение** отрезка  $M_0M$  после деформирования составит

$$\frac{ds}{ds_0} - 1 = \sqrt{1 + 2\tilde{\varepsilon}_{ij} n_i n_j} - 1.$$

Если считать, что  $|\tilde{\varepsilon}_{ij}| \ll 1$ , то в этом приближении в силу известной формулы  $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$  при  $|x| \ll 1$  получим

$$\frac{ds}{ds_0} - 1 \approx \tilde{\varepsilon}_{ij} n_i n_j.$$

Условие  $|\tilde{\varepsilon}_{ij}| \ll 1$  означает, что в (1.13) допустимо пренебречь квадратами и произведениями частных производных [26], приняв

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.14)$$

Эти величины характеризуют **деформированное состояние** тела в окрестности точки  $M_0 \in V$  и являются компонентами симметричного **тензора  $\hat{\varepsilon}$  малой деформации**. Выражения (1.14) называют **соотношениями Коши** по имени французского математика и механика О.Л. Коши (1789–1857).

Соответствующая этому тензору симметрическая матрица

$$A_{\hat{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

аналогична по структуре матрице  $A_{\hat{\sigma}}$  (1.4), соответствующей *тензору напряжений*  $\hat{\sigma}$ . Поэтому аналогичны и свойства тензоров  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\sigma}$ . В частности, в **главных осях тензора малой деформации** соответствующая ему матрица диагональна. Элементы  $\varepsilon_{\beta}$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ , такой матрицы называют **главными деформациями**. Они являются действительными корнями характеристического уравнения матрицы  $A_{\hat{\varepsilon}}$ , имеющего вид

$$\varepsilon^3 - I_{1\hat{\varepsilon}}\varepsilon^2 + I_{2\hat{\varepsilon}}\varepsilon - I_{3\hat{\varepsilon}} = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения являются **инвариантами тензора деформации**:

$$I_{1\hat{\varepsilon}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

$$I_{2\hat{\varepsilon}} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1;$$

$$I_{3\hat{\varepsilon}} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{31}^2 - \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Орты главных осей тензора малой деформации находят аналогично ортам *главных осей тензора напряжений*.

Диагональные элементы матрицы  $A_{\hat{\varepsilon}}$  называют **продольными** (или **линейными** [38]) **деформациями**, а внедиагональные — **деформациями сдвига**.

Элементарный прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны главным осям  $OX_{\beta}$  тензора малой деформации, имеет начальный объем  $dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3$ . После деформирования объем этого параллелепипеда

$$dV = (1 + \varepsilon_1)dX_1(1 + \varepsilon_2)dX_2(1 + \varepsilon_3)dX_3.$$

Поэтому относительное изменение объема при малой деформации составит

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_{1\hat{\varepsilon}}.$$

Отсюда следует, что деформации сдвига не вызывают изменения объема малой окрестности частицы сплошной среды. Величину  $\varepsilon_V$  называют **объемной деформацией**.

Аналогично тензору напряжений  $\hat{\sigma}$  тензор малой деформации  $\hat{\varepsilon}$  можно представить в виде суммы шарового тензора, которому соответствует матрица  $(\varepsilon_V/3)I_2$  ( $I_2$  — единичная матрица третьего порядка), и *девиатора* деформации  $\hat{e}$ , которому соответствует матрица

$$A_{\hat{e}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_V}{3} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_V}{3} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \frac{\varepsilon_V}{3} \end{pmatrix}.$$

#### 1.4. Связь деформированного и напряженного состояний

Для материала реального твердого тела между параметрами *деформированного* и *напряженного состояний*, в совокупности характеризующими так называемое **напряженно-деформированное состояние** тела, существует определенная зависимость. В пределах малой деформации она является линейной и носит название **обобщенного закона Гука** [38]. Этот закон принимает наиболее простую форму для **изотропного материала**, свойства которого не зависят от выбора направленных координатных осей.

При получении соотношений обобщенного закона Гука используем **принцип независимости действия сил**, справедливый вследствие линейной связи между параметрами деформированного и напряженного состояний. Это позволяет независимо рассматривать действие каждой силы, связанной с соответствующей компонентой тензора напряжений на гранях элементарного параллелепипеда (см. рис. 1.2).

В любой из трех координатных плоскостей **угловая деформация**  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ;  $i \neq j$  (где  $\varepsilon_{ij}$  — деформация сдвига), зависит лишь от соответствующего **касательного напряжения**  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Две другие пары касательных напряжений и все нормальные напряжения в случае изотропного материала не влияют на величину  $\gamma_{ij}$ . Это утверждение можно доказать от противного. Пусть к граням элементарного параллелепипеда приложены только касательные напряжения  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  (рис. 1.5, а), что соответствует **напряженному состоянию чистого сдвига**. Предположим, что эти напряжения вызывают угловую деформацию  $\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$  в плоскости, перпендикулярной плоскости действия этих напряжений, что приводит к отклонению граней первоначально прямоугольного параллелепипеда, перпендикулярных оси  $Ox_1$ , на малый угол  $\gamma_{13}$ . Однако поворот параллелепипеда относительно оси  $Ox_3$  на угол  $180^\circ$ , оставляя систему действующих напряжений неизменной, изменяет знак угла  $\gamma_{13}$  (рис. 1.5, б). Возникшее противоречие можно устранить лишь при условии  $\gamma_{13} = 0$ .

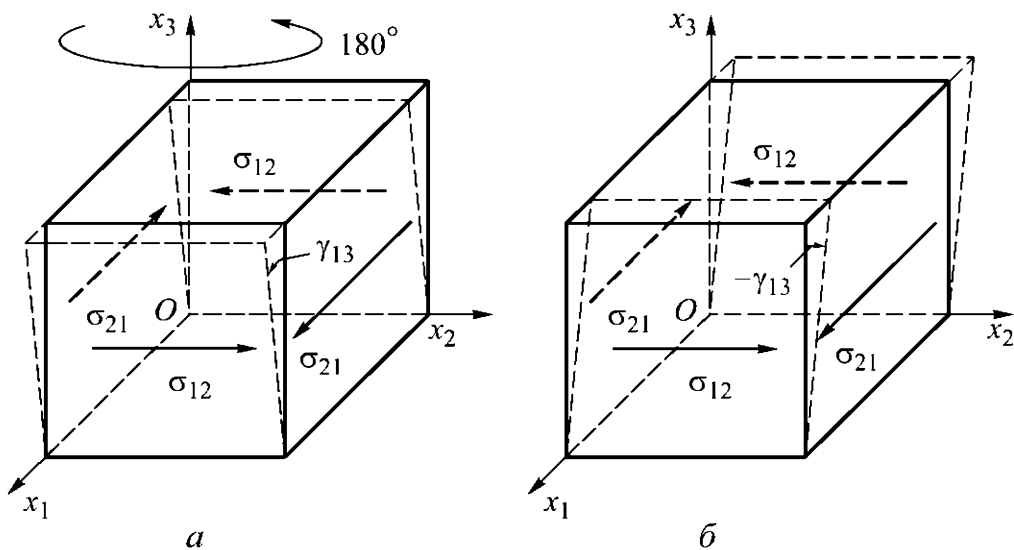


Рис. 1.5

Аналогично, используя принцип независимости действия сил, можно показать, что угловая деформация  $\gamma_{13}$  не зависит и от всех остальных **компонент тензора напряжений**, кроме пары касательных напряжений  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ . В итоге линейную зависи-

мость деформации сдвига от «одноименного» касательного напряжения можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{\gamma_{ij}}{2} = \frac{\gamma_{ji}}{2} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} = \frac{\sigma_{ji}}{2\mu}, \quad (1.15)$$

где коэффициент пропорциональности  $1/(2\mu)$  включает одну из механических характеристик  $\mu$  материала тела, называемую **модулем сдвига** и измеряемую в паскалях (Па). Из (1.15) следует, что в случае изотропного материала *главные оси тензоров напряжений* и *малой деформации* совпадают, поскольку одновременно с обращением в нуль касательных напряжений на гранях параллелепипеда исчезают и соответствующие деформации сдвига.

Несложно показать аналогичным путем, что *продольные деформации* не зависят от касательных напряжений. Английским ученым Р. Гуком (1635–1703) экспериментально установлена линейная зависимость между малой продольной деформацией и действующим в том же направлении растягивающим напряжением. Эта зависимость носит название **закона Гука**. Из этого закона следует, что *нормальное напряжение*  $\sigma_{11}$  вызывает в направлении координатной оси  $Ox_1$  продольную деформацию

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E},$$

где  $E$  — **продольный модуль упругости** (или **модуль Юнга**, названный по имени английского ученого и врача Т. Юнга (1773–1829)). К примеру, для большинства марок сталей  $E \approx 2 \cdot 10^{11}$  Па = 200 ГПа (гигапаскалей).

Также экспериментально установлено, что нормальные напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  вызывают в направлении координатной оси  $Ox_1$  продольные деформации обратного знака соответственно

$$\varepsilon_{11} = -\nu \frac{\sigma_{22}}{E}; \quad \varepsilon_{11} = -\nu \frac{\sigma_{33}}{E},$$

где  $\nu$  — **коэффициент поперечного сужения** (или **коэффициент Пуассона**, названный по имени французского математика и механика С.Д. Пуассона (1781–1840)).

В итоге, снова применяя принцип независимости действия сил, имеем [9]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{E}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})}{E}; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{E}.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Соотношения (1.15) и (1.16) характеризуют деформирование **линейно упругого изотропного материала** твердого тела, описываемое обобщенным законом Гука.

Если почленно сложить равенства (1.16), получим **объемную деформацию**

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{ii} = (1 - 2\nu) \frac{\sigma_{ii}}{E}.$$

В случае однородного напряженного состояния всестороннего сжатия под действием давления  $p$  имеем  $\sigma_{ii} = -3p$  и

$$\varepsilon_V = -3(1 - 2\nu) \frac{p}{E} < 0,$$

поскольку при этом объемная деформация отрицательна. Отсюда следует условие  $\nu \leq 1/2$ , которое справедливо для произвольного напряженного состояния, так как  $\nu$  для линейно упругого изотропного материала не зависит от напряженного состояния, являясь одной из механических характеристик такого материала. Отношение

$$-\frac{p}{\varepsilon_V} = \frac{E/3}{1 - 2\nu} = \kappa$$

называют **объемным модулем упругости** (или **модулем всестороннего сжатия**). Для большинства конструкционных материалов  $\kappa$  обычно также измеряется в гигапаскалях (ГПа).

При увеличении температуры в материале возникает **объемная температурная деформация**

$$\varepsilon_V^{(T)} = \alpha_V^{(T)} \Delta T,$$

где  $\alpha_V^{(T)}$  — **температурный коэффициент объемного расширения**;  $\Delta T$  — приращение температуры.

Для изотропного материала **линейная температурная деформация**

$$\varepsilon^{(T)} = \frac{\varepsilon_V^{(T)}}{3} = \alpha^{(T)} \Delta T,$$

где  $\alpha^{(T)} = \alpha_V^{(T)}/3$  — **температурный коэффициент линейного расширения**.

Поскольку деформации сдвига не вызывают изменения объема, линейную температурную деформацию  $\varepsilon^{(T)}$  следует учитывать в виде слагаемого лишь в правых частях равенств (1.16).

При деформировании реального твердого тела под действием приложенных к нему внешних сил необходимо совершить работу, что приводит к накоплению в теле потенциальной энергии. Если после **разгрузки**, т. е. после снятия приложенных сил, тело принимает исходные форму и размеры, то материал тела обладает свойством **упругости**. При этом накопленная потенциальная энергия полностью переходит в работу. Для элементарного прямоугольного параллелепипеда с длиной ребер  $dx_i$  (см. рис. 1.4) нормальному напряжению  $\sigma_{11}$  соответствует сила  $\sigma_{11} dx_2 dx_3$  (см. рис. 1.2), действующая параллельно координатной оси  $Ox_1$  и совершающая работу на перемещении  $\varepsilon_{11} dx_1$ . Если материал тела обладает свойством **линейной упругости**, т. е. подчиняется обобщенному закону Гука, то эта работа равна  $\sigma_{11} \varepsilon_{11} dV/2$ , где  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ . Аналогичный вклад дают и два других нормальных напряжения. Касательное напряжение  $\sigma_{12}$  создает силу  $\sigma_{12} dx_2 dx_3$ , которая на перемещении  $\gamma_{12} dx_1$  совершает работу, равную  $\sigma_{12} \gamma_{12} dV/2$ . Работу остальных касательных напряжений можно получить перестановкой индексов:  $\sigma_{23} \gamma_{23} dV/2$  и  $\sigma_{31} \gamma_{31} dV/2$ .

В итоге накопленная в объеме элементарного параллелепипеда **потенциальная энергия деформации** равна сумме всех вкладов работ, т. е. с учетом равенства (1.15) запишем  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV/2$ . Если эту величину отнести к единице объема, то получим **объемную плотность потенциальной энергии деформации**

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (1.17)$$

основной единицей измерения которой является джоуль на кубический метр ( $\text{Дж}/\text{м}^3 = \text{Н}/\text{м}^2$ ).

**Пример 1.5.** Используя исходные данные примера 1.4, для напряженного состояния с тензором напряжений, которому соответствует матрица (1.11), согласно (1.15) и (1.17), находим

$$U = \frac{3}{2} \frac{\tau_0^2}{\mu}.$$

Как установлено в примере 1.4, этот тензор в главных осях имеет главные напряжения  $\sigma_1 = 2\tau_0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = -\tau_0$ . Поскольку объемная плотность потенциальной энергии деформации не должна зависеть от преобразования координат, то с учетом (1.15) и (1.17) в главных осях

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = 3(1 + \nu) \frac{\tau_0^2}{E}.$$

Приравнявая эту величину полученной ранее, устанавливаем, что для изотропного линейно упругого материала модуль сдвига и продольный модуль упругости связаны равенством

$$\mu = \frac{E/2}{1 + \nu}. \quad (1.18)$$

Следовательно, для описания свойств такого материала достаточно двух независимых параметров. ♦

С увеличением абсолютных значений параметров напряженного состояния для некоторых материалов реальных твердых тел при деформировании может быть нарушена линейная зависимость деформации от напряжений. Отклонение от линейной зависимости устанавливают экспериментально по **диаграмме растяжения** образца материала обычно в виде стержня с круговым поперечным сечением радиусом  $r_0$  и рабочей длиной  $L_0 \gg r_0$ , которая служит для определения продольной деформации

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0},$$

где  $\Delta L$  — измеряемое увеличение длины стержня при растяжении.

Значения продольной деформации  $\epsilon$  откладывают по оси абсцисс диаграммы растяжения, а соответствующие им значения *растягивающего напряжения*  $\sigma$  — по оси ординат, при этом

$$\sigma = \frac{P}{\pi r_0^2},$$

где  $P$  — измеряемая сила, растягивающая стержень.

Характерный вид диаграммы растяжения для *низкоуглеродистой стали* — сплава железа с относительно небольшим количеством углерода — показан на рис. 1.6.

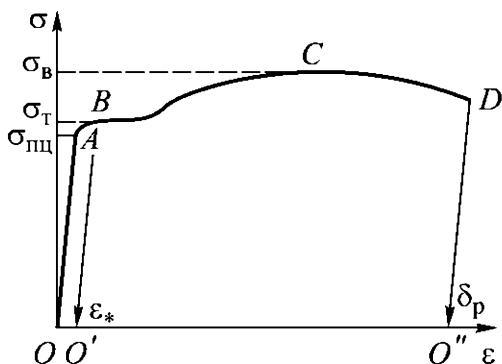


Рис. 1.6

Наибольшее напряжение, до которого начальный участок  $OA$  диаграммы растяжения является прямолинейным, называют *пределом пропорциональности* и обозначают  $\sigma_{пц}$ . Ясно, что значение  $\sigma_{пц}$  зависит от точности измерения значений  $\Delta L$  и  $P$  при испытании образца материала на растяжение. При  $\sigma > \sigma_{пц}$  в случае достаточно высокой точности измерения может быть зафиксирован участок диаграммы, который соответствует сохранению материалом свойств упругости, когда после разгрузки (уменьшения растягивающей силы до нуля) образец восстанавливает свои первоначальные размеры, т.е. не возникает так называемой *остаточной деформации*. Для большинства конструкционных материалов участок  $AB$  весьма мал и выявить его довольно сложно. Вместе с тем для резины и некоторых полимерных материалов этот участок может быть достаточно большим и характеризует свойство таких материалов, называемое *нелинейной упругостью*.

Начало участка  $BSCD$  диаграммы растяжения (см. рис. 1.6), соответствующего накоплению остаточной деформации, связывают с напряжением  $\sigma_t$ , называемым *пределом текучести*. Точку  $B$  обычно определяют по значению остаточной деформации

$\varepsilon_* = 0,002 = 0,2\%$ , причем для большинства конструкционных материалов прямые  $BO'$  и  $AO$  принимают параллельными, т. е. разгрузку при уменьшении растягивающей силы до нуля считают соответствующей свойству линейной упругости материала.

Для некоторых марок низкоуглеродистой стали на диаграмме растяжения около точки  $B$  имеется участок, на котором деформация возрастает без заметного роста напряжения. Этот участок называют **площадкой текучести**, она характеризуется величиной  $\sigma_T$ . Ордината точки  $C$  на рис. 1.6 определяет **предел прочности** материала (или его **временное сопротивление**), обозначаемый  $\sigma_B$ . Так, для низкоуглеродистой стали  $\sigma_B = 390$  МПа и  $\sigma_T = 250$  МПа [38].

Участок  $BC$  на диаграмме растяжения связывают с **упрочнением** материала образца. На этом участке происходит формирование зоны последующего разрушения образца в виде местного уменьшения площади его поперечного сечения. Эту зону с площадью  $F_{III} < \pi r_0^2$  поперечного сечения называют **шейкой**. Дальнейший рост деформации происходит с уменьшением растягивающей силы, а значит, и с уменьшением напряжения

$$\sigma = \frac{P}{\pi r_0^2},$$

хотя отношение  $P/F_{III}$  несколько возрастает.

Точка  $D$  на рис. 1.6 соответствует разрыву образца на две части. Считают, что при разгрузке после разрыва материал образца также проявляет свойство линейной упругости, т. е. прямая  $DO''$  параллельна прямой  $OA$ . После разрыва образца измеряют общую длину  $L''$  соединенных между собой его частей и вычисляют значение величины

$$\delta_p = \frac{L''}{L_0} - 1,$$

называемой **удлинением при разрыве**. Для материалов с хорошо выраженным свойством пластичности  $\delta_p$  может составлять несколько десятков процентов (например, для низкоуглеродистой стали  $\delta_p = 42\%$  [38]).

Для некоторых материалов диаграмма сжатия образца совпадает с диаграммой растяжения, повернутой относительно точки  $O$  на  $180^\circ$ . Однако поведение материала при сжатии и растяжении может быть существенно различным, особенно на стадии разрушения. Это приводит в общем случае к отличию абсолютных значений пределов прочности и текучести при сжатии от их значений при растяжении, т. е.

$$\sigma_{в.с} \neq \sigma_{в.р} \quad \text{и} \quad \sigma_{т.с} \neq \sigma_{т.р}.$$

Если при увеличении напряжения разрушение материала происходит без существенного накопления остаточной деформации, значит, этот материал обладает свойством *хрупкости*. К хрупким материалам относят некоторые марки чугуна и *высокоуглеродистой* инструментальной *стали*, стекло, кирпич, камни и т. п. [38]. Свойство материала без разрушения накапливать значительную остаточную деформацию называют *пластичностью*. В зависимости от напряженного состояния один и тот же материал может проявлять оба эти свойства. Так, растяжение образца из чугуна при большом давлении окружающей среды вызывает разрушение с накоплением значительной остаточной деформации. И наоборот, наличие надреза или трещины в образце из пластичного материала, приводящее к резкому изменению площади поперечного сечения и, как следствие, к изменению напряженного состояния, препятствует накоплению остаточной деформации и вызывает разрушение, имеющее хрупкий характер.

На проявление материалом свойств хрупкости и пластичности влияют также температура образца и скорость его нагружения.

Рост скорости нагружения способствует разрушению без накопления остаточной деформации, а повышение температуры приводит к накоплению остаточной деформации перед разрушением. При повышенной температуре остаточная деформация в образце возрастает со временем даже при постоянном значении растягивающего напряжения (так называемое *последствие*), что связано с проявлением более общего свойства *ползучести* материала [10, 13, 20, 30, 38].

## 1.5. Критерии пластичности

При нагружении большинства элементов конструкции технических устройств обычно не допускают возникновения значительной *остаточной деформации*, т.е. желательно, чтобы материал этих элементов работал в пределах *упругости*. Это означает, что при *одноосном напряженном состоянии* должно быть выполнено условие

$$|\sigma| \leq \frac{\sigma_T}{n_T},$$

где  $\sigma$  — действующее *напряжение*;  $\sigma_T$  — *предел текучести* материала;  $n_T > 1$  — *коэффициент запаса по текучести*.

Если пределы текучести при растяжении  $\sigma_{T.p}$  и сжатии  $\sigma_{T.c}$  различны, то в случае  $\sigma > 0$  должно быть  $\sigma \leq \sigma_{T.p}/n_T$ , а в случае  $\sigma < 0$  —  $|\sigma| \leq \sigma_{T.c}/n_T$ . Значение коэффициента  $n_T > 1$  выбирают исходя из практического опыта создания и эксплуатации аналогичных конструкций и с учетом требований к их надежности.

Для напряженного состояния, отличного от одноосного, необходимо располагать количественной мерой, характеризующей переход материала от упругости к *пластичности*. Эту меру называют *критерием пластичности*. Ее обычно связывают с наибольшими *касательными напряжениями*, поскольку именно они способствуют возникновению в материале с кристаллической структурой *необратимой деформации сдвига*, приводящей к остаточной деформации.

В случае *напряженного состояния равностороннего сжатия* или *равностороннего растяжения* касательные напряжения отсутствуют, поскольку главные напряжения не зависят от ориентации ортогональной системы координат (см. **1.2**). Если на напряженное состояние в рассматриваемом теле наложить равностороннее сжатие, погрузив тело в жидкость, находящуюся под давлением  $p$ , то произойдет изменение всех главных напряжений на одно и то же значение  $p$ , а главные касательные напряжения останутся прежними. Поэтому значение *среднего напряжения* не влияет на деформацию сдвига, что подтверждено многочисленными экспериментами [29]. Это означает, что

критерий пластичности непосредственно связан с *девиатором* напряжений.

Для произвольного *трехосного напряженного состояния* с главными напряжениями  $\sigma_\beta$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ , найдем ориентацию площадки, в которой действует наибольшее касательное напряжение. Пусть на рис. 1.3 координатные оси  $Ox_\beta$  являются *главными осями тензора напряжений*. Тогда, следуя выкладкам в примере 1.2, для проекций на эти оси вектора  $\sigma$  полного напряжения в площадке с единичным вектором  $\mathbf{n}$  нормали, внешней по отношению к тетраэдру на рис. 1.3, получаем  $\tilde{\sigma}_\beta = \sigma_\beta n_\beta$ , где  $n_\beta$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{n}$ . Далее находим нормальное напряжение  $\sigma_n$  в этой площадке и квадрат  $\sigma^2$  модуля вектора полного напряжения:

$$\sigma_n = \sum_{\beta=1}^3 \tilde{\sigma}_\beta n_\beta = \sum_{\beta=1}^3 \sigma_\beta n_\beta^2; \quad \sigma^2 = \sum_{\beta=1}^3 \tilde{\sigma}_\beta^2 = \sum_{\beta=1}^3 \sigma_\beta^2 n_\beta^2. \quad (1.19)$$

Отсюда с учетом равенства  $\Phi = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 = 0$  для квадрата касательного напряжения в этой площадке получим

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \sigma^2 - \sigma_n^2 = \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n_3^2 n_1^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В частном случае  $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 1/3$ , когда грань тетраэдра одинаково наклонена к координатным плоскостям, в которых действуют главные напряжения, из (1.20) получим так называемое *октаэдрическое касательное напряжение*

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (1.21)$$

Чтобы найти значения  $n_\beta$ , при которых  $\tau^2$  достигает максимума, нужно решить задачу на условный экстремум с дополнительным условием  $\Phi = 0$ . Необходимым условием существования такого экстремума являются равенства

$$\frac{\partial(\tau^2 + \lambda\Phi)}{\partial n_\beta} = 0,$$

которые с учетом первого равенства (1.19) равносильны системе однородных нелинейных уравнений

$$(\sigma_\beta^2 - 2\sigma_n\sigma_\beta + \lambda)n_\beta = 0.$$

Одним из решений этой системы с учетом дополнительного условия будут  $n_1 = 1$  и  $n_2 = n_3 = 0$ , что удовлетворяет уравнениям при  $\beta = 2$  и  $\beta = 3$ . Тогда  $\sigma_n = \sigma_1$  и из уравнения для  $\beta = 1$  найдем  $\lambda = \sigma_1^2$ . Аналогично можно принять  $n_2 = 1$  или  $n_3 = 1$ . Однако во всех трех найденных площадках касательное напряжение равно нулю, т. е. неотрицательная величина  $\tau^2$  достигает минимума.

Для поиска максимального значения  $\tau^2$  примем  $n_1$  и  $n_2$  отличными от нуля. После сокращения уравнений для  $\beta = 1$  и  $\beta = 2$  соответственно на  $n_1$  и  $n_2$  из первого уравнения вычтем второе и получим

$$\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\sigma_n = 0.$$

Отсюда, учитывая первое равенство (1.19),

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

т. е.  $n_1 = n_2 = 1/\sqrt{2}$  и  $n_3 = 0$ , что позволяет удовлетворить уравнение для  $\beta = 3$ . Площадка, нормаль к которой имеет найденные направляющие косинусы, параллельна главной оси  $Ox_3$  и одинаково наклонена к координатным плоскостям  $x_1Ox_3$  и  $x_2Ox_3$ . Из (1.20) получим для этой площадки

$$\tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Аналогично можно найти значения касательных напряжений в площадках, одинаково наклоненных соответственно к плоскостям  $x_1Ox_2$ ,  $x_1Ox_3$  и  $x_2Ox_3$ ,  $x_1Ox_2$ :

$$\tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \quad \tau = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1).$$

Абсолютные значения полученных **касательных напряжений** называют **главными**. Если нумерацию главных напряжений согласовать с условием

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

то по крайней мере одним из наибольших среди полученных значений касательных напряжений будет

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Убедимся в этом следующим образом. Поскольку квадрат суммы не меньше суммы квадратов, для равенства

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3)$$

получим

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \geq (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2.$$

Поэтому при  $n_1^2 = n_2^2 = n_3^2$  последнее слагаемое в правой части (1.20) будет не меньше суммы двух остальных. Чтобы увеличить значение  $\tau^2$ , необходимо максимально увеличить произведение  $n_1^2 n_3^2$  путем уменьшения произведений  $n_1^2 n_2^2$  и  $n_2^2 n_3^2$ , что возможно, если положить  $n_2^2 = 0$ . Тогда произведение  $n_1^2 n_3^2$  будет наибольшим при  $n_1^2 = n_3^2 = 1/2$ , а  $\tau_{\max}$  — наибольшим касательным напряжением (ясно, что в случае  $\sigma_1 = \sigma_2$  оно совпадет с касательным напряжением  $(\sigma_2 - \sigma_3)/2$ , а при  $\sigma_2 = \sigma_3$  — с касательным напряжением  $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ).

Французский инженер А.Э. Треска (1814–1885) в 1868 году предложил сравнивать значение  $\tau_{\max}$  с **пределом текучести**  $\tau_T$  **при чистом сдвиге** (*напряженное состояние чистого сдвига можно создать при кручении тонкостенной трубки из исследуемого материала — см. 3.1*), т. е. принять в качестве критерия пластичности равенство

$$\tau_T = \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Однако при одноосном растяжении  $\sigma_3 = 0$  и  $\sigma_1 = \sigma_T$ . Поэтому критерий пластичности можно представить в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T.$$

Это равенство получило название **критерия пластичности Треска — Сен-Венана**, поскольку в 1871 году французский математик и механик А.Ж.К. Сен-Венан (1797–1886) использовал его при построении теории пластичности при *плоском напряженном состоянии*.

Позднее результаты многочисленных экспериментов показали, что отношение  $\tau_T/\sigma_T > 1/2$  и находится в диапазоне значений 0,55...0,60. Кроме того, установлено, что при  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  некоторое влияние оказывает и главное напряжение  $\sigma_2$ .

В 1904 году польский механик М.Т. Губер (1872–1950) и независимо от него в 1913 году немецкий математик и механик Р. Мизес (1883–1953) предложили в качестве критерия пластичности принять достижение некоторого предельного значения  $\tau^*$  октаэдрическим касательным напряжением (1.21). Для одноосного растяжения ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  и  $\sigma_1 = \sigma_T$ ) это привело к равенству  $\tau^* = (\sqrt{2}/3)\sigma_T$  и позволило представить **критерий пластичности Губера — Мизеса** в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2. \quad (1.22)$$

В случае предельного напряженного состояния чистого сдвига можно принять  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \tau_T$  и  $\sigma_2 = 0$ , положив  $\sigma_1 = -\sigma_3$ . Тогда из (1.22) следует  $\tau_T/\sigma_T = \sqrt{2}/3 \approx 0,557$ , что лучше соответствовало экспериментальным результатам, чем ранее рассмотренный вариант.

Отечественный механик В.В. Новожилов (1910–1987) дал наглядную физическую интерпретацию этого критерия. Если в отдельно взятом кристаллическом зерне поликристаллического материала остаточные деформации связаны с достижением предела текучести при чистом сдвиге касательными напряжениями в определенных плоскости и направлении, то для материала в целом с равновероятной ориентацией таких плоскостей и направлений следует использовать среднее квадратичное значение главных касательных напряжений, которому пропорционально значение  $\tau_{\text{окт}}$ .

Критерию (1.22) можно дать и энергетическое толкование. С учетом (1.16) *объемная плотность* (1.17) *потенциальной*

энергии деформации, выраженная через главные напряжения,

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_3^2\sigma_1^2)), \quad (1.23)$$

где  $\nu$  и  $E$  — коэффициент поперечного сужения и продольный модуль упругости.

В выражение (1.23) входит работа  $A$  среднего напряжения  $\sigma_c = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  на объемной деформации  $\varepsilon_V = 3(1 - 2\nu)\sigma_c/E$ :

$$A = \frac{1}{2}\sigma_c\varepsilon_V = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2.$$

После вычитания этой работы из правой части (1.23) получим объемную плотность потенциальной энергии формоизменения (без учета изменения объема)

$$U_\phi = \frac{1 + \nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2), \quad (1.24)$$

связанную лишь с работой касательных напряжений на соответствующих *угловых деформациях* и пропорциональную квадрату октаэдрического касательного напряжения. Целесообразность использования потенциальной энергии формоизменения для построения критерия пластичности еще в 1856 году отметил английский физик Дж.К. Максвелл (1831–1879) в письме к английскому физику и математику У. Томсону (лорду Кельвину (1824–1907)), однако это письмо было опубликовано лишь спустя несколько десятилетий [19].

Для *двухосного напряженного состояния* с произвольными значениями главных напряжений  $\bar{\sigma}_1$  и  $\bar{\sigma}_2$  (при  $\bar{\sigma}_3 = 0$ ) на рис. 1.7 представлены границы областей, в которых изотропный материал сохраняет свойства упругости, согласно критериям пластичности Треска — Сен-Венана (сплошная линия) и Губера — Мизеса (штриховая линия).

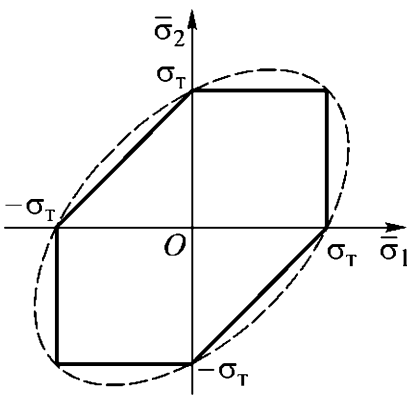


Рис. 1.7

При этом в площадке, параллельной главной оси  $Ox_3$  тензора напряжений и имеющей направляющие косинусы  $n_1$  и  $n_2$  вектора единичной нормали (при  $n_3 = 0$ ), с учетом (1.19) и (1.20) получим нормальное напряжение

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_1 n_1^2 + \bar{\sigma}_2 n_2^2$$

и квадрат касательного напряжения

$$\tau_n^2 = (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2 n_1^2 n_2^2.$$

Исключая отсюда с помощью равенства  $n_1^2 + n_2^2 = 1$  направляющие косинусы, приходим к уравнению

$$\left( \sigma_n - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) \right)^2 + \tau_n^2 = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2)^2$$

окружности в координатах  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  с центром на оси абсцисс в точке с координатой  $\sigma_n^o = (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)/2$  и радиусом  $\sigma_r = |\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2|/2$  (на рис. 1.8 для определенности принято  $\bar{\sigma}_1 > \bar{\sigma}_2$ ; ясно, что при  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$  происходит вырождение окружности в точку на оси абсцисс). Эта окружность является **круговой диаграммой напряженного состояния**; ограниченный ею круг принято называть **кругом Мора** по имени немецкого ученого О.Х. Мора (1835–1918).

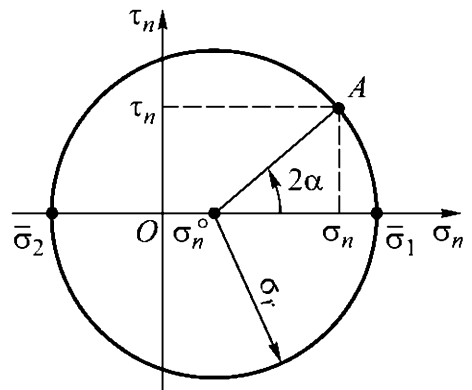


Рис. 1.8

Если принять  $n_1 = \cos \alpha$ , то получим

$$n_2 = \sin \alpha, \quad \sigma_n = \sigma_n^o + \sigma_r \cos 2\alpha, \quad \tau_n = \sigma_r \sin 2\alpha,$$

т.е. координаты точки  $A$  на рис. 1.8 однозначно определяют значения нормального и касательного напряжений в рассматриваемой площадке.

Круговую диаграмму можно построить без задания главных напряжений для общего случая двухосного напряженного состояния (пусть для определенности на рис. 1.9  $\sigma_{11} > \sigma_{22} > 0$  и  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau > 0$ ). В каждой из площадок, перпендикулярных

координатным осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$  (в данном случае они не являются главными), заданы нормальное и касательное напряжения, определяющие координаты точек  $A$  и  $B$  (рис. 1.10), через которые проходит окружность радиусом

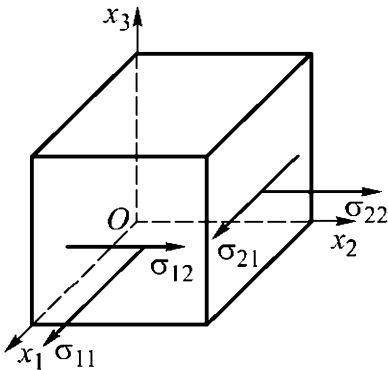


Рис. 1.9

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4} + \tau^2}$$

с центром на оси абсцисс в точке с координатой

$$\sigma_n^o = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}.$$

Отсюда получим значения  $\bar{\sigma}_1 = \sigma_n^o + \sigma_r$  и  $\bar{\sigma}_2 = \sigma_n^o - \sigma_r$  главных напряжений, а угол  $2\alpha$  позволит найти ориентацию главных осей тензора напряжений относительно координатных осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$ .

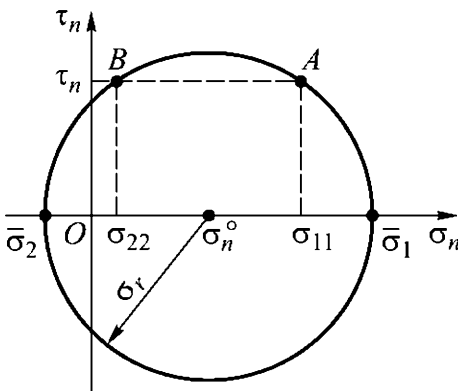


Рис. 1.10

При  $\bar{\sigma}_2 = -\bar{\sigma}_1 < 0$  значение  $\sigma_r$  будет максимальным касательным напряжением. Поэтому при использовании критерия пластичности Треска — Сен-Венана коэффициент запаса по текучести

$$n_T = \frac{\tau_T}{\sigma_r} = \frac{\sigma_T}{2\sigma_r}.$$

При  $\bar{\sigma}_1 > 0$  и  $\bar{\sigma}_2 \geq 0$  максимальное касательное напряжение равно  $\bar{\sigma}_1/2$  и

$$n_T = \frac{\tau_T}{\bar{\sigma}_1/2} = \frac{\sigma_T}{\bar{\sigma}_1}.$$

Применение критерия пластичности Губера — Мизеса в форме (1.22) в обоих случаях даст значение

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{(4\sigma_r^2 + \bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2)/2}}.$$

Для часто возникающего на практике случая, когда  $\sigma_{22} = 0$ , имеем

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sigma_{11}^2}{4} + \tau^2}; \quad \sigma_n^o = \frac{\sigma_{11}}{2};$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11}}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_{11}^2}{4} + \tau^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_{11}}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_{11}^2}{4} + \tau^2}$$

и при использовании критерия Треска — Сен-Венана

$$n_\tau = \frac{\tau_\tau}{\sigma_r} = \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 4\tau^2}}.$$

Применение в данном случае критерия Губера — Мизеса даст значение

$$n_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{(4\sigma_r^2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2)/2}} = \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau^2}},$$

большее, чем значение, полученное согласно критерию Треска — Сен-Венана.

Различие в значениях коэффициента запаса по текучести, получаемых с помощью этих двух критериев пластичности, сравнительно мало и сопоставимо с неизбежным разбросом механических характеристик материалов, определяемых экспериментально с некоторой погрешностью. Например, в случае напряженного состояния чистого сдвига это различие составляет примерно 13 %.

## Вопросы и задачи

**1.1.** В чем различие между точкой пространства и частицей сплошной среды, находящейся в этой точке?

**1.2.** Убедитесь, что вид шарового тензора не зависит от выбора ортогональной системы координат.

**1.3.** Компоненты тензора напряжений удовлетворяют условию  $\sigma_{21}/\sigma_{11} = \sigma_{23}/\sigma_{31} = \sigma_{22}/\sigma_{12}$ . Является ли описываемое таким

тензором напряженное состояние трехосным? Каким будет напряженное состояние, если кроме указанного условия справедливо соотношение  $\sigma_{31}/\sigma_{21} = \sigma_{33}/\sigma_{32} = \sigma_{12}/\sigma_{22}$ ?

**1.4.** Проведите подробный вывод формул (1.13).

**1.5.** Убедитесь, что для изотропного материала угловые деформации не зависят от нормальных напряжений, а продольные деформации не зависят от касательных напряжений.

**1.6.** Все поверхности прямого кругового цилиндра высотой  $H$  с внутренним диаметром  $D_0$  и наружным диаметром  $D$ , выполненного из линейно упругого изотропного материала, нагружают давлением  $p$ . Как при этом изменятся внутренний диаметр и объем цилиндра? Найдите эти изменения, если давление  $p$  действует только на торцы цилиндра или только на цилиндрические поверхности.

**1.7.** Проведите подробный вывод формулы для объемной плотности потенциальной энергии деформации тела, материал которого обладает свойством линейной упругости, и формул (1.20), (1.22)–(1.24).

**1.8.** Выведите уравнение границы области упругости материала, представленной на рис. 1.7 штриховой линией.

## 2. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В аналитической механике как составной части теоретической механики изучение движения и равновесия механической системы основано на использовании ее энергетических характеристик. Такой подход позволяет при построении математической модели равновесия механической системы широко применять *принцип возможных перемещений*, а в сочетании с *принципом Даламбера* строить и математические модели ее движения.

### 2.1. Предварительные сведения

Из курса теоретической механики известно [18, гл. 4], что в любой фиксированный момент времени положение материальной точки в пространстве можно задать тремя ее координатами в выбранной системе координат, а положение абсолютно твердого тела — шестью независимыми параметрами, называемыми *обобщенными координатами* этого тела. В качестве обобщенных координат можно, например, выбрать три координаты центра масс тела и три угла, характеризующие поворот тела относительно этого центра. Для роторов таких технических устройств, как гироскопы, турбины, электрические генераторы и моторы, угловая скорость вращения относительно оси ротора существенно превышает угловую скорость поворотов относительно других направлений. В этом случае обычно используют углы Эйлера: угол  $\varphi$  собственного вращения относительно оси ротора, угол  $\psi$  прецессии и угол  $\theta$  нутации. Положение корабля относительно его центра масс характеризуют предложенными А.Н. Крыловым так называемыми корабельными углами: дифферента, курса и крена (для летательных аппаратов термин «угол дифферента» заменяют термином «угол тангажа», а в ракетной технике к тому же вместо угла курса говорят об угле рыскания).

Под обобщенными координатами механической системы, состоящей из материальных точек и твердых тел, понимают совокупность  $n$  параметров  $q_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , достаточную для определения положения этой системы в пространстве в фиксированный момент времени. Эти параметры и их производные  $\dot{q}_j$  по времени  $t$ , называемые **обобщенными скоростями**, в общем случае должны подчиняться условиям, отражающим ограничения на движение системы в пространстве. Такие ограничения называют **связями**. Если ограничивающее условие можно привести к виду  $f_v(t, q_1, \dots, q_n) = 0$ , то **связь голономная**, а если к виду  $f_v(q_1, \dots, q_n) = 0$ , то **связь голономная стационарная**.

Связи, ограничивая движение механической системы, действуют на нее посредством сил, называемых **реакциями связи**. Допускаемые связями в фиксированный момент времени бесконечно малые перемещения точек системы называют **возможными перемещениями**, а работу  $\delta A_\zeta = \mathbf{P}_\zeta \cdot \delta \mathbf{x}_\zeta$  силы  $\mathbf{P}_\zeta$  на любом возможном перемещении  $\delta \mathbf{x}_\zeta$  точки  $M_\zeta$  ее приложения — **возможной работой** этой силы (где  $\mathbf{x}_\zeta$  — радиус-вектор точки  $M_\zeta$ ). Если сумма возможных работ реакций связи равна нулю, то **связь** считают **идеальной**.

Пусть декартовы координаты  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , материальной точки, на которую наложена голономная связь, удовлетворяют уравнению  $f(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ . Тогда проекции  $dx_i$  бесконечно малого приращения  $d\mathbf{x}$  вектора действительного перемещения должны удовлетворять условию

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$$

(здесь и далее снова использовано правило суммирования слагаемых по одинаковым латинским индексам).

В отличие от действительного возможное перемещение предполагает «замораживание» связи в фиксированный момент времени, т.е. время  $t$  в уравнении голономной связи играет роль параметра, принимающего заданное значение, так что  $dt = 0$ . Поэтому проекции  $\delta x_i$  вектора  $\delta \mathbf{x}$  возможного перемещения удовлетворяют условию  $(\partial f / \partial x_i) \delta x_i = 0$ . Если уравнение голономной связи рассматривать как уравнение поверхности, изменяющей

во времени свое положение в пространстве, то векторы  $\delta \mathbf{x}$  возможных перемещений материальной точки лежат в касательной плоскости к этой поверхности, «замороженной» в фиксированный момент времени. Ясно, что в случае голономной стационарной связи приращение действительного перемещения совпадает с одним из возможных перемещений.

**Обобщенные координаты**, которые составляют наименьшую по численности совокупность, однозначно определяющую в фиксированный момент времени положение механической системы в пространстве, называют **независимыми**. Число  $J$  таких координат равно **числу степеней свободы** системы с голономными связями. В этом случае положение любой точки  $M_\zeta$  системы в фиксированный момент времени задает векторная функция  $\mathbf{x}_\zeta = \mathbf{x}_\zeta(t, q_1, \dots, q_J)$ . Тогда возможное перемещение этой точки

$$\delta \mathbf{x}_\zeta = \frac{\partial \mathbf{x}_\zeta}{\partial q_j} \delta q_j, \quad j = \overline{1, J}, \quad (2.1)$$

где  $\delta q_j$  — вариация  $j$ -й независимой обобщенной координаты.

Если равнодействующие  $\mathbf{P}_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , внешних сил приложены к  $K$  точкам механической системы, то возможная работа этих сил с учетом (2.1)

$$\delta A = \mathbf{P}_k \cdot \delta \mathbf{x}_k = \mathbf{P}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Таким образом, возможная работа всех сил, действующих на систему, представляет собой линейную комбинацию вариаций независимых обобщенных координат. Каждый из коэффициентов  $Q_j = \mathbf{P}_k \cdot (\partial \mathbf{x}_k / \partial q_j)$  этой линейной комбинации при вариации  $\delta q_j$  называют **обобщенной силой**, соответствующей  $j$ -й независимой обобщенной координате  $q_j$ . В отличие от перемещения точки и приложенной к ней силы, являющихся векторными величинами, независимая обобщенная координата и соответствующая ей обобщенная сила — скалярные величины. При изменении набора независимых обобщенных координат изменяются и обобщенные силы.

Для равновесия механической системы с *голономными стационарными* и одновременно *идеальными* связями необходимо

и достаточно, чтобы *обобщенные силы*, соответствующие всем *независимым обобщенным координатам* этой системы, были равны нулю [18, гл. 18]. Это утверждение следует из **принципа возможных перемещений**, требующего в положении равновесия равенства нулю *возможной работы* всех действующих на такую систему внешних сил.

Действительно, если система, состоящая из  $K$  материальных точек, находится в равновесии, то приложенные к каждой  $k$ -й точке равнодействующие внешних сил  $\mathbf{P}_k$  и реакций связи  $\mathbf{R}_k$  уравновешены, т. е.  $\mathbf{P}_k + \mathbf{R}_k = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор. Умножая это равенство на *возможное перемещение*  $\delta \mathbf{x}_k$   $k$ -й точки и суммируя по индексу  $k$  полученные скалярные произведения, получаем возможную работу:

$$\mathbf{P}_k \cdot \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{x}_k = 0, \quad k = \overline{1, K}.$$

В случае идеальных связей второе слагаемое в этом равенстве равно нулю. Поэтому равенство нулю возможной работы  $\delta A = \mathbf{P}_k \cdot \delta \mathbf{x}_k$  всех внешних сил является необходимым условием равновесия системы. При ускоренном движении системы равнодействующая  $\mathbf{P}_k$  в соответствии с **принципом Даламбера** включает силу инерции  $-m_k \mathbf{a}_k$ , где  $m_k$  — масса  $k$ -й точки,  $\mathbf{a}_k$  — вектор ее ускорения.

Доказательство достаточности принципа возможных перемещений проведем от противного: пусть возможная работа всех внешних сил равна нулю, но система не находится в равновесии. Тогда хотя бы для одной из точек  $M_\zeta$  системы имеем  $\mathbf{P}_\zeta + \mathbf{R}_\zeta \neq \mathbf{0}$ . Поэтому за малый промежуток времени возникнет некоторое действительное перемещение  $d\mathbf{x}_\zeta$ , для которого  $(\mathbf{P}_\zeta + \mathbf{R}_\zeta) \cdot d\mathbf{x}_\zeta \neq 0$ . В случае голономных стационарных связей действительное перемещение  $d\mathbf{x}_\zeta$  совпадает с одним из возможных перемещений  $\delta \mathbf{x}_\zeta$ . Тогда, заменяя греческий индекс  $\zeta$  на латинский  $k$  и суммируя по индексу  $k$ , получаем

$$\mathbf{P}_k \cdot \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{x}_k \neq 0.$$

Поскольку второе слагаемое равно нулю, результат противоречит принятому предположению, что доказывает достаточность этого принципа.

Из хода доказательства следует, что принцип возможных перемещений позволяет устанавливать положение равновесия системы с голономными стационарными идеальными связями без нахождения реакций связей. Этот принцип можно обобщить применительно к деформируемым телам, в которых расстояния между фиксированными точками могут изменяться. При этом необходимо учесть работу, совершаемую на возможных перемещениях при деформировании тела.

## 2.2. Обобщение принципа возможных перемещений

В теле объемом  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ , рассмотрим произвольную область  $V' \subset V$ , ограниченную поверхностью  $S'$ , которая не имеет общих точек с поверхностью  $S$  (рис. 2.1), т. е.  $S' \cap S = \emptyset$  — пустое множество.

Если эту область рассматривать отдельно от всего тела, то на ее поверхности необходимо задать реакции со стороны отброшенной части тела в виде распределенных *поверхностных сил* с вектором *плотности*

$\mathbf{p}'(N')$ , зависящим от положения точек  $N' \in S'$ . Силы, распределенные по объему  $V'$ , характеризует вектор  $\mathbf{b}(M)$  *плотности объемных сил*, зависящий от положения точек  $M \in V'$ . Равнодействующая перечисленных сил

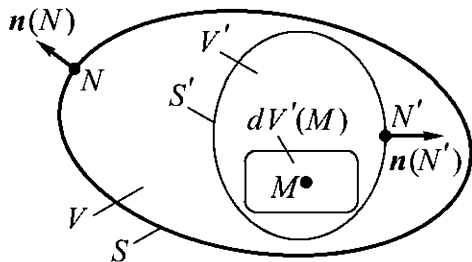


Рис. 2.1

$$\mathbf{R}' = \int_{S'} \mathbf{p}'(N') dS'(N') + \int_{V'} \mathbf{b}(M) dV'(M),$$

поскольку силы, действующие между отдельными частями тела внутри области  $V'$ , взаимно уравновешены. В положении равновесия каждая проекция  $R'_i = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , равнодействующей  $\mathbf{R}'$  на координатные оси  $Ox_i$  ортогональной системы координат с ортами  $\mathbf{e}_i$  равна нулю:

$$R'_i = \int_{S'} p'_i(N') dS'(N') + \int_{V'} b_i(M) dV'(M) = 0, \quad (2.2)$$

где  $p'_i$  и  $b_i$  — проекции на оси  $Ox_i$  векторов  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{b}$  соответственно.

В данном случае вектор  $\mathbf{p}'(N')$  можно отождествить с вектором  $\boldsymbol{\sigma}(N')$  *полного напряжения*, который действует на площадке, проходящей через точку  $N' \in S'$  и перпендикулярной единичному вектору  $\mathbf{n}(N')$  внешней нормали к поверхности  $S'$  (см. рис. 2.1).

Если *напряженное состояние* в точке  $N' \in S'$  задать симметричным *тензором напряжений*  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(N')$  с компонентами

$$\sigma_{ij}(N') = \sigma_{ji}(N'), \quad j = 1, 2, 3,$$

то проекции  $p'_i(N') = \sigma_i(N')$  вектора полного напряжения  $\mathbf{p}'(N') = \boldsymbol{\sigma}(N')$  можно представить в виде (см. пример 1.2)

$$p'_i(N') = \sigma_i(N') = \sigma_{ji}(N')n_j(N'),$$

где  $n_j(N')$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{n}(N')$ .

Тогда интеграл по поверхности  $S'$  в (2.2) в соответствии с формулой Остроградского — Гаусса можно преобразовать в интеграл по объему  $V'$ , записав вместо (2.2) три равенства

$$\int_{V'} \left( \frac{\partial \sigma_{ji}(M)}{\partial x_j} + b_i(M) \right) dV'(M) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Поскольку условием равенства нулю интеграла по произвольной области от непрерывной подынтегральной функции является равенство нулю этой функции, для открытой области  $V$ , не содержащей точек поверхности  $S$ , получим **уравнения равновесия** в проекциях на координатные оси  $Ox_i$ :

$$\frac{\partial \sigma_{ji}(M)}{\partial x_j} + b_i(M) = 0, \quad M \in V. \quad (2.3)$$

Отметим, что при ускоренном движении тела в соответствии с *принципом Даламбера* проекции  $b_i(M)$  включают проекции распределенных инерционных сил  $-\rho(M)dv_i(M)/dt$ , где  $\rho(M)$  — плотность материала тела в окрестности точки  $M \in V$ ,  $v_i(M)$  — проекции вектора  $\mathbf{v}(M)$  скорости *частицы сплошной среды* в этой окрестности, а  $t$  — время. Обычно инерционные силы выделяют в (2.3) из состава объемных сил в явном виде, что приводит к такой записи **уравнений движения**:

$$\frac{\rho(M)dv_i(M)}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}(M)}{\partial x_j} + b_i(M), \quad M \in V.$$

Умножим скалярно векторную форму уравнений равновесия (2.3)

$$\frac{\partial \sigma_{ji}(M)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i + \mathbf{b}(M) = \mathbf{0}$$

на вектор  $\delta \mathbf{u}(M)$  *возможного перемещения* частицы в окрестности точки  $M \in V$  и, опустив обозначение этой точки, проинтегрируем скалярное произведение по объему  $V$ :

$$\int_V \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i + \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i dV + \int_V b_i \delta u_i dV = 0. \quad (2.4)$$

Если подынтегральное выражение первого интеграла в средней части (2.4) представить в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i = \frac{\partial (\sigma_{ji} \delta u_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j},$$

использовать формулу Остроградского — Гаусса и учесть равенство  $\sigma_{ji} n_j = \sigma_i = p_i$ , то

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i dV = \int_S p_i \delta u_i dS - \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV.$$

С учетом симметрии тензора напряжений и *соотношений Коши* (1.14) запишем

$$\sigma_{ji} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} = \frac{\sigma_{ji}}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}.$$

В итоге вместо (2.4) получим

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_S p_i \delta u_i dS + \int_V b_i \delta u_i dV. \quad (2.5)$$

Интеграл в левой части (2.5) характеризует работу напряжений на **возможных деформациях** материала тела, а интегралы в правой части — **возможные работы** распределенных поверхностных и объемных сил на возможных перемещениях. Если к телу в точках  $M_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , приложены **сосредоточенные силы**  $\mathbf{P}_k$ , то в правую часть (2.5) следует добавить **возможную работу**  $\mathbf{P}_k \cdot \delta \mathbf{u}_k$ , где  $\delta \mathbf{u}_k$  — возможное перемещение точки  $M_k \in \overline{V} = V \cup S$ . Если помимо поверхностных и объемных сил на тело действуют нагрузки (в том числе и сосредоточенные силы), которые можно представить совокупностью  $J$  **обобщенных сил**  $Q_l$ ,  $l = \overline{1, J}$ , вместо  $\mathbf{P}_k \cdot \delta \mathbf{u}_k$  в правую часть (2.5) следует добавить возможную работу  $Q_l \delta q_l$  этих обобщенных сил на вариациях  $\delta q_l$  соответствующих им **обобщенных координат**  $q_l$ . Поскольку в **расчетных схемах**, используемых в прикладной механике, в качестве обобщенных сил могут выступать различные **силовые факторы** (сосредоточенные силы и моменты и давление), то обобщенные координаты, которые принято в таких случаях называть **обобщенными перемещениями**, имеют различный механический смысл: сосредоточенной силе соответствует перемещение точки ее приложения в направлении действия этой силы, моменту — угол поворота, давлению — изменение объема тела.

При использовании (2.5) зависимости  $b_i(M)$ ,  $M \in V$ , и  $p_i(N)$ ,  $N \in S$ , обычно известны. При ускоренном движении тела проекции  $b_i(M)$  в соответствии с принципом Даламбера включают слагаемые  $-\rho(M)a_i(M)$ , где  $a_i(M)$  — проекция вектора ускорения частицы в окрестности точки  $M \in V$  на координатную ось  $Ox_i$ . Если на части  $S_u$  поверхности  $S$  тела ( $S_u \subseteq S$ ) заданы **кинематические граничные условия**  $u_i(N) = \tilde{u}_i(N)$ ,  $N \in S_u$ , для проекций вектора  $\mathbf{u}(N)$  перемещения, то  $\delta u_i(N) = 0 \quad \forall N \in S_u$ .

Поскольку (2.5) получено в результате преобразования уравнений равновесия, то обобщением **принципа возможных переме-**

является следующее утверждение: для равновесия деформируемого тела необходимо, чтобы возможная работа всех внешних сил была равна работе напряжений на возможных деформациях материала тела. Можно доказать и достаточность этого принципа для равновесия деформируемого тела. Действительно, если предположить наряду со справедливостью (2.5) отсутствие равновесия, то после преобразований, обратных по отношению к выполненным при получении (2.5), приходим к противоречию.

Если на деформируемое тело наложены *идеальные связи*, то (как и в случае абсолютно твердого тела) применение принципа возможных перемещений позволяет не рассматривать *реакции* таких связей. Важной особенностью этого принципа является его справедливость для произвольного закона деформирования материала.

### 2.3. Простейшие примеры применения принципа возможных перемещений

Чтобы использовать обобщенный *принцип возможных перемещений* в виде (2.5) для получения условий равновесия деформируемого тела под действием приложенной внешней нагрузки, необходимо установить связь между *возможными перемещениями* и *возможными деформациями* этого тела, что составляет содержание соответствующей *кинематической гипотезы*. Для иллюстрации использования принципа возможных перемещений в сочетании с выбранной кинематической гипотезой в этом параграфе ограничимся рассмотрением простейших примеров нагружения *стержня*.

Если вдоль произвольной линии перемещать плоскую фигуру так, чтобы ее плоскость была перпендикулярна этой линии, то контур фигуры опишет боковую поверхность *криволинейного стержня*. Эту фигуру называют *поперечным сечением* стержня, которое может быть переменным, если она при движении изменяет свою форму и/или размеры. В частном случае, когда фигура перемещается вдоль прямой, получим *прямолинейный стержень*, а когда перемещение фигуры сопровождается ее

вращением около прямой — **естественно закрученный стержень** (примером такого стержня является спиральное сверло). Прямолинейный стержень (как и криволинейный) может иметь переменное поперечное сечение.

К *расчетной схеме* стержня можно свести многие элементы конструкции технических устройств (например, такие детали машиностроительных конструкций, как болты, шпильки, оси, валы, шатуны). Мостовые фермы и фермы крепления ракетных двигателей к корпусу ракеты состоят из стержней, соединенных между собой клепкой, сваркой или шарнирами. Стержнями являются элементы арматуры железобетонных конструкций.

**Пример 2.1.** Рассмотрим прямолинейный стержень длиной  $L$  и площадью поперечного сечения  $F$ , не изменяющейся вдоль координатной оси  $Ox_1$  с началом отсчета на неподвижно закрепленном торце стержня (рис. 2.2). Второй торец стержня имеет координату  $x_1 = L$  и нагружен растягивающей распределенной *поверхностной силой*

с вектором *плотности*  $\mathbf{p}$ , параллельным оси  $Ox_1$ , т. е.

$$|\mathbf{p}| = p_1,$$

где  $p_1 = \text{const}$  — проекция вектора  $\mathbf{p}$  на координатную ось  $Ox_1$ . Таким образом, суммарная

растягивающая стержень сила  $P = p_1 F$ . Боковая поверхность стержня свободна от нагрузки, а в его объеме  $V = FL$  отсутствуют распределенные объемные силы.

Допустим, что приложенная сила  $P$  растягивает стержень вдоль координатной оси  $Ox_1$  равномерно, причем любое поперечное сечение после *деформирования* остается плоским и перпендикулярным этой оси, а точки  $M \in V$  перемещаются параллельно ей. Тогда в рамках этой *кинематической гипотезы*, называемой **гипотезой плоских сечений**, перемещение вдоль этой оси поперечного сечения, имевшего до деформирования координату  $x_1$ , будет  $u_1(x_1) = u_1(L)x_1/L$ , где  $u_1(L)$  — перемещение торца, к которому приложена нагрузка, а перемещения в любых

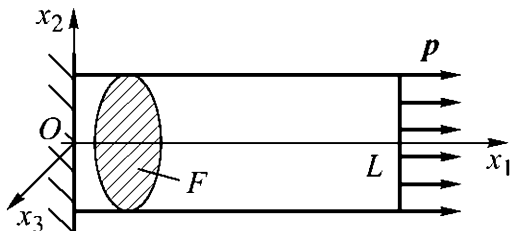


Рис. 2.2

направлениях в плоскости поперечного сечения стержня равны нулю, т. е.

$$u_2(M) = u_3(M) = 0, \quad M \in V.$$

Поэтому в силу соотношений Коши (1.14) линейная деформация

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1(x)}{dx_1} = \frac{u_1(L)}{L}$$

вдоль оси  $Ox_1$  не зависит от положения точки  $M \in V$ . Выраженное через возможное перемещение  $\delta u_1(L)$  торца стержня возможное значение  $\delta \varepsilon_{11} = \delta u_1(L)/L$  деформации  $\varepsilon_{11}$  также не зависит от координат точки  $M \in V$ , а остальные компоненты тензора деформации и их возможные значения равны нулю. В этом случае (2.5) примет вид

$$\int_V \sigma_{11}(M) \frac{\delta u_1(L)}{L} dV(M) = \int_F p_1 \delta u_1(L) dF = p_1 F \delta u_1(L) = P \delta u_1(L).$$

Если предположить, что напряженное состояние материала стержня однозначно определено деформированным состоянием, то в случае не зависящей от положения точки  $M \in V$  линейной деформации  $\varepsilon_{11}$  нормальное напряжение  $\sigma_{11}$  также не зависит от положения этой точки. Таким образом, из последнего равенства получаем  $\sigma_{11} = P/F = p_1$ , что непосредственно следует из равновесия части стержня между торцом, к которому приложена нагрузка, и сечением, перпендикулярным оси  $Ox_1$  при произвольном значении  $x_1 \in (0, L)$ . Если материал стержня изотропный и линейно упругий с продольным модулем упругости  $E$ , то

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}; \quad u_1(L) = L \frac{\sigma_{11}}{E}. \quad \blacklozenge$$

Принятая в примере 2.1 кинематическая гипотеза не учитывает поперечное сужение материала стержня при растяжении. Кроме того, в этом случае предполагают, что реакцию на закрепленном торце стержня можно представить равномерным распределением растягивающей поверхностной силы, вектор плотности которой имеет проекцию  $-p_1 = \text{const}$  на координатную ось  $Ox_1$ . Тогда все поперечные сечения стержня находятся

в равных условиях. Однако если все точки на закрепленном торце неподвижны, то при растяжении стержня уже нельзя считать, что  $\varepsilon_{11} = \text{const}$  и, как следствие,  $\sigma_{11} = \text{const}$ . Более строгое решение задачи методами теории упругости показывает, что при растяжении (или сжатии) стержня особенности закрепления его торцов или приложения нагрузки на торцах оказывают влияние на расстоянии от них порядка характерного размера поперечного сечения стержня. Это позволяет в остальной части стержня считать распределение напряжений однородным по его поперечному сечению. Такое допущение составляет существо **принципа Сен-Венана**. Этот принцип применим и в более общем случае нагружения и закрепления тел произвольной формы.

**Пример 2.2.** Требования принятой в примере 2.1 кинематической гипотезы можно ослабить, допустив произвольность возможных перемещений  $\delta u_2(M)$  и  $\delta u_3(M)$ , а значит, и вариаций всех компонент тензора деформации, за исключением вариации  $\delta \varepsilon_{11}(x_1)$ , связанной с вариацией  $\delta u_1(x_1)$ , т. е. оставив лишь предположение о том, что поперечные сечения стержня остаются плоскими после деформирования. Такое предположение позволяет учесть поперечное сужение материала стержня при растяжении и равносильно условию, что перемещение  $u_1$  всех точек фиксированного поперечного сечения стержня зависит лишь от координаты  $x_1$  этого сечения до деформирования. Одновременно перейдем от стержня с постоянным поперечным сечением к прямолинейному стержню с поперечным сечением площадью  $F(x_1)$ . Тогда из (2.5) с учетом соотношений Коши (1.14) получим

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \sigma_{11}(M) \frac{d\delta u_1(x_1)}{dx_1} + \sigma_{22}(M) \frac{\partial \delta u_2(M)}{\partial x_2} + \sigma_{33}(M) \frac{\partial \delta u_3(M)}{\partial x_3} \right) dV(M) + \\ & + \int_V \left( \sigma_{12}(M) \frac{\partial \delta u_2(M)}{\partial x_1} + \sigma_{13}(M) \frac{\partial \delta u_3(M)}{\partial x_1} \right) dV(M) + \\ & + \int_V \sigma_{23}(M) \left( \frac{\partial \delta u_2(M)}{\partial x_3} + \frac{\partial \delta u_3(M)}{\partial x_2} \right) dV(M) = \\ & = \int_{F(L)} p_1 \delta u_1(L) dF = p_1 F(L) \delta u_1(L) = P \delta u_1(L), \end{aligned} \quad (2.6)$$

поскольку возможная работа на возможных перемещениях  $\delta u_2(L)$  и  $\delta u_3(L)$  равна нулю, так как  $p_2 = p_3 = 0$ .

В силу произвольности  $\delta u_2(M)$  и  $\delta u_3(M)$  и их производных по координатам в левой части (2.6) равны нулю все напряжения, за исключением  $\sigma_{11}(M)$ . Однако теперь это напряжение, вообще говоря, не будет одинаковым во всех точках поперечного сечения стержня. Считая изменения площади  $F$  этого сечения при растяжении стержня малыми и полагая  $dV(M) = F(x_1) dx_1$ , вводим среднее по такому сечению напряжение

$$\bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{F(x_1)} \int_{F(x_1)} \sigma_{11}(M) dF(M), \quad M \in F(x_1)$$

и представляем (2.6) в виде

$$\int_V \sigma_{11}(M) \frac{d\delta u_1(x_1)}{dx_1} dV(M) = \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(x_1) F(x_1) \frac{d\delta u_1(x_1)}{dx_1} dx_1 = P \delta u_1(L).$$

Вычисляя второй интеграл в этом равенстве по частям, находим

$$\begin{aligned} P \delta u_1(L) - \int_0^L \bar{\sigma}_{11}(x_1) F(x_1) \frac{d\delta u_1(x_1)}{dx_1} dx_1 &= P \delta u_1(L) - \\ &- \bar{\sigma}_{11}(L) F(L) \delta u_1(L) + \bar{\sigma}_{11}(0) F(0) \delta u_1(0) + \\ &+ \int_0^L \frac{d(\bar{\sigma}_{11}(x_1) F(x_1))}{dx_1} \delta u_1(x_1) dx_1 = \int_0^L \frac{d(\bar{\sigma}_{11}(x_1) F(x_1))}{dx_1} \delta u_1(x_1) dx_1 = 0, \end{aligned}$$

так как из условия закрепления стержня  $\delta u_1(0) = 0$ , а  $\sigma_{11}(L) = p_1$  и поэтому  $\bar{\sigma}_{11}(L) F(L) = P$ . В силу произвольности  $\delta u_1(x_1)$

$$\frac{d(\bar{\sigma}_{11}(x_1) F(x_1))}{dx_1} = 0,$$

т. е.  $\bar{\sigma}_{11}(x_1) F(x_1) = C = \text{const}$ , причем  $C = p_1 F(L)$ . В итоге

$$\bar{\sigma}_{11}(x_1) F(x_1) = p_1 F(L) = P$$

для всех  $x_1 \in [0, L]$ . ♦

Допущение о сохранении поперечных сечений плоскими при растяжении (или сжатии) стержня с переменной площадью поперечного сечения можно считать приемлемым, если эта площадь изменяется по длине стержня достаточно медленно. Для количественной оценки рассмотрим стержень, боковая поверхность которого образована вращением вокруг его оси некоторой гладкой кривой (рис. 2.3). Двумя поперечными сечениями, расположенными на расстоянии  $dx$ , и цилиндрической поверхностью радиусом  $r$  выделим кольцевой элемент с заштрихованным осевым сечением.

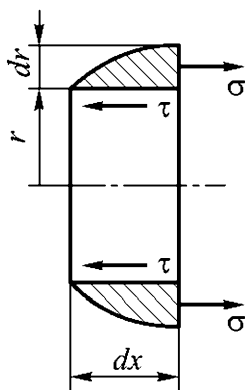


Рис. 2.3

Если в поперечном сечении с координатой  $x + dx$  действовали бы лишь нормальные напряжения  $\sigma$ , то на выделенное кольцо в осевом направлении действовала бы сила  $2\pi\sigma r dr$ , которая может быть уравновешена только силой  $2\pi\tau r dx$  вследствие возникновения касательных напряжений  $\tau = \sigma(dr/dx)$  на цилиндрической поверхности. Однако в силу парности касательных напряжений они возникнут и в поперечном сечении, что исказит его первоначальную плоскую форму. По сравнению с влиянием нормальных напряжений влияние касательных напряжений мало, и поэтому им можно пренебречь, если  $|dr/dx| \ll 1$ .

При оценке прочности стержня действующее в нем наибольшее растягивающее напряжение  $\sigma_{\max}$  сравнивают с **допускаемым** для материала стержня **напряжением**  $[\sigma]$ . Условием прочности будет  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ . Выбор значения  $[\sigma]$  зависит от требований, которые предъявляют к стержню как к силовому элементу конструкции. Если этот элемент сохраняет работоспособность вплоть до разрушения, то принимают  $[\sigma] = \sigma_{в.р}/n_p$ , где  $\sigma_{в.р}$  — **предел прочности** материала стержня при растяжении, определяемый экспериментально по результатам испытания образцов этого материала (обычно образец выбирают в виде стержня с постоянным круглым поперечным сечением — см. 1.4), а  $n_p > 1$  — **коэффициент запаса по прочности**, учитывающий возможные отклонения в худшую сторону условий нагружения, свойств материала и геометрических размеров стержня. Например, при-

нительно к строительным конструкциям выбор значения  $n_p$  осуществляют по СНиПам (строительным нормам и правилам).

При сжатии сравнительно коротких стержней  $[\sigma] = \sigma_{в.с}/n_p$ , где  $\sigma_{в.с}$  — предел прочности материала стержня при сжатии, также определяемый экспериментально. Работоспособность при сжатии достаточно длинного стержня может быть ограничена *потерей устойчивости* прямолинейной формы его равновесия, что требует специального рассмотрения (см. Д.2.1).

Если материал стержня должен работать в упругой области, то  $[\sigma] = \sigma_T/n_T$ , где  $\sigma_T$  — *предел текучести* материала стержня, а  $n_T$  — *коэффициент запаса по текучести*.

**Пример 2.3.** Найдем закон изменения площади поперечного сечения вертикальной колонны высотой  $H$ , обладающей одинаковой в каждом сечении прочностью при сжатии. Пусть к верхнему торцу колонны, от которого вниз идет отсчет координаты  $x_1$ , приложена сжимающая сила  $P_0$ . Материал колонны имеет плотность  $\rho$  и допускаемое напряжение при сжатии  $[\sigma]$ .

В рамках гипотезы плоских сечений с учетом равенства

$$|\mathbf{b}| = b_1 = \rho g F(x_1),$$

где  $F(x_1)$  — искомая зависимость площади поперечного сечения колонны от координаты  $x_1$ , (2.5) примет вид

$$\int_0^H \bar{\sigma}_{11} \delta \left( \frac{du_1(x_1)}{dx_1} \right) F(x_1) dx_1 = P_0 \delta u_1(0) + \int_0^H \rho g F(x_1) \delta u_1(x_1) dx_1. \quad (2.7)$$

Полагая, что сжимающее нормальное напряжение, среднее по поперечному сечению колонны,  $\bar{\sigma}_{11} = -[\sigma]$ , вычисляем интеграл в левой части (2.7) по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^H \bar{\sigma}_{11} \delta \left( \frac{du_1(x_1)}{dx_1} \right) F(x_1) dx_1 &= [\sigma] (F(0) \delta u_1(0) - F(H) \delta u_1(H)) + \\ &+ [\sigma] \int_0^H \frac{dF(x_1)}{dx_1} \delta u_1(x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Поскольку  $\delta u_1(H) = 0$  и  $F(0) = P_0/[\sigma]$ , вместо (2.7) получаем

$$[\sigma] \int_0^H \frac{dF(x_1)}{dx_1} \delta u_1(x_1) dx_1 = \int_0^H \rho g F(x_1) \delta u_1(x_1) dx_1.$$

Отсюда в силу произвольности вариации  $\delta u_1(x_1)$  следует обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dF(x_1)}{dx_1} = \frac{\rho g}{[\sigma]} F(x_1)$$

с разделяющимися переменными. Его решением с учетом условия  $F(0) = P_0/[\sigma]$  является экспоненциальная зависимость

$$F(x_1) = \frac{P_0}{[\sigma]} \exp\left(\frac{\rho g x_1}{[\sigma]}\right).$$

При одинаковом нормальном напряжении в каждом сечении колонны можно считать одинаковой и среднюю деформацию. Поэтому осадка колонны высотой  $H$  из линейно упругого изотропного материала с продольным модулем упругости  $E$  составит  $\Delta H = H[\sigma]/E$ . ♦

### Дополнение 2.1. Математическая модель криволинейного стержня

Пусть боковая поверхность *криволинейного стержня* описана контуром плоской фигуры с переменной (в общем случае) площадью  $F$  поперечного сечения при движении этой фигуры вдоль некоторой кривой. В плоскости фигуры выберем прямоугольную систему координат  $O\xi_2\xi_3$ . Точку  $C$  с координатами

$$\xi_{2C} = \frac{S_{\xi_3}}{F} = \frac{1}{F} \int_F \xi_2 dF; \quad \xi_{3C} = \frac{S_{\xi_2}}{F} = \frac{1}{F} \int_F \xi_3 dF,$$

где  $S_{\xi_3}$  и  $S_{\xi_2}$  — *статические моменты сечения* площадью  $F$  относительно осей  $O\xi_3$  и  $O\xi_2$  соответственно, принято называть

центром тяжести этой площади, а применительно к поперечному сечению стержня — **центром тяжести сечения** [38]. Если начало координат совместить с точкой  $C$ , то  $S_{\xi_3} = S_{\xi_2} = 0$ . В этом случае оси координат называют **центральными осями сечения**. Если при движении фигуры ее плоскость перпендикулярна кривой и точка  $C$  остается на этой кривой, то кривую называют **осевой линией стержня**.

Пусть  $O\xi_2$  и  $O\xi_3$  являются центральными осями сечения площадью  $F$ . **Центробежный момент инерции сечения**

$$J_{\xi_2\xi_3} = \int_F \xi_2\xi_3 dF$$

обращается в нуль поворотом этих осей на угол

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2J_{\xi_2\xi_3}}{J_{\xi_3} - J_{\xi_2}} \right).$$

Здесь  $J_{\xi_2}$  и  $J_{\xi_3}$  — **осевые моменты инерции сечения** относительно осей  $O\xi_2$  и  $O\xi_3$  соответственно:

$$J_{\xi_2} = \int_F \xi_3^2 dF; \quad J_{\xi_3} = \int_F \xi_2^2 dF.$$

При новом положении  $\tilde{O}\tilde{\xi}_2$  и  $\tilde{O}\tilde{\xi}_3$  осей, которые называют **главными центральными**, осевые моменты инерции достигают экстремальных значений  $J_2$  и  $J_3$ , называемых **главными осевыми моментами инерции сечения**. Их сумма дает **полярный момент инерции сечения**  $J_p$ , не зависящий от ориентации центральных осей.

При построении **математических моделей** криволинейных стержней в качестве **кинематической гипотезы** обычно принимают, что множество точек, расположенных в плоскости любого поперечного сечения стержня до его деформирования, после деформирования по-прежнему образует плоскость, перпендикулярную деформированной осевой линии, т. е. не учитывают **деформации сдвига**. Кроме того, считают размеры поперечного сечения малыми по сравнению с длиной осевой линии и ее

радиусом кривизны, пренебрегают *относительными удлинени-*  
*ями*, перпендикулярными этой линии, и используют *принцип*  
*Сен-Венана*, утверждающий применительно к данному случаю,  
что различные, но статически эквивалентные нагрузки вызывают  
в стержне одинаковые напряженные состояния (за исключе-  
нием зон вблизи точек приложения нагрузки; размеры этих зон  
порядка размеров поперечного сечения) [33].

В деформированном состоянии криволинейного стержня дли-  
ной  $L$  свяжем его осевую линию с репером  $\{e_i\}$  подвижной  
системы координат, образующим правую тройку ортогональных  
базисных векторов (ортов)  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Для этого направим  
орт  $e_1$  по касательной к осевой линии в сторону возрастания ко-  
ординаты  $s$ , отсчитываемой вдоль этой линии, изменением длины  
которой пренебрегаем (рис. 2.4). В поперечном сечении стержня  
орт  $e_1$  задает направление оси  $\tilde{O}\tilde{\xi}_1$ , а орты  $e_2$  и  $e_3$  — направления  
главных осей этого сечения  $\tilde{O}\tilde{\xi}_2$  и  $\tilde{O}\tilde{\xi}_3$  соответственно.

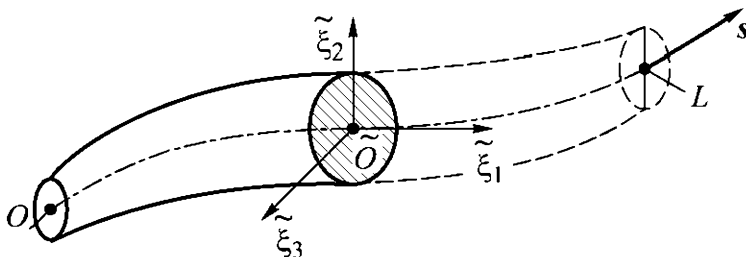


Рис. 2.4

В общем случае на стержень могут действовать распределен-  
ные вдоль осевой линии момент  $m^\circ(s)$  и нагрузка, направление  
и интенсивность которой определяет векторная функция  $q^\circ(s)$ ,  
причем линии действия этой нагрузки пересекают осевую ли-  
нию. Кроме того, в сечениях с координатами  $s_\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \overline{1, N_p}$ , может  
быть приложено  $N_p$  *сосредоточенных сил*  $P^{(\varepsilon)}$ , линии действия  
которых также пересекают осевую линию, а в сечениях с ко-  
ординатами  $s_\zeta$ ,  $\zeta = \overline{1, N_M}$ , — соответственно  $N_M$  моментов  $M^{(\zeta)}$ .  
На концах стержня при  $s = 0$  и  $s = L$  могут быть заданы силы  
 $P^{(0)}$ ,  $P^{(L)}$  и моменты  $M^{(0)}$ ,  $M^{(L)}$ . Все перечисленные нагрузки  
принято называть *внешними силовыми факторами*.

Рассмотрим поперечное сечение с координатой  $s$ , точка осе-  
вой линии которого имеет радиус-вектор  $x(s)$  в неподвижной

системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Если в исходном состоянии стержня положение этой точки определял радиус-вектор  $\mathbf{x}^\circ(s)$ , то вектор ее перемещения  $\mathbf{u}(s) = \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^\circ(s)$ . Тогда

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} - \frac{d\mathbf{x}^\circ}{ds} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1^\circ, \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{e}_1^\circ$  — орт, касательный к осевой линии в исходном состоянии стержня и входящий в репер подвижной системы координат с осями  $\tilde{O}\tilde{\xi}_i^\circ$ .

Для перехода от этого репера к реперу  $\{\mathbf{e}_i\}$  помимо вектора  $\mathbf{u}$  нужно знать углы  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , поворота осей  $\tilde{O}\tilde{\xi}_j$  относительно осей  $\tilde{O}\tilde{\xi}_i^\circ$  (рис. 2.5). От этих углов зависят элементы  $\alpha_{ij}$  матрицы  $A$  поворота репера [13]:

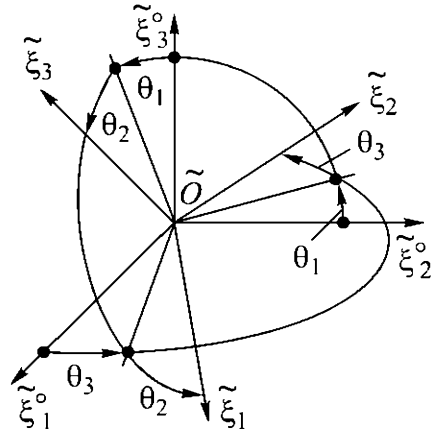


Рис. 2.5

$$\alpha_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^\circ = \cos \theta_2 \cos \theta_3;$$

$$\alpha_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^\circ = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2;$$

$$\alpha_{13} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3^\circ = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2;$$

$$\alpha_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1^\circ = -\sin \theta_3;$$

$$\alpha_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^\circ = \cos \theta_1 \cos \theta_3;$$

$$\alpha_{23} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3^\circ = \sin \theta_1 \cos \theta_3;$$

$$\alpha_{31} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1^\circ = \sin \theta_2 \cos \theta_3;$$

$$\alpha_{32} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2^\circ = \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_2;$$

$$\alpha_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\circ = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3.$$

При перемещении репера  $\{\mathbf{e}_i\}$  вдоль осевой линии стержня так, чтобы один из ортов (пусть для определенности  $\mathbf{e}_1$ ) оставался касательным к ней, происходит поворот репера. Производную орта  $\mathbf{e}_i$  по длине  $s$  дуги кривой представим в виде разложения

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \kappa_{ij} \mathbf{e}_j,$$

где  $\kappa_{ij}$  — элементы матрицы третьего порядка.

Поскольку  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, то с учетом равенства

$$\mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_j}{ds} = \mathbf{e}_i \cdot \kappa_{jk} \mathbf{e}_k = \kappa_{ji}$$

можно записать

$$\frac{d(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)}{ds} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{d\mathbf{e}_j}{ds} + \mathbf{e}_j \cdot \frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \kappa_{ji} + \kappa_{ij} = 0,$$

т.е. эта матрица является кососимметрической ( $\kappa_{ij} = -\kappa_{ji}$ ). Вместо нее можно рассматривать вектор  $\boldsymbol{\kappa} = \kappa_i^* \mathbf{e}_i$ , где

$$\kappa_1^* = \kappa_{32}, \quad \kappa_2^* = \kappa_{13}, \quad \kappa_3^* = \kappa_{21},$$

или

$$\kappa_{ij} = e_{ijk} \kappa_j^*.$$

Здесь  $e_{ijk}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ , — символ **Левы-Чивиты** ( $e_{ijk} = 1$ , если перестановка индексов  $ijk$  четная, т.е. 123, 312 или 231;  $e_{ijk} = -1$ , если она нечетная, т.е. 132, 213 или 321; и, наконец,  $e_{ijk} = 0$ , если среди индексов есть одинаковые). Тогда с учетом равенства [13]

$$\mathbf{c}_i = e_{ijk} b_j d_k$$

для проекций вектора  $\mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$  можно написать

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \kappa_{ij} \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_i, \quad (2.9)$$

а для произвольного вектора  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$  —

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds} = \frac{da_i}{ds} \mathbf{e}_i + a_i \frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \frac{da_i}{ds} \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{a}. \quad (2.10)$$

Если орты  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  направить соответственно вдоль главной нормали и бинормали осевой линии стержня, то из (2.9) следуют **формулы Серре — Френе** [14]:

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \kappa \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{\tilde{r}}; \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \tilde{\kappa} \mathbf{e}_3 - \kappa \mathbf{e}_1; \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\tilde{\kappa} \mathbf{e}_2,$$

где  $\kappa$ ,  $\tilde{r}$  и  $\tilde{\kappa}$  — кривизна, радиус кривизны и кручение осевой линии. В этом случае

$$\kappa = \tilde{\kappa}e_1 + \kappa e_3$$

называют **вектором Дарбу**. Для плоской осевой линии  $\tilde{\kappa} = 0$ , а для прямолинейной  $\tilde{\kappa} = \kappa = 0$ .

Используя (2.10), представим (2.8) в виде

$$\frac{du}{ds} = \frac{du_i}{ds} e_i + \kappa \times u = (1 - \alpha_{11})e_1 - \alpha_{21}e_2 - \alpha_{31}e_3, \quad (2.11)$$

где  $u_i$  — проекции вектора  $u$  на оси системы координат с репером  $\{e_i\}$ .

Вектор  $\kappa$  определяет кривизну и кручение осевой линии стержня в деформированном состоянии и связан с аналогичным вектором  $\kappa^o = \kappa_j^o e_j^o$  для исходного состояния стержня соотношением [22, 33]

$$\kappa = \left( \beta_{ij} \frac{d\theta_j}{ds} + \alpha_{ij} \kappa_j^o \right) e_i, \quad (2.12)$$

где

$$\beta_{11} = \cos \theta_2 \cos \theta_3; \quad \beta_{12} = \beta_{23} = \beta_{32} = 0; \quad \beta_{13} = -\sin \theta_2;$$

$$\beta_{21} = -\sin \theta_3; \quad \beta_{22} = 1; \quad \beta_{31} = \sin \theta_2 \cos \theta_3; \quad \beta_{33} = \cos \theta_2;$$

$\theta_j$  — проекции вектора  $\theta = \theta_j e_j$  поворота поперечного сечения стержня.

В качестве *возможных перемещений* выберем векторы

$$\delta u = e_i \delta u_i \quad \text{и} \quad \delta \theta = e_i \delta \theta_i.$$

При использовании *принципа возможных перемещений* левую часть (2.5) можно представить как *возможную работу внутренних силовых факторов*  $Q$  и  $M$  на возможных перемещениях соответственно  $\delta u$  и  $\delta \theta$ . Для элемента стержня длиной  $ds$  при фиксированном поперечном сечении с координатой  $s$  приращение такой работы

$$d\delta A_\sigma = (Q + dQ) \cdot d\delta u + (M + dM) \cdot d\delta \theta.$$

Здесь вектор равнодействующей, приложенной к точке осевой линии, и вектор момента

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(s) &= \int_{F(s)} \sigma_{1i} \mathbf{e}_i dF; \\ \mathbf{M}(s) &= \int_{F(s)} (\tilde{\xi}_i \mathbf{e}_i \times \sigma_{1j} \mathbf{e}_j) dF = \int_{F(s)} e_{ijk} \tilde{\xi}_i \sigma_{1j} \mathbf{e}_k dF, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\sigma_{1i}$  — компоненты *тензора напряжений* в поперечном сечении стержня.

Кроме того, необходимо учесть приращение возможной работы момента  $(-\mathbf{e}_1 ds) \times \mathbf{Q}$ , создаваемого силой  $\mathbf{Q}$  относительно точки осевой линии с координатой  $s + ds$ , на возможном перемещении  $\delta\theta$  сечения с координатой  $s$ . В итоге, пренебрегая величинами более высокого порядка малости, получаем

$$\delta A_\sigma = \int_0^L \left( \mathbf{Q} \cdot \frac{d\delta\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{M} \cdot \frac{d\delta\theta}{ds} - (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q}) \cdot \delta\theta \right) ds$$

и после интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} \delta A_\sigma &= \mathbf{Q}(L) \cdot \delta\mathbf{u}(L) - \mathbf{Q}(0) \cdot \delta\mathbf{u}(0) + \mathbf{M}(L) \cdot \delta\theta(L) - \mathbf{M}(0) \cdot \delta\theta(0) - \\ &\quad - \int_0^L \left( \frac{d\mathbf{Q}}{ds} \cdot \delta\mathbf{u} + \left( \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} \right) \cdot \delta\theta \right) ds. \end{aligned}$$

Возможная работа заданной внешней нагрузки, действующей на стержень,

$$\begin{aligned} \delta A^\circ &= \mathbf{P}^{(0)} \cdot \delta\mathbf{u}(0) + \mathbf{P}^{(L)} \cdot \delta\mathbf{u}(L) + \mathbf{M}^{(0)} \cdot \delta\theta(0) + \mathbf{M}^{(L)} \cdot \delta\theta(L) + \\ &\quad + \int_0^L \left( \mathbf{q}^\circ \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{m}^\circ \cdot \delta\theta + \sum_{\varepsilon=1}^{N_p} \mathbf{P}^{(\varepsilon)} \cdot \delta\mathbf{u} \delta(s-s_\varepsilon) + \sum_{\varepsilon=1}^{N_M} \mathbf{M}^{(\varepsilon)} \cdot \delta\theta \delta(s-s_\varepsilon) \right) ds, \end{aligned}$$

где  $\delta(s-s_\varepsilon)$ ,  $\delta(s-s_\zeta)$  — *функция Дирака*, обладающая по отношению к непрерывной функции  $f(z)$  свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \delta(z-z_0) dz = f(z_0).$$

Согласно принципу возможных перемещений в виде  $\delta A_\sigma = \delta A^\circ$ , объединяя слагаемые при произвольных возможных перемещениях  $\delta u(s)$ ,  $\delta \theta(s)$ ,  $s \in (0, L)$ , и используя (2.10), получаем **уравнения равновесия стержня**

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} = \frac{dQ_i}{ds} \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{Q} = -\mathbf{q}^\circ - \sum_{\varepsilon=1}^{N_p} \mathbf{P}^{(\varepsilon)} \delta(s - s_\varepsilon); \quad (2.14)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{dM_i}{ds} \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{M} = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q} - \mathbf{m}^\circ - \sum_{\varsigma=1}^{N_M} \mathbf{M}^{(\varsigma)} \delta(s - s_\varsigma)$$

и условия на концах стержня

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}(0) + \mathbf{P}^{(0)}) \cdot \delta u(0) &= 0; & (\mathbf{M}(0) + \mathbf{M}^{(0)}) \cdot \delta \theta(0) &= 0; \\ (\mathbf{Q}(L) - \mathbf{P}^{(L)}) \cdot \delta u(L) &= 0; & (\mathbf{M}(L) - \mathbf{M}^{(L)}) \cdot \delta \theta(L) &= 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $Q_i$  и  $M_i$  — проекции векторов  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$  на оси  $\tilde{O}\tilde{\xi}_i$ .

Если на концах стержня заданы только *кинематические граничные условия*, т.е. заданы перемещения точек осевой линии и ее углы поворота, то  $\delta u = \mathbf{0}$ ,  $\delta \theta = \mathbf{0}$  и все равенства в (2.15) удовлетворяются автоматически. И наоборот, если торец стержня, например при  $s = L$ , не закреплен, то векторы  $\delta u$ ,  $\delta \theta$  произвольны и должны быть заданы *силовые граничные условия*  $\mathbf{Q}(L) = \mathbf{P}^{(L)}$  и  $\mathbf{M}(L) = \mathbf{M}^{(L)}$ . Аналогично они должны быть заданы и на торце при  $s = 0$ , но с учетом того, что орт  $\mathbf{e}_1$  репера  $\{\mathbf{e}_i\}$  направлен в сторону возрастания координаты  $s$ , а внешняя нормаль к плоскости этого торца — в противоположную сторону. В связи с этим в проекциях на оси  $\tilde{O}\tilde{\xi}_i$  имеем  $Q_i(0) = |P_i^{(0)}|$  и  $M_i(0) = |M_i^{(0)}|$ . В общем случае при смешанных граничных условиях из (2.15) следует, что для каждого значения  $i = 1, 2, 3$  может быть задано  $u_i(0)$  либо  $P_i^{(0)}$ ,  $u_i(L)$  либо  $P_i^{(L)}$ ,  $\theta_i(0)$  либо  $M_i^{(0)}$ ,  $\theta_i(L)$  либо  $M_i^{(L)}$ .

Систему четырех векторных уравнений (2.11), (2.12) и (2.14) с неизвестными  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  необходимо дополнить соотношением, связывающим между собой вектор  $\mathbf{M}$  и вектор  $\Delta \boldsymbol{\kappa}$ , который имеет проекции  $\Delta \boldsymbol{\kappa}_i = \boldsymbol{\kappa}_i - \boldsymbol{\kappa}_i^\circ$  на оси  $\tilde{O}\tilde{\xi}_i$ . *Гипотеза плоских сечений* и допущение о малости размеров поперечного сечения по сравнению с радиусом кривизны осевой линии

позволяют в случае материала стержня, подчиняющегося *обобщенному закону Гука*, установить линейную связь между этими векторами. Из второго равенства (2.13) находим

$$M_2 = \int_F \tilde{\xi}_3 \sigma_{11} dF; \quad M_3 = - \int_F \tilde{\xi}_2 \sigma_{11} dF. \quad (2.16)$$

Здесь  $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$  — *нормальное напряжение* в поперечном сечении, где  $E$  — *продольный модуль упругости* материала стержня;  $\varepsilon_{11}$  — относительное удлинение в направлении оси  $\tilde{O}\tilde{\xi}_1$ :

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{d\tilde{\xi}_1} + \tilde{\xi}_3 \Delta \kappa_2 - \tilde{\xi}_2 \Delta \kappa_3.$$

Тогда, учитывая, что оси  $\tilde{O}\tilde{\xi}_k$ ,  $k = 2, 3$ , главные и центральные, согласно (2.16), получаем

$$M_2 = EJ_2 \Delta \kappa_2; \quad M_3 = EJ_3 \Delta \kappa_3. \quad (2.17)$$

Величину  $EJ_k$  называют *жесткостью при изгибе* стержня *изгибающим моментом*  $M_k$ . Для произвольной формы поперечного сечения стержня *крутящий момент*  $M_1 = \mu J_\kappa \Delta \kappa_1$ , где  $\mu$  — *модуль сдвига* материала стержня;  $J_\kappa$  — геометрический фактор *жесткости* стержня *при кручении*. Для сечения, обладающего центральной симметрией (например, круглого или кольцевого) и сохраняющего ее при деформировании стержня,  $J_\kappa = J_p$  (см. **3.1**). Ясно, что для стержня с переменным поперечным сечением значения  $J_k$  и  $J_\kappa$  зависят от  $s$ .

При малых значениях углов  $\theta_j$  можно принять

$$\beta_{11} = \beta_{33} = 1, \quad \beta_{21} = -\theta_3, \quad \beta_{31} = -\beta_{13} = \theta_2,$$

а также

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1, \quad \alpha_{12} = -\alpha_{21} = \theta_3,$$

$$\alpha_{13} = -\alpha_{31} = -\theta_2, \quad \alpha_{23} = -\alpha_{32} = \theta_1.$$

При этом будет малым и модуль вектора  $\Delta \boldsymbol{\kappa}$ , поэтому  $\kappa_i \approx \kappa_i^0$  и соотношения для производных векторов  $\boldsymbol{u}$ ,  $\boldsymbol{Q}$  и  $\boldsymbol{M}$  по  $s$  в (2.11) и (2.14) становятся линейными.

Если осевая линия криволинейного стержня в исходном состоянии является плоской кривой, то  $\kappa_1^0 = \kappa_2^0 = 0$  и в случае, когда при деформировании стержня она остается плоской,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ . Тогда из (2.11), (2.12), (2.14) и (2.17) при отсутствии сосредоточенных сил и моментов следует

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{ds} - u_2 \kappa_3 + \cos \theta_3 &= 1; & \frac{du_2}{ds} + u_1 \kappa_3 - \sin \theta_3 &= 0; \\ \kappa_3 - \frac{d\theta_3}{ds} &= \kappa_3^0; & \kappa_3 - \frac{M_3}{EJ_3} &= \kappa_3^0; & \frac{dQ_1}{ds} - Q_2 \kappa_3 + q_1^0 &= 0; \\ \frac{dQ_2}{ds} + Q_1 \kappa_3 + q_2^0 &= 0; & \frac{dM_3}{ds} + Q_2 + m_3^0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

При малом значении угла  $\theta_3$  уравнения (2.18) становятся линейными, если принять  $\cos \theta_3 \approx 1$ ,  $\sin \theta_3 \approx \theta_3$  и  $\kappa_3 \approx \kappa_3^0$ .

Для прямолинейного стержня в (2.12)  $\kappa_j^0 = 0$ . Если при его деформировании осевая линия остается плоской, то в третьем и четвертом уравнениях системы (2.18) следует положить  $\kappa_3^0 = 0$  и, исключив из них  $\kappa_3$ , записать

$$\frac{d\theta_3}{ds} = \frac{M_3}{EJ_3}. \quad (2.19)$$

При малом значении угла  $\theta_3$  можно принять  $\sin \theta_3 \approx \theta_3$  и  $ds \approx dx_1$ , где  $x_1$  — координата поперечного сечения стержня, отсчитываемая вдоль осевой линии недеформированного прямолинейного стержня. Тогда из второго уравнения (2.18), считая  $u_1$  пренебрежимо малым, находим  $du_2/dx_1 \approx \theta_3$ , так что это выражение можно представить в виде

$$\frac{d^2 u_2}{dx_1^2} = \frac{M_3}{EJ_3}. \quad (2.20)$$

**Пример 2.4.** Пусть шарнирно закрепленный стержень длиной  $L$  сжат силой  $P$ , линия действия которой совпадает с осью недеформированного прямолинейного стержня (рис. 2.6).

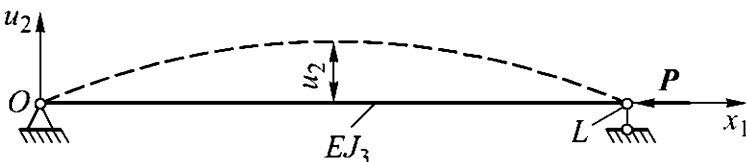


Рис. 2.6

При отклонении осевой линии от исходного положения (штриховая линия на рис. 2.6)  $M_3 = -Pu_2$  и в случае  $EJ_3 = \text{const}$  общее решение (2.20) имеет вид

$$u_2(x_1) = C_1 \sin(\alpha x_1) + C_2 \cos(\alpha x_1),$$

где  $\alpha = \sqrt{P/(EJ_3)}$ .

Поскольку  $u_2(0) = u_2(L) = 0$ , то

$$C_2 = 0 \quad \text{и} \quad C_1 \sin(\alpha L) = 0.$$

Отсюда следует, что наряду с сохранением прямолинейной формы равновесия ( $C_1 = 0$ ) возможны положения равновесия, соответствующие значениям  $\alpha_n L = n\pi$ , что отвечает значениям силы  $P_n = n^2 \pi^2 EJ_3 / L^2$ . Наименьшее значение  $P_1 = P_k = \pi^2 EJ_3 / L^2$ , для которого существует отличная от прямолинейной форма равновесия стержня, называют **первой критической силой**, или **эйлеровой силой** [38]. При этом  $n = 1$  и осевая линия принимает форму полуволны синусоиды. В этом случае говорят, что произошла **потеря устойчивости** прямолинейной формы равновесия стержня. При  $P \in [P_n, P_{n+1})$  возможно равновесие, когда осевая линия принимает форму  $n$  полуволн синусоиды.

Рассмотренное решение линейного уравнения (2.20) не позволяет при потере устойчивости стержня найти наибольшее отклонение осевой линии от исходного положения. Определить зависимость этого отклонения от значения силы  $P$  можно из решения нелинейного уравнения

$$\frac{d^2 u_2}{dx_1^2} \left( 1 + \left( \frac{du_2}{dx_1} \right)^2 \right)^{-3/2} + Pu_2 = 0,$$

учитывающего отличие от единицы знаменателя выражения в скобках, которое определяет кривизну  $\kappa_3$ . Решение этого уравнения при различных условиях закрепления и нагружения стержня (в том числе плоского криволинейного) удастся выразить через эллиптические интегралы первого и второго рода [28]. Для расчетной схемы, изображенной на рис. 2.6, такое решение рассмотрено в Д.2.2. ♦

## Дополнение 2.2. Эластика Эйлера

В 1744 году швейцарский ученый и член ряда европейских академий наук (в том числе и Петербургской) Л. Эйлер (1707–1783) сформулировал задачу для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), описывающего зависимость  $u_2(x_1)$  отклонения *осевой линии прямолинейного стержня* от продольной координаты  $x_1$  при *потере устойчивости* его прямолинейной формы равновесия под действием сжимающей силы  $P$ . Решение этой задачи для стержня из *изотропного линейно упругого материала* получило название *эластики Эйлера*. Рассмотрим путь решения этой задачи.

В соответствии с *расчетной схемой*, изображенной на рис. 2.6, (2.19) можно представить в виде ОДУ

$$\frac{d\theta_3}{ds} = -\frac{Pu_2}{EJ_3}, \quad (2.21)$$

где  $\theta_3$  — угол поворота *поперечного сечения* стержня после потери устойчивости, равный углу наклона касательной к кривой, описываемой зависимостью  $u_2(x_1)$ ;  $s$  — длина дуги этой кривой, отсчитываемая от начала системы координат  $Ox_1x_2$ ;  $EJ_3$  — *жесткость* стержня при изгибе, которая включает *продольный модуль упругости*  $E$  материала и *осевой момент инерции сечения*  $J_3$  относительно оси  $Ox_3$ , перпендикулярной координатной плоскости  $x_1Ox_2$ .

В выбранной системе координат  $du_2/ds = \sin\theta_3$ , поэтому дифференцирование (2.21) по  $s$  дает

$$\frac{d^2\theta_3}{ds^2} = -\alpha^2 \sin\theta_3,$$

или

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{d\theta_3}{ds} \right)^2 = -2\alpha^2 \sin\theta_3 \frac{d\theta_3}{ds},$$

где  $\alpha^2 = P/(EJ_3)$ . После интегрирования получим

$$\left( \frac{d\theta_3}{ds} \right)^2 = 2\alpha^2 (\cos\theta_3 - \cos\theta_0). \quad (2.22)$$

Здесь  $\theta_0$  — значение  $\theta_3$  в начале координат, где в силу расположения неподвижной шарнирной опоры (см. рис. 2.6)  $d\theta_3/ds = 0$ .

Используем формулу

$$\cos \theta_3 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_3}{2}$$

и замену переменной, положив при условии  $|\theta_3| \leq \theta_0$

$$\sin \frac{\theta_3}{2} = \sin \varphi \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad (2.23)$$

и вместо (2.22) запишем

$$\frac{d\theta_3}{ds} = \pm 2\alpha \cos \varphi \sin \frac{\theta_0}{2},$$

а продифференцировав (2.23), —

$$\frac{d\theta_3}{d\varphi} = \frac{2 \cos \varphi}{\cos(\theta_3/2)} \sin \frac{\theta_0}{2}.$$

Из двух последних равенств с учетом (2.23) следует

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\alpha \cos \frac{\theta_3}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{ds} = -\alpha \sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 \varphi}, \quad (2.24)$$

где  $k_*^2 = \sin^2(\theta_0/2)$  (в (2.24) выбран знак «минус», поскольку при  $s = 0$  имеем  $\theta_3 = \theta_0$  и, согласно (2.23),  $\varphi = \pi/2$ , а при  $s > 0$   $d\theta_3/ds < 0$  и, следовательно,  $d\varphi/ds < 0$ ).

После интегрирования (2.24) получим

$$s = -\frac{1}{\alpha} \int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{F(\pi/2, k_*) - F(\varphi, k_*)}{\alpha}, \quad (2.25)$$

где  $F(\pi/2, k_*)$  — *полный эллиптический интеграл первого рода*;  $F(\varphi, k_*)$  — *эллиптический интеграл первого рода* в форме, предложенной французским математиком А.М. Лежандром (1752–1833):

$$F(\varphi, k_*) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Первоначальную длину  $L$  стержня после потери устойчивости можно считать неизменной. Поэтому из условия симметрии при  $s = L/2$  имеем  $\theta = 0$ , что, согласно (2.23), соответствует значению  $\varphi = 0$ . Тогда из (2.25) следует

$$\alpha \frac{L}{2} = F(\pi/2, k_*).$$

Наименьшее значение  $F(\pi/2, 0) = \pi/2$  будет при  $k_* = 0$ , что соответствует значению *эйлеровой* (или *первой критической*) силы  $P_k = \pi^2 EJ_3/L^2$  (см. Д.2.1). При  $P > P_k$  из равенства

$$\alpha \frac{L}{2} = L \sqrt{\frac{P}{EJ_3}} = F\left(\frac{\pi}{2}, k_*\right)$$

можно найти значение  $k_*$ , называемое *модулем эллиптического интеграла*, а затем и угол  $\theta_0 = 2 \arcsin k_*$ .

Найденное значение  $k_*$  позволяет построить зависимость  $u_2(x_1)$  в параметрическом виде, используя равенства

$$\frac{du_2}{ds} = \sin \theta; \quad \frac{dx_1}{ds} = \cos \theta$$

и считая, что подвижная шарнирная опора на рис. 2.6 после потери устойчивости перемещается в горизонтальном направлении.

Правую часть первого из этих равенств, учитывая (2.24), можно представить следующим образом:

$$\sin \theta_3 = 2 \sin \frac{\theta_3}{2} \cos \frac{\theta_3}{2} = 2 \frac{k_*}{\alpha} \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}.$$

Тогда получим

$$\frac{du_2}{d\varphi} = -2 \frac{k_*}{\alpha} \sin \varphi$$

и, поскольку  $u_2 = 0$  при  $\varphi = \pi/2$ , после интегрирования найдем

$$u_2 = 2 \frac{k_*}{\alpha} \cos \varphi.$$

Преобразуем теперь второе равенство с учетом (2.23) и (2.24):

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos \theta = 2 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1 = -2 \frac{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 \varphi}}{\alpha} + \frac{1/\alpha}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Поскольку  $x_1 = 0$  при  $\varphi = \pi/2$ , интегрирование дает

$$\alpha x_1 = 2E\left(\frac{\pi}{2}, k_*\right) - 2E(\varphi, k_*) - F\left(\frac{\pi}{2}, k_*\right) + F(\varphi, k_*),$$

где  $E(\pi/2, k_*)$  — **полный эллиптический интеграл второго рода**;  $E(\varphi, k_*)$  — **эллиптический интеграл второго рода** в форме Лежандра [8].

На рис. 2.7 представлены зависимости  $\bar{u}_2(\bar{x}_1)$ , где

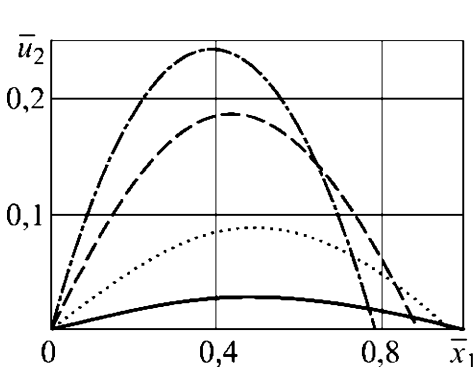


Рис. 2.7

$$\bar{u}_2 = \frac{u_2}{L} \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L},$$

для различных значений

$$\beta = \left(\alpha \frac{L}{\pi}\right)^2 = \frac{P}{P_{\text{кр}}}$$

(сплошная кривая соответствует значению  $\beta = 1,001$ , пунктирная —  $\beta = 1,01$ , штриховая —  $\beta = 1,05$ , а штрихпунктирная —  $\beta = 1,1$ ; при этом безразмерная координата  $\bar{x}_1^0$  подвижной шарнирной опоры равна соответственно 0,9975, 0,9754, 0,8835 и 0,7821, а наибольший относительный прогиб  $\bar{u}_2^*$  стержня — соответственно 0,0284, 0,0885, 0,1854 и 0,2424).

Полное рассмотрение задачи об эластике Эйлера допускает возможность с возрастанием значения  $P$  самопересечения осевой линии стержня и возникновения на ней точек перегиба. Такое решение задачи можно найти, например, в [28].

### Дополнение 2.3. Математические модели нити и мембраны

Под **нитью** в прикладной механике понимают *стержень*, лишенный жесткости при изгибе и кручении [32]. В связи с этим **математическая модель** нити является частным случаем рассмотренной в Д.2.1 математической модели стержня и включает первое из уравнений равновесия (2.14) с первым и третьим

граничными условиями (2.15), а также кинематические соотношения (2.11) и (2.12). Для замыкания математической модели необходимо привлечь соотношение, связывающее нормальное напряжение вдоль продольной оси нити с деформацией этой оси (в частности, в качестве такого соотношения может быть использован закон Гука). На практике часто применяют математические модели нити, в которых пренебрегают такой деформацией, т. е. считают нить нерастяжимой. Используем принцип возможных перемещений для построения математической модели нерастяжимой нити с постоянным натяжением вдоль ее продольной оси.

Пусть один конец невесомой нити закреплен в точке  $A$  (рис. 2.8), в точке  $B$  нить перекинута через блок (без трения) весьма малого диаметра, а к ее второму концу подвешен груз, создающий постоянное натяжение  $N$ , измеряемое в ньютонах (Н). На участке  $AB$  на нить действует распределенная нагрузка интенсивностью  $q(x_1)$ , измеряемая в ньютонах на метр (Н/м) и направленная по нормали к изогнутой продольной оси нити.

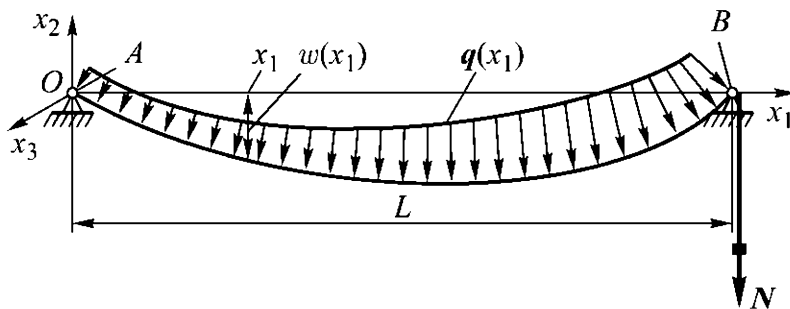


Рис. 2.8

К такой же расчетной схеме можно свести протяженную в направлении координатной оси  $Ox_3$  тонкую нерастяжимую пленку, один край которой закреплен, а ко второму краю приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $N^* = \text{const}$ , измеряемая в ньютонах на метр (Н/м). В этом случае аналогом  $q(x_1)$  будет давление  $p(x_1)$ , измеряемое в паскалях ( $\text{Па} = \text{Н/м}^2$ ).

Под действием нагрузки в положении равновесия вертикальное перемещение точек нити определяет искомая зависимость  $w(x_1)$ .

При действии распределенной нагрузки на элементарном участке  $ds$  дуги продольной оси нити:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{d\omega}{dx_1}\right)^2} dx_1$$

(рис. 2.9) возникает сила, вертикальная составляющая которой равна  $q(x_1) dx_1$ .

Элементарная возможная работа этой составляющей на возможном перемещении  $\delta\omega(x_1)$  равна  $q(x_1)\delta\omega(x_1)dx_1$ . Для нерастяжимой нити ее продольная деформация  $\varepsilon \equiv 0$ , т. е.  $\delta\varepsilon = 0$ , и поэтому работа силы натяжения на возможной деформации  $\delta\varepsilon$  также равна нулю, а возможная работа распределенной нагрузки на всем протяжении нити между точками  $A$  и  $B$

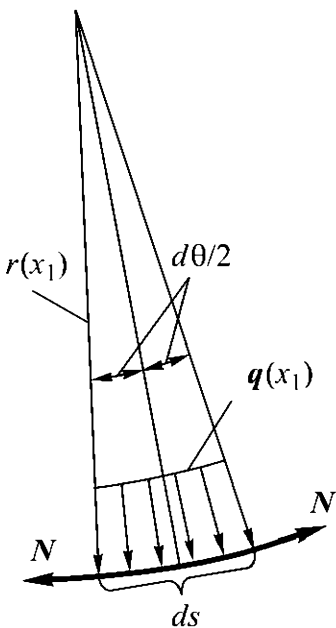


Рис. 2.9

$$\delta A_q = \int_0^L q(x_1) \delta\omega(x_1) dx_1, \quad (2.26)$$

где  $L$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ .

Возможное перемещение  $\delta\omega(x_1)$  приведет к изменению  $\delta(ds)$  длины дуги участка нити. На всем протяжении нити между точками  $A$  и  $B$  это изменение составит

$$\delta s_{AB} = \delta \int_0^L ds = \int_0^L \delta \sqrt{1 + \left(\frac{d\omega}{dx_1}\right)^2} dx_1.$$

При этом груз совершит возможную работу  $-N \delta s_{AB}$ . В силу того что сумма возможных работ равна нулю, с учетом (2.26) получим

$$\int_0^L q(x_1) \delta\omega(x_1) dx_1 - N \int_0^L \delta \sqrt{1 + \left(\frac{d\omega}{dx_1}\right)^2} dx_1 = 0. \quad (2.27)$$

Поскольку операции варьирования и вычисления дифференциала аналогичны и независимы, запишем

$$\delta \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx_1}\right)^2} = \frac{2(dw/dx_1)d(\delta w)/dx_1}{2\sqrt{1 + (dw/dx_1)^2}}$$

и после подстановки во второй интеграл в (2.27) интегрированием по частям, учитывая, что  $\delta w(0) = \delta w(L) = 0$ , вычислим

$$\begin{aligned} & \int_0^L \frac{dw/dx_1}{\sqrt{1 + (dw/dx_1)^2}} d(\delta w) = \frac{(dw/dx_1)\delta w}{\sqrt{1 + (dw/dx_1)^2}} \Big|_0^L - \\ & - \int_0^L \frac{d^2w}{dx_1^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (dw/dx_1)^2}} - \frac{2(dw/dx_1)^2}{2(1 + (dw/dx_1)^2)^{3/2}} \right) \delta w dx_1 = \\ & = - \int_0^L \frac{d^2w/dx_1^2}{(1 + (dw/dx_1)^2)^{3/2}} \delta w dx_1 = \int_0^L \frac{\delta w dx_1}{r(x_1)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $r(x_1)$  — радиус кривизны продольной оси нити в точке с абсциссой  $x_1$ :

$$r(x_1) = - \frac{(1 + (dw/dx_1)^2)^{3/2}}{d^2w/dx_1^2}.$$

Использував (2.28), вместо (2.27) получим

$$\int_0^L \left( q(x_1) - \frac{N}{r(x_1)} \right) \delta w(x_1) dx_1 = 0,$$

откуда при произвольных в интервале  $(0, L)$  вариациях  $\delta w(x_1)$  следует уравнение равновесия нити

$$\frac{1}{r(x_1)} = \frac{q(x_1)}{N}. \quad (2.29)$$

Кривизна продольной оси нити будет положительной, если распределенная нагрузка направлена вниз, т.е. ее проекция на

координатную ось  $Ox_2$  (см. рис. 2.8) отрицательна, и наоборот. Иными словами, нить прогибается в направлении действия нагрузки. В случае постоянной интенсивности  $q_0$  распределенной нагрузки продольная ось нити является дугой окружности радиусом  $r_0 = N/q_0$ , проходящей через точки  $A$  и  $B$ .

Отметим, что (2.29) непосредственно следует из условия равновесия сил, действующих на элементарный участок  $ds$  дуги продольной оси нити (см. рис. 2.9). К этому участку приложена равнодействующая

$$R = 2q(x_1)r(x_1)\sin\frac{d\theta}{2}$$

распределенной нагрузки, уравновешенная суммой проекций  $2N\sin(d\theta/2)$  сил натяжения.

В случае  $q(x_1) = q_0 = \text{const}$  абсолютное значение перемещения нити будет наибольшим при  $x_1 = L/2$  и составит

$$\left|w\left(\frac{L}{2}\right)\right| = r_0 - \sqrt{r_0^2 - \frac{L^2}{4}},$$

где, согласно (2.29),  $r_0 = N/q_0$ , или в безразмерной форме

$$|\tilde{w}_*| = \frac{q_0}{N} \left|w\left(\frac{L}{2}\right)\right| = 1 - \sqrt{1 - \frac{\tilde{L}^2}{4}}, \quad \tilde{L} = \frac{Lq_0}{N}.$$

Зависимость  $\tilde{w}_*$  от  $\tilde{L}$  представлена сплошной линией на рис. 2.10. Значению  $\tilde{L} = 2$  соответствует значение  $|\tilde{w}_*| = 1$ , т. е.

$$\left|w\left(\frac{L}{2}\right)\right| = \frac{N}{q_0} = r_0.$$

Это предельный случай возможного равновесия нити, при котором ее продольная ось принимает форму полуокружности радиусом  $r_0 = L/2$  (сплошная линия на рис. 2.11).

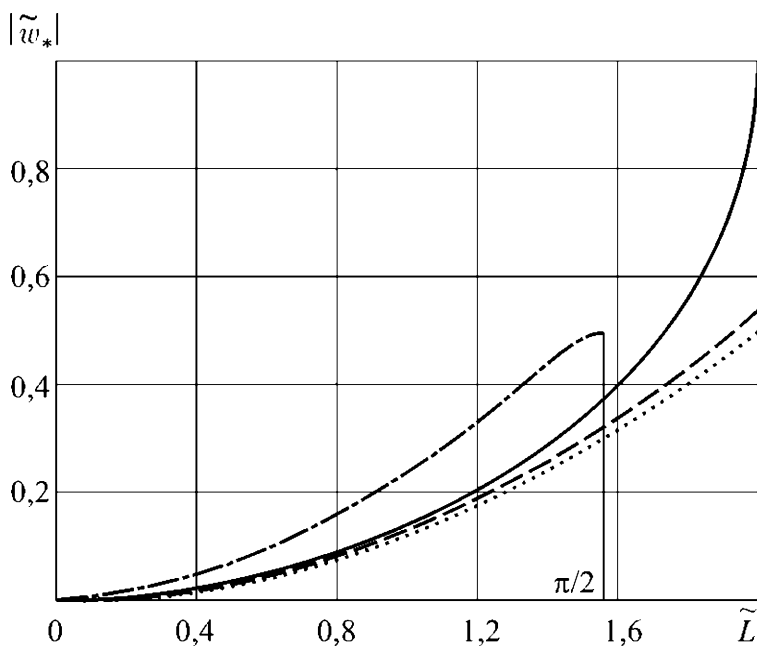


Рис. 2.10

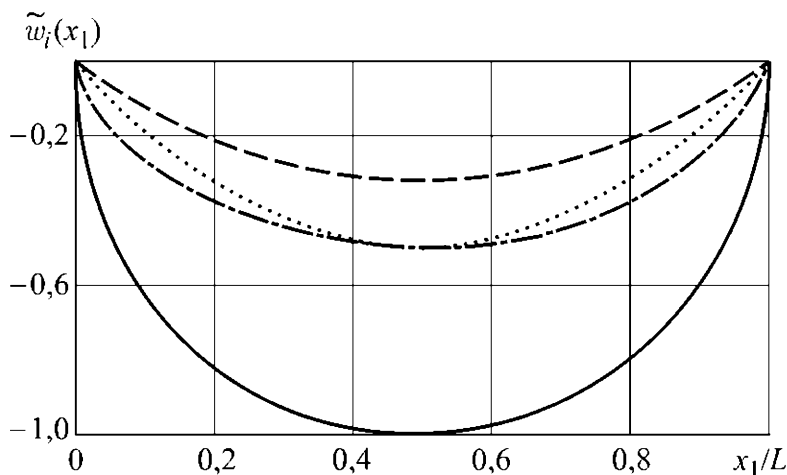


Рис. 2.11

При малых отклонениях нити от ненагруженного горизонтального положения в равенстве для радиуса кривизны можно пренебречь величиной  $(d\omega/dx_1)^2$  по сравнению с единицей. Тогда вместо (2.29) получим

$$\frac{d^2\omega_1(x_1)}{dx_1^2} = \frac{q(x_1)}{N}. \quad (2.30)$$

В случае  $q(x_1) = q_0 = \text{const}$  интегрированием (2.30) найдем

$$\omega_1(x_1) = \frac{q_0}{N} \frac{x_1^2}{2} + C_1 x_1 + C_2.$$

С учетом граничных условий  $\omega_1(0) = \omega_1(L) = 0$  получим  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = -(q_0/N)L/2$  и

$$\omega_1(x_1) = -\frac{q_0}{N} \frac{x_1}{2} (L - x_1).$$

При  $x = L/2$  наибольшее по абсолютному значению перемещение нити составит

$$\left| \omega_1 \left( \frac{L}{2} \right) \right| = \frac{1}{8} \frac{q_0}{N} L^2.$$

На рис. 2.10 пунктиром показан график зависимости

$$|\tilde{\omega}_*| = \left| \omega_1 \left( \frac{L}{2} \right) \right| \frac{q_0}{N}$$

от  $\tilde{L}$ , а на рис. 2.11 также пунктиром представлена зависимость  $\tilde{\omega}_1(x_1)$  от  $x_1/L$  при значении  $\tilde{L} = 2$ . Отметим, что при  $\tilde{L} = 2$  пренебрежение величиной  $(d\omega/dx_1)^2$  по сравнению с единицей приводит к вдвое меньшему по абсолютному значению перемещению нити в середине пролета между точками  $A$  и  $B$  (см. рис. 2.8).

Пусть теперь на нить вместо распределенной нагрузки действует направленная вниз сила тяжести  $m(x_1)g_0$ , где  $m(x_1)$  — измеряемая в килограммах на метр (кг/м) распределенная масса нити, а  $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения. Отличие от ранее рассмотренного случая состоит в том, что теперь на элементарный участок дуги длиной  $ds$  действует направленная вертикально вниз сила  $m(x_1)g_0 ds$ , т. е. вместо (2.26) возможная работа такой нагрузки

$$\delta A_m = \int_0^L m(x_1)g_0 \sqrt{1 + \left( \frac{d\omega_2}{dx_1} \right)^2} \delta\omega_2(x_1) dx_1,$$

где  $\omega_2(x_1)$  — зависимость от  $x_1$  перемещения точек нити. В итоге после преобразований, аналогичных проведенным ранее, вместо

(2.29) получим уравнение равновесия

$$\frac{1}{r(x_1)} = m(x_1) \frac{g_0}{N} \sqrt{1 + \left(\frac{d\omega_2}{dx_1}\right)^2}, \quad (2.31)$$

или с учетом равенства для  $r(x_1)$

$$\frac{d^2\omega_2/dx_1^2}{(1 + (d\omega_2/dx_1)^2)^2} = m(x_1) \frac{g_0}{N}. \quad (2.32)$$

Проинтегрируем (2.32) при  $m(x_1) = m_0 = \text{const}$ , т.е. при однородном распределении массы по длине нити. Обозначив  $p = d\omega_2/dx_1$  и представив  $d^2\omega_2/dx_1^2$  в виде

$$p \frac{dp}{d\omega_2} = \frac{1}{2} \frac{dp^2}{d\omega_2},$$

вместо (2.32) получим ОДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dp^2}{(1 + p^2)^2} = 2k_m d\omega_2,$$

где  $k_m = m_0 g_0 / N$ . После его интегрирования находим

$$\frac{-1}{1 + (d\omega_2/dx_1)^2} = 2k_m \omega_2 - C. \quad (2.33)$$

При  $x_1 = L/2$ , согласно условию симметрии,  $d\omega_2/dx_1 = 0$ . Тогда, обозначив  $\omega_* = \omega_2(L/2)$ , из (2.33) получим  $C = 1 + 2\tilde{\omega}_*$ , где  $\tilde{\omega}_* = k_m \omega_*$ . В итоге (2.33) примет вид

$$\sqrt{\frac{1 + 2\tilde{\omega}_* - 2\tilde{\omega}_2}{2\tilde{\omega}_2 - 2\tilde{\omega}_*}} d\tilde{\omega}_2 = d\tilde{x}_1, \quad (2.34)$$

где  $\tilde{\omega}_2 = k_m \omega_2$  и  $\tilde{x}_1 = k_m x_1$ . Обозначим  $\zeta = 2\tilde{\omega}_2 - 2\tilde{\omega}_*$ . Тогда

$$1 + 2\tilde{\omega}_* - 2\tilde{\omega}_2 = 1 - \zeta; \quad d\zeta = 2d\tilde{\omega}_2,$$

и вместо (2.34) получим ОДУ

$$\sqrt{\frac{1 - \zeta}{\zeta}} d\zeta = 2d\tilde{x}_1.$$

Далее используем подстановку  $\zeta = \cos^2 \varphi$ , которая с учетом равенства  $d\zeta = -2\cos\varphi \sin\varphi d\varphi$  приводит к ОДУ

$$-2\sin^2\varphi d\varphi = 2d\tilde{x}_1.$$

Решение этого ОДУ имеет вид  $-\varphi + \sin\varphi \cos\varphi = 2\tilde{x}_1 - C_*$ , или

$$-\arccos\sqrt{2\tilde{w}_2 - 2\tilde{w}_*} + \sqrt{(1 + 2\tilde{w}_* - 2\tilde{w}_2)(2\tilde{w}_2 - 2\tilde{w}_*)} = 2\tilde{x}_1 - C_*. \quad (2.35)$$

При  $\tilde{w}_2(\tilde{L}/2) = \tilde{w}_*$ , где теперь  $\tilde{L} = k_m L$ , из (2.35) следует  $C_* = \pi/2 + \tilde{L}$ . Тогда при  $\tilde{w}_2(0) = 0$  из (2.35) получим трансцендентное уравнение

$$\arccos\sqrt{2|\tilde{w}_*|} - \sqrt{2(1 - 2|\tilde{w}_*|)|\tilde{w}_*|} = \tilde{L} + \frac{\pi}{2}$$

относительно  $|\tilde{w}_*|$ . Зависимость  $|\tilde{w}_*|$  от  $\tilde{L}$  представлена на рис. 2.10 штрихпунктирной линией, наибольшая ордината которой равна 0,5 при  $\tilde{L} = \pi/2$  и соответствует предельному случаю возможного равновесия нити (зависимость  $\tilde{w}_2(x_1)$  от  $x_1/L$  при  $\tilde{L} = \pi/2$ , построенная с помощью (2.35), показана штрихпунктирной линией на рис. 2.11).

Отметим, что различие между уравнениями равновесия (2.29) и (2.31) заключается в учете нагрузки, действующей на элементарный участок дуги продольной оси нити длиной  $ds$ . В первом случае нагрузка пропорциональна  $dx_1$ , а во втором —  $ds = \sqrt{1 + (dw_2/dx_1)^2} dx_1$ , что и объясняет появление в правой части (2.31) соответствующего дополнительного множителя

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dw_2}{dx_1}\right)^2} = \frac{1}{\cos\theta},$$

где  $\theta$  — угол между осью  $Ox_1$  и касательной к осевой линии. Ясно, что при малых отклонениях нити от ненагруженного горизонтального положения это различие мало и дополнительный множитель можно не учитывать. Вместе с тем на практике используют математические модели так называемой тяжелой нити,

в которых учитывают этот множитель, но в (2.31) соотношения для кривизны заменяют второй производной  $d^2\omega_2/dx_1^2$ , т.е. вместо (2.31) при  $m(x_1) = m_0 = \text{const}$  используют уравнение равновесия в виде

$$\frac{d^2\omega_3}{dx_1^2} = m_0 \frac{g_0}{N} \sqrt{1 + \left(\frac{d\omega_3}{dx_1}\right)^2}, \quad (2.36)$$

причем кривую, описываемую им, называют **цепной линией**.

Введя обозначение  $p = d\omega_3/dx_1$ , по аналогии с преобразованием (2.32) представим (2.36) в безразмерной форме

$$\frac{dp^2}{\sqrt{1+p^2}} = 2d\tilde{\omega}_3$$

и после интегрирования этого ОДУ запишем

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d\tilde{\omega}_3}{dx_1}\right)^2} = \tilde{\omega}_3 + C^*.$$

Снова обозначив  $\tilde{\omega}_3(\tilde{L}/2) = \tilde{\omega}_*$  и используя условие симметрии, найдем  $C^* = 1 - \tilde{\omega}_*/2$ , что приведет к ОДУ

$$\frac{d\tilde{\omega}_3}{\sqrt{(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_* + 1)^2 - 1}} = d\tilde{x}_1.$$

Отсюда подстановкой  $\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_* + 1 = \text{ch}\xi$  с учетом соотношения  $d\tilde{\omega}_3 = \text{sh}\xi d\xi$  приходим к равенству  $d\xi = d\tilde{x}_1$ , что позволяет записать

$$\text{Arch}|\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_* + 1| = \tilde{x}_1 - C_1^*.$$

Учитывая, что  $\tilde{\omega}_3(\tilde{L}/2) = \tilde{\omega}_*$ , найдем  $C_1^* = \tilde{L}/2$ , а из граничного условия  $\tilde{\omega}_3(\tilde{L}) = 0$  получим  $1 - \tilde{\omega}_* = \text{ch}(\tilde{L}/2)$ . В итоге решение ОДУ (2.36) примет вид

$$\tilde{\omega}_3(\tilde{x}_1) = \text{ch}\left(\tilde{x}_1 - \frac{\tilde{L}}{2}\right) - \text{ch}\left(\frac{\tilde{L}}{2}\right). \quad (2.37)$$

Наибольшее по абсолютному значению перемещение такой нити будет при  $\tilde{x}_1 = \tilde{L}/2$  и составит

$$|\tilde{w}_*| = \text{ch}(\tilde{L}/2) - 1.$$

Зависимость  $|\tilde{w}_*|$  от  $\tilde{L}$  для этого случая представлена штриховой линией на рис. 2.10, а зависимость  $\tilde{w}_3$  от  $x_1/L$  при  $\tilde{L} = \pi/2$  — на рис. 2.11. Отметим, что при  $\tilde{L} = \pi/2$  наибольшее по абсолютному значению перемещение примерно в 1,5 раза меньше аналогичного значения для математической модели, использующей полное соотношение для кривизны продольной оси нити.

Применим принцип возможных перемещений к построению математической модели тонкой гибкой пластинки (или пленки), не имеющей жесткости при изгибе и называемой **мембраной**.

Пусть в исходном состоянии мембрана толщиной  $h$  в своей

плоскости имеет равномерное натяжение  $N^*$ , которое измеряется в ньютонах на метр (Н/м) и создает в любых двух ортогональных направлениях, лежащих в этой плоскости, одинаковые *растягивающие напряжения*, равные  $N^*/h$ . Края мембраны закреплены в точках замкнутого контура  $\Gamma$ , ограничивающего занятую мембраной область  $F$  (рис. 2.12).

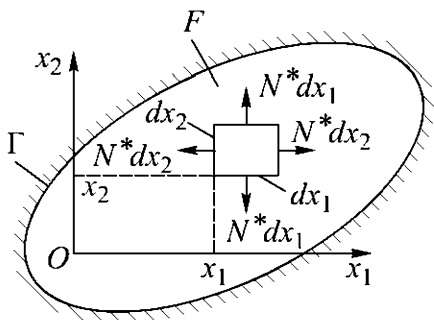


Рис. 2.12

После нагружения мембраны в направлении координатной оси  $Ox_3$  распределенной нагрузкой интенсивностью  $q(x_1, x_2)$  в этом направлении возникают перемещения  $w(x_1, x_2)$  ее точек, называемые **прогибами мембраны**. При сравнительно малых прогибах можно считать, что исходное натяжение  $N^*$  сохраняет свое значение.

После нагружения мембраны на возможных перемещениях  $\delta w(x_1, x_2)$  ее точек распределенная нагрузка совершает возможную работу

$$\delta A_q = \int_F q \delta w dF, \quad (2.38)$$

которая при изменении  $\delta S$  площади  $S$  поверхности деформированной мембраны, вызванном этими перемещениями, расходует-ся на работу  $\delta W$  сил натяжения:

$$\delta W = \delta \int_F N^* dS. \quad (2.39)$$

Здесь  $dS$  — дифференциал площади гладкой поверхности в ортогональной системе координат  $Ox_1x_2$  в плоской области  $F$ :

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2} dF. \quad (2.40)$$

При малых прогибах примем

$$dS \approx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right) dF$$

и вместо (2.39) запишем

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{N^*}{2} \int_F \left( \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2 \right) dF = \\ &= N^* \int_F \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial \delta w}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial \delta w}{\partial x_2} \right) dF, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \delta W &= N^* \int_F \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \delta w \right) \right) dF - \\ &\quad - N^* \int_F \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \delta w dF. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части этого равенства, согласно формуле Остроградского — Гаусса, можно представить в виде

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial w}{\partial n} \delta w + w \frac{\delta w}{\partial n} \right) ds,$$

где  $\partial/\partial n$  — символ дифференцирования по направлению внешней нормали к контуру  $\Gamma$ ;  $ds$  — дифференциал длины дуги этого контура. Поскольку мембрана закреплена на контуре,  $w(P) = \delta w(P) = 0$  при  $P \in \Gamma$  и этот интеграл равен нулю. Таким образом, из равенства  $\delta A_q = \delta W$  с учетом (2.38) получим

$$\int_F (q + N^* \nabla^2 w) \delta w dF = 0.$$

Здесь  $\nabla^2$  — дифференциальный оператор Лапласа, определенный в ортогональной системе координат  $Ox_1x_2$ :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Отсюда при произвольных в этой области вариациях  $\delta w$  следует дифференциальное уравнение равновесия мембраны

$$\nabla^2 w(x_1, x_2) = -\frac{q(x_1, x_2)}{N^*}. \quad (2.41)$$

**Пример 2.5.** Для мембраны, закрепленной по контуру, который представляет собой окружность радиусом  $r_*$ , (2.41) при  $q(x_1, x_2) = q_0 = \text{const}$  примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{q_0}{N^*}.$$

После первого интегрирования получим

$$\frac{dw(r)}{dr} = -\frac{q_0 r}{2N^*} + \frac{C_1^*}{r},$$

а после второго —

$$w(r) = -\frac{q_0 r^2}{4N^*} + C_1^* \ln r + C_2^*.$$

В центре круглой мембраны (при  $r = 0$ ) ее прогиб должен быть конечным и поэтому  $C_1^* = 0$ , а из условия  $w(r_*) = 0$  следует

$$C_2^* = \frac{q_0 r_*^2}{4N^*}.$$

В итоге

$$\omega(r) = \frac{q_0(r_*^2 - r^2)}{4N^*},$$

т. е. мембрана при нагружении принимает форму параболоида вращения, а ее наибольший прогиб  $\omega(0) = q_0 r_*^2 / (4N^*)$ .

В отличие от перемещения нити, отсчет которого происходил в положительном направлении координатной оси  $Ox_2$  (см. рис. 2.8), в данном случае прогиб мембраны принят положительным в направлении действующей нагрузки. ♦

Увеличение прогибов мембраны при условии закрепления ее точек по контуру  $\Gamma$  (см. рис. 2.12) приведет к возрастанию натяжения, и поэтому использование построенной математической модели, включающей (2.41), станет некорректным. Кроме того, с увеличением прогибов использованное для дифференциала  $dS$  приближение приведет к дополнительной погрешности.

Силу  $N^*$  натяжения можно продолжать считать постоянной, если рассматривать вместо закрепления мембраны по контуру ее опирание на контур с возможностью проскальзывания точек мембраны в направлениях, лежащих в плоскости области  $F$ . В этом случае положим  $dS = ds_1 ds_2$ , где

$$ds_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2} dx_1; \quad ds_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right)^2} dx_2.$$

Отметим, что равенство  $dS = ds_1 ds_2$  при  $dx_1 dx_2 = dF$  переходит в соотношение (2.40), если пренебречь произведением  $(\partial \omega / \partial x_1)^2 (\partial \omega / \partial x_2)^2$  по сравнению с каждым его сомножителем. Геометрически это равенство можно трактовать как площадь элементарного участка поверхности, ограниченного элементарными дугами почти ортогональных линий кривизны с длинами  $ds_1$  и  $ds_2$  (рис. 2.13).

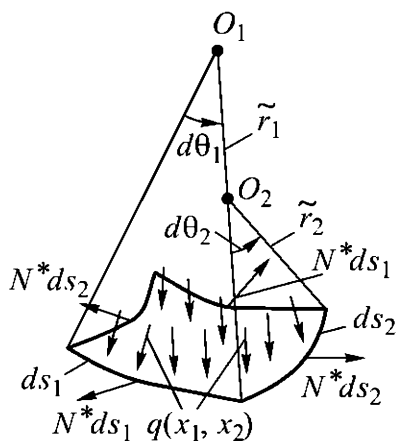


Рис. 2.13

Равнодействующую  $R$  распределенной на этом участке нагрузки можно представить в виде

$$R = q(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Здесь

$$dx_1 = 2\tilde{r}_1 \sin\left(\frac{d\theta_1}{2}\right); \quad dx_2 = 2\tilde{r}_2 \sin\left(\frac{d\theta_2}{2}\right),$$

где  $\tilde{r}_1 = ds_1/d\theta_1$  и  $\tilde{r}_2 = ds_2/d\theta_2$  — радиусы кривизны линий, проходящих через точку поверхности, проекция которой на плоскость  $x_1 O x_2$  имеет координаты  $x_1$  и  $x_2$ .

Равнодействующую  $R$  уравнивают проекции сил натяжения в виде

$$N_1^* = 2(N^* ds_1) \sin\left(\frac{d\theta_1}{2}\right); \quad N_2^* = 2(N^* ds_2) \sin\left(\frac{d\theta_2}{2}\right).$$

В итоге получим уравнение равновесия

$$\frac{1}{\tilde{r}_1} + \frac{1}{\tilde{r}_2} = \frac{q(x_1, x_2)}{N^*}, \quad (2.42)$$

установленное французским ученым П.С. Лапласом (1749–1827) и носящее его имя. Ясно, что при замене  $1/\tilde{r}_1$  и  $1/\tilde{r}_2$  соответственно на  $\partial^2\omega/\partial x_1^2$  и  $\partial^2\omega/\partial x_2^2$  из (2.42) следует (2.41).

Физической моделью, соответствующей построенной математической модели, является мыльная пленка, натянутая на контур из тонкой проволоки. Натяжение  $N^*$  в этом случае соответствует межфазному натяжению на поверхности раздела жидкой и газообразной фаз (мыльного раствора и воздуха), называемому также **поверхностным натяжением** и равному энергии, которую необходимо затратить при образовании единицы площади такой поверхности [39]. Если контуром является окружность и  $q(x_1, x_2) = q_0 = \text{const}$ , то, согласно (2.42), пленка принимает форму сферического купола радиусом  $r^* = N^*/(2q_0)$ . При выдувании мыльной пленки через достаточно тонкую трубку после

отрыва от ее торца такой купол может перейти в замкнутый сферический мыльный пузырь, в котором возникает некоторое избыточное по отношению к окружающему воздуху давление  $p$ . В соответствии с (2.42) радиус пузыря примет значение  $r_0 = N^*/(2p)$ .

Если контур с натянутой мыльной пленкой не является плоским, а нагрузка отсутствует, то поверхность пленки будет криволинейной с равной нулю средней кривизной  $(1/\tilde{r}_1 + 1/\tilde{r}_2)/2$ . Такая поверхность имеет наименьшую возможную площадь, и ее называют минимальной (с механической точки зрения это означает, что при заданном натяжении  $N^*$  для образования указанной поверхности необходимо затратить меньшую энергию, чем для образования любой другой поверхности, натянутой на данный контур). Примером минимальной поверхности служит катеноид, образованный вращением цепной линии [14, 17].

## Вопросы и задачи

**2.1.** Найдите распределения напряжений и перемещений поперечных сечений для вертикально расположенного прямолинейного стержня длиной  $L$  с постоянным поперечным сечением площадью  $F$  и жестко закрепленными торцами. Плотность материала стержня  $\rho$ , а продольный модуль упругости  $E_c$  при сжатии в 2 раза больше, чем при растяжении.

**2.2.** Одинаковые прямолинейные стержни  $AB$  и  $AC$  (рис. 2.14) имеют суммарный объем  $V$  при допустимом напряжении  $[\sigma]$  при растяжении. При каком угле  $\alpha$  допустимое значение силы  $P$  будет наибольшим?

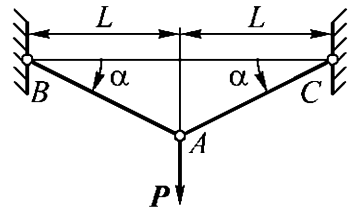


Рис. 2.14

**2.3.** Деталь с поперечным сечением в виде ромба (рис. 2.15) вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей через его центр. Найдите наибольшее значение нормального напряжения в детали, если ее материал имеет плотность  $\rho$ , а большая диагональ ромба равна  $2L$ .

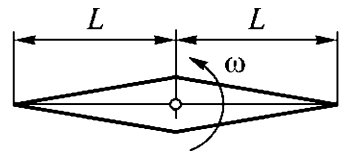


Рис. 2.15

**2.4.** При приложении растягивающей силы  $P$  к одному из концов лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности достаточно длинной ленты с площадью  $F$  поперечного сечения и погонной плотности  $\rho_*$ , измеряемой в килограммах на метр, этот конец ленты получил перемещение  $u$ . Каково будет распределение нормальных напряжений по длине ленты при коэффициенте  $f$  трения?

**2.5.** Найдите распределение перемещений поперечных сечений стержней из одинакового линейно упругого материала, установленных с зазором  $\delta \ll L$  между их свободными торцами (рис. 2.16), после приращения температуры  $\Delta T = \delta / (\alpha^{(T)} L)$  обеих стержней, где  $\alpha^{(T)}$  — температурный коэффициент линейного расширения. Площади поперечных сечений стержней различаются в 2 раза.

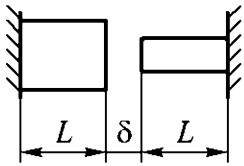


Рис. 2.16

**2.6.** Прямолинейный стержень с постоянным поперечным сечением из идеально упруго-пластического материала с пределом текучести  $\sigma_T$  при сжатии, продольным модулем упругости  $E$  и температурным коэффициентом  $\alpha^{(T)}$  линейного расширения сжат между абсолютно жесткими плитами до напряжения  $|\sigma_0| < \sigma_T$ . До какой температуры следует нагреть стержень, чтобы после остывания до начальной температуры его можно было свободно извлечь из пролета между плитами?

**2.7.** Стержень квадратного поперечного сечения со стороной  $a$  длиной  $L + a$  левым концом вставлен без зазора и натяга в жесткое гнездо глубиной  $a$ , а правым концом уперт в жесткую стенку (рис. 2.17). Продольный модуль упругости материала стержня  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , а температурный коэффициент линейного расширения  $\alpha^{(T)}$ . Найдите нормальные напряжения в стержне при его нагреве на  $\Delta T$ .

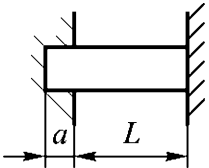


Рис. 2.17

**2.8.** Выведите уравнение равновесия тяжелой нити (см. Д.2.3), на которую воздействует распределенная нагрузка, направленная по нормали к изогнутой продольной оси нити.

**2.9.** Используя (2.42), убедитесь, что под действием равномерно распределенного по поверхности мембраны давления ее поверхность примет форму сферического купола.

### 3. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

В отличие от растяжения или сжатия *прямолинейного стержня*, когда в его *поперечном сечении* возникают лишь *нормальные напряжения* (см. 2.3), существуют варианты нагружения, при которых в поперечных сечениях такого стержня действуют только *касательные напряжения*. При этом происходит поворот поперечных сечений вокруг *осевой линии стержня*. Такой вариант нагружения стержня, называемый **кручением**, можно создать путем приложения к его торцам противоположно направленных *крутящих моментов*  $M$  с векторами  $M$  и  $-M$ , параллельными осевой линии (рис. 3.1), или парой сил, перпендикулярных этой линии.

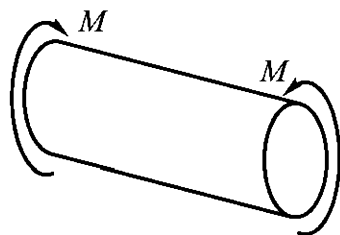


Рис. 3.1

#### 3.1. Кручение осесимметричных стержней

Простейшим примером стержня осесимметричной формы является *прямолинейный стержень* с постоянным *поперечным сечением* в виде круга радиусом  $R = \text{const}$ . К осесимметричным также следует отнести прямолинейные стержни с кольцевым поперечным сечением (круглые толстостенные трубы и тонкостенные трубки). Таким образом, осесимметричные стержни имеют поперечное сечение, обладающее свойством центральной симметрии.

**Пример 3.1.** Пусть прямолинейный стержень в виде тонкостенной круглой трубки толщиной  $h$ , радиусом  $R$  и длиной  $L$  на одном из торцов нагружен *крутящим моментом*  $M_1$ , при этом противоположный торец стержня жестко заделан (рис. 3.2). Согласно *гипотезе плоских сечений*, трубка при *деформировании* закручивается и каждое ее поперечное сечение, оставаясь плос-

ким и перпендикулярным оси трубки, поворачивается (исключая заделанный торец) без изменения своей формы на некоторый угол относительно этой оси.

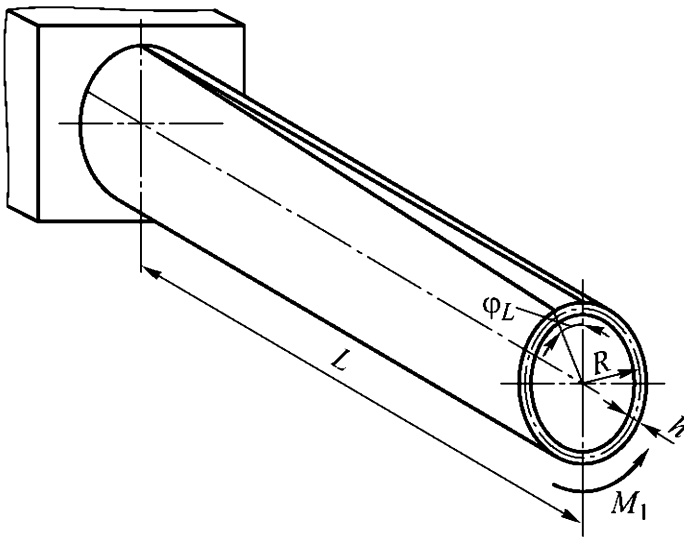


Рис. 3.2

Естественно предположить, что угол  $\varphi$  поворота любого поперечного сечения пропорционален расстоянию  $x_1$  от заделанного торца, т. е.

$$\varphi = \frac{x_1}{L} \varphi_L = \vartheta_1 x_1, \quad (3.1)$$

где  $\varphi_L$  — угол поворота торца, к которому приложен крутящий момент  $M_1$ ;  $\vartheta_1 = \varphi_L/L$  — угол закручивания стержня, приходящийся на единицу его длины.

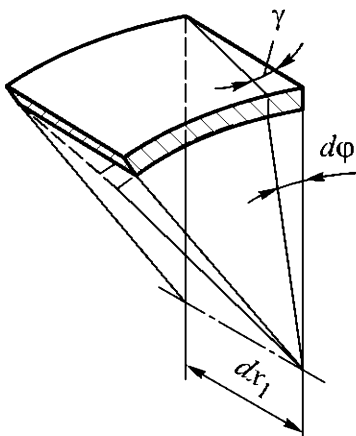


Рис. 3.3

При деформировании в элементе трубки, заключенном между двумя бесконечно близкими поперечными и двумя бесконечно близкими продольными сечениями (рис. 3.3), возникнет деформация сдвига, характеризуемая углом

$$\gamma = R \frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{R}{L} \varphi_L, \quad (3.2)$$

а на гранях элемента появятся касательные напряжения  $\tau$ . Для тонкостенной трубки при  $h/R \ll 1$  эти напряжения

можно считать однородными по ее толщине, они создают в таком элементе *напряженное состояние чистого сдвига*. Тогда (2.5) в рассматриваемом случае примет вид

$$2\pi R h \int_0^L \tau \delta\gamma dx_1 = M_1 \delta\varphi_L,$$

или с учетом (3.2) при произвольной вариации  $\delta\varphi_L$

$$\tau = \frac{M_1}{2\pi R^2 h}. \quad (3.3)$$

Ясно, что (3.3) непосредственно следует из условия равновесия участка трубки между ее произвольным поперечным сечением и торцом, к которому приложен крутящий момент. Отметим, что при указанных предположениях касательные напряжения во всех поперечных сечениях трубки оказались одинаковыми, они не зависят от расстояния  $x_1$  от заделанного торца. Однако это справедливо при условии, что на торце при  $x_1 = L$  крутящий момент  $M_1$  создан за счет равномерно распределенных по нему касательных напряжений, в точности равных  $\tau$ . В противном случае в поперечных сечениях трубки, близких к этому торцу, распределение касательных напряжений зависит от особенностей, связанных с приложением момента  $M_1$ . В соответствии с *принципом Сен-Венана* эти особенности сказываются на расстоянии порядка характерного размера поперечного сечения трубки.

Для *линейно упругого изотропного материала* трубки, согласно (1.15),  $\tau = \mu\gamma$ , где  $\mu$  — *модуль сдвига* этого материала. Тогда из (3.2) и (3.3) следует

$$\varphi_L = \frac{M_1 L}{\mu J_p}; \quad \vartheta_1 = \frac{M_1}{\mu J_p}, \quad (3.4)$$

где  $J_p = 2\pi R^3 h$  — *полярный момент инерции сечения* трубки. Величину  $\mu J_p$  называют ***жесткостью*** трубки ***при кручении***. ♦

Благодаря однородности распределения касательного напряжения в поперечном сечении тонкостенной трубки ее удобно использовать в качестве образца материала при экспериментальном

определении модуля  $\mu$  сдвига и зависимости  $\tau$  от  $\gamma$  за пределами области линейной упругости материала. Однако при больших касательных напряжениях возможно искажение формы поперечного сечения трубки вследствие *потери устойчивости*. Дело в том, что напряженное состояние чистого сдвига эквивалентно *двухосному напряженному состоянию* растяжения-сжатия в направлениях, составляющих угол  $\pi/4$  с осью трубки. При потере устойчивости на поверхности трубки возникают складки, расположенные под углом  $\pi/4$  к оси.

**Пример 3.2.** При *кручении* прямолинейного стержня в виде толстостенной круглой трубы с внешним радиусом  $R$ , внутренним радиусом  $R_1$ , длиной  $L$  и теми же условиями нагружения и закрепления, что и в случае тонкостенной трубки, каждый кольцевой слой такой трубы, имеющий средний радиус  $r \in (R_1, R)$  и толщину  $dr$ , можно рассматривать как тонкостенную трубку, для которой вместо (3.2) с точностью до  $dr/2$  запишем

$$\gamma(r) = r \frac{d\varphi}{dx_1} = \frac{\varphi_L}{L} r = r\vartheta_1. \quad (3.5)$$

Тогда при

$$\delta\gamma(r) = \frac{r}{L} \delta\varphi_L$$

(2.5) для такой трубы примет вид

$$2\pi \int_0^L dx_1 \int_{R_1}^R \tau(r) \delta\gamma(r) r dr = M_1 \delta\varphi_L.$$

Отсюда с учетом (3.5) при произвольной вариации  $\delta\varphi_L$  получим уравнение равновесия

$$2\pi \int_{R_1}^R \tau(r) r^2 dr = M_1. \quad (3.6)$$

Для изотропного линейно упругого материала трубы

$$\tau(r) = \mu\gamma(r),$$

поэтому из (3.5) и (3.6) получим

$$\varphi_L = \frac{M_1 L}{\mu J'_p}; \quad \vartheta_1 = \frac{M_1}{\mu J'_p}, \quad (3.7)$$

где  $J'_p = \pi(R^4 - R_1^4)/2$  — полярный момент инерции поперечного сечения трубы.

Наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении трубы соответствует значению  $r = R$  и с учетом (3.5) и (3.7)

$$\tau_{\max} = \frac{M_1}{W'_p}, \quad (3.8)$$

где  $W'_p = J'_p/R$  — **полярный момент сопротивления** поперечного сечения трубы.

Ясно, что в случае кручения сплошного круглого стержня ( $R_1 = 0$ ) выражения (3.5)–(3.8) остаются в силе, но  $J'_p$  и  $W'_p$  следует заменить соответственно на  $J_p^\circ$  и  $W_p^\circ$ :

$$J_p^\circ = \frac{\pi R^4}{2}; \quad W_p^\circ = \frac{\pi R^3}{2}.$$

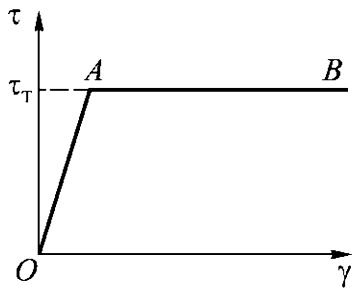
При увеличении крутящего момента  $M_1$  касательное напряжение при  $r = R$  может достигнуть *предела текучести*  $\tau_T$  материала трубы *при чистом сдвиге*. При дальнейшем увеличении  $M_1$  зона *пластичности* возрастает в направлении к оси трубы, причем ее граница с учетом (3.5) соответствует текущему радиусу

$$r_T = \frac{\tau_T L}{\mu \varphi_L}.$$

Если **материал** трубы является **идеально упруго-пластическим**, т. е. зависимость  $\tau$  от  $\gamma$  имеет участок  $OA$  линейной *упругости* и участок  $AB$  *пластичности без упрочнения* (рис. 3.4), то из (3.5) и (3.6) получим

$$M_1 = 2\pi \int_{R_1}^{r_T} \mu \frac{r \varphi_L}{L} r^2 dr + 2\pi \int_{r_T}^R \tau_T r^2 dr = \frac{\pi \mu \vartheta_1}{2} \left( \left( \frac{\tau_T}{\mu \vartheta_1} \right)^4 - R_1^4 \right) + \\ + 2\pi \frac{\tau_T}{3} \left( R^3 - \left( \frac{\tau_T}{\mu \vartheta_1} \right)^3 \right) = \frac{2\pi \tau_T R^3}{3} \left( 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\tau_T}{R \mu \vartheta_1} \right)^3 - \frac{3R \mu \vartheta_1}{4 \tau_T} \left( \frac{R_1}{R} \right)^4 \right).$$

Эта зависимость  $M_1$  от  $\varphi_L$  справедлива при изменении  $\varphi_L$  от  $\tau_T L / (R\mu)$  до  $\tau_T L / (R_1\mu)$ . При достижении значения



$$\varphi_L = \frac{\tau_T L}{R_1 \mu}$$

труба воспринимает максимальный крутящий момент

Рис. 3.4

$$M_{\max} = \frac{2}{3} \pi \tau_T (R^3 - R_1^3).$$

В случае сплошного круглого стержня ( $R_1 = 0$ ) крутящий момент стремится к значению  $2\pi\tau_T R^3/3$  при  $\varphi_L \rightarrow \infty$ . Отметим, что началу пластической деформации в круглом стержне, согласно (3.8), соответствует значение крутящего момента

$$M_T = \tau_T W_p^o = \frac{1}{2} \tau_T \pi R^3.$$

Таким образом, для исчерпания несущей способности круглого стержня из идеального упруго-пластического материала, т. е. способности воспринимать нагрузку при ограниченном значении  $\varphi_L$ , достаточно приложить крутящий момент

$$M_{\max} = \frac{4}{3} M_T. \quad \blacklozenge$$

**Пример 3.3.** В общем случае зависимость  $\tau(\gamma)$  для реального материала может отличаться от изображенной на рис. 3.4, но ее можно найти путем обработки результатов испытания на кручение круглого стержня. Пусть в процессе таких испытаний установлена зависимость крутящего момента  $M_1$  от угла  $\varphi_L$  поворота сечения круглого стержня длиной  $L$  и радиусом  $R$ . Согласно (3.5) и (3.6),

$$M_1 = 2\pi \int_{R_1}^R \tau(\gamma) r^2 dr = 2\pi \int_{R_1}^R \tau\left(\frac{r\varphi_L}{L}\right) r^2 dr. \quad (3.9)$$

Обозначив  $m = M_1/(2\pi R^3)$  и  $\gamma_R = R\varphi_L/L$ , вместо (3.9) получим

$$m(\gamma_R) = \frac{1}{\gamma_R^3} \int_0^{\gamma_R} \tau(\gamma) \gamma^2 d\gamma$$

или после дифференцирования по  $\gamma_R$

$$\frac{dm(\gamma_R)}{d\gamma_R} = -\frac{3}{\gamma_R^4} \int_0^{\gamma_R} \tau(\gamma) \gamma^2 d\gamma + \frac{\tau(\gamma_R)}{\gamma_R}.$$

Исключив интеграл из двух последних равенств, найдем

$$\tau(\gamma_R) = \gamma_R \frac{dm(\gamma_R)}{d\gamma_R} + 3m(\gamma_R). \quad (3.10)$$

Чтобы воспользоваться (3.10), необходимо предварительно обработать результаты испытания в виде зависимости  $m(\gamma_R)$  и достаточно точно аппроксимировать ее (например, сплайнами) для вычисления производной. Несложно проверить, что в пределах области линейной упругости из (3.10) следует  $\tau(\gamma_R) = \mu\gamma_R$ . ♦

### 3.2. Деформация поперечного сечения стержня

Предположение о том, что при *кручении прямолинейного стержня* его *поперечные сечения* остаются плоскими, было выдвинуто еще в 1784 году французским инженером и физиком Ш.О. Кулоном (1736–1806) и затем использовано французским инженером и механиком А. Навье (1785–1836). Однако для стержней некруглого поперечного сечения это допущение привело к неверным результатам. Эксперименты по кручению стержней с прямоугольным поперечным сечением, на боковую поверхность которых была нанесена ортогональная сетка, показали, что наибольшие искажения возникают в серединах граней. Искажение первоначально плоского поперечного сечения называют *деформацией*. Корректное решение получил Сен-Венан, применив так называемый полуобратный метод. Суть этого метода

заключается в том, что сначала принимают некоторые допущения о распределении перемещений, а затем устанавливают класс задач, для которых эти допущения не приводят к противоречиям.

Рассмотрим цилиндрический прямолинейный стержень длиной  $L$  с произвольным поперечным сечением площадью  $F$ , ограниченным контуром  $\Gamma$  (рис. 3.5). К одному из торцов стержня

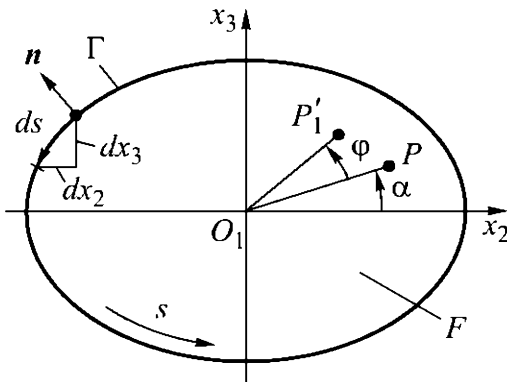


Рис. 3.5

приложен *крутящий момент*  $M_1$ , а другой торец закреплен так, что он не может поворачиваться относительно продольной оси  $Ox_1$ , но его точки могут перемещаться вдоль этой оси. Угол  $\varphi$  поворота любого поперечного сечения зависит от расстояния  $x_1$  этого сечения от закрепленного торца. Примем, что при малой деформации справедлива формула (3.1).

Точка  $P(x_1, x_2, x_3)$  в поперечном сечении с координатой  $x_1$  в результате *деформирования* стержня переместится в точку  $P'$  с координатами  $x_1 + u_1$ ,  $x_2 + u_2$  и  $x_3 + u_3$  (на рис. 3.5 показаны точка  $P$  и точка  $P'_1$ , являющаяся проекцией точки  $P'$  на плоскость сечения с координатой  $x_1$ ). Считая угол  $\varphi$  малым, принимаем, что  $O_1P'_1 \approx O_1P = r$ ,  $\cos \varphi \approx 1$  и  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} u_2 &= r \cos(\alpha + \varphi) - r \cos \alpha = \\ &= r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi - r \cos \alpha \approx -x_3 \varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= r \sin(\alpha + \varphi) - r \sin \alpha = \\ &= r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi - r \sin \alpha \approx x_2 \varphi \end{aligned}$$

и с учетом (3.1) запишем

$$u_2 = -x_1 x_3 \vartheta_1; \quad u_3 = x_1 x_2 \vartheta_1. \quad (3.11)$$

Предположив, что при повороте все первоначально плоские поперечные сечения стержня искажаются одинаково, примем, что

$$u_1 = \vartheta_1 \Pi(x_2, x_3), \quad (3.12)$$

где  $\Pi(x_2, x_3)$  — пока еще неизвестная **функция деформации**.

Используя *соотношения Коши* (1.14), выразим через перемещения в виде (3.11) и (3.12) *компоненты тензора деформации*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 0; & \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0; & \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0; \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0; \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\vartheta_1}{2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - x_3 \right); \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{\vartheta_1}{2} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} + x_2 \right). \end{aligned}$$

Затем для *изотропного линейно упругого материала*, согласно *обобщенному закону Гука*, найдем *компоненты тензора напряжений*:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{32} &= 0; \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \mu \vartheta_1 \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - x_3 \right); \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} &= \mu \vartheta_1 \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} + x_2 \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Эти напряжения тождественно удовлетворяют (при отсутствии *объемных сил*) уравнениям равновесия (2.3)

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

в проекциях на оси  $Ox_2$  и  $Ox_3$ , а уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0$$

в проекции на ось  $Ox_1$  справедливо с учетом (3.13) при условии

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_3^2} = 0.$$

От функции  $\Pi(x_2, x_3)$  депланации удобнее перейти к введенной в 1903 году немецким механиком Л. Прандтлем (1875–1953) **функции  $\Psi(x_2, x_3)$  касательных напряжений**, определяемой соотношениями

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}. \quad (3.14)$$

Тогда для линейно упругого материала стержня с учетом (3.13) запишем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = \mu \vartheta_1 \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - x_3 \right); \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \mu \vartheta_1 \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_3} + x_2 \right).$$

Исключив отсюда функцию депланации, получим дифференциальное уравнение Пуассона

$$\nabla_2^2 \Psi = -2\mu \vartheta_1, \quad (3.15)$$

где  $\nabla_2^2 = \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial x_3^2$  — дифференциальный оператор Лапласа, действующий в координатной плоскости  $x_2 O x_3$ .

Поскольку боковая поверхность стержня свободна от нагрузки, то напряжения (3.13) должны на этой поверхности удовлетворять **силовым граничным условиям**

$$\sigma_{ji} n_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь  $n_j$  — проекции единичного вектора  $\mathbf{n}$  внешней нормали к контуру  $\Gamma$  на соответствующие оси  $Ox_j$ :

$$n_1 = \frac{dx_1}{ds} \equiv 0; \quad n_2 = \frac{dx_3}{ds}; \quad n_3 = -\frac{dx_2}{ds},$$

где  $s$  — длина дуги контура  $\Gamma$  с проекциями  $dx_i$  на координатные оси, отсчитываемая против хода часовой стрелки (см. рис. 3.5).

Напряжения (3.13) тождественно удовлетворяют этим условиям при  $i = 2, 3$ , а при  $i = 1$  с учетом (3.14) получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} = \frac{d\Psi}{ds} = 0, \quad (3.16)$$

т. е. на контуре  $\Gamma$  функция напряжений постоянна. Для стержней со сплошным (односвязным) поперечным сечением ее можно принять равной нулю, а в случае многосвязных сечений на каждом из замкнутых контуров она должна быть константой.

В любом поперечном сечении стержня касательные напряжения создают относительно оси  $Ox_1$  крутящий момент

$$M_1 = \iint_S (\sigma_{13}x_2 - \sigma_{12}x_3) dx_2 dx_3 = - \iint_S \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} x_3 \right) dx_2 dx_3,$$

который равен крутящему моменту, приложенному к свободному торцу стержня. Для односвязного поперечного сечения интегрированием по частям с учетом нулевого значения функции  $\Psi$  на контуре получим

$$2 \int_F \Psi dF = M_1, \quad (3.17)$$

С помощью (3.17) можно выразить  $\vartheta_1$ , от которого в силу (3.15) зависит  $\Psi$ , через заданное значение  $M_1$ . Согласно *принципу Сен-Венана*, на некотором расстоянии от торцов стержня касательные напряжения определяются лишь значением  $M_1$  и практически не зависят от способа задания этого момента на торце при  $x_1 = L$  и возникновения напряжений, уравнивающих его на торце при  $x_1 = 0$ .

**Пример 3.4.** Пусть крутящим моментом  $M_1$  нагружен прямолинейный стержень с эллиптическим поперечным сечением, которое ограничено контуром  $\Gamma$ , заданным уравнением

$$\left( \frac{x_2}{b_2} \right)^2 + \left( \frac{x_3}{b_3} \right)^2 = 1,$$

где  $b_2$  и  $b_3$  — полуоси эллипса.

Непосредственной проверкой можно установить, что граничному условию  $\Psi = 0$  на этом контуре и уравнению (3.15) удовлетворяет функция касательных напряжений в виде

$$\Psi = \mu\vartheta_1 \frac{b_2^2 b_3^2 - b_3^2 x_2^2 - b_2^2 x_3^2}{b_2^2 + b_3^2}.$$

Используя (3.17), находим

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{2\mu\vartheta_1}{b_2^2 + b_3^2} \left( \pi b_2^3 b_3^3 - b_3^2 \int_F x_2^2 dF - b_2^2 \int_F x_3^2 dF \right) = \\ &= \frac{2\mu\vartheta_1}{b_2^2 + b_3^2} (\pi b_2^3 b_3^3 - b_3^2 J_3 - b_2^2 J_2), \end{aligned}$$

где  $F = \pi b_2 b_3$  — площадь поперечного сечения;  $J_3 = \pi b_2^3 b_3 / 4$  и  $J_2 = \pi b_3^3 b_2 / 4$  — главные осевые моменты инерции этого сечения относительно его главных центральных осей (см. Д.2.1), совпадающих соответственно с координатными осями  $Ox_3$  и  $Ox_2$ .

В итоге получим

$$\vartheta_1 = M_1 \frac{b_2^2 + b_3^2}{\mu \pi b_2^3 b_3^3}; \quad \Psi = M_1 \frac{b_2^2 b_3^2 - b_3^2 x_2^2 - b_2^2 x_3^2}{\pi b_2^3 b_3^3}.$$

Отсюда с помощью (3.14) вычислим

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -2M_1 \frac{x_3}{\pi b_2 b_3^3}; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2M_1 \frac{x_2}{\pi b_2^3 b_3}.$$

Отметим, что отношение касательных напряжений пропорционально отношению  $x_3/x_2$ , т.е. постоянно вдоль любого луча, проходящего через начало координат (рис. 3.6). Направление вектора

$$\boldsymbol{\tau} = \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3$$

(где  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  — орты координатных осей  $Ox_2$  и  $Ox_3$  соот-

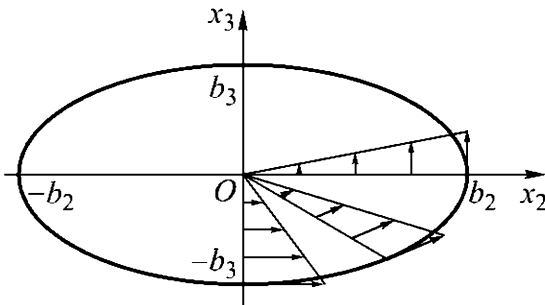


Рис. 3.6

ветственно) параллельно касательной к контуру в точке его пересечения этим лучом. Наибольшие по абсолютному значению касательные напряжения, при  $b_2 > b_3$  равные

$$\tau_{\max} = \frac{2M_1}{\pi b_2 b_3^2},$$

возникают в точках пересечения контура малой осью эллипса. В случае  $b_2 = b_3 = R$  это значение совпадает со значением, которое следует из (3.8) для стержня с круглым поперечным сечением.

Проекции  $u_2$  и  $u_3$  вектора  $u$  перемещения точек поперечного сечения с координатой  $x_1$ , отсчитываемой вдоль осевой линии стержня, можно найти из (3.11). Для проекции  $u_1$  с использованием (3.12) и (3.13) получим

$$u_1 = M_1 x_2 x_3 \frac{b_2^2 - b_3^2}{\mu \pi b_2^2 b_3^2}.$$

На рис. 3.7 представлены изолинии  $u_1 = \vartheta_1 \Pi(x_2, x_3)$  (сплошные линии соответствуют отклонениям от плоскости в одну сторону вдоль продольной оси  $Ox_1$ , а штриховые — в другую). ♦

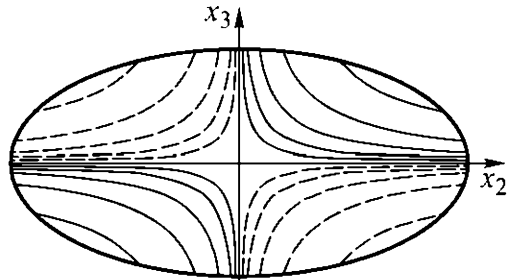


Рис. 3.7

### 3.3. Гидромеханическая, мембранная и песочная аналогии

Сопоставим построенную в 3.2 математическую модель кручения прямолинейного стержня с произвольным, но постоянным поперечным сечением, и математическую модель плоскопараллельного установившегося циркуляционного движения идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрическом сосуде с геометрически подобным поперечным сечением. Для движения жидкости параллельно координатной плоскости  $x_2 O x_3$  введем функцию тока  $\psi(x_2, x_3)$  с помощью соотношений [13, п. 8.4]

$$v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}; \quad v_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad (3.18)$$

где  $v_2$  и  $v_3$  — проекции вектора  $\mathbf{v}$  скорости жидкости на оси  $Ox_2$  и  $Ox_3$  соответственно.

Тогда **уравнение неразрывности** для такого движения удовлетворяется тождественно:

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \equiv 0.$$

При циркуляционном движении жидкости с постоянной угловой скоростью

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \text{const}$$

ее частиц относительно оси  $Ox_1$  получим дифференциальное уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = -2\omega_1,$$

идентичное (3.15) для *функции  $\Psi$  касательных напряжений*. На непроницаемых стенках сосуда нормальная составляющая скорости равна нулю, что равносильно условию постоянства значения  $\psi$  на контуре поперечного сечения сосуда, т. е.  $d\psi/ds = 0$ , где  $s$  — длина дуги этого контура. Это условие идентично *граничному условию* (3.16). Таким образом, математические модели, описывающие движение жидкости и кручение стержня, совпадают с точностью до обозначений, что обосновывает так называемую **гидромеханическую аналогию** между течением жидкости и распределением касательных напряжений при кручении. При этом вектор  $\boldsymbol{\tau}$  касательного напряжения соответствует вектору  $\mathbf{v}$  скорости жидкости.

Если боковая поверхность стержня с произвольным поперечным сечением свободна от касательных напряжений, направленных вдоль его оси, то при кручении стержня вокруг этой оси касательное напряжение в любой точке на участках гладкого контура направлено по касательной к контуру, а в точке контура, являющейся вершиной выступающего угла, равно нулю. Это непосредственно следует из *правила парности касательных напряжений* и согласуется с гидромеханической аналогией.

Замкнутой **линии тока**  $\psi = \text{const}$ , в каждой точке которой скорость жидкости направлена по касательной к этой линии, соответствует при кручении замкнутая плоская кривая  $\Gamma'$ , являющаяся изолинией  $\Psi = \text{const}$  и называемая **траекторией касательных напряжений**. К этой траектории касателен вектор  $\boldsymbol{\tau} = \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3$ , где  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{13}$  — **касательные напряжения** в поперечном сечении стержня;  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  — орты, определяющие направление координатных осей  $Ox_2$  и  $Ox_3$  соответственно. Учитывая (3.14) и используя формулу Стокса, получаем для **циркуляции вектора  $\boldsymbol{\tau}$**  соотношение, идентичное формуле для циркуляции вектора скорости жидкости по замкнутому контуру [13]:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} \boldsymbol{\tau} ds &= \int_{F'} (\mathbf{e}_1 \cdot \nabla_2 \times \boldsymbol{\tau}) dF = \int_{F'} \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_3} \right) dF = \\ &= \int_{F'} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) dF = 2\mu\vartheta_1 F', \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $\tau = |\boldsymbol{\tau}|$  при условии, что отсчет длины дуги кривой  $\Gamma'$  происходит в направлении вектора  $\boldsymbol{\tau}$ ;  $F'$  — область, ограниченная контуром  $\Gamma'$ ;  $\mathbf{e}_1$  — орт, определяющий направление координатной оси  $Ox_1$ ;  $\nabla_2$  — дифференциальный оператор Гамильтона, действующий в координатной плоскости  $x_2Ox_3$ ;  $\mu$  — **модуль сдвига** материала стержня;  $\vartheta_1$  — **угол закручивания** стержня, приходящийся на единицу его длины.

Помимо гидродинамической аналогии полезно иметь в виду так называемую **мембранную** (или **пленочную**) **аналогию**, предложенную Л. Прандтлем. Он использовал уравнение равновесия **мембраны** (2.41) под действием давления  $p$  в виде

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_3^2} = -\frac{p}{N^*}, \quad (3.20)$$

где  $\omega$  и  $N^*$  — прогиб и натяжение мембраны соответственно (см. Д.2.3). Это уравнение идентично (3.15) для функции  $\Psi$  касательных напряжений.

При закреплении мембраны по плоскому контуру, подобному контуру односвязного поперечного сечения стержня, граничное условие  $w = 0$  на этом контуре идентично граничному условию  $\Psi = 0$ . Линии равных прогибов мембраны на ее поверхности соответствуют траекториям касательных напряжений, а объем, ограниченный поверхностью мембраны и плоскостью ее контура, пропорционален *крутящему моменту*  $M_1$ .

Подставляя в (3.20)

$$w = w_1 - \frac{p}{4N^*}(x_2^2 + x_3^2),$$

приходим к дифференциальному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_3^2} = 0.$$

Оно описывает равновесие ненагруженной, но закрепленной по контуру мембраны, при этом значения  $w_1$  на контуре заданы из условия

$$w_1 - \frac{p}{4N^*}(x_2^2 + x_3^2) = \text{const.}$$

В качестве такой мембраны можно использовать мыльную пленку, для которой  $N^*$  соответствует ее *поверхностному натяжению*.

Гидромеханическая и мембранная аналогии позволяют получить на качественном уровне представление об особенностях распределения касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении прямолинейного стержня, нагруженного крутящим моментом. В отличие от стержня с круглым поперечным сечением, в котором наибольшие касательные напряжения возникают в наиболее удаленных от *осевой линии стержня* точках на контуре сечения, в данном случае касательные напряжения в наиболее удаленных угловых точках равны нулю, а наибольших значений достигают в серединах длинных сторон контура. Это следует и из гидромеханической аналогии, поскольку скорость вращательного движения жидкости вдоль длинной стороны контура больше, чем вдоль короткой, а в углах равна нулю. В мембранной аналогии значение касательного напряжения пропорционально модулю градиента функции  $w$  прогиба мембраны.

В углах этот модуль равен нулю, а наибольшего значения достигает в серединах длинных сторон контура. Строгое решение задачи о кручении стержня с прямоугольным поперечным сечением (см. Д.3.1) подтверждает эти выводы.

Если материал стержня можно считать *идеально упруго-пластическим*, то при весьма больших углах закручивания касательные напряжения практически по всей площади поперечного сечения равны *пределу текучести*  $\tau_T$  при чистом сдвиге, но их направления различны. При вычислении предельного значения крутящего момента для такого стержня можно применить (3.17), предварительно найдя распределение по сечению функции  $\Psi$  касательных напряжений.

Для стержня с односвязным поперечным сечением рассмотрим две близкие замкнутые траектории  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  касательных напряжений, являющиеся одновременно изолиниями функции касательных напряжений. В силу гидромеханической аналогии эти изолинии геометрически подобны линиям тока несжимаемой идеальной жидкости при ее установившемся вращательном движении. Известно [13, п. 8.4], что в этом случае расход жидкости между линиями тока постоянен, т. е.  $vh' = \text{const}$ , где  $v$  — среднее значение скорости жидкости между этими линиями тока;  $h'$  — расстояние между ними. Поскольку аналогом скорости жидкости является касательное напряжение  $\tau$ , при  $\tau = \tau_T = \text{const}$  расстояние  $h$  между соседними изолиниями функции касательных напряжений должно быть постоянно. Это означает, что указанные изолинии эквидистантны, причем контуру поперечного сечения соответствует изолиния  $\Psi = 0$ . Отложив от контура  $\Gamma$  по направлению внутренней нормали одинаковое расстояние  $h$ , можно перейти к изолинии  $\Psi = \tau_T h$  и т. д.

Для многоугольного поперечного сечения с контуром  $\Gamma$  изолинии также являются многоугольными, причем их вершины лежат на биссектрисах углов этого контура.

**Пример 3.5.** Для прямоугольного поперечного сечения со сторонами  $b_2$  и  $b_3 < b_2$  (рис. 3.8) биссектрисы углов и отрезок прямой между точками их пересечения разбивают площадь этого сечения на четыре части. Таким образом, поверхность, опре-

деляемая функцией касательных напряжений, в данном случае

представляет собой четырехскатную «крышу» с «коньком» высотой  $\tau_{\tau} b_3/2$ . Предельное значение крутящего момента

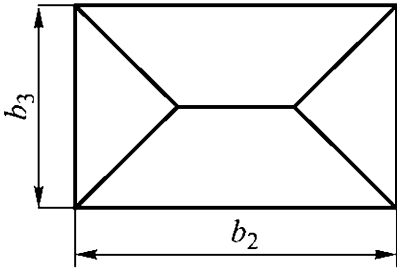


Рис. 3.8

$$M_{\tau} = \tau_{\tau} \frac{b_3^2}{2} \left( b_2 - \frac{b_3}{3} \right),$$

согласно (3.17), равно удвоенному объему под этой «крышей». ♦

Характерной особенностью многоскатных «крыш» для различных форм поперечного сечения стержня является одинаковый наклон всех скатов, определяемый значением  $\tau_{\tau}$ . Это служит основанием для так называемой *песочной аналогии*, поскольку «крыша» совпадает с поверхностью холмика песка, насыпанного на основание, одинаковое по форме с поперечным сечением стержня.

### 3.4. Примеры применения аналогий

**Пример 3.6.** Пусть в отличие от круглой тонкостенной трубки, рассмотренной в примере 3.1, тонкостенный *прямолинейный стержень* длиной  $L$  имеет *поперечное сечение*, ограниченное двумя гладкими замкнутыми кривыми, одна из которых вложена в другую (рис. 3.9). Толщина  $h(s)$  стенки в общем случае является функцией длины  $s$  дуги средней линии между этими кривыми. Длина дуги отсчитывается от некоторой выбранной точки средней линии. Условия закрепления и нагружения стержня примем такими же, как и в случае круглой тонкостенной трубки. Однако теперь, полагая касательные напряжения  $\tau(s)$  неизменными по толщине стенки, необходимо учитывать их зависимость от  $s$ .

Следуя *гидромеханической аналогии*, можно предположить в силу постоянства расхода несжимаемой жидкости в замкнутом канале, соответствующем стенке, что  $\tau(s)h(s) = \text{const}$ . Действительно, из рассмотрения элемента  $ABCD$ , вырезанного из

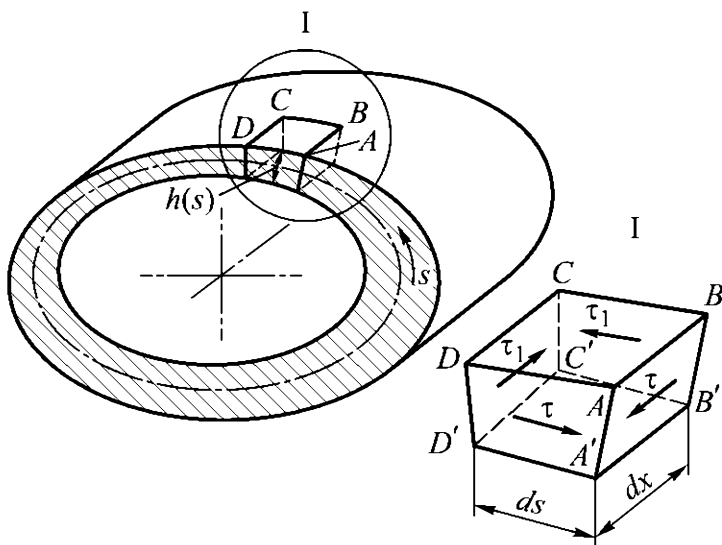


Рис. 3.9

стержня (см. рис. 3.9), согласно *правилу парности касательных напряжений*, они равны  $\tau = \tau(s)$  на гранях  $ABB'A'$ ,  $ADD'A'$  и  $\tau_1$  на гранях  $BCC'B'$ ,  $CDD'C'$ . На грань  $ABB'A'$  действует сила

$$dP = \tau(s)h(s) dx,$$

а на грань  $CDD'C'$  — сила

$$dP_1 = \tau(s)h(s) dx + \frac{\partial(\tau(s)h(s) dx)}{\partial s} ds.$$

Проецируя эти силы на направление *осевой линии стержня*, из условия равновесия элемента  $ABCD$  получаем

$$\frac{d(P_1 - P)}{dx} = \frac{d(\tau(s)h(s))}{ds} = 0,$$

т. е.  $\tau(s)h(s) = \text{const} = C_0$ .

Для установления связи  $\tau(s)$  с действующим на тонкостенный стержень *крутящим моментом*  $M_1$  представим поперечное сечение в виде контура  $\Gamma$ , соответствующего средней линии стенки стержня (рис. 3.10).

Сила  $dP = \tau(s)h(s) ds = C_0 ds$ , приложенная в точке  $N_s$  и соответствующая элементу дуги  $ds$ , создает относительно произвольной точки  $O$  момент

$$dM_1 = C_0 r(s) ds,$$

где  $r(s)$  — плечо этой силы, которое равно длине перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на касательную к средней линии стенки в точке  $N_s$ .

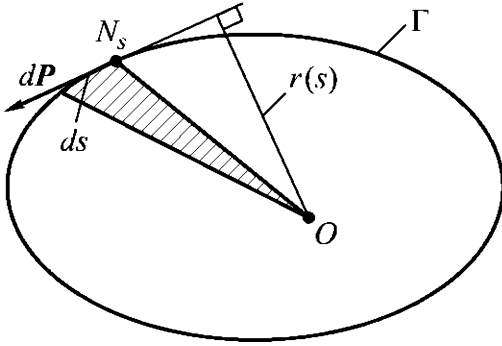


Рис. 3.10

При этом  $r(s) ds$  есть удвоенная площадь заштрихованного на рис. 3.10 треугольника с основанием  $ds$  и вершиной в точке  $O$ . Обходя весь контур средней линии, находим суммарный момент  $M_1 = 2C_0 F_0$ , где  $F_0$  — площадь, ограниченная этим контуром. Отсюда с учетом равенства крутящего момента в поперечном сечении крутящему моменту, приложенному к торцу рассматриваемого стержня, получаем

$$\tau(s) = \frac{M_1}{2h(s)F_0}. \quad (3.21)$$

Для вычисления угла  $\varphi_L$  поворота сечения, в котором приложен крутящий момент  $M_1$ , при линейной связи между  $M$  и  $\varphi_L$  приравняем работу  $M_1 \varphi_L / 2$  к накопленной в стержне потенциальной энергии деформации. Для материала, подчиняющегося обобщенному закону Гука, объемная плотность этой энергии в случае напряженного состояния чистого сдвига составляет  $\tau^2 / (2\mu)$ , а полная энергия с учетом (3.21)

$$L \int_{\Gamma} \frac{\tau^2}{2\mu} ds = \frac{M_1^2 L}{8\mu F_0^2} \int_{\Gamma} \frac{ds}{h(s)},$$

где  $\mu$  — модуль сдвига.

Таким образом,

$$\varphi_L = \frac{M_1 L}{4\mu F_0^2} \int_{\Gamma} \frac{ds}{h(s)}. \quad (3.22)$$

В случае неупругого поведения материала стержня сохраняет силу (3.21), но энергетический подход для нахождения  $\varphi_L$  требует уточнения. ♦

Внутренний контур, ограничивающий поперечное сечение тонкостенного стержня, может иметь точки, являющиеся вершинами входящих углов. В окрестности таких точек касательные напряжения выше по сравнению с  $\tau$ , определяемыми с помощью (3.21). Снижения концентрации напряжений можно добиться скруглением входящего угла.

**Пример 3.7.** Пусть тонкостенный прямолинейный стержень имеет фрагмент поперечного сечения, показанный на рис. 3.11. Опираясь на *мембранную аналогию*, можно считать, что прогиб мембраны (а значит, и *функция касательных напряжений*) в окрестности входящего угла зависит лишь от радиуса  $r$ , который отсчитывается от точки  $O$  — центра дуги окружности радиусом  $r_0$ , скругляющей входящий угол. Тогда применительно к этой окрестности (3.15) можно записать в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi}{dr} \right) = -2\mu\vartheta_1,$$

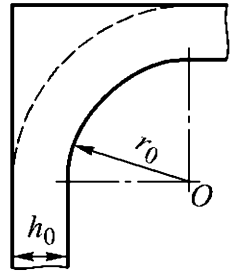


Рис. 3.11

где  $\Psi$  — *функция касательных напряжений*;  $\mu$  — *модуль сдвига*;  $\vartheta_1$  — *угол закручивания стержня, приходящийся на единицу его длины*.

После подстановки  $\tau(r) = d\Psi/dr$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau(r))}{dr} = -2\mu\vartheta_1$$

с общим решением

$$\tau(r) = \frac{C}{r} - \mu\vartheta_1 r, \quad C = \text{const.} \quad (3.23)$$

Если за исключением утолщений в окрестности углов поперечное сечение тонкостенного стержня имеет постоянную толщину  $h_0$ , то, согласно (3.21) и (3.22), можно без учета вклада в крутящий момент концентрации напряжений принять

$$\frac{\mu\varphi L}{L} = \mu\vartheta_1 = \frac{\tau_0 s_0}{2F_0}, \quad (3.24)$$

где  $\tau_0$  — касательное напряжение в части поперечного сечения с постоянной толщиной;  $s_0$  и  $F_0$  — длина средней линии сечения и площадь, ограниченная этой линией.

Константу  $C$  в (3.23) в силу гидромеханической аналогии можно найти из условия

$$\int_{r_0}^{r_0+h_0} \tau(r) dr = \tau_0 h_0.$$

После нахождения константы  $C$  с учетом (3.24) получим

$$\tau(r) = \frac{\tau_0 \frac{h_0}{r} \left( 1 - \frac{s_0(2r_0 + h_0)}{4F_0} \right)}{\ln(1 + h_0/r_0)} + \frac{\tau_0 s_0 r}{2F_0}.$$

Для реальных тонкостенных стержней с замкнутым профилем обычно

$$\frac{s_0(2r_0 + h_0)}{4F_0} \ll 1; \quad \frac{s_0 r}{2F_0} \ll 1,$$

так что концентрацию напряжений можно оценить по формуле

$\tau(r_0)/\tau_0$

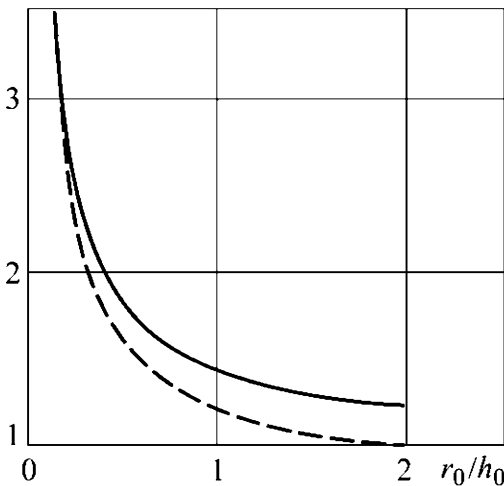


Рис. 3.12

$$\frac{\tau(r)}{\tau_0} = \frac{h_0/r}{\ln(1 + h_0/r_0)}. \quad (3.25)$$

На рис. 3.12 сплошной линией изображена зависимость (3.25) при  $r = r_0$ , а штриховой — полученная численным методом без предположения о том, что в окрестности входящего угла касательные напряжения являются функцией лишь радиуса  $r$ . ♦

**Пример 3.8.** В технике находят применение тонкостенные стержни замкнутого профиля с несколькими полостями. К расчетной схеме такого стержня можно свести самолетное крыло, внутри которого установлена тонкостенная перемычка толщиной  $h_0$  (рис. 3.13).

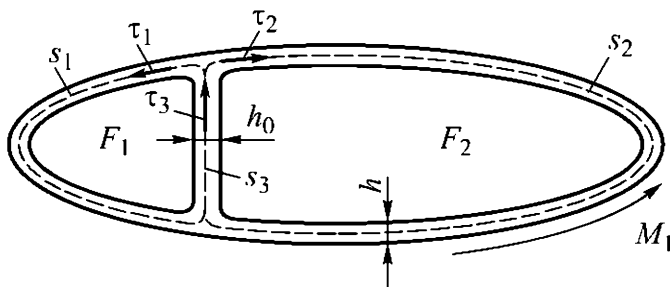


Рис. 3.13

Приняв толщину  $h$  обшивки крыла постоянной, в силу гидромеханической аналогии с учетом указанных на рис. 3.13 направлений касательных напряжений запишем

$$(\tau_1 - \tau_2)h = \tau_3 h_0,$$

т. е. можно условно представить, что в силовом отношении перемычка состоит из двух слоев толщиной  $h$  каждый, но в одном из них действует напряжение  $\tau_1$ , а в другом — направленное навстречу напряжению  $\tau_2$ . Тогда, согласно (3.21), напряжение  $\tau_1$  в части поперечного сечения крыла, соответствующей площади  $F_1$ , создаст крутящий момент  $M'_1 = 2F_1\tau_1h$ , а напряжение  $\tau_2$  в части, соответствующей площади  $F_2$ , — момент  $M''_1 = 2F_2\tau_2h$ . В итоге суммарный крутящий момент

$$M_1 = M'_1 + M''_1 = 2(F_1\tau_1 + F_2\tau_2)h.$$

Угол  $\vartheta_1$  для обеих частей поперечного сечения крыла одинаков, поэтому, согласно (3.19), для траекторий касательных напряжений можно записать

$$\tau_1 s_1 + \tau_3 s_3 = \mu \vartheta_1 F_1; \quad \tau_2 s_2 - \tau_3 s_3 = \mu \vartheta_1 F_2,$$

где  $s_1, s_2$  — длины участков обшивки;  $s_3$  — длина перемычки.

Считая значение крутящего момента  $M_1$  заданным и разрешая выписанные равенства относительно напряжений, получаем

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{M_1}{Z_*} (h_0 s_2 F_1 + h s_3 (F_1 + F_2)); \\ \tau_2 &= \frac{M_1}{Z_*} (h_0 s_1 F_2 + h s_3 (F_1 + F_2)); \\ \tau_3 &= \frac{M_1 h}{Z_*} (s_2 F_1 - s_1 F_2),\end{aligned}$$

где

$$Z_* = 2h (h_0 (s_2 F_1^2 + s_1 F_2^2) + h s_3 (F_1 + F_2)^2).$$

Угол закручивания

$$\vartheta_1 = \frac{M_1}{Z_*} \frac{h_0 s_1 s_2 + h (s_1 + s_2) s_3}{2\mu}.$$

Отметим, что в случае симметричного относительно перемычки поперечного сечения (при  $s_1 = s_2$  и  $F_1 = F_2$ ) напряжения в ней отсутствуют, но ее параметры влияют на жесткость крыла при кручении. ♦

**Пример 3.9.** Пусть крутящим моментом  $M_1$  нагружена полоса длиной  $L$ , толщиной  $h$  и шириной  $b$  (рис. 3.14, а), причем  $h \ll b$ .

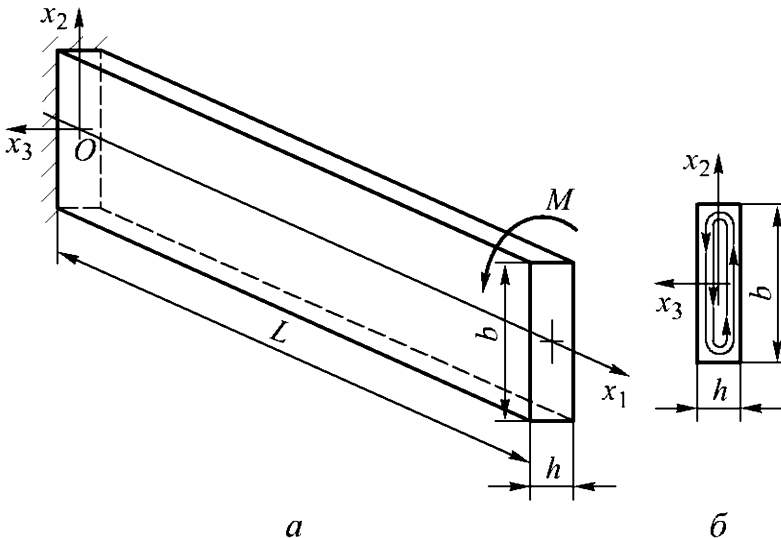


Рис. 3.14

Такую полосу можно рассматривать как тонкостенный стержень с незамкнутым профилем поперечного сечения. В соответствии с мембранной аналогией можно считать, что в плоскости  $x_3 = 0$  касательные напряжения равны нулю, а по толщине полосы они распределены линейно, т. е.

$$\tau(x_3) = 2\tau_{\max} \frac{x_3}{h},$$

где  $\tau_{\max}$  — наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении полосы при  $x_3 = h/2$ , поскольку между близкими сторонами мембрана прогибается практически по параболе (за исключением зон около углов).

Качественная картина траекторий касательных напряжений в поперечном сечении полосы с учетом гидромеханической аналогии приведена на рис. 3.14, б. Исходя из этой картины незамкнутый профиль полосы можно условно представить как замкнутый тонкостенный толщиной  $h/2$  с разрезом по плоскости  $x_3 = 0$  с нулевыми касательными напряжениями. Выделив в таком замкнутом профиле тонкостенное кольцо толщиной  $dx_3$  и площадью  $F(x_3) = 2bx_3$  и применив (3.21), запишем вклад этого кольца в уравновешивание приложенного крутящего момента:

$$dM_1(x_3) = 2F(x_3)\tau(x_3)dx_3 = 8\frac{b}{h}\tau_{\max}x_3^2 dx_3.$$

Тогда после интегрирования получим

$$M_1 = 8\frac{b\tau_{\max}}{h} \int_0^{h/2} x_3^2 dx_3 = \frac{bh^2\tau_{\max}}{3}. \quad (3.26)$$

Такой же результат следует из решения задачи о кручении прямолинейного стержня с прямоугольным поперечным сечением, если  $h/b \rightarrow 0$  (см. Д.3.1).

Для установления связи между моментом  $M_1$  и углом  $\vartheta_1 = \varphi_L/L$  закручивания полосы, приходящимся на единицу ее длины, ис-

пользуем, как и ранее, энергетический подход, приравняв работу  $M_1\varphi_L/2$  к запасенной в полосе потенциальной энергии деформации

$$L \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau^2(x_3)}{2\mu} b dx_3 = \frac{4L\tau_{\max}^2 b}{\mu h^2} \int_0^{h/2} x_3^2 dx_3 = \frac{\tau_{\max}^2 L b h}{6\mu}.$$

В итоге с учетом (3.26) находим

$$\vartheta_1 = 3 \frac{M_1}{\mu b h^3} = \frac{\tau_{\max}}{\mu h}. \quad (3.27)$$

Выражение  $\mu b h^3/3$  характеризует *жесткость полосы при кручении*.

Рассмотренный подход и (3.26), (3.27) в первом приближении справедливы для прямолинейного тонкостенного стержня с произвольным незамкнутым профилем поперечного сечения, если этот профиль разбить на  $n$  участков с постоянной толщиной  $h_i$  и длиной  $b_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда суммарная жесткость при кручении равна сумме жесткостей отдельных участков и вместо (3.27) получим

$$\vartheta_1 = \frac{3M_1/\mu}{\sum_{i=1}^n b_i h_i^3}. \quad (3.28)$$

Из (3.26)–(3.28) следует, что наибольшее касательное напряжение на  $i$ -м участке

$$\tau_{\max, i} = \vartheta_1 \mu h_i. \quad (3.29)$$

Заметные отклонения от (3.29) могут возникнуть в зоне входящих углов для гнутых из листа, прокатных или прессованных профилей (аналогичная ситуация для тонкостенных стержней с замкнутыми профилями рассмотрена в примере 3.7). При радиусе  $r_0$  скругления входящего угла (см. рис. 3.11) примем, что касательное напряжение в зоне этого угла обращается в нуль при  $r = r_0 + h_0/2$ . Тогда из (3.23) получим значение константы  $C = \mu \vartheta_1 (r_0 + h_0/2)^2$  и наибольшее касательное напряжение при  $r = r_0$

$$\tau_{\max} = \tau(r_0) = \vartheta_1 \mu h_0 \left(1 + \frac{h_0}{4r_0}\right). \quad (3.30)$$

Из сравнения (3.30) с (3.29) следует, что концентрация касательных напряжений в скругленном входящем угле определяется множителем  $1 + h_0/(4r_0)$ . ♦

### Дополнение 3.1. Кручение стержня с прямоугольным поперечным сечением

Пусть *прямолинейный стержень* с постоянным *поперечным сечением* прямоугольной формы со сторонами  $b_2$  и  $b_3$  нагружен *крутящим моментом*  $M_1$ . *Функция*  $\Psi(x_2, x_3)$  *касательных напряжений* должна удовлетворять дифференциальному уравнению Пуассона (3.15) и *граничному условию*  $\Psi = 0$  на всех сторонах прямоугольника.

Поместим начало ортогональной системы координат  $Ox_2x_3$  в центр поперечного сечения. Тогда в силу *мембранной аналогии* функция  $\Psi$  должна быть четной относительно своих аргументов. Решение уравнения (3.15) можно искать в виде

$$\Psi(x_2, x_3) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x_2) \cos \frac{2n-1}{b_3} \pi x_3, \quad A_n = \text{const.} \quad (3.31)$$

Это решение удовлетворяет граничному условию  $\Psi = 0$  при  $x_3 = \pm b_3/2$ . Чтобы получить уравнения, которым удовлетворяют пока еще неизвестные функции  $X_n(x_2)$ , предварительно представим правую часть (3.15) рядом Фурье [5]:

$$-2\mu\vartheta_1 = -2\mu\vartheta_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} (-1)^{n-1} \cos \frac{2n-1}{b_3} \pi x_3, \quad (3.32)$$

где  $\mu$  — *модуль сдвига*;  $\vartheta_1$  — *угол закручивания стержня*, приходящийся на единицу его длины.

Подстановка (3.31) и (3.32) в (3.15) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) второго порядка

$$\frac{d^2 X_n}{dx_2^2} - (2n-1)^2 \pi \frac{X_n}{b_3^2} = -\frac{8\mu\vartheta_1 (-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi A_n}$$

относительно функций  $X_n(x_2)$ , которые должны удовлетворять граничным условиям  $X_n(x_2) = 0$  на сторонах поперечного сечения при  $x_2 = \pm b_2/2$ .

Решение ОДУ с учетом четности функции  $\Psi$  по аргументу  $x_2$  имеет вид

$$X_n(x_2) = C_1 \operatorname{ch} \left( (2n-1)\pi \frac{x_2}{b_3} \right) + C_2,$$

где

$$C_2 = \frac{8\mu\vartheta_1 b_3^2 (-1)^{n-1}}{(2n-1)^3 \pi^3 A_n}.$$

Из граничных условий следует, что

$$C_1 = -\frac{C_2}{\operatorname{ch} \left( (2n-1)\pi \frac{b_2}{b_3} \right)}.$$

В итоге с учетом (3.31) получим

$$\Psi = \frac{8\mu\vartheta_1 b_3^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \left( (2n-1)\frac{\pi x_2}{b_3} \right)}{\operatorname{ch} \left( (2n-1)\frac{\pi b_2}{2b_3} \right)} \right) \cos \frac{2n-1}{b_3} \pi x_3.$$

Отсюда, согласно (3.14), дифференцированием находим

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = \\ &= -\frac{8\mu\vartheta_1 b_3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \left( (2n-1)\frac{\pi x_2}{b_3} \right)}{\operatorname{ch} \left( (2n-1)\frac{\pi b_2}{2b_3} \right)} \right) \sin \frac{2n-1}{b_3} \pi x_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \sigma_{31} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \\ &= \frac{8\mu\vartheta_1 b_3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \frac{\operatorname{sh} \left( (2n-1)\frac{\pi x_2}{b_3} \right)}{\operatorname{ch} \left( (2n-1)\frac{\pi b_2}{2b_3} \right)} \cos \frac{2n-1}{b_3} \pi x_3. \end{aligned}$$

Из гидромеханической аналогии следует, что наибольшие по абсолютному значению касательные напряжения возникают в средних точках длинных сторон прямоугольника. При  $b_2 > b_3$  это точки с координатами  $x_2 = 0$  и  $x_3 = \pm b_3/2$ , в которых  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = 0$  и с учетом равенства  $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots = \pi^2/8$  [8]

$$|\sigma_{12}| = |\sigma_{21}| = \tau_{\max} = \mu\vartheta_1 b_3 - \frac{8\mu\vartheta_1 b_3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}((2n-1)\pi b_2/(2b_3))}.$$

В случае  $b_2 \gg b_3$  суммой ряда можно пренебречь. Тогда значение  $\tau_{\max} = \mu\vartheta_1 b_3$  при  $b_3 = h$  совпадает со значением, которое следует из (3.27) для тонкостенного стержня с незамкнутым профилем поперечного сечения (см. пример 3.9).

Используя (3.17) для установления связи между  $M_1$  и  $\vartheta_1$  и учитывая равенство  $1 + 1/3^4 + 1/5^4 + \dots = \pi^4/96$  [8], находим

$$M_1 = 2 \int_{-b_2/2}^{b_2/2} dx_2 \int_{-b_3/2}^{b_3/2} \Psi(x_2, x_3) dx_3 = \\ = \frac{\mu\vartheta_1 b_3^3 b_2}{3} \left( 1 - \frac{192b_3}{\pi^5 b_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}((2n-1)\pi b_2/(2b_3))}{(2n-1)^5} \right).$$

При  $b_2 \gg b_3$  сумма ряда пренебрежимо мала. Это с учетом (3.27) и обозначений  $b_2 = b$  и  $b_3 = h$  позволяет записать  $M_1 = bh^2 \tau_{\max}/3$ , что совпадает с (3.26) в примере 3.9.

Для квадратного поперечного сечения ( $b_2 = b_3 = b$ ) [35]

$$\tau_{\max} = 0,675\mu\vartheta_1 b; \quad M_1 = 0,208\tau_{\max} b^3.$$

Формула для функции  $\Psi(x_2, x_3)$  с учетом (3.13) и (3.14) позволяет найти функцию депланации в виде [24]

$$\Pi = x_2 x_3 - \frac{8b_2^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \frac{\operatorname{sh}((2n-1)\pi x_3/b_2)}{\operatorname{ch}((2n-1)\pi b_3/(2b_2))} \sin \frac{(2n-1)\pi x_2}{b_2}.$$

На рис. 3.15, а, согласно (3.12), изолиниями перемещения  $u_1 = \vartheta_1 \Pi$  изображено отклонение квадратного поперечного сечения ( $b_2 = b_3$ ) от плоского (сплошные линии соответствуют

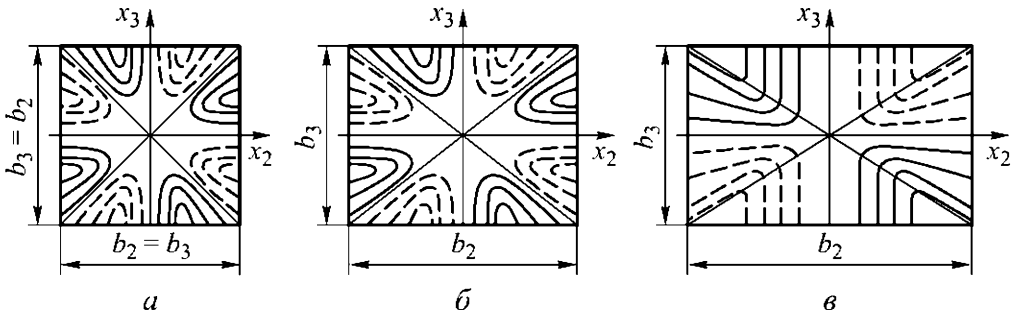


Рис. 3.15

отклонениям от плоскости в одну сторону вдоль продольной оси  $Ox_1$ , а штриховые — в противоположную). Вдоль осей симметрии сечения  $u_1 = 0$ . На рис. 3.15, б и в представлены изолинии этого перемещения при  $b_2/b_3 < 1,4513$  и  $b_2/b_3 \geq 1,4513$  соответственно.

### Вопросы и задачи

**3.1.** Проведите подробный вывод формулы (3.17).

**3.2.** Убедитесь, что функция касательных напряжений в виде  $\Psi(r) = A(r^2 - R^2)$  является решением задачи о кручении линейно упругого прямолинейного стержня с круглым поперечным сечением радиусом  $R$ . Выразите коэффициент  $A$  через модуль сдвига  $\mu$  и угол  $\vartheta_1$  закручивания стержня, приходящийся на единицу его длины. Перейдя в (3.14) к полярным координатам и используя (3.17), найдите наибольшее касательное напряжение и связь между углом  $\vartheta_1$  и крутящим моментом  $M_1$ , сравнив полученные результаты с приведенными в примере 3.2. Чему будет равен коэффициент  $A$ , если касательные напряжения во всех точках поперечного сечения достигнут предельного значения, равного пределу текучести  $\tau_T$  материала стержня при чистом сдвиге?

**3.3.** При одинаковом значении  $\vartheta_1$  сравните наибольшие касательные напряжения в стержнях с эллиптическим и круговым поперечным сечением при условии, что радиус круга равен малой полуоси эллипса. Какой из этих стержней будет воспринимать больший крутящий момент при одинаковом значении допускаемого напряжения?

**3.4.** В стержне с исходным круглым поперечным сечением радиусом  $R$  сделана вдоль образующей выемка радиусом  $r_0 < R$ , осевая линия которой совпадает с этой образующей. Постройте функцию касательных напряжений, удовлетворяющую граничному условию на контуре полученного поперечного сечения, и найдите наибольшее касательное напряжение и жесткость стержня при кручении, сопоставив полученные результаты с представленными в примере 3.2. Чему будет равен крутящий момент, если касательные напряжения во всех точках поперечного сечения достигнут предельного значения, равного  $\tau_T$ ?

**3.5.** Замкнутый тонкостенный профиль поперечного сечения линейно упругого стержня имеет постоянную толщину  $h$ , длину  $s_0$  контура средней линии профиля и площадь  $F_0$ , охватываемую этим контуром. При условии одинаковых значений наибольших касательных напряжений сравните крутящие моменты, углы закручивания стержня, приходящиеся на единицу его длины, и жесткости при кручении стержня в исходном состоянии и после его тонкого продольного разреза вдоль образующей.

## 4. ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК

Вид нагружения, вызывающий в *поперечном сечении стержня напряжения*, которые создают *изгибающий момент*, вектор  $\mathbf{M}$  которого лежит в плоскости этого сечения, называют *изгибом стержня*. Такой момент возникает при нагружении *прямолинейного стержня* силами, которые лежат в плоскостях, содержащих *осевую линию стержня*. Если изгибающий момент в поперечном сечении стержня является единственным *внутренним силовым фактором*, то говорят о *чистом изгибе* [38].

### 4.1. Чистый изгиб прямолинейного стержня

Пусть один торец (при  $x_1 = 0$ ) *прямолинейного стержня* длиной  $L$  с *поперечным сечением* площадью  $F$  неподвижно закреплен, а ко второму торцу (при  $x_1 = L$ ) приложен *изгибающий момент*  $M_3$ , стремящийся повернуть этот торец относительно оси  $Ox_3$  (рис. 4.1). Такой момент может быть создан парой сил, параллельных *осевой линии стержня* и лежащих в координатной плоскости  $x_1Ox_2$ . Поперечное сечение стержня примем симметричным относительно оси  $Ox_2$ .

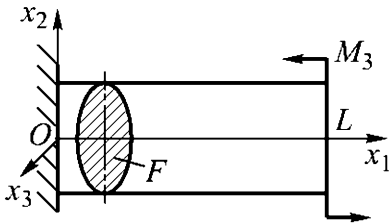


Рис. 4.1

Используем *гипотезу плоских сечений*, т. е. предположим, что первоначально плоские поперечные сечения после *изгиба стержня* сохраняют плоскую форму. Эта гипотеза равносильна представлению изгибаемого стержня в виде пучка параллельных оси волокон, каждое из которых может быть лишь растянуто или сжато *нормальным напряжением*  $\sigma_{11}$ . Двумя близкими сечениями выделим отрезок  $AB$  такого волокна длиной  $dx_1$  с конечными точками  $A(x_1, x_2, x_3)$  и  $B(x_1 + dx_1, x_2, x_3)$  (рис. 4.2).

Перемещение  $du_B$  точки  $B$  относительно точки  $A$  зависит как от смещения сечения с координатой  $x_1 + dx_1$  вдоль оси  $Ox_1$  на расстояние  $du_0$ , так и от поворота этого сечения относительно оси  $Ox_3$  на угол  $d\theta_3$ . В итоге получим  $du_B = du_0 - x_2 d\theta_3$ , так что *продольная деформация* отрезка  $AB$

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_B}{dx_1} = \frac{du_0}{dx_1} - x_2 \frac{d\theta_3}{dx_1} = \varepsilon_0 - x_2 \varkappa_3, \quad (4.1)$$

где  $\varepsilon_0 = du_0/dx_1$ ;  $\varkappa_3 = d\theta_3/dx_1$  — кривизна осевой линии стержня, возникающая в результате изгиба.

Считая поперечное сечение с координатой  $x_1$  неподвижным и *возможную работу* изгибающего момента на *возможном* угловом перемещении  $\delta d\theta_3$  равной  $M_3 \delta d\theta_3 = M_3 \delta \varkappa_3 dx_1$ , для элемента стержня длиной  $dx_1$  левую часть (2.5) можно представить с учетом (4.1) в виде

$$dx_1 \int_F \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} dF = dx_1 \int_F \sigma_{11} (\delta \varepsilon_0 - x_2 \delta \varkappa_3) dF = M_3 \delta \varkappa_3 dx_1.$$

Отсюда в силу произвольности величин  $\delta \varepsilon_0$  и  $\delta \varkappa_3$  получим уравнение

$$M_3 = - \int_F \sigma_{11} x_2 dF \quad (4.2)$$

равновесия приложенного момента  $M_3$  с моментом, создаваемым в сечении стержня распределением нормальных напряжений  $\sigma_{11}$ , и уравнение

$$\int_F \sigma_{11} dF = 0, \quad (4.3)$$

равновесия в проекции на ось  $Ox_1$ , вдоль которой равнодействующая сила равна нулю.

Для линейно упругого материала стержня в соответствии с *законом Гука* и с учетом (4.1)

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = E (\varepsilon_0 - x_2 \varkappa_3),$$

где  $E$  — *продольный модуль упругости*.

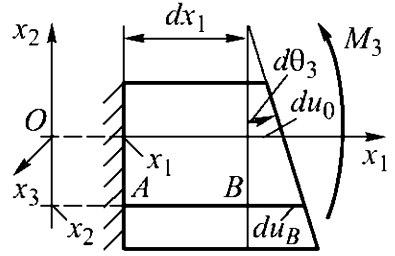


Рис. 4.2

Тогда (4.2) и (4.3) примут вид

$$M_3 = -E\varepsilon_0 \int_F x_2 dF + E\kappa_3 \int_F x_2^2 dF, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\kappa_3}{F} \int_F x_2 dF = x_2^{(C)} \kappa_3,$$

где  $x_2^{(C)}$  — координата центра тяжести сечения стержня.

Из (4.1) и второго равенства (4.4) следует, что для всех волокон с координатой  $x_2 = x_2^{(C)}$  деформация, а значит, и напряжение равны нулю.

Если сместить на  $x_2^{(C)}$  вдоль оси  $Ox_2$  начало системы координат, т. е. ввести новую систему координат  $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ , для которой  $\bar{x}_2 = x_2 - x_2^{(C)}$ , то ось  $\bar{O}\bar{x}_3$  станет *центральной осью сечения* (в теории изгиба ее называют *нейтральной осью сечения*), относительно которой *статический момент* этого сечения равен нулю:

$$\int_F \bar{x}_2 dF = 0.$$

Тогда вместо первого равенства (4.4) с учетом второго равенства (4.4) получим

$$M_3 = -E(x_2^{(C)})^2 F \kappa_3 + E\kappa_3 \int_F (\bar{x}_2 + x_2^{(C)})^2 dF = EJ_3 \kappa_3. \quad (4.5)$$

Здесь  $J_3$  — *осевой момент инерции сечения* стержня относительно оси  $\bar{O}\bar{x}_3$ :

$$J_3 = \int_F \bar{x}_2^2 dF. \quad (4.6)$$

Для круглого поперечного сечения радиусом  $R$  из (4.6) получаем  $J_3 = \pi R^4/4$ , а для прямоугольного высотой  $h$  вдоль оси  $\bar{O}\bar{x}_2$  и шириной  $b$  имеем  $J_3 = bh^3/12$ .

Учитывая второе равенство (4.4) и (4.5), находим распределение нормальных напряжений по поперечному сечению стержня в виде

$$\sigma_{11} = E(\varepsilon_0 - (\bar{x}_2 + \bar{x}_2^{(C)})\varkappa_3) = -\frac{M_3}{J_3}\bar{x}_2. \quad (4.7)$$

Наибольшие *растягивающее* и *сжимающее* напряжения

$$\sigma_{11}^{\max} = -\frac{M_3}{J_3}\bar{x}_2^{\max}, \quad \sigma_{11}^{\min} = -\frac{M_3}{J_3}\bar{x}_2^{\min},$$

где  $\bar{x}_2^{\max} < 0$  и  $\bar{x}_2^{\min} > 0$  — координаты точек поперечного сечения стержня, наиболее удаленные от его центральной оси  $\bar{O}\bar{x}_3$ . Для поперечных сечений, симметричных относительно нейтральной оси, абсолютные значения этих напряжений одинаковы:  $\sigma_{11}^{\max} = M_3/W_3$ , где **момент сопротивления при изгибе**  $W_3 = \pi R^3/4$  для круглого поперечного сечения и  $W_3 = bh^2/6$  для прямоугольного. В расчетах на прочность значения  $\sigma_{11}^{\max}$  и  $|\sigma_{11}^{\min}|$  сравнивают с *допускаемыми* для материала стержня *напряжениями*  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_c$  соответственно на растяжение и сжатие.

**Пример 4.1.** При чистом изгибе моментом  $M_3$  прямолинейного стержня, осевая линия которого в недеформированном состоянии совпадает с координатной осью  $Ox_1$ , а материал подчиняется закону Гука, из (4.5) следует, что кривизна

$$\varkappa_3 = \frac{M_3}{EJ_3} \quad (4.8)$$

изогнутой осевой линией постоянна, т. е. эта линия представляет собой дугу окружности радиусом  $r = 1/|\varkappa_3|$ . Если перемещение  $w(x_1)$  точек этой линии относительно ее исходного положения, называемое **прогибом стержня**, отсчитывать в направлении координатной оси  $Ox_2$ , то торец стержня при  $x_1 = L$ , к которому приложен момент  $M_3$  (см. рис. 4.1), имеет прогиб

$$w_L = \frac{1 - \cos(\varkappa_3 L)}{\varkappa_3}, \quad (4.9)$$

где  $L$  — длина стержня.

При малых прогибах осевой линии по сравнению с длиной стержня угол  $\theta_3$  поворота поперечного сечения стержня также мал и

$$\frac{dw}{dx_1} = \operatorname{tg} \theta_3 \approx \theta_3.$$

Тогда, пренебрегая величиной  $\theta_3^2$ , поскольку  $\theta_3^2 \ll 1$ , получаем

$$\kappa_3 = \frac{d^2w/dx_1^2}{(1 + (dw/dx_1)^2)^{3/2}} \approx \frac{d^2w}{dx_1^2} \quad (4.10)$$

и с учетом (4.8) после интегрирования находим

$$w(x_1) = \frac{M_3 x_1^2}{2EJ_3} + C_0 x_1 + C_1.$$

Если торец стержня при  $x_1 = 0$  закреплен жестко, т. е. помимо условия  $w(0) = 0$  имеем

$$\left. \frac{dw}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0,$$

то  $C_0 = C_1 = 0$  и при  $x_1 = L$

$$w(L) = \frac{M_3 L^2}{2EJ_3}. \quad (4.11)$$

Ограничиваясь в разложении  $\cos(\kappa_3 L)$  в ряд первыми тремя членами, вместо (4.9) с учетом (4.8) и (4.11) получаем

$$\frac{w_L}{L} \approx \frac{M_3 L}{2EJ_3} - \frac{1}{3} \frac{(M_3 L)^3}{(2EJ_3)^3} = \frac{w(L)}{L} - \frac{1}{3} \left( \frac{w(L)}{L} \right)^3,$$

причем в данном случае  $w_L < w(L)$ . Поскольку при разложении косинуса ряд знакопеременный, относительная погрешность

$$\frac{|w_L - w(L)|}{w(L)} \leq \frac{w^2(L)}{3L^2}.$$

Если ограничиться погрешностью в 3%, то (4.11) обеспечивает такую погрешность при  $w(L)/L \leq 0,3$ . Столь значительные прогибы возможны лишь у относительно тонких (по сравнению

с длиной) стержней. Действительно, обозначив через  $h_m$  расстояние от нейтральной оси сечения до его наиболее удаленной точки, для деформации в этой точке с учетом закона Гука, (4.7) и (4.11) запишем

$$|\varepsilon_{11}^{\max}| = \frac{[\sigma]_{\text{и}}}{E} = \frac{M_3 h_m}{E J_3} = \frac{2\omega(L)h_m}{L^2} \leq 0,6 \frac{h_m}{L},$$

где  $[\sigma]_{\text{и}}$  — допускаемое напряжение при изгибе.

Для большинства материалов  $E$  превышает  $[\sigma]_{\text{и}}$  более чем на два порядка. Поэтому отношение  $\omega(L)/L = 0,3$  может быть реализовано лишь для стержней с  $L/h_m > 60$ . ♦

**Пример 4.2.** Пусть стержень, нагруженный изгибающим моментом  $M_3$ , имеет односвязное поперечное сечение площадью  $F$ , симметричное относительно оси  $Ox_2$  (см. рис. 4.1). При неупругом поведении материала стержня связь между напряжением и деформацией определяет зависимость  $\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11})$ . При этом остаются справедливыми (4.2) и (4.3), а при сохранении гипотезы плоских сечений — и (4.1). Условие (4.3) переходит в равенство

$$\int_F f(\varepsilon_{11}) dF = 0,$$

которое с учетом (4.1) позволяет выразить  $\varepsilon_0$  через  $\varkappa_3$ , что затем даст возможность с помощью (4.2) установить связь  $\varkappa_3$  с  $M_3$  и найти наибольшее напряжение в стержне.

Если при пластическом деформировании материала изгибаемого стержня абсолютные значения напряжений не превышают  $\sigma^*$ , то несложно найти предельное значение  $M^*$  изгибающего момента, которое способен воспринять стержень. Это значение определяет **несущую способность** стержня **при изгибе**. При этом предельное состояние, которое реально не достигается, соответствует наличию в поперечном сечении двух областей с напряжениями разных знаков, но по абсолютному значению равных  $\sigma^*$  при условии одинакового сопротивления материала стержня растяжению и сжатию. Эти области разделяет нейтральная ось  $Ox_3$  сечения, причем площади этих областей в силу

условия (4.3) должны быть одинаковы и равны  $F/2$ . Следовательно,  $M^* = \sigma^* Fl/2$ , где  $l$  — расстояние между центрами тяжести  $C_1$  и  $C_2$  упомянутых областей (рис. 4.3).

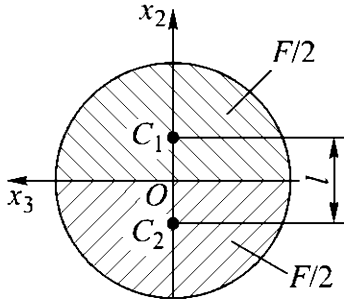


Рис. 4.3

Анализ существенно упрощается, если поперечное сечение стержня симметрично относительно оси  $Ox_3$ , а функция  $f(\varepsilon_{11})$  нечетная, т.е. сопротивление материала при растяжении и сжатии одинаково. Пусть высота поперечного сечения в направлении оси  $Ox_2$  равна  $h$ , а переменная ширина  $b(x_2)$  является четной функцией координаты  $x_2$ . Тогда ось  $Ox_3$  является нейтральной, в (4.1)  $\varepsilon_0 = 0$ ,

условие (4.3) удовлетворяется тождественно, а (4.2) с учетом равенства  $\varepsilon_{11} = -x_2 \kappa_3$  принимает вид

$$M_3 = \int_F f(\varepsilon_{11}) x_2 dF = 2 \int_0^{h/2} f(x_2 \kappa_3) b(x_2) x_2 dx_2, \quad (4.12)$$

причем при заданных функциях  $f(\varepsilon_{11})$ ,  $b(x_2)$  и значении  $h$  интеграл есть функция лишь от  $\kappa_3$ .

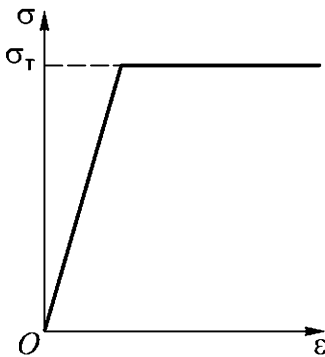


Рис. 4.4

Например, для стержня с прямоугольным поперечным сечением ( $b = \text{const}$ ) из идеально упруго-пластического материала с пределом текучести  $\sigma_T$  (рис. 4.4) из (4.12) в пределах области линейной упругости следует  $M_3 = E b h^3 \kappa_3 / 12$ , что согласуется с (4.8). Этот результат справедлив при условии

$$\varepsilon_{\max} = \frac{h \kappa_3}{2} \leq \frac{\sigma_T}{E} = \varepsilon_T.$$

Правой части этого неравенства соответствует значение

$$(M_3)_T = \frac{1}{6} \sigma_T b h^2.$$

В пластической области (4.12) удобнее представить в виде

$$M_3 = \frac{2b}{\chi_3^2} \int_0^{\varepsilon_{\max}} f(\varepsilon_{11}) \varepsilon_{11} d\varepsilon_{11} = \frac{2Eb}{\chi_3^2} \int_0^{\varepsilon_{\tau}} \varepsilon_{11}^2 d\varepsilon_{11} + 2\sigma_{\tau} \frac{b}{\chi_3^2} \int_{\varepsilon_{\tau}}^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon_{11} d\varepsilon_{11}.$$

В итоге после интегрирования получим

$$M_3 = \frac{\sigma_{\tau} b h^2}{12} \left( 3 - \frac{\varepsilon_{\tau}^2}{\varepsilon_{\max}^2} \right).$$

При увеличении  $\varepsilon_{\max}$  изгибающий момент стремится к предельному значению  $(M_3)_{\infty} = \sigma_{\tau} b h^2 / 4$ , что в 1,5 раза больше значения момента, при котором начинается пластическое деформирование. ♦

## 4.2. Изгиб балок

При нагружении *прямолинейного стержня* (см. рис. 4.1) из *изотропного линейно упругого материала изгибающим моментом* использование *гипотезы плоских сечений* приводит к точному решению задачи при условии, что момент на свободном торце стержня создан распределением (4.7) *нормальных напряжений*  $\sigma_{11}$  [38]. Действительно, это распределение удовлетворяет уравнениям равновесия, а равенство нулю остальных компонент тензора напряжений обеспечено выполнением *силовых граничных условий* на боковой поверхности стержня. В случае нарушения этого условия решение стремится к точному (в силу *принципа Сен-Венана*) при удалении от свободного торца.

Однако при изгибе стержня под действием сил, перпендикулярных его оси, гипотеза плоских сечений оказывается лишь некоторым приближением. При этом стержень обычно называют *балкой* и говорят о *поперечном изгибе* балки в отличие от *чистого изгиба*, когда стержень нагружен только изгибающим моментом. Рассмотрим на конкретном примере степень приближения гипотезы плоских сечений при поперечном изгибе.

**Пример 4.3.** Пусть торец балки при  $x_1 = 0$  закреплен жестко, а к торцу при  $x_1 = L$  приложена поперечная сила  $P$  (рис. 4.5). Такую балку принято называть *консольной*.

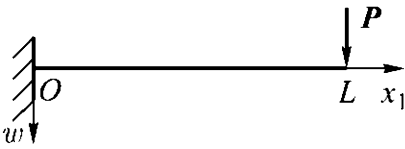


Рис. 4.5

В ее поперечном сечении с координатой  $x_1$  возникнет изгибающий момент  $M_3(x_1) = P(L - x_1)$ .

Тогда в рамках гипотезы плоских сечений из (4.7) следует

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = \frac{P(L - x_1)x_2}{J_3}, \quad (4.13)$$

а с учетом (4.8) и (4.10) уравнение, описывающее перемещение  $w(x_1)$  точек осевой линии балки и называемое в данном случае **прогибом балки**, принимает вид

$$\frac{d^2w}{dx_1^2} = \frac{P(L - x_1)}{EJ_3}.$$

Интегрируя его и учитывая условия закрепления  $w(0) = 0$  и  $dw/dx_1|_{x_1=0} = 0$ , находим

$$w(x_1) = \frac{PLx_1^2}{2EJ_3} - \frac{Px_1^3}{6EJ_3}. \quad (4.14)$$

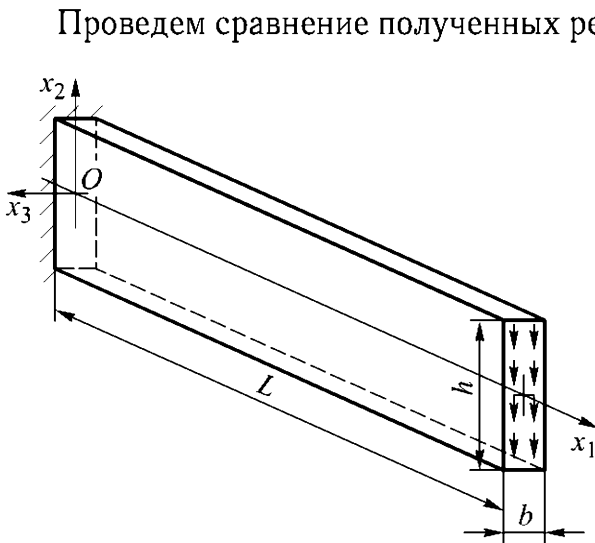


Рис. 4.6

Проведем сравнение полученных результатов с точным решением задачи изгиба балки в виде полосы толщиной  $b$ , длиной  $L$  и высотой  $h$  (рис. 4.6). Полоса одним своим краем (при  $x_1 = 0$ ) закреплена, а на другом (при  $x_1 = L$ ) нагружена распределенными касательными усилиями, которые дают результирующую силу  $P$ , изгибающую полосу в плоскости  $x_1Ox_2$ .

При достаточно малой толщине полосы (при  $b/h \ll 1$  и  $h/L \ll 1$ ) ее *напряженное состояние* можно считать *плоским*, описываемым *уравнениями равновесия*

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0,$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , — *компоненты симметричного тензора напряжений*. Представление этих компонент через *функцию напряжений*  $\tilde{F}$  соотношениями

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.15)$$

позволяет удовлетворить уравнения равновесия тождественно. При этом  $\tilde{F}$  является решением *бигармонического уравнения* [13]

$$\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$$

в виде

$$\tilde{F} = (L - x_1)x_2(C_2 + C_4x_2^2),$$

удовлетворяющего *граничным условиям* для полосы. Действительно, согласно (4.15), имеем

$$\sigma_{11} = 6C_4(L - x_1)x_2; \quad \sigma_{22} = 0; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = C_2 + 3C_4x_2^2.$$

Края полосы при  $x_2 = \pm h/2$  свободны от напряжений, т. е.  $\sigma_{22} = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ . Отсюда следует  $C_2 = -3C_4h^2/4$ . При  $x_1 = L$  результирующая касательных усилий, положительное направление которых противоположно направлению оси  $Ox_2$ ,

$$Q = -b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} dx_2 = 3C_4b \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) dx_2 = \frac{1}{2}C_4bh^3 = P.$$

Отсюда находим  $C_4 = 2P/(bh^3)$  и напряжения

$$\sigma_{11} = \frac{12P(L - x_1)x_2}{bh^3}; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{3P(1 - 4x_2^2/h^2)}{2bh}. \quad (4.16)$$

В сечении с координатой  $x_1$  сила  $P$  создает изгибающий момент

$$M_3(x_1) = P(L - x_1).$$

Если учесть, что для полосы  $bh^3/12 = J_3$ , то первая формула в (4.16) полностью согласуется с (4.13).

Наибольшее по абсолютному значению *касательное напряжение* возникает при  $x_2 = 0$ :

$$\tau_{\max} = \sigma_{12}(x_1, 0) = \frac{3P}{2bh},$$

а наибольшее нормальное напряжение — при  $x_1 = 0$  и  $x_2 = h/2$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{PL}{W_3}.$$

Отношение

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{h}{4L}$$

уменьшается по мере увеличения  $L$  по сравнению с  $h$ . Отметим, что это справедливо для любой балки с большим отношением ее длины к высоте поперечного сечения. Поэтому для таких балок касательные напряжения обычно не учитывают.

Перейдем непосредственно к оценке степени приближения гипотезы плоских сечений. Для этого найдем зависимости от координат  $x_1$  и  $x_2$  проекций  $u_1$  и  $u_2$  *вектора перемещения* на оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  соответственно. Из (4.16), *соотношений Коши* и *обобщенного закона Гука* следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= P \frac{L-x_1}{EJ_3} x_2; & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\nu P \frac{L-x_1}{EJ_3} x_2; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= -P \frac{h^2 - 4x_2^2}{8\mu J_3}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\mu$  — модуль сдвига материала полосы.

После интегрирования первых двух соотношений (4.17) находим

$$u_1 = -P \frac{(L-x_1)^2}{2EJ_3} x_2 + g_1(x_2); \quad u_2 = -\nu P \frac{L-x_1}{2EJ_3} x_2^2 + g_2(x_1) \quad (4.18)$$

и, подставляя в последнее равенство (4.17), получаем

$$-\frac{P(L-x_1)^2}{2EJ_3} + \frac{dg_2}{dx_1} + \frac{\nu Px_2^2}{2EJ_3} - \frac{Px_2^2}{2\mu J_3} + \frac{dg_1}{dx_2} = -\frac{Ph^2}{8\mu J_3}.$$

Отсюда следует, что

$$-\frac{P(L-x_1)^2}{2EJ_3} + \frac{dg_2}{dx_1} = C_2 = \text{const}; \quad \frac{\nu Px_2^2}{2EJ_3} - \frac{Px_2^2}{2\mu J_3} + \frac{dg_1}{dx_2} = C_1 = \text{const}.$$

Из этих равенств путем интегрирования выражаем функции  $g_2(x_1)$ ,  $g_1(x_2)$  и после подстановки в (4.18) получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{P(L-x_1)^2 x_2}{2EJ_3} - \frac{\nu Px_2^3}{6EJ_3} + \frac{Px_2^3}{6\mu J_3} + C_1 x_2 + C_3; \\ u_2 &= -\frac{\nu P(L-x_1)x_2^2}{2EJ_3} - \frac{P(L-x_1)^3}{6EJ_3} + C_2 x_1 + C_4. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Для нахождения постоянных  $C_l$ ,  $l = \overline{1, 4}$ , в (4.19) используем очевидное равенство

$$C_1 + C_2 = -\frac{Ph^2}{8\mu J_3}$$

и три условия закрепления края полосы при  $x_1 = 0$ , исключаяющие ее перемещение в плоскости  $x_1 O x_2$  как абсолютно твердого тела. В точке с координатами  $x_1 = x_2 = 0$  положим  $u_1 = u_2 = 0$  и запретим в этой точке либо поворот элемента оси  $Ox_1$ , т. е.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0, \quad (4.20)$$

либо поворот нормали к элементарной площадке, т. е.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0. \quad (4.21)$$

Тогда

$$C_3 = 0; \quad C_4 = \frac{PL^3}{6EJ_3},$$

но для (4.20)

$$C_1 = \frac{PL^2}{2EJ_3} - \frac{Ph^2}{8\mu J_3}; \quad C_2 = -\frac{PL^2}{2EJ_3},$$

а для (4.21)

$$C_1 = \frac{PL^2}{2EJ_3}; \quad C_2 = -\frac{PL^2}{2EJ_3} - \frac{Ph^2}{8\mu J_3}.$$

Искажение края полосы (при  $x_1 = 0$ ) после ее нагружения показано на рис. 4.7. В первом случае (рис. 4.7, а) действие касательного напряжения

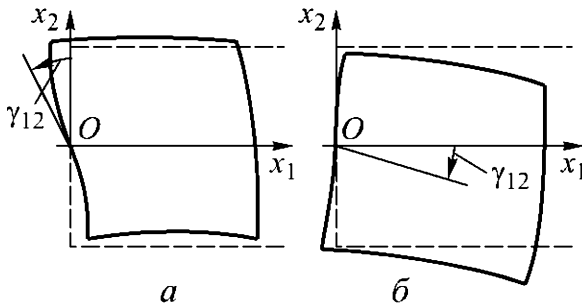


Рис. 4.7

$$\tau = \sigma_{12} = \frac{3P}{2bh}$$

в точке  $O$  приводит к повороту элементарной площадки на угол

$$\gamma_{12} = \frac{3P}{2\mu bh},$$

а углы полосы, где касательные напряжения равны нулю, остаются прямыми. Во втором случае (рис. 4.7, б) на тот же угол, но по ходу часовой стрелки, поворачивается ось полосы.

Аналогичные формы принимает след поперечного сечения полосы при любом значении  $x_1 \in (0, L)$ . Нелинейная зависимость  $u_1$  от  $x_2$  в (4.19) означает, что плоское до деформирования поперечное сечение полосы после деформирования уже не остается плоским. Если край полосы при  $x_1 = 0$  жестко закреплен во всех своих точках, то и после ее нагружения он останется плоским. Тогда в силу принципа Сен-Венана полученные результаты применимы лишь к поперечным сечениям полосы на некотором удалении от этого края.

Из (4.19) с учетом найденных выражений для  $C_i$  получим, что при выполнении (4.20) прогиб осевой линии полосы

$$w_1(x_1) = u_2(x_1, 0)$$

с точностью до знака совпадает с (4.14), а при выполнении (4.21) прогиб

$$\omega_2(x_1) = \omega_1(x_1) + \frac{3Px_1}{2\mu bh}$$

отличается от (4.14) на величину, пропорциональную  $\gamma_{12}$ . При  $x_1 = L$  это отличие составляет  $\gamma_{12}L$  и по сравнению с  $\omega_1(L)$  имеет порядок  $h^2/L^2$ , что в большинстве практически важных случаев довольно мало. ♦

Из рассмотренного примера ясно, что для нахождения прогиба изогнутой оси балки и напряжений в ней необходимо располагать зависимостью изгибающего момента  $M_3(x_1)$  от продольной координаты  $x_1$ . Получение этой зависимости обычно (кроме некоторых элементарных случаев) требует предварительного определения **реакций опор** в местах закрепления балки. При закреплении конца балки **шарнирной опорой** в идеальном случае принимают, что на этом конце изгибающий момент равен нулю и может возникнуть лишь реакция в виде поперечно направленной силы. При **жесткой заделке** (зашемлении) конца балки в общем случае возникают изгибающий момент и поперечная сила.

**Пример 4.4.** Пусть концы балки длиной  $L$  закреплены шарнирно (рис. 4.8, а). Левая опора ( $x_1 = 0$ ) фиксирует конец балки в горизонтальном и вертикальном направлениях, но допускает свободный поворот ее торца, а правая опора ( $x_1 = L$ ) допускает не только поворот поперечного сечения, но и перемещение конца балки в горизонтальном направлении, что приводит к отсутствию продольных сил в опорах и балке. Балка нагружена поперечной силой  $P$ , приложенной в сечении с координатой  $x_1 = b$ .

Из условия равенства моментов относительно шарнирных опор получим

$$P_0 = \frac{P(L-b)}{L}; \quad P_L = \frac{Pb}{L}$$

(рис. 4.8, б). Если сечением с координатой  $x_1 < b$  мысленно разделить балку на две части, то каждая из них должна находиться

в равновесии [38]. Для этого в данном сечении к обеим частям балки необходимо приложить поперечную силу  $Q(x_1) = P_0$ , называемую обычно **перерезывающей силой**, и изгибающий момент  $M_3(x_1) = P_0 x_1$ , направления которых определяются условиями равновесия (рис. 4.8, в).

Аналогично можно найти перерезывающую силу и изгибающий момент, являющиеся в данном случае *внутренними силовыми факторами*, в сечении с координатой  $x_1 \in (b, L)$ .

Для наглядности изменение перерезывающей силы и изгибающего момента по длине балки обычно представляют графически в виде эпюр (рис. 4.8, г). При этом знак ординаты эпюры момента совпадает со знаком кривизны изогнутой оси (говорят, что эпюру момента строят на сжатом волокне), а знак ординаты эпюры перерезывающей силы определяется равенством

$$Q(x_1) = \frac{dM_3(x_1)}{dx_1}$$

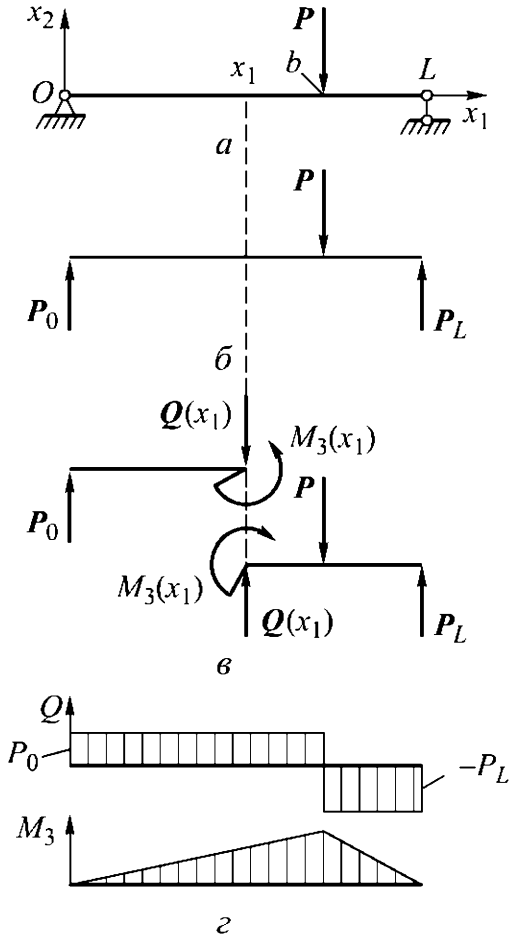


Рис. 4.8

при традиционной ориентации оси  $Ox_1$  с началом на левом конце балки. Отметим, что в сечении с координатой  $x_1 = b$  изгибающий момент достигает наибольшего значения

$$M_3^{\max} = \frac{Pb(L-b)}{L},$$

эпюра моментов имеет излом, а эпюра перерезывающей силы терпит разрыв на величину, соответствующую значению силы  $P$ . ♦

**Пример 4.5.** На балку с шарнирно закрепленными концами действует равномерно распределенная по ее длине  $L$  нагрузка интенсивностью  $q$  (рис. 4.9). В данном случае реакции опор одинаковы и равны  $P_0 = qL/2$ . В сечении с координатой  $x_1$  из условия равновесия левой части балки получим, что изгибающий момент

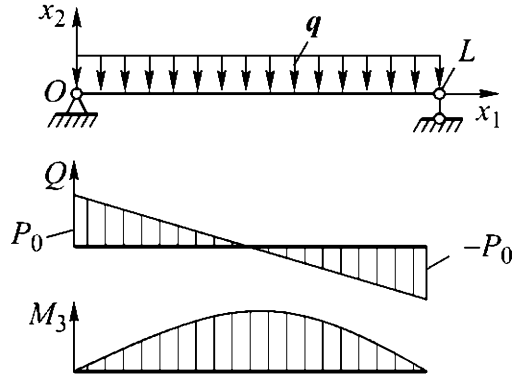


Рис. 4.9

$$M_3(x_1) = P_0 x_1 - \int_0^{x_1} q \xi d\xi = \frac{q}{2} (Lx_1 - x_1^2),$$

т. е. эпюра момента имеет вид параболы с максимумом  $M_3^{\max} = qL^2/8$  в середине балки. Перерезывающая сила

$$Q(x_1) = P_0 - \int_0^{x_1} q d\xi = \frac{qL}{2} - qx_1$$

изменяется по длине балки линейно, причем в этом случае  $dQ(x_1)/dx_1 = -q$ , поскольку направления действия распределенной нагрузки и положительного отсчета ординат эпюры  $Q(x_1)$  противоположны.

В случае изменяющейся по длине балки распределенной нагрузки  $q(x_1)$

$$P_0 = \frac{1}{L} \int_0^L q(x_1)(L - x_1) dx_1; \quad P_L = \frac{1}{L} \int_0^L q(x_1)x_1 dx_1;$$

$$M_3(x_1) = P_0 x_1 - \int_0^{x_1} q(\xi)\xi d\xi; \quad Q(x_1) = P_0 - \int_0^{x_1} q(\xi) d\xi.$$

Убедимся в справедливости соотношений

$$\frac{dQ(x_1)}{dx_1} = q(x_1); \quad \frac{dM_3(x_1)}{dx_1} = Q(x_1) \quad (4.22)$$

для общего случая нагружения балки. Для этого рассмотрим элементарный участок балки длиной  $dx_1$ , находящийся под действием распределенной нагрузки, положительное направление которой примем вверх (рис. 4.10).

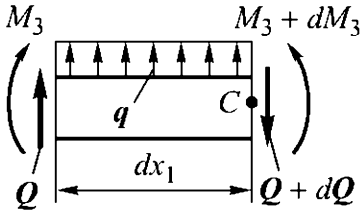


Рис. 4.10

В пределах бесконечно малого отрезка  $dx_1$  распределенную нагрузку считаем постоянной и равной  $q(x_1)$ . Приравнявая нулю сумму проекций всех сил на вертикаль и сумму моментов относительно поперечной оси, проходящей через точку  $C$ , получаем

$$Q + q dx_1 - (Q + dQ) = 0;$$

$$M_3 + Q dx_1 + q dx_1 \frac{dx_1}{2} - (M_3 + dM_3) = 0.$$

Пренебрегая во втором равенстве членом  $q dx_1 (dx_1/2)$  как величиной более высокого порядка малости, приходим к (4.22). ♦

**Пример 4.6.** Рассмотрим балку длиной  $2L$ , левый конец которой (при  $x_1 = 0$ ) жестко зашпемлен, к правому концу (при  $x_1 = 2L$ ) приложена сила  $P$ , а в сечении с координатой  $L$  действует изгибающий момент

$$M = -\frac{3PL}{2}$$

(рис. 4.11) [38].

В данном случае эпюры момента и перерезывающей силы можно построить без предварительного нахождения реакций в опоре. Изгибающий момент

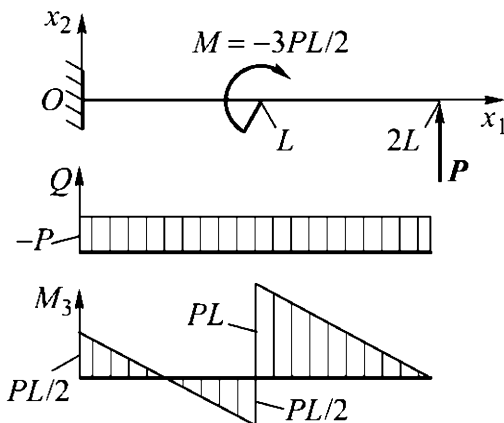


Рис. 4.11

$$M_3(x_1) = P(2L - x_1)$$

возрастает линейно по мере удаления от незакрепленного конца балки, но в сечении с координатой  $x_1 = L$  эпюра момента

претерпевает скачок на величину  $M$ , что изменяет знак кривизны изогнутой оси балки (сжатое волокно оказывается снизу). Далее по мере приближения к опоре при  $x_1 \in [0, L)$  изгибающий момент

$$M_3(x_1) = P(2L - x_1) - M = P\left(\frac{L}{2} - x_1\right)$$

снова возрастает линейно и в сечении  $x_1 = L/2$  обращается в нуль. Поэтому знак кривизны изогнутой оси изменяется еще раз. Перерезывающая сила во всех сечениях балки остается одинаковой:  $Q = -P$ , причем всюду, кроме  $x_1 = L$ ,  $Q = dM_3/dx_1$ . ♦

### 4.3. Прогиб изогнутой оси балки

Знание для любой балки реакций ее опор и зависимости изгибающего момента  $M_3(x_1)$  от продольной координаты  $x_1$  позволяет найти прогиб  $w(x_1)$  ее изогнутой оси, интегрируя уравнение (см. пример 4.1)

$$\frac{d^2w(x_1)}{dx_1^2} = \frac{M_3(x_1)}{EJ_3(x_1)},$$

где  $E$  — продольный модуль упругости;  $J_3(x_1)$  — в общем случае переменный по длине балки осевой момент инерции поперечного сечения относительно координатной оси  $Ox_3$ . Последовательное интегрирование приводит к непрерывным функциям

$$\begin{aligned} w'(x_1) &= w'(0) + \int_0^{x_1} \frac{M_3(\xi)}{EJ_3(\xi)} d\xi; \\ w(x_1) &= w(0) + w'(0)x_1 + \int_0^{x_1} dx'_1 \int_0^{x'_1} \frac{M_3(\xi)}{EJ_3(\xi)} d\xi, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$w'(x_1) = \frac{dw(x_1)}{dx}; \quad w'(0) = \left. \frac{dw(x_1)}{dx_1} \right|_{x_1=0}.$$

Вычисления в (4.23) можно упростить, если ввести функции

$$f_n(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta \leq 0; \\ \frac{\zeta^n}{n!} & \text{при } \zeta > 0. \end{cases}$$

По определению  $0! = 1$ , поэтому  $f_0(\zeta) = 1$  при  $\zeta > 0$ . Несложно проверить, что эти функции обладают свойством [31]

$$\int_0^{x_1} f_n(\xi - a) d\xi = f_{n+1}(x_1 - a).$$

Рассмотрим, как изменяется влияние на балку внешних нагрузок по мере возрастания координаты  $x_1$ . Если в сечении балки с координатой  $x_1 = a$  приложен изгибающий момент  $M$  (рис. 4.12), то при  $x_1 > a$  он вызовет изменение кривизны ее изогнутой оси в положительную сторону, а в эпюре момента возникнет составляющая  $-Mf_0(x_1 - a)$ .

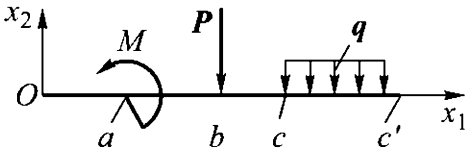


Рис. 4.12

Сила  $P$ , приложенная в сечении с координатой  $x_1 = b$ , приведет при  $x_1 > b$  к изменению кривизны изогнутой оси в отрицательную сторону, а в эпюре момента появится составляющая  $-Pf_1(x_1 - b)$ . Действующая на участке  $x_1 \in [c, c']$  равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  дает вклад в эпюру момента, равный  $-q(f_2(x_1 - c) - f_2(x_1 - c'))$ . В итоге в данном случае

$$M_3(x_1) = -Mf_0(x_1 - a) - Pf_1(x_1 - b) - q(f_2(x_1 - c) - f_2(x_1 - c')),$$

а при  $J_3(x_1) \equiv J_3 = \text{const}$ , согласно (4.23),

$$\begin{aligned} \omega'(x_1) &= \omega'(0) - \frac{Mf_1(x_1 - a)}{EJ_3} - \\ &\quad - \frac{Pf_2(x_1 - b)}{EJ_3} - \frac{q(f_3(x_1 - c) - f_3(x_1 - c'))}{EJ_3}, \\ \omega(x_1) &= \omega(0) + \omega'(0)x_1 - \frac{Mf_2(x_1 - a)}{EJ_3} - \\ &\quad - \frac{Pf_3(x_1 - b)}{EJ_3} - \frac{q(f_4(x_1 - c) - f_4(x_1 - c'))}{EJ_3}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Входящие в (4.24) значения  $w'(0)$  и  $w(0)$  можно найти из условий закрепления балки.

**Пример 4.7.** Пусть шарнирно опертая балка длиной  $L$  нагружена в сечении с координатой  $x_1 = b = L/2$  силой  $P$  (см. рис. 4.8). Реакция в левой опоре при  $x_1 = 0$  (см. пример 4.4)

$$P_0 = \frac{P(L-b)}{L} = \frac{P}{2}$$

и действует в положительном направлении оси  $Ox_2$ , изменяя кривизну изогнутой оси балки в положительную сторону. Учитывая второе равенство (4.24) и то, что  $w(0) = 0$ , запишем

$$w(x_1) = w'(0)x_1 + \frac{P_0 f_3(x_1)}{EJ_3} - \frac{P f_3(x_1 - L/2)}{EJ_3}.$$

Из условия  $w(L) = 0$  найдем

$$w'(0) = -\frac{PL^2}{16EJ_3}.$$

В итоге получим при  $x_1 \in [0, L/2]$

$$w(x_1) = -\frac{PL^2 x_1}{16EJ_3} + \frac{Px_1^3}{12EJ_3}$$

и при  $x_1 \in (L/2, L]$

$$w(x_1) = \frac{Px_1^3}{12EJ_3} - \frac{PL^2 x_1}{16EJ_3} - \frac{P(x_1 - L/2)^3}{12EJ_3}.$$

Отсюда при  $x_1 \in [0, L/2]$

$$w'(x_1) = -\frac{PL^2}{16EJ_3} + \frac{Px_1^2}{4EJ_3},$$

а при  $x_1 \in (L/2, L]$

$$w'(x_1) = -\frac{PL^2}{16EJ_3} + \frac{Px_1^2}{4EJ_3} - \frac{P(x_1 - L/2)^2}{4EJ_3}.$$

Выясним, при каких значениях  $x_1$  обращается в нуль функция  $w'(x_1)$ . Из обоих последних равенств имеем  $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = L/2$ ,

т. е. наибольший по абсолютному значению прогиб изогнутой оси балки будет в сечении с координатой  $x_1 = L/2$ , причем

$$\omega\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48EJ_3}. \quad \blacklozenge$$

**Пример 4.8.** Для балки, изображенной на рис. 4.9 (см. пример 4.5), при  $x_1 = 0$  реакция шарнирной опоры  $P_0 = qL/2$ . С учетом условия  $\omega(0) = 0$  и второго равенства (4.24) запишем

$$\omega(x_1) = \omega'(0)x_1 + \frac{P_0 f_3(x_1)}{EJ_3} - \frac{q f_4(x_1)}{EJ_3},$$

поскольку в данном случае  $b = c = 0$ , а  $x_1 \leq c' = L$ . Значение  $\omega'(0)$  найдем из условия  $\omega(L) = 0$ , что дает

$$\omega'(0) = -\frac{qL^3}{24EJ_3}.$$

В итоге получим

$$\omega(x_1) = -\frac{qx_1(L^3 - 2Lx_1^2 + x_1^3)}{24EJ_3}.$$

Из условия симметрии ясно, что наибольший по абсолютному значению прогиб изогнутой оси балки будет в сечении с координатой  $x_1 = L/2$ , причем

$$\omega\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5qL^4}{384EJ_3}. \quad \blacklozenge$$

**Пример 4.9.** Исследуем прогиб изогнутой оси балки, показанной на рис. 4.11. В сечении  $x_1 = 0$  возникают реакция  $P_0 = -P$  и изгибающий момент  $M_0 = PL/2$ . Из (4.24) с учетом  $\omega(0) = \omega'(0) = 0$  при жестком защемлении левого конца запишем

$$\omega'(x_1) = \frac{M_0 f_1(x_1)}{EJ_3} + \frac{P_0 f_2(x_1)}{EJ_3} + \frac{M f_1(x_1 - L)}{EJ_3};$$

$$\omega(x_1) = \frac{M_0 f_2(x_1)}{EJ_3} + \frac{P_0 f_3(x_1)}{EJ_3} + \frac{M f_2(x_1 - L)}{EJ_3}.$$

Отсюда

$$\omega(2L) = \frac{5PL^3}{12EJ_3}.$$

При  $x_1 \in [0, L]$  условие  $w'(x_1) = 0$  выполняется в сечении с координатой  $x_1 = L$ , а при  $x_1 \in (L, 2L]$  оно не выполняется. Но при  $x_1 = L$  не достигается экстремальное значение прогиба. В этом сечении изогнутая ось балки имеет точку перегиба, причем

$$w(L) = \frac{PL^3}{12EJ_3}.$$

Таким образом, функция  $w(x_1)$  монотонная, неотрицательная и имеет две точки перегиба при  $x = L/2$  и  $x = L$ . ♦

### 4.4. Статически неопределимые задачи изгиба балок

В рассмотренных ранее примерах нахождение реакций опор изгибаемой балки являлось **задачей статически определимой**, т.е. уравнений статического равновесия было достаточно для того, чтобы определить все неизвестные реакции. Если таких уравнений недостаточно, то **задача статически неопределимая**.

**Пример 4.10.** Простейшей статически неопределимой задачей является нахождение реакций для трехопорной балки длиной  $2L$ , на которую действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  (рис. 4.13).

Один из способов решения этой задачи заключается в использовании (4.24) в сочетании с тремя условиями  $w(0) = w(L) = w(2L) = 0$ .

Обозначим через  $R$  неизвестную реакцию средней опоры ( $R > 0$  при направлении вверх) и из равенства нулю суммы моментов относительно правой опоры получим реакцию  $P_0 = qL - R/2$

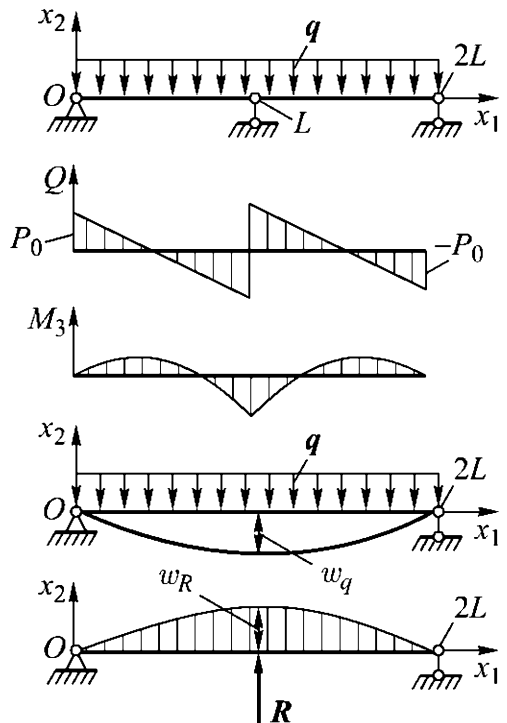


Рис. 4.13

в левой опоре. Второе равенство (4.24) с учетом  $w(0) = 0$  примет вид

$$w(x_1) = w'(0)x_1 + \frac{P_0 f_3(x_1)}{EJ_3} - \frac{q f_4(x_1)}{EJ_3} + \frac{R f_3(x_1 - L)}{EJ_3}.$$

Значения  $w'(0)$  и  $R$  вычислим из двух оставшихся условий:

$$w(L) = w'(0)L + \frac{(qL - R/2)L^3}{6EJ_3} - \frac{qL^4}{24EJ_3} = 0;$$

$$w(2L) = 2w'(0)L + \frac{4(qL - R/2)L^3}{3EJ_3} + \frac{RL^3}{6EJ_3} - \frac{2qL^4}{3EJ_3} = 0.$$

Отсюда

$$R = \frac{5qL}{4}; \quad w'(0) = -\frac{qL^3}{48EJ_3}.$$

Реакции левой и правой опор при этом  $P_0 = 3qL/8$ . Теперь из равенства нулю суммы моментов в сечении с координатой  $x_1 \leq L$  получим

$$M_3(x_1) = \frac{3qLx_1}{8} - \frac{qx_1^2}{2}.$$

Отсюда

$$M_3(L) = -\frac{qL^2}{8}; \quad M_3\left(\frac{3L}{4}\right) = 0$$

и максимальное значение

$$M_3\left(\frac{3L}{8}\right) = \frac{9qL^2}{128}$$

при  $x_1 = 3L/8$ .

Эпюра *перерезывающей силы*  $Q$  и симметричная относительно средней опоры эпюра изгибающего момента  $M_3$  приведены на рис. 4.13.

Ясно, что рассмотренный способ можно применить и в случае, когда число опор балки более трех или же когда наряду с шарнирными опорами один либо оба конца балки жестко зацементированы.

Второй способ связан с применением принципа суперпозиции для решения линейной задачи. Рассмотрим двухопорную балку под действием двух видов нагрузки: равномерно распределенной интенсивностью  $q$  и направленной вверх силы  $R$ , приложенной в середине балки там, где находится промежуточная опора (см. рис. 4.13). Прогибы изогнутой оси балки в сечении с координатой  $x_1 = L$  под действием каждой нагрузки в отдельности  $\omega_q = -5qL^4/(24EI_3)$  (см. пример 4.8) и  $\omega_R = RL^3/(6EI_3)$  (см. пример 4.7). Из условия  $\omega(L) = 0$  сумма этих прогибов должна быть равна нулю, что дает то же самое значение  $R = 5qL/4$ . Эпюры перерезывающей силы и изгибающего момента можно построить как суммарные от действия каждой из нагрузок. ♦

**Пример 4.11.** При неупругом поведении материала балки с числом опор более двух ее расчет заметно усложняется. Однако получить оценку предельной нагрузки, которую выдерживает такая балка, можно сравнительно простым путем.

Вернемся к балке, изображенной на рис. 4.13. По мере возрастания интенсивности  $q$  равномерно распределенной нагрузки растет по абсолютному значению изгибающий момент  $M_3(L) = qL^2/8$  (см. пример 4.10) в сечении балки над средней опорой (при  $x_1 = L$ ). Именно в этом сечении при возрастании  $q$  раньше всего возникнут пластические деформации (рис. 4.14, а).

Затем с ростом  $q$  верхняя и нижняя зоны пластических деформаций в окрестности этого сечения увеличиваются и сближаются, практически перекрывая все поперечное сечение балки, и возникают еще две пары зон

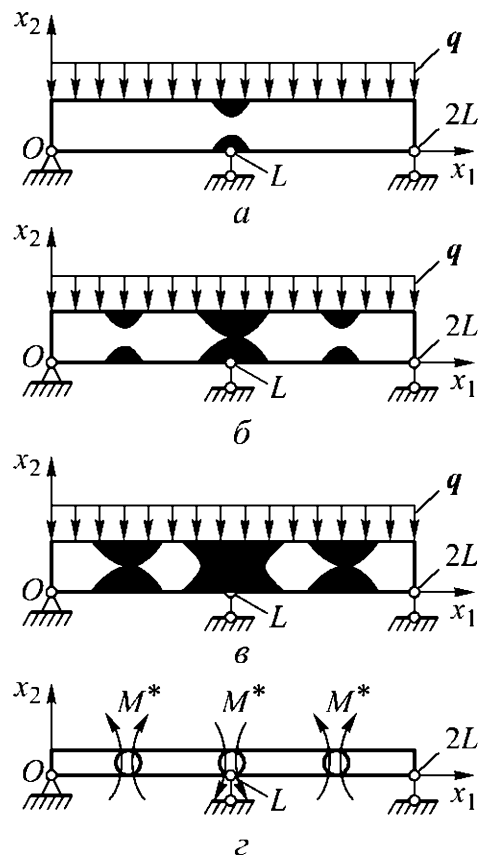


Рис. 4.14

в окрестностях сечений с координатами  $x'_1 = 3L/8$  и  $x''_1 = 13L/8$  (рис. 4.14, б). При дальнейшем увеличении  $q$  эти зоны, попарно сближаясь, перекрывают почти все поперечное сечение балки (рис. 4.14, в) [31]. Вычисление предельного значения  $M^*$  изгибающего момента в указанных сечениях в предположении смыкания зон пластических деформаций рассмотрено в примере 4.2. В этом случае говорят, что в сечении балки возникает **пластический шарнир**.

Появление пластического шарнира в сечении с координатой  $x_1 = L$  еще не нарушает работоспособности балки. Однако при возникновении трех пластических шарниров (рис. 4.14, г) работоспособность балки будет исчерпана, поскольку она превратится в **кинематически изменяемую систему**, элементы которой могут перемещаться без деформирования как абсолютно жесткие.

Для нахождения предельного значения  $q^*$  интенсивности распределенной нагрузки, при котором наступает исчерпание работоспособности балки, рассмотрим ее участок между левой и средней опорами. Координату ближайшего к левой опоре пластического шарнира обозначим  $\xi$  (в общем случае она отличается от координаты  $x'_1 = 3L/8$  сечения, в котором достигается максимум изгибающего момента при линейно упругом поведении материала балки). Приравняем предельные моменты (с учетом их направления) в пластических шарнирах к моментам, создаваемым в сечениях с координатами  $x_1 = \xi$  и  $x_1 = L$  внешними силами:

$$M^* = P_0\xi - \frac{q\xi^2}{2}; \quad -M^* = P_0L - \frac{qL^2}{2}.$$

Исключая отсюда реакцию  $P_0$  в левой опоре, получаем

$$q = \frac{M^*(1 + \xi/L)}{L\xi - \xi^2}.$$

Подбирая  $\xi$  из условия минимума  $q$ , приходим к квадратному уравнению

$$\xi^2 + 2L\xi - L^2 = 0$$

с положительным решением  $\xi = L(\sqrt{2} - 1)$ . В итоге предельное значение

$$q^* = \frac{2(M^*/L^2)}{\sqrt{2} - 1)^2} \approx 11,6 \frac{M^*}{L^2}.$$

Для балки из *идеально упруго-пластического материала* с *пределом текучести*  $\sigma_T$ , имеющей прямоугольное поперечное сечение высотой  $h$  и шириной  $b$ ,  $M^* = \sigma_T b h^2 / 4$  (см. пример 4.2), тогда как пластическая деформация начинается в данном случае при значении момента

$$M_T = \frac{1}{6} \sigma_T b h^2 = \frac{1}{8} q L^2,$$

т. е. при интенсивности

$$q_T = \frac{4 \sigma_T b h^2}{3 L^2}.$$

Таким образом  $q^*/q_T \approx 2,175$ . Следовательно, статически неопределимая балка обладает дополнительным резервом по несущей способности по сравнению со статически определимой (см. пример 4.2). ♦

### Вопросы и задачи

**4.1.** Французским ученым А. Параном (1666–1716) были найдены стороны прямоугольника, вписанного в окружность заданного радиуса  $r_0$  и соответствующего поперечному сечению стержня с наибольшим моментом сопротивления. Решите эту задачу, позволяющую так обтесать круглое бревно, чтобы полученный из него брус имел наибольшую прочность при изгибе [36].

**4.2.** На рис. 4.15 представлена форма прогиба  $w(x_1)$  при нагружении силой  $P$  стержня с подвижной шарнирной опорой на одном торце и жесткой заделкой на другом. Как, не решая статически неопределимую задачу, найти все реакции опор?

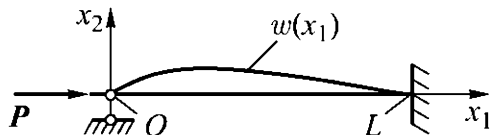


Рис. 4.15

**4.3.** Консольная балка состоит из двух жестко соединенных между собой тонких полосок толщиной  $h_1, h_2$  с различными продольными модулями упругости  $E_1, E_2$  и температурными коэффициентами линейного расширения  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  и имеет начальную кривизну  $\kappa^0$ . Как изменится кривизна балки при повышении ее температуры на  $\Delta T$ ?

**4.4.** К свободному торцу консольной балки длиной  $L$  с поперечным сечением в виде прямоугольника со сторонами  $b$  и  $h$  приложена сила, направленная по диагонали этого прямоугольника. Найдите предельные значения  $M^*$  и  $P^*$  изгибающего момента и приложенной силы, если материал балки является идеально упруго-пластическим с пределом текучести  $\sigma_T$ .

## 5. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

В главе 2 был рассмотрен *принцип возможных перемещений*, иногда называемый началом возможных перемещений. Его можно считать одной из основных и достаточно общих теорем прикладной механики, а в записи (2.5) — механики деформируемого твердого тела.

### 5.1. Теорема Кастильяно

Подынтегральная функция  $\sigma_{ij}(M)\delta\varepsilon_{ij}(M)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , в левой части (2.5) является *возможной работой*, которая совершается напряжениями  $\sigma_{ij}(M)$  на возможных деформациях  $\delta\varepsilon_{ij}(M)$  в единице объема  $V$ , занятого деформируемым телом, в окрестности точки  $M \in V$ . Для *упругого* (но необязательно *линейно упругого*) материала эта работа равна приращению  $\delta U(M)$  плотности  $U(M)$  *потенциальной энергии деформации*, накопленной материалом в окрестности точки  $M \in V$ , и является полным дифференциалом функции  $U(M)$ . Это означает, что потенциальную энергию  $W$  деформации всего тела можно представить функцией *компонент  $\varepsilon_{ij}$  тензора деформации*. Однако деформированное состояние тела из упругого материала при малых перемещениях однозначно определяется приложенной нагрузкой, которая характеризуется набором из  $n$  *обобщенных сил*  $P_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , т. е.  $W = W(P_1, P_2, \dots, P_n)$ .

Пусть тело из упругого материала закреплено так, что исключены его перемещения как жесткого целого. Каждой приложенной к телу внешней *обобщенной силе* соответствует обобщенное перемещение  $u_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Одной из этих сил, например силе  $P_\nu$ , дадим малое приращение  $dP_\nu$ . Это приведет к изменению по-

тенциальной энергии  $W$  деформации тела на величину, равную  $(\partial W / \partial P_\nu) dP_\nu$ .

Теперь изменим порядок приложения сил. Сначала приложим только силу  $dP_\nu$ , что вызовет обобщенное перемещение  $du_\nu$  точки приложения этой силы, которое также будет малым. Работа приложенной силы

$$\Delta W = \int_0^{du_\nu} dP_\nu d\xi,$$

поскольку величины  $dP_\nu$  и  $du_\nu$  связаны между собой. Для линейно упругого материала эта работа равна  $(dP_\nu) du_\nu / 2$  (множитель  $1/2$  появился потому, что  $du_\nu$  в данном случае линейно связано с  $dP_\nu$ ). Затем приложим всю систему внешних сил  $P_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . При отсутствии силы  $dP_\nu$  потенциальная энергия деформации тела снова приняла бы значение  $W$ . Однако теперь эта энергия изменится на величину, равную работе  $(dP_\nu) u_\nu$ , поскольку на пути обобщенного перемещения  $u_\nu$ , соответствующего силе  $P_\nu$ , сила  $dP_\nu$  останется неизменной. Таким образом, при обратной последовательности приложения сил изменение потенциальной энергии деформации составит  $\Delta W + dP_\nu u_\nu$ .

Для тела из упругого материала накопленная потенциальная энергия деформации не зависит от последовательности приложения нагрузки. Поэтому, приравнивая изменения этой энергии в первом и втором случаях и пренебрегая работой  $\Delta W$  как величиной более высокого порядка малости, получаем

$$u_\nu = \frac{\partial W}{\partial P_\nu}, \quad \nu = \overline{1, n}. \quad (5.1)$$

Это равенство выражает **теорему Кастильяно**, установленную итальянским инженером К.А. Кастильяно (1847–1884) в 1875 году. Если обобщенной силой является момент, то ему соответствует угловое перемещение по направлению действия момента в точке его приложения. Действию на тело *гидростатического давления* в качестве обобщенного перемещения будет отвечать уменьшение объема тела. Ясно, что приложенной к телу силе

соответствует перемещение точки ее приложения в направлении действия силы.

**Пример 5.1.** Вернемся к примерам 2.1 и 2.2 и применим теорему Кастильяно к растянутому силой  $P$  прямолинейному стержню длиной  $L$  с постоянным поперечным сечением площадью  $F$ , жестко закрепленному одним торцом. Для плотности потенциальной энергии деформации имеем

$$U = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E},$$

где  $\sigma = P/F$  — напряжение в поперечном сечении стержня;  $\varepsilon = \sigma/E$  — деформация вдоль его осевой линии;  $E$  — продольный модуль упругости материала стержня.

При однородном напряженном состоянии для потенциальной энергии деформации получим

$$W = UFL = \frac{P^2 L}{2EF}.$$

Согласно теореме Кастильяно, перемещение торца стержня, к которому приложена сила  $P$ , вдоль действия этой силы, т. е. удлинение стержня,

$$\Delta L = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{PL}{EF}.$$

Для стержня с площадью  $F(x_1)$  поперечного сечения, изменяющейся вдоль его осевой линии, по которой направлена координатная ось  $Ox_1$  (см. пример 2.2),

$$W = \int_0^L \frac{\bar{\sigma}_{11}^2(x_1)}{2E} F(x_1) dx_1 = \frac{P^2}{2E} \int_0^L \frac{dx_1}{F(x_1)}, \quad (5.2)$$

где  $\bar{\sigma}_{11}(x_1)$  — среднее напряжение в поперечном сечении с координатой  $x_1$ , и поэтому

$$\Delta L = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx_1}{F(x_1)}.$$

Если в поперечном сечении стержня с переменной по длине площадью  $F(x_1)$  действует также переменная по длине осевая сила  $N_1(x_1)$ , то в участке такого стержня длиной  $dx_1$  накапливается потенциальная энергия

$$dW = \frac{N_1^2(x_1) dx_1}{2EF},$$

а для всего стержня длиной  $L$

$$W = \int_0^L \frac{N_1^2(x_1)}{2E} F(x_1) dx_1. \quad (5.3)$$

В случае колонны равного сопротивления сжатию (см. пример 2.3)

$$W = \int_0^L \frac{\sigma_{11}^2}{2E} F(x_1) dx_1 = \frac{[\sigma]^2 V}{2E} = \frac{P_0^2 V}{2E(F(0))^2},$$

где  $[\sigma] = P_0/F(0)$  — допускаемое сжимающее напряжение, принимаемое постоянным по высоте колонны;  $V$  и  $F(0)$  — объем колонны и площадь ее верхнего торца (при  $x_1 = 0$ ), к которому приложена сжимающая сила  $P_0$ .

Казалось бы, в этом случае теорема Кастильяно дает неверный результат, поскольку

$$\frac{\partial W}{\partial P_0} = \frac{P_0 V}{E(F(0))^2} = \frac{[\sigma] V}{EF(0)}$$

отличается от очевидного значения  $\Delta L = [\sigma]L/E$  осадки колонны.

Однако дело в том, что обобщенному перемещению  $\Delta L$  соответствует обобщенная сила  $P$ , в которую помимо  $P_0$  входит еще и нагрузка, связанная с весом колонны. Эта обобщенная сила на перемещении  $\Delta L$  совершает такую же работу, что и вся внешняя нагрузка, если ее привести к торцу колонны при  $x_1 = 0$ , т. е.

$$\frac{P \Delta L}{2} = \frac{P_0 \Delta L}{2} + \frac{1}{2} \int_0^L \rho g F(x_1) u(x_1) dx_1, \quad (5.4)$$

где  $\rho$  и  $g$  — плотность материала колонны и ускорение свободно-го падения;  $F(x_1) = F(0) \exp(\rho g x_1 / [\sigma])$  — переменная по высоте площадь ее поперечного сечения;  $u(x_1)$  — перемещение вдоль оси  $Ox_1$  поперечного сечения, причем  $u(0) = \Delta L$  и  $u(L) = 0$ .

При постоянном значении  $[\sigma]$  продольная деформация по высоте колонны также постоянна, а перемещение изменяется линейно, т. е.

$$u(x_1) = \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \Delta L.$$

Вычисление интеграла в (5.4) дает

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho g F(x_1) u(x_1) dx_1 &= \rho g F(0) \Delta L \int_0^L \left(1 - \frac{x_1}{L}\right) \exp\left(\frac{\rho g x_1}{[\sigma]}\right) dx_1 = \\ &= \rho g V \Delta L - [\sigma] F(0) \exp\left(\frac{\rho g L}{[\sigma]}\right) + [\sigma] \frac{V}{L} = \\ &= \rho g V \Delta L - [\sigma] F(L) + [\sigma] \frac{V}{L} = -P_0 \Delta L + [\sigma] \frac{V}{L}, \end{aligned}$$

поскольку  $[\sigma] F(L) - \rho g V = P_0$ , где  $\rho g V$  — вес колонны;  $[\sigma] F(L)$  — реакция ее основания.

Подставляя в (5.4) найденное выражение для интеграла, после сокращения на  $\Delta L/2$  получаем  $P = [\sigma] V/L$ . Потенциальная энергия деформации принимает вид

$$W = \frac{P^2 L^2}{2EV}.$$

Теперь, согласно теореме Кастильяно,

$$\frac{\partial W}{\partial P} = \frac{PL^2}{EV} = \frac{[\sigma]L}{E},$$

что совпадает с результатом, приведенным в примере 2.3. ♦

**Пример 5.2.** Прямолинейный стержень в виде тонкостенной трубки длиной  $L$ , толщиной  $h$  и радиусом  $R$  одним торцом жестко закреплен, к другому его торцу приложен *крутящий момент*  $M_1$

(см. рис. 3.2). Найдем потенциальную энергию деформации этого стержня. Она равна работе

$$\frac{M_1 \varphi_L}{2} = \frac{M_1^2 L}{2\mu J_p},$$

поскольку угол поворота торца, к которому приложен момент, согласно (3.4),

$$\varphi_L = \frac{M_1 L}{\mu J_p},$$

где  $\mu$  — модуль сдвига материала трубки;  $J_p = 2\pi R^3 h$  — *полярный момент инерции* ее поперечного сечения.

Очевидно, что применение в данном случае теоремы Кастильяно даст для  $\varphi_L$  приведенное выражение.

Если в поперечном сечении стержня с переменным по длине полярным моментом инерции сечения  $J_p(x_1)$  действует также переменный по длине крутящий момент  $M_1(x_1)$ , то в участке стержня длиной  $dx_1$  накапливается потенциальная энергия

$$dW = \frac{1}{2} M_1(x_1) \vartheta_1(x_1) dx_1,$$

где  $\vartheta_1$  — угол закручивания стержня, приходящийся на единицу его длины.

Для текущего значения  $M_1(x_1)$  крутящего момента также допустимо применить (3.4) и записать

$$\vartheta_1(x_1) = \frac{M_1(x_1)}{\mu J_p(x_1)}.$$

Тогда для всего стержня получим

$$W = \int_0^L \frac{M_1^2(x_1)}{2\mu J_p(x_1)} dx_1. \quad \blacklozenge \quad (5.5)$$

**Пример 5.3.** Потенциальную энергию  $dW$  деформации участка изгибаемого стержня (или балки) длиной  $dx_1$  можно определить как работу  $M_3(x_1)d\vartheta_3/2$  *изгибающего момента*  $M_3(x_1)$  на

взаимном угловом перемещении  $d\vartheta_3$  двух поперечных сечений, разделенных расстоянием  $dx_1$ . Поскольку, согласно (4.1),

$$d\vartheta_3 = \kappa_3 dx_1 = \frac{M_3(x_1) dx_1}{EJ_3},$$

где  $\kappa_3$  — кривизна изогнутой оси стержня;  $E$  — продольный модуль упругости его материала;  $J_3$  — осевой момент инерции сечения стержня относительно центральной оси  $Ox_3$  его поперечного сечения, то с учетом (4.5) получим

$$dW = \frac{M_3^2(x_1) dx_1}{2EJ_3}.$$

В общем случае переменной величины  $J_3(x_1)$  для всего изгибаемого стержня (или балки) длиной  $L$  запишем

$$W = \int_0^L \frac{M_3^2(x_1)}{2EJ_3(x_1)} dx_1. \quad (5.6)$$

Следует отметить, что в (5.6) не входит составляющая энергии, связанная со сдвиговой деформацией, которая вызвана возникающими при поперечном изгибе балки касательными напряжениями. В большинстве практически важных случаев изгиба достаточно длинных балок этой составляющей можно пренебречь.

Поперечное сечение стержня, работающего на изгиб, часто имеет хотя бы одну ось симметрии, но с ней необязательно связан действующий в сечении изгибающий момент, ориентация которого зависит от приложенной внешней нагрузки. В этом случае нерационально вычислять осевой момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, вокруг которой стремится его повернуть изгибающий момент. Целесообразно этот момент разложить на составляющие по двум осям, одной из которых является ось симметрии поперечного сечения (обозначим эту ось  $O\bar{x}_2$ ). Ясно, что центр тяжести сечения лежит на этой оси. Перпендикулярную ей ось, также проходящую через

центр тяжести, обозначим  $O\bar{x}_3$ . Центробежный момент инерции рассматриваемого сечения площадью  $F$  относительно этих осей равен нулю:

$$J_{23} = \int_F \bar{x}_2 \bar{x}_3 dF = 0,$$

т. е. эти оси являются *главными центральными* для данного сечения, а *осевые моменты инерции*

$$J_3 = \int_F \bar{x}_2^2 dF; \quad J_2 = \int_F \bar{x}_3^2 dF$$

этого сечения относительно таких осей — *главными*, и они принимают экстремальные значения среди значений осевых моментов инерции относительно любой другой пары ортогональных центральных осей (см. Д.2.1). Каждая из составляющих  $M_2$  и  $M_3$  изгибающего момента совершает работу при повороте сечения относительно осей  $O\bar{x}_2$  и  $O\bar{x}_3$  соответственно, поэтому вместо (5.6) можно написать

$$W = \int_0^L \frac{M_2^2(x_1)}{2EJ_2(x_1)} dx_1 + \int_0^L \frac{M_3^2(x_1)}{2EJ_3(x_1)} dx_1. \quad (5.7)$$

Используем (5.6) для нахождения с помощью теоремы Кастильяно *прогиба*  $w(L)$  свободного конца консольной балки длиной  $L$  с постоянным поперечным сечением, нагруженной на этом конце поперечной силой  $P$  (см. рис. 4.5). В данном случае имеем  $M(x_1) = P(L - x_1)$  и

$$W = \int_0^L \frac{P^2(L - x_1)^2}{2EJ_3} dx = \frac{P^2 L^3}{6EJ_3}.$$

Согласно (5.1),  $w(L) = \partial W / \partial P = PL^3 / (3EJ_3)$ , что совпадает с результатом, который следует из (4.14) при  $x_1 = L$ . ♦

**Пример 5.4.** Одним из распространенных упругих элементов различных механических устройств являются витые пружины. Их применяют, например, в качестве аккумуляторов

энергии деформации амортизирующих и возвратно-подающих механизмов. К основным характеристикам пружины относят ее жесткость, равную отношению действующей нагрузки к вызванному ею перемещению. Для пружины, работающей на растяжение (рис. 5.1, а) или сжатие (рис. 5.1, б), это отношение силы к перемещению, а для пружины, работающей на кручение (рис. 5.1, в), — отношение момента к углу поворота.

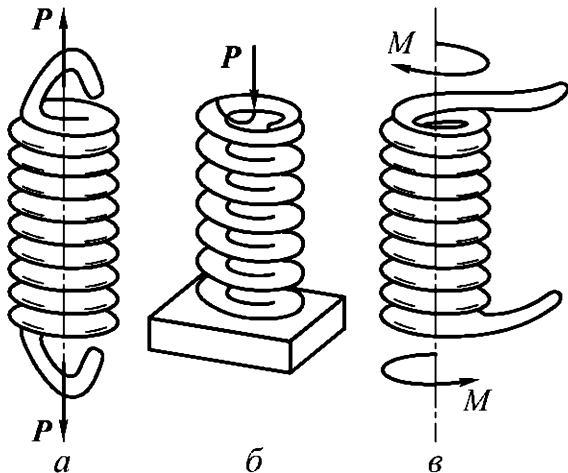


Рис. 5.1

Концевые витки пружин, работающих на растяжение и кручение, отгибают для удобства присоединения к смежным деталям, а концевые витки пружин, работающих на сжатие, поджимают и сошлифовывают с торцов для лучшего контакта с опорными площадками. При нахождении жесткости пружины концевые витки обычно исключают из рассмотрения. Так, для пружины, работающей на сжатие, обычно исключают по 3/4 витка с каждого торца.

Витую пружину можно рассматривать как пространственно изогнутый стержень. В любом поперечном сечении витка пружины, растягиваемой (сжимаемой) силой  $P$  (рис. 5.2, а), внутренние силовые факторы уравнивают эту силу и момент  $M = PD/2$ , где  $D$  — диаметр витка. Поперечное сечение витка повернуто относительно оси пружины на угол  $\alpha$  подъема витка,

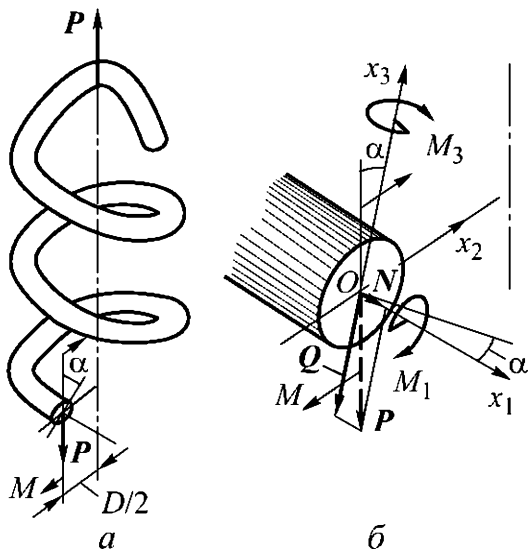


Рис. 5.2

связанный с шагом навивки  $s = \pi D \operatorname{tg} \alpha$ . Раскладывая силу  $P$  и момент  $M$  на составляющие по координатным осям (рис. 5.2, б), получаем осевую  $N = P \sin \alpha$  и перерезывающую  $Q = P \cos \alpha$  силы, изгибающий  $M_3 = M \sin \alpha$  и крутящий  $M_1 = M \cos \alpha$  моменты.

Угол  $\alpha$  обычно мал, поэтому влиянием силы  $N$  и момента  $M_3$  на потенциальную энергию  $W$  деформации витков пренебрегают. Не учитывают также влияние силы  $Q$ , т. е. считают, что витки работают главным образом на кручение.

Таким образом, с учетом (5.5) имеем

$$W = \int_L \frac{M_1^2}{2\mu J_p^0} dx_1 = \frac{P^2 D^2 L \cos^2 \alpha}{8\mu J_p^0} = \pi \frac{P^2 D^3 \cos \alpha}{8\mu J_p^0} n,$$

где  $L = \pi D n / \cos \alpha$  — полная длина рабочей части  $n$  витков ( $n$  может и не быть натуральным числом);  $J_p^0 = \pi R^4 / 2$  — полярный момент инерции поперечного сечения витка пружины.

Перемещение одного конца пружины относительно другого, согласно теореме Кастильяно,

$$u = \frac{\partial W}{\partial P} = \pi \frac{P D^3 \cos \alpha}{4\mu J_p^0} n,$$

а жесткость пружины

$$c = \frac{P}{u} = \frac{4\mu J_p^0}{\pi D^3 n \cos \alpha}.$$

Для пружины, навитой из круглой проволоки диаметром  $d$ ,

$$J_p^0 = \frac{\pi d^4}{32}; \quad c = \frac{\mu d^4}{8D^3 n \cos \alpha}.$$

Ясно, что при значительных перемещениях угол  $\alpha$  заметно изменится. Это приведет к зависимости жесткости пружины от перемещения (или силы), так что пружину уже нельзя будет считать линейным элементом механической системы.

Витки пружины, нагруженной крутящим моментом  $M$  (рис. 5.3, а), наоборот, работают главным образом на изгиб. Действительно, раскладывая этот момент по координатным осям

$Ox_1$  и  $Ox_3$  (рис. 5.3, б), получаем соответственно крутящий  $M_1 = M \sin \alpha$  и изгибающий  $M_3 = M \cos \alpha$  моменты, причем влиянием первого из них в силу малости угла  $\alpha$  можно пренебречь. Тогда с учетом (5.6)

$$W = \int_L \frac{M_3^2}{2EJ_3} dx_1 = \frac{M^2 L \cos^2 \alpha}{8EJ_3} = \pi \frac{M^2 D \cos \alpha}{2EJ_3} n$$

и в соответствии с теоремой Кастильяно угол поворота одного конца пружины относительно другого

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial M} = \pi \frac{MD \cos \alpha}{EJ_3} n.$$

Жесткость на кручение такой пружины

$$c_\varphi = \frac{M}{\varphi} = \frac{EJ_3}{\pi D n \cos \alpha}.$$

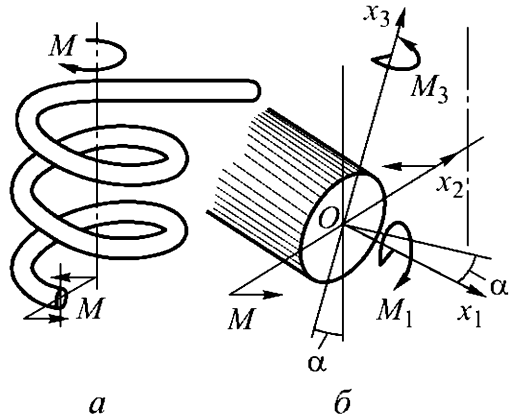


Рис. 5.3

Для пружины, навитой из круглой проволоки диаметром  $d$ ,

$$J_3 = \frac{\pi d^4}{64}; \quad c_\varphi = \frac{Ed^4}{64Dn \cos \alpha}.$$

Таким образом, необходимо учитывать эксплуатационные условия работы пружины в случае кручения и изгиба. ♦

## 5.2. Интеграл Мора

Непосредственное использование *теоремы Кастильяно* позволяет найти *обобщенные перемещения* лишь в точках приложения соответствующих *обобщенных сил*. Однако возможности этой теоремы можно расширить. Если нужно найти обобщенное перемещение в некоторой точке  $A$  нагруженного внешними силами тела из *упругого материала*, то следует в этой точке

приложить соответствующую обобщенную силу  $\Phi_A$  и найти выражение для *потенциальной энергии деформации* тела с учетом действия силы  $\Phi_A$ . Дифференцируя это выражение по  $\Phi_A$  и затем полагая в производной  $\Phi_A = 0$ , так как на самом деле этой силы не существует, получаем искомое обобщенное перемещение.

Для конструкции, состоящей из достаточно длинных *стержней*, работающих на растяжение-сжатие, кручение и изгиб, при вычислении *потенциальной энергии деформации* можно не учитывать работу, совершаемую возникающими при *поперечном изгибе касательными напряжениями*. С учетом действия обобщенной силы  $\Phi_A$  для отдельно взятого стержня осевую силу  $N_1^*$ , *крутящий момент*  $M_1^*$  и *изгибающие моменты*  $M_2^*$  и  $M_3^*$  относительно *главных центральных осей*  $Ox_2$  и  $Ox_3$  *поперечного сечения стержня* представим в виде линейных комбинаций

$$\begin{aligned} N_1^* &= N_1 + N_1' \Phi_A; & M_1^* &= M_1 + M_1' \Phi_A; \\ M_2^* &= M_2 + M_2' \Phi_A; & M_3^* &= M_3 + M_3' \Phi_A, \end{aligned}$$

где  $N_1$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  — реально возникающие *внутренние силовые факторы*, вызванные приложенными к конструкции внешними силами;  $N_1'$ ,  $M_1'$ ,  $M_2'$  и  $M_3'$  — условные составляющие этих же силовых факторов, которые возникли бы в стержне, если бы в точке  $A$  этой конструкции приложили единичную обобщенную силу.

Тогда для потенциальной энергии деформации стержня длиной  $L$  из *линейно упругого материала* с учетом примеров 5.1–5.3 получим

$$\begin{aligned} W &= \int_L \left( \frac{(N_1 + N_1' \Phi_A)^2}{2EF} + \frac{(M_1 + M_1' \Phi_A)^2}{2\mu J_k} \right) dx_1 + \\ &+ \int_L \left( \frac{(M_2 + M_2' \Phi_A)^2}{2EJ_2} + \frac{(M_3 + M_3' \Phi_A)^2}{2EJ_3} \right) dx_1, \end{aligned}$$

где  $J_k$  — геометрический фактор *жесткости* стержня *при кручении* (см. Д.2.1).

Аналогичное выражение можно составить для каждого стержня рассматриваемой конструкции. После сложения вкладов всех

стержней получим суммарную потенциальную энергию, которую и следует продифференцировать по  $\Phi_A$ , положив затем  $\Phi_A = 0$ . При этом вклад отдельно взятого стержня длиной  $L$  в искомое перемещение точки  $A$

$$u_A = \left. \frac{\partial W}{\partial \Phi_A} \right|_{\Phi_A=0} = \int_L \left( \frac{N_1 N'_1}{EF} + \frac{M_1 M'_1}{\mu J_K} + \frac{M_2 M'_2}{EJ_2} + \frac{M_3 M'_3}{EJ_3} \right) dx_1. \quad (5.8)$$

называют **интегралом Мора** по имени немецкого ученого О.Х. Мора (1835–1918). Итоговое значение обобщенного перемещения в точке  $A$  равно алгебраической сумме вкладов всех стержней конструкции.

При вычислении интеграла Мора для прямого стержня с постоянной жесткостью можно избежать аналитического представления зависимостей внутренних силовых факторов от продольной координаты. Благодаря линейности эпюр таких единичных силовых факторов, как сила или момент, определенный интеграл на участке длиной  $L$  от произведения функций  $f_1(x)f_2(x)$  при  $f_1(x_1) = a + bx_1$  можно представить в виде

$$\int_0^L f_1(x_1)f_2(x_1) dx_1 = a \int_0^L f_2(x_1) dx_1 + b \int_0^L x_1 f_2(x_1) dx_1.$$

Первый интеграл в правой части этого равенства характеризует площадь  $\Omega_2$  эпюры, определяемой функцией  $f_2(x_1)$ , а второй — *статический момент* этой площади, т. е. значение  $x_1^{(C)}\Omega_2$ , где  $x_1^{(C)}$  — координата центра тяжести данной эпюры. Поскольку  $a + bx_1^{(C)} = f_1(x_1^{(C)})$ , то

$$\int_0^L f_1(x_1)f_2(x_1) dx = \Omega_2 f_1(x_1^{(C)}).$$

Способ вычисления интеграла Мора путем перемножения площади одной эпюры на ординату второй (линейной) эпюры под центром тяжести первой называют **способом Верещагина** по

имени отечественного инженера А.К. Верещагина (1896–1959). Этот способ он предложил еще будучи студентом. Напомним, что центр тяжести треугольной эпюры лежит на расстоянии трети основания, отсчитываемом от катета, а эпюры, очерченной квадратной параболой, площадь которой равна произведению крайней ординаты на треть основания, — на расстоянии четверти основания от этой ординаты.

Для большинства стержней, используемых в реальных конструкциях, вклад первого слагаемого подынтегральной функции в (5.8) мал по сравнению с вкладом остальных слагаемых. В расчетах этим слагаемым обычно пренебрегают. Исключение составляет расчет *ферм*, в которых стержни работают лишь на растяжение или сжатие.

**Пример 5.5.** Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения. Предположим, что ось стержня имеет вид незамкнутого кругового кольца радиусом  $R$ . Кроме того, на торцах стержень нагружен силами  $P$ , перпендикулярными плоскости кольца (рис. 5.4, а). Кольцо находится в равновесии, поэтому перемещение точки  $C$  изогнутой оси при  $\varphi = \pi$  (рис. 5.4, б) можно положить равным нулю. Другими словами, можно считать, что точка  $C$  останется в исходной плоскости кольца, причем угол поворота поперечного сечения в данной точке равен нулю и после нагружения. Это позволяет в дальнейшем рассматривать лишь половину стержня, жестко закрепленную в указанном поперечном сечении.

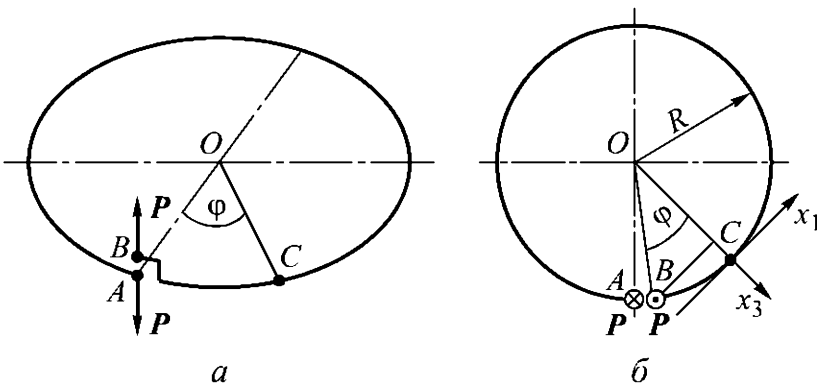


Рис. 5.4

Прежде всего, с помощью интеграла Мора вычислим перемещение  $w(0)$  торцов стержня в направлении действия силы  $P$ . В поперечном сечении стержня, определяемом центральным углом  $\varphi$  (см. рис. 5.4, б), возникнут перерезывающая сила  $Q = P$ , крутящий  $M_1 = PR(1 - \cos \varphi)$  и изгибающий  $M_3 = PR \sin \varphi$  моменты относительно главной центральной оси  $Ox_3$  поперечного сечения стержня, лежащей в плоскости кольца. Пренебрегая влиянием силы  $Q$ , для потенциальной энергии деформации стержня с учетом примеров 5.2 и 5.3 получаем

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\pi \left( \frac{M_1^2}{2\mu J_k} + \frac{M_3^2}{2EJ_3} \right) R d\varphi = \\ &= \frac{P^2 R^3}{2} \int_0^\pi \left( \frac{(1 - \cos \varphi)^2}{\mu J_k} + \frac{\sin^2 \varphi}{EJ_3} \right) d\varphi = \pi \frac{P^2 R^3}{4} \left( \frac{3}{\mu J_k} + \frac{1}{EJ_3} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w(0) = \frac{\partial W}{\partial P} = \pi \frac{PR^3}{2} \left( \frac{3}{\mu J_k} + \frac{1}{EJ_3} \right).$$

Покажем, что перемещения точек изогнутой оси стержня в исходной плоскости отсутствуют. Действительно, если приложить к его торцу единичную осевую силу, то в поперечном сечении с центральным углом  $\varphi$  возникнут осевая сила

$$N_1 = -\cos \varphi$$

и изгибающий момент

$$M_2 = R(1 - \cos \varphi)$$

относительно главной центральной оси  $Ox_2$  поперечного сечения стержня, перпендикулярной плоскости кольца. Поскольку сила  $P$  не вызывает в поперечном сечении такие внутренние силовые факторы, то интеграл Мора (5.8) в данном случае равен нулю. Тот же результат получим, если приложить к торцу единичную

силу в радиальном направлении. Аналогичная ситуация возникнет и в случае приложения единичных сил, лежащих в плоскости кольца, в поперечном сечении стержня с произвольным значением угла  $\varphi \in (0, \pi)$ .

Для нахождения зависимости  $\omega(\varphi)$  перемещения точки изогнутой оси стержня из исходной плоскости кольца приложим в поперечном сечении с центральным углом  $\varphi$  единичную силу, перпендикулярную этой плоскости. Тогда в поперечном сечении с центральным углом  $\varphi' \geq \varphi$  возникнут перерезывающая сила  $Q' = 1$ , крутящий момент

$$M'_1 = R(1 - \cos(\varphi' - \varphi))$$

и изгибающий момент

$$M'_3 = R \sin(\varphi' - \varphi)$$

относительно оси, лежащей в плоскости кольца. Влиянием перерезывающей силы на перемещение снова пренебрегаем, так что интеграл Мора (5.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega(\varphi) &= \int_{\varphi}^{\pi} \left( \frac{M_1 M'_1}{\mu J_K} + \frac{M_3 M'_3}{E J_3} \right) R d\varphi' = \\ &= \frac{PR^3}{\mu J_K} \int_{\varphi}^{\pi} (1 - \cos \varphi') (1 - \cos(\varphi' - \varphi)) d\varphi' + \\ &\quad + \frac{PR^3}{E J_3} \int_{\varphi}^{\pi} \sin \varphi' \sin(\varphi' - \varphi) d\varphi'. \end{aligned}$$

После вычисления интегралов получаем

$$\omega(\varphi) = \frac{PR^3}{2} \left( \frac{(\pi - \varphi)(2 + \cos \varphi) - \sin \varphi}{\mu J_K} + \frac{(\pi - \varphi) \cos \varphi + \sin \varphi}{E J_3} \right),$$

причем  $\omega(\pi) = 0$ . ♦

### 5.3. Теорема взаимности работ

При выводе (5.1) использована суперпозиция результатов действия на тело из *упругого материала* приложенных нагрузок, составляющая существо **принципа независимости действия сил**. Этот принцип позволяет установить еще одну важную теорему.

Пусть к телу из упругого материала в его точке  $A$  приложена сила  $P_1$ , а в точке  $B$  — сила  $P_2$  (рис. 5.5).

Если сначала приложить силу  $P_1$ , то она на перемещении  $u_{A1}$  в точке  $A$  по направлению действия этой силы совершит работу

$$W_1 = \int P_1 du_{A1},$$

причем связь  $P_1$  и  $u_{A1}$  зависит от свойств упругого материала. В частном случае *линейно упругого материала*  $W_1 = P_1 u_{A1}/2$ .

Аналогично работа приложенной затем силы  $P_2$

$$W_2 = \int P_2 du_{B2},$$

но при этом в точке  $A$  возникнет вызванное силой  $P_2$  перемещение  $u_{A2}$  в направлении действия силы  $P_1$ . На этом перемещении ранее приложенная сила  $P_1$  совершит работу  $P_1 u_{A2}$ . В итоге суммарная работа

$$W_{\Sigma} = W_1 + W_2 + P_1 u_{A2}.$$

Если же сначала приложить силу  $P_2$ , а затем  $P_1$ , то суммарная работа

$$W_{\Sigma} = W_1 + W_2 + P_2 u_{B1},$$

где  $u_{B1}$  — перемещение точки  $B$  в направлении действия силы  $P_2$ , вызванное силой  $P_1$ .

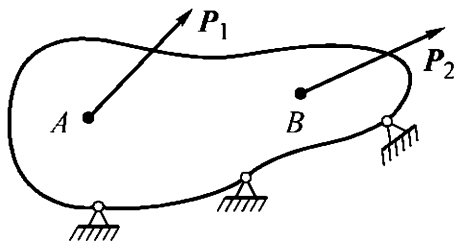


Рис. 5.5

Приравнивая, согласно принципу независимости действия сил, последние соотношения, получаем

$$P_1 u_{A2} = P_2 u_{B1}. \quad (5.9)$$

Это равенство выражает **теорему взаимности работ**, установленную независимо друг от друга английским физиком Дж.К. Максвеллом (1831–1879) в 1864 году, итальянским механиком Э. Бетти (1823–1892) в 1872 году и Дж.У. Стреттом (лордом Рэлеем) (1842–1919) в 1874 году и обычно упоминаемую в литературе по теории упругости как **теорема Бетти — Максвелла — Рэля**. Ясно, что теорема верна и в случае, когда речь идет о совокупностях обобщенных сил и перемещений.

В частном случае  $P_1 = P_2$  из (5.9) получим **теорему взаимности перемещений**: перемещение  $u_{A2}$  точки  $A$  под действием

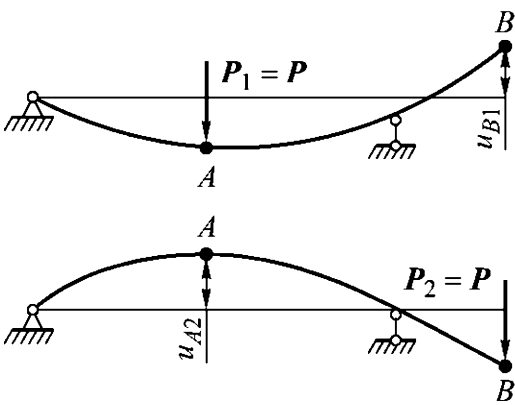


Рис. 5.6

силы, приложенной в точке  $B$ , равно перемещению точки  $B$  под действием такой же силы, приложенной в точке  $A$ .

Если шарнирно опертую балку нагрузить поочередно в точках  $A$  и  $B$  одинаково направленной силой  $P$  (рис. 5.6), то прогибы  $u_{A2}$  и  $u_{B1}$  изогнутой оси балки будут равны.

**Пример 5.6.** Пусть тело произвольной формы из линейно упругого материала с *продольным модулем упругости*  $E$  и *коэффициентом Пуассона*  $\nu$  нагружено двумя противоположно направленными силами  $P$  в точках, расстояние между которыми равно  $L$  (рис. 5.7). Вычислим изменение  $\Delta V_P$  объема тела.

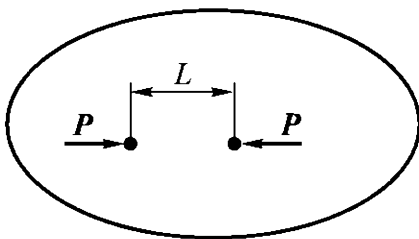


Рис. 5.7

Изменение объема есть обобщенное перемещение, которое соответствует действующему на тело

гидростатическому давлению  $p$ . Тогда, согласно теореме взаимности работ,

$$P\Delta L_p = p\Delta V_p, \quad (5.10)$$

где  $\Delta L_p$  — изменение расстояния между точками приложения сил  $P$  под действием гидростатического давления  $p$ .

В любой точке тела *тензор напряжений* при действии гидростатического давления будет *шаровым* с диагональными компонентами  $-p$ , поэтому  $\Delta L_p = -Lp(1 - 2\nu)/E$ , и после подстановки в (5.10) получим  $\Delta V_p = -PL(1 - 2\nu)/E$ . ♦

### Вопросы и задачи

**5.1.** Какая кинематическая гипотеза использована при записи формул (5.2) и (5.3)? Проведите подробный вывод этих формул.

**5.2.** Плоское кольцо радиусом  $R$  имеет разрез с малым зазором. Жесткость кольца на изгиб в его плоскости равна  $EJ_3$ . Вычислите, насколько раскроется зазор, если к его краям в точках  $A$  и  $B$  приложить противоположно направленные силы  $P$  (рис. 5.8).

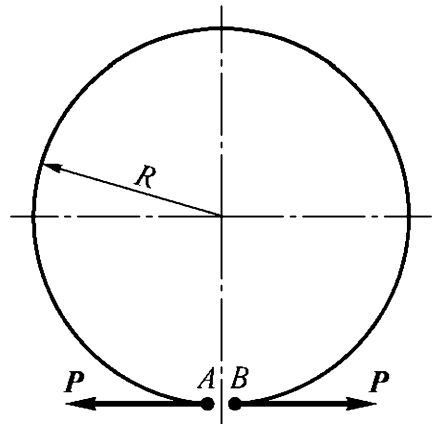


Рис. 5.8

**5.3.** Докажите, что площадь  $\pi r_0^2$  плоского нерастяжимого кольца радиусом  $r_0$  при нагружении в его плоскости произвольной статически уравновешенной системой сил сохранит свое значение в случае малых перемещений и линейно упругого поведения материала кольца.

## 6. МОДЕЛИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Под *стержневой системой* обычно понимают конструкцию, которая состоит из элементов, имеющих форму *стержня*. Если такие элементы работают в основном на растяжение-сжатие, то конструкцию называют *фермой*. В большинстве случаев ферма состоит из *прямолинейных стержней*, образующих треугольники, причем точки приложения внешних сил и опоры фермы соответствуют вершинам треугольников, называемым *узлами фермы*. Если элементы стержневой системы работают в основном на изгиб и кручение, то конструкцию называют *рамой*.

У плоской фермы или рамы *осевые линии* всех стержней лежат в одной плоскости (рис. 6.1, а), которая является и главной плоскостью *поперечных сечений* стержней. В этой же плоскости действуют и внешние нагрузки, включая и *реакции* опор. Если же нагрузки действуют в плоскостях, перпендикулярных к плоскости стержневой системы (рис. 6.1, б), то такую *стержневую систему* называют *плоскопространственной* или *плоскопространственной рамой*. Плоскую раму, на которую действуют нагрузки не только в ее плоскости, относят к *пространственным стержневым системам*. К таким системам принадлежат и *пространственные рамы*, осевые линии стержней которых не лежат в одной плоскости (рис. 6.1, в).

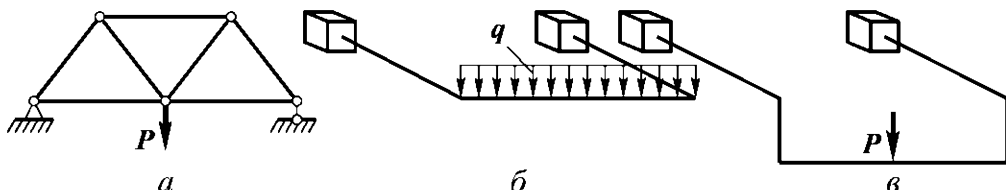


Рис. 6.1

Стержни входят в состав большого числа технических устройств. Стержнями являются элементы арматуры железобетонных конструкций. Мостовые фермы и фермы крепления ракетных дви-

гателей к корпусу ракеты состоят из стержней, соединенных между собой клепкой, сваркой или шарнирами. Такие силовые детали машиностроительных конструкций, как болты, оси, валы, шатуны, также являются стержнями.

## 6.1. Статически неопределимые стержневые системы

Если задача нахождения всех реакций опор *стержневой системы* является *статически определимой*, то такую систему называют **внешне статически определимой**. В этом случае после нахождения *реакций* опор можно вычислить *внутренние силовые факторы* в любом поперечном сечении любого стержня. В противном случае систему называют **статически неопределимой**, причем *степень* ее *статической неопределимости* равна разности между числом неизвестных (реакции опор и внутренние силовые факторы) и числом независимых уравнений равновесия. Для *пространственной стержневой системы* (как и для твердого тела) таких уравнений шесть, а для плоской — три.

Наименьшее *число связей*, исключающих превращение *системы* в *кинематически изменяемую*, называют **необходимым**. Оно совпадает с числом независимых уравнений равновесия, что позволяет в таком случае найти все реакции *связей*. Количество наложенных на систему связей сверх необходимых определяет число дополнительных связей, совпадающее со степенью статической неопределимости системы. Различают **связи внешние**, которые непосредственно накладывают ограничения на обобщенные перемещения фиксированных точек системы относительно внешней неподвижной системы координат (например, *шарнирные опоры* и *жесткие заделки*), и **внутренние**, ограничивающие взаимные смещения элементов системы и не позволяющие найти внутренние силовые факторы даже при известных реакциях опор.

**Подвижная шарнирная опора** (например, каток, на котором лежит *балка*) ограничивает перемещение в одном направлении, т. е. накладывает одну внешнюю связь на систему. **Неподвижная шарнирная опора** на плоскую систему накладывает две внешние связи, на пространственную — три, а жесткая заделка — соответственно три и шесть связей.

Например, плоская рама, изображенная на рис. 6.2, а, имеет необходимое число внешних связей, т. е. при заданной внешней нагрузке, действующей в плоскости рамы, можно однозначно вычислить реакции опор, но найти внутренние силовые факторы в стержнях, образующих замкнутый контур, не удастся, т. е. рама является статически неопределимой. В случае разомкнутого контура (рис. 6.2, б) кинематическая неизменяемость системы сохраняется, но теперь в любом поперечном сечении стержней такой рамы нетрудно найти внутренние силовые факторы, т. е. она стала статически определимой. Размыкание плоского контура сняло три дополнительные связи, позволив точкам  $A$  и  $B$  смещаться в двух направлениях одна относительно другой, а торцам в этих точках иметь разные углы поворота. Это означает, что степень статической неопределимости рамы с замкнутым контуром (см. рис. 6.2, а) равна трем (говорят, что эта рама трижды статически неопределима, и обычно добавляют: внутренним образом). Плоская рама, представленная на рис. 6.2, в, 5 раз статически неопределима (дважды внешним образом и по-прежнему трижды внутренним образом).

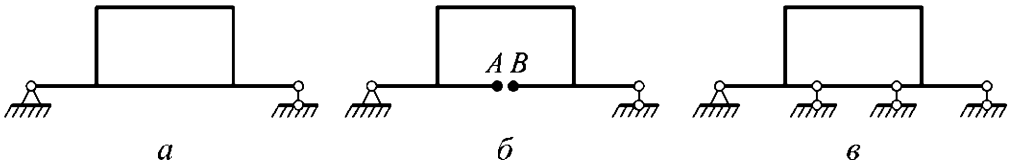


Рис. 6.2

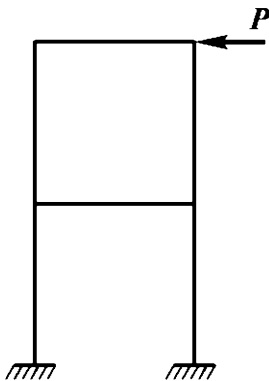


Рис. 6.3

Плоская рама, изображенная на рис. 6.3, также содержит замкнутый контур и поэтому 6 раз статически неопределима (трижды внешним образом и трижды внутренним). Плоскопространственная рама, приведенная на рис. 6.1, б, и пространственная рама, изображенная на рис. 6.1, в, 6 раз статически неопределимы внешним образом, поскольку каждая жесткая заделка накладывает по шесть связей и необходимое число связей также равно шести.

Шарнир в замкнутом контуре плоской рамы, показанной на рис. 6.4, допускает при ее нагружении изменение прямого угла между присоединенными к нему стержнями, т. е. снимает одну внутреннюю связь. Следовательно, эта рама 5 раз статически неопределима (трижды внешним образом и дважды внутренним).

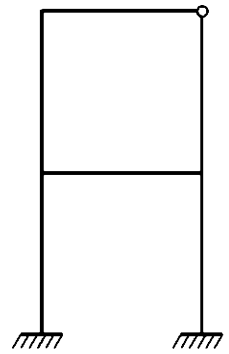


Рис. 6.4

К шарниру в плоской раме, изображенной на рис. 6.5, а, присоединены три стержня. Такой шарнир (рис. 6.5, б) можно рассматривать как два близко расположенных шарнира (рис. 6.5, в), каждый из которых снимает по одной внутренней связи. Поэтому раму, приведенную на рис. 6.5, а, следует считать 4 раза статически неопределимой (трижды внешним образом и один раз внутренним). Отметим, что каждый шарнир в плоской раме (помимо шарниров в опорах) снимает внутренние связи в количестве, на единицу меньшем числа присоединенных к нему стержней [38].

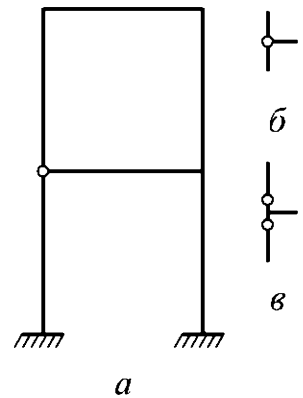


Рис. 6.5

Наличие замкнутого контура в пространственной раме соответствует шести внутренним связям, поэтому степень статической неопределимости рамы, показанной на рис. 6.6, а, равна 12 (по 6 раз внешним и внутренним образом).

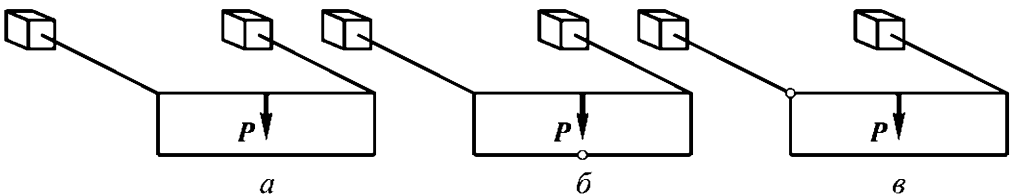


Рис. 6.6

Шарнир с тремя степенями свободы в замкнутом контуре пространственной рамы снимает три внутренние связи, соответствующие трем углам относительного поворота присоединенных к этому шарниру стержней в каждой из трех ортого-

нальных координатных плоскостей. Следовательно, изображенная на рис. 6.6, б рама 9 раз статически неопределима (6 раз внешним и 3 раза внутренним образом). Если к такому шарниру присоединены  $n$  стержней пространственной рамы, то это снимает  $3n - 3$  внутренних связей. Поэтому рама, приведенная на рис. 6.6, в, лишь 6 раз статически неопределима, причем только внешним образом.

При расчете статически неопределимой системы необходимо сначала снять дополнительные связи (внешние и внутренние), заменив их действие неизвестными силами и моментами, определяемыми из тех ограничений, которые накладывают на систему отброшенные связи, и называемыми **искомыми силовыми факторами**. Эту процедуру называют **раскрытием статической неопределимости** исходной стержневой системы. Освобожденная от дополнительных связей **стержневая система**, называемая **основной**, должна стать статически определимой и остаться кинематически неизменяемой. При снятии любой внутренней дополнительной связи путем разреза или врезки шарнира заменяющие действие такой связи внутренние силовые факторы (силы или моменты) являются взаимными, т. е. равными по абсолютному значению и противоположно направленными. Суммарное число искоемых силовых факторов (внутренних и реакций опор) совпадает со степенью статической неопределимости стержневой системы.

Исходной системе можно поставить в соответствие множество основных систем. На рис. 6.7, а–в показаны варианты основной системы с искомыми силовыми факторами, называемой **эквивалентной стержневой системой**, для 6 раз статически неопределимой плоской рамы, изображенной на рис. 6.3.

Для той же рамы на рис. 6.8, а–в приведены эквивалентные системы, которые, на первый взгляд, не являются статически определимыми, поскольку число внешних связей превышает три. Тем не менее реакции в опорах этих эквивалентных систем можно найти с помощью уравнений статики (см. пример 6.8).

Вместе с тем системы, представленные на рис. 6.9, а и б, хотя в них и отброшено по шесть дополнительных связей, уже не являются основными для данной рамы, поскольку они кинематически изменяемы.

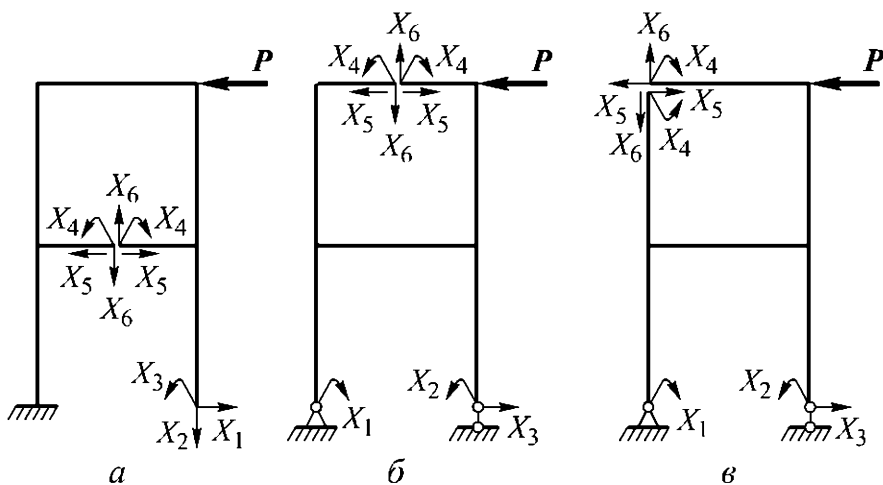


Рис. 6.7

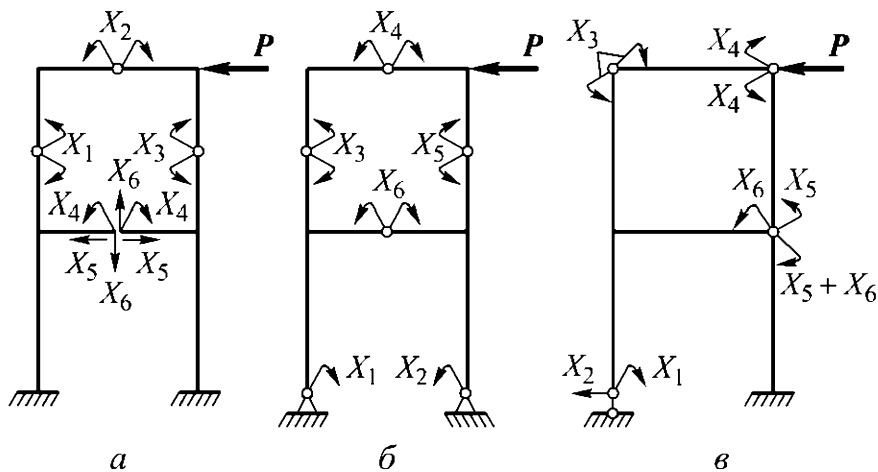


Рис. 6.8

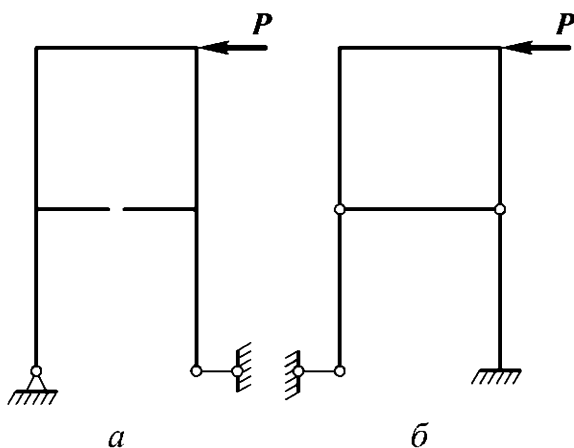


Рис. 6.9

**Пример 6.1.** Рассмотрим достаточно простой случай вычисления единственного искомого силового фактора на примере один раз статически неопределимой балки длиной  $2L$  (см. пример 4.10) с жесткостью при изгибе  $EJ_3$ , где  $E$  — продольный модуль упругости материала балки;  $J_3$  — осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси  $Ox_3$ , перпендикулярной плоскости  $x_1Ox_2$  (см. рис. 4.13).

Заменяем влияние на эту балку средней опоры силой  $X_1$  (рис. 6.10) и теперь для статически определимой двухопорной балки построим эпюры *изгибающих моментов*  $M^{(P)}(x_1)$  отдельно от действия распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  (эпюра обозначена символом  $P$  в круге) и  $M^{(1)}(x_1)$  отдельно от действия принятой равной единице силы  $X_1$  (эпюра обозначена символом  $X_1$  в круге).

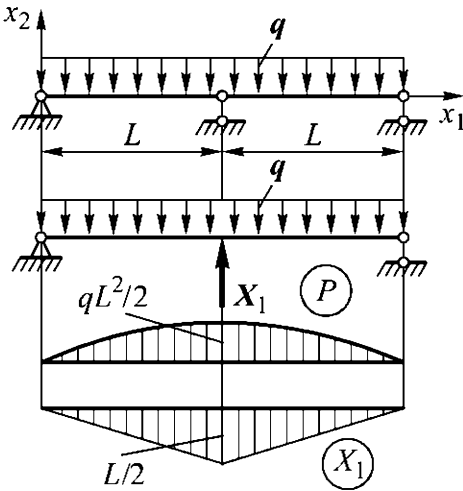


Рис. 6.10

в направлении действия этой силы, вызванное действием распределенной нагрузки,

$$u_{1P} = \frac{1}{EJ_3} \int_0^{2L} M^{(1)}(x_1) M^{(P)}(x_1) dx_1 = \frac{2}{EJ_3} \int_0^L M^{(1)}(x_1) M^{(P)}(x_1) dx_1.$$

Интеграл в правой части этого равенства вычислим с помощью *правила Верещагина*, представив на отрезке  $[0, L]$  эпюру  $M^{(P)}(x_1)$  как разность прямоугольной эпюры с ординатой  $qL^2/2$  площадью  $qL^3/3$  и эпюры, имеющей площадь  $qL^3/6$  и очерченной квадратной параболой с крайней ординатой, также равной  $qL^2/2$ . Ордината эпюры  $M^{(1)}(x_1)$  под центром тяжести эпюры площадью  $qL^3/2$  равна  $-L/4$ , а под центром тяжести эпю-

ры площадью  $qL^3/6$  — соответственно  $-L/8$ . В итоге

$$u_{1P} = 2 \frac{\frac{qL^3}{2} \left(-\frac{L}{4}\right) - \frac{qL^3}{6} \left(-\frac{L}{8}\right)}{EJ_3} = -\frac{5qL^4}{24EJ_3}. \quad (6.1)$$

Перемещение точки приложения принятой равной единице силы  $X_1$  в направлении действия этой силы, в соответствии с правилом применения интеграла Мора,

$$\delta_{1,1} = \frac{2}{EJ_3} \int_0^L \left(M^{(1)}(x_1)\right)^2 dx_1.$$

Поскольку на отрезке  $[0, L]$  треугольная эпюра  $M^{(1)}(x_1)$  имеет площадь  $L^2/4$ , а ордината ее центра тяжести равна  $L/3$ , согласно правилу Верещагина, получим

$$\delta_{1,1} = 2 \frac{(L^2/4)L/3}{EJ_3} = \frac{L^3}{6EJ_3}. \quad (6.2)$$

Для *линейно упругого материала* балки перемещение пропорционально искомому значению силы  $X_1$ , т. е. равно  $\delta_{1,1}X_1$ . Однако в действительности перемещение рассматриваемой точки в вертикальном направлении запрещено наложенной связью в виде подвижной шарнирной опоры (см. рис. 6.10) и поэтому равно нулю. Следовательно, получаем уравнение

$$\delta_{1,1}X_1 + u_{1P} = 0, \quad (6.3)$$

из которого с учетом (6.1) и (6.2) находим

$$X_1 = -\frac{u_{1P}}{\delta_{1,1}} = \frac{5qL}{4},$$

что совпадает со значением реакции  $R$  средней опоры, вычисленным в примере 4.10. ♦

**Пример 6.2.** Используемый в примере 6.1 подход к составлению уравнения (6.3) для нахождения искомого силового фактора можно применить и к более сложным основным стержневым системам. Составление уравнений для определения неизвестных силовых факторов целесообразно рассмотреть, сохранив общность подхода, на конкретном примере системы, которая представлена на рис. 6.7, *a* и получена при раскрытии статической неопределимости плоской рамы, изображенной на рис. 6.3.

Силе  $X_1$  (см. рис. 6.7, *a*) соответствует перемещение  $u_1$  в направлении действия этой силы. Оно должно быть равно нулю, так как перемещение в этом направлении ограничено внешней связью в виде жесткой заделки (см. рис. 6.3). Это перемещение, согласно *принципу независимости действия сил*, можно представить в виде

$$u_1 = u_{1,1} + u_{1,2} + u_{1,3} + u_{1,4} + u_{1,5} + u_{1,6} + u_{1P} = 0, \quad (6.4)$$

где  $u_{1k}$  — перемещение в направлении действия силы  $X_1$ , вызванное силовым фактором  $X_k$ ,  $k = \overline{1, 6}$ ;  $u_{1P}$  — перемещение в том же направлении, вызванное приложенной к системе внешней силой  $P$  (в общем случае всеми приложенными *внешними силовыми факторами*).

Для стержня из линейно упругого материала каждая составляющая  $u_{1k}$  перемещения  $u_1$  пропорциональна искомому силовому фактору  $X_k$ , т. е.  $u_{1k} = \delta_{1k} X_k$ , где  $\delta_{1k}$  — коэффициент пропорциональности, имеющий смысл перемещения точки приложения силы  $X_1$ , вызванного искомым силовым фактором  $X_k$ , равным единице. Выражения для *обобщенных перемещений*, соответствующих остальным искомым силовым факторам, аналогичны (ясно, что моменту соответствует угол поворота поперечного сечения или торца стержня). При этом в данном случае равенства  $u_5 = u_6 = 0$  означают, что взаимные горизонтальные и вертикальные смещения сечений при условном размыкании контура рамы в действительности отсутствуют, а равенство  $u_4 = 0$  означает, что отсутствует и взаимный поворот этих сечений.

В итоге систему из шести уравнений вида (6.4) можно представить в матричной форме  $A\mathbf{X} = \mathbf{u}_P$ , где в данном случае

$A$  — матрица шестого порядка коэффициентов  $\delta_{ik}$ ,  $i, k = \overline{1, 6}$ ;  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{u}_p$  — векторы неизвестных силовых факторов и взятых с обратным знаком обобщенных перемещений  $u_{ip}$  точек приложения этих факторов, вызванные внешней нагрузкой. В силу *теоремы взаимности перемещений*  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ , т. е. матрица  $A$  этой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), называемых **каноническими уравнениями метода сил**, является симметрической.

В общем случае произвольной пространственной стержневой системы после перехода к ее основной системе для вычисления значений  $u_{ip}$  следует предварительно для каждого стержня этой основной системы найти зависимости от продольной координаты данного стержня внутренних силовых факторов (осевой силы, *изгибающего* и *крутящего моментов*), которые вызваны внешней нагрузкой и каждым силовым фактором  $X_i$ , равным единице. Эти зависимости для наглядности обычно иллюстрируют эпюрами, построенными непосредственно на стержнях представленной графически основной системы. Затем для каждого стержня следует вычислить *интеграл Мора* вида (5.8) и алгебраически просуммировать результаты, полученные для всех стержней этой системы. При вычислении каждого из элементов  $\delta_{ik}$  матрицы  $A$  также нужно использовать интеграл Мора, но теперь в (5.8) функции  $N_1$  и  $M_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , следует заменить зависимостями от продольной координаты каждого стержня внутренних силовых факторов, вызванных равным единице искомым силовым фактором  $X_k$ .

После решения СЛАУ  $A\mathbf{X} = \mathbf{u}_p$  обычно строят суммарные эпюры внутренних силовых факторов для исходной стержневой системы как линейные комбинации эпюр, построенных для основной системы. Коэффициентами в этих линейных комбинациях являются найденные значения искоемых силовых факторов  $X_i$ . ♦

Из структуры интеграла Мора (5.8) следует, что некоторые значения  $u_{ip}$  координат вектора  $\mathbf{u}_p$  и  $\delta_{ik}$ ,  $i, k = \overline{1, n}$ , элементов матрицы  $A$  СЛАУ для  $n$  раз статически неопределимой стержневой системы могут оказаться равными нулю. Одной из причин обращения в нуль указанных величин является симметричность

стержневой системы и приложенной нагрузки. Если в этом случае возможен переход к основной системе сечением в плоскости симметрии, то эпюры для такой системы от действия внешней нагрузки и так называемых **симметричных внутренних силовых факторов** (единичных осевой силы и *изгибающего момента*) также будут симметричными, т. е. зависимости внутренних силовых факторов от продольной координаты каждого стержня с началом отсчета в плоскости симметрии есть четные функции. Тогда в таком сечении можно не рассматривать так называемые **кососимметричные внутренние силовые факторы** (единичные *перерезывающую силу и крутящий момент*)  $X_i$ , поскольку эпюры от их действия описывают нечетные функции, а определенный интеграл от произведения четной и нечетной функций по отрезку, симметрично расположенному относительно начала координат, обращается в нуль. Это приведет к равенству нулю неизвестных  $X_i$  при решении СЛАУ  $A\mathbf{X} = \mathbf{u}_p$ .

По аналогичной причине при действии на симметричную стержневую систему кососимметричной внешней нагрузки в сечении, лежащем в плоскости симметрии, можно не рассматривать симметричные внутренние силовые факторы, так как при решении СЛАУ  $A\mathbf{X} = \mathbf{u}_p$  они обратятся в нуль. Приложенную к такой системе произвольную нагрузку в силу принципа независимости действия сил, справедливого для линейно упругого материала стержней, всегда можно представить как сумму симметричной и кососимметричной внешних нагрузок и решить две, но более простые задачи, а затем полученные результаты алгебраически сложить.

**Пример 6.3.** Рассмотрим 6 раз статически неопределимую ( $n = 6$ ) плоскую симметричную раму (см. рис. 6.3). На рис. 6.11, а показан вариант основной системы, полученной путем сечения рамы по оси симметрии, а на рис. 6.11, б и в построены эпюры изгибающих моментов от действия равных единице соответственно перерезывающей силы  $X_1$  (кососимметричный внутренний силовой фактор) и изгибающего момента  $X_6$  (симметричный внутренний силовой фактор). Первую из этих эпюр описывает нечетная функция, а вторую — четная, при этом аргументы функ-

ций отсчитывают от сечения по оси симметрии. В связи с этим интеграл от произведения этих функций по длине любой пары стержней, симметрично расположенных относительно оси симметрии, равен нулю, т. е. в данном случае  $\delta_{1,6} = \delta_{6,1} = 0$ . К такому же результату приводит и применение правила Верещагина.

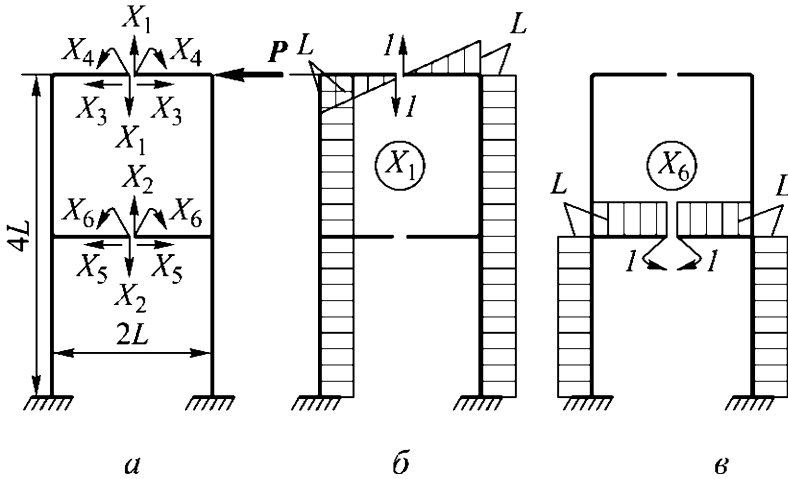


Рис. 6.11

Аналогичным образом можно убедиться, что

$$\delta_{1,3} = \delta_{1,4} = \delta_{1,5} = 0; \quad \delta_{2,3} = \delta_{2,4} = \delta_{2,5} = \delta_{2,6} = 0,$$

а также в силу симметричности матрицы  $A$  равны нулю и соответствующие значения ее элементов после перестановки указанных индексов. Однако при действующей на раму внешней нагрузке (силе  $P$  на рис. 6.11, *a*) все координаты вектора  $u_P$  могут быть отличны от нуля, поэтому СЛАУ метода сил можно представить в виде двух независимых систем уравнений:

$$\delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = -u_{1P}; \quad \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = -u_{2P} \quad (6.5)$$

и

$$\begin{aligned} \delta_{3,3}X_3 + \delta_{3,4}X_4 + \delta_{3,5}X_5 + \delta_{3,6}X_6 &= -u_{3P}; \\ \delta_{4,3}X_3 + \delta_{4,4}X_4 + \delta_{4,5}X_5 + \delta_{4,6}X_6 &= -u_{4P}; \\ \delta_{5,3}X_3 + \delta_{5,4}X_4 + \delta_{5,5}X_5 + \delta_{5,6}X_6 &= -u_{5P}; \\ \delta_{6,3}X_3 + \delta_{6,4}X_4 + \delta_{6,5}X_5 + \delta_{6,6}X_6 &= -u_{6P}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ясно, что решение двух СЛАУ (в данном случае второго и четвертого порядков) проще решения одной СЛАУ, порядок которой равен сумме порядков этих двух СЛАУ. Можно сделать еще один шаг в сторону упрощения процесса раскрытия статической неопределимости стержневой системы, что целесообразно при действии на нее большого числа разных видов различно направленных внешних нагрузок (в общем случае сил, распределенных нагрузок, изгибающих и крутящих моментов). Этот шаг связан с упрощением вычисления координат вектора  $u_p$ .

Действующую на раму внешнюю нагрузку (силу  $P$  на рис. 6.12, а) можно представить как сумму симметричной (рис. 6.12, б) и кососимметричной (рис. 6.12, в) нагрузок.

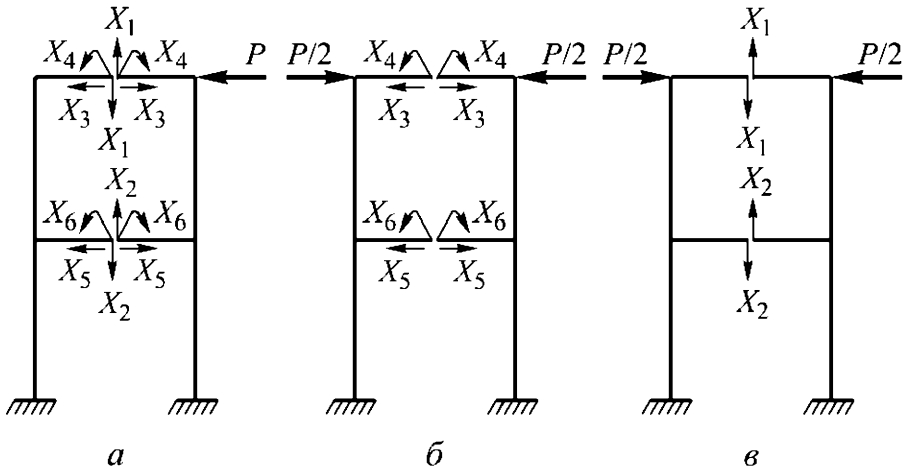


Рис. 6.12

Тогда для эквивалентной системы, приведенной на рис. 6.12, б, СЛАУ (6.5) станет однородной в силу равенства  $u_{1P} = u_{2P} = 0$ , что позволит не рассматривать кососимметричные внутренние силовые факторы  $X_1$  и  $X_2$ , а для эквивалентной системы, изображенной на рис. 6.11, в, в силу равенства  $u_{3P} = u_{4P} = u_{5P} = u_{6P} = 0$  станет однородной СЛАУ (6.6), что даст возможность не учитывать симметричные внутренние силовые факторы  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$  и  $X_6$ . ♦

Рассмотренное разделение внешней нагрузки на симметричную и кососимметричную части заметно упрощает вычисление координат вектора  $u_p$  при большом числе внешних силовых факторов, действующих на стержневую систему.

## 6.2. Примеры раскрытия статической неопределенности

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих все характерные этапы раскрытия статической неопределенности стержневых систем. При этом в *интеграле Мора* (5.8) будем пренебрегать вкладом первого слагаемого подынтегральной функции в силу его малости по сравнению с остальными слагаемыми (см. 5.2).

**Пример 6.4.** Все стержни трижды статически неопределимой системы — плоской рамы, изображенной на рис. 6.13, а, — имеют жесткость при изгибе  $EJ_3$ . Перейдем к эквивалентной системе, заменив действие левой жесткой заделки искомыми силовыми факторами (рис. 6.13, б): пока неизвестными изгибающим моментом  $X_3$  и силами  $X_1$ ,  $X_2$ . На рис. 6.13, в–е построены эпюры изгибающих моментов от внешнего силового фактора — заданной силы  $P$  — и искомым силовых факторов. Продольную координату  $x$  для обеих стержней будем отсчитывать от угловой точки рамы, влиянием осевой силы пренебрегаем.

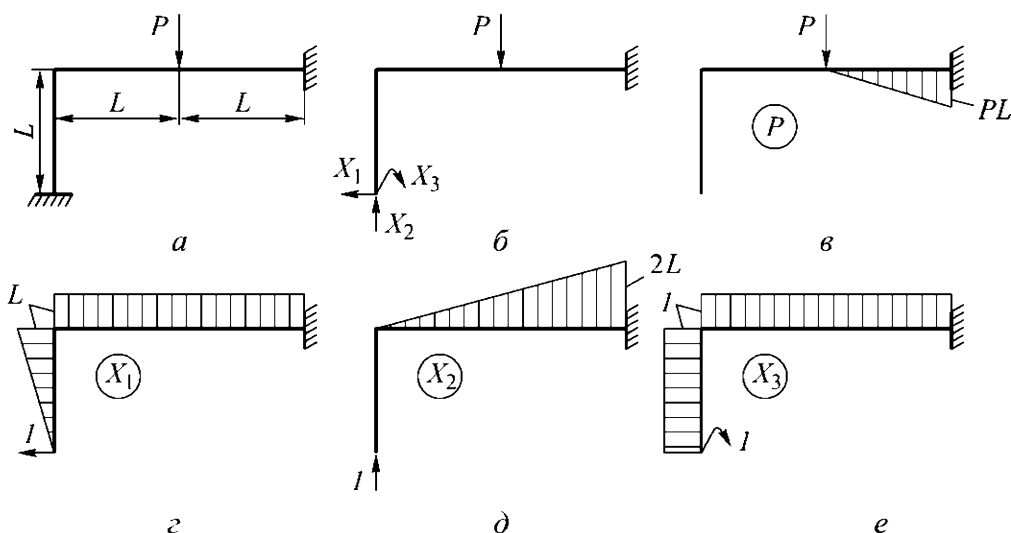


Рис. 6.13

Сначала, используя интеграл Мора (5.8), интегрированием по правой части горизонтального стержня находим взятые с обратным знаком компоненты вектора  $u_p$ :

$$u_{1P} = \int_L^{2L} \frac{-P(x-L)L}{EJ_3} dx = -\frac{PL^3}{2EJ_3};$$

$$u_{2P} = \int_L^{2L} \frac{-P(x-L)x}{EJ_3} dx = -\frac{5PL^3}{6EJ_3};$$

$$u_{3P} = \int_L^{2L} \frac{-P(x-L) \cdot 1}{EJ_3} dx = -\frac{PL^2}{2EJ_3}.$$

Теперь переходим к вычислению элементов матрицы  $A$  системы канонических уравнений метода сил, интегрируя сначала вдоль вертикального стержня, а затем вдоль горизонтального:

$$\delta_{1,1} = \int_0^L \frac{(L-x)^2}{EJ_3} dx + \int_0^{2L} \frac{L^2}{EJ_3} dx = \frac{7L^3}{3EJ_3};$$

$$\delta_{2,2} = \int_0^L \frac{0 \cdot 0}{EJ_3} dx + \int_0^{2L} \frac{x^2}{EJ_3} dx = \frac{8L^3}{3EJ_3};$$

$$\delta_{3,3} = \int_0^L \frac{1 \cdot 1}{EJ_3} dx + \int_0^{2L} \frac{1 \cdot 1}{EJ_3} dx = \frac{3L}{EJ_3};$$

$$\delta_{1,2} = \int_0^L \frac{(L-x) \cdot 0}{EJ_3} dx + \int_0^{2L} \frac{Lx}{EJ_3} dx = \frac{2L^3}{EJ_3};$$

$$\delta_{1,3} = \int_0^L \frac{(L-x) \cdot 1}{EJ_3} dx + \int_0^{2L} \frac{L \cdot 1}{EJ_3} dx = \frac{5L^3}{2EJ_3};$$

$$\delta_{2,3} = \int_0^L \frac{0 \cdot 1}{EJ_3} dx + \int_0^{2L} \frac{x \cdot 1}{EJ_3} dx = \frac{2L^2}{EJ_3}.$$

После формирования матрицы  $A$  с учетом равенств  $\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$ ,  $\delta_{1,3} = \delta_{3,1}$  и  $\delta_{2,3} = \delta_{3,2}$  и решения СЛАУ  $A\mathbf{X} = \mathbf{u}_P$  получаем

$X_1 = -P/4$ ,  $X_2 = 7P/16$ ,  $X_3 = PL/12$ .  
 На рис. 6.14 представлена суммарная эпюра изгибающих моментов, а штриховой линией изображен качественный характер изогнутой оси стержневой рамы. ♦

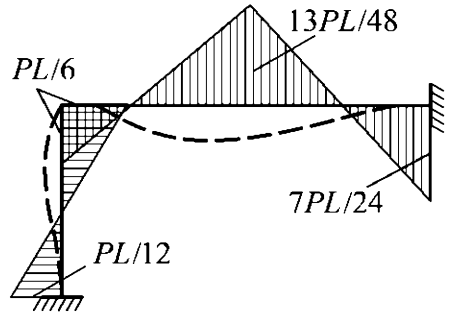


Рис. 6.14

**Пример 6.5.** Трижды статически неопределимая кольцевая рама радиусом  $r_0$  с жесткостью при изгибе  $EJ_3$  нагружена силами  $P$  (рис. 6.15, а). Условно разрежем ее по диаметру  $AB$  (рис. 6.15, б), относительно которого внешняя нагрузка является симметричной. Вследствие этого в полученных сечениях *перерезывающие силы* отсутствуют. Однако рама симметрична и относительно линии действия внешних сил. Следовательно, силы, нормальные к полученным сечениям, равны, причем из условия равновесия отсеченной части рамы  $N_A = N_B = P/2$ .

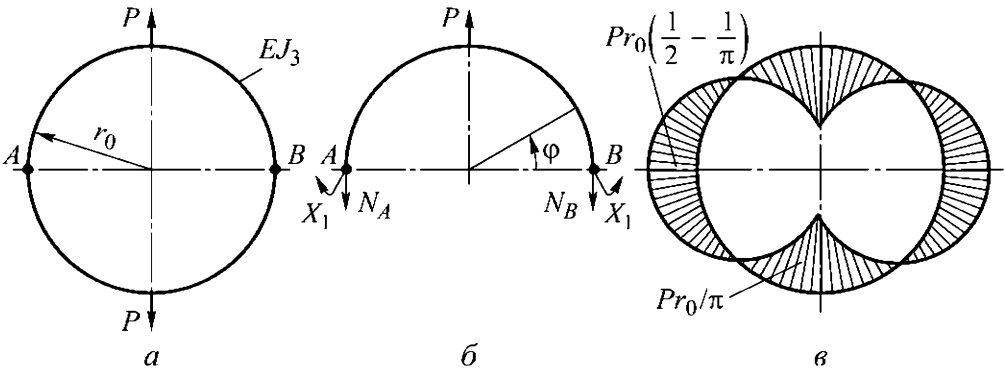


Рис. 6.15

В итоге в сечениях *статически определимой* основной системы неизвестны лишь равные между собой (опять-таки в силу симметрии) изгибающие моменты  $X_1$  (см. рис. 6.15, б). Каноническое уравнение для нахождения  $X_1$  имеет вид  $\delta_{1,1}X_1 = -u_{1P}$ , причем его коэффициенты можно вычислить, рассмотрев благодаря симметрии изменение угловой координаты  $\varphi$  только в промежутке от  $0$  до  $\pi/2$ .

Изгибающий момент  $X_1$  при его единичном значении не зависит от  $\varphi$ , поэтому

$$\delta_{1,1} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 \cdot 1}{EJ_3} r_0 d\varphi = \frac{\pi r_0}{2EJ_3}.$$

Изгибающий момент от известных сил

$$M_3^{(P)} = -\frac{Pr_0(1 - \cos \varphi)}{2}$$

в данном случае следует взять с противоположным знаком по сравнению с выбранным положительным направлением момента  $X_1$  (см. рис. 6.15, б). Тогда

$$u_{1P} = \int_0^{\pi/2} \frac{-Pr_0(1 - \cos \varphi) \cdot 1}{2EJ_3} r_0 d\varphi = -\frac{Pr_0^2}{2EJ_3} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Окончательно получим

$$X_1 = -\frac{u_{1P}}{\delta_{1,1}} = Pr_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

и суммарный изгибающий момент

$$M_3 = M_3^{(P)} + X_1 = Pr_0 \left( \frac{\cos \varphi}{2} - \frac{1}{\pi} \right).$$

На рис. 6.15, в представлена эпюра этого момента, который достигает наибольшего абсолютного значения, равного  $Pr_0/\pi$ , в точках приложения сил  $P$ . ♦

Можно показать, что в *плоскопространственной стержневой системе* отсутствуют внутренние силовые факторы, лежащие в ее плоскости. Дело в том, что в этом случае канонические уравнения образуют две независимые системы. Одна из них, которая содержит искомые силовые факторы  $X_k$ , действующие в плоскости системы, однородна, поскольку все значения  $u_{kP}$  равны нулю. Определитель этой системы отличен от нуля, и поэтому

она имеет нулевое решение. Другая система, искомые силовые факторы в которой действуют в плоскостях, ортогональных плоскости системы, неоднородна и имеет в общем случае ненулевое решение.

При смешанной нагрузке, действующей на плоскую раму, всегда есть возможность перейти к двум задачам: для плоско-пространственной и плоской систем. После решения этих задач полученные результаты алгебраически складывают.

**Пример 6.6.** Стержни трижды статически неопределимой рамы, на которую действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  (рис. 6.16, а), имеют жесткость при изгибе  $EJ_3$  и жесткость при кручении  $\mu J_p$ , где  $\mu$  — модуль сдвига материала стержней рамы;  $J_p$  — полярный момент инерции круглого сечения этих стержней. Рама плоскопространственная и симметричная. К основной системе перейдем путем сечения рамы ее плоскостью симметрии (на рис. 6.16, б изображена половина этой системы). В связи с этим в сечении рамы плоскостью симметрии отсутствуют не только силовые факторы, действующие в ее плоскости (в том числе горизонтальная перерезывающая сила), но и крутящий момент и вертикальная перерезывающая сила, являющиеся *кососимметричными внутренними силовыми факторами*.

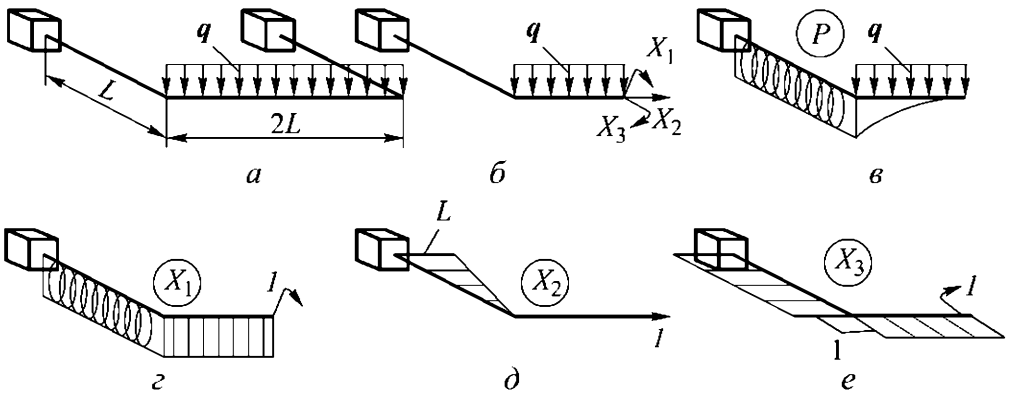


Рис. 6.16

Убедимся, что СЛАУ второго порядка относительно осевой силы  $X_2$  и изгибающего момента  $X_3$ , действующего в плоскости рамы, однородна, т. е. ее решением будет  $X_2 = X_3 = 0$ . Для этого

построим эпюры изгибающих и крутящих моментов от внешней нагрузки (рис. 6.16, в) и изгибающих моментов от равных единице силовых факторов  $X_2$  и  $X_3$  (соответственно рис. 6.16, д и е). Ясно, что применение интеграла Мора для вычисления перемещений  $u_{2P}$  и  $u_{3P}$  даст нулевые результаты. В итоге отличным от нуля будет лишь изгибающий момент  $X_1$ , действующий в вертикальной плоскости.

Эпюра изгибающих и крутящих моментов от равного единице изгибающего момента  $X_1$  представлена на рис. 6.16, г, причем направление крутящих моментов на этой эпюре и на эпюре от внешней нагрузки (см. рис. 6.16, в) различны. С помощью правила Верещагина вычисляем

$$\delta_{1,1} = \frac{2L}{EJ_3} + \frac{2L}{\mu J_p}; \quad u_{1P} = -\frac{qL^3}{3EJ_3} - \frac{qL^3}{\mu J_p}.$$

Окончательно получаем

$$X_1 = -\frac{u_{1P}}{\delta_{1,1}} = \frac{qL^2}{6} \frac{1 + 3EJ_3/(\mu J_p)}{1 + EJ_3/(\mu J_p)}.$$

Для стержней с круглым поперечным сечением диаметром  $d$

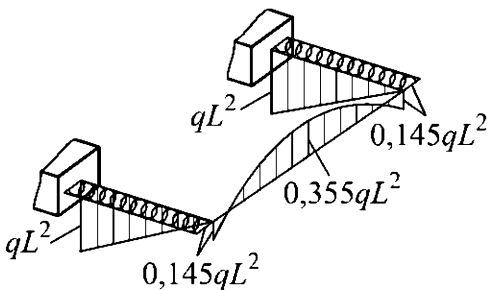


Рис. 6.17

$$\frac{EJ_3}{\mu J_p} = \frac{2\mu(1+\nu)\pi d^4/64}{\mu\pi d^4/32} = 1 + \nu,$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала стержней. При  $\nu = 0,3$   $X_1 \approx 0,355qL^2$ . Суммарная эпюра изгибающих и крутящих моментов для этого случая представлена на рис. 6.17. ♦

Линейные и угловые перемещения в статически неопределимой стержневой системе и в соответствующей ей статически определимой эквивалентной системе одинаковы. Поэтому для нахождения линейного или углового перемещения в произвольной точке  $n$  раз статически неопределимой системы следует в этой точке основной системы приложить единичные силу или момент

и воспользоваться интегралом Мора (5.8), считая при этом заданной не только внешнюю нагрузку, но и все искомые силовые факторы  $X_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , которые были предварительно вычислены при раскрытии статической неопределенности.

**Пример 6.7.** Найдем, насколько уменьшится диаметр  $AB$  кольцевой рамы, рассмотренной в примере 6.5 (см. рис. 6.15, *а*), при ее растяжении силами  $P$ . Приложенная к эквивалентной системе (см. рис. 6.15, *б*) в точке  $A$  единичная сила, направленная к центру рамы, вызовет изгибающий момент  $M'_3 = -r_0 \sin \varphi$ . На четверти рамы при изменении угла  $\varphi$  от 0 до  $\pi/2$  имеем момент от нормальной силы  $P/2$ , приложенный в сечении рамы в точке  $A$ ,

$$M_3^{(P)} = -\frac{Pr_0(1 - \cos \varphi)}{2}$$

и момент, вычисленный при раскрытии статической неопределенности,

$$X_1 = Pr_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right).$$

Поскольку точка приложения силы  $P$  вследствие симметрии рамы не имеет перемещения в направлении диаметра  $AB$ , то, согласно интегралу Мора вида (5.8), уменьшение этого диаметра составит

$$\begin{aligned} \Delta d &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{M_3^{(P)} + X_1}{EJ_3} M'_3 r_0 d\varphi = \\ &= \frac{2r_0}{EJ_3} \int_0^{\pi/2} \left( -Pr_0 \frac{1 - \cos \varphi}{2} + Pr_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \right) (-r_0 \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{Pr_0^3}{EJ_3} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Можно показать, что площадь  $F = \pi r_0^2$ , ограниченная контуром этой кольцевой рамы, при ее растяжении силами  $P$  не изменится при малых перемещениях точек этого контура [36]. Действительно, изменение площади как *обобщенного перемещения* соответствует *обобщенной силе* в виде приложенной к этому

контур и направленной в радиальном направлении равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$ . Тогда это изменение можно представить интегралом Мора

$$\Delta F = \int_0^{2\pi} \frac{M_3^{(P)} + X_1}{EJ_3} M'_{1q} r_0 d\varphi,$$

где  $M'_{1q}$  — изгибающий момент, вызванный приложением указанной распределенной нагрузки интенсивностью  $q = 1$ . Однако такой момент тождественно равен нулю, и поэтому  $\Delta F \equiv 0$ , если пренебречь растяжением контура кольцевой рамы и ограничиться малыми перемещениями, характерными для линейно упругого поведения материала рамы. ♦

**Пример 6.8.** Выполним оставшиеся этапы раскрытия статической неопределимости плоской рамы, представленной на рис. 6.3. Поскольку рама симметрична, для этого используем сначала сочетание ее эквивалентных систем, приведенных на рис. 6.12, б для симметричной и на рис. 6.12, в для кососимметричной внешней нагрузки.

Как следует из рис. 6.12, б, в случае  $X_3 = P/2$  каждая половина этой эквивалентной системы находится в равновесии при условии  $X_4 = X_5 = X_6 = 0$ . Проверим такое предположение формальным путем. С этой целью для правой половины данной эквивалентной системы построим эпюры изгибающих моментов, соответствующих действию внешней силы  $P/2$  и равных единице искомых внутренних силовых факторов  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$  и  $X_6$  (рис. 6.18). Используя правило Верещагина, вычисляем элементы матрицы  $A$  СЛАУ метода сил вида (6.6):

$$\delta_{3,3} = \frac{64L^3}{3}; \quad \delta_{4,4} = 5L; \quad \delta_{5,5} = \frac{8L^3}{3}; \quad \delta_{6,6} = 3L;$$

$$\delta_{3,4} = 8L^2; \quad \delta_{3,5} = \frac{20L^3}{3}; \quad \delta_{3,6} = 6L^2;$$

$$\delta_{4,5} = 2L^2; \quad \delta_{4,6} = 2L; \quad \delta_{5,6} = 2L^2.$$

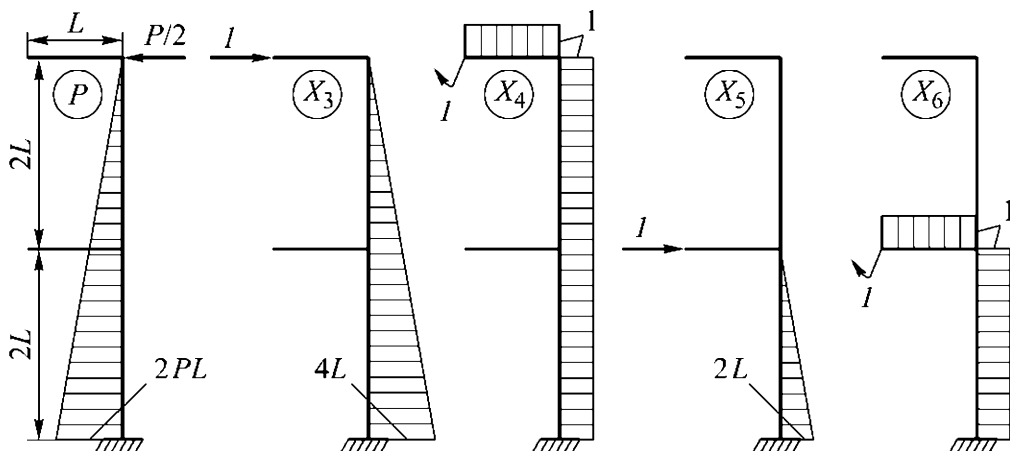


Рис. 6.18

С учетом симметрии этой матрицы получаем

$$A = \begin{pmatrix} \frac{64L^3}{3} & 8L^2 & \frac{20L^3}{3} & 6L^2 \\ 8L^2 & 5L & 2L^2 & 2L \\ \frac{20L^3}{3} & 2L^2 & \frac{8L^3}{3} & 2L^2 \\ 6L^2 & 2L & 2L^2 & 3L \end{pmatrix}.$$

Снова применяя правило Верещагина, находим координаты вектора  $\mathbf{u}_P$  правой части этой СЛАУ:

$$\begin{aligned} -u_{3P} &= \frac{32PL^3}{3}; & -u_{4P} &= 4PL^2; \\ -u_{5P} &= \frac{10PL^3}{3}; & -u_{6P} &= 3PL^2. \end{aligned}$$

Вектор предполагаемого решения СЛАУ имеет вид

$$\mathbf{X} = \left( \frac{P}{2} \ 0 \ 0 \ 0 \right)^T.$$

Этот вектор удовлетворяет СЛАУ

$$A\mathbf{X} = \mathbf{u}_P,$$

поскольку произведение  $A\mathbf{X}$  равно вектору  $\mathbf{u}_P$  с найденными ранее координатами. Следовательно, в стержнях рассмотренной эквивалентной системы не возникают изгибающие моменты и отсутствуют реакции в жесткой заделке.

Эпюры изгибающих моментов для правой половины эквивалентной системы, изображенной на рис. 6.12, в, построены на рис. 6.19. В этом случае получим

$$\delta_{1,1} = \frac{13L^3}{3}; \quad \delta_{2,2} = \frac{7L^3}{3}; \quad \delta_{1,2} = 2L^3;$$

$$-u_{1P} = 4PL^3; \quad -u_{2P} = 3PL^3.$$

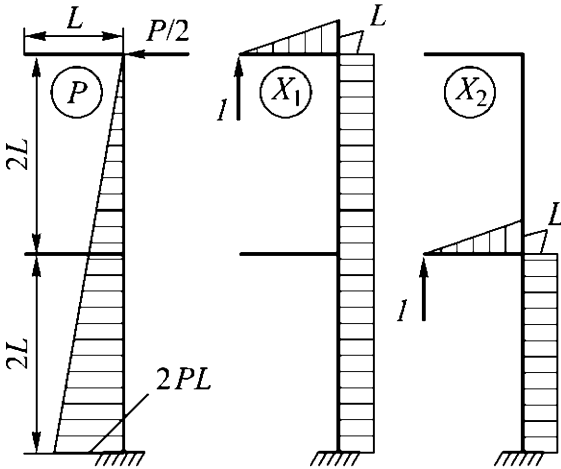


Рис. 6.19

Решением соответствующей СЛАУ

$$\begin{cases} \frac{13}{3}X_1 + 2X_2 = 4P; \\ 2X_1 + \frac{7}{3}X_2 = 3 \end{cases}$$

являются значения

$$X_1 = \frac{6}{11}P \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{9}{11}P$$

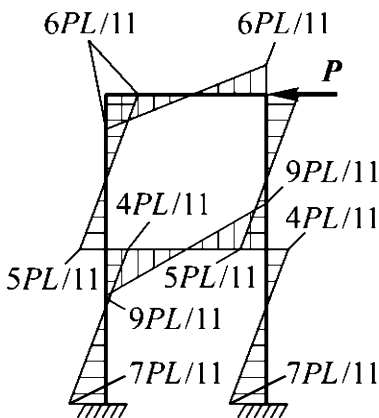


Рис. 6.20

вертикально направленных искомых внутренних силовых факторов. Вместе с действующей внешней силой  $P/2$  они определяют суммарную эпюру изгибающих моментов (рис. 6.20). Из условий равновесия реакциями в жесткой заделке являются направленные вертикально и горизонтально вправо силы соответственно  $(15/11)P$  и  $P/2$ , а также направленный против хода часовой стрелки изгибающий момент  $(7/11)PL$ .

Для сравнения рассмотрим этапы раскрытия статической неопределенности той же рамы, используя эквивалентную систему, приведенную на рис. 6.8, б. С учетом симметрии рамы эту систему целесообразно представить в виде двух эквивалентных систем: с симметричными (рис. 6.21, а) и кососимметричными (рис. 6.21, б) силовыми факторами

$$X_7 = \frac{X_1 + X_2}{2}; \quad X_8 = \frac{X_3 + X_5}{2};$$

$$X_9 = \frac{X_1 - X_2}{2}; \quad X_{10} = \frac{X_3 - X_5}{2}.$$

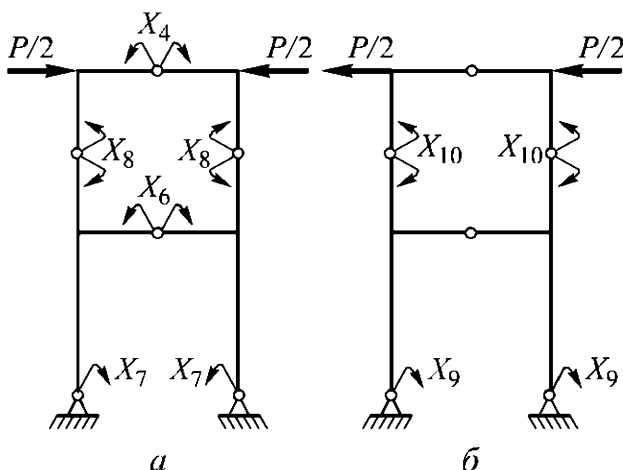


Рис. 6.21

Поскольку сумма моментов относительно любой из неподвижных шарнирных опор системы, приведенной на рис. 6.21, а, равна нулю, вертикальные реакции в этих опорах отсутствуют, а для системы, изображенной на рис. 6.21, б, из того же условия следует, что эти реакции равны  $2P$ , причем в левой опоре реакция направлена вверх, а в правой — вниз.

В дальнейшем достаточно рассматривать лишь одну половину этих эквивалентных систем, например правую (рис. 6.22, а и б) с новыми неизвестными моментами  $X_7$ ,  $X_8$  и  $X_9$ ,  $X_{10}$ . При этом в сечениях стержней на оси симметрии могут возникнуть в первом случае только нормальные силы  $N_1$  и  $N_2$ , а во втором случае только перерезывающие силы  $Q_1$  и  $Q_2$ . При построении изгибающих моментов от действия силы  $P/2$  для каждой из этих половин

необходимо предварительно найти значения указанных нормаль-

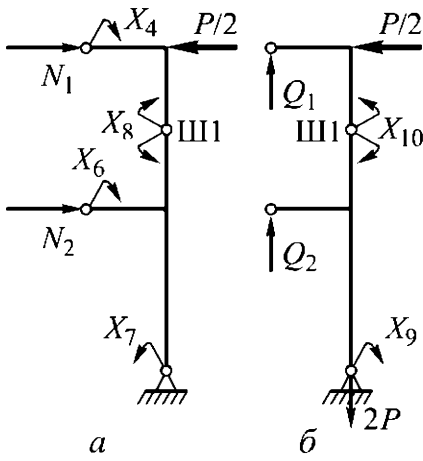


Рис. 6.22

ных и перерезывающих сил, горизонтальную реакцию в неподвижной шарнирной опоре и реакции в шарнире Ш1.

В первом случае при действии только силы  $P/2$ , разделив систему на две части, изображенные на рис. 6.23, из уравнений статики получим, что реакции в шарнире Ш1 отсутствуют,  $N_1 = P/2$ ,  $N_2 = 0$  и отсутствует горизонтальная реакция в шарнирной опоре. Отметим, что аналогичный результат получен при анализе эквивалентной системы, представленной на рис. 6.12, б.

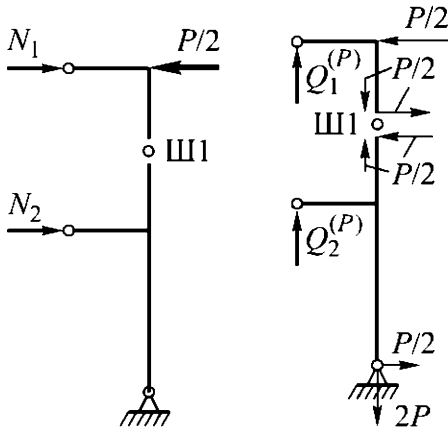


Рис. 6.23

Рис. 6.24

Это означает, что сила  $P/2$  не создает в стержнях изгибающих моментов, а соответствующая СЛАУ метода сил однородна, т. е.  $X_7 = X_8 = 0$ , или  $X_2 = -X_1$  и  $X_5 = -X_3$ .

Во втором случае после деления системы, представленной на рис. 6.22, б, на две части (рис. 6.24) также с помощью уравнений статики можно установить, что все

реакции в шарнире Ш1 и горизонтальная реакция в опоре одинаковы и равны  $Q_1^{(P)} = P/2$ , а  $Q_2^{(P)} = 3P/2$ . Соответствующая эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 6.25, а.

При действии на систему, изображенную на рис. 6.22, б, только момента  $X_9$ , равного единице, снова разделим эту систему на две части (рис. 6.26). Из уравнений статики следует, что  $Q'_1 = 0$ , т. е. реакции в шарнире Ш1 и горизонтальная реакция в опоре отсутствуют, а  $Q'_2 = 1/L$ . Эпюра изгибающих моментов для этого случая показана на рис. 6.25, б.

При действии на систему только моментов  $X_{10} = 1$ , применив уравнения статики к ее двум частям (рис. 6.27), можно установить, что  $Q_1'' = Q_2'' = 1/L$ , а реакции в опоре отсутствуют. Это приведет к эпюре изгибающих моментов, представленной на рис. 6.25, в.

С помощью правила Верещагина по эпюрам, приведенным на рис. 6.25, вычислим

$$\delta_{9,9} = \frac{7L}{3}; \quad \delta_{10,10} = \frac{8L}{3};$$

$$\delta_{9,10} = \frac{L}{3};$$

$$-u_{9P} = 3PL^2; \quad -u_{10P} = \frac{2PL^2}{3}.$$

Решением СЛАУ метода сил

$$\begin{cases} \frac{7}{3}X_9 + \frac{1}{3}X_{10} = \frac{3}{2}PL; \\ \frac{1}{3}X_9 + \frac{8}{3}X_{10} = \frac{1}{3}PL \end{cases}$$

являются значения

$$X_9 = \frac{7}{11}PL; \quad X_{10} = \frac{1}{22}PL,$$

которые соответствуют перерезывающим силам

$$Q_1 = \frac{P}{2} + \frac{X_{10}}{L} = \frac{6}{11}P,$$

$$Q_2 = \frac{3P}{2} - \frac{X_9}{L} - \frac{X_{10}}{L} = \frac{9}{11}P,$$

совпадающим с найденными ранее значениями  $X_1$  и  $X_2$ . При этом  $X_9$  совпадает с моментом в жесткой заделке, полученным

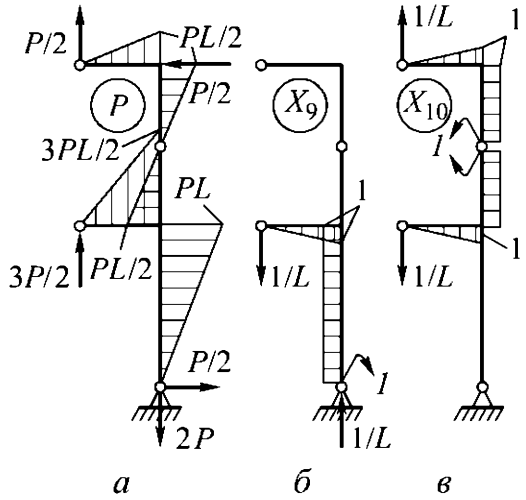


Рис. 6.25

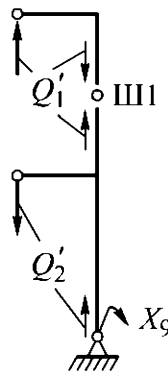


Рис. 6.26

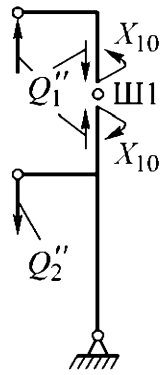


Рис. 6.27

при анализе эквивалентной схемы, изображенной на рис. 6.12, в. Поскольку совпадают и реакции в шарнирной опоре с силовыми реакциями в жесткой заделке, совпадут и суммарные эпюры изгибающих моментов.

Проведенное сравнение результатов раскрытия статической неопределимости одной и той же рамы с использованием двух различных эквивалентных систем подтверждает возможность выбора любой из допустимых систем. При выборе руководствуются соображениями удобства и простоты вычислений. ♦

### Вопросы и задачи

- 6.1.** По каким признакам раму отличают от фермы?
- 6.2.** В чем заключается различие между пространственной и плоскопространственной стержневыми системами?
- 6.3.** Какое число связей называют необходимым? Какие связи называют внешними, а какие — внутренними? Приведите примеры.
- 6.4.** Какому числу и каким именно связям соответствует наличие замкнутого контура в пространственной раме?
- 6.5.** Сформулируйте правило нахождения степени статической неопределимости стержневой системы?
- 6.6.** В чем заключается различие между основной и эквивалентной стержневыми системами?
- 6.7.** Проведите раскрытие статической неопределимости рамы, изображенной на рис. 6.3, с помощью эквивалентных систем, приведенных на рис. 6.7, а и 6.8, а, и сравните полученные результаты.
- 6.8.** Установите степень статической неопределимости (внешним и внутренним образом) стержневых систем, представленных на рис. 6.28, и постройте варианты допустимых для них основных и эквивалентных систем.

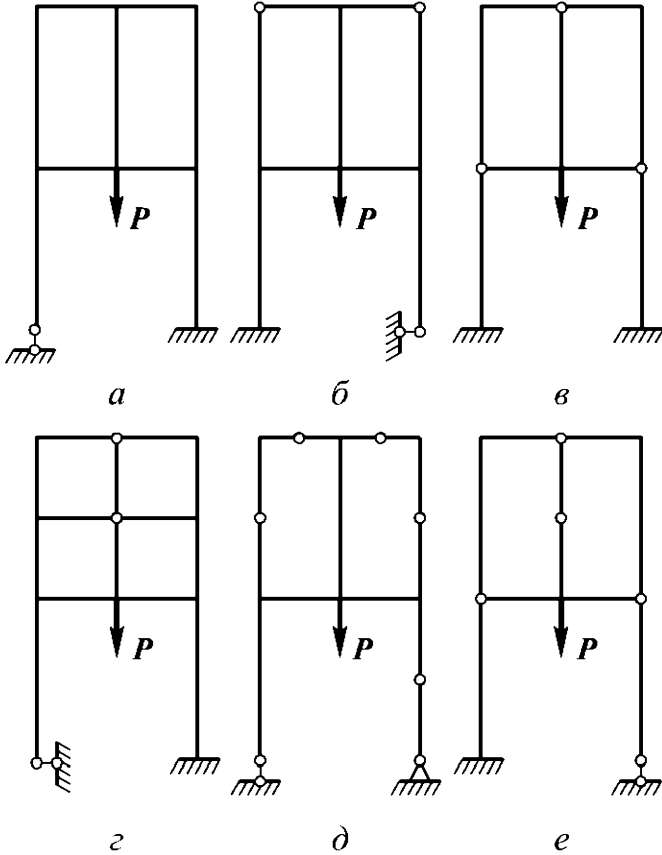


Рис. 6.28

**6.9.** Какие уравнения называют каноническими уравнениями метода сил?

**6.10.** Какие силовые факторы называют симметричными, а какие — кососимметричными? Приведите примеры.

## 7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБОЛОЧКИ И ПЛАСТИНКИ

*Оболочку* можно представить как тело, образованное множеством отрезков длиной  $h$ , перпендикулярных некоторой поверхности. Если точки пересечения отрезков с этой поверхностью делят их пополам, то она будет *срединной поверхностью* оболочки. Принято, что у оболочек  $h/\tilde{r} \leq 0,1$ , где  $\tilde{r}$  — наименьший из *главных радиусов кривизны* этой поверхности. При  $h = \text{const}$  говорят об *оболочке постоянной толщины*. В частном случае плоской срединной поверхности оболочка переходит в *пластинку*. При построении *математических моделей* оболочки в общем случае возникает необходимость в использовании *криволинейных координат* (см. Д.7.3). Наиболее простыми являются математические модели *оболочек вращения* при осесимметричном нагружении (см. 7.2 и 7.3).

### 7.1. Сферическая и круговая цилиндрическая оболочки

Построение *математических моделей оболочек* связано с принятием ряда упрощающих допущений. Для обоснования этих допущений применительно к *сферической оболочке*, срединная поверхность которой является сферой, рассмотрим сначала задачу о нагружении внутренним давлением полого шара из *изотропного линейно упругого материала*.

**Пример 7.1.** Пусть в полом шаре с наружным радиусом  $r_2$  полость ограничена концентрической сферой радиусом  $r_1$ . Сферическая поверхность радиусом  $r \in [r_1, r_2]$ , проходящая через некоторую точку  $M$  этого шара, при его нагружении внутренним давлением  $p_1$  и равномерно распределенным по наружной поверхности давлением  $p_2$  в силу симметрии останется сферой,

но ее радиус получит приращение  $u(r)$ . Тогда *линейная деформация* в радиальном направлении  $\varepsilon_r = du/dr$ , а в направлении любой касательной к этой сфере, называемом тангенциальным,

$$\varepsilon_t = \frac{r + u - r}{r} = \frac{u}{r}.$$

*Деформации сдвига* в силу симметрии равны нулю. Поэтому согласно *обобщенному закону Гука* отличны от нуля лишь *нормальные напряжения*: **радиальное напряжение**  $\sigma_r$  и **тангенциальные напряжения**  $\sigma_t$ . Следовательно, *тензоры деформации и напряжений в сферической системе координат*, начало которой совпадает с центром шара, диагональны и представляются соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_t \end{pmatrix}.$$

В данном случае из соотношения (2.5) *принципа возможных перемещений* следует

$$4\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_r \delta\varepsilon_r r^2 dr + 4\pi \int_{r_1}^{r_2} 2\sigma_t \delta\varepsilon_t r^2 dr = 4\pi r_1^2 p_1 \delta u_1 - 4\pi r_2^2 p_2 \delta u_2,$$

где  $\delta u_1$  и  $\delta u_2$  — *возможные перемещения* соответственно внутренней и наружной сферических поверхностей полого шара.

Это равенство после подстановки выражений для компонент тензора деформации и вычисления первого интеграла по частям примет вид

$$r_2^2 (\sigma_r(r_2) + p_2) \delta u_2 - r_1^2 (\sigma_r(r_1) + p_1) \delta u_1 - \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{d(r^2 \sigma_r)}{dr} - 2\sigma_t r \right) \delta u dr = 0.$$

Отсюда при произвольных вариациях  $\delta u$ ,  $\delta u_1$  и  $\delta u_2$  получим уравнение равновесия

$$\frac{d(r^2 \sigma_r)}{dr} - 2\sigma_t r = 0 \quad (7.1)$$

и силовые граничные условия

$$\sigma_r(r_1) = -p_1; \quad \sigma_r(r_2) = -p_2. \quad (7.2)$$

Соотношения (1.16) обобщенного закона Гука примут вид

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{\sigma_r - 2\nu\sigma_t}{E}; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} = \frac{(1-\nu)\sigma_t - \nu\sigma_r}{E},$$

где  $\nu$  и  $E$  — коэффициент Пуассона и продольный модуль упругости материала шара.

Из этих равенств с учетом (1.18) следует

$$\sigma_r = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left( (1-\nu) \frac{du}{dr} + 2\nu \frac{u}{r} \right); \quad \sigma_t = \frac{2\mu}{1-2\nu} \left( \nu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right), \quad (7.3)$$

где  $\mu$  — модуль сдвига материала полого шара.

После подстановки (7.3) в (7.1) получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} \right) = 0.$$

Отметим, что

$$\frac{du}{dr} + \frac{2u}{r} = \varepsilon_r + 2\varepsilon_t = \varepsilon_V,$$

т.е. в данном случае *объемная деформация*  $\varepsilon_V$  в полом шаре постоянна. Это ОДУ имеет общее решение

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  найдем из (7.2) с учетом первого равенства (7.3). В итоге получим

$$u = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left( (p_1 r_1^3 - p_2 r_2^3) \frac{(1-2\nu)r}{E} + (p_1 - p_2) \frac{r_1^3 r_2^3}{4\mu r^2} \right).$$

Подставив это равенство в (7.3), в частном случае  $p_2 = 0$  найдем

$$\sigma_r = \frac{p_1 (1 - r_2^3/r^3)}{r_2^3/r_1^3 - 1}; \quad \sigma_t = \frac{\frac{p_1}{2} (2 + r_2^3/r^3)}{r_2^3/r_1^3 - 1}.$$

На рис. 7.1 представлены зависимости от  $\bar{r} = r/r_2$  отношений

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{p_1}; \quad \bar{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{p_1}$$

при  $r_1/r_2 = 0,5$  (штриховые линии) и  $r_1/r_2 = 0,9$  (сплошные линии).

С уменьшением относительной толщины  $h/r_2 = 1 - r_1/r_2$  стенки полого шара значения  $\bar{\sigma}_t$  возрастают по сравнению с  $|\bar{\sigma}_r|_{\max} = 1$  примерно пропорционально отношению  $r_2/(2h)$ , причем распределение тангенциальных напряжений по толщине  $h = r_2 - r_1$  становится более равномерным.

При  $\tilde{h} = h/r_1 \leq 0,1$  представим наибольшее тангенциальное напряжение в виде

$$\sigma_t(r_1) = \frac{K_1(\tilde{h})p_1r_1}{2h}.$$

Зависимость коэффициента  $K_1(\tilde{h})$  от  $\tilde{h}$  изображена на рис. 7.2 сплошной линией. Таким образом, при  $\tilde{h} \leq 0,1$  с погрешностью менее чем 1% можно принять, что в тонкой сферической оболочке тангенциальное напряжение постоянно по ее толщине:

$$\sigma_t = \frac{p_1r_1}{2h}.$$

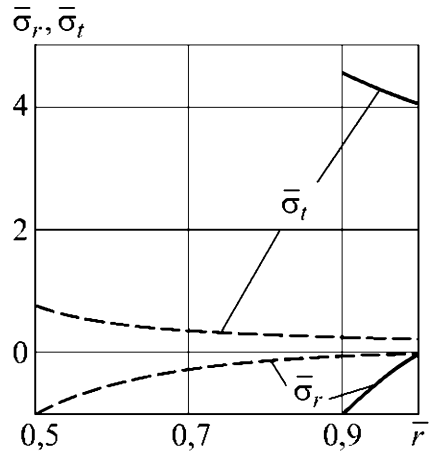


Рис. 7.1

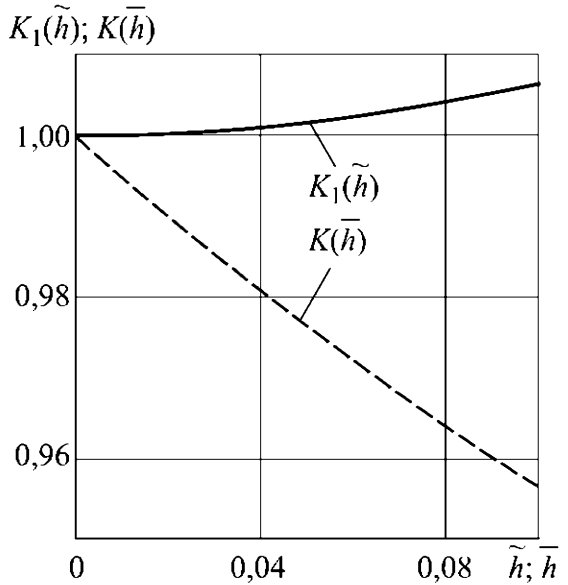


Рис. 7.2

Кривизну оболочек принято характеризовать радиусами кривизны *срединной поверхности*. В данном случае они одинаковы:

$$\tilde{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Представим наибольшее тангенциальное напряжение в виде

$$\sigma_t(r_1) = \frac{K(\bar{h})p_1\tilde{r}}{2h},$$

включающем коэффициент  $K(\bar{h})$ , зависимость которого от  $\bar{h} = h/\tilde{r}$  изображена на рис. 7.2 штриховой линией. Таким образом, если при  $h/\tilde{r} \leq 0,1$  принять, что

$$\sigma_t(r_1) = \frac{p_1\tilde{r}}{2h},$$

то это приближенное значение превысит действительное не более чем на 5%. ♦

Проведем аналогичный анализ для **круговой цилиндрической оболочки**, срединная поверхность которой имеет радиус  $\tilde{r}$ .

**Пример 7.2.** Пусть прямая труба имеет *поперечное сечение* в виде кругового кольца с внутренним и наружным радиусами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Труба нагружена внутренним давлением  $p_1$  и равномерно распределенным по наружной поверхности давлением  $p_2$ , а в направлении своей оси — силой  $P$  (растягивающей, если  $P > 0$ ). В силу осевой симметрии линейная деформация в радиальном направлении (как и в примере 7.1)  $\varepsilon_r = du/dr$ , где  $u$  — радиальное перемещение точки трубы, находившейся до нагружения на расстоянии  $r$  от оси трубы. При этом деформация в окружном направлении  $\varepsilon_t = u/r$ , а деформации сдвига равны нулю. *Напряженное состояние* трубы характеризуется тензором напряжений, компоненты которого в *цилиндрической системе координат* являются нормальными напряжениями  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  и  $\sigma_z$ , называемыми в данном случае радиальным, **окружным** и **осевым напряжениями** соответственно.

Для трубы с длиной  $L \gg r_2$  в рамках *гипотезы плоских сечений* примем, что в осевом направлении деформация

$$\varepsilon_z = \frac{u_z}{L} = \text{const}, \quad (7.4)$$

где  $u_z$  — перемещение одного из торцов трубы относительно другого.

Тогда из соотношения (2.5) принципа возможных перемещений для участка трубы единичной длины получим

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_r \delta \varepsilon_r r dr + 2\pi \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_t \delta \varepsilon_t + \sigma_z \delta \varepsilon_z) r dr = \\ = 2\pi r_1 p_1 \delta u_1 - 2\pi r_2 p_2 \delta u_2 + \frac{P \delta u_z}{L}, \end{aligned}$$

где  $\delta u_1$  и  $\delta u_2$  — возможные перемещения соответственно внутренней и наружной поверхностей трубы.

После подстановки выражений для компонент тензора деформации и вычисления первого интеграла по частям это равенство с учетом (7.4) примет вид

$$\begin{aligned} r_2(\sigma_r(r_2) + p_2) \delta u_2 - r_1(\sigma_r(r_1) + p_1) \delta u_1 - \frac{P}{2\pi} \frac{\delta u_z}{L} - \\ - \int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_t \right) \delta u dr + \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z \frac{\delta u_z}{L} r dr = 0. \end{aligned}$$

При произвольных вариациях  $\delta u$ ,  $\delta u_z$ ,  $\delta u_1$  и  $\delta u_2$  отсюда следуют уравнения равновесия

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_t = 0; \quad \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = \frac{P}{2\pi} \quad (7.5)$$

и силовые граничные условия вида (7.2).

Если из выражений для  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_t$  исключить  $u$ , то получим

$$\frac{d(r\varepsilon_t)}{dr} = \varepsilon_r.$$

Подставив соотношения (1.16) обобщенного закона Гука в виде

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)}{E}; \quad \varepsilon_t = \frac{\sigma_t - \nu(\sigma_z + \sigma_r)}{E}; \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)}{E},$$

с учетом (7.4) и первого равенства (7.5) запишем

$$\frac{d(r\sigma_t)}{dr} - \sigma_r = 0.$$

Складывая и вычитая почленно это равенство и первое равенство (7.5), получаем однородные ОДУ

$$\frac{d(r(\sigma_t + \sigma_r))}{dr} - (\sigma_t + \sigma_r) = 0;$$

$$\frac{d(r(\sigma_t - \sigma_r))}{dr} + (\sigma_t - \sigma_r) = 0.$$

Этим ОДУ удовлетворяют решения

$$\sigma_t + \sigma_r = 2C_3; \quad \sigma_t - \sigma_r = \frac{2C_4}{r^2}.$$

Отсюда следует

$$\sigma_t = C_3 + \frac{C_4}{r^2}; \quad \sigma_r = C_3 - \frac{C_4}{r^2}.$$

Постоянные  $C_3$  и  $C_4$  найдем из граничных условий (7.2) и в итоге получим

$$\sigma = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2 \pm (p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2 / r^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (7.6)$$

где в символе « $\pm$ » плюс соответствует  $\sigma_t$ , а минус —  $\sigma_r$ . Подставив напряжения в соотношение для  $\varepsilon_t$ , найдем

$$u = \frac{1 - \nu}{E} \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2 / r}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{\nu \sigma_z}{E} r.$$

Поскольку  $\sigma_t + \sigma_r = \text{const}$  и  $\varepsilon_z = \text{const}$ , из соотношения для  $\varepsilon_z$  следует, что и  $\sigma_z = \text{const}$ . Выразив  $\sigma_z$  из этого соотношения и подставив во второе равенство (7.5), с учетом (7.6) получим

$$\frac{P}{2\pi} = \int_{r_1}^{r_2} (E\varepsilon_z + \nu(\sigma_t + \sigma_r)) r dr = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} E\varepsilon_z + \nu(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2).$$

Если  $P = 0$ , то и  $\sigma_z = 0$ , а

$$\varepsilon_z = -2 \frac{\nu}{E} \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Если же труба является частью сосуда и ее торцы закрыты днищами, то

$$P = \pi(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2); \quad \sigma_z = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}; \quad \varepsilon_z = \frac{(1 - 2\nu)\sigma_z}{E}.$$

Для частного случая  $p_2 = 0$  на рис. 7.3 представлены зависимости от  $\bar{r} = r/r_2$  отношений

$$\bar{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{p_1}; \quad \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{p_1}$$

при  $r_1/r_2 = 0,5$  (штриховые линии) и  $r_1/r_2 = 0,9$  (сплошные линии).

С уменьшением относительной толщины  $h/r_2 = 1 - r_1/r_2$  стенки трубы значения  $\bar{\sigma}_t$  возрастают по сравнению с  $|\bar{\sigma}_r|_{\max} = 1$  примерно пропорционально отношению  $r_2/h$ , причем распределение окружных напряжений по толщине  $h = r_2 - r_1$  становится более равномерным. При  $\tilde{h} = h/r_1 \leq 0,1$  представим наибольшее окружное напряжение в виде

$$\sigma_t(r_1) = \frac{K_2(\tilde{h}) p_1 r_1}{h}.$$

Зависимость коэффициента  $K_2(\tilde{h})$  от  $\tilde{h}$  изображена на рис. 7.4 сплошной линией. Таким образом, при  $\tilde{h} \leq 0,1$  величина  $p_1 r_1/h$  оценивает значение  $\sigma_t(r_1)$  с погрешностью не более чем 5%, но снизу, что неприемлемо в инженерной практике.

Если кривизну круговой цилиндрической оболочки характеризовать радиусом

$$\tilde{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

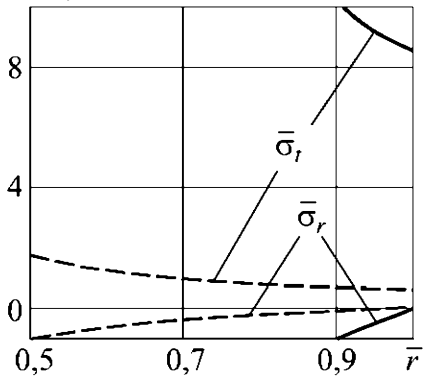


Рис. 7.3

кривизны ее срединной поверхности, то наибольшее окружное напряжение можно представить в виде

$$K_2(\tilde{h}); K^*(\bar{h})$$

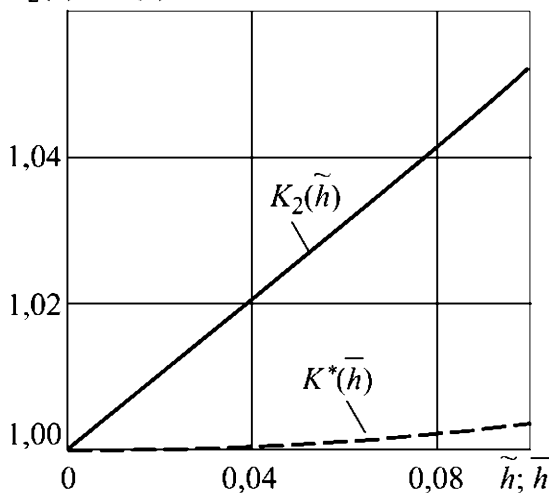


Рис. 7.4

$$\sigma_t(r_1) = \frac{K^*(\bar{h})p_1\tilde{r}}{2h},$$

включающем коэффициент  $K^*(\bar{h})$ , зависимость которого от  $\bar{h} = h/\tilde{r}$  изображена на рис. 7.4 штриховой линией. В этом случае величина  $p_1\tilde{r}/h$  оценивает значение  $\sigma_t(r_1)$  также снизу, но при  $h/\tilde{r} \leq 0,1$  погрешность не превышает 0,25%, что можно считать приемлемым. ♦

Анализ, представленный в примерах 7.1 и 7.2, позволяет заключить, что при  $h/\tilde{r} \leq 0,1$  можно пренебречь напряжением в радиальном направлении и с достаточной для практики точностью считать распределение тангенциального или окружного напряжений по толщине  $h$  сферической или круговой цилиндрической оболочек равномерным, а их значения равными  $p_1\tilde{r}/(2h)$  или  $p_1\tilde{r}/h$  соответственно. Если  $\tilde{r}$  — наименьший из главных радиусов кривизны срединной поверхности, то выполнение условия  $h/\tilde{r} \leq 0,1$  обычно служит основанием для того, чтобы не учитывать напряжение в направлении нормали к этой поверхности для оболочки произвольной формы.

## 7.2. Деформация оболочек вращения

Пусть дуга  $M_1M_2$  гладкой кривой лежит в верхней полуплоскости с декартовой прямоугольной системой координат  $Ox_1x_2$ . Вращением этой дуги вокруг оси  $Ox_1$  получим поверхность вращения. Точки  $M_1$  и/или  $M_2$  могут лежать на оси  $Ox_1$ . В первом из этих случаев поверхность будет замкнутой, а во втором (как показано на рис. 7.5) — полузамкнутой, имеющей форму купола.

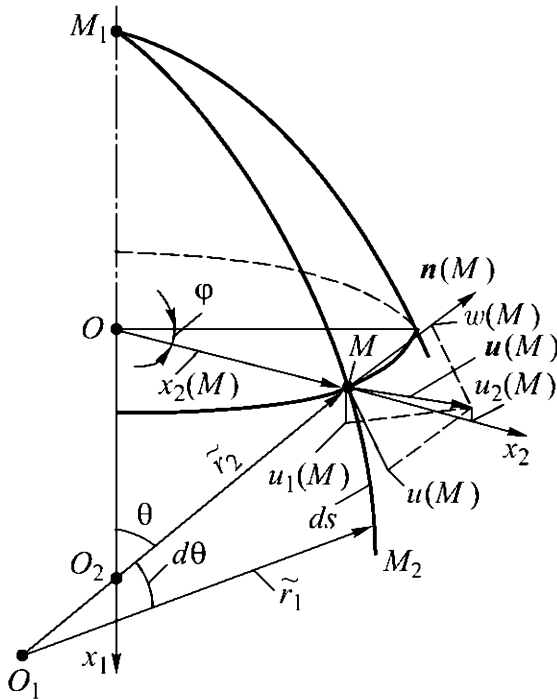


Рис. 7.5

На поверхности вращения введем систему *ортогональных криволинейных координат*, соответствующую по аналогии с условной поверхностью Земли семействам параллелей и меридианов. Каждая параллель является окружностью радиусом  $x_2(M)$  (см. рис. 7.5), по которой движется при вращении дуги  $M_1M_2$  некоторая точка  $M \in M_1M_2$ . Положение параллели на поверхности вращения можно характеризовать углом  $\theta$  между осью вращения и направлением вектора нормали  $\mathbf{n}(M)$  к кривой в точке  $M$  (это как бы широта параллели, но отсчитывается она не от экватора, а от условного полюса, лежащего на оси вращения) или же длиной  $s$  дуги  $M_1M$ , причем

$$\frac{dx_1}{ds} = \sin \theta; \quad \frac{dx_2}{ds} = \cos \theta. \quad (7.7)$$

Каждый меридиан соответствует текущему положению дуги  $M_1M_2$  при ее повороте вокруг оси  $Ox_1$  на угол  $\varphi$ .

*Главные радиусы кривизны поверхности вращения*, обратные значениям *главных кривизн* этой поверхности, во всех точках, принадлежащих одной параллели, одинаковы. Один

из них, обозначаемый  $\tilde{r}_1(M)$ , равен длине отрезка  $O_1M$  и соответствует радиусу кривизны дуги  $M_1M_2$  в точке  $M$  (см. рис. 7.5), причем справедливо известное соотношение для кривизны кривой в произвольной точке

$$\frac{1}{\tilde{r}_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (7.8)$$

а второй, обозначаемый  $\tilde{r}_2(M)$ , равен длине отрезка  $O_2M$  нормали между точкой  $M \in M_1M_2$  и осью вращения [3, 26].

Если в обе стороны от каждой точки  $M \in M_1M_2$  отложить в направлении нормали к кривой равные отрезки достаточно малой по сравнению с  $\tilde{r}_1(M)$  и  $\tilde{r}_2(M)$  длины  $h(M)/2$ , то получим некоторую фигуру, для которой дуга  $M_1M_2$  является средней линией. Вращение этой фигуры вокруг оси  $Ox_1$  образует так называемую **оболочку вращения** (в общем случае переменной толщины  $h(M)$ ,  $M \in M_1M_2$ ). Исходная поверхность вращения представляет собой *срединную поверхность* этой оболочки. У такой оболочки различают внутреннюю и внешнюю поверхности, которые также являются поверхностями вращения, если  $h$  не зависит от угла  $\varphi$ .

При нагружении оболочки она деформируется, причем если нагрузка осесимметрична, то деформация оболочки вращения также осесимметрична. В этом случае *вектор  $u(M)$  перемещения* любой точки параллели, соответствующей точке  $M \in M_1M_2$ , лежит в координатной плоскости  $x_1Ox_2$  и имеет проекции  $u_1(M)$  на ось  $Ox_1$  и  $u_2(M)$  на ось  $Ox_2$  (см. рис. 7.5). Этот вектор можно также представить ортогональными составляющими  $u(M)$  и  $w(M)$ , направленными соответственно по касательной и по внешней нормали к дуге  $M_1M_2$  в точке  $M \in M_1M_2$ , причем, опуская обозначение этой точки,

$$u_1 = u \sin \theta - w \cos \theta; \quad u_2 = u \cos \theta + w \sin \theta. \quad (7.9)$$

Эти составляющие будем считать малыми по сравнению с главными радиусами кривизны срединной поверхности в точке  $M$ .

Выразим через составляющие  $u(M)$  и  $w(M)$  вектора  $u(M)$  деформации срединной поверхности оболочки в окрестности

точки  $M \in M_1M_2$ . Для этого рассмотрим на этой поверхности элемент  $MM'K'K$  (рис. 7.6), образованный пересечением двух близких меридианов и двух близких параллелей. Длины дуг  $MM'$  и  $KK'$

$$\Delta s = \tilde{r}_1(M)\Delta\theta(M),$$

а длина дуги  $MK$  равна  $x_2(M)\Delta\varphi$ . При осесимметричном деформировании срединной поверхности углы между касательными к дугам меридианов и параллелей в вершинах выделенного элемента  $MM'K'K$  останутся прямыми, т. е. его деформация сдвига равна нулю и отсутствует крутящий момент

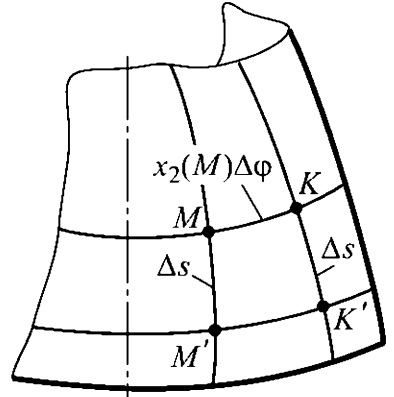


Рис. 7.6

с вектором, коллинеарным вектору нормали к срединной поверхности. Линейные деформации этого элемента можно выразить через относительные удлинения дуг  $MM'$  и  $MK$ . При вычислении деформации будем пренебрегать квадратами и произведениями составляющих вектора перемещения и их производных по углу  $\theta$ , считая такие квадраты и произведения малыми более высокого порядка.

Составляющие вектора  $u(M')$  перемещения точки  $M'$  в линейном приближении, опустив в правых частях равенств обозначение точки  $M$ , представим в виде

$$u(M') = u + \frac{ds}{\tilde{r}_1} \frac{du}{d\theta}; \quad w(M') = w + \frac{ds}{\tilde{r}_1} \frac{dw}{d\theta}. \quad (7.10)$$

При этом дуга  $MM'$  переместится в координатной плоскости  $x_1Ox_2$  в положение  $\overline{M}\overline{M}'$  (рис. 7.7) и ее длина после деформации (в линейном приближении)

$$d\bar{s} = \sqrt{\left( (ds + u(M') - u(M)) \frac{\tilde{r}_1(M) + w(M)}{\tilde{r}_1(M)} \right)^2 + (w(M') - w(M))^2}.$$

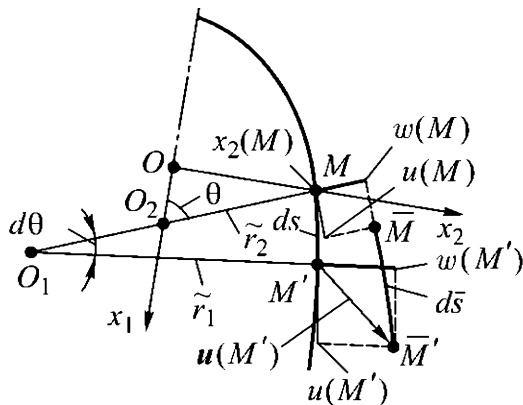


Рис. 7.7

Теперь, учитывая (7.10) и опуская обозначения точек  $M$  и  $M'$ , находим относительное удлинение дуги  $MM'$  меридиана

$$\frac{d\bar{s} - ds}{ds} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tilde{r}_1} \frac{du}{d\theta}\right)^2 \left(1 + \frac{w}{\tilde{r}_1}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{r}_1^2} \left(\frac{dw}{d\theta}\right)^2} - 1.$$

Таким образом, деформация в направлении этой дуги в линейном приближении

$$\varepsilon_1 = \frac{w + \frac{du}{d\theta}}{\tilde{r}_1}. \quad (7.11)$$

Относительное удлинение дуги  $MK$  (см. рис. 7.6) при деформировании срединной поверхности совпадает с деформацией в направлении этой дуги, т. е. с учетом (7.9) и равенства

$$x_2(M) = \tilde{r}_2(M) \sin \theta(M)$$

получим

$$\varepsilon_2 = \frac{u_2}{\tilde{r}_2 \sin \theta} = \frac{w + u \operatorname{ctg} \theta}{\tilde{r}_2}. \quad (7.12)$$

Для сферической оболочки или ее части  $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_2 = \tilde{r}$ , где  $\tilde{r}$  — радиус срединной поверхности. Для круговой цилиндрической оболочки с радиусом срединной поверхности  $\tilde{r}$  вместо (7.11) и (7.12) получим

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{\tilde{r}}, \quad (7.13)$$

что соответствует случаю осесимметричного деформирования.

### 7.3. Модель безмоментной оболочки вращения

Найденные в 7.2 соотношения между перемещениями и деформацией *срединной поверхности оболочки вращения* используем для получения ее *уравнений равновесия* при условии, что *деформация* является однородной по толщине оболочки и может изменяться лишь в направлении меридиана. Рассмотрим оболочку вращения относительно координатной оси  $Ox_1$  (рис. 7.8), заключенную между двумя плоскостями, перпендикулярными линии меридиана. Сечения оболочки этими плоскостями будем называть торцами, а длину дуги  $M_1M_2$  меридиана обозначим  $s_2$ .

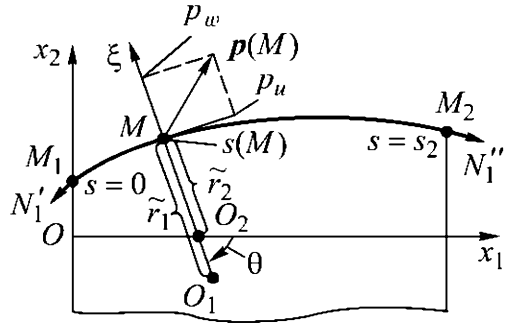


Рис. 7.8

Пусть к торцам оболочки, соответствующим значениям длины дуги  $s = 0$  и  $s = s_2$ , приложены равномерно распределенные *погонные силы*  $N_1'$  и  $N_1''$  соответственно. Эти силы направлены по касательной к меридианам и измеряются в ньютонах на метр (Н/м). Значение  $N_1'$  принимают положительным, если эта сила направлена в сторону, противоположную направлению отсчета длины  $s$  дуги меридиана, а значение  $N_1''$  считают положительным, если направления этой силы и отсчета длины  $s$  совпадают, т.е. силы  $N_1'$  и  $N_1''$  при положительных значениях растягивают оболочку в меридиональном направлении. Оболочка может быть также нагружена распределенными по ее поверхности силами, которые характеризуются вектором  $\mathbf{p}(M)$ ,  $M \in M_1M_2$ . Этот вектор лежит в плоскости меридиана и имеет составляющие  $p_w(M)$  и  $p_u(M)$ , направленные соответственно по внешней нормали к срединной поверхности и по касательной к ее меридиану. Измеряются они в паскалях ( $\text{Па} = \text{Н/м}^2$ ). Составляющая  $p_w$  может быть равна давлению в полости оболочки, а составляющую  $p_u$  можно интерпретировать как *касательное напряжение*,

возникающее за счет трения при продольном обтекании оболочки вязкой средой.

В общем случае оболочка может двигаться с ускорением, определяемым вектором  $\mathbf{a}$ , который примем направленным по оси вращения в сторону, противоположную отсчету координаты  $x_1$  (см. рис. 7.8). Это приведет к возникновению в оболочке распределенных *объемных сил*, вектор  $\mathbf{b}(M) = -\rho\mathbf{a}$  которых направлен по оси  $Ox_1$  (здесь  $\rho$  — плотность материала оболочки).

Для оболочек *нормальное напряжение* в направлении нормали к *срединной поверхности* мало по сравнению с нормальными напряжениями в поперечных сечениях оболочки, и им можно пренебречь.

При осесимметричном нагружении оболочки ее *напряженное состояние* будет *двухосным* с нормальными напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , направленными по касательным к меридиану и параллели соответственно. При неоднородном распределении по толщине оболочки температуры или вызванной какими-либо причинами *остаточной деформации* эти напряжения могут изменяться по толщине оболочки, но в любом случае в указанных направлениях возникнут погонные силы

$$N_1(M) = \int_{-h(M)/2}^{h(M)/2} \sigma_1(M, \xi) d\xi; \quad N_2(M) = \int_{-h(M)/2}^{h(M)/2} \sigma_2(M, \xi) d\xi, \quad (7.14)$$

причем отсчет локальной координаты  $\xi$  происходит в направлении внешней нормали к срединной поверхности от ее точки  $M \in M_1M_2$  (см. рис. 7.8).

Существуют варианты закрепления оболочек вращения и их осесимметричного нагружения, когда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  не зависят от координаты  $\xi$ . В этих случаях в сечениях оболочки не возникают *изгибающие моменты* и такую *оболочку вращения* называют *безмоментной*.

Соотношение (2.5), выражающее *принцип возможных перемещений*, для рассматриваемой оболочки в силу осевой симметрии принимает с учетом (7.14) вид

$$\begin{aligned}
& 2\pi \int_0^{s_2} x_2(M) ds(M) \int_{-h(M)/2}^{h(M)/2} (\sigma_1(M, \xi) \delta \varepsilon_1(M) + \sigma_2(M, \xi) \delta \varepsilon_2(M)) d\xi = \\
& = 2\pi \int_0^{s_2} x_2(M) (N_1(M) \delta \varepsilon_1(M) + N_2(M) \delta \varepsilon_2(M)) ds(M) = \\
& = 2\pi \rho \int_0^{s_2} x_2(M) h(M) (a_u(M) \delta u(M) - a_w(M) \delta w(M)) ds(M) + \\
& + 2\pi \int_0^{s_2} x_2(M) (p_u(M) \delta u(M) + p_w(M) \delta w(M)) ds(M) + \\
& + 2\pi (x_2(M_2) N_1'' \delta u(M_2) - x_2(M_1) N_1' \delta u(M_1)), \quad (7.15)
\end{aligned}$$

где  $h(M)$  — толщина оболочки в точке  $M$ ;  $a_u(M) = -|\mathbf{a}| \sin \theta(M)$  и  $a_w(M) = |\mathbf{a}| \cos \theta(M)$  — проекции вектора  $\mathbf{a}$  на направления составляющих  $u(M)$  и  $w(M)$  вектора перемещения в точке  $M \in M_1 M_2$  срединной поверхности оболочки.

С учетом (7.11), (7.12) и (7.8) выразим возможные деформации через *возможные перемещения* и подставим в (7.15), опустив в подинтегральных выражениях обозначение точки  $M$ :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{s_2} x_2 \left( \frac{N_1}{\tilde{r}_1} + \frac{N_2}{\tilde{r}_2} \right) \delta w ds + \int_0^{s_2} x_2 \left( N_1 \frac{d\delta u}{ds} + \frac{N_2}{x_2} \delta u \cos \theta \right) ds = \\
& = \rho \int_0^{s_2} x_2 h (a_u \delta u - a_w \delta w) ds + \int_0^{s_2} x_2 (p_u \delta u + p_w \delta w) ds + \\
& + x_2(M_2) N_1'' \delta u(M_2) - x_2(M_1) N_1' \delta u(M_1),
\end{aligned}$$

где  $\tilde{r}_1$  и  $\tilde{r}_2$  — *главные радиусы кривизны срединной поверхности* рассматриваемой оболочки;  $\theta$  — угол между осью вращения и направлением нормали к этой поверхности (см. рис. 7.8).

После интегрирования по частям первого слагаемого во втором интеграле левой части этого равенства и объединения интегралов и слагаемых с вариациями одинаковых составляющих перемещения имеем

$$\int_0^{s_2} x_2 \left( \frac{N_1}{\tilde{r}_1} + \frac{N_2}{\tilde{r}_2} + \rho h a_w - p_w \right) \delta w ds +$$

$$+ x_2(M_2) (N_1(M_2) - N_1'') \delta u(M_2) - x_2(M_1) (N_1(M_1) - N_1') \delta u(M_1) -$$

$$- \int_0^{s_2} \left( \frac{d(x_2 N_1)}{ds} - N_2 \cos \theta + x_2 (\rho u + \rho h a_u) \right) \delta u ds = 0. \quad (7.16)$$

В силу произвольности вариации  $\delta w(M)$  из первого интеграла в (7.16) получаем уравнение равновесия элемента оболочки в окрестности точки  $M \in M_1 M_2$  в проекции на направление нормали

$$\frac{N_1}{\tilde{r}_1} + \frac{N_2}{\tilde{r}_2} + \rho h a_w - p_w = 0. \quad (7.17)$$

Последние два слагаемых характеризуют суммарную распределенную нагрузку, отнесенную к единице площади срединной поверхности оболочки в окрестности точки  $M$  и направленную по внешней нормали к этой поверхности. При  $N_1(M) = N_2(M) = N^*$  и  $a_w = 0$  (7.17) совпадает по виду с уравнением Лапласа (2.42) для мембраны.

**Пример 7.3.** Для сферической оболочки с внутренним давлением  $p_0$  и радиусом  $\tilde{r}$  срединной поверхности  $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_2 = \tilde{r}$  и в силу центральной симметрии оболочки из (7.17) следует

$$N_1 = N_2 = \frac{p_0 \tilde{r}}{2}.$$

Для круговой цилиндрической оболочки с радиусом  $\tilde{r}$  срединной поверхности  $1/\tilde{r}_1 = 0$  и  $\tilde{r}_2 = \tilde{r}$  из (7.17) при внутреннем давлении  $p_0$  получим

$$N_2 = p_0 \tilde{r}.$$

Если эта оболочка замкнута днищами, то из условия равновесия в ее любом поперечном сечении

$$N_1 = \frac{p_0 \pi \tilde{r}^2}{2\pi \tilde{r}} = \frac{p_0 \tilde{r}}{2}. \quad \blacklozenge$$

Поскольку с учетом (7.8) и второго равенства (7.7)

$$\frac{d(x_2 N_1)}{ds} = \frac{x_2}{\tilde{r}_1} \frac{dN_1}{d\theta} + N_1 \cos \theta,$$

в силу произвольности значений  $\delta u$  из второго интеграла в (7.16) получим еще одно уравнение равновесия

$$\frac{1}{\tilde{r}_1} \frac{dN_1}{d\theta} + \frac{(N_1 - N_2) \cos \theta}{x_2} + p_u + \rho h a_u = 0 \quad (7.18)$$

в проекции на касательную к меридиану в точке  $M \in M_1 M_2$ .

Наконец, при произвольных значениях  $\delta u(M_1)$  и  $\delta u(M_2)$  из (7.16) следуют *силовые граничные условия*

$$N_1(M_1) = N'; \quad N_2(M_2) = N''$$

на торцах оболочки (см. рис. 7.8), причем независимо может быть задано лишь одно из значений  $N'$  или  $N''$ , а второе будет определено при интегрировании (7.18). Если же перемещения одного из торцов (например, при  $s = 0$ ) запрещены в направлении касательной к меридиану, т. е. заданы *кинематические граничные условия*  $u(M_1) = 0$ , то  $\delta u(M_1) \equiv 0$ . Аналогично будет обстоять дело и в случае задания кинематических граничных условий на другом торце. Ясно, что в этом случае оболочка неподвижна и поэтому  $a_u = a_w = 0$ . Следует отметить, что для безмоментной оболочки нельзя задать на торцах кинематические граничные условия на перемещения  $w$  [26].

Исключая из (7.17) и (7.18)  $N_2(M)$  и возвращаясь к независимой переменной  $s$ , приходим с учетом равенства

$$x_2(M) = \tilde{r}_2(M) \sin \theta(M)$$

к ОДУ первого порядка

$$\frac{dN_1}{ds} + \left( \frac{\cos \theta}{x_2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\tilde{r}_1} \right) N_1 + p_u - p_w \operatorname{ctg} \theta + \rho h (a_u + a_w \operatorname{ctg} \theta) = 0 \quad (7.19)$$

(обозначение точки  $M$  опущено). Осевая сила, действующая в поперечном сечении оболочки, проходящем через точку  $M \in M_1 M_2$  срединной поверхности,

$$N(M) = 2\pi x_2(M) N_1(M) \sin \theta(M). \quad (7.20)$$

Выражая в (7.19)  $N_1(M)$  с помощью (7.20) через  $N(M)$ , получаем

$$\frac{dN}{ds} = 2\pi x_2 (p_w \cos \theta - p_u \sin \theta - \rho h (a_u \sin \theta + a_w \cos \theta))$$

и после интегрирования находим

$$N = N_0 + 2\pi \int_0^{s(M)} x_2 (p_w \cos \theta - p_u \sin \theta - \rho h (a_u \sin \theta + a_w \cos \theta)) ds, \quad (7.21)$$

где  $N_0$  — осевая сила, приложенная к торцу оболочки при  $s = 0$ . Если на этом торце заданы силовые граничные условия в виде  $N_1(M_1) = N'$ , то

$$N_0 = 2\pi x_2(M_1) N' \sin \theta(M_1). \quad (7.22)$$

Если же силовые граничные условия в виде  $N_1(M_2) = N''$  заданы на торце при  $s = s_2$ , то вместо (7.21) имеем

$$N = N_2 - 2\pi \int_{s(M)}^{s_2} x_2 (p_w \cos \theta - p_u \sin \theta - \rho h (a_u \sin \theta + a_w \cos \theta)) ds, \quad (7.23)$$

где

$$N_2 = 2\pi x_2(M_2) N'' \sin \theta(M_2). \quad (7.24)$$

Используя (7.21), (7.22) или (7.23), (7.24), а также (7.20) и (7.17), несложно вычислить погонные силы  $N_1(M)$  и  $N_2(M)$

в произвольной точке  $M \in M_1 M_2$  срединной поверхности оболочки. Если же на обоих торцах заданы кинематические граничные условия, то говорят, что задача статически неопределимая, т. е. для нахождения силовых факторов недостаточно уравнений равновесия, и для ее решения необходимо найти связь погонных сил с перемещениями точек срединной поверхности.

Пусть материал оболочки является изотропным линейно упругим с постоянными продольным модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Тогда в силу обобщенного закона Гука

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu\sigma_2}{E} + \varepsilon^{(T)}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu\sigma_1}{E} + \varepsilon^{(T)}, \quad (7.25)$$

где  $\varepsilon^{(T)}$  — температурная деформация, которая (как и напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ) может зависеть от положения точки  $M \in M_1 M_2$ , а также изменяться по толщине  $h(M)$  оболочки.

Интегрированием (7.25) по толщине с учетом (7.14) находим

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1 - \nu N_2}{Eh} + \bar{\varepsilon}_T; \quad \varepsilon_2 = \frac{N_2 - \nu N_1}{Eh} + \bar{\varepsilon}_T,$$

где  $\bar{\varepsilon}_T$  — средняя по толщине оболочки температурная деформация.

Вычитая последнее равенство из предпоследнего и учитывая (7.11) и (7.12), получаем

$$\frac{du}{d\theta} - u \operatorname{ctg} \theta = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{u}{\sin \theta} \right) \sin \theta = f(\theta),$$

где

$$f(\theta) = \frac{(\tilde{r}_1 + \nu\tilde{r}_2)N_1 - (\tilde{r}_2 + \nu\tilde{r}_1)N_2}{Eh} + (\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)\bar{\varepsilon}_T, \quad (7.26)$$

и после интегрирования находим

$$u(M) = \left( \frac{u(M_1)}{\sin \theta(M_1)} + \int_{\theta(M_1)}^{\theta(M)} \frac{f(\theta)}{\sin \theta} d\theta \right) \sin \theta(M).$$

При заданных значениях  $u(M_1)$  и  $u(M_2)$  отсюда следует

$$\int_{\theta(M_1)}^{\theta(M_2)} \frac{f(\theta)}{\sin \theta} d\theta = \frac{u(M_2)}{\sin \theta(M_2)} - \frac{u(M_1)}{\sin \theta(M_1)}.$$

Если в (7.26) с помощью (7.17) исключить одну из погонных сил, то последнее равенство перейдет в так называемое интегральное уравнение Фредгольма первого рода [22] относительно другой погонной силы.

**Пример 7.4.** Оболочка вращения, состоящая из круговой цилиндрической оболочки и полусферических днищ (рис. 7.9, а), частично заполнена жидкостью с плотностью  $\rho$ . В верхней полости оболочки над зеркалом жидкости находится газ под давлением  $p_0$ . К такой оболочке можно свести *расчетную схему* бака жидкостной ракеты, содержащего один из топливных компонентов жидкостного ракетного двигателя (ЖРД). Любую часть оболочки с развертываемой в плоскость срединной поверхностью принято называть *обечайкой*. Таким свойством обладают, в частности, цилиндрические и конические поверхности.

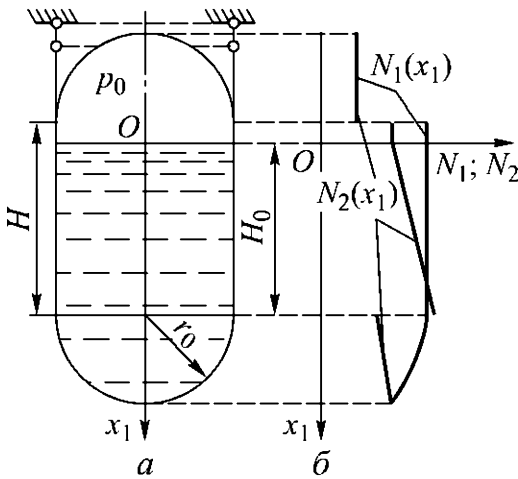


Рис. 7.9

Для рассматриваемой оболочки радиусы срединных поверхностей обечайки и днищ одинаковы и равны  $r_0$ , т. е. для обечайки  $1/\tilde{r}_1 = 0$  и  $\tilde{r}_2 = r_0$ , а для днищ  $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_2 = r_0$  (см. пример 7.3). В сечении стыка обечайки с верхним днищем к оболочке присоединен тонкостенный цилиндрический пояс (также являющийся обечайкой), верхний торец которого закреплен (см. рис. 7.9, а). Найдем распределение погонных сил в оболочке, пренебрегая ее массой и массой газа по сравнению с массой жидкости и пола-

гая для упрощения радиусы внутренних поверхностей обечайки и днищ также равными  $r_0$ .

Вес жидкости в нижнем днище  $G_{\text{дн}} = 2\pi r_0^3 \rho g_0 / 3$  и в полости обечайки  $G_{\text{об}} = \pi r_0^2 H_0 \rho g_0$  ( $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения) в сочетании с силой давления  $P = \pi r_0^2 p_0$  определяет значение растягивающей осевой силы в обечайке цилиндрического пояса, равное  $N = G_{\text{дн}} + G_{\text{об}} + P$ . В несмоченной части обечайки при  $x_1 \in (H_0 - H, 0]$  эта сила вызывает погонную силу

$$N_1 = \frac{N}{2\pi r_0} = \text{const},$$

а поскольку при этом  $1/\tilde{r}_1 = 0$ , из (7.17) следует, что  $N_2 = p_0 r_0$ . В сферической оболочке верхнего днища (см. пример 7.3)

$$N_1 = N_2 = \frac{p_0 r_0}{2} = \text{const}.$$

В силу наличия при  $x_1 \in [0, H_0 + r_0]$  гидростатического давления  $p_{\text{ж}} = \rho g_0 x_1$  в смоченной части обечайки

$$N_2(x_1) = (p_0 + p_{\text{ж}})r_0 = (p_0 + \rho g_0 x_1)r_0,$$

а в сферической оболочке нижнего днища (рис. 7.9, б)

$$N_2(x_1) = \frac{(p_0 + p_{\text{ж}})r_0}{2} = \frac{(p_0 + \rho g_0 x_1)r_0}{2}.$$

Из условия равновесия части оболочки ниже любого ее поперечного сечения с координатой  $x_1 \in (0, H_0)$  с учетом массы жидкости в этой части, давления  $p_0$  и гидростатического давления получим, что в обечайке погонная сила

$$N_1(x_1) = \frac{N}{2\pi r_0} = \text{const},$$

а при  $x_1 \in [H_0, H_0 + r_0]$  эта сила непрерывно изменяется от значения  $N_1(H_0)$  до значения  $N_2(H_0 + r_0)$ .

Отметим, что изменение кривизны срединной поверхности оболочки на стыках обечайки с днищами в рамках теории безмоментной оболочки вращения приводит к скачкообразному

изменению значений  $N_2$ , а на стыке обечайки с верхним дном и к скачку в значениях  $N_1$ , равному погонной силе в цилиндрическом поясе. Непрерывность этих значений можно обеспечить учетом так называемого *краевого эффекта* в моментной теории оболочек [26]. ♦

**Пример 7.5.** Оболочка вращения, состоящая из конической обечайки и присоединенного к ней дна в виде сферического сегмента (рис. 7.10, а), частично заполнена жидкостью с плотностью  $\rho$ . Оболочка подвешена за верхний торец таким образом, что распределенные по периметру торца реакции элементов крепления направлены по образующей конуса. Рассмотрим особенности распределения погонных сил в этой оболочке, пренебрегая ее массой по сравнению с массой жидкости.

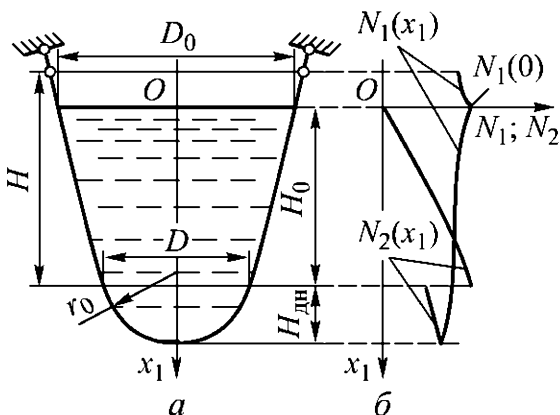


Рис. 7.10

Объемы жидкости в днище и в полости конической обечайки [4]

$$V_{\text{дн}} = \frac{\pi H_{\text{дн}}}{6} \left( \frac{3D^2}{4} + H_{\text{дн}}^2 \right); \quad V_{\text{к.об}} = \frac{\pi H_0}{12} (D_0^2 + D^2 + D_0 D).$$

Вес  $G_{\text{ж}} = \rho(V_{\text{дн}} + V_{\text{к.об}})g_0$  в сечении обечайки с координатой  $x_1 = 0$  уравновешен осевой силой, создающей в этом сечении погонную силу

$$N_1(0) = \frac{G_{\text{ж}}}{\pi D_0 \sin \theta}.$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением нормали к срединной поверхности обечайки и координатной осью  $Ox_1$  (см. рис. 7.10, а):

$$\theta = \arctg \left( \frac{2H_0}{D_0 - D} \right).$$

Оболочка подвешена за верхний торец таким образом, что распределенные по периметру торца реакции элементов крепления направлены по образующей конуса. Рассмотрим особенности распределения погонных сил в этой оболочке, пренебрегая ее массой по сравнению с массой жидкости.

В несмоченной части обечайки при  $x_1 \in [H_0 - H, 0]$  изменение погонной силы в направлении образующей конуса определяет зависимость (рис. 7.10, б)

$$N_1(x_1) = \frac{N_1(0)}{1 - \left(1 - \frac{D}{D_0}\right) \frac{x_1}{H_0}},$$

а в окружном направлении в силу отсутствия давления и значения  $1/\tilde{r}_1 = 0$  для срединной поверхности конической оболочки из (7.17) следует, что  $N_2(x_1) \equiv 0$ . При этом значение  $N_1(H_0 - H)$  равно распределенной по торцу оболочки реакции элементов ее крепления.

При  $x_1 \in [0, H_0]$  переменный диаметр обечайки

$$D(x_1) = D_0 - (D_0 - D) \frac{x_1}{H_0},$$

а радиус кривизны

$$\tilde{r}_2(x_1) = \frac{D(x_1)}{2 \sin \theta},$$

причем  $\tilde{r}_2(H_0) = r_0$ . Наличие при  $x_1 \in [0, H_0 + H_{\text{дн}}]$  гидростатического давления  $p_{\text{ж}} = \rho g_0 x_1$  вызывает в смоченной части обечайки погонную силу

$$N_2(x_1) = p_{\text{ж}} \tilde{r}_2 = \rho g_0 x_1 \frac{D_0 - (D_0 - D)x_1/H_0}{2 \sin \theta}$$

при  $x_1 \in (0, H_0)$ , а в сферической оболочке днища

$$N_2(x_1) = \frac{p_{\text{ж}} r_0}{2} = \frac{\rho g_0 x_1 r_0}{2}$$

при  $x_1 \in (H_0, H_0 + H_{\text{дн}})$  (см. рис. 7.10, б).

Объем жидкости выше поперечного сечения обечайки с координатой  $x_1 \in (0, H_0)$

$$V(x_1) = \frac{\pi x_1}{12} (D_0^2 + D^2(x_1) + D_0 D(x_1)).$$

Из условия равновесия части оболочки ниже этого сечения с учетом массы жидкости в этой части и гидростатического давления получим, что в обечайке погонная сила

$$N_1(x_1) = \frac{G_{\text{ж}} - \rho V(x_1) + \pi D^2(x_1) p_{\text{ж}} / 4}{\pi D(x_1) \sin \theta}$$

при  $x_1 \in (0, H_0]$ , а в сферической оболочке дна эта сила изменяется от значения  $N_1(H_0)$  до значения  $N_2(H_0 + H_{\text{дн}})$  (см. рис. 7.10, б). Как и в примере 7.4, изменение кривизны срединной поверхности оболочки в направлении меридиана на стыке обечайки с дном приводит к скачкообразному изменению значения  $N_2$ . ♦

**Пример 7.6.** Камера одного из распространенных типов ЖРД является примером полузамкнутой оболочки вращения. В конструкции камеры выделяют три основных элемента (рис. 7.11, а): форсуночную головку 1, оболочку камеры сгорания 2 и сопло 3 [26]. Форсуночная головка служит для подвода в камеру сгорания топливных компонентов ЖРД (горючего и окислителя), их распыления и смешения. Образующиеся при горении компоненты газообразные продукты сгорания с высокой скоростью истекают через выходное сечение сопла, создавая реактивную силу тяги ЖРД.

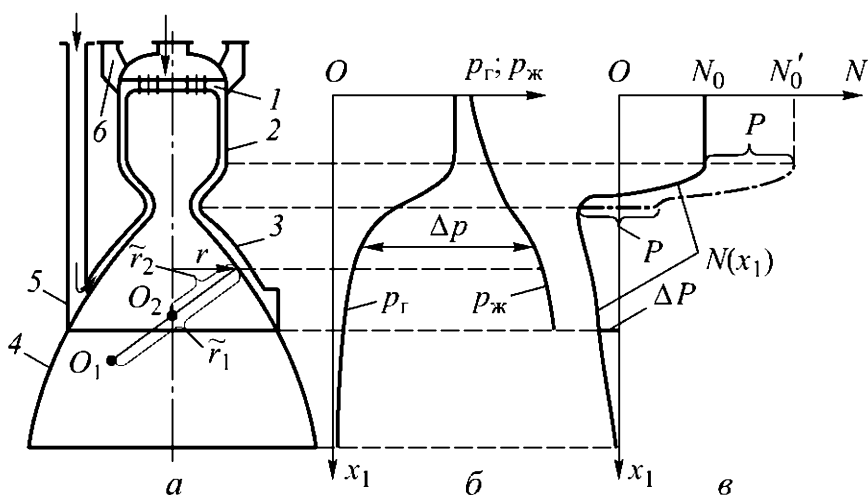


Рис. 7.11

Кроме основных элементов конструкция камеры ЖРД включает узлы крепления б, передающие силу тяги через ферму на

корпус ракеты, входной коллектор 5 для подвода к соплу одного из топливных компонентов, используемого для охлаждения ЖРД, и ряд других вспомогательных элементов. Если ЖРД предназначен для работы в разреженных слоях атмосферы или за ее пределами, то к охлаждаемой части оболочки сопла может быть присоединен неохлаждаемый насадок 4, позволяющий увеличить скорость истечения продуктов сгорания ЖРД и тем самым повысить значение  $P$  силы тяги.

Охлаждаемая оболочка камеры ЖРД представляет собой двухстеночную конструкцию. Ее внутренняя и наружная стенки скреплены между собой часто расположенными элементами связи. Давление  $p_{ж}$  движущегося в канале между стенками охлаждающего компонента в силу гидравлического сопротивления уменьшается по направлению от входного коллектора к форсуночной головке (рис. 7.11, б). Давление  $p_r$  газообразных продуктов сгорания в объеме камеры сгорания практически одинаково, а по длине сопла монотонно убывает. Вследствие этого перепад давления  $\Delta p = p_{ж} - p_r$ , действующий на внутреннюю стенку оболочки, возрастает в направлении движения продуктов сгорания.

Основными силовыми факторами, нагружающими оболочку камеры ЖРД как единое целое, являются давление  $p_r$  и сила тяги  $P$ . Вместе с тем интенсивный теплообмен с высокотемпературными продуктами сгорания вызывает нагрев внутренней и, в меньшей степени, наружной стенок, что влияет на механические характеристики конструкционных материалов и вызывает значительные температурные деформации. Давление  $p_{ж}$  и перепад давления  $\Delta p$  влияют на прочность элементов связи и их соединений со стенками, а также на жесткость в промежутках между этими элементами каждой стенки в отдельности (прежде всего сильно нагретой внутренней стенки).

Для расчета напряженно-деформированного состояния оболочки камеры ЖРД как единого целого прежде всего необходимо установить распределение  $N(x_1)$  по ее длине вдоль координатной оси  $Ox_1$  осевой силы  $N$ . Зависимость  $N(x_1)$  при расположении узлов крепления 6 камеры ЖРД у форсуночной головки 1

(см. рис. 7.11, а) представлена на рис. 7.11, в сплошной линией. При этом

$$N_0 = p_r F_{к.с} - P,$$

где  $F_{к.с} = \pi r_{к.с}^2$  — площадь поперечного сечения камеры сгорания ( $r_{к.с}$  — радиус этого сечения).

Следует отметить, что оболочка сверхзвуковой части сопла (от его наименьшего поперечного сечения, которое принято называть критическим и в котором скорость продуктов сгорания равна местной скорости распространения звука, до выходного сечения) нагружена сжимающей осевой силой, достигающей наибольшего абсолютного значения в критическом сечении. Это значение равно вкладу сверхзвуковой части сопла в суммарную силу тяги, причем вклад неохлаждаемого насадка сопла соответствует значению  $\Delta P$ .

Для поворотных ЖРД, вектор силы тяги которых отклоняют от оси ракеты в целях создания управляющих сил, узлы крепления камеры сгорания могут быть расположены в конце ее цилиндрической части или в зоне критического сечения сопла. В первом случае цилиндрическая часть оболочки камеры сгорания будет условно замкнутой, растянутой осевой силой  $N'_0 = p_r F_{к.с}$  (вертикальная штриховая линия на рис. 7.11, в). В зоне расположения узлов крепления происходит уменьшение осевой силы на величину, равную силе тяги  $P$  (на рис. 7.11, в это уменьшение условно показано горизонтальным участком штриховой линии, а дальнейшее изменение осевой силы соответствует сплошной линии). Во втором случае оболочка камеры сгорания также будет растянута осевой силой  $N'_0$ , но изменение осевой силы в оболочке дозвуковой части сопла соответствует штрихпунктирной линии на рис. 7.11, в.

После того как установлена зависимость  $N(x_1)$  в конкретном поперечном сечении оболочки камеры с продольной координатой  $x_1$  и радиусом  $r(x_1)$ , необходимо рассчитать главные радиусы  $\tilde{r}_1(x_1)$  и  $\tilde{r}_2(x_1)$  кривизны срединной поверхности этой оболочки. В силу малой суммарной толщины двухстеночной оболочки камеры ЖРД по сравнению с радиусом  $r(x_1)$  значения  $\tilde{r}_1(x_1)$  и  $\tilde{r}_2(x_1)$  с достаточной для практики точностью определяют по

внутренней поверхности этой оболочки, т. е. принимают

$$\tilde{r}_2(x_1) = \frac{r(x_1)}{\sin \theta(x_1)},$$

где  $\theta(x_1)$  — угол между направлением нормали к этой поверхности и продольной осью камеры ЖРД.

Погонная сила в направлении касательной к меридиану

$$N_1(x_1) = \frac{N(x_1)}{2\pi r(x_1) \sin \theta(x_1)} = \frac{N(x_1)}{2\pi \tilde{r}_2(x_1) \sin^2 \theta(x_1)}, \quad (7.27)$$

а погонную силу в направлении касательной к параллели, т. е. в окружном направлении, можно найти из (7.17) при  $a_w = 0$  и  $p_w = p_r$  в виде

$$N_2(x_1) = \left( p_r - \frac{N(x_1)}{\tilde{r}_1(x_1)} \right) \tilde{r}_2(x_1). \quad (7.28)$$

Материал стенок оболочки камеры ЖРД обычно работает за пределом упругости и находится в сложном напряженно-деформированном состоянии. Однако на первом этапе анализа напряженно-деформированного состояния в конкретном поперечном сечении оболочки целесообразно рассмотреть кольцо единичной ширины, условно вырезанное из нее двумя близкими сечениями в направлении нормали к ее внутренней поверхности (рис. 7.12, а).

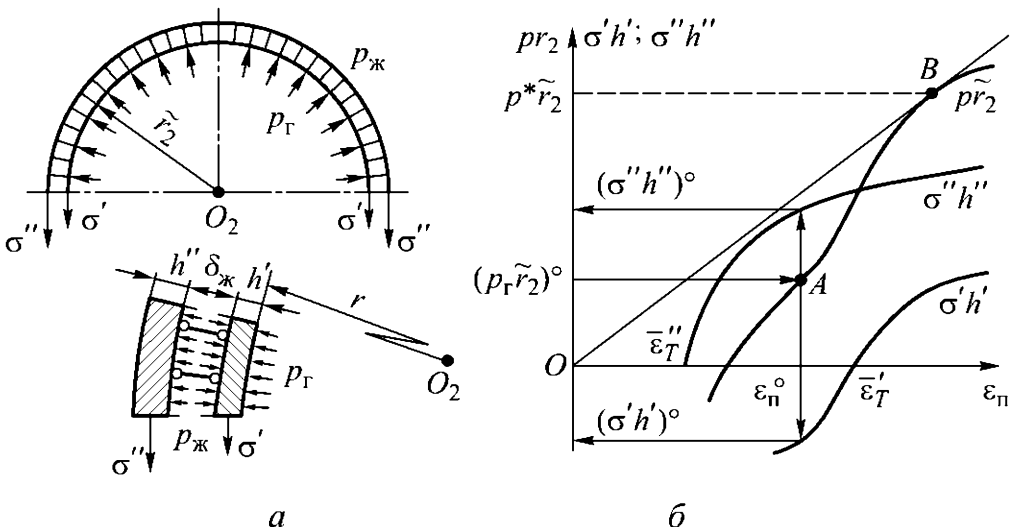


Рис. 7.12

*Напряженное состояние* в стенках такого кольца можно считать одноосным, определяемым нормальными напряжениями  $\sigma'$  и  $\sigma''$  (здесь и далее один штрих указывает на принадлежность параметра к внутренней, а два штриха — к наружной стенке), т. е. не учитывать влияние погонной силы  $N_1$  и температурной деформации в направлении касательной к меридиану. Тогда из условия равновесия половины кольца следует равенство

$$\sigma' h' + \sigma'' h'' = p_r \tilde{r}_2 + p_{ж} \delta_{ж},$$

где  $h$  — толщина стенки;  $\delta_{ж}$  — зазор между стенками.

Поскольку обычно  $\delta_{ж} \ll \tilde{r}_2$ , а значения  $p_r$  и  $p_{ж}$  имеют один порядок, слагаемым  $p_{ж} \delta_{ж}$  в первом приближении можно пренебречь по сравнению с  $p_r \tilde{r}_2$  и записать уравнение равновесия в виде

$$\sigma' h' + \sigma'' h'' = p_r \tilde{r}_2. \quad (7.29)$$

Вычисление напряжений в стенках является *статически неопределимой задачей*, требующей для своего решения применения уравнения совместности деформации стенок в окружном направлении

$$\varepsilon' + \bar{\varepsilon}'_T = \varepsilon'' + \bar{\varepsilon}''_T = \varepsilon_n, \quad (7.30)$$

где  $\varepsilon$  и  $\bar{\varepsilon}_T$  — соответственно силовая и средняя по толщине стенки температурная деформации, составляющие полную деформацию  $\varepsilon_n$ , которая принята одинаковой для обеих стенок, т. е. элементы связи между стенками предполагаются абсолютно жесткими.

Если при средних значениях  $\bar{T}'$  и  $\bar{T}''$  температур стенок известны зависимости  $\sigma' = \sigma'(\varepsilon')$  и  $\sigma'' = \sigma''(\varepsilon'')$  в виде *диаграмм растяжения* материала стенок, то в сочетании с (7.29) и (7.30) этих зависимостей достаточно, чтобы найти напряжение и силовую деформацию в каждой стенке. Для выявления качественной стороны взаимодействия внутренней и наружной стенок кольца сначала предположим, что материал стенок сохраняет свойства линейной упругости и имеет продольные модули упругости  $E'$  и  $E''$  соответственно, т. е.  $\sigma' = E' \varepsilon'$  и  $\sigma'' = E'' \varepsilon''$ . Это предположение позволяет получить решение в аналитической форме:

$$\frac{\sigma'}{E'} = \frac{p_r \tilde{r}_2 - E'' h'' (\bar{\varepsilon}'_T - \bar{\varepsilon}''_T)}{E' h' + E'' h''}; \quad \frac{\sigma''}{E''} = \frac{p_r \tilde{r}_2 + E' h' (\bar{\varepsilon}'_T - \bar{\varepsilon}''_T)}{E' h' + E'' h''}. \quad (7.31)$$

Исходя из условий работы оболочки камеры ЖРД  $\bar{\varepsilon}'_T > \bar{\varepsilon}''_T$ . Поэтому из (7.31) следует, что наружная стенка при действии давления  $p_r$  всегда растянута, а внутренняя может быть как растянута, так и сжата в зависимости от соотношения между значениями  $p_r \tilde{r}_2$  и  $E''h''(\bar{\varepsilon}'_T - \bar{\varepsilon}''_T)$ .

Дискретные элементы связи между стенками (обычно в виде ребер или гофров) расположены настолько часто, что их действие на стенки можно заменить осредненным контактным давлением  $p_k$  (при  $p_k > 0$  связи растянуты). Тогда из условия равновесия участка внутренней стенки (см. рис. 7.12, а) получим

$$p_k = p_{ж} - p_r + \frac{\sigma' h'}{\tilde{r}_2}. \quad (7.32)$$

Учет неупругой работы материала стенок рассматриваемого кольца удобно провести в графической форме, поскольку диаграммы растяжения обычно заданы в виде графиков. При графическом решении предварительно следует перестроить диаграммы растяжения в кривые  $\sigma' h' = f'(\varepsilon_n)$  и  $\sigma'' h'' = f''(\varepsilon_n)$  (рис. 7.12, б). При этом обычно принимают, что зависимость  $\sigma' = \sigma'(\varepsilon')$  является нечетной функцией аргумента  $\varepsilon'$ , т. е. при сжатии материал внутренней стенки ведет себя так же, как при растяжении. После сложения ординат построенных кривых получим кривую зависимости

$$p \tilde{r}_2 = f(\varepsilon_n) = \sigma' h' + \sigma'' h''.$$

На этой кривой заданному значению  $(p_r \tilde{r}_2)^\circ$  соответствует рабочая точка  $A$  с абсциссой  $\varepsilon_n^\circ$ , значение которой позволяет найти ординаты  $(\sigma' h')^\circ$  и  $(\sigma'' h'')^\circ$ , а по ним — искомые напряжения, соответствующие заданному давлению. Ясно, что и при неупругой работе материала стенок остается в силе (7.32).

Если из начала координат на рис. 7.12, б провести касательную к кривой зависимости  $p \tilde{r}_2 = f(\varepsilon_n)$ , то ордината  $p^* \tilde{r}_2$  полученной точки касания  $B$  позволяет найти значение давления  $p^*$ , превышение которого приведет к довольно быстрому росту полной деформации. В связи с этим значение  $p^*$  можно считать предельно допустимым для рассматриваемого сечения оболочки камеры и по отношению  $p^*/p_r$  оценивать запас по несущей

способности оболочки в этом сечении [37]. Более полный анализ напряженно-деформированного состояния оболочки камеры ЖРД с учетом двухосного напряженного состояния стенок можно провести по методике, изложенной в [26, 37]. ♦

#### 7.4. Моментная теория цилиндрической оболочки

При осесимметричном нагружении *круговой цилиндрической оболочки* ее деформирование также осесимметрично. Поэтому

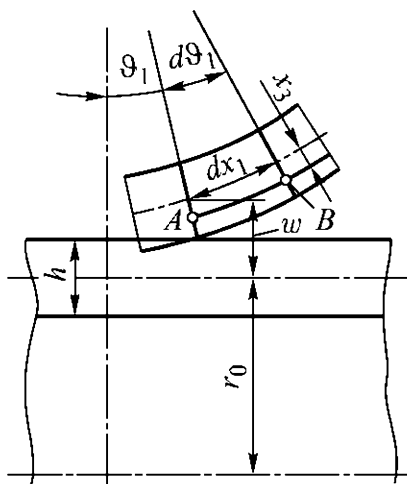


Рис. 7.13

в линейном приближении деформации ее *срединной поверхности* радиусом  $r_0$  в осевом (вдоль координатной оси  $Ox_1$ ) и окружном направлениях, согласно (7.13), соответственно

$$\varepsilon_1^o = \frac{du}{dx_1}; \quad \varepsilon_2^o = \frac{w}{r_0},$$

где  $u$  и  $w$  — перемещения точки срединной поверхности в осевом и радиальном направлениях, а угол поворота нормали к поверхности составит  $\vartheta_1 = dw/dx_1$  (рис. 7.13).

Тогда для слоя оболочки с координатой  $x_3$ , отсчитываемой в направлении внутренней нормали к срединной поверхности, в рамках *гипотезы плоских сечений* по аналогии с изгибом стержня (см. 4.1) получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^o + \xi \frac{d\vartheta_1}{dx_1} = \varepsilon_1^o + \xi \frac{d^2w}{dx_1^2}$$

и для оболочки толщиной  $h$  при условии  $h/r_0 \ll 1$  примем

$$\varepsilon_2 = \frac{w}{r_0 + \xi} \approx \frac{w}{r_0}.$$

В предположении *двухосного напряженного состояния* из (1.16) при  $\sigma_{33} = 0$  для *нормальных напряжений* в осевом и окружном направлениях соответственно следует

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)}{1 - \nu^2} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \varepsilon_1^\circ + x_3 \frac{d^2\omega}{dx_1^2} + \frac{\nu\omega}{r_0} \right); \\ \sigma_{22} &= \frac{E(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)}{1 - \nu^2} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left( \frac{\omega}{r_0} + \nu\varepsilon_1^\circ + \nu x_3 \frac{d^2\omega}{dx_1^2} \right),\end{aligned}\quad (7.33)$$

где  $E$  — продольный модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Для элемента оболочки с размерами  $dx_1$  и  $dx_2$  срединной поверхности (рис. 7.14), выделенного двумя продольными и двумя поперечными сечениями, вычислим с учетом (7.33) зависящие от координаты  $x_1$  нормальные силы и *изгибающие моменты*, которые отнесены к единице длины дуги сечения этой поверхности и называются *погонными силами* и *моментами* [38]:

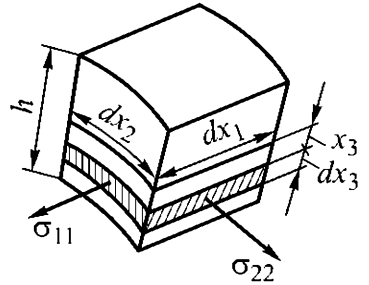


Рис. 7.14

$$\begin{aligned}N_1(x_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} dx_3 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left( \varepsilon_1^\circ + \frac{\nu\omega}{r_0} \right); \\ N_2(x_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} dx_3 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \left( \frac{\omega}{r_0} + \nu\varepsilon_1^\circ \right); \\ M_1(x_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_3 dx_3 = D_{\text{ц}} \frac{d^2\omega}{dx_1^2}; \\ M_2(x_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} x_3 dx_3 = \nu D_{\text{ц}} \frac{d^2\omega}{dx_1^2},\end{aligned}\quad (7.34)$$

где  $D_{\text{ц}} = (Eh^3/12)/(1 - \nu^2)$  — *цилиндрическая жесткость* оболочки.

Пусть на оболочку длиной  $L$  действует осесимметричная распределенная поверхностная нагрузка  $p(x_1)$  (в частном случае

внутреннее давление  $p$ ), а на торцах при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = L$  могут быть приложены соответственно погонные нормальные  $N_0, N_L$  и *перерезывающие*  $Q_0, Q_L$  силы и погонные изгибающие моменты  $M_0$  и  $M_L$ . В общем случае оболочка может двигаться в направлении координатной оси  $Ox_1$  с ускорением  $a_u$ , что приведет к возникновению в оболочке распределенных *объемных сил*  $\rho a_u$ , направленных в противоположную движению сторону. Тогда для такой оболочки соотношение (2.5), выражающее *принцип возможных перемещений*, примет вид

$$\begin{aligned} & 2\pi r_0 \int_0^L (N_1 \delta \varepsilon_1^0 + N_2 \delta \varepsilon_2^0 + M_1 \delta \kappa_1 + M_2 \delta \kappa_2) dx_1 = \\ & = 2\pi r_0 \int_0^L (p \delta w - \rho h a_u \delta u) dx_1 + 2\pi r_0 (N_0 \delta u_0 + N_L \delta u_L + \\ & + Q_0 \delta w_0 + Q_L \delta w_L + M_0 \delta \vartheta_0 + M_L \delta \vartheta_L), \end{aligned} \quad (7.35)$$

где  $\delta \kappa_1 = d^2(\delta w)/dx_1^2$ ;  $\delta \kappa_2 = 1/(r_0 + \delta w)$  — вариации *главных кривизн* срединной поверхности;  $\delta u_0$  и  $\delta u_L$ ,  $w_0$  и  $w_L$ ,  $\delta \vartheta_0$  и  $\delta \vartheta_L$  — вариации осевых и радиальных перемещений и углов поворота торцевых сечений соответственно при  $x_1 = 0$  и  $x = L$ .

Считая, что  $\delta w \ll r_0$ , принимаем  $\delta \kappa_2 \equiv 0$ . Тогда, учитывая (7.13) и соотношения для  $\delta \kappa_1$  и  $\delta \vartheta = d(\delta w)/dx_1$ , интегрированием (7.35) по частям и объединением слагаемых и интегралов, в которые входят вариации одинаковых углов поворота нормали и составляющих перемещения, получаем

$$\begin{aligned} & (M_1(L) - M_L) \delta \vartheta_L - (M_1(0) + M_0) \delta \vartheta_0 + (N_1(L) - N_L) \delta u_L - \\ & - (N_1(0) + N_0) \delta u_0 - \left( \left. \frac{dM_1}{dx_1} \right|_{x_1=L} + Q_L \right) \delta w_L + \left( \left. \frac{dM_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} - Q_0 \right) \delta w_0 - \\ & - \int_0^L \left( \frac{dN_1}{dx_1} - \rho h a_u \right) \delta u dx_1 + \int_0^L \left( \frac{N_2}{r_0} + \frac{d^2 M_1}{dx_1^2} - p \right) \delta w dx_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

В силу произвольности вариаций  $\delta u$  и  $\delta w$  подинтегральные функции в (7.36) равны нулю, что приводит к двум уравнениям равновесия

$$\frac{dN_1}{dx_1} - \rho h a_u = 0; \quad \frac{N_2}{r_0} + \frac{d^2 M_1}{dx_1^2} - p = 0. \quad (7.37)$$

Интегрирование первого из них дает

$$N_1(x_1) = \rho h a_u x_1 + C_0, \quad C_0 = \text{const}. \quad (7.38)$$

При произвольных значениях на торцах оболочки вариаций углов поворота нормали и составляющих перемещения из (7.36) следуют *силовые граничные условия*

$$M_1(L) = M_L; \quad M_1(0) = -M_0;$$

$$N_1(L) = N_L; \quad N_1(0) = -N_0;$$

$$\left. \frac{dM_1}{dx_1} \right|_{x_1=L} = -Q_L; \quad \left. \frac{dM_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} = Q_0.$$

Отметим, что независимо можно задать только одно из значений  $N_0$  или  $N_L$  погонной силы, а второе определить после нахождения значения  $C_0$  в (7.38). Если же на одном или обоих торцах заданы углы поворота нормали и/или перемещения в каком-либо направлении, то вариации соответствующих углов поворота и составляющих перемещения равны нулю, что означает задание *кинематических граничных условий*. В частности, при задании значений  $u_0$  и/или  $u_L$  оболочка неподвижна и поэтому в (7.38)  $a_u = 0$  и  $N_1 = C_0$ .

Исключением  $\varepsilon_1^0$  из первых двух равенств (7.34) получим

$$N_2 = \nu N_1 + \frac{E h w}{r_0}$$

и после подстановки во второе уравнение (7.37) с учетом третьего равенства (7.34) запишем

$$\frac{d^4 w}{dx_1^4} + 4k^4 w = \frac{p(x_1)}{D_{\text{ц}}} - \frac{\nu N_1(x_1)}{D_{\text{ц}} r_0}, \quad (7.39)$$

где

$$4k^4 = \frac{Eh}{D_{\text{ц}} r_0^2} = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2 r_0^2}.$$

Решение этого уравнения имеет вид [38]

$$\begin{aligned} \omega(x_1) = & (C_1 \sin kx_1 + C_2 \cos kx_1) \exp(-kx_1) + \\ & + (C_3 \sin kx_1 + C_4 \cos kx_1) \exp(kx_1) + \omega^*(x_1), \end{aligned} \quad (7.40)$$

где  $\omega^*(x_1)$  — частное решение, определяемое по известным зависимостям  $p(x_1)$  и  $N_1(x_1)$ .

Для нахождения в (7.40) постоянных  $C_n$ ,  $n = \overline{1, 4}$ , необходимо располагать четырьмя граничными условиями. Это могут быть заданные на обоих торцах при  $x_1 = 0$  и  $x_1 = L$  либо кинематические граничные условия

$$\omega(0) = \omega_0; \quad \left. \frac{d\omega}{dx_1} \right|_{x_1=0} = \vartheta_0; \quad \omega(L) = \omega_L; \quad \left. \frac{d\omega}{dx_1} \right|_{x_1=L} = \vartheta_L,$$

либо силовые граничные условия

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\omega}{dx_1^2} \right|_{x_1=0} &= \frac{M_0}{D_{\text{ц}}}; & \left. \frac{d^3\omega}{dx_1^3} \right|_{x_1=0} &= \frac{Q_0}{D_{\text{ц}}}; \\ \left. \frac{d^2\omega}{dx_1^2} \right|_{x_1=L} &= \frac{M_L}{D_{\text{ц}}}; & \left. \frac{d^3\omega}{dx_1^3} \right|_{x_1=L} &= \frac{Q_L}{D_{\text{ц}}}, \end{aligned}$$

либо смешанные граничные условия, т. е. частично кинематические и частично силовые.

Располагая зависимостью  $\omega(x_1)$ , можно найти зависимости погонных сил: окружной

$$N_2(x_1) = \nu N_1(x_1) + \frac{Eh\omega(x_1)}{r_0}$$

и перерезывающей

$$Q(x_1) = D_{\text{ц}} \frac{d^3\omega}{dx_1^3},$$

а из двух последних равенств (7.34) — зависимости погонных моментов  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_1)$ . Затем из (7.33) с учетом (7.34) находим при  $x_3 = \pm h/2$  наибольшие по абсолютному значению напряжения

$$\sigma_{11}(x_1) = \frac{N_1(x_1)}{h} \pm \frac{6M_1(x_1)}{h^2}; \quad \sigma_{22}(x_1) = \frac{N_2(x_1)}{h} \pm \frac{6\nu M_2(x_1)}{h^2}. \quad (7.41)$$

**Пример 7.7.** Пусть длинная тонкостенная труба прикреплена к жесткому фланцу и нагружена постоянным по ее длине внутренним давлением  $p_0$  (рис. 7.15) [38]. При условии  $h/r_0 \ll 1$  такую трубу допустимо рассматривать как круговую цилиндрическую оболочку, жестко закрепленную в торцевом сечении при  $x_1 = 0$ . Если считать, что полость трубы замкнута на некотором расстоянии от фланца, то из условия равновесия в осевом направлении получим

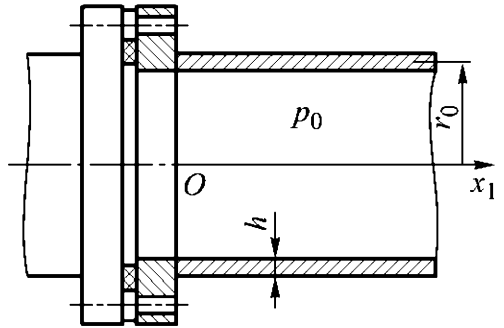


Рис. 7.15

$$N_1 = \frac{\pi r_0^2 p_0}{2\pi r_0} = \frac{p_0 r_0}{2} = \text{const.}$$

Тогда частным решением (7.39) будет

$$\omega^* = \frac{p_0(1-\nu/2)}{4k^4 D_{II}} = \frac{p_0 r_0^2(1-\nu/2)}{Eh} = \text{const.}$$

С увеличением расстояния от фланца влияние условий закрепления убывает и  $\omega(x_1) \rightarrow \omega^*$  при  $x_1 \rightarrow \infty$ , что соответствует радиальному перемещению замкнутой безмоментной круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением. Однако при  $x_1 \rightarrow \infty$  неограниченно возрастает в (7.40) слагаемое  $(C_3 \sin kx_1 + C_4 \cos kx_1) \exp(kx_1)$ . Это противоречие разрешимо, если положить  $C_3 = C_4 = 0$ . Тогда для нахождения в (7.40) постоянных  $C_1$  и  $C_2$  достаточно задать кинематические граничные условия при  $x_1 = 0$ :

$$\omega(0) = 0; \quad \left. \frac{d\omega}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0.$$

В итоге (7.40) примет вид

$$\tilde{w} = \frac{\varpi(x_1)}{\varpi^*} = 1 - (\sin kx_1 + \cos kx_1) \exp(-kx_1),$$

и с учетом третьей формулы (7.34) получим

$$\tilde{M} = \frac{M_1(x_1)}{M_1(0)} = (\cos kx_1 - \sin kx_1) \exp(-kx_1),$$

где

$$M_1(0) = \frac{p_0 r_0 h (2 - \nu)}{4\sqrt{3(1 - \nu^2)}}.$$

Эти зависимости представлены на рис. 7.16 сплошными линиями.

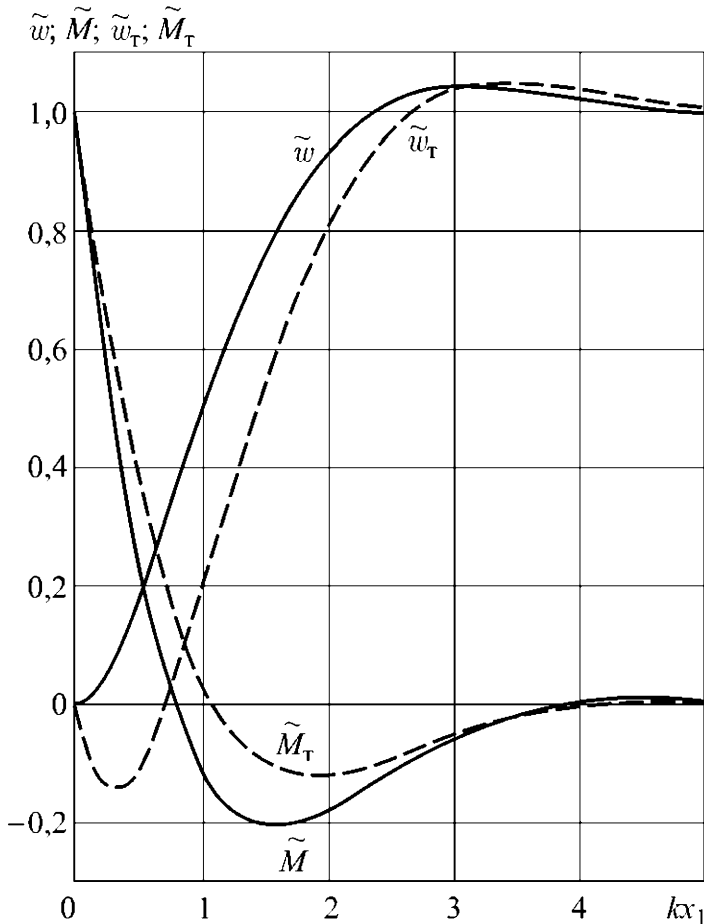


Рис. 7.16

Из рис. 7.16 видно, что при  $kx_1 \geq 5$  отличие  $w(x_1)$  от  $w^*$  менее 1 %, а значение величины  $M$  пренебрежимо мало, т. е. при

$$x_1 \geq x_1^* = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{r_0 h}{3(1-\nu^2)}}$$

влияние условий закрепления оболочки у фланца практически исчезает. С учетом выполнения для оболочки условия  $h/r_0 \leq 0,1$  при  $\nu = 0,3$  получим  $x_1^* \leq 1,23 r_0$ , т. е. зона влияния условий закрепления, которое принято называть **краевым эффектом**, невелика по сравнению с радиусом срединной поверхности цилиндрической оболочки.

Из первого равенства (7.41) найдем наибольшее растягивающее нормальное напряжение в осевом направлении при  $x_1 = 0$

$$\sigma_{11}^{\circ}(0) = \frac{N_1(0)}{h} + \frac{6M_1(0)}{h^2} = \frac{p_0 r_0}{2h} \left( 1 + (2-\nu) \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \right). \quad (7.42)$$

При  $\nu = 0,3$  получим

$$\sigma_{11}^{\circ} \approx 2,05 \frac{p_0 r_0}{h},$$

т. е.  $\sigma_{11}^{\circ}$  более чем в 2 раза больше окружного напряжения для безмоментной цилиндрической оболочки. Повышенные напряжения в зоне краевого эффекта могут представлять опасность при статическом нагружении оболочки из материала, обладающего *хрупкостью*, или же при ее циклическом нагружении во времени. При статическом нагружении оболочки из достаточно пластичного материала местная пластическая деформация в зоне краевого эффекта не повлияет существенным образом на *несущую способность* оболочки, но приведет к уменьшению жесткости ее крепления к фланцу.

Пусть рассматриваемая оболочка выполнена из *идеально упруго-пластического материала* с *пределом текучести*  $\sigma_T$ . Тогда из (7.42) следует, что предел текучести в сечении закрепления оболочки ( $x_1 = 0$ ) в соответствии с *критерием пластичности Треска — Сен-Венана* будет достигнут при давлении

$$p_* = \frac{\sigma_\tau h / r_0}{\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\frac{3}{1 - \nu^2}}}. \quad (7.43)$$

Дальнейшее повышение давления приведет к формированию в этом сечении *пластического шарнира*. Условно примем, что такой шарнир, которому соответствует погонный изгибающий момент  $M_1^* = \sigma_\tau h^2 / 4$  (см. пример 4.2), возникает уже при давлении  $p_*$ , а материал оболочки при  $x_1 > 0$  остается *линейно упругим*. В рамках таких допущений для нахождения в (7.40) постоянных  $C_1$  и  $C_2$  при

$$w^* = w_\tau^* = \frac{p_* r_0^2 (1 - \nu / 2)}{E} h \quad \text{и} \quad C_3 = C_4 = 0$$

следует использовать смешанные граничные условия

$$w(0) = 0; \quad \left. \frac{d^2 w}{dx_1^2} \right|_{x_1=0} = \frac{M_1^*}{D_\Pi}.$$

В итоге с учетом (7.43) получим

$$\tilde{w}_\tau = \frac{w(x_1)}{w_\tau^*} = 1 - \left( \cos kx_1 + \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{2 - \nu} \right) \sin kx_1 \right) \exp(-kx_1);$$

$$\tilde{M}_\tau = \frac{M_1(x_1)}{M^*} = \left( \cos kx_1 - \frac{2}{3 + \frac{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{2 - \nu}} \sin kx_1 \right) \exp(-kx_1).$$

При значении  $\nu = 0,3$  этим зависимостям на рис. 7.16 соответствуют штриховые линии.

Отметим, что действие погонного изгибающего момента  $M^*$  в пластическом шарнире привело к возникновению вблизи сечения крепления оболочки к фланцу зоны с отрицательными значениями  $w(x_1)$ , что явилось следствием принятых ранее допущений. В действительности в процессе формирования пластического шарнира пластические деформации в материале оболочки возникнут и при  $x_1 > 0$ , что повлияет на жесткость оболочки,

а значение  $M^*$  в сечении ее крепления к фланцу может быть достигнуто лишь в случае, если при  $x_1 = 0$  кривизна  $\kappa_1 \rightarrow \infty$ . Тем не менее достоверность полученных зависимостей  $\tilde{\omega}_T(x_1)$  и  $\tilde{M}_T(x_1)$  растет по мере увеличения  $x_1$ , что дает основание считать протяженность зоны краевого эффекта такой же, как и при отсутствии пластической деформации материала оболочки. ♦

### Дополнение 7.1. Модель оболочки произвольной формы

Для оболочки с гладкой срединной поверхностью  $S$  примем характерные для теории оболочек допущения [25]:

$$\sigma_{33} = 0; \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0,$$

где  $\sigma_{jk}$  и  $\varepsilon_{jk}$ ,  $j, k = 1, 2, 3$ , — компоненты симметричных тензоров соответственно напряжений и малой деформации в произвольной точке оболочки в системе ортогональных криволинейных координат  $\beta_j$ , определяемой репером  $\{e_j\}$  с ортами  $e_j$  (орт  $e_3$  направлен по нормали к этой поверхности). Последняя цепочка равенств характеризует **гипотезу Кирхгофа — Лява** и означает, что прямолинейный элемент оболочки, нормальный к поверхности  $S$ , в процессе деформирования оболочки сохраняет свою длину и остается прямолинейным и нормальным к деформированной срединной поверхности. Это допущение аналогично гипотезе плоских сечений, используемой при построении математической модели стержня (см. 2.3).

Срединную поверхность оболочки можно задать в неподвижной прямоугольной системе координат  $Ox_1x_2x_3$  с репером  $\{e_k^o\}$  с помощью радиуса-вектора  $x^o(\beta_1, \beta_2)$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  являются линиями кривизны, соответствующими главным кривизнам  $\kappa_1(M)$  и  $\kappa_2(M)$  этой поверхности в точке  $M \in S$  (см. Д.7.3). Векторы

$$x_n^o = \frac{\partial x^o}{\partial \beta_n}, \quad n = 1, 2,$$

в каждой точке  $M \in S$  параллельны касательным к соответствующим линиям кривизны, и поэтому орты репера  $\{e_j\}$  в любой точке  $M$  можно представить в виде

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_1^\circ}{H_1^\circ}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}_2^\circ}{H_2^\circ}; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2,$$

где  $H_n^\circ = |\mathbf{x}_n^\circ|$ .

Соотношения Коши для ненулевых компонент  $\varepsilon_{jk}$  в криволинейных координатах с учетом условий Кодацци (7.94) примут вид [27]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{1 + \kappa_1 \beta_3} \left( \frac{\partial u_1 / \partial \beta_1}{H_1^\circ} + \frac{u_2 (\partial H_1^\circ / \partial \beta_2)}{H_1^\circ H_2^\circ} + \kappa_1 u_3 \right); \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{1 + \kappa_2 \beta_3} \left( \frac{\partial u_2 / \partial \beta_2}{H_2^\circ} + \frac{u_1 (\partial H_2^\circ / \partial \beta_1)}{H_1^\circ H_2^\circ} + \kappa_2 u_3 \right); \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{1 + \kappa_1 \beta_3} \left( \frac{\partial u_2 / \partial \beta_1}{H_1^\circ} - \frac{u_1 (\partial H_1^\circ / \partial \beta_2)}{H_1^\circ H_2^\circ} \right) + \\ &+ \frac{1}{1 + \kappa_2 \beta_3} \left( \frac{\partial u_1 / \partial \beta_2}{H_2^\circ} - \frac{u_2 (\partial H_2^\circ / \partial \beta_1)}{H_1^\circ H_2^\circ} \right), \end{aligned} \quad (7.44)$$

а для нулевых —

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial \beta_3}; \quad \varepsilon_{13} = H_1 \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left( \frac{u_1}{H_1} \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \beta_1}; \\ \varepsilon_{23} &= H_2 \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left( \frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \beta_2}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

где  $u_j(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  — проекции вектора перемещения  $\mathbf{u} = u_j \mathbf{e}_j$  на направления ортов  $\mathbf{e}_j$ ;  $H_1 = H_1^\circ(1 + \kappa_1 \beta_3)$  и  $H_2 = H_2^\circ(1 + \kappa_2 \beta_3)$  — коэффициенты Ламе.

Из (7.45) при  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$  интегрированием по  $\beta_3$  находим

$$u_3 = u_3^\circ; \quad u_1 = u_1^\circ - \vartheta_1 \beta_3; \quad u_2 = u_2^\circ - \vartheta_2 \beta_3, \quad (7.46)$$

где  $u_j^\circ = u_j^\circ(\beta_1, \beta_2) = u_j(\beta_1, \beta_2, 0)$  — проекции вектора перемещения  $\mathbf{u}^\circ = u_j^\circ \mathbf{e}_j$  точки  $M \in S$  на направления ортов  $\mathbf{e}_j$  (проекцию  $u_3^\circ$  принято называть **прогибом оболочки**);  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  —

углы поворота элемента срединной поверхности  $S$  вокруг касательных к координатным линиям  $\beta_2$  и  $\beta_1$  соответственно, обусловленные ее деформированием. Углы  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  определяются с точностью до малых более высокого порядка:

$$\vartheta_1 = \frac{\partial u_3^0 / \partial \beta_1}{H_1^0} - \kappa_1 u_1^0; \quad \vartheta_2 = \frac{\partial u_3^0 / \partial \beta_2}{H_2^0} - \kappa_2 u_2^0. \quad (7.47)$$

Подставив (7.46) в (7.44), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\varepsilon_1 + \Delta \kappa_1 \beta_3}{1 + \kappa_1 \beta_3}; & \varepsilon_{22} &= \frac{\varepsilon_2 + \Delta \kappa_2 \beta_3}{1 + \kappa_2 \beta_3}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\omega_1 + \varpi_1 \beta_3}{1 + \kappa_1 \beta_3} + \frac{\omega_2 + \varpi_2 \beta_3}{1 + \kappa_2 \beta_3}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial u_1^0}{\partial \beta_1} + \frac{u_2^0}{H_1^0 H_2^0} \frac{\partial H_1^0}{\partial \beta_2} + \kappa_1 u_3^0; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{H_2^0} \frac{\partial u_2^0}{\partial \beta_2} + \frac{u_1^0}{H_1^0 H_2^0} \frac{\partial H_2^0}{\partial \beta_1} + \kappa_2 u_3^0; \\ \Delta \kappa_1 &= -\frac{1}{H_1^0} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \beta_1} - \frac{\vartheta_2}{H_1^0 H_2^0} \frac{\partial H_1^0}{\partial \beta_2}; \\ \Delta \kappa_2 &= -\frac{1}{H_2^0} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta_2} - \frac{\vartheta_1}{H_1^0 H_2^0} \frac{\partial H_2^0}{\partial \beta_1}; \\ \omega_1 &= \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial u_2^0}{\partial \beta_1} - \frac{u_1^0}{H_1^0 H_2^0} \frac{\partial H_1^0}{\partial \beta_2}; \\ \omega_2 &= \frac{1}{H_2^0} \frac{\partial u_1^0}{\partial \beta_2} - \frac{u_2^0}{H_1^0 H_2^0} \frac{\partial H_2^0}{\partial \beta_1}; \\ \varpi_1 &= -\frac{1}{H_1^0} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \beta_1} + \frac{\vartheta_1}{H_1^0 H_2^0} \frac{\partial H_1^0}{\partial \beta_2}; \\ \varpi_2 &= -\frac{1}{H_2^0} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \beta_2} + \frac{\vartheta_2}{H_1^0 H_2^0} \frac{\partial H_2^0}{\partial \beta_1}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Можно показать [27], что при деформировании срединной поверхности:  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , — относительное удлинение в направлении орта  $\mathbf{e}_i$ ;  $\Delta \kappa_i$ ,  $i = 1, 2$ , — изменение значения соответствующей главной кривизны;  $\omega_1 + \omega_2 = \gamma_{12}$  — угол сдвига в плоскости ортов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ ;  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \vartheta_3$  — угол поворота элемента срединной поверхности вокруг нормали к ней.

Величина

$$\Delta \kappa_{12} = \frac{1}{2}(\varpi_1 + \kappa_1 \omega_2 + \varpi_2 + \kappa_2 \omega_1) \quad (7.50)$$

характеризует кручение срединной поверхности.

Условия Гаусса (7.95) и Кодацци (7.94) приводят к трем условиям совместности деформаций срединной поверхности, связывающим шесть величин  $\varepsilon_i$ ,  $\Delta \kappa_i$ ,  $\gamma_{12}$  и  $\Delta \kappa_{12}$  [27]:

$$\begin{aligned} & \kappa_1 \left( \varepsilon_1 \frac{\partial H_2^\circ}{\partial \beta_1} - \frac{\partial(H_2^\circ \varepsilon_2)}{\partial \beta_1} + \frac{\partial(H_1^\circ \gamma_{12})}{\partial \beta_2} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \gamma_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial \beta_2} \right) + \\ & + \frac{\partial(H_2^\circ \Delta \kappa_2)}{\partial \beta_1} - \Delta \kappa_1 \frac{\partial H_2^\circ}{\beta_1} - \frac{\partial(H_1^\circ \Delta \kappa_{12})}{\partial \beta_2} - \Delta \kappa_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\beta_2} = 0; \\ & \kappa_2 \left( \varepsilon_2 \frac{\partial H_1^\circ}{\partial \beta_2} - \frac{\partial(H_1^\circ \varepsilon_1)}{\partial \beta_2} + \frac{\partial(H_2^\circ \gamma_{12})}{\partial \beta_1} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \gamma_{12} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial \beta_1} \right) + \\ & + \frac{\partial(H_1^\circ \Delta \kappa_1)}{\partial \beta_2} - \Delta \kappa_2 \frac{\partial H_1^\circ}{\beta_2} - \frac{\partial(H_2^\circ \Delta \kappa_{12})}{\partial \beta_1} - \Delta \kappa_{12} \frac{\partial H_2^\circ}{\beta_1} = 0; \quad (7.51) \end{aligned}$$

$$\kappa_2 \Delta \kappa_1 + \kappa_1 \Delta \kappa_2 -$$

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{\partial}{\partial \beta_1} \frac{1}{H_1^\circ} \left( \varepsilon_1 \frac{\partial H_2^\circ}{\partial \beta_1} - \frac{\partial(H_2^\circ \varepsilon_2)}{\partial \beta_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial(H_1^\circ \gamma_{12})}{\partial \beta_2} + \frac{\gamma_{12}}{2} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial \beta_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \frac{1}{H_2^\circ} \left( \varepsilon_2 \frac{\partial H_1^\circ}{\partial \beta_2} - \frac{\partial(H_1^\circ \varepsilon_1)}{\partial \beta_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial(H_2^\circ \gamma_{12})}{\partial \beta_1} + \frac{\gamma_{12}}{2} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial \beta_1} \right) \right) \frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} = 0, \end{aligned}$$

Условия (7.51) записаны в предположении, что деформации срединной поверхности малы, поэтому их влиянием на значения  $\kappa_i$  и  $H_i^\circ$  можно пренебречь.

Пусть элемент оболочки постоянной толщины  $h$  занимает область  $dV$ , ограниченную координатными поверхностями

ми  $\beta_3 = \pm h/2$  и нормальными сечениями срединной поверхности  $S$ , касательными к линиям кривизны, проходящим через точки  $M, M' \in S$  с криволинейными координатами соответственно  $\beta_1^*, \beta_1^* + d\beta_1$  и  $\beta_2^*, \beta_2^* + d\beta_2$  (рис. 7.17). Срединная поверхность этого элемента имеет площадь

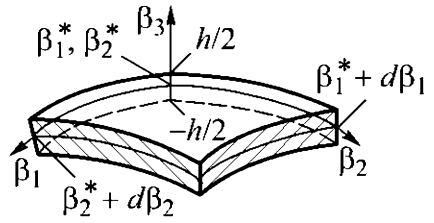


Рис. 7.17

$$dS = H_i^\circ d\beta_i.$$

Пусть к этому элементу на поверхности  $\beta_3 = h/2$  площадью

$$dS^+ = H_1^\circ \left(1 + \frac{\kappa_1 h}{2}\right) d\beta_1 H_2^\circ \left(1 + \frac{\kappa_2 h}{2}\right) d\beta_2$$

приложена нагрузка, определяемая заданным вектором напряжения  $\sigma^+$ , а на поверхности  $\beta_3 = -h/2$  площадью

$$dS^- = H_1^\circ \left(1 - \frac{\kappa_1 h}{2}\right) d\beta_1 H_2^\circ \left(1 - \frac{\kappa_2 h}{2}\right) d\beta_2$$

приложена нагрузка, определяемая заданным вектором напряжения  $\sigma^-$ .

Кроме того, на оболочку действуют *объемные силы* с вектором плотности  $\mathbf{b}$ . Тогда действующие на этот элемент оболочки векторы силы и момента, отнесенные к единице площади срединной поверхности, составляют соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = & \left(1 + \frac{\kappa_1 h}{2}\right) \left(1 + \frac{\kappa_2 h}{2}\right) \sigma^+ + \left(1 - \frac{\kappa_1 h}{2}\right) \left(1 - \frac{\kappa_2 h}{2}\right) \sigma^- + \\ & + \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_1 \beta_3)(1 + \kappa_2 \beta_3) \mathbf{b} d\beta_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = & \left(1 + \frac{\kappa_1 h}{2}\right) \left(1 + \frac{\kappa_2 h}{2}\right) \frac{h}{2} \mathbf{e}_3 \times \sigma^+ + \left(1 - \frac{\kappa_1 h}{2}\right) \left(1 - \frac{\kappa_2 h}{2}\right) \frac{h}{2} \mathbf{e}_3 \times \sigma^- + \\ & + \int_{-h/2}^{h/2} ((1 + \kappa_1 \beta_3)(1 + \kappa_2 \beta_3) \beta_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{b}) d\beta_3. \end{aligned}$$

В любом сечении элемента оболочки, перпендикулярном координатной линии  $\beta_i$ , действуют напряжения  $\sigma_{ij}$ , являющиеся проекциями вектора напряжения  $\sigma_i = \sigma_{ij}e_j$  на направления ортов  $e_j$ . Тогда на единицу длины координатной линии  $\beta_m$  ( $m = 1, 2$ , причем здесь и далее  $m \neq i$ ) приходится векторы силы и момента

$$\mathbf{Q}_i = \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_m \beta_3) \sigma_i d\beta_3; \quad \mathbf{M}_i = \int_{-h/2}^{h/2} ((1 + \kappa_m \beta_3) \beta_3 \mathbf{e}_3 \times \sigma_i) d\beta_3.$$

Модули этих векторов измеряют в ньютонах (Н) и ньютонах на метр (Н/м) соответственно. Такие силы и моменты принято называть *погонными*. Эти векторы можно представить в виде

$$\mathbf{Q}_i = Q_{ji} \mathbf{e}_j; \quad \mathbf{M}_1 = -M_{12} \mathbf{e}_1 + M_{11} \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{M}_2 = -M_{22} \mathbf{e}_1 + M_{21} \mathbf{e}_2. \quad (7.52)$$

Здесь

$$Q_{ji} = \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_m \beta_3) \sigma_{ji} d\beta_3; \quad (7.53)$$

$$M_{il} = \int_{-h/2}^{h/2} (1 + \kappa_m \beta_3) \sigma_{il} \beta_3 d\beta_3, \quad l = 1, 2.$$

В сечении элемента оболочки, перпендикулярном координатной линии  $\beta_\nu^*$ , со стороны остальной части оболочки действуют сила

$$\mathbf{N}_\nu^* = -\mathbf{Q}_\nu H_\zeta^\circ d\beta_\zeta$$

и момент

$$\mathbf{M}_\nu^* = -\mathbf{M}_\nu H_\zeta^\circ d\beta_\zeta,$$

а в сечении, перпендикулярном координатной линии  $\beta_\nu^* + d\beta_\nu$ , — сила

$$\mathbf{N}_\nu^{**} = \mathbf{Q}_\nu H_\zeta^\circ d\beta_\zeta + \frac{\partial \mathbf{Q}_\nu H_\zeta^\circ}{\partial \beta_\nu} d\beta_\nu d\beta_\zeta$$

и момент

$$\mathbf{M}_\nu^{**} = \mathbf{M}_\nu H_\zeta^\circ d\beta_\zeta + \frac{\partial \mathbf{M}_\nu H_\zeta^\circ}{\partial \beta_\nu} d\beta_\nu d\beta_\zeta, \quad \nu, \zeta = 1, 2, 3$$

(по повторяющимся греческим индексам  $\nu$  и  $\zeta$  не суммировать!).

Для равновесия элемента оболочки необходимо равенство нулевому вектору  $\mathbf{0}$  главного вектора системы всех действующих на этот элемент сил и главного момента этой системы относительно точки  $M \in S$ , т. е., пренебрегая слагаемыми более высокого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial(\mathbf{Q}_1 H_2^\circ)}{\partial \beta_1} + \frac{\partial(\mathbf{Q}_2 H_1^\circ)}{\partial \beta_2} + H_1^\circ H_2^\circ \mathbf{p} \right) d\beta_1 d\beta_2 = \mathbf{0}; \\ & \left( \frac{\partial(\mathbf{M}_1 H_2^\circ)}{\partial \beta_1} + \frac{\partial(\mathbf{M}_2 H_1^\circ)}{\partial \beta_2} \right) d\beta_1 d\beta_1 + \\ & + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{Q}_2 + \mathbf{m}) H_1^\circ H_2^\circ d\beta_1 d\beta_1 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют два векторных уравнения равновесия элемента оболочки:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\mathbf{Q}_1 H_2^\circ)}{\partial \beta_1} + \frac{\partial(\mathbf{Q}_2 H_1^\circ)}{\partial \beta_2} = -H_1^\circ H_2^\circ \mathbf{p}; \\ & \frac{\partial(\mathbf{M}_1 H_2^\circ)}{\partial \beta_1} + \frac{\partial(\mathbf{M}_2 H_1^\circ)}{\partial \beta_2} + \\ & + (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{Q}_2) H_1^\circ H_2^\circ = -H_1^\circ H_2^\circ \mathbf{m}. \end{aligned} \tag{7.54}$$

От (7.54) несложно перейти к уравнениям движения оболочки, добавив в правые части этих уравнений соответственно слагаемые

$$\rho h \frac{\partial^2 \mathbf{u}^\circ}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\rho h^3}{12} \left( \kappa_1 \mathbf{e}_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2} + \kappa_2 \mathbf{e}_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial t^2} \right),$$

учитывающие влияние сил инерции (здесь  $\rho$  — плотность материала оболочки;  $t$  — время).

Подстановка (7.53) в уравнение

$$Q_{12} - \kappa_2 M_{21} - Q_{21} + \kappa_1 M_{12} = 0,$$

являющееся проекцией второго уравнения (7.54) на направление орта  $\mathbf{e}_3$ , приводит к тождеству, что позволяет обозначить

$$S_{12} = Q_{12} - \kappa_2 M_{21} = Q_{21} - \kappa_1 M_{12} = S_{21}. \tag{7.55}$$

Если разрешить проекции второго уравнения (7.54) на направления ортов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  относительно усилий, то получим

$$Q_{13} = \frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} \left( \frac{\partial(M_{11}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} - M_{22} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} + \frac{\partial(M_{21}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} + M_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} \right) + m_1;$$

$$Q_{23} = \frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} \left( \frac{\partial(M_{22}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} - M_{11} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} + \frac{\partial(M_{12}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} + M_{21} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} \right) + m_2,$$
(7.56)

где  $m_i$  — проекции вектора  $\mathbf{m}$  на направления этих ортов.

Тогда с учетом (7.56) проекции первого уравнения (7.54) на направления ортов  $\mathbf{e}_j$  примут вид

$$\begin{aligned} & \varkappa_1 \left( \frac{\partial(M_{11}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} - M_{22} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} + 2 \frac{\partial(H_{12}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} + 2 \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} H_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} \right) + \\ & + \frac{\partial(Q_{11}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} - Q_{22} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} + \frac{\partial(S_{12}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} + S_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} = \\ & = -H_1^\circ H_2^\circ (p_1 + \varkappa_1 m_1); \\ & \varkappa_2 \left( \frac{\partial(M_{22}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} - M_{11} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} + 2 \frac{\partial(H_{12}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} + 2 \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} H_{12} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} \right) + \\ & + \frac{\partial(Q_{22}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} - Q_{11} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} + \frac{\partial(S_{12}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} + S_{12} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} = \\ & = -H_1^\circ H_2^\circ (p_2 + \varkappa_2 m_2); \end{aligned}$$
(7.57)

$$\begin{aligned} & \varkappa_1 Q_{11} + \varkappa_2 Q_{22} - \frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} \left( \frac{\partial}{\partial\beta_1} \frac{1}{H_1^\circ} \left( \frac{\partial(M_{11}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} - M_{22} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial(H_{12}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} + H_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} \right) + \frac{\partial}{\partial\beta_2} \frac{1}{H_2^\circ} \left( \frac{\partial(M_{22}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} - \right. \\ & \left. \left. - M_{11} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} + \frac{\partial(H_{12}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} + H_{12} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} \right) \right) = \\ & = p_3 + \frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} \left( \frac{\partial(m_1 H_2^\circ)}{\partial\beta_1} + \frac{\partial(m_2 H_1^\circ)}{\partial\beta_2} \right), \end{aligned}$$

где  $H_{12} = (M_{12} + M_{21})/2$ ;  $p_j$  — проекции вектора  $\mathbf{p}$  на направления ортов  $\mathbf{e}_j$ .

Для замыкания математической модели оболочки необходимо установить связь величин, определяющих деформации срединной поверхности оболочки, с усилиями и моментами. Считая материал оболочки *изотропным линейно упругим*, представим с учетом (7.48) *потенциальную энергию деформации* оболочки, приходящуюся на единицу площади срединной поверхности, в виде [27]

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{Eh}{2} \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1 - \nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_{12}^2/4)}{1 - \nu^2} + \\
 & + \frac{Eh^3}{24} \frac{(\Delta\kappa_1 + \Delta\kappa_2)^2 - 2(1 - \nu)(\Delta\kappa_1\Delta\kappa_2 - (\Delta\kappa_{12})^2)}{1 - \nu^2} - \\
 & - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Theta_1 - (\Delta\kappa_1 + \Delta\kappa_2)\Theta_2.
 \end{aligned} \tag{7.58}$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  — *продольный модуль упругости* и *коэффициент Пуассона* материала оболочки;

$$\Theta_1 = \frac{E\alpha^{(T)}}{1 - \nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(\beta_3) d\beta_3; \quad \Theta_2 = \frac{E\alpha^{(T)}}{1 - \nu} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta T(\beta_3)\beta_3 d\beta_3, \tag{7.59}$$

где  $\alpha^{(T)}$  — *температурный коэффициент линейного расширения* материала оболочки;  $\Delta T(\beta_3) = T - T_0$  — функция, задающая при фиксированных значениях  $\beta_i$  распределение по толщине оболочки отклонения температуры  $T$  от *температуры  $T_0$  естественного состояния*, при которой в оболочке отсутствовали деформации и напряжения.

Из (7.58) дифференцированием получим

$$\begin{aligned}
 Q_{11} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1} &= \frac{Eh(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)}{1 - \nu^2} - \Theta_1; & Q_{22} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_2} &= \frac{Eh(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)}{1 - \nu^2} - \Theta_1; \\
 M_{11} = \frac{\partial W}{\partial \Delta\kappa_1} &= \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta\kappa_1 + \nu\Delta\kappa_2}{1 - \nu^2} - \Theta_2; \\
 M_{22} = \frac{\partial W}{\partial \Delta\kappa_2} &= \frac{Eh^3}{12} \frac{\Delta\kappa_2 + \nu\Delta\kappa_1}{1 - \nu^2} - \Theta_2; \\
 S_{12} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{12}} &= \frac{Eh\gamma_{12}}{2(1 + \nu)}, & H_{12} = \frac{\partial W}{\partial \Delta\kappa_{12}} &= \frac{Eh^3}{6} \frac{\Delta\kappa_{12}}{1 + \nu}.
 \end{aligned} \tag{7.60}$$

Представленные соотношения математической модели можно свести к трем дифференциальным уравнениям относительно проекций  $u_j^\circ$  вектора  $\mathbf{u}^\circ$ , если через них с помощью (7.47)–(7.49) в (7.60) выразить деформации и изменения кривизны, а затем полученные соотношения для усилий и моментов подставить в (7.57). Другой путь связан с возможностью разрешить (7.60) относительно деформаций и изменений кривизны и подставить в (7.51). Тогда (7.51) и (7.57) составят систему из шести дифференциальных уравнений относительно усилий и моментов. Выбор того или иного пути зависит от заданных *граничных условий*.

Рассмотрим оболочку, срединная поверхность которой ограничена кусочно-гладким замкнутым контуром  $\Gamma$ . К этому контуру приложены погонные силы и моменты, векторы которых можно представить аналогично (7.52) в виде

$$\mathbf{Q}_i^\circ = Q_{ji}^\circ \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\mathbf{M}_1^\circ = -M_{12}^\circ \mathbf{e}_1 + M_{11}^\circ \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{M}_2^\circ = -M_{22}^\circ \mathbf{e}_1 + M_{21}^\circ \mathbf{e}_2,$$

где  $\mathbf{e}_j$  — орты системы *ортогональных криволинейных координат*, причем орт  $\mathbf{e}_3$  задает направление внешней нормали к срединной поверхности.

Тогда для *возможной работы* этих *внешних силовых факторов* получим [27]

$$\begin{aligned} \delta A^\circ &= \oint_{\Gamma} ((\mathbf{M}_2^\circ \cdot \delta \vartheta - \mathbf{Q}_2^\circ \cdot \delta \mathbf{u}) H_1^\circ d\beta_1 - (\mathbf{M}_1^\circ \cdot \delta \vartheta - \mathbf{Q}_1^\circ \cdot \delta \mathbf{u}) H_2^\circ d\beta_2) = \\ &= \oint_{\Gamma} ((M_{22}^\circ \delta \vartheta_2 + M_{21}^\circ \delta \vartheta_1 - Q_{22}^\circ \delta u_2^\circ - Q_{21}^\circ \delta u_1^\circ - Q_{23}^\circ \delta u_3^\circ) H_1^\circ d\beta_1 - \\ &- (M_{11}^\circ \delta \vartheta_1 + M_{12}^\circ \delta \vartheta_2 - Q_{11}^\circ \delta u_1^\circ - Q_{12}^\circ \delta u_2^\circ - Q_{13}^\circ \delta u_3^\circ) H_2^\circ d\beta_2). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Если вектор  $\mathbf{n}$  внешней нормали к контуру  $\Gamma$ , лежащий в плоскости ортов  $\mathbf{e}_i$ , составляет с ортом  $\mathbf{e}_1$  угол  $\theta$ , то, согласно рис. 7.18,

$$\begin{aligned} u_1^\circ &= u^{(n)} \cos \theta - u^{(s)} \sin \theta; & u_2^\circ &= u^{(n)} \sin \theta + u^{(s)} \cos \theta; \\ \vartheta_1 &= \vartheta^{(n)} \cos \theta - \vartheta^{(s)} \sin \theta; & \vartheta_2 &= \vartheta^{(n)} \sin \theta + \vartheta^{(s)} \cos \theta; \end{aligned} \quad (7.62)$$

$$H_1^\circ d\beta_1 = -\sin \theta ds; \quad H_2^\circ d\beta_2 = \cos \theta ds,$$

где  $ds$  — дифференциал длины дуги контура  $\Gamma$ ;  $u^{(n)}$ ,  $u^{(s)}$  и  $\vartheta^{(n)}$ ,  $\vartheta^{(s)}$  — проекции векторов перемещения  $u$  и угла поворота  $\vartheta$  соответственно на направления внешней нормали и касательной к контуру  $\Gamma$ .

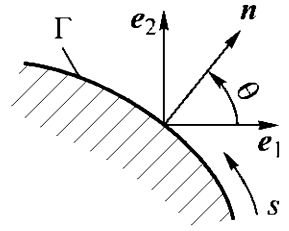


Рис. 7.18

Подставляя выражения (7.62) в (7.61) и обозначая

$$\begin{aligned} Q^{(n)} &= Q_{11}^{\circ} \cos^2 \theta + Q_{22}^{\circ} \sin^2 \theta + (Q_{12}^{\circ} + Q_{21}^{\circ}) \sin \theta \cos \theta; \\ Q_3^{(n)} &= Q_{13}^{\circ} \cos \theta + Q_{23}^{\circ} \sin \theta; \\ S^{(s)} &= (Q_{22}^{\circ} - Q_{11}^{\circ}) \sin \theta \cos \theta + Q_{12}^{\circ} \cos^2 \theta - Q_{21}^{\circ} \sin^2 \theta; \\ M^{(n)} &= M_{11}^{\circ} \cos^2 \theta + M_{22}^{\circ} \sin^2 \theta + (M_{12}^{\circ} + M_{21}^{\circ}) \sin \theta \cos \theta; \\ M^{(s)} &= (M_{22}^{\circ} - M_{11}^{\circ}) \sin \theta \cos \theta + M_{12}^{\circ} \cos^2 \theta - M_{21}^{\circ} \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (7.63)$$

находим возможную работу

$$\delta A^{\circ} = \oint_{\Gamma} (Q^{(n)} \delta u^{(n)} + Q_3^{(n)} \delta u_3^{\circ} + S^{(s)} \delta u^{(s)} - M^{(n)} \delta \vartheta^{(n)}) ds - \delta A_s^{\circ},$$

где с учетом (7.47) и (7.62)

$$\begin{aligned} \delta A_s^{\circ} &= \oint_{\Gamma} M^{(s)} \delta \vartheta^{(s)} ds = \oint_{\Gamma} M^{(s)} (\kappa_1 - \kappa_2) \delta u^{(n)} \sin \theta \cos \theta ds + \\ &+ \oint_{\Gamma} M^{(s)} (\kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta) \delta u^{(s)} ds + \oint_{\Gamma} M^{(s)} \frac{\partial \delta u_3^{\circ}}{\partial s} ds. \end{aligned}$$

После вычисления последнего интеграла по частям в предположении непрерывности и однозначности  $M^{(s)}$  и  $u_3^{\circ}$  на контуре  $\Gamma$  находим

$$\begin{aligned} \delta A^{\circ} &= \oint_{\Gamma} (Q^{(n)} - M^{(s)} (\kappa_1 - \kappa_2) \sin \theta \cos \theta) \delta u^{(n)} ds + \\ &+ \oint_{\Gamma} (S^{(s)} + M^{(s)} (\kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta)) \delta u^{(s)} ds + \\ &+ \oint_{\Gamma} \left( Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} \right) \delta u_3^{\circ} ds - \oint_{\Gamma} M^{(n)} \delta \vartheta^{(n)} ds. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Полагая наложенные по контуру  $\Gamma$  связи идеальными, т. е.  $\delta A^\circ = 0$ , на незакрепленных участках этого контура из (7.64) получаем четыре силовых граничных условия

$$\begin{aligned} Q^{(n)} - M^{(s)}(\kappa_1 - \kappa_2) \sin \theta \cos \theta &= 0; \\ S^{(s)} + M^{(s)}(\kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta) &= 0; \\ Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} &= 0; \quad M^{(n)} = 0, \end{aligned}$$

а на участках с жестким закреплением — четыре кинематических граничных условия

$$u^{(n)} = u^{(s)} = u_3^\circ = 0; \quad \vartheta^{(n)} = 0.$$

В общем случае в окрестности любой точки  $M \in \Gamma$  из каждой пары связанных между собой величин

$$\begin{aligned} (Q^{(n)} - M^{(s)}(\kappa_1 - \kappa_2) \sin \theta \cos \theta, u^{(n)}), \\ (S^{(s)} + M^{(s)}(\kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta), u^{(s)}), \\ (Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s}, u_3^\circ), \quad (M^{(n)}, \vartheta^{(n)}), \end{aligned}$$

имеющих смысл соответственно обобщенных сил (первая величина пары) и обобщенных перемещений (вторая величина), может быть задана лишь одна. При совпадении участка контура  $\Gamma$  с координатной линией  $\beta_1 = \text{const}$  имеем  $\theta = 0$  и пары обобщенных сил и перемещений с учетом (7.62) и (7.63) принимают вид

$$(Q_{11}, u_1^\circ), (Q_{12} + \kappa_2 M_{12}, u_2^\circ), \left( Q_{13} + \frac{\partial M_{12} / \partial \beta_2}{H_2^\circ}, u_3^\circ \right), (M_{11}, \vartheta_1),$$

а при совпадении с координатной линией  $\beta_2 = \text{const}$  —

$$(Q_{22}, u_2^\circ), (-Q_{21} - \kappa_1 M_{21}, u_1^\circ), \left( Q_{23} - \frac{\partial M_{21} / \partial \beta_1}{H_1^\circ}, u_3^\circ \right), (M_{22}, \vartheta_2).$$

Если контур  $\Gamma$  представляет собой замкнутую координатную линию (например, в случае сферического купола), то на таком

контуре выполняются условия периодичности, т.е. вдоль этой линии обобщенные перемещения непрерывны и однозначны.

С точки зрения рационального использования материала оболочки наиболее целесообразным является ее безмоментное состояние, когда распределение напряжений по ее толщине однородно. Для безмоментной математической модели оболочки при отсутствии распределенных и погонных моментов ( $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = \mathbf{0}$ ), согласно (7.55), имеем  $Q_{12} = Q_{21} = S_{12}$  и из (7.56) следует  $Q_{13} = Q_{23} = 0$ , а из (7.57) с учетом того, что  $H_{12} = 0$ , получаем три уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q_{11}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} - Q_{22} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} + \frac{\partial(S_{12}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} + S_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} &= -H_1^\circ H_2^\circ p_1; \\ \frac{\partial(Q_{22}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} - Q_{11} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} + \frac{\partial(S_{12}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} + S_{12} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} &= -H_1^\circ H_2^\circ p_2; \quad (7.65) \\ \kappa_1 Q_{11} + \kappa_2 Q_{22} &= p_3 \end{aligned}$$

относительно трех неизвестных  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$  и  $S_{12}$ . Теперь основными парами обобщенных сил и перемещений являются  $(Q_{11}, u_1^\circ)$ ,  $(S_{12}, u_2^\circ)$  и  $(Q_{22}, u_2^\circ)$ ,  $(S_{12}, u_1^\circ)$ .

После решения (7.65) из первых трех равенств (7.60) можно найти  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\gamma_{12}$ , а затем перейти к решению относительно  $u_i^\circ$ ,  $i = 1, 2$ , системы из первых двух уравнений (7.49) и уравнения

$$\gamma_{12} = \frac{H_2^\circ}{H_1^\circ} \frac{\partial}{\partial\beta_1} \left( \frac{u_2^\circ}{H_2^\circ} \right) + \frac{H_1^\circ}{H_2^\circ} \frac{\partial}{\partial\beta_2} \left( \frac{u_1^\circ}{H_1^\circ} \right),$$

полученного почленным сложением пятого и шестого равенств (7.49).

Для достаточно длинных цилиндрических и конических оболочек пренебрежение всеми моментами не всегда оправданно. В некоторых случаях можно пренебречь лишь частью моментов (например, положить  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  и  $H_{12} = 0$ ) и воспользоваться так называемой полубезмоментной теорией оболочек. В качестве примера рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку радиусом  $r_0$  и толщиной  $h$ . Орт  $\mathbf{e}_1$  направим по образующей, а орт  $\mathbf{e}_2$  — по касательной к срединной поверхности в окружном направлении. Тогда в цилиндрической системе координат  $\beta_1 = z$ ,  $\beta_2 = \varphi$  и  $H_1^\circ = 1$ ,  $H_2^\circ = r_0 = \text{const}$  (см. Д.7.3).

Положим  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{m} = \mathbf{0}$  и  $H_{12} = 0$ . Поскольку  $\partial H_2^0 / \partial \beta_1 \equiv 0$ , из первого уравнения (7.56) следует  $Q_{13} = 0$ , а из второго —

$$r_0 Q_{23} = \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi}.$$

Тогда уравнения (7.57) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{11}}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial S_{12}}{\partial \varphi} &= -p_1; \\ \frac{1}{r_0} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{12}}{\partial z} + \frac{Q_{23}}{r_0} &= -p_2; \\ \frac{Q_{22}}{r_0} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial Q_{23}}{\partial \varphi} &= p_3. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Для оболочки произвольной геометрической формы при однородной по толщине температуре в (7.60)  $\Theta_2 = 0$  и при  $M_{11} = 0$  из четвертого равенства (7.60) получим  $\Delta \varkappa_1 = -\nu \Delta \varkappa_2$ . Тогда пятое равенство в (7.60) примет вид

$$M_{22} = \frac{Eh^3 \Delta \varkappa_2}{12},$$

а первые три останутся без изменений. Из (7.49) с учетом (7.47) при  $\varkappa_1 = 0$  и  $\varkappa_2 = 1/r_0$  находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1^0}{\partial z}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \varphi} + u_3^0 \right); \\ \gamma_{12} = \omega_1 + \omega_2 &= \frac{1}{r_0} \frac{\partial u_1^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_2^0}{\partial z}; \quad \Delta \varkappa_2 = \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial \varphi^2} \right), \end{aligned}$$

а из (7.51) после исключения  $\Delta \varkappa_1$  и  $\Delta \varkappa_{12}$  —

$$r_0^3 \frac{\partial^2 \Delta \varkappa_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \varphi^2} + r_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} - r_0 \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial z \partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \varphi^2} - r_0 \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial z \partial \varphi} = 0.$$

Приведенных соотношений достаточно для нахождения всех неизвестных при условии их непрерывности и однозначности

по  $\varphi$  и задании соответствующих граничных условий на торцах оболочки.

Если у оболочки так называемая стрела подъема  $f$  (рис. 7.19) мала по сравнению с наименьшим линейным размером проекции оболочки на плоскость, проходящую через ее опорные точки, то говорят о **пологой оболочке** [27]. В этом случае мала величина  $\kappa_1 \kappa_2 H_1^\circ H_2^\circ$ , а при  $\kappa_1 \kappa_2 = 0$  условию Гаусса удовлетворяют коэффициенты  $H_1^\circ = 1$  и  $H_2^\circ = r$  полярной системы координат  $\beta_1 = r, \beta_2 = \varphi$ .

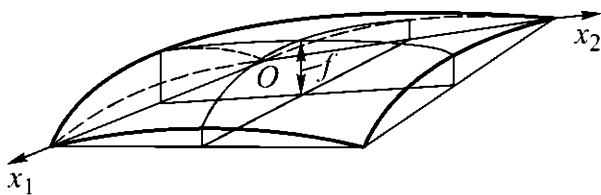


Рис. 7.19

Для полой оболочки в силу малости величин  $\kappa_1 Q_{13}, \kappa_2 Q_{23}$  допустимо не учитывать уравнения (7.56). При этом в силу малости величин  $\kappa_1 t_1$  и  $\kappa_2 t_2$  первые два уравнения (7.57) при  $p_1 = p_2 = 0$  примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q_{11}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} - Q_{22} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} + \frac{\partial(S_{12}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} + S_{12} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} &= 0; \\ \frac{\partial(Q_{22}H_1^\circ)}{\partial\beta_2} - Q_{11} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} + \frac{\partial(S_{12}H_2^\circ)}{\partial\beta_1} + S_{12} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} &= 0. \end{aligned}$$

Им удовлетворяет **функция напряжений**  $\tilde{F}(\beta_1, \beta_2)$ , вводимая соотношениями

$$\begin{aligned} Q_{11} \frac{H_2^\circ}{h} &= \frac{\partial}{\partial\beta_2} \left( \frac{\tilde{F}_{\beta_2}}{H_2^\circ} \right) + \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} \frac{\tilde{F}_{\beta_1}}{(H_1^\circ)^2}; \\ Q_{22} \frac{H_1^\circ}{h} &= \frac{\partial}{\partial\beta_1} \left( \frac{\tilde{F}_{\beta_1}}{H_1^\circ} \right) + \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} \frac{\tilde{F}_{\beta_2}}{(H_2^\circ)^2}; \\ S_{12} \frac{H_1^\circ H_2^\circ}{h} &= -\frac{\partial \tilde{F}_{\beta_1}}{\partial\beta_2} + \frac{\partial H_2^\circ}{\partial\beta_1} \frac{\tilde{F}_{\beta_2}}{(H_2^\circ)^2} + \frac{\partial H_1^\circ}{\partial\beta_2} \frac{\tilde{F}_{\beta_1}}{(H_1^\circ)^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{F}_{\beta_i} = \partial\tilde{F}/\partial\beta_i$ , причем

$$\kappa_1 Q_{11} + \kappa_2 Q_{22} = h \nabla_{\beta\kappa}^2 \tilde{F}; \quad Q_{11} + Q_{22} = h \nabla_{\beta}^2 \tilde{F}, \quad (7.67)$$

где использованы обозначения дифференциальных операторов

$$\begin{aligned}\nabla_{\beta\kappa}^2 &= \frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} \left( \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \kappa_2 \frac{H_2^\circ}{H_1^\circ} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left( \kappa_1 \frac{H_1^\circ}{H_2^\circ} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \right) \right); \\ \nabla_\beta^2 &= \frac{1}{H_1^\circ H_2^\circ} \left( \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{H_2^\circ}{H_1^\circ} \frac{\partial}{\partial \beta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left( \frac{H_1^\circ}{H_2^\circ} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \right) \right).\end{aligned}\quad (7.68)$$

В (7.47) допустимо пренебречь слагаемыми  $\kappa_1 u_1^\circ$  и  $\kappa_2 u_2^\circ$ , что упрощает в (7.49) выражения для  $\Delta \kappa_i$ , в (7.50) — слагаемыми  $\kappa_1 \omega_2$  и  $\kappa_2 \omega_1$ , а в первых двух уравнениях (7.51) — слагаемыми с множителями  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ . Тогда этим упрощенным уравнениям тождественно удовлетворяют упрощенные выражения для  $\Delta \kappa_i$  и  $\Delta \kappa_{12}$ , причем

$$\Delta \kappa_1 + \Delta \kappa_2 = -\nabla_\beta^2 u_3^\circ.$$

Принимая во внимание это равенство и подставляя с использованием упрощенных выражений для  $\Delta \kappa_i$  и  $\Delta \kappa_{12}$  при  $m_i \equiv 0$  в третье уравнение (7.57) соотношения для моментов из (7.60), с учетом (7.67) получаем [27]

$$D_\kappa \nabla_\beta^2 \nabla_\beta^2 u_3^\circ + h \nabla_{\beta\kappa}^2 \tilde{F} = p_3 - \nabla_\beta^2 \vartheta_2, \quad (7.69)$$

где  $D_\kappa = (Eh^3/12)/(1 - \nu^2)$  — цилиндрическая жесткость оболочки.

Уравнение (7.69) отражает условия равновесия элемента пологой оболочки. В нем можно учесть инерционные силы при движении этого элемента в направлении нормали к срединной поверхности, если в левую часть добавить слагаемое  $-\rho h \partial^2 u_3^\circ / \partial t^2$ . Подстановка в третье уравнение (7.51)  $\varepsilon_i$  из (7.49) и  $\gamma_{12} = \omega_1 + \omega_2$ , выраженных через усилия с использованием (7.60), приводит с учетом (7.67) к уравнению

$$h \nabla_\beta^2 \nabla_\beta^2 \tilde{F} - Eh \nabla_{\beta\kappa}^2 u_3^\circ = -(1 - \nu) \nabla_\beta^2 \vartheta_1, \quad (7.70)$$

которое вместе с (7.69) входит в математическую модель пологой оболочки.

Если для полой оболочки принять  $H_i^0 = 1$ , что равносильно выбору  $\beta_i = x_i$  в координатной плоскости  $x_1 O x_2$ , совпадающей с плоскостью, проходящей через опорные точки оболочки (см. рис. 7.19), то вместо (7.69) и (7.70) получим соответственно [25]

$$\begin{aligned} D_{\text{ц}} \nabla_2^2 \nabla_2^2 u_3^0 + h \left( \varkappa_2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} + \varkappa_1 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} \right) &= p_3 - \nabla_2^2 \vartheta_2; \\ h \nabla_2^2 \nabla_2^2 \tilde{F} - Eh \left( \varkappa_2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} + \varkappa_1 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \right) &= -(1 - \nu) \nabla_2^2 \vartheta_1, \end{aligned} \quad (7.71)$$

где  $\nabla_2^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$  — дифференциальный оператор Лапласа в прямоугольной системе координат  $O x_1 x_2$ , а функция напряжений теперь определена соотношениями

$$\frac{Q_{11}}{h} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2}; \quad \frac{Q_{22}}{h} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2}; \quad \frac{S_{12}}{h} = -\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (7.72)$$

Ранее при построении математической модели оболочки предполагалось, что ее прогибы малы по сравнению с толщиной  $h$ . **Оболочку**, прогибы которой сопоставимы с  $h$ , обычно называют **гибкой**. В этом случае необходимо учесть нелинейную зависимость деформации срединной поверхности оболочки от перемещения  $u_3^0$ , записав вместо (7.49) для полой оболочки [13]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \right)^2 + \varkappa_1 u_3^0; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \right)^2 + \varkappa_2 u_3^0; \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2}; \\ \Delta \varkappa_1 &= -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2}; \quad \Delta \varkappa_2 = -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2}; \\ \Delta \varkappa_{12} &= -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Тогда (7.71) следует заменить на уравнения [25]

$$D_{\text{ц}} \nabla_2^2 \nabla_2^2 u_3^{\circ} + h \left( \left( \kappa_2 - \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_2^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} + \left( \kappa_1 - \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_1^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} \right) + 2h \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} = p_3 - \nabla_2^2 \vartheta_2; \quad (7.74)$$

$$h \nabla_2^2 \nabla_2^2 \tilde{F} - Eh \left( \kappa_2 \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_1^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_2^2} + \left( \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) = -(1 - \nu) \nabla_2^2 \vartheta_1.$$

При жестком закреплении пологой оболочки по контуру  $\Gamma$ , ограничивающему ее срединную поверхность, граничные условия для прогиба  $u_3^{\circ}$  могут быть заданы непосредственно, а для функции напряжений  $\tilde{F}$  их следует выразить через равные нулю перемещения  $u_i^{\circ}$ . Например, на участке контура при  $x_1 = \text{const}$  в силу (7.73)  $\varepsilon_i = 0$  и с учетом (7.60) и (7.72)

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} = \frac{Q_{22}}{h} = -\Theta_1.$$

При шарнирном закреплении контура возможны несколько вариантов задания граничных условий. Так, в случае, изображенном на рис. 7.20, а,  $u_3^{\circ} = 0$ ,  $M_{11} = 0$  и  $Q_{11} = S_{12} = 0$ . Последнее равенство, согласно (7.72), равносильно равенству



а

б

Рис. 7.20

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

а из условия  $M_{11} = 0$  с учетом (7.60) и (7.73) следует, что

$$-D_{\text{ц}} \left( \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3^{\circ}}{\partial x_2^2} \right) - \Theta_2 = 0.$$

Поскольку  $\partial^2 u_3^0 / \partial x_2^2 = 0$ , получаем

$$\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} = \frac{\Theta_2}{D_{\text{ц}}}.$$

В случае, представленном на рис. 7.20, б,  $u_3^0 = 0$ ,  $\partial u_3^0 / \partial x_1 = 0$  и снова  $Q_{11} = S_{12} = 0$ .

На свободном участке контура при  $x_1 = \text{const}$

$$Q_{11} = 0, \quad Q_{12} + \kappa_2 M_{12} = 0, \quad Q_{13} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad M_{11} = 0.$$

Необходимо отметить, что при определенных условиях нагружения и закрепления оболочки возможна *потеря устойчивости* ее положения равновесия, соответствующая исходной форме срединной поверхности.

**Нагрузку**, при которой происходит изменение положения равновесия, принято называть **критической** [2].

## Дополнение 7.2. Модель пластинки постоянной толщины

*Срединная поверхность*  $S$  пластинки в недеформированном состоянии является частью плоскости, поэтому положение точки  $M \in S$  удобно определять в координатной плоскости  $x_1 O x_2$  прямоугольной системы координат  $O x_1 x_2 x_3$ , а для круглых и кольцевых пластинок — в полярной системе координат.

Перемещение  $w = u_3^0$  точек срединной поверхности в направлении оси  $O x_3$  при деформировании пластинки называют **прогибом пластинки**. Если прогибы пластинки сопоставимы с ее толщиной  $h$ , то говорят о **гибкой пластинке**. В этом случае для построения математической модели пластинки в рамках *гипотезы Кирхгофа* — *Лява* можно воспользоваться математической моделью *пологой оболочки* при значениях главных кривизн  $\kappa_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда (7.74) примет вид

$$D_{\text{ц}} \nabla_2^2 \nabla_2^2 w - h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} \right) + 2h \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= p_3 - \nabla_2^2 \Theta_2; \quad (7.75)$$

$$h \nabla_2^2 \nabla_2^2 \tilde{F} + Eh \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - Eh \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 = -(1 - \nu) \nabla_2^2 \Theta_1,$$

где  $D_{\text{ц}} = (Eh^3/12)/(1 - \nu^2)$  — **цилиндрическая жесткость**, связывающая *изгибающий момент* и кривизну срединной поверхности при *чистом изгибе* длинной прямоугольной пластинки [34];  $\nabla_2^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$  — дифференциальный оператор Лапласа в прямоугольной системе координат  $Ox_1x_2$ ;  $\tilde{F}$  — *функция напряжений*, определенная в (7.72);  $p_3$  — *распределенная нагрузка* в направлении оси  $Ox_3$ , приходящаяся на единицу площади срединной поверхности;  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  определены в (7.59) с заменой  $\beta_3$  на  $x_3$ ;  $E$  и  $\nu$  — *продольный модуль упругости* и *коэффициент Пуассона* материала пластинки.

В полярных координатах (7.75) имеет вид [34]

$$D_{\text{ц}} \nabla_{\text{ц}}^2 \nabla_{\text{ц}}^2 w - hL(w, \tilde{F}) = p_3 - \nabla_{\text{ц}}^2 \Theta_2; \quad (7.76)$$

$$h \nabla_{\text{ц}}^2 \nabla_{\text{ц}}^2 \tilde{F} + \frac{Eh}{2} L(w, w) = -(1 - \nu) \nabla_{\text{ц}}^2 \Theta_1,$$

где

$$\nabla_{\text{ц}}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

$$L(w, \tilde{F}) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \varphi^2} \right) +$$

$$+ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varphi} \right),$$

а  $L(w, w)$  можно получить заменой  $\tilde{F}$  на  $w$  в операторе  $L(w, \tilde{F})$ .

Если при деформировании пластинки срединную поверхность можно считать цилиндрической с образующей, параллельной, например, оси  $Ox_2$ , то  $\Theta_2$  и прогиб  $w$  будут зависеть лишь от  $x_1$ , а  $\partial^2 \tilde{F} / \partial x_1^2$  и  $\partial^2 \tilde{F} / \partial x_2^2$  при  $\Theta_1 \equiv 0$  примут постоянные значения [34]. Тогда второе уравнение (7.75) станет тождеством, а первое перейдет в ОДУ

$$D_{II} \frac{d^4 w}{dx_1^4} - \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} \frac{d^2 w}{dx_1^2} = p_3 - \frac{d^2 \Theta_2}{dx_1^2}.$$

Вместо (7.47) для углов поворота нормали к срединной поверхности при деформировании пластинки получим  $\vartheta_i = -\partial w / \partial x_i$ , а для деформаций пластинки вместо (7.48) —

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \Delta \kappa_1 x_3; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \Delta \kappa_2 x_3; \quad \varepsilon_{12} = \gamma_{12} + \Delta \kappa_{12} x_3, \quad (7.77)$$

где использованы обозначения (7.73), в которых  $\kappa_i = 0$ , а  $u_i^o$  — проекции вектора перемещения  $\mathbf{u}$  на направления осей  $Ox_i$ . В этих обозначениях для пластинки остаются справедливыми выражения (7.58) для потенциальной энергии деформации  $W$ , приходящейся на единицу площади срединной поверхности, и (7.60) для погонных усилий и моментов при  $S_{12} = Q_{12} = Q_{21}$  и  $H_{12} = M_{12} = M_{21}$ .

Возможную работу сил и моментов, которые приложены к произвольному кусочно-гладкому плоскому замкнутому контуру  $\Gamma$ , ограничивающему срединную поверхность пластинки, с учетом обозначений (7.62) и (7.63) можно, согласно (7.64) при  $\kappa_i = 0$ , представить в виде

$$\begin{aligned} \delta A^o = & \oint_{\Gamma} (Q^{(n)} \delta u^{(n)} + S^{(s)} \delta u^{(s)}) ds + \\ & + \oint_{\Gamma} \left( \left( Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} \right) \delta w - M^{(n)} \delta \vartheta^{(n)} \right) ds, \end{aligned} \quad (7.78)$$

где  $u^{(n)}$  и  $u^{(s)}$  — перемещения точек контура в его плоскости в направлениях  $\mathbf{n}$  нормали и  $\mathbf{s}$  касательной к нему;  $\vartheta^{(n)} = \partial w / \partial n$ .

При наложенных по контуру  $\Gamma$  идеальных связях  $\delta A^\circ = 0$ . В силу этого на незакрепленных участках контура  $\Gamma$  при произвольных значениях возможных перемещений  $\delta u^{(n)}$ ,  $\delta u^{(s)}$  точек контура и угла  $\delta \vartheta^{(n)}$  из (7.78) следуют четыре силовых граничных условия

$$Q^{(n)} = 0, \quad S^{(s)} = 0, \quad Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s} = 0 \quad \text{и} \quad M^{(n)} = 0,$$

а на участках с жестким закреплением — четыре кинематических граничных условия

$$u^{(n)} = u^{(s)} = w = 0; \quad \vartheta^{(n)} = 0.$$

В общем случае в окрестности любой точки  $M \in \Gamma$  из каждой пары связанных между собой обобщенных сил и обобщенных перемещений

$$(Q^{(n)}, u^{(n)}), \quad (S^{(s)}, u^{(s)}), \quad \left( Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s}, w \right), \quad (M^{(n)}, \vartheta^{(n)})$$

может быть задана лишь одна величина. При совпадении участка контура  $\Gamma$  с координатной линией  $x_1 = \text{const}$  в (7.62) и (7.63)  $\theta = 0$ . Тогда в линейном приближении получим пары

$$(Q_{11}, u_1^\circ), \quad (S_{12}, u_2^\circ), \quad \left( Q_{13} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2}, w \right), \quad (M_{11}, \vartheta_1),$$

а при совпадении с координатной линией  $x_2 = \text{const}$  —

$$(Q_{22}, u_2^\circ), \quad (S_{12}, u_1^\circ), \quad \left( Q_{23} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1}, w \right), \quad (M_{22}, \vartheta_2).$$

С уменьшением толщины  $h$  цилиндрическая жесткость  $D_{\text{ц}}$  пластинки резко уменьшается. При уменьшении жесткости при изгибе становится менее существенным и влияние перепада температуры по толщине пластинки, которое отражает слагаемое  $\Theta_2$ . Если в первом уравнении (7.75) положить  $D_{\text{ц}} = 0$  и  $\Theta_2 = 0$ , то оно перейдет в дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{p_3}{h} = 0, \quad (7.79)$$

для которого достаточно задать на контуре  $\Gamma$  одно *граничное условие*, т.е. для (7.79) и второго уравнения (7.75) получим следующие пары:

$$(Q^{(n)}, u^{(n)}), \quad (S^{(s)}, u^{(s)}), \quad (Q_3^{(n)}, w).$$

В итоге приходим к математической модели *мембраны*.

В случае малых по сравнению с  $h$  прогибах пластинки в левой части второго уравнения (7.75) можно пренебречь нелинейными слагаемыми. Тогда оно совпадет с линейным дифференциальным уравнением для *плоского напряженного состояния* и может быть решено независимо от первого уравнения (7.75) при граничных условиях, определяемых по парам величин  $(Q^{(n)}, u^{(n)})$  и  $(S^{(s)}, u^{(s)})$ . После его решения станут известными зависящие от  $\tilde{F}$  коэффициенты первого уравнения (7.75), которое теперь будет линейным с граничными условиями, установленными по парам величин

$$\left( Q_3^{(n)} + \frac{\partial M^{(s)}}{\partial s}, w \right) \quad \text{и} \quad (M^{(n)}, \vartheta^{(n)}).$$

Таким образом, допущение о малости прогибов равносильно линеаризации математической модели пластинки. При этом для  $\Delta \kappa_i$  и  $\Delta \kappa_{12}$  по-прежнему останутся справедливыми три последних равенства в (7.73), но выражения для деформаций срединной поверхности пластинки примут вид, соответствующий *соотношениям Коши*:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1^{\circ}}{\partial x_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2^{\circ}}{\partial x_2}; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_1^{\circ}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{\circ}}{\partial x_1}. \quad (7.80)$$

При малых *прогибах мембраны* в ее математической модели также можно ограничиться линейными зависимостями (7.80) для деформаций. Как и при малых прогибах пластинки, второе уравнение (7.75) после пренебрежения нелинейными слагаемыми может быть решено независимо от уравнения (7.79) при граничных условиях, следующих из пар величин  $(Q^{(n)}, u^{(n)})$  и  $(S^{(s)}, u^{(s)})$ . После его решения и вычисления зависящих от  $\tilde{F}$  коэффициентов в уравнении (7.79) решение последнего при граничных

условиях, определяемых парой величин  $(Q_3^{(n)}, \omega)$ , даст зависимость  $\omega(x_1, x_2)$  прогиба мембраны от координат точек ее срединной поверхности. Если плоское напряженное состояние этой поверхности соответствует равномерному натяжению  $N$  во всех направлениях, определяемых напряжениями  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = N/h$ , то

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_2^2} = \frac{N}{h}; \quad \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

и (7.79) переходит в уравнение равновесия (2.41) мембраны с равномерным натяжением  $N^*$  и малыми прогибами.

Если условия закрепления пластинки по ее контуру и приложенные к ней нагрузки позволяют определить во всех точках срединной поверхности усилия  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$  и  $S_{12}$ , не решая второе уравнение (7.75), то математическая модель пластинки включает лишь первое уравнение (7.75), которое с учетом (7.72) можно представить в виде

$$D_{\square} \nabla_2^2 \nabla_2^2 \omega - Q_{11} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - Q_{22} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} - 2S_{12} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} = p_3 - \nabla_2^2 \Theta_2. \quad (7.81)$$

Граничные условия для (7.81) следуют из пар величин  $(Q_3^{(n)} + \partial M^{(s)}/\partial s, \omega)$  и  $(M^{(n)}, \vartheta^{(n)})$ . Значения  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$  и  $S_{12}$  равны нулю, если при  $\Theta_1 = \text{const}$  края пластинки могут свободно смещаться в ее плоскости [34]. В этом случае вместо (7.81) получим

$$D_{\square} \nabla_2^2 \nabla_2^2 \omega = p_3 - \nabla_2^2 \Theta_2. \quad (7.82)$$

В рамках последней математической модели пластинки из (7.60) и (7.73) следует

$$M_{11} + M_{22} = -D_{\square} (1 + \nu) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) - 2\Theta_2.$$

Тогда, введя обозначение

$$\tilde{M} = \frac{M_{11} + M_{22}}{1 + \nu},$$

из (7.82) получим уравнение Пуассона

$$\nabla_2^2 \tilde{M} = -p_3 - \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla_2^2 \Theta_2,$$

которое может быть решено независимо в случае шарнирно опертой по многоугольному контуру  $\Gamma$  пластинки (в частности, прямоугольной пластинки), поскольку в этом случае на контуре определено граничное условие

$$\tilde{M} = 0. \quad (7.83)$$

Затем для такой пластинки можно решить еще одно уравнение Пуассона

$$\nabla_2^2 w = -\frac{1}{D_{\text{ц}}} \left( \tilde{M} + \frac{2\Theta_2}{1+\nu} \right)$$

с граничным условием  $w = 0$  на контуре  $\Gamma$ . Расщепление дифференциального уравнения с оператором  $\nabla_2^2 \nabla_2^2$  на два последовательно решаемых уравнения второго порядка существенно упрощает количественный анализ рассматриваемой математической модели пластинки.

Следует отметить, что, как и в случаях нагружения *стержней* и оболочек, при определенных условиях нагружения и закрепления пластинки возможна *потеря устойчивости* ее положения равновесия [2].

**Пример 7.8.** Используем (7.82) для нахождения прогиба прямоугольной пластинки со сторонами  $2a$  и  $2b$  и толщиной  $h$ , шарнирно опертой по контуру и нагруженной равномерным давлением  $p_0$ . Оси прямоугольной системы координат  $Ox_1x_2$  с началом в центре пластинки направим параллельно ее сторонам.

Решение уравнения Пуассона  $\nabla_2^2 \tilde{M} = -p_0$  для данного случая будем искать в виде двойного тригонометрического ряда Фурье

$$\tilde{M}(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{(2m-1)\pi x_1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{(2n-1)\pi x_2}{2b}$$

по четным функциям в силу того, что координатные оси являются в данной задаче одновременно и осями симметрии. Ясно,

что в таком виде  $\tilde{M}(x_1, x_2)$  удовлетворяет силовому граничному условию (7.83) при  $x_1 = \pm a$  и  $x_2 = \pm b$ .

Для нахождения коэффициентов  $A_{mn}$  предварительно необходимо представить давление  $p_0$  аналогичным рядом Фурье

$$p_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{(2m-1)\pi x_1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{(2n-1)\pi x_2}{2b}.$$

Поскольку  $\cos((2m-1)\pi x_1/(2a))$  и  $\cos((2n-1)\pi x_2/(2b))$  образуют ортогональные системы функций на отрезках соответственно  $[-a, a]$  и  $[-b, b]$ , коэффициенты Фурье этого ряда можно найти из равенства

$$\begin{aligned} p_0 \int_{-a}^a \cos \frac{(2m-1)\pi x_1}{2a} dx_1 \int_{-b}^b \cos \frac{(2n-1)\pi x_2}{2b} dx_2 = \\ = a_{mn} \int_{-a}^a \cos^2 \frac{(2m-1)\pi x_1}{2a} dx_1 \int_{-b}^b \cos^2 \frac{(2n-1)\pi x_2}{2b} dx_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2(2m-1)(2n-1)}.$$

Подставляя ряды для  $\tilde{M}$  и  $p_0$  в уравнение Пуассона и приравнявая слагаемые с одинаковыми произведениями косинусов, получаем

$$A_{mn} = -\frac{4a_{mn}}{\pi^2 \left( \frac{(2m-1)^2}{a^2} + \frac{(2n-1)^2}{b^2} \right)};$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}(x_1, x_2) = -\frac{64p_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{(2m-1)\pi x_1}{2a} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2n-1) \left( \frac{(2m-1)^2}{a^2} + \frac{(2n-1)^2}{b^2} \right)} \cos \frac{n\pi x_2}{2b}. \quad (7.84) \end{aligned}$$

Решение уравнения Пуассона  $\nabla_2^2 w = -\tilde{M}/D_{\text{ц}}$  также представим аналогичным рядом

$$w(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{(2m-1)\pi x_1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{(2n-1)\pi x_2}{2b},$$

подстановка которого в это уравнение с учетом (7.84) и полученных соотношений для коэффициентов  $A_{mn}$  и  $a_{mn}$  позволяет вычислить  $B_{mn}$ . В итоге для прогиба пластинки находим

$$w(x_1, x_2) = \frac{256\rho_0 b^4}{\pi^6 D_{\text{ц}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1) \frac{\pi x_1}{2a}}{2m-1} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1) \frac{\pi x_2}{2b}}{(2n-1) \left( (2n-1)^2 + (2m-1)^2 b^2/a^2 \right)^2}. \quad (7.85)$$

Полученный двойной тригонометрический ряд Фурье для функции  $w(x_1, x_2)$  достаточно быстро сходится. Например, если ограничиться одним слагаемым при  $m = n = 1$ , то для квадратной пластинки ( $a = b$ ) в ее центре

$$w(0, 0) = \frac{64\rho_0 a^4}{\pi^6 D_{\text{ц}}} = 0,06656 \frac{\rho_0 a^4}{D_{\text{ц}}},$$

что только на 2,5% больше, чем результат суммирования ряда (7.85), обеспечивающего то же число верных знаков. Однако полученные из (7.85) двойным дифференцированием ряды для изгибающих и крутящего моментов сходятся не столь быстро, что усложняет анализ напряженно-деформированного состояния пластинки.

Анализ напряженно-деформированного состояния пластинки можно упростить, если ряд в (7.85) просуммировать по одному из индексов. Например, суммирование по  $n$  дает [34]

$$w(x_1, x_2) = \frac{64\rho_0 a^4}{\pi^5 D_{\text{ц}}} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\sin(2m-1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x_1}{a} + 1 \right)}{(2m-1)^5} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{2 + \beta_m \operatorname{th} \beta_m}{2 \operatorname{ch} \beta_m} \operatorname{ch} \beta_m \frac{x_2}{b} + \frac{\beta_m x_2}{2b \operatorname{ch} \beta_m} \operatorname{sh} \beta_m \frac{x_2}{b} \right) \right), \quad (7.86)$$

где

$$\beta_m = (2m - 1) \frac{\pi b}{2a}.$$

Для дальнейшего упрощения используем известное равенство [8]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \sin(2m-1)z}{(2m-1)^2} = \frac{\pi z}{4}.$$

При  $z \in [-\pi/2, \pi/2]$  ряд в левой части этого равенства сходится равномерно [5], и поэтому его допустимо почленно интегрировать на данном отрезке. После трехкратного интегрирования с учетом равенств [8]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}; \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^5} = \frac{\pi^5}{1536}$$

получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos(2m-1)z}{(2m-1)^5} = \frac{\pi z^4}{96} - \frac{\pi^3 z^2}{64} + \frac{5\pi^5}{1536}. \quad (7.87)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sin(2m-1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x_1}{a} + 1 \right) &= \sin(2m-1) \frac{\pi x_1}{2a} \cos(2m-1) \frac{\pi}{2} + \\ &+ \sin(2m-1) \frac{\pi}{2} \cos(2m-1) \frac{\pi x_1}{2a} = \\ &= (-1)^{m+1} \cos(2m-1) \frac{\pi x_1}{2a}, \end{aligned}$$

из сопоставления (7.86) и (7.87) следует, что при замене в (7.87)  $z$  на  $\pi x_1 / (2a)$  (7.86) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega(x_1, x_2) &= \frac{5p_0 a^4}{24D_{\text{II}}} \left( \frac{x_1^4}{5a^4} - \frac{6x_1^2}{5a^2} + 1 \right) - \\ &- \frac{64p_0 a^4}{\pi^5 D_{\text{II}}} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^5} \cos(2m-1) \frac{\pi x_1}{2a} \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{2 + \beta_m \operatorname{th} \beta_m}{2 \operatorname{ch} \beta_m} \operatorname{ch} \beta_m \frac{x_2}{b} + \frac{\beta_m x_2}{2b \operatorname{ch} \beta_m} \operatorname{sh} \beta_m \frac{x_2}{b} \right) \right). \quad (7.88) \end{aligned}$$

Отсюда для прогиба в центре пластинки получим

$$\omega(0, 0) = \frac{5p_0a^4}{24D_{\text{ц}}} - \frac{64p_0a^4}{\pi^5D_{\text{ц}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^5} \frac{2 + \beta_m \operatorname{th} \beta_m}{2 \operatorname{ch} \beta_m},$$

причем учет лишь одного слагаемого ряда приводит к значению  $\omega(0, 0) = 0,06496p_0a^4/D_{\text{ц}}$ , которое совпадает с результатом суммирования ряда (7.88), обеспечивающего то же число верных знаков. Используя (7.88), можно найти изгибающие и крутящий моменты и затем вычислить напряжения, вызванные действующей на пластинку нагрузкой. ♦

**Пример 7.9.** Для круглой пластинки, шарнирно опертой на контур в виде окружности радиусом  $r_0$ , граничное условие (7.83) несправедливо, так как значения вторых производных прогиба вдоль контура и по касательной к нему различны. Для нахождения прогиба такой пластинки приходится решать непосредственно (7.82). Рассмотрим путь решения этого уравнения при нагружении круглой пластинки толщиной  $h$  равномерным давлением  $p_0$ . В этом случае изгибающие моменты и прогиб  $\omega(r)$  пластинки зависят лишь от радиальной координаты  $r$ , а оператор Лапласа и (7.82) принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} \nabla_2^2 &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right); \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\omega}{dr} \right) \right) \right) &= \frac{p_0}{D_{\text{ц}}}. \end{aligned} \quad (7.89)$$

На контуре при  $r = r_0$  имеем  $\omega(r_0) = 0$  и равенство нулю изгибающего момента, действующего в радиальном направлении, т. е.

$$M_r(r_0) = -D_{\text{ц}} \left( \frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \Big|_{r=r_0} = 0,$$

а при  $r = 0$  в центре пластинки  $\omega(0)$  и  $M_r(0)$  ограничены. Последовательным интегрированием (7.89) получаем

$$\omega(r) = \frac{p_0r^4}{64D_{\text{ц}}} + \frac{C_1r^2(\ln r - 1)}{4} + \frac{C_2r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4. \quad (7.90)$$

Из ограниченности  $w(0)$  следует, что  $C_3 = 0$ . Вычисляем

$$\frac{M_r(0)}{D_{\text{ц}}} = \frac{(3 + \nu)p_0 r^2}{16D_{\text{ц}}} + \frac{C_1(1 + \nu)(2 \ln r - \nu)}{4} + \frac{2C_2}{1 + 2\nu} \Big|_{r=0}.$$

В силу ограниченности  $M_r(0)$  получаем  $C_1 = 0$ . Теперь из условия  $M_r(r_0) = 0$  находим

$$C_2 = -\frac{(3 + \nu)p_0 r_0^2}{8D_{\text{ц}}(1 + \nu)},$$

а из условия  $w(r_0) = 0$  —

$$C_4 = -\frac{C_2 r_0^2}{4} - \frac{p_0 r_0^4}{64D_{\text{ц}}}.$$

В итоге (7.90) принимает вид

$$w(r) = \frac{p_0(r_0^2 - r^2)}{64D_{\text{ц}}} \left( \frac{(3 + \nu)r_0^2}{1 + \nu} - r^2 \right). \quad (7.91)$$

Используя (7.91), находим изгибающие моменты в радиальном и окружном направлениях соответственно

$$M_r(r) = -D_{\text{ц}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{p_0(3 + \nu)(r_0^2 - r^2)}{16};$$

$$M_{\varphi}(r) = -D_{\text{ц}} \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{p_0((3 + \nu)r_0^2 - (1 + 3\nu)r^2)}{16}.$$

В центре пластинки изгибающие моменты совпадают и достигают наибольшего значения  $p_0(3 + \nu)r_0^2/16$ , которому соответствует наибольшее абсолютное значение напряжения

$$\frac{6M_r(0)}{h^2} = \frac{3(3 + \nu)p_0 r_0^2}{8h^2}. \quad \blacklozenge$$

Отметим, что математическая модель пластины переменной толщины требует более тонких и сложных рассуждений и выходит за рамки данного учебного пособия.

### Дополнение 7.3. Ортогональные криволинейные координаты

Обозначим через  $\beta_i$  параметры, которые описывают три независимых семейства поверхностей, заданных уравнениями

$$\beta_i(\mathbf{x}) = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор точки с координатами  $x_j$  в прямоугольной системе координат с осями  $Ox_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Если через каждую точку пространства проходит лишь одна поверхность из каждого семейства, то при условии, что якобиан  $\det(\partial\beta_i/\partial x_j) \neq 0$ , положение этой точки можно однозначно определить тремя значениями параметров  $\beta_i$ , соответствующими трем проходящим через нее поверхностям и называемыми ее **криволинейными координатами**. Три **линии** пересечения координатных поверхностей, которые проходят через эту точку, также называют **координатными**. Например, пересечение поверхностей  $\beta_2 = \text{const}$  и  $\beta_3 = \text{const}$  образует координатную линию  $\beta_1$ , вдоль которой изменяется только координата  $\beta_1$ .

Выполнение условия  $\det(\partial\beta_i/\partial x_j) \neq 0$  позволяет радиус-вектор любой точки представить в виде функции криволинейных координат, т. е.  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ . Вектор  $\mathbf{x}_i = \partial\mathbf{x}/\partial\beta_i$  параллелен касательной в этой точке к координатной линии  $\beta_i$ . В дальнейшем будем полагать, что рассматриваемые три семейства поверхностей всюду пересекаются между собой под прямыми углами. Это означает, что три нормали к этим поверхностям в любой точке взаимно перпендикулярны, а каждая из нормалей касательна к соответствующей координатной линии, т. е. параллельна соответствующему вектору  $\mathbf{x}_i$ . С каждой точкой свяжем репер  $\{\mathbf{e}_i\}$  системы криволинейных координат, орты  $\mathbf{e}_i$  которого параллельны векторам  $\mathbf{x}_i$ , направлены в сторону возрастания  $\beta_i$  и образуют правую тройку векторов. В этом случае **криволинейные координаты** называют **ортогональными**, а модули  $H_j = |\mathbf{x}_j|$  векторов  $\mathbf{x}_j$  — **коэффициентами Ламе**.

При переходе от точки к точке репер  $\{\mathbf{e}_i\}$  изменяет свое положение, а его орты в общем случае изменяют направления в отли-

чие от репера  $\{\mathbf{e}_k^\circ\}$  неподвижной прямоугольной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  с ортами  $\mathbf{e}_k^\circ$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Поскольку  $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_k^\circ \partial x_k / \partial \beta_i$ , то

$$\mathbf{e}_\nu = \frac{\mathbf{x}_\nu}{H_\nu} = \frac{\mathbf{e}_k^\circ}{H_\nu} \frac{\partial x_k}{\partial \beta_\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3 \quad (7.92)$$

(по повторяющемуся греческому индексу  $\nu$  не суммировать!).

Система ортогональных криволинейных координат может быть образована совокупностью попарно пересекающихся координатных линий  $\beta_1 = \text{const}$  и  $\beta_2 = \text{const}$ , принадлежащих некоторой поверхности  $S$ , которая задана векторной функцией  $\mathbf{x}^\circ(\beta_1, \beta_2)$ , и координатой  $\beta_3$ , отсчитываемой в направлении нормали к этой поверхности. **Поверхность  $S$**  называют **гладкой**, если функция  $\mathbf{x}^\circ(\beta_1, \beta_2)$  дважды непрерывно дифференцируема по своим аргументам. Векторы  $\mathbf{x}_n^\circ = \partial \mathbf{x}^\circ / \partial \beta_n$ ,  $n = 1, 2$ , совпадают по направлению с касательными к соответствующим координатным линиям и определяют единичный вектор  $\mathbf{n}$  нормали к поверхности в точке  $M \in S$  с криволинейными координатами  $\beta_n$ :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_1^\circ}{|\mathbf{x}_1^\circ|} \times \frac{\mathbf{x}_2^\circ}{|\mathbf{x}_2^\circ|}.$$

Кривую при пересечении поверхности плоскостью, параллельной  $\mathbf{n}$ , называют **нормальным сечением поверхности** в этой точке. Кривизну  $\kappa$  этой кривой считают положительной, если  $\mathbf{n}$  сонаправлен главному нормальному вектору кривой [14]. Известно [17], что при повороте этого сечения вокруг вектора  $\mathbf{n}$  величина  $\kappa$  достигает своего максимального и минимального значений, называемых **главными кривизнами поверхности**, а ее нормальные сечения ортогональны и их называют **линиями кривизны** в точке  $M \in S$ . Радиусы кривизны этих линий называют **главными радиусами кривизны поверхности** в этой точке.

Если в каждой точке  $M$  гладкой срединной поверхности  $S$  в качестве координатных линий  $\beta_n$  выбрать линии кривизны, то криволинейные координаты станут ортогональными. С этой точкой свяжем репер  $\{\mathbf{e}_j\}$ , орты  $\mathbf{e}_j$  которого образуют правую тройку векторов:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_1^\circ}{H_1^\circ}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}_2^\circ}{H_2^\circ}; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2,$$

где  $H_n^\circ = |\mathbf{x}_n^\circ|$ .

Если главные кривизны поверхности в точке  $M \in S$  обозначить  $\varkappa_1(M)$  и  $\varkappa_2(M)$ , то для любой точки с координатами  $\beta_j$  для коэффициентов Ламе получим

$$H_1 = H_1^\circ(1 + \varkappa_1\beta_3); \quad H_2 = H_2^\circ(1 + \varkappa_2\beta_3); \quad H_3 = 1. \quad (7.93)$$

Из тождества

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_3}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_3}{\partial \beta_2 \partial \beta_1}$$

следуют **условия Кодацци**

$$\frac{\partial(\varkappa_1 H_1^\circ)}{\partial \beta_2} = \varkappa_2 \frac{\partial H_1^\circ}{\partial \beta_2}; \quad \frac{\partial(\varkappa_2 H_2^\circ)}{\partial \beta_1} = \varkappa_1 \frac{\partial H_2^\circ}{\partial \beta_1}, \quad (7.94)$$

а из тождества

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_1}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_1}{\partial \beta_2 \partial \beta_1}$$

следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \left( \frac{1}{H_1^\circ} \frac{\partial H_2^\circ}{\partial \beta_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left( \frac{1}{H_2^\circ} \frac{\partial H_1^\circ}{\partial \beta_2} \right) = -\varkappa_1 \varkappa_2 H_1^\circ H_2^\circ, \quad (7.95)$$

называемое **условием Гаусса**. Эти условия выполняются в каждой точке гладкой поверхности.

Орт  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_z$  цилиндрической системы координат параллелен оси концентрических цилиндрических поверхностей, тогда как орты  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$  и  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_r$  направлены соответственно по касательным к концентрическим окружностям и их радиусам. При совпадении начала этой системы координат с началом прямоугольной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  и выборе  $\beta_1 = z = x_1$ ,  $\beta_2 = \varphi$  и  $\beta_3 = r$  (где  $\varphi$  — угол, обычно отсчитываемый в плоскости  $x_2Ox_3$  от оси  $Ox_3$ ;  $r$  — расстояние от оси  $Ox_1$ ) коэффициенты Ламе принимают вид

$$H_1^\circ = H_2^\circ = 1; \quad H_2^\circ = H_\varphi^\circ = r; \quad H_3^\circ = H_r^\circ = 1.$$

Рассмотрено построение ортогональных криволинейных координат, которые удобно использовать при решении задач, связанных с оболочками сложной геометрической формы.

## Вопросы и задачи

**7.1.** Постройте распределение погонных сил вдоль оболочки, рассмотренной в примере 7.4, для случая ее крепления в сечении стыка обечайки с нижним днищем.

**7.2.** Проведите вывод формул для погонных сил в примере 7.5.

**7.3.** Постройте распределение погонных сил вдоль оболочки, рассмотренной в примере 7.5, для случая ее крепления в сечении стыка обечайки с днищем.

**7.4.** Проведите подробный вывод формул (7.31).

**7.5.** Убедитесь, что при шарнирном опирании пластинки на многоугольный контур  $\Gamma$  справедливо граничное условие (7.83).

**7.6.** Проведите подробные выкладки при переходе от (7.86) к (7.88) в примере 7.8.

**7.7.** Найдите зависимости от радиальной координаты прогиба нагруженной равномерным давлением круглой пластинки (см. пример 7.9) и возникающих изгибающих моментов при условии жесткого защемления пластинки по контуру.

## Литература

1. *Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 336 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VIII).
2. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
3. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
5. *Власова Е.А.* Ряды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 612 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IX).
6. *Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 700 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIII).
7. *Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д.* Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 492 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. *Демидов С.П.* Теория упругости. М.: Высш. шк., 1979. 432 с.

10. *Зарубин В.С.* Прикладные задачи термopрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
11. *Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н.* Интегральное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 528 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VI).
12. *Зарубин В.С.* Математическое моделирование в технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XXI, заключительный).
13. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
14. *Иванова Е.Е.* Дифференциальное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. II).
15. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 388 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. III).
16. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Линейная алгебра. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 336 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IV).
17. *Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н.* Дифференциальное исчисление функций многих переменных. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. V).
18. *Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др.; под общ. ред. К.С. Колесникова.* М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 736 с. (Сер. Механика в техническом университете: Т. 1)

19. *Малинин Н.Н.* Кто есть кто в сопротивлении материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 248 с.
20. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
21. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. 368 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XII).
22. *Машиностроение.* Энциклопедия / Ред. совет: К.В. Фролов и др. Т. I–1. Математика / У.Г. Пирумов, В.С. Зарубин, А.П. Крищенко и др.; под общ. ред. У.Г. Пирумова, В.С. Зарубина. М.: Машиностроение, 2003. 992 с.
23. *Морозова В.Д.* Введение в анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. I).
24. *Новацкий В.* Теория упругости: пер. с польск. М.: Мир, 1975. 872 с.
25. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 696 с.
26. *Основы* строительной механики ракет / Л.И. Балабух, К.С. Колесников, В.С. Зарубин и др. М.: Высш. шк., 1969. 496 с.
27. *Подстригач Я.С., Швец Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка, 1978. 344 с.
28. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.
29. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
30. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

31. *Работнов Ю.Н.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1962. 456 с.
32. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
33. *Светлицкий В.А.* Механика стержней: в 2 т. Т.1. М.: Высш. шк., 1987. 320 с.
34. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки: пер. с англ. М.: Наука, 1966. 636 с.
35. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости: пер. с англ. М.: Наука, 1979. 500 с.
36. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1996. 368 с.
37. *Феодосьев В.И.* Прочность теплонапряженных узлов жидкостных ракетных двигателей. М.: Оборонгиз, 1963. 224 с.
38. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с. (Сер. Механика в техническом университете; Т. 2).
39. *Физический энциклопедический словарь* / Гл. ред. А.М. Прохоров. Ред. кол. Д.М. Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 928 с.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## **А**налогия:

- гидромеханическая 106
- мембранная 107
- песочная 110
- пленочная 107

## **Б**алка 131

- консольная 131

## **В**ектор:

- Дарбу 67
- перемещения 25

## **Г**ипотеза:

- Кирхгофа — Лява 237
- кинематическая 4
- плоских сечений 56

## **Д**авление гидростатическое 24

## Девиатор 24

## Депланация 99

## Деформации главные 27

## Деформация 25

- возможная 54
- линейная 27
- температурная 32
- объемная 28
- температурная 31
- остаточная 34
- продольная 27
- сдвига 27
- угловая 29

## Деформирование 25

## Диаграмма:

- растяжения 33
- напряженного состояния круговая 43

## **Ж**есткость:

- при изгибе 70
- при кручении 95
- цилиндрическая 229, 256
- Жидкость несжимаемая идеальная 105

## **З**адача:

- статически неопределимая 145
- статически определимая 145
- Заделка жесткая 137
- Закон Гука 30
- обобщенный 28

## **И**згиб:

- поперечный 131
- стержня 124
- чистый 124

## Инвариант тензора:

- деформации 27
- напряжений 18

## Интеграл:

- Мора 163
- эллиптический второго рода 76
- – – полный 76
- эллиптический первого рода 74
- – – полный 74

## **К**омпоненты тензора 16

## Конфигурация:

- актуальная 25
- начальная 25
- сплошной среды 25

## Координаты:

- криволинейные 267
- ортогональные 267
- обобщенные 47
- независимые 49

## Коэффициент:

- Пуассона 30
- запаса по прочности 60
- по текучести 37
- поперечного сужения 30
- температурный линейного расширения 32
- объемного расширения 31

## Коэффициенты Ламе 267

## Кривизна поверхности главная 268

## Критерий:

- пластичности 37
- Губера — Мизема 41
- Треска — Сен-Венана 41

## Круг Мора 43

## Кручение 93

**Л**иния:

- координатная 267
- кривизны 268
- осевая стержня 63
- тока 107
- цепная 85

**М**атериал:

- идеально упруго-пластический 97
- изотропный 28
- линейно упругий 31

## Матрица поворота репера 65

## Мембрана 86

## Модель математическая 4

## Модуль:

- Юнга 30
- сдвига 30
- сжатия всестороннего 31
- упругости объемный 31
- продольный 30
- эллиптического интеграла 75

## Момент:

- изгибающий 70
- инерции сечения осевой 63
- – – главный 63
- – полярный 63
- – центробежный 63
- крутящий 70
- погонный 229
- сечения статический 62
- сопротивления полярный 97
- при изгибе 127

**Н**агрузка критическая 255

## Напряжение:

- допускаемое 60
- касательное 14
- октаэдрическое 38
- нормальное 14
- окружное 202
- осевое 202
- полное 13
- радиальное 199
- растягивающее 16
- сжимающее 16
- среднее 24
- тангенциальное 199

## Напряжения главные 17

- касательные 40

## Натяжение поверхностное 90

## Нить 76

- Обечайка** 218
- Оболочка** 4
- вращения 208
  - безмоментная 212
  - гибкая 253
  - пологая 251
  - постоянной толщины 198
  - сферическая 198
  - цилиндрическая круговая 202
- Опора:**
- шарнирная 137
  - неподвижная 171
  - подвижная 171
- Оси:**
- главные тензора малой деформации 27
  - – напряжений 17
  - сечения центральные 63
  - главные 63
- Ось сечения нейтральная** 126
- Перемещение:**
- возможное 48
  - обобщенное 54
- Пластина** 4
- Пластинка** 4
- гибкая 255
- Пластичность** 36
- Плотность сил:**
- объемных 12
  - поверхностных 13
- Площадка текучести** 35
- Поверхность:**
- гладкая 268
  - срединная 4
- Ползучесть** 36
- Последствие** 36
- Потеря устойчивости** 72
- Правило парности касательных напряжений** 17
- Предел:**
- пропорциональности 34
  - прочности 35
  - текучести 34
  - при чистом сдвиге 40
- Принцип:**
- Даламбера 50
  - Сен-Венана 58
  - возможных перемещений 50
  - независимости действия сил 28, 167
- Прогиб:**
- балки 132
  - мембраны 86
  - оболочки 238
  - пластинки 255
  - стержня 127
- Процесс деформации** 25
- Работа возможная** 48
- Радиусы кривизны поверхности главные** 268
- Разгрузка** 32
- Рама** 170
- плоскопространственная 170
  - пространственная 170
- Раскрытие статической неопределимости** 174
- Реакция:**
- опоры 137
  - связи 48
- Связь** 48
- внешняя 171
  - внутренняя 171
  - голономная 48
  - стационарная 48
  - идеальная 48
- Сечение:**
- поверхности нормальное 268
  - поперечное 55

- Сила:
- критическая первая 72
  - обобщенная 49
  - объемная 12
  - перерезывающая 138
  - поверхностная 12
  - погонная 229
  - сосредоточенная 13
  - эйлерова 72
- Символ:
- Кронекера 20
  - Леви-Чивиты 66
- Система:
- кинематически изменяемая 148
  - стержневая 170
    - основная 174
    - плоскопространственная 170
    - пространственная 170
    - статически неопределимая 171
    - статически определимая внешне 171
    - эквивалентная 174
- Скорости обобщенные 48
- Соотношения Коши 26
- Сопrotивление временное 35
- Состояние:
- деформированное 26
  - напряженно-деформированное 28
  - напряженное 15
    - всестороннего сжатия 24
    - двухосное 19
    - одноосное 19
    - однородное 19, 24
    - плоское 19
    - трехосное 19
    - чистого сдвига 29
- Способ Верещагина 163
- Способность несущая при изгибе 129
- Среда сплошная 12
- Сталь:
- высокоуглеродистая 36
  - низкоуглеродистая 34
- Степень статической неопределимости 171
- Стержень 4
  - естественно закрученный 56
  - криволинейный 55
  - прямолинейный 55
- Схема расчетная 3
- Т**емпература естественного состояния 245
- Тензор:
- второго ранга единичный 18
  - изотропный 24
  - малой деформации 26
  - напряжений 16
  - шаровой 24
- Теорема:
- Бетти – Максвелла – Рэлея 168
  - Кастильяно 152
  - взаимности перемещений 168
    - работ 168
- Траектория касательных напряжений 107
- У**длинение:
- относительное 26
  - при разрыве 35
- Узел фермы 170
- Упрочнение 35
- Упругость 32
  - линейная 32
  - нелинейная 34
- Уравнение:
- бигармоническое 133
  - неразрывности 106

## Уравнения:

движения 53

канонические метода сил 179

равновесия 52

– стержня 69

## Условие Гаусса 269

## Условия:

Кодацци 269

граничные кинематические 54

– силовые 69, 102

**Ф**актор силовой 54

внешний 64

внутренний 67

– кососимметричный 180

– симметричный 180

искомый 174

## Ферма 170

## Формулы Серре — Френе 66

## Функция:

Дирака 68

депланации 101

напряжений 251

– касательных 102

тока 105

**Х**рупкость 36**Ц**ентр тяжести сечения 63

Циркуляция вектора 107

**Ч**астица сплошной среды 24

## Число:

связей необходимое 171

степеней свободы 49

**Ш**арнир пластический 148

Шейка 35

**Э**ластика Эйлера 73

Энергия деформации потенциальная 32

Эффект краевой 235

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Основные обозначения . . . . .	8
<b>1. Напряжения и деформации в твердом теле . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1. Силы, действующие на твердое тело . . . . .	12
1.2. Напряженное состояние твердого тела . . . . .	14
1.3. Деформированное состояние твердого тела . . . . .	24
1.4. Связь деформированного и напряженного состояний . . . . .	28
1.5. Критерии пластичности . . . . .	37
Вопросы и задачи . . . . .	45
<b>2. Принцип возможных перемещений . . . . .</b>	<b>47</b>
2.1. Предварительные сведения . . . . .	47
2.2. Обобщение принципа возможных перемещений . . . . .	51
2.3. Простейшие примеры применения принципа возможных перемещений . . . . .	55
Дополнение 2.1. Математическая модель криволинейного стержня . . . . .	62
Дополнение 2.2. Эластика Эйлера . . . . .	73
Дополнение 2.3. Математические модели нити и мембраны . . . . .	76
Вопросы и задачи . . . . .	91
<b>3. Кручение прямолинейных стержней . . . . .</b>	<b>93</b>
3.1. Кручение осесимметричных стержней . . . . .	93
3.2. Деформация поперечного сечения стержня . . . . .	99
3.3. Гидромеханическая, мембранная и песочная аналогии . . . . .	105
3.4. Примеры применения аналогий . . . . .	110
Дополнение 3.1. Кручение стержня с прямоугольным поперечным сечением . . . . .	119
Вопросы и задачи . . . . .	122
<b>4. Изгиб стержней и балок . . . . .</b>	<b>124</b>
4.1. Чистый изгиб прямолинейного стержня . . . . .	124
4.2. Изгиб балок . . . . .	131
4.3. Прогиб изогнутой оси балки . . . . .	141
4.4. Статически неопределимые задачи изгиба балок . . . . .	145
Вопросы и задачи . . . . .	149

---

<b>5. Общие теоремы прикладной механики</b> . . . . .	151
5.1. Теорема Кастильяно . . . . .	151
5.2. Интеграл Мора . . . . .	161
5.3. Теорема взаимности работ . . . . .	167
Вопросы и задачи . . . . .	169
<b>6. Модели стержневых систем</b> . . . . .	170
6.1. Статически неопределимые стержневые системы . . . . .	171
6.2. Примеры раскрытия статической неопределимости . . . . .	183
Вопросы и задачи . . . . .	196
<b>7. Математические модели оболочки и пластинки</b> . . . . .	198
7.1. Сферическая и круговая цилиндрическая оболочки . . . . .	198
7.2. Деформация оболочек вращения . . . . .	206
7.3. Модель безмоментной оболочки вращения . . . . .	211
7.4. Моментная теория цилиндрической оболочки . . . . .	228
Дополнение 7.1. Модель оболочки произвольной формы . . . . .	237
Дополнение 7.2. Модель пластинки постоянной толщины . . . . .	255
Дополнение 7.3. Ортогональные криволинейные координаты . . . . .	267
Вопросы и задачи . . . . .	270
<b>Литература</b> . . . . .	271
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	275

*Учебное издание*

**ЗАРУБИН** Владимир Степанович  
**КУВЫРКИН** Георгий Николаевич  
**СТАНКЕВИЧ** Игорь Васильевич

**Математические модели прикладной механики**

Редактор *И. В. Мартынова*  
Корректор *Н. А. Музыкантова*  
Компьютерная верстка  
*И. К. Марчевского, К. С. Кузьминой*

Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н. Э. Баумана

Подписано в печать 29.05.2016. Формат 60×90/16.  
Усл. печ. л. 18. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1.  
press@bmstu.ru  
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н. Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1.