

ФИНСЛЕРОВИДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Г. С. Асанов



ФИНСЛЕРОВИДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Г. С. Асанов

ФИНСЛЕРОВИДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Г. С. Асанов



Москва
Физический факультет МГУ
2004

Печатается по решению Ученого Совета Физического факультета
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Асанов Геннадий Семенович
Финслероидная геометрия

Издательство МГУ, 2004. — 160 с.

ISBN 5-8279-0047-8

Традиционно идеи и уравнения математики и теоретической физики основываются на евклидовом методе введения длины векторов с помощью квадратного корня из квадратичной формы, так что соответствующая геометрия порождается шаром. Настоящая книга посвящена изложению качественно новой геометрии, порождаемой финслероидом, обобщающим шар наличием аксиальной симметрии вместо сферической. Поверхность финслероида строго выпукла и имеет положительную кривизну.

Серия рисунков иллюстрирует изложение. Многие коэффициенты приведены явно с целью использования их в будущих приложениях, так что настоящая книга имеет и расчетный характер. Она написана замкнуто, исходя из первых принципов. Кратко изложен псевдофинслероидный релятивистский вариант теории. От читателя предполагается знакомство с основами дифференциальной геометрии, тензорного анализа и линейной алгебры.

В значительной степени основой книги явился курс лекций, читавшийся автором на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова студентам 4-го курса, изучающим теоретическую физику. Книга полезна не только научным работникам и аспирантам, но также студентам старших курсов, специализирующимся в областях математики и физики, а возможно и более широкому кругу читателей, интересующихся обобщениями геометрии.

ISBN 5-8279-0047-8

© Г.С.Асанов, 2004 г.
© Физический факультет МГУ
им. М. В. Ломоносова, 2004 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие..... | 4 |
| Глава 1. Предварительные и общие формулировки | 9 |
| 1.1. От пространства точек к пространству смещений..... | 10 |
| 1.2. Финслерова метрическая функция..... | 12 |
| 1.3. Картановский тензор кручения и тензор кривизны..... | 14 |
| 1.4. Индикатриса..... | 16 |
| 1.5. Финслерова гамильтонова функция..... | 22 |
| 1.6. Инвариантность финслеровой метрической функции..... | 23 |
| 1.7. Использование геодезических..... | 25 |
| Глава 2. Основные определения и свойства | 31 |
| 2.1. Введение и мотивировка..... | 31 |
| 2.2. Исходные определения и наблюдения..... | 34 |
| 2.3. Ассоциируемая финслерова гамильтонова функция..... | 44 |
| 2.4. Вид финслероида и ко-финслероида..... | 50 |
| 2.5. Ортонормированные реперы..... | 60 |
| 2.6. Конформное преобразование..... | 62 |
| 2.7. Геодезические, угол и скалярное произведение..... | 66 |
| 2.8. Использование финслероидных координат..... | 75 |
| 2.9. Двувекторное обобщение..... | 81 |
| Глава 3. Квазиевклидово рассмотрение | 83 |
| 3.1. Квазиевклидово отображение финслероида..... | 84 |
| 3.2. Квазиевклидово пространство..... | 91 |
| 3.3. Решение квазиевклидовых уравнений геодезических..... | 96 |
| 3.4. Вычисление двувекторного метрического тензора..... | 104 |
| Глава 4. Инвариантность | 111 |
| 4.1. Введение финслероидных вращений..... | 112 |
| 4.2. Инвариантные поля..... | 114 |
| 4.3. Явное представление для обобщенных вращений..... | 115 |
| 4.4. Линейные случаи..... | 119 |
| Приложения | |
| А. Псевдофинслероидное релятивистское пространство..... | 121 |
| В. Следствия условия постоянства кривизны индикатрисы..... | 147 |
| Послесловие..... | 155 |
| Список литературы..... | 157 |
| Предметный указатель..... | 158 |

ПРЕДИСЛОВИЕ

Квадратичный метод наиболее прост для введения длины вектора. Согласно этому методу, длина определяется квадратным корнем из квадратичной формы. Основанные на нем евклидова и псевдоевклидова геометрии более 20 столетий служили для математических построений, обработки и предсказаний результатов экспериментов. Однако, несмотря на чувство высокой степени адекватности и точности совпадения, неясно, как можно было бы выразить эту степень в числах, — евклидовы и псевдоевклидовы вращения не содержат малого параметра для оценок.

В отличие от обычной евклидовой метрики любая финслерова метрика вносит *структурность* в геометрию. Единичная поверхность евклидовой геометрии, сфера, изотропна по всем направлениям. Введение геометрически выделенных направлений на метрическом уровне приводит к обобщению сферы, а вслед за этим и к обобщению евклидовой геометрии. Соответствующая более не изотропная поверхность концов единичных векторов, выходящих из фиксированной точки, называется финслеровой индикатрисой. Она порождает финслерову метрику. Строящаяся на ее основе геометрия может отражать те ситуации, в которых присутствует определенная анизотропия по направлениям.

Нетрудно поставить под сомнение любое утверждение о “высокой экспериментальной верности” квадратичного метода задания длины. Кто, когда и с какой точностью проверил Теорему Пифагора? Такая проверка едва ли возможна без того, чтобы исследователь использовал для сравнений более общие финслеровы методы построения геометрии (дискуссии на данную тему выходят за пределы настоящей книги — читатель может попытаться провести собственный анализ проблемы).

Фактически “евклидовость” геометрии сохраняется, пока сохраняется “квадратичность” определения длины. Но чтобы сделать действительно решительный шаг и выйти за пределы “евклидовости”, необходимо предложить конструктивную замену квадратичного метода определения длины на более общий и пересмотреть все основные евклидовы определения, теоремы и уравнения на основе нового метода.

Наука прошедшего столетия достигла успеха на основе квадратичных метрических представлений, логически и математически простейших. Более глубокие истины требуют использования более емких геометрий.

Выделим логически простейший случай нарушения симметрии, предполагая наличие одного выделенного направления и аксиальной симметрии вокруг него. Дополнительно потребуем, чтобы соответствующая индикатриса была замкнутой, всюду регулярной и строго выпуклой, и чтобы индуцируемая на ней геометрия характеризовалась постоянством и положительностью кривизны. Фи-

гуру, охватываемую такой (гипер)поверхностью, мы назовем финслероидом (учитывая ряд существенных аналогий с теорией финслеровых пространств [1–11]), а ко-сопряженную ему фигуру назовем ко-финслероидом.

Формально будем применять для изучаемого пространства символ \mathcal{E}_g^{PD} , который указывает, что пространство обобщает евклидово пространство на случай, когда характерный финслероидный параметр $g \in (-2, 2)$ отличен от нуля, и является положительно определенным (the positive-definite type). Точно так же, как шар порождает евклидову геометрию, финслероид порождает изучаемое ниже пространство \mathcal{E}_g^{PD} . При $g = 0$ пространство \mathcal{E}_g^{PD} является обычным евклидовым пространством.

Есть несколько простых способов проверить свойство финслероида, что его поверхность является пространством постоянной положительной кривизны. Прежде всего, оно может быть выведено непосредственно из связи между тензором кривизны финслероидного пространства и тензором кривизны индикатрисы. Именно так получена ключевая формула $\mathcal{R}_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = 1 - \frac{1}{4}g^2$ (см. (2.66) в Главе 2) для кривизны \mathcal{R} . После преобразования в квазиевклидово пространство тензор кривизны принимает алгебраически простой вид (см. формулу (2.17) в Главе 3), который в свою очередь указывает на такое свойство. Можно выбрать удобную параметризацию на индикатрисе, чтобы прямо вычислить тензор индуцированной кривизны (такой пример представлен формулами (2.29)–(2.35) в Главе 3).

В то же время само финслероидное пространство не обладает свойством постоянства кривизны (постулирование для него такого свойства имело бы строгим следствием евклидов случай, т.е. значение $g = 0$ для характерного параметра). Однако оно является конформно плоским, что ниже доказано также несколькими способами. Во-первых, нетрудно убедиться непосредственно, что подстановка тензора кривизны (формула (2.62) в Главе 2) финслероидного пространства в тензор Вейля дает тождественно нуль. Во-вторых, к такому же выводу приводит использование тензора кривизны (формула (2.17) в Главе 3) квазиевклидова пространства: можно предложить конкретный вид соответствующего конформного преобразования (см. формулы (2.36)–(2.39) в Главе 3) и увидеть, что конформный множитель является степенной функцией от используемой метрической функции K (согласно формулам (1.12) и (2.38) из Главы 3). Наконец, в основной формулировке финслероидного пространства можно вычислить все коэффициенты конформного преобразования (этому посвящен раздел 2.6 в Главе 2).

Сокращения ФМФ, ФМТ и ФГФ будут в тексте использоваться соответственно для финслероидной метрической функции, финслероидного метрического тензора и финслероидной гамильтоновой функции; такие сокращения не будут применяться в заглавиях, определениях и теоремах. По повторяющимся верхним и нижним индексам будет предполагаться суммирование.

“Длина” — основополагающее понятие как теоретической, так и прикладной науки. Развитие и различные приложения понятия длины привели к созданию геометрии. Соответствующий достаточно общий и современный подход можно формулировать в контексте теории так называемого конечно-мерного банахо-

ва пространства (часто альтернативно используют терминологию “пространства Минковского”). В таких пространствах длина вводится общим определением, позволяющим ей быть заданной функциями весьма широкого класса с минимальными условиями гладкости. Расслоенные многообразия, в которых слоями являются такие пространства, называют *финслеровыми пространствами*. Однако читателю следует иметь в виду, что термин “финслеров” в значительной степени неоднозначен. Различные авторы использовали его в различных смыслах. В контексте настоящей книги мы видим удобный выход из терминологических трудностей в возможности использовать термин “финслероидный”. Фактически мы развиваем геометрию, порождаемую определенной фигурой, которую вполне естественно называть финслероидом. По этой причине будет использоваться традиционный термин “финслеров” и в разделах, предшествующих изложению геометрии, порождаемой финслероидом. Они объединены в Главу 1. Можно сказать, что ниже мы развиваем геометрию в “классическом” смысле, т.е. “в слое” с точки зрения теории расслоенных пространств, и отстраиваем “финслероидный случай” конечно-мерного банахова пространства. Построение финслероидных расслоений — задача для будущих исследований, и мы ее не касаемся.

В геометрии необходимо использовать не только длины, но также угол и скалярное произведение. Традиционно попытки ввести угол в финслерово пространство постоянно сталкивались с двусмысленностями и не привели к однозначному успеху (см. [1–4]), что, видимо, было следствием недостаточности используемых методов. Принималось на веру мнение, что угол должен быть определен или построен в терминах основного финслерова метрического тензора (и следовательно должен быть выводимым из исходной финслеровой метрической функции). Позволив себе поставить под сомнение такую установку, мы выдвигаем альтернативно принцип, что угол является конкомитантом геодезических (а не собственно метрики). Угол определяется двумя векторами (вместо одного вектора в случае длины) и в действительности предполагает использование соответствующего обобщения финслеровой метрической функции на двуметрическую функцию (на скалярное произведение). Ниже мы применим этот принцип к изучению \mathcal{E}_g^{PD} -пространства.

В Главе 1 читатель найдет все необходимые предварительные понятия.

В Главе 2 введены основные определения для финслероидной геометрии и приведены результаты вычислений ассоциируемых величин, в том числе компонент финслерова метрического тензора и картановского тензора, а также ассоциируемого тензора кривизны. Финслероидный метрический тензор является положительно определенным, так что его сигнатура содержит все плюсы. Сохраняется вращательная инвариантность. Простота соответствующей геометрии обусловлена тем фактом, что картановский тензор имеет весьма простой специальный алгебраический тип. Характер расчетов как правило прост и их легко повторить.

Глава 3 вводит идею (нелинейного) квазиевклидова отображения финслероидного пространства, весьма плодотворную тем, что квазиевклидово пространство просто во многих аспектах, так что использование соответствующего преоб-

разования упрощает различные вычисления. Мы раскрываем интересные свойства квазиевклидова метрического тензора.

Глава 4 посвящена выяснению свойств инвариантности изучаемого пространства. Оказывается возможным найти явный вид (вообще говоря нелинейных) \mathcal{E}_g^{PD} -вращений, которые оставляют метрическую функцию изучаемого финслероидного пространства инвариантной и одновременно преобразуют метрический тензор по тензорному закону.

Главы дополнены Приложениями.

В Приложении А указаны основные свойства и следствия финслер-релятивистской метрической функции, порождаемой псевдофинслероидом. Его поверхность имеет постоянную отрицательную кривизну. Соответствующая геометрия предполагает, что анизотропным направлением является ось времени, R^0 -ось, при строгом сохранении изотропности (симметричности по всем направлениям) собственно пространства (ортогонального R^0 -оси). При этом характерный параметр g может принимать любое значение $g \in (-\infty, \infty)$. Релятивистская кинематика может последовательно развиваться на основе такой финслеровой метрики. Приведен явный вид псевдофинслероидного обобщения преобразования Лоренца.

Приложение В вносит существенную ясность в вопрос о происхождении финслероидной геометрии. А именно, с общих позиций рассмотрена задача нахождения индикатрисы постоянной кривизны в аксиально-симметричном случае. Анализ доведен до нелинейного дифференциального уравнения для генерирующей метрической функции. Оно решается в явном виде, и решение положительно-определенного типа соответствует финслероидному случаю. Решение индефинитного типа дает основу для дальнейшего развития релятивистской теории.

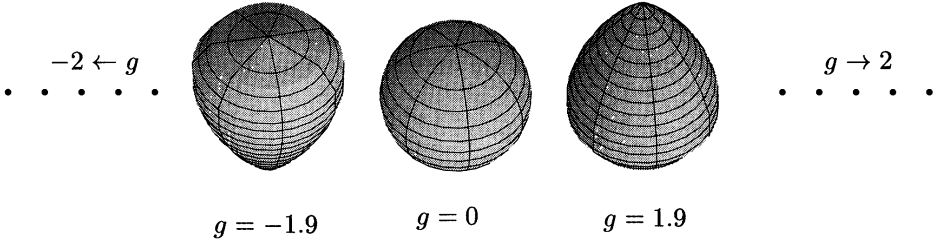
Серия рисунков иллюстрирует изложение. Многие вычисленные коэффициенты приведены в явной записи, имея ввиду использование их в будущих приложениях, — так что настоящая работа имеет и расчетный характер. Для общности мы допускаем для размерности N произвольное целочисленное положительное значение $N \geq 2$.

Сила геометрии — в предлагаемой ею наглядности. Для простейших человеческих ощущений воспринимать сферу конечно проще, чем более сложную фигуру, в терминах сферы привычно анализировать окружающие пространственные объекты. Но в действительности финслероид не менее нагляден, чем шар. Как выражается симметрия финслероида? Он является продуктом определенной деформации шара с появлением одной выделенной оси, причем в направлении оси и в противоположном направлении деформация происходит различно. Финслероид аксиально симметричен вокруг своей оси, является строго выпуклой фигурой, а кривизна его поверхности положительна и постоянна. Он порождает свою геометрию, построению которой посвящена настоящая книга, и может использоваться при анализе объектов и теорий, включающих характерное “геометрически выделенное направление” (а “geometrically distinguished direction”).

Содержание настоящей книги заполняет весь пробел

THE FINSLEROID RANGE $(-2, 2)$,

измеряемый характерным параметром g .



Все здание евклидовой геометрии порождается шаром, — ему соответствует тривиальное значение $g = 0$. Но на всем интервале $(-2, 2)$ каждому значению параметра g отвечает конкретный финслероид, а различным значениям этого параметра отвечают различные определения “равенства длины векторов” и различные геометрии. Финслероид как фигура аксиально симметричен и при $|g| \rightarrow 2$ стремится к предельному финслероиду.

Многие аспекты возникающей на таком пути финслероидной геометрии качественно отличаются от своих евклидовых прототипов. В то же время остается серия неизменных фундаментальных *универсальных* соотношений и свойств. *Что в евклидовой геометрии не является собственно евклидовым!* Следующие замечательные свойства относятся, в частности, к такому типу: положительность и постоянство кривизны индикатрисы, сумма углов треугольника (она по-прежнему равна π), теорема косинуса, аддитивность угла, отношение площади поверхности финслероида к его объему.

Автор преследовал несколько методических целей: привести все необходимые определения и ключевые формулы, чтобы читатель имел возможность достаточно легко самостоятельно повторить все вычисления, довести развитие вопроса до введения угла и скалярного произведения, реализовать свойства инвариантности, и т. д.

Оценить степень успешности достижения таких целей в настоящей книге может только внимательный и заинтересованный читатель.

Глава 1

Предварительные и общие формулировки

Расстояние между точками и длина вектора являются фундаментальными понятиями как для геометрии, так и для физики. Обыденное представление о расстоянии фактически основывается на отделении точек евклидовыми сферами, т.е. использует “евклидову топологию” и “евклидово расстояние”, применяя геометрию, определяемую квадратичной формой. Мы ниже предлагаем и разрабатываем более общую геометрию.

В Разделе 1.1 для удобства читателя приведены предварительные понятия и определения для метрического пространства. От него через условие однородности проходит прямой путь (Раздел 1.2) к финслеровой метрической функции и затем к финслерову метрическому тензору. Его зависимость от векторов характеризуется так называемым картановским тензором кручения (Раздел 1.3).

Обобщение евклидовой сферы на финслеров подход в математической литературе принято называть индикатрисой. Такой термин подчеркивает, что так же, как сфера определяет евклидову метрику, индикатриса порождает финслерову метрическую функцию. Построив по последней финслеров метрический тензор, можно по нему ввести индуцированный метрический тензор на индикатрисе (с помощью проекционных множителей) и изучать его свойства, в частности порождаемую им на индикатрисе кривизну. Соответствующие переходы описаны в Разделе 1.4. Как хорошо известно, на таком пути в евклидовой геометрии получается кривизна, постоянная и равная 1; выбор несферической индикатрисы приводит к более общим ситуациям. Коль скоро в определении финслерова метрического пространства входит условие однородности, анизотропность индикатрисы проявляет себя и в анизотропности распределений векторов.

В финслеровой геометрии давно известен метод введения финслеровой гамильтоновой функции по финслеровой метрической функции. Он представлен в Разделе 1.5 в кратком объеме, достаточном для материала настоящей книги. Вопрос, как для обобщения евклидовых вращений вводить финслеровы преобразования инвариантности, которые оставляли бы инвариантной финслерову метрическую функцию и одновременно преобразовывали бы финслеров метрический тензор по тензорному закону, кратко освещен в Разделе 1.6.

Наконец, в последнем Разделе 1.7 из уравнения для геодезических выведен ряд интересных ближайших следствий, включая угол и расстояние. Формальный вид теоремы Пифагора и теоремы косинуса не изменяется. Угол по-прежнему аддитивен и сохраняется свойство, что сумма углов треугольника равна π . Скаляр-

ное произведение является следствием введенного угла. В то же время следует иметь ввиду, что в финслероидном пространстве треугольники вообще говоря не являются плоскими фигурами, поскольку геодезические (кратчайшие) такого пространства вообще говоря не являются плоскими кривыми.

1.1. От пространства точек к пространству смещений

Важным классом топологических пространств являются N -мерные метрические пространства, обозначаемые ниже через X^N . В них определена функция расстояний (the distance function) ρ : она для любого множества $M \in X^N$ определяет отображение

$$\rho : M \times M \mapsto \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где \mathbb{R} обозначает евклидову прямую. В результате для любых двух взятых точек $x = \{x^p\} = \{x^1, \dots, x^{N-1}, x^N\}$ и $y = \{y^p\} = \{y^1, \dots, y^{N-1}, y^N\}$ метрического пространства X^N определяется расстояние $\rho(x, y)$ между этими точками. Всегда предполагается “дистанционность” расстояния:

$$A : \rho(x, x) = 0. \quad (1.2)$$

Симметричность расстояния

$$A_1 : \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad (1.3)$$

предполагается во многих исследованиях (но далеко не во всех).

Предполагается положительность

$$B : \rho(x, y) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq y \quad (1.4)$$

и свойство “неравенство треугольника”

$$C : \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y). \quad (1.5)$$

Если ввести (открытый) метрический шар

$$\mathcal{B}(x_0; r) := \{x \in X^N : \rho(x_0, x) < r\}, \quad (1.6)$$

где x_0 и r имеют соответственно обобщенный смысл центра и радиуса, то в пространстве X^N естественно вводится топология через использование объединений (произвольных) семейств метрических шаров. Метрическое пространство X^N с такой топологией является хаусдорфовым, т.е. точки можно отделять метрическими шарами: для любой пары точек можно найти хотя бы два непересекающихся метрических шара, таких, что каждая из этих двух точек принадлежит только одному из шаров. Доказательство тривиально следует из неравенства треугольника (действительно, если $\rho(x, y) = 2r$, то как следствие неравенства (1.5) метрические шары $\mathcal{B}(x; r)$ и $\mathcal{B}(y; r)$ не могут иметь общих точек).

Если ввести *вектор, выходящий из точки x* :

$$R := y - x, \quad (1.7)$$

то можно представить расстояние в виде

$$\rho(x, y) = f(x, R). \quad (1.8)$$

Использование функции $f(x, R)$ переводит понятие “расстояние между двумя точками” в понятие “норма вектора”:

$$\|R\| = f(x, R). \quad (1.9)$$

Неравенство треугольника (1.5) принимает вид

$$\|R_1 + R_2\| \leq \|R_1\| + \|R_2\|, \quad (1.10)$$

где предполагается, что векторы R_1 и R_2 исходят из одной точки.

Постулируя, что имеет место *положительная однородность*:

$$\|kR\| = k\|R\|, \quad k > 0, \quad (1.11)$$

мы назовем норму вектора *длиной вектора* и используем для нее обозначение

$$\|R\| = F(x, R). \quad (1.12)$$

Условие однородности (1.11) формализует обычное “очевидное” представление, что если компоненты вектора увеличить в k раз, то его длина увеличится тоже в k раз.

Мы назовем метрическое пространство X^N *однородным*, если расстояние зависит только от разности точек, т.е. если существует такая функция $r(z)$, что

$$\rho(x, y) = r(y - x). \quad (1.13)$$

В таком случае у метрики появляется *свойство транзитивности*

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y), \quad (1.14)$$

вследствие которого правая часть в (1.12) упрощается

$$\|R\| = F(R), \quad (1.15)$$

и согласуется с представлением, что *параллельное перенесение вектора не изменяет его норму*.

В координатной записи мы очевидно имеем

$$R = \{R^p\}, \quad R^p = y^p - x^p. \quad (1.16)$$

Хорошо известным и простейшим примером пространства, согласованного с условиями (1.10)–(1.15), является евклидово пространство, для которого

$$\rho^{\text{Euclidean}}(x, y) = \sqrt{\sum_{p=1}^N (y^p - x^p)^2}.$$

На таком пути мы переходим от понятия пространство точек к понятию пространство векторов (точнее векторов смещений). При изучении метрических свойств таких пространств обычно используется ассоциируемая *фундаментальная форма*

$$g_R(R_1, R_2) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[F^2(R + sR_1 + tR_2) \right] \Big|_{s=t=0}. \quad (1.17)$$

1.2. Финслерова метрическая функция

Пусть V_N обозначает N -мерное векторное пространство, а $R \in V_N$ — его элементы (векторы). *Метрическая функция*

$$F : V_N \mapsto \mathbb{R} \quad (2.1)$$

на V_N задает отображение V_N в числовую прямую \mathbb{R} . Подчиним функцию (2.1) следующим условиям.

- (i) Гладкость класса C^∞ на $V_N \setminus \{0\}$.
- (ii) Положительная однородность степени 1, т.е.

$$F(kR) = kF(R), \quad k > 0, \quad R \in V_N. \quad (2.2)$$

- (iii) *Невырожденность фундаментальной формы* (1.17) при любом $R \neq \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При этих условиях F называется *финслеровой метрической функцией* на $V_N \setminus \{0\}$.

Если ввести в V_N локальные координаты $\{R^p\}$, используя какой-либо допустимый базис $\{e_p\}$, так что

$$R = e_p R^p, \quad (2.3)$$

то определение (1.17) ассоциируемой фундаментальной формы примет вид

$$g_R(R_1, R_2) = g_{pq}(R) R_1^p R_2^q, \quad (2.4)$$

где

$$g_{pq}(R) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(R)}{\partial R^p \partial R^q}. \quad (2.5)$$

Введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тензор с компонентами (2.5) называется *финслеровым метрическим тензором*.

Очевидна симметричность:

$$g_{pq}(R) = g_{qp}(R). \quad (2.6)$$

Условие (iii) может быть переписано в виде условия на детерминант:

$$\det(g_{pq}(R)) \neq 0. \quad (2.7)$$

Если ввести *ковариантный вектор* $\{R_p\}$ с компонентами

$$R_p = R_p(R^q) : R_p = \frac{1}{2} \frac{\partial F^2(R)}{\partial R^p}, \quad (2.8)$$

то после сравнения (2.8) с (2.5) и учета (2.6) мы получим

$$g_{pq} = \frac{\partial R_q}{\partial R^p}. \quad (2.9)$$

Многие полезные соотношения получаются, когда применяется *теорема Эйлера об однородных функциях*. Она в нашем контексте гласит: если задана гладкая функция $Z = Z(R)$, то свойство однородности

$$Z(kR) = k^r Z(R), \quad k > 0, \quad (2.10)$$

влечет за собой тождество

$$R^p \frac{\partial Z(R)}{\partial R^p} = r Z(R). \quad (2.11)$$

Для доказательства теоремы достаточно продифференцировать (2.10) по k и затем положить $k = 1$.

Условие (2.2) влечет за собой свойства однородности:

$$R_p(kR) = k R_p(R), \quad (2.12)$$

$$g_{pq}(kR) = g_{pq}. \quad (2.13)$$

Применение тождества (2.11) при $r = 1$ к функциям (2.12), и при $r = 2$ к квадрату F^2 , дает соответственно тождества

$$R_p = g_{pq} R^q, \quad (2.14)$$

а также

$$F^2(R) = g_{pq}(R)R^pR^q. \quad (2.15)$$

Условие (2.7) позволяет ввести контравариантные компоненты $g^{pq}(R)$ для финслерова метрического тензора согласно условию взаимности

$$g^{qp}(R)g_{pr}(R) = \delta_r^q. \quad (2.16)$$

Единичный вектор l может быть представлен своими контравариантными компонентами

$$l^p := \frac{R^p}{F(R)} \quad (2.17)$$

или ковариантными компонентами

$$l_p := \frac{R_p}{F(R)} \equiv \frac{\partial F(R)}{\partial R^p}. \quad (2.18)$$

Для него

$$F(l) = 1. \quad (2.19)$$

Находим также

$$\frac{\partial l_p}{\partial R^q} = \frac{h_{pq}}{F}, \quad (2.20)$$

где

$$h_{pq} = g_{pq} - l_p l_q. \quad (2.21)$$

$\{h_{pq}\}$ называют *угловым метрическим тензором*. Справедливы тождества

$$R^p h_{pq} = 0, \quad (2.22)$$

$$g^{pq} h_{pq} = N - 1, \quad l^p l_p = 1. \quad (2.23)$$

1.3. Картановский тензор кручения и тензор кривизны

Финслерова метрическая функция очевидно сводится к евклидовой, когда тензор $\{g_{pq}\}$, определяемый согласно (2.5), не зависит от вектора R . Зависимость финслерова метрического тензора от вектора характеризует так называемый *картановский тензор кручения* $\{C_{pqr}(R)\}$ с компонентами

$$C_{pqr}(R) := \frac{1}{2} \frac{\partial g_{pq}(R)}{\partial R^r}. \quad (3.1)$$

В силу (2.5) эти компоненты можно переписать в виде

$$C_{pqr}(R) = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(R)}{\partial R^p \partial R^q \partial R^r}, \quad (3.2)$$

указывающем на симметричность тензора по всем трем нижним индексам:

$$C_{pqr} = C_{rpq} = C_{qrp} = \dots$$

Применение к (2.13) теоремы Эйлера (2.10)–(2.11) при $r = 0$ дает тождество

$$R^p C_{pqr}(R) = 0. \quad (3.3)$$

Дифференцирование его по R^s дает новое полезное тождество

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g^{rp}}{\partial R^s} = -C_s^{rp}. \quad (3.4)$$

Индексы поднимаются и опускаются с помощью финслерова метрического тензора, например, $C_r^{qp} = g^{qs} g^{pt} C_{rst}$. Иногда в формулах появляется свертка

$$C_p(R) := C_p^q{}_q(R). \quad (3.5)$$

Для нее очевидно справедливо представление

$$C_p(R) = \frac{\partial \ln(\sqrt{|\det(g_{rs})|})}{\partial R^p}.$$

Соответствующие символы Кристоффеля

$$q_p^r{}_q(R) := \frac{1}{2} g^{rt}(R) \left(\frac{\partial g_{pt}(R)}{\partial R^q} + \frac{\partial g_{qt}(R)}{\partial R^p} - \frac{\partial g_{pq}(R)}{\partial R^t} \right) \quad (3.6)$$

вследствие (3.2) сведутся к картановскому тензору кручения:

$$q_p^r{}_q = C_p^r{}_q. \quad (3.7)$$

Если рассмотреть также тензор кривизны

$$S_p^q{}_{rs}(R) := \frac{\partial q_p^q{}_r}{\partial R^s} - \frac{\partial q_p^q{}_s}{\partial R^r} + q_t^q{}_s q_p^t{}_r - q_t^q{}_r q_p^t{}_s, \quad (3.8)$$

то из (3.4) и (3.7) получится простое представление

$$S_p^q{}_{rs} = C_t^q{}_r C_p^t{}_s - C_t^q{}_s C_p^t{}_r. \quad (3.9)$$

Сравнение (3.3) с (3.9) приводит к тождеству

$$R^p S_p^q{}_{rs} = 0. \quad (3.10)$$

В евклидовом пределе получается $C_{pqr} = 0$ и, следовательно, $S_p^q{}_{rs} = 0$.

1.4. Индикатриса

Финслерова метрическая функция $F(R)$ определяет $(N - 1)$ -мерную гиперповерхность \mathcal{I} уравнением

$$\mathcal{I} := \{R \in V_N : F(R) = 1\}, \quad (4.1)$$

в котором R — переменная. Гиперповерхность \mathcal{I} называется *индикатрисой*. Она образуется концами единичных векторов $\{l^p\}$ (см. (2.17)) и обобщает евклидову сферу. Обратное, вследствие условия однородности (2.2), индикатриса полностью определяет функцию $F(R)$.

Пусть $\{u^a\}$ — некоторая координатная система на индикатрисе \mathcal{I} ; индексы a, b, c, d будут пробегать значения $1, \dots, N - 1$. Поскольку финслерова метрическая функция предполагается однозначной функцией аргумента R , то существует взаимно-однозначное соответствие между наборами $\{u^a\}$ и $\{l^p\}$, так что u^a , подобно l^p , могут рассматриваться как однородные функции нулевой степени от R и можно ввести параметрическое представление индикатрисы с помощью набора $N - 1$ функций

$$u^a = u^a(R), \quad (4.2)$$

удовлетворяющих (кроме достаточной гладкости) следующим двум условиям.

(I) *Положительная однородность нулевой степени по R , т. е.*

$$u^a(kR) = u^a(R), \quad k > 0. \quad (4.3)$$

(II) *Наибольший ранг матрицы элементов $\partial u^a / \partial R^p$:*

$$\text{rank} \left(\frac{\partial u^a}{\partial R^p} \right) = N - 1. \quad (4.4)$$

Если $\{u^a\}$ дополнить функцией $\ln(F(R))$, так что образуется набор N функций $z^p = z^p(R)$:

$$z^a(R) = u^a(R), \quad z^N(R) := \ln(F(R)), \quad (4.5)$$

то матрица производных от z^p по R^q будет иметь наибольший ранг:

$$\text{rank} \left(\frac{\partial z^p}{\partial R^q} \right) = N. \quad (4.6)$$

В самом деле, если бы при некоторых \tilde{R}^s ранг был меньше N , то существовал бы такой набор отличных от нуля чисел A_p , что выполнялось бы равенство

$$A_p \frac{\partial z^p}{\partial R^q} = 0.$$

Однако свертывание его с R^q дало бы $A_N = 0$ вследствие условия (4.3) (которое в силу теоремы Эйлера (2.10)–(2.11) при $r = 0$ влечет за собой $R^q \frac{\partial z^a}{\partial R^q} = 0$). Итак, (4.6) верно.

Обращая (4.5), получим функции

$$R^p = a^p(z), \quad (4.7)$$

удовлетворяющие тождеству

$$z^p(a(z)) = z^p. \quad (4.8)$$

Поскольку $z^N = \ln F$, правая часть в (4.7) будет давать единичный вектор l^p (для него всегда $F(l) = 1$) в случае, когда функция a^p берется при $z^N = 0$. Поэтому, если ввести обозначение

$$s^p(u) = a^p(0, u^a), \quad (4.9)$$

то получится следующее *параметрическое представление индикатрисы*:

$$l^p = s^p(u). \quad (4.10)$$

Величины

$$s_a^p = \frac{\partial s^p}{\partial u^a}, \quad u_p^a = \frac{\partial u^a}{\partial R^p} \quad (4.11)$$

называются *проекционными множителями*. Легко проверить, что

$$s_a^p l_p = 0, \quad u_p^a l^p = 0, \quad s_a^p u_p^b = \frac{\delta_a^b}{F}, \quad s_a^q u_p^q = \frac{h_p^q}{F}, \quad (4.12)$$

$$a^p = s^p \exp(z^N), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial a^p}{\partial z^N} = a^p, \quad \frac{\partial a^p}{\partial z^a} = s_a^p \exp(z^N). \quad (4.14)$$

Максимальность ранга (4.6) позволяет трактовать соотношение

$$z^P = z^P(R^p) \quad (4.15)$$

как переход в пространстве V_N от прямолинейной системы координат $\{R^p\}$ к криволинейной системе координат $\{z^P\}$. Поведение финслерова метрического тензора при таком преобразовании естественно определить тензорным законом

$$g_{PQ}(z) = g_{pq}(s(z)) \frac{\partial a^p}{\partial z^P} \frac{\partial a^q}{\partial z^Q}. \quad (4.16)$$

Из формул (4.9)–(4.16) очевидно следует, что

$$g_{NN} = \exp(2z^N), \quad g_{Na} = 0, \quad (4.17)$$

а также

$$g_{ab} = \exp(2z^N) g_{pq} s_a^p s_b^q. \quad (4.18)$$

Мы видим, что тензор $g_{PQ}(z)$ конформно подобен более простому тензору:

$$g_{PQ} = \exp(2z^N) g_{PQ}^*, \quad (4.19)$$

где

$$g_{ab}^* = g_{pq}(s(u)) s_a^p(u) s_b^q(u) \quad (4.20)$$

и

$$g_{NN}^* = 1, \quad g_{Na}^* = 0, \quad (4.21)$$

откуда в свою очередь следует:

$$g^{*NN} = 1, \quad g^{*Na} = 0. \quad (4.22)$$

Тензор g^* , задаваемый компонентами (4.20), называется *индуцированным метрическим тензором индикатрисы*. Он тесно связан с угловым метрическим тензором (2.21), а именно, верно равенство

$$g_{ab}^* = h_{pq} s_a^p s_b^q \quad (4.23)$$

(см. (4.11)). Обратнo, если свернуть (4.20) по $u_r^a u_s^b$ и принять во внимание (4.12), то получится:

$$g_{ab}^* u_r^a u_s^b = \frac{h_{rs}}{F^2} \quad (4.24)$$

и затем:

$$F g_{ab}^* u_r^a = g_{rs} s_b^s. \quad (4.25)$$

Обозначим через $R_{PQRS}(z)$ и $R_{PQRS}^*(z)$ компоненты римановых тензоров кривизны, построенных из $g_{PQ}(z)$ и $g_{PQ}^*(z)$ (с дифференцированием по z^R). Из (4.21) и того факта, что тензор (4.20) не зависит от z^N , очевидно следует, что среди R_{PQRS}^* отличны от нуля лишь компоненты

$$R_{abcd}^* = R_{abcd}^*(u), \quad (4.26)$$

т. е. что R_{abcd}^* равен риманову тензору кривизны, построенному из тензора $g_{ab}^*(u)$ (с дифференцированием по u^c). Полный тензор R_{PQRS} может быть выражен через R_{abcd}^* с помощью хорошо известного соотношения между римановыми тензорами кривизны конформно подобных римановых пространств, которое в наших обозначениях записывается следующим образом:

$$e^{2U} R^{PQ}{}_{RS} = R^{*PQ}{}_{RS} + Y_R^Q \delta_S^P - Y_S^Q \delta_R^P + Y_S^P \delta_R^Q, \quad (4.27)$$

где

$$Y_R^Q = \frac{\partial U^Q}{\partial z^R} + \frac{1}{2} g^{*QS} \left(\frac{\partial g_{RS}^*}{\partial z^T} + \frac{\partial g_{TS}^*}{\partial z^R} - \frac{\partial g_{RT}^*}{\partial z^S} \right) U^T - U^Q U_R + \frac{1}{2} \delta_R^Q U_T U^T, \quad (4.28)$$

а также

$$U_R = \frac{\partial U}{\partial z^R}, \quad U^R = g^{*PR} U_P, \quad U = z^N.$$

Поскольку последнее равенство влечет за собой $U_R = \delta_R^N$, то в силу (4.21), (4.22) и независимости g_{ab}^* от z^N первые два члена правой части (4.28) обратятся в нуль и останется $Y_R^Q = -\delta_N^Q \delta_r^N + \frac{1}{2} \delta_R^Q$. Поэтому из (4.28) вытекает представление

$$\exp(-2z^N) R_{abcd} = R_{abcd}^* - g_{ac}^* g_{bd}^* + g_{ad}^* g_{bc}^*. \quad (4.29)$$

Тензоры кривизны R_{PQRS} и $F^{-2} S_{p^q r s}$ (см. (3.8)–(3.9)) построены соответственно из тензоров $g_{PQ}(z)$ и $g_{pq}(R)$. Так как последние два тензора преобразуются друг в друга по тензорному закону (4.16), то должно выполняться равенство

$$F^{-2} S_{pqrs} = R_{PQRS} z_p^P z_q^Q z_r^R z_s^s, \quad (4.30)$$

где $z_q^Q = \partial z^Q / \partial R^q$. А поскольку среди компонент не равны тождественно нулю только R_{abcd} , можно упростить (4.30):

$$F^{-2} S_{pqrs} = R_{abcd} u_p^a u_q^b u_r^c u_s^s. \quad (4.31)$$

Если использовать здесь тензор кривизны R_{abcd}^* индикатрисы (см. (4.29)), то получится представление

$$F^{-2} S_{pqrs} = (R_{abcd}^* - g_{ac}^* g_{bd}^* + g_{ad}^* g_{bc}^*) u_p^a u_q^b u_r^c u_s^d, \quad (4.32)$$

ясно указывающее на геометрический смысл тензора S_{pqrs} в контексте геометрии индикатрисы.

Если принять во внимание (4.24) и ввести обозначение

$$R_{pqrs}^* = R_{abcd}^* u_p^a u_q^b u_r^c u_s^d F^4, \quad (4.33)$$

то можно переписать (4.32) в элегантном виде:

$$F^2 S_{pqrs} = R_{pqrs}^* - h_{pr} h_{qs} - h_{ps} h_{qr}. \quad (4.34)$$

Отсюда следует, что, если взять два вектора $\{X^p\}$ и $\{Z^p\}$, касательные к индикатрисе в некоторой точке u , то скаляр

$$\mathcal{R}(Z, X) := \frac{R_{abcd}^* Z^a Z^c X^b X^d}{(g_{bd}^* g_{ac}^* - g_{bc}^* g_{ad}^*) Z^a Z^b X^c X^d} \quad (4.35)$$

индикатрисы в точке u относительно ориентации, определяемой векторами $\{Z^p\}$ и $\{X^q\}$, связан со скаляром

$$S^*(Z, X) := \frac{S_{pqrs} Z^p Z^r X^q X^s}{(g_{pr} g_{qs} - g_{pq} g_{rs}) Z^p Z^r X^q X^s} \quad (4.36)$$

простым соотношением:

$$\mathcal{R} = 1 + S^*. \quad (4.37)$$

В случае пространства размерности $N = 4$ индикатриса является трехмерным пространством. Как хорошо известно, риманов тензор кривизны любого трехмерного пространства имеет специальный вид, согласно которому при используемых нами обозначениях справедливо равенство

$$R_{abcd}^* = -\frac{1}{2}R^*(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) + g_{ac}R_{bd}^* - g_{bc}R_{ad}^* + g_{bd}R_{ac}^* - g_{ad}R_{bc}^*, \quad (4.38)$$

где $R_{ac}^* = R^*{}^b{}_{cb}$ и $R^* = R^*{}^a{}_a$. Подстановка (4.38) в (4.32) дает следующий результат: *в любом четырехмерном финслеровом пространстве тензор S_{pqrs} имеет структуру вида*

$$S_{pqrs} = (h_{pr}M_{qs} - h_{qr}M_{ps} + h_{qs}M_{pr} - h_{ps}M_{qr})/F^2, \quad (4.39)$$

где

$$M_{ps} = R_{ps}^* - \frac{1}{4}(R^* + 2)h_{ps}, \quad R_{ps}^* = R^*{}^r{}_{rs}. \quad (4.40)$$

Аналогично в трехмерном финслеровом пространстве справедливо представление

$$R_{abcd}^* = \frac{1}{2}R^*(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (4.41)$$

(что диктуется специальным видом риманова тензора кривизны любого двумерного риманова пространства). Подстановка (4.41) в (4.32) показывает, что *в любом трехмерном финслеровом пространстве тензор S_{pqrs} имеет вид*

$$S_{pqrs} = \frac{1}{2}S(h_{pr}h_{qs} - h_{ps}h_{qr})/F^2, \quad (4.42)$$

где $S = S^{pq}{}_{pq} = R^* - 2$. Такой же вывод можно сделать в случае, когда индикатриса является пространством постоянной кривизны, ибо тензор кривизны риманова пространства постоянной кривизны имеет вид (4.41) с постоянным множителем R^* . Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. *Индикатриса финслерова пространства является пространством постоянной кривизны тогда и только тогда, когда тензор $S_{pqrs}(R)$ имеет структуру вида (4.42) с независимым от вектора R скаляром S .*

Если ввести разбиение

$$V_N = V_{N-1} \times \mathbb{R}, \quad (4.43)$$

и использовать соответствующие адаптированные координаты:

$$R^p = \{R^a, R^N\}, \quad (4.44)$$

то удобно параметризовать индикатрису переменными

$$v^a = \frac{R^a}{R^N} \quad (4.45)$$

всюду, где $R^N \neq 0$. Вводя *генерирующую метрическую функцию*

$$V := F(R)/R^N \equiv F(v^a, 1), \quad (4.46)$$

для компонент единичного вектора l , определяемого согласно (2.17), получаем представление

$$l^a = \frac{v^a}{V}, \quad l^N = \frac{1}{V}, \quad (4.47)$$

так что $v^a = l^a/l^N$ и $l^a = l^N v^a$. Для проекционных множителей

$$l_a^p := \frac{\partial l^p}{\partial v^a}$$

(ср. (4.11)) находим компоненты

$$l_a^b = \frac{1}{V} \delta_a^b - \frac{1}{V^2} v^b l_a, \quad l_a^N = -\frac{1}{V^2} l_a.$$

Справедливо

$$\frac{\partial F}{\partial v^a} = l_a(R^a, R^N) \Big|_{R^N=1 \text{ и } R^a=v^a} = l_a(v, 1), \quad \frac{v^b l_b}{V} = 1 - l^N l_N.$$

Для компонент соответствующего индуцированного метрического тензора индикатрисы

$$g_{ab}^*(v) = h_{pq} l_a^p l_b^q$$

(ср. (4.23)) вычисления дают

$$F^2 g_{ab}^* =$$

$$h_{NN} l_a l_b - h_{Nc} l_a (\delta_b^c - v^c l_b F^{-1}) - h_{Nc} l_b (\delta_a^c - v^c l_a F^{-1}) + h_{cd} (\delta_a^c - v^c l_a F^{-1}) (\delta_b^d - v^d l_b F^{-1}) =$$

$$h_{ab} + (h_{NN} + 2h_{Nc} v^c F^{-1} + h_{cd} v^c v^d F^{-2}) l_a l_b - h_{Na} l_b - h_{Nb} l_a - l_a h_{bc} v^c F^{-1} - l_b h_{ac} v^c F^{-1}.$$

Используя теперь тождество (2.22), получаем:

$$h_{NN} R^N + h_{Na} R^a = 0 \implies h_{Na} v^a = -h_{NN},$$

$$h_{bN} R^N + h_{ba} R^a = 0 \implies h_{ba} v^a = -h_{bN}, \quad h_{cd} = -h_{Nd} v^d = h_{NN},$$

так что

$$g_{ab}^* = h_{ab}/V^2. \quad (4.48)$$

Итак, нами доказана

ТЕОРЕМА 1.2. *При использовании разбиения (4.43)–(4.44) индуцированный метрический тензор индикатрисы пропорционален $(N-1)$ -части углового метрического тензора (2.21) согласно (4.48).*

1.5. Финслерова гамильтонова функция

Как следствие условия невырожденности (формула (2.7)), преобразование $R_p = R_p(R^q)$ (см. формулу (2.8)) можно обратить:

$$R^p = R^p(R_q). \quad (5.1)$$

Финслерова гамильтонова функция

$$H(R_p) := F(R^q(R_p)) \quad (5.2)$$

строится путем простой подстановки функций (5.1) в финслерovu метрическую функцию. Очевидно справедливо и обратное соотношение:

$$F(R^q) = H(R_p(R^q)). \quad (5.3)$$

Пусть

$$g^{pq} := \frac{\partial R^p}{\partial R_q}. \quad (5.4)$$

Дифференцируя тождество

$$R_p(R^r(R_q)) = R_p \quad (5.5)$$

по R_q , получим соотношение взаимности

$$g_{pr}(R^s)g^{rq}(R_t) = \delta_p^q, \quad (5.6)$$

где $\{g_{pr}\}$ — исходный финслеров метрический тензор (2.5). Таким образом мы убеждаемся, что компоненты тензора, взаимного к финслерovu метрическому тензору, могут быть заданы согласно (5.4). Так как финслеров метрический тензор симметричен (формула (2.6)), то и взаимный тензор $\{g^{rq}\}$ будет симметричным: $g^{rq} = g^{qr}$.

Свойство однородности (2.12) функций $R_p(R^q)$ очевидно переносится и на обратные им функции (5.1). Поэтому справедливы тождества

$$R^p = g^{pq}R_q. \quad (5.7)$$

С другой стороны, дифференцирование квадрата равенства (5.2) по R_p дает

$$H \frac{\partial H}{\partial R_p} = R_q g^{qp} \quad (5.8)$$

(использовано (2.8) и (5.4)). Сравнивая (5.7) и (5.8) и учитывая свойство симметрии $g^{pq} = g^{qp}$, получаем

$$R^p = H(R_r) \frac{\partial H(R_r)}{\partial R_p} = \frac{1}{2} \frac{\partial H^2(R_r)}{\partial R_p} \quad (5.9)$$

(ср. (2.8)) и

$$g^{pq}(R_r) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2(R_r)}{\partial R_p \partial R_q} \quad (5.10)$$

(ср. (2.5)).

Аналогично индикатрисе (4.1) в исходном пространстве, в ко-пространстве определяется характеристическая единичная гиперповерхность; ее называют *фигуратрисой*; удобно также использовать термин *ко-индикатриса*.

1.6. Инвариантность финслеровой метрической функции

Может случиться, что при некоторых преобразованиях

$$R^p = \mathcal{F} \cdot \tilde{R} : R^p = \mathcal{F}^p(\tilde{R}) \quad (6.1)$$

(вообще говоря, нелинейных) финслерова метрическая функция остается инвариантной, т.е.

$$F(R) = F(\tilde{R}). \quad (6.2)$$

Необходимо предположить, что функции \mathcal{F}^p достаточно гладкие и положительно однородные степени 1 по \tilde{R} , так что

$$\mathcal{F}^p(k\tilde{R}) = k\mathcal{F}^p(\tilde{R}), \quad k > 0, \quad (6.3)$$

(для любого допустимого набора аргументов). Последнее условие обеспечивает сохранение преобразованиями (6.1) свойства однородности (2.13), постулированного для финслеровой метрической функции. Из теоремы Эйлера (2.10)–(2.11) следует, что если использовать производные

$$\mathcal{F}_q^p := \frac{\partial \mathcal{F}^p(\tilde{R})}{\partial \tilde{R}^q}, \quad (6.4)$$

то преобразование (6.1) можно переписать как

$$R^p = \mathcal{F}_q^p(\tilde{R})\tilde{R}^q. \quad (6.5)$$

Вторые производные

$$\mathcal{F}_{qr}^p := \frac{\partial \mathcal{F}_q^p(\tilde{R})}{\partial \tilde{R}^r} \quad (6.6)$$

вообще говоря не обращаются тождественно в нуль:

$$\mathcal{F}_{qr}^p \neq 0. \quad (6.7)$$

Дифференцирование (6.2) по \tilde{R}^r дает новое тождество

$$\tilde{R}_r = R_q \mathcal{F}_r^q \quad (6.8)$$

(использовано (2.8)). Дифференцируя его по \tilde{R}^s , получим

$$g_{rs}(\tilde{R}) = \mathcal{F}_r^p(\tilde{R})\mathcal{F}_s^q(\tilde{R})g_{pq}(\mathcal{F}(\tilde{R})) + R_t\mathcal{F}_{rs}^t \quad (6.9)$$

(использовано (2.9)).

Если преобразования (6.1) удовлетворяют и условию

$$R_t\mathcal{F}_{rs}^t = 0, \quad (6.10)$$

то мы назовем их *метрическими*, имея ввиду, что в таком случае они согласно (6.9) оставляют финслеров метрический тензор инвариантным:

$$\mathcal{F}_r^p(\tilde{R})\mathcal{F}_s^q(\tilde{R})g_{pq}(\mathcal{F}(\tilde{R})) = g_{rs}(\tilde{R}). \quad (6.11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность преобразований (6.1), подчиненных условию метричности (6.10), называется *группой финслеровых метрических преобразований*.

Дифференцирование тождества (6.9) по \tilde{R}^t дает для картановского тензора (3.2) следующий закон преобразования:

$$C_{rst}(\tilde{R}) = \mathcal{F}_r^p\mathcal{F}_s^q\mathcal{F}_t^f C_{pqf}(R) + \frac{1}{2}g_{pq}(R)(\mathcal{F}_r^q\mathcal{F}_{st}^p + \mathcal{F}_s^q\mathcal{F}_{tr}^p + \mathcal{F}_t^q\mathcal{F}_{rs}^p) + \frac{1}{2}R_f\mathcal{F}_{rst}^f. \quad (6.12)$$

В метрическом случае (см. условие (6.10)) он упрощается и принимает вид

$$C_{rst}(\tilde{R}) = \mathcal{F}_r^p\mathcal{F}_s^q\mathcal{F}_t^f C_{pqf}(R) + \frac{1}{2}g_{pq}(R)(\mathcal{F}_r^q\mathcal{F}_{st}^p + \mathcal{F}_s^q\mathcal{F}_{tr}^p). \quad (6.13)$$

Наконец, условие

$$g_{pq}(R)(\mathcal{F}_r^q\mathcal{F}_{st}^p + \mathcal{F}_s^q\mathcal{F}_{tr}^p) = 0 \quad (6.14)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы выполнялся тензорный закон преобразования

$$C_{rst}(\tilde{R}) = \mathcal{F}_r^p\mathcal{F}_s^q\mathcal{F}_t^f C_{pqf}(R). \quad (6.15)$$

Очевидно, что те преобразования, которые оставляют инвариантной финслерову метрическую функцию, оставляют инвариантной и финслерову гамильтонову функцию. Проверим это:

$$H(\tilde{R}_s) = F(\tilde{R}^p) = F(R^p) = H(R_s)$$

(использовано (5.2) и (6.2)–(6.3)), так что действительно

$$H(\tilde{R}_s) = H(R_s). \quad (6.16)$$

Кососимметризация по индексам t и s в (6.13) приводит к равенству

$$g_{pq}\mathcal{F}_r^p\mathcal{F}_{st}^q = g_{pq}\mathcal{F}_s^p\mathcal{F}_{rt}^q, \quad (6.17)$$

использование которого обратно в (6.13) дает следующий результат:

$$\mathcal{F}_{tr}^p + \mathcal{F}_t^m\mathcal{F}_r^n C_m^p{}_n - \mathcal{F}_k^p C_t^k{}_r = 0. \quad (6.18)$$

Он, в частности, показывает, что при рассматриваемых преобразованиях тензор $\{C_m^p{}_n\}$ ведет себя “как коэффициенты связности”. Нетрудно проверить непосредственно, что из (6.18) вытекает, что *уравнение геодезических* (см. (7.7) в следующем Разделе 1.7) *инвариантно относительно введенных выше метрических преобразований*.

1.7. Использование геодезических

Важная роль понятия “геодезические” очевидна. В пространствах изучаемого типа геодезические могут быть непосредственно введены, следуя стандартной дифференциально-геометрической логике. А именно, задав кривую $C: R^p = R^p(s)$ в предположении C^2 -гладкости, *параметр финслеровой длины дуги s* вдоль кривой может быть введен с помощью дифференциала

$$ds = \sqrt{g_{pq}(R)dR^p dR^q}. \quad (7.1)$$

Мы будем предполагать, что кривая соединяет некоторые две точки P_1 и P_2 , и использовать интеграл

$$s(C; P_1, P) = \int_{P_1}^P ds \quad (7.2)$$

(см. рис. 1). *Касательные векторы*

$$U^p := \frac{dR^p}{ds} \quad (7.3)$$

к кривой C единичны:

$$g_{pq}(R)U^p U^q = 1 \quad (7.4)$$

(как следствие выбора (7.1) для параметра). Поскольку единичный ковариантный вектор может быть задан правилом $l_p = \partial F / \partial R^p$ (см. (2.18)), мы имеем тождество

$$l_p U^p = \frac{dF}{ds}. \quad (7.5)$$

Из условия стационарности

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0 \quad (7.6)$$

(с помощью обычных аргументов) получается *уравнение геодезических*

$$\frac{dU^p}{ds} + C_q^p{}_r(R)U^q U^r = 0 \quad (7.7)$$

с коэффициентами $C_q^p{}_r(R)$, играющими роль символов Кристоффеля (см. (3.7)).

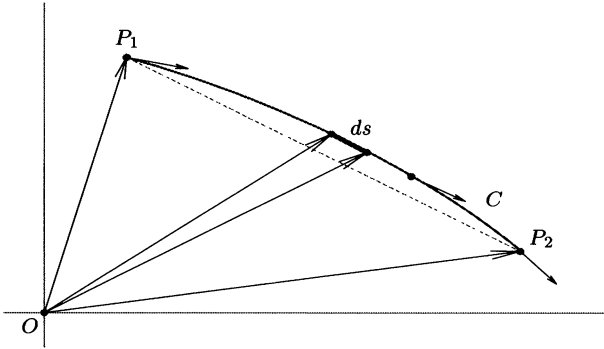


Рис. 1: Геодезическая C ; пунктир символизирует прямую, которая соединяла бы точки P_1 и P_2 кратчайшим путем при евклидовом подходе; указаны три касательных вектора.

В евклидовой геометрии коэффициенты $C_p^{q_r}$ тождественно равны нулю, вследствие чего класс геодезических состоит из прямых. Теперь это уже не так. Поскольку появляется тензор кривизны (см. (3.8) и (3.9)), геодезические будут вообще говоря кривыми линиями. Есть, тем не менее, один аналогичный класс решений, существование которого является следствием тождества (3.3). А именно, он состоит из лучей, выходящих из центра “ O ”, так что $R^p = A^p s$ с константами A^p (см. рис. 2). Действительно, тождество $A^p C_p^{q_r}(A) = 0$ (см. (3.3)) обращает в нуль второй член в левой части уравнения (7.7).

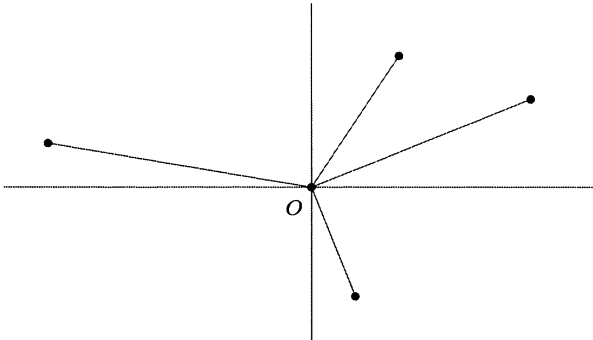


Рис. 2: Самый короткий путь достичь какой-либо точки из центра “ O ” пространства — это следовать по прямому отрезку (как и в евклидовой геометрии).

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 1.3. *Любой луч, выходящий из начальной точки “ O ”, является геодезической.*

Более глубокие следствия порождает

ТЕОРЕМА 1.4. *Вдоль любой геодезической финслерова метрическая функция F имеет квадратичный закон поведения*

$$F^2 = a^2 + 2bs + s^2, \quad (7.8)$$

где $a \geq 0$ и b — две константы, а s — длина дуги (7.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$l_p \frac{dU^p}{ds} = \frac{d(l_p U^p)}{ds} - U^p \frac{d(g_{pq} l^q)}{ds} = \frac{d(l_p U^p)}{ds} - U^p g_{pq} \frac{dl^q}{ds} = \frac{d^2 F}{ds^2} + \frac{1}{F} \left(\frac{dF}{ds} \right)^2 - \frac{1}{F}, \quad (7.9)$$

где на втором шаге были приняты во внимание тождества $l^q C_{pqr}(R) = 0$ (см. (3.3)), тогда как на последнем шаге была сделана подстановка $l^p = R^p/F$ и применены равенства (7.3)–(7.5). С другой стороны, из (7.7) следует $l_p \frac{dU^p}{ds} = 0$. Поэтому правая часть в (7.9) равна нулю, что может быть записано как

$$\frac{d^2(F^2)}{ds^2} = 2, \quad (7.10)$$

что и доказывает справедливость формулы (7.8).

ЗАМЕЧАНИЕ. Итак, вид поведения (7.8) не зависит от того, проводится ли финслерова обобщение евклидовой геометрии или нет. В евклидовом случае геодезические являются прямыми линиями: взяв для определенности размерность $N = 2$, мы получим для них уравнения $x = m + nt$, $y = p + qt$, так что $(ds)^2 = (n^2 + q^2)(dt)^2$, и воспроизводится в точности закон поведения вида (7.8) для евклидовой метрической функции $(F_{\text{Euclidean}})^2 = x^2 + y^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лучи соответствуют случаю $a = b$, поскольку при таком равенстве $F^2 = (a + s)^2$.

Дифференцирование функции (7.8) дает равенство

$$\frac{1}{2} \frac{dF^2}{ds} = b + s. \quad (7.11)$$

В нем правая часть обращается в нуль при $s = -b$, так что минимальное значение функции (7.8) равно $a^2 - b^2$. Поэтому верна

ТЕОРЕМА 1.5. *Кратчайшее расстояния от начальной точки “O” до финслеровой геодезической C равно*

$$F_{\min} = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (7.12)$$

Для согласия с положительной определенностью будем предполагать

$$a \geq |b|. \quad (7.13)$$

Поскольку

$$b = \frac{1}{2} \frac{dF^2}{ds} \Big|_{s=0}, \quad (7.14)$$

константа b может легко быть получена.

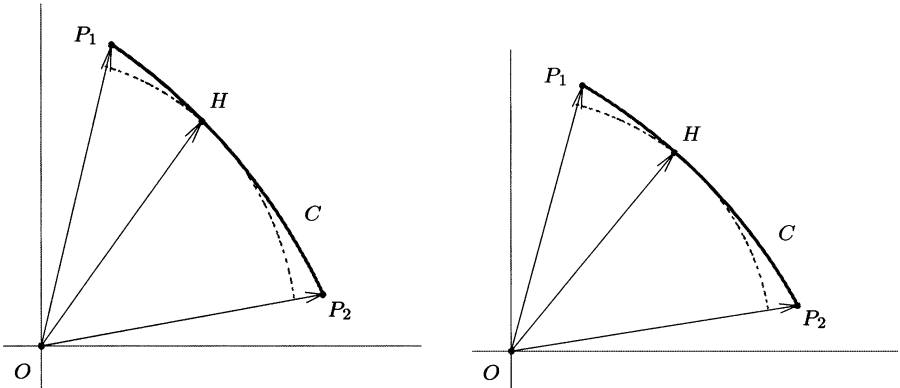


Рис. 3: Центрированный треугольник P_1OP_2 . На левом рисунке длина дуги P_1H равна $-b$ и предполагается $b < 0$. Вдоль промежутка P_1H финслерово расстояние (значение функции F) от точки “ O ” до точки геодезической C уменьшается, а на промежутке HP_2 — оно увеличивается. На правом рисунке предположено $b > 0$, так что на всей дуге P_1P_2 геодезической C расстояние от точки “ O ” до точки, принадлежащей дуге, монотонно увеличивается. Продолжение дуги, которое указано с помощью тире, встречает кратчайший луч OH вне фигуры P_1OP_2 . На обоих рисунках пунктир означает дугу евклидовой окружности с центром “ O ”.

Естественно использовать

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В центрированном треугольнике P_1OP_2 (см. рис. 3) вектор OH , где точка H на дуге геодезической соответствует значению $s = -b$, называется *высотой*.

Справедливо

$$|OH| = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Введем обозначение

$$\Delta s = s(C; P_1, P_2) \quad (7.15)$$

(см. (7.2)). Из (7.8) следует равенство

$$a^2 F^2(\Delta s) = (a^2 + b\Delta s)^2 + (\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s)^2. \quad (7.16)$$

Оно подсказывает удобную и естественную возможность ввести угол α согласно

$$a^2 + b\Delta s = aF(\Delta s) \cos \alpha \quad (7.17)$$

и

$$\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s = aF(\Delta s) \sin \alpha. \quad (7.18)$$

Соответственно этому мы вводим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Финслеров угол* α между двумя векторами (например, OP_1 и OP_2 на Рис. 1) задается следующим образом:

$$\alpha := \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s}. \quad (7.19)$$

Нетрудно проверить, что

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b\Delta s}{aF(\Delta s)}. \quad (7.20)$$

Используя (7.16), мы можем выдвинуть

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Финслерова теорема косинуса*

$$(\Delta s)^2 = F^2(\Delta s) + a^2 - 2aF(\Delta s) \cos \alpha \quad (7.21)$$

получается с помощью угла (7.19).

Следовательно в центрированном треугольнике существует универсальный метод введения углов μ и β :

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \sin \beta = \frac{-b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{-b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (7.22)$$

и

$$\cos \mu = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{F(\Delta s)}, \quad \sin \mu = \frac{\Delta s + b}{F(\Delta s)}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{a + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (7.23)$$

(см. рис. 4), откуда следует

$$\sqrt{a^2 - b^2} (\operatorname{tg} \mu + \operatorname{tg} \beta) = \Delta s. \quad (7.24)$$

Кроме того, получаются равенства

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \sin \gamma = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{F(\Delta s)} \quad (7.25)$$

для углов ϕ и γ . Если мы теперь используем (7.20), получим

$$\cos \alpha = \cos \mu \cos \beta - \sin \mu \sin \beta, \quad (7.26)$$

так что справедлива

ТЕОРЕМА 1.6. *Аддитивность*

$$\alpha = \mu + \beta \quad (7.27)$$

верна для введенного финслерова угла.

Также проверяется

ТЕОРЕМА 1.7. *Сумма*

$$\alpha + \phi + \gamma = \pi \quad (7.28)$$

верна для финслерова центрированного треугольника универсально.

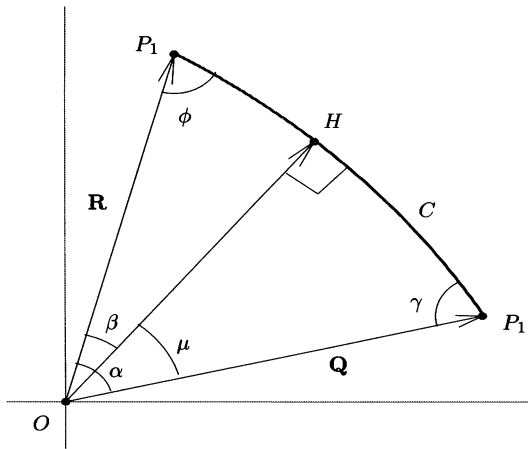


Рис. 4: Центрированный треугольник P_1OP_2 ; в нем предположено $b < 0$; длина дуги P_1H равна $-b$, а OH — высота.

На таком пути естественно ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расстояние $|R \ominus Q|$ между концами центрированных векторов задается формулой

$$|R \ominus Q|^2 = F^2(R) + F^2(Q) - 2F(R)F(Q) \cos \alpha \quad (7.29)$$

Мы также введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Финслерово скалярное произведение*

$$\langle R, Q \rangle = F(R)F(Q) \cos \alpha \quad (7.30)$$

записывается через введенный выше угол α .

Глава 2

Основные определения и свойства

2.1. Введение и мотивировка

Формально в основе евклидовых представлений лежит метод введения длины векторов с помощью квадратного корня от квадратичной формы. В настоящей Главе мы используем конкретное *аксиально-симметричное* обобщение такого метода. Опираясь на ряд конструктивных идей финслеровой геометрии, мы вводим соответствующую метрическую функцию и достаточно подробно описываем основные следствия. Обобщение характеризуется одним безразмерным параметром, который ниже обозначается как g . Он возникает как *параметр неевклидовости* и может принимать значения между -2 и 2 ; случай $g = 0$ отвечает обычному евклидову пространству.

Финслероид обобщает единичный шар. Аналогично тому, как в евклидовом подходе геометрическим местом концов единичных векторов, выходящих из фиксированной точки, является сфера, в изучаемом пространстве такие векторы образуют выпуклую поверхность вращения. Мы назвали охватываемую ею фигуру финслероидом ввиду ее внутренней связи с финслеровой метрической функцией. Из определения изучаемого пространства можно строго вывести, что индикатриса (поверхность) финслероида замкнутая, регулярная и строго выпуклая фигура. Ее форма зависит от значения параметра g .

Ниже в Разделе 2.2 мы вводим обозначения, определения и все начальные понятия для финслероидного пространства. Оно строится в предположении аксиальной симметрии и следовательно включает одно выделенное направление, которое мы часто будем условно представлять Z -осью (R^N -осью). Рассмотрения и построения проводятся на (центрированном) векторном пространстве. Предварительно вводится характеристическая функция B квадратичного типа, которая отличается от евклидовой суммы квадратов присутствием в ней перекрестного члена (см. (2.19)). Затем с помощью формул (2.26)–(2.29) мы определяем ФМФ K , на которой будем основываться. Характерной чертой этих формул является присутствие функции arctg . После этого мы приводим результаты вычислений тензорных величин для финслероидного пространства и обнаруживаем замечательное явление, упрощающее все последующие построения, что соответствующий картановский тензор имеет простую (и весьма уникальную) алгебраическую структуру (см. формулы (2.63)–(2.64)). Прямым следствием такого свойства является простой вид тензора кривизны, формула (2.65), из которо-

го, в свою очередь, вытекает постоянство кривизны индикатрисы (поверхности финслероида). Эта кривизна представляется формулой (2.69), согласно которой вводится характерный параметр g . Кривизна \mathcal{R} индикатрисы обладает свойством $\mathcal{R}_{\text{Finsleroid Indicatrix}} \xrightarrow{g \rightarrow 0} \mathcal{R}_{\text{Euclidean Sphere}} = 1$ (т.е. она согласована с принципом соответствия). В конце Раздела 2.2 приведены в явном виде все компоненты ассоциируемого картановского тензора. Многие вычисления удобно проводить с помощью генерирующей метрической функции V .

В Разделе 2.3 мы подробно показываем, как финслероидная теория преобразуется в ко-подход, и выводим ассоциируемую ФГФ H . Ее явный вид полностью аналогичен виду ФМФ K с точностью до подстановки $-g$ вместо g . Аналогия между представлениями (2.26)–(2.38) и (3.19)–(3.30) удивительно полная (что является весьма уникальным случаем среди метрик финслерова типа). gZ -четность и $g\hat{Z}$ -четность — фундаментальные свойства финслероидного пространства (см. (2.42) и (3.35)). В конце Раздела 2.3 мы указываем замечательное тождество (формула (3.57)), которое вносит дополнительную ясность в смысл и значение характерного параметра g .

В Разделе 2.4 мы выясняем детали вида финслероида и ко-финслероида. Экваториальным сечением финслероида в N -мерном пространстве является $(N - 1)$ -мерный шар радиуса q^{**} (см. формулу (4.15)). При увеличении значения $|g|$ высота и радиус экваториального сечения финслероида увеличиваются и одновременно его вершина приближается к центральной точке “ O ” (причем при $g > 0$ вершина опускается, а при $g < 0$ поднимается). При $|g| \rightarrow 2$ высота и ширина финслероида стремятся к бесконечности, а кривизна его поверхности (в индуцированной метрике) стремится к нулю, и он приближается к *предельному финслероиду*. При замене знака параметра g финслероид переворачивается. Имеется удобная возможность задавать финслероиды с закрепленной вершиной. Можно различать по ориентации up-финслероиды и down-финслероиды и соответственно вводить *геометрический заряд*. Вид и все черты ко-финслероида те же, что и у финслероида противоположного знака параметра g . В конце Раздела 2.4 читатель найдет серию рисунков (построенных в Maple9), которые показывают основные черты финслероида.

В Разделе 2.5 представлены результаты вычисления компонент специального ортонормированного репера и инвариантного ортонормированного репера (они могут появляться в различных приложениях). Ассоциируемые коэффициенты вращения Риччи легко вычисляются.

Финслероидное пространство, в отличие от евклидова пространства, не является плоским, т.е. его тензор кривизны не равен нулю. Оно, однако, является конформно-плоским, причем плоским оно становится только при вырождении в евклидово пространство (при $g = 0$). В Разделе 2.6 мы указываем явный вид конформных преобразований и вычисляем соответствующие коэффициенты. Конформный множитель оказывается степенной функцией от ФМФ K .

В изучаемом пространстве геодезические должны быть найдены как решения уравнения (7.7) из Главы 1 с коэффициентами $C_p^q r$, задаваемыми списком, приведенным в конце Раздела 2.2 настоящей Главы 2. Это — не легкая задача.

Однако есть удобный путь обойти сложности переходом в квазиевклидово пространство (см. Главу 3). Существенные упрощения возникают вследствие простоты структуры соответствующих символов Кристоффеля $N_p^q r$ (их представляет формула (2.9) в Главе 3). Поступая так и используя обратное квазиевклидово преобразование, общее решение для уравнения геодезических финслероидного пространства можно получить в явном и достаточно простом виде (Раздел 2.7), причем как в формулировке с граничными условиями (краевыми точками), так и в представлении с начальными данными. С его помощью оказывается возможным вывести угол между двумя векторами (постулируя, что теорема косинуса остается верной) и затем получить соответствующее скалярное произведение. Замечательно, что найденный угол α только постоянным множителем (равным $1/h$) отличается от евклидова угла в квазиевклидовом пространстве и, вследствие этого, аддитивен. Он обладает интересными свойствами (7.28)–(7.30). Финслероидные геодезические кривые, вообще говоря, не являются плоскими (но плоскими являются их квазиевклидовы прообразы). Использование промежуточного угла ν позволяет легко записывать решение для геодезических в компактном и наглядном виде и вычислять компоненты скорости. Длина дуги финслероидной геодезической находится в явном виде как функция начального и конечного векторов.

В Разделе 2.8 мы вводим финслероидные координаты, ограничиваясь для простоты формулировок трехмерным случаем. Они ближайшим образом обобщают сферические координаты евклидовой геометрии. Появляется качественно новое явление — *дефицит угла*. С помощью финслероидных координат удобно вычислять площади и объемы. При таких вычислениях легко придти к выводу, что при увеличении значения $|g|$ площадь поверхности финслероида и его объем увеличиваются, а при $|g| \rightarrow 2$ они стремятся к бесконечности, однако их отношение не изменяется. Оно имеет то же значение, что и в собственно евклидовой геометрии, и в этом смысле универсально (т.е. не зависит от того, проводится ли финслероидное обобщение евклидовой геометрии или нет; см. формулы (8.25)–(8.30) в Главе 2). Соответствующий тензор кривизны имеет только одну компоненту. Естественным образом появляются финслероидные тригонометрические функции. С их помощью можно представлять компоненты контра- и ко-векторов в виде, аналогичном тому, который обычно используется в собственно евклидовой геометрии.

В заключительном Разделе 2.9 настоящей Главы 2 мы кратко формулируем двухвекторное обобщение для ФМТ (основываясь на найденном финслероидном скалярном произведении двух векторов). Оно может позволить выработать дальнейшее обобщение финслероидной теории с помощью использования симметричного двухвекторного метрического тензора. В пределе равенства векторов он стремится точно к ФМТ (см. формулы (9.1)–(9.3)).

Все включенные в настоящую Главу 2 вычисления могут быть легко повторены внимательным читателем.

2.2. Исходные определения и наблюдения

Предположим, что задано N -мерное *центрированное векторное пространство* V_N . Обозначим через “ O ” центральную точку (центр) этого пространства, а через R — векторы, составляющие пространство и опирающиеся на эту точку, так что $R \in V_N$. Любой заданный вектор R указывает определенное направление в V_N . Фиксируем элемент $R_{(N)} \in V_N$, введем прямую линию e_N , ориентированную вдоль вектора $R_{(N)}$, и примем e_N за R^N -координатную ось в V_N . Таким способом мы получим топологическое произведение

$$V_N = V_{N-1} \times e_N \quad (2.1)$$

вместе с разбиением

$$R = \{\mathbf{R}, R^N\}, \quad R^N \in e_N \quad \text{и} \quad \mathbf{R} \in V_{N-1}. \quad (2.2)$$

Для удобства мы часто будем говорить о R^N -оси как об Z -оси:

$$R^N = Z, \quad (2.3)$$

так что

$$R = \{\mathbf{R}, Z\}. \quad (2.4)$$

Кроме того, мы введем евклидову метрику

$$q = q(\mathbf{R}) \quad (2.5)$$

на $(N - 1)$ -мерном векторном подпространстве V_{N-1} .

Относительно допустимого координатного базиса $\{e_a\}$ в V_{N-1} получим координатные представления

$$\mathbf{R} = \{R^a\} = \{R^1, \dots, R^{N-1}\} \quad (2.6)$$

и

$$R = \{R^p\} = \{R^a, R^N\} \equiv \{R^a, Z\}, \quad (2.7)$$

а также

$$q(\mathbf{R}) = \sqrt{r_{ab} R^a R^b}, \quad (2.8)$$

где r_{ab} — компоненты симметричного положительно-определенного тензора на V_{N-1} . Индексы (a, b, \dots) и (p, q, \dots) будут принимать значения из наборов $(1, \dots, N - 1)$ и $(1, \dots, N)$ соответственно; векторные индексы являются верхними, а ко-векторные индексы являются нижними; по повторяющимся верхним и нижним индексам автоматически производится суммирование; обозначения δ_{ij}^a и δ_{ab} будут использоваться для символа Кронекера. Переменные

$$w^a = \frac{R^a}{Z}, \quad w_a = r_{ab} w^b, \quad w = \frac{q}{Z}, \quad (2.9)$$

где

$$w \in (-\infty, \infty), \quad (2.10)$$

удобны в вычислениях (при $Z \neq 0$). В дальнейшем мы часто будем использовать ассоциируемый евклидов метрический тензор

$$r_{pq} = \{r_{NN} = 1, r_{Na} = 0, r_{ab}\}, \quad (2.11)$$

определенный на всем векторном пространстве V_N .

Задав параметр g на интервале $(-2, 2)$

$$-2 < g < 2, \quad (2.12)$$

введем удобные для дальнейших построений обозначения

$$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}g^2}, \quad (2.13)$$

$$G = \frac{g}{h}, \quad (2.14)$$

$$g_+ = \frac{1}{2}g + h, \quad g_- = \frac{1}{2}g - h, \quad g^+ = -\frac{1}{2}g + h, \quad g^- = -\frac{1}{2}g - h, \quad (2.15)$$

так что

$$g_+ + g_- = g, \quad g_+ - g_- = 2h, \quad g^+ + g^- = -g, \quad g^+ - g^- = 2h, \quad (2.16)$$

$$(g_+)^2 + (g_-)^2 = 2, \quad (g^+)^2 + (g^-)^2 = 2. \quad (2.17)$$

Справедлива симметрия

$$g_+ \overset{g \leftrightarrow -g}{\longleftrightarrow} -g_-, \quad g^+ \overset{g \leftrightarrow -g}{\longleftrightarrow} -g^-. \quad (2.18)$$

Характеристическая квадратичная форма

$$B(g; R) := Z^2 + gqZ + q^2 \equiv \frac{1}{2} \left[(Z + g_+q)^2 + (Z + g_-q)^2 \right] > 0 \quad (2.19)$$

имеет отрицательный дискриминант, а именно

$$D_{\{B\}} = -4h^2 < 0 \quad (2.20)$$

(как следствие формул (2.12) и (2.13)). При $Z \neq 0$ удобно так же использовать квадратичную форму

$$Q(g; w) := \frac{B}{Z^2}, \quad (2.21)$$

получая

$$Q(g; w) = 1 + gw + w^2 > 0, \quad (2.22)$$

вместе с функцией

$$E(g; w) := 1 + \frac{1}{2}gw. \quad (2.23)$$

Легко проверить тождество

$$E^2 + h^2w^2 = Q. \quad (2.24)$$

В пределе $g \rightarrow 0$ определение (2.19) вырождается в квадратичную форму начального метрического тензора (2.11) и, соответственно, упрощаются функции (2.19) и (2.21):

$$B|_{g=0} = r_{pq}R^pR^q, \quad Q|_{g=0} = 1 + w^2. \quad (2.25)$$

С помощью таких обозначений мы вводим ФМФ

$$K(g; R) = \sqrt{B(g; R)} J(g; R), \quad (2.26)$$

где

$$J(g; R) = e^{\frac{1}{2}G\Phi(g; R)}, \quad (2.27)$$

$$\Phi(g; R) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{q}{hZ} + \frac{G}{2} \right), \quad \text{если } Z \geq 0, \quad (2.28)$$

$$\Phi(g; R) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{q}{hZ} + \frac{G}{2} \right), \quad \text{если } Z \leq 0, \quad (2.29)$$

или в других удобных видах,

$$\Phi(g; R) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{L(g; R)}{hZ} \right), \quad \text{если } Z \geq 0, \quad (2.30)$$

$$\Phi(g; R) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{L(g; R)}{hZ} \right), \quad \text{если } Z \leq 0, \quad (2.31)$$

где

$$L(g; R) = q + \frac{g}{2}Z, \quad (2.32)$$

и

$$\Phi(g; R) = \operatorname{arctg} \frac{A(g; R)}{hq}, \quad (2.33)$$

где

$$A(g; R) = Z + \frac{1}{2}gq. \quad (2.34)$$

Эта ФМФ нормирована так, что

$$-\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.35)$$

а также

$$\Phi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } q = 0 \text{ и } Z > 0; \quad \Phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } q = 0 \text{ и } Z < 0. \quad (2.36)$$

Легко заметить, что

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{A}{hq} \quad (2.37)$$

и

$$\Phi|_{z=0} = \operatorname{arctg} \frac{G}{2}. \quad (2.38)$$

При этих условиях мы вводим \mathcal{E}_g^{PD} -пространство

$$\mathcal{E}_g^{PD} := \{V_N = V_{N-1} \times e_N; R \in V_N; g; K(g; R)\} \quad (2.39)$$

и будем говорить о нем как о *финслероидном пространстве*. Оно является положительно-определенным.

Правая часть в (2.26) может рассматриваться как функция от аргументов $\{g; q, Z\}$. Обозначим ее через \check{K} , так что

$$\check{K}(g; q, Z) = K(g; R). \quad (2.40)$$

Мы видим, что

$$\check{K}(g; q, -Z) \neq \check{K}(g; q, Z), \quad (2.41)$$

если только значение параметра не равно тривиальному $g = 0$. Вместо этого, для функции \check{K} справедливо свойство gZ -четности

$$\check{K}(-g; q, -Z) = \check{K}(g; q, Z). \quad (2.42)$$

Инвариантность относительно отражения $(N - 1)$ -пространства не нарушается:

$$K(g; R) \stackrel{R^a \rightleftarrows R^a}{\rightleftarrows} K(g; R) \quad (2.43)$$

(такая операция не изменяет величины q).

Часто при вычислениях удобно переписывать представление (2.26) в виде

$$K(g; R) = |Z|V(g; w) \quad (2.44)$$

(при $Z \neq 0$) с *генерирующей финслероидной метрической функцией*

$$V(g; w) = \sqrt{Q(g; w)} j(g; w). \quad (2.45)$$

Мы имеем

$$j(g; w) = J(g; 1, w).$$

Используя (2.22) и (2.27)–(2.31), получаем

$$V' = wV/Q, \quad V'' = V/Q^2, \quad (2.46)$$

$$(V^2/Q)' = -gV^2/Q^2, \quad (V^2/Q^2)' = -2(g+w)V^2/Q^3, \quad (2.47)$$

$$j' = -\frac{1}{2}gj/Q, \quad (2.48)$$

а также

$$\frac{1}{2}(V^2)' = wV^2/Q, \quad \frac{1}{2}(V^2)'' = (Q - gw)V^2/Q^2, \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{4}(V^2)''' = -gV^2/Q^3 \quad (2.50)$$

вместе с равенством

$$\Phi' = -h/Q, \quad (2.51)$$

где штрих (') означает дифференцирование по w .

Укажем дополнительно два полезных тождества

$$(A(g; R))^2 + h^2q^2 \equiv B(g; R), \quad (L(g; R))^2 + h^2Z^2 \equiv B(g; R). \quad (2.52)$$

Простые результаты (2.46)–(2.51) для производных сводят задачу вычисления компонент ассоциируемого ФМТ к легкому упражнению. Действительно, вычисляя предварительно компоненты ковариантного вектора

$$R_p := \frac{1}{2} \frac{\partial K^2(g; R)}{\partial R^p},$$

что дает

$$R_a = r_{ab}R^b \frac{K^2}{B}, \quad R_N = (Z + gq) \frac{K^2}{B}, \quad (2.53)$$

для компонент ФМТ

$$g_{pq}(g; R) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K^2(g; R)}{\partial R^p \partial R^q} = \frac{\partial R_p(g; R)}{\partial R^q}$$

получаем

$$g_{NN}(g; R) = [(Z + gq)^2 + q^2] \frac{K^2}{B^2}, \quad g_{Na}(g; R) = gqr_{ab}R^b \frac{K^2}{B^2}, \quad (2.54)$$

$$g_{ab}(g; R) = \frac{K^2}{B} r_{ab} - g \frac{r_{ad}R^d r_{be}R^e Z}{q} \frac{K^2}{B^2}. \quad (2.55)$$

Компоненты обратного тензора равны

$$g^{NN}(g; R) = (Z^2 + q^2) \frac{1}{K^2}, \quad g^{Na}(g; R) = -gqR^a \frac{1}{K^2}, \quad (2.56)$$

$$g^{ab}(g; R) = \frac{B}{K^2} r^{ab} + g(Z + gq) \frac{R^a R^b}{q} \frac{1}{K^2}. \quad (2.57)$$

Детерминант ФМТ (задаваемого формулами (2.54) и (2.55)) легко находится в виде

$$\det(g_{pq}(g; R)) = [J(g; R)]^{2N} \det(r_{ab}); \quad (2.58)$$

отсюда следует, если учесть (2.27)–(2.29), что

$$\det(g_{pq}) > 0 \quad \text{на всей области определения } V_N \setminus 0. \quad (2.59)$$

Сигнатура такого ФМТ строго положительна: $\text{sign}(g_{pq}) = (+ \cdots +)$.

Ассоциируемый угловой метрический тензор (формула (2.21) в Главе 1) может быть задан компонентами

$$h_{NN}(g; R) = q^2 \frac{K^2}{B^2}, \quad h_{Na}(g; R) = -Zr_{ab}R^b \frac{K^2}{B^2}, \quad (2.60)$$

$$h_{ab}(g; R) = \frac{K^2}{B} r_{ab} - (gZ + q) \frac{r_{ad}R^d r_{be}R^e}{q} \frac{K^2}{B^2}, \quad (2.61)$$

откуда, в частности, следует

$$\det(h_{ab}) = \det(g_{pq}) \frac{1}{V^2}. \quad (2.62)$$

Внимательное исследование компонент картановского тензора (они приведены в явном виде в конце настоящего раздела) ведет к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. *Картановский тензор, ассоциируемый с ФМФ (2.26), имеет следующий специальный алгебраический вид*

$$C_{pqr} = \frac{1}{N} \left(h_{pq}C_r + h_{pr}C_q + h_{qr}C_p - \frac{1}{C_s C^s} C_p C_q C_r \right) \quad (2.63)$$

со сверткой

$$C_s C^s = \frac{N^2}{4K^2} g^2. \quad (2.64)$$

С помощью (2.63) выражение для тензора кривизны (см. (3.9) в Главе 1) может быть сведено к простому виду А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. *Тензор кривизны пространства \mathcal{E}_g^{PD} имеет специальный вид*

$$S_{pqrs} = \frac{S^*}{K^2} (h_{pr}h_{qs} - h_{ps}h_{qr}) \quad (2.65)$$

со значением

$$S^* = -\frac{1}{4}g^2. \quad (2.66)$$

ФМФ (2.26) можно использовать, чтобы ввести единичную фигуру

$$\mathcal{F}_g^{PD} := \{R \in V_N : K(g; R) \leq 1\} \quad (2.67)$$

и охватывающую ее $(N - 1)$ -мерную гиперповерхность

$$\mathcal{I}_g^{PD} := \{R \in V_N : K(g; R) = 1\}. \quad (2.68)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы назовем \mathcal{F}_g^{PD} *финслероидом*, а \mathcal{I}_g^{PD} — *индикатрисой* финслероида.

ЗАМЕЧАНИЕ. $\mathcal{I}_{g=0}^{PD}$ является $(N - 1)$ -мерной сферой, а следовательно $\mathcal{F}_{g=0}^{PD}$ является $(N - 1)$ -мерным шаром. Ср. Раздел 1.4 в Главе 1.

Используя формулу $\mathcal{R} = 1 + S^*$ для величины кривизны индикатрисы (см. (4.37) в Главе 1), из (2.65)–(2.66) делаем вывод, что

$$\mathcal{R}_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = h^2 = 1 - \frac{1}{4}g^2, \quad 0 < \mathcal{R}_{\text{Finsleroid Indicatrix}} \leq 1. \quad (2.69)$$

Тот факт, что величина S^* не зависит от векторов R , геометрически означает, что кривизна индикатрисы является константой. Следовательно верна

ТЕОРЕМА 2.3. *Поверхность финслероида является пространством постоянной кривизны с положительным значением (2.69) для кривизны.*

Сравнивая результат (2.69) и формулы (2.19)–(2.20), можно утверждать, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.4. Значение (2.66) кривизны соответствует дискриминанту (2.20) исходной характеристической квадратичной формы (2.19) просто согласно равенству

$$\mathcal{R}_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = -\frac{1}{4}D_{\{B\}}. \quad (2.70)$$

Точкам индикатрисы \mathcal{I}_g^{PD} , очевидно, соответствуют единичные векторы

$$l^p = \frac{R^p}{K(g; R)}, \quad (2.71)$$

так что

$$K(g; l^p) \equiv 1 \quad (2.72)$$

(ср. формулы (2.18) и (2.19) в Главе 1). Они могут быть удобно параметризованы следующим образом:

$$l^a = n^a \frac{\sin f}{h} \frac{1}{J}, \quad l^N = (\cos f - \frac{1}{2}G \sin f) \frac{1}{J}, \quad (2.73)$$

где

$$f \in [0, \pi] \quad (2.74)$$

и n^a — компоненты, удовлетворяющие тождеству $r_{ab}n^an^b = 1$; кроме того,

$$J = \exp\left(-\frac{1}{2}G(f - \frac{\pi}{2})\right) \quad (2.75)$$

(ср. (2.27)). Читателю предлагается проверить, что скаляр (2.34) представляется в виде

$$A(g; l) = \frac{1}{J} \cos f \quad (2.76)$$

и что верно

$$\frac{hq}{A(g; l)} = \operatorname{tg} f. \quad (2.77)$$

Из (2.33) вытекает равенство

$$\Phi(g; l) = \frac{\pi}{2} - f. \quad (2.78)$$

Для функции (2.19) получаем

$$B(g; l) = \frac{1}{J^2}. \quad (2.79)$$

Ковариантный образ формул (2.73) имеет вид

$$l_a = n_a \frac{J}{h} \sin f, \quad l_N = J(\cos f + \frac{1}{2}G \sin f), \quad (2.80)$$

так что $H(g; l_p) \equiv 1$ и $l_a l^a + l_N l^N \equiv 1$.

Чему равна площадь поверхности финслероида? Введем тензор $\{i_{ab}\}$ с компонентами

$$i_{ab}(w^c) = \frac{h_{ab}}{V^2}. \quad (2.81)$$

Находим

$$\det(i_{ab}) = \frac{1}{V^{2(N-1)}} \det(h_{ab}), \quad (2.82)$$

так что

$$\det(i_{ab}) = \frac{1}{V^{2(N-1)}} \frac{1}{V^2} \det(g_{pq}) = \frac{1}{V^{2(N-1)}} \frac{1}{V^2} j^{2N} \det(r_{ab}) = \frac{1}{Q^N} \det(r_{ab})$$

(использованы формулы (2.62), (2.58) и (2.45)). Следовательно искомая площадь равна

$$S_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = S_+ + S_- \quad (2.83)$$

со значениями

$$S_+ = \int_+ \sqrt{\det(i_{ab})} dw^1 \dots dw^{N-1}$$

и

$$S_- = \int_- \sqrt{\det(i_{ab})} dw^1 \dots dw^{N-1},$$

где знак $+$ относится к верхней части финслероида, а знак $-$ относится к нижней части финслероида. В другой записи:

$$S_+ = \sqrt{\det(r_{ab})} \int_+ \frac{1}{Q^{N/2}} dw^1 \dots dw^{N-1} \quad (2.84)$$

и

$$S_- = \sqrt{\det(r_{ab})} \int_- \frac{1}{Q^{N/2}} dw^1 \dots dw^{N-1}. \quad (2.85)$$

В размерности

$$N = 3 \quad (2.86)$$

получаем значения

$$S_+ = 2\pi \sqrt{\det(r_{ab})} \int_0^\infty \frac{w dw}{(1 + gw + w^2)^{3/2}} = \frac{1}{1 + \frac{g}{2}} \quad (2.87)$$

и

$$S_- = 2\pi \sqrt{\det(r_{ab})} \int_0^\infty \frac{w dw}{(1 - gw + w^2)^{3/2}} = \frac{1}{1 - \frac{g}{2}}, \quad (2.88)$$

откуда вытекает следующий результат:

$$S_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = \frac{4\pi}{h^2} \sqrt{\det(r_{ab})}. \quad (2.89)$$

В заключение для соответствующего картановского тензора $\{C_{pqr}\}$ (см. определение (3.1) в Главе 1) выпишем явно компоненты:

$$R^N C_{NNN} = gw^3 V^2 Q^{-3}, \quad R^N C_{aNN} = -gww_a V^2 Q^{-3},$$

$$R^N C_{abN} = \frac{1}{2}gwV^2 Q^{-2}r_{ab} + \frac{1}{2}g(1 - gw - w^2)w_a w_b w^{-1}V^2 Q^{-3},$$

$$R^N C_{abc} = -\frac{g}{2}V^2 Q^{-2}w^{-1}(r_{ab}w_c + r_{ac}w_b + r_{bc}w_a) + gw_a w_b w_c w^{-3} \left(\frac{Q}{2} + gw + w^2 \right) V^2 Q^{-3};$$

а также

$$R^N C_N{}^N{}_N = gw^3/Q^2, \quad R^N C_a{}^N{}_N = -gww_a/Q^2, \quad R^N C_N{}^a{}_N = -gw(1+gw)w^a/Q^2,$$

$$R^N C_a{}^N{}_b = \frac{1}{2}gwr_{ab}/Q + \frac{1}{2}g(1 - gw - w^2)w_a w_b/wQ^2,$$

$$R^N C_N{}^a{}_b = \frac{1}{2}gw\delta_b^a/Q + \frac{1}{2}g(1 + gw - w^2)w^a w_b/wQ^2,$$

$$R^N C_a{}^b{}_c = -\frac{g}{2}(\delta_a^b w_c + \delta_c^b w_a + (1+gw)r_{ac}w^b)/wQ + \frac{g}{2}(gwQ + Q + 2w^2)w_a w^b w_c/w^3 Q^2.$$

Они вычислялись с помощью формул (2.54)–(2.57). Вычисление свертков (см. (3.5) в Главе 1) дает

$$R^N C_N = \frac{N}{2}gwQ^{-1}, \quad R^N C_a = -\frac{N}{2}g(w_a/w)Q^{-1},$$

$$R^N C^N = \frac{N}{2}gw/V^2, \quad R^N C^a = -\frac{N}{2}gw^a(1+gw)/wV^2,$$

$$C^N = \frac{N}{2}gwR^N K^{-2}, \quad C^a = -\frac{N}{2}gw^a(1+gw)w^{-1}R^N K^{-2},$$

откуда следует равенство

$$C_p C^p = \frac{N^2}{4K^2}g^2.$$

Использование формул

$$R^N C_a{}^b{}_c r^{ac} = -g\frac{w^b}{w}\frac{1+gw}{Q}\left(\frac{N-2}{2} + \frac{1}{Q}\right), \quad R^N C_a{}^b{}_c w^a w^c = -g\frac{w}{Q^2}(1+gw)w^b$$

полезно во многих вычислениях, включающих компоненты $C_p{}^q{}_r$.

2.3. Ассоциируемая финслерова гамильтонова функция

Рассматривая ко-пространство \hat{V}_N , дуальное к векторному пространству V_N , использованному в предыдущем Разделе 2.2, и обозначая через \hat{R} соответствующие ко-векторы, так что $\hat{R} \in \hat{V}_N$, мы можем ввести ко-партнеров к формулам (2.1)–(2.11), получая топологическое произведение

$$\hat{V}_N = \hat{V}_{N-1} \times \hat{e}_N \quad (3.1)$$

и разбиение

$$\hat{R} = \{\hat{\mathbf{R}}, R_N\}, \quad R_N \in \hat{e}_N \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{R}} \in \hat{V}_{N-1}. \quad (3.2)$$

Далее мы будем использовать обозначения

$$R_N = \hat{Z} \quad (3.3)$$

и

$$\hat{R} = \{\hat{\mathbf{R}}, \hat{Z}\} \quad (3.4)$$

и введем метрику

$$\hat{q} = \hat{q}(\hat{\mathbf{R}}) \quad (3.5)$$

на $(N - 1)$ -мерном ко-векторном пространстве \hat{V}_{N-1} .

Относительно координатного базиса $\{\hat{e}_a\}$, дуального к базису $\{e_a\}$, мы получим в \hat{V}_{N-1} координатные представления

$$\hat{\mathbf{R}} = \{R_a\} = \{R_1, \dots, R_{N-1}\}, \quad (3.6)$$

$$\hat{R} = \{R_p\} = \{R_a, R_N\} \equiv \{R_a, \hat{Z}\} \quad (3.7)$$

и

$$\hat{q}(\hat{\mathbf{R}}) = \sqrt{r^{ab} R_a R_b}, \quad (3.8)$$

где r^{ab} — ковариантные компоненты симметричного положительно-определенного тензора, определенного на \hat{V}_{N-1} ; тензор определяется взаимностью $r_{ab} r^{bc} = \delta_a^c$.

Переменные

$$p_a = R_a / \hat{Z}, \quad p^a = r^{ab} p_b, \quad p = \hat{q} / \hat{Z}, \quad (3.9)$$

где

$$p \in (-\infty, \infty), \quad (3.10)$$

удобны для использования при $\hat{Z} \neq 0$. Ко-версия

$$r^{pq} = \{r^{NN} = 1, r^{Na} = 0, r^{ab}\} \quad (3.11)$$

исходного метрического тензора (2.11) хорошо определена на всем пространстве \hat{V}_N . Параметр g , введенный выше формулами (2.12)–(2.13), как и последующие формулы (2.14)–(2.21), применимы так же и в ко-подходе.

Характеристическая квадратичная ко-форма

$$\hat{B}(g; R) = \hat{Z}^2 - g\hat{q}\hat{Z} + \hat{q}^2 \equiv \frac{1}{2} \left[(\hat{Z} + g^+\hat{q})^2 + (\hat{Z} + g^-\hat{q})^2 \right] > 0 \quad (3.12)$$

имеет отрицательный дискриминант:

$$D_{\{\hat{B}\}} = -4h^2 < 0, \quad (3.13)$$

(ср. (2.19) и (2.20)). При $\hat{Z} \neq 0$ удобно в вычислениях использовать квадратичную форму

$$\hat{Q}(g; p) := \hat{B}/(\hat{Z})^2, \quad (3.14)$$

так что

$$\hat{Q}(g; p) = 1 - gp + p^2 > 0, \quad (3.15)$$

и функцию

$$\hat{E}(g; p) := 1 - \frac{1}{2}gp. \quad (3.16)$$

Аналогично (2.24)–(2.25) мы получаем равенства

$$\hat{E}^2 + h^2p^2 = Q \quad (3.17)$$

и

$$\hat{B}|_{g=0} = r^{pq} R_p R_q, \quad \hat{Q}|_{g=0} = 1 + p^2. \quad (3.18)$$

Теперь мы введем *финслероидную гамильтонову функцию*

$$H(g; \hat{R}) = \sqrt{\hat{B}(g; \hat{R})} \hat{J}(g; \hat{R}), \quad (3.19)$$

где

$$\hat{J}(g; \hat{R}) = e^{-\frac{1}{2}G\hat{\Phi}(g; \hat{R})} \quad (3.20)$$

и

$$\hat{\Phi}(g; \hat{R}) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{G}{2} - \arctg \left(\frac{\hat{q}}{h\hat{Z}} - \frac{G}{2} \right), \quad \text{если } \hat{Z} \geq 0, \quad (3.21)$$

$$\hat{\Phi}(g; \hat{R}) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{G}{2} - \arctg \left(\frac{\hat{q}}{h\hat{Z}} - \frac{G}{2} \right), \quad \text{если } \hat{Z} \leq 0, \quad (3.22)$$

или в других записях

$$\hat{\Phi}(g; \hat{R}) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{G}{2} - \arctg \left(\frac{\hat{L}(g; \hat{R})}{h\hat{Z}} \right), \quad \text{если } \hat{Z} \geq 0, \quad (3.23)$$

$$\hat{\Phi}(g; \hat{R}) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{G}{2} - \arctg \left(\frac{\hat{L}(g; \hat{R})}{h\hat{Z}} \right), \quad \text{если } \hat{Z} \leq 0, \quad (3.24)$$

где

$$\hat{L}(g; \hat{R}) = \hat{q} - \frac{g}{2} \hat{Z} \quad (3.25)$$

и

$$\hat{\Phi}(g; \hat{R}) = \arctg \frac{\hat{A}(g; \hat{R})}{h\hat{q}} \quad (3.26)$$

с функцией

$$\hat{A}(g; \hat{R}) = \hat{Z} - \frac{g}{2} \hat{q}. \quad (3.27)$$

Справедливо

$$-\frac{\pi}{2} \leq \hat{\Phi} \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.28)$$

$$\hat{\Phi} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{где } \hat{q} = 0 \text{ и } \hat{Z} > 0; \quad \hat{\Phi} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{где } \hat{q} = 0 \text{ и } \hat{Z} < 0, \quad (3.29)$$

а также

$$\hat{\Phi}|_{\hat{z}=0} = -\arctg \frac{G}{2}. \quad (3.30)$$

При этих условиях мы скажем, что изучаем *ко-финслероидное пространство*:

$$\hat{\mathcal{E}}_g^{PD} := \{\hat{V}_N = \hat{V}_{N-1} \times \hat{e}_N; \hat{R} \in \hat{V}_N; g; H(g; \hat{R})\}. \quad (3.31)$$

Функция (3.21) внутренне связана с функцией (2.27), а именно,

$$\hat{J}(g; \hat{R}) = \frac{1}{J(g; R(g; \hat{R}))}. \quad (3.32)$$

Трактуя правую часть определения (3.19) как функцию \check{H} аргументов $\{g; \hat{q}, \hat{Z}\}$, так что

$$\check{H}(g; \hat{q}, \hat{Z}) = H(g; \hat{R}), \quad (3.33)$$

мы немедленно придем к выводу, что верен ко-аналог

$$\check{H}(g; \hat{q}, -\hat{Z}) \neq \check{H}(g; \hat{q}, \hat{Z}) \quad (3.34)$$

(не допуская здесь тривиального случая $g = 0$) для формул (2.41)–(2.43) и $g\hat{Z}$ -четность

$$\check{H}(-g; \hat{q}, -\hat{Z}) = \check{H}(g; \hat{q}, \hat{Z}), \quad (3.35)$$

а также симметрия

$$H(g; R) \xrightarrow{R_a \leftrightarrow -R_a} H(g; R). \quad (3.36)$$

Можно представить ФГФ (3.19) в виде

$$H(g; \hat{R}) = |\hat{Z}|W(g; p) \quad (3.37)$$

(использовано (3.9)) с генерирующей ко-функцией

$$W(g; p) = \sqrt{\hat{Q}(g; p)} \hat{j}(g; p). \quad (3.38)$$

Мы имеем

$$\hat{j}(g; p) = \hat{J}(g; 1, p).$$

Дифференцирование дает

$$W' = pW/\hat{Q}, \quad W'' = W/\hat{Q}^2, \quad (3.39)$$

$$(W^2/\hat{Q})' = gW^2/\hat{Q}^2, \quad (W^2/\hat{Q}^2)' = 2(g-p)W^2/\hat{Q}^3, \quad (3.40)$$

$$\hat{j}' = \frac{1}{2}g\hat{j}/\hat{Q}, \quad (3.41)$$

а также

$$\frac{1}{2}(W^2)' = pW^2/\hat{Q}, \quad \frac{1}{2}(W^2)'' = (\hat{Q} + gp)W^2/\hat{Q}^2, \quad (3.42)$$

вместе с равенствами

$$\frac{1}{4}(W^2)''' = gW^2/\hat{Q}^3 \quad (3.43)$$

и

$$\hat{\Phi}' = -h/\hat{Q}; \quad (3.44)$$

штрих (') обозначает дифференцирование по p .

Нетрудно проверить справедливость тождеств

$$(\hat{A}(g; \hat{R}))^2 + h^2\hat{q}^2 = \hat{B}(g; \hat{R}), \quad (\hat{L}(g; \hat{R}))^2 + h^2\hat{Z}^2 = \hat{B}(g; \hat{R}). \quad (3.45)$$

Аналогично (2.53)–(2.57) последующие простые вычисления дают компоненты

$$R^p := \frac{1}{2} \frac{\partial H^2(g; \hat{R})}{\partial R_p}$$

со значениями

$$R^N = (\hat{Z} - g\hat{q}) \frac{H^2}{\hat{B}}, \quad R^a = r^{ab} R_b \frac{H^2}{\hat{B}}, \quad (3.46)$$

а также компоненты

$$g^{pq}(g; \hat{R}) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2(g; \hat{R})}{\partial R_p \partial R_q} = \frac{\partial R^p(g; \hat{R})}{\partial R_q},$$

для которых

$$g^{NN}(g; \hat{R}) = [(\hat{Z} - g\hat{q})^2 + \hat{q}^2] \frac{H^2}{\hat{B}^2}, \quad g^{Na}(g; \hat{R}) = -g\hat{q}r^{ab} R_b \frac{H^2}{\hat{B}^2}, \quad (3.47)$$

$$g^{ab}(g; \hat{R}) = \frac{H^2}{\hat{B}} r^{ab} + g \frac{r^{ad} R_d r^{be} R_e \hat{Z} H^2}{\hat{q} \hat{B}^2}. \quad (3.48)$$

Компоненты взаимного метрического тензора равны

$$g_{NN}(g; \hat{R}) = (\hat{Z}^2 + \hat{q}^2) \frac{1}{H^2}, \quad g_{Na}(g; \hat{R}) = g \hat{q} R_a \frac{1}{H^2}, \quad (3.49)$$

$$g_{ab}(g; \hat{R}) = \frac{\hat{B}}{H^2} r_{ab} - g(\hat{Z} - g\hat{q}) \frac{R_a R_b}{\hat{q}} \frac{1}{H^2}. \quad (3.50)$$

Простейший способ прийти от $\Phi M \Phi$ (2.26)–(2.29) к $\Phi \Gamma \Phi$ (3.19)–(3.22) основывается на наблюдении, что формула (2.53) влечет за собой равенства

$$p_a = \frac{w_a}{1 + gw}, \quad w_a = \frac{p_a}{1 - gp}.$$

Получаем

$$p = \frac{w}{1 + gw}, \quad w = \frac{p}{1 - gp}, \quad 1 + gw = \frac{1}{1 - gp},$$

откуда вытекают соотношения

$$E(g; w) = \frac{\hat{E}(g; p)}{1 - gp}, \quad \frac{E(g; w)}{\sqrt{Q(g; w)}} = \frac{\hat{E}(g; p)}{\sqrt{\hat{Q}(g; p)}}$$

и

$$Q(g; w) = \frac{\hat{Q}(g; p)}{(1 - gp)^2} = (1 + gw)^2 \hat{Q}(g; p)$$

вместе с равенством

$$\frac{1 + gw}{Q(g; w)} = \frac{1}{\sqrt{Q(g; w) \hat{Q}(g; p)}}.$$

Находим

$$\hat{Z} = (Z + gq) \frac{K^2}{B} = (Z + gq) \frac{K^2}{Z^2 Q} = \frac{1 + gw}{Q} \frac{K^2}{Z} = \frac{1}{\sqrt{Q \hat{Q}}} \frac{K^2}{Z}$$

(на первом шаге использовано второе из равенств (2.53)). Следовательно, справедливо равенство

$$\hat{Z} = \frac{1}{\sqrt{Q \hat{Q}}} \frac{KH}{Z},$$

где для $\Phi \Gamma \Phi$ нами было использовано фундаментальное определение (5.2) из Главы 1. Принимая во внимание представления $K = |Z|V$ и $H = |\hat{Z}|W$ (см. (2.44) и (3.37)), получаем тождество

$$V^2 W^2 = Q \hat{Q},$$

которое, после использования равенства $V = \sqrt{Q}j$ (см. (2.45)), тут же дает представление (3.19)–(3.22) для $\Phi \Gamma \Phi$ вместе с равенством (3.32).

Таким образом нами доказана

ТЕОРЕМА 2.5. *Представления (3.19)–(3.22) ассоциируют требуемую $\Phi\Gamma\Phi$ для основной $\Phi M\Phi$, заданной формулами (2.26)–(2.29).*

В полной аналогии с определениями (2.67) и (2.68) введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При заданной $\Phi\Gamma\Phi$ (3.19)–(3.22) единичная фигура

$$\hat{\mathcal{F}}_g^{PD} := \{\hat{R} \in \hat{V}_N : H(g; \hat{R}) \leq 1\} \quad (3.51)$$

и охватывающая ее $(N - 1)$ -мерная гиперповерхность

$$\hat{\mathcal{I}}_g^{PD} := \{\hat{R} \in \hat{V}_N : H(g; \hat{R}) = 1\} \quad (3.52)$$

называются соответственно *ко-финслероидом* и *ко-индикатрисой*.

Теоремы 2.3 и 2.4, доказанные в предыдущем Разделе 2.2, могут точно быть переформулированы и при ко-подходе.

ТЕОРЕМА 2.6. *Поверхность ко-финслероида является пространством постоянной положительной кривизны, значение которой точно равно значению кривизны для финслероида:*

$$\mathcal{R}_{\text{Co-Finsleroid Surface}} = \mathcal{R}_{\text{Finsleroid Indicatrix}} \quad (3.53)$$

и

$$\mathcal{R}_{\text{Co-Finsleroid Surface}} = h^2 = 1 - \frac{1}{4}g^2, \quad 0 < \mathcal{R}_{\text{Co-Finsleroid Surface}} \leq 1. \quad (3.54)$$

Справедливо представление

$$\mathcal{R}_{\text{Co-Finsleroid Surface}} = -\frac{1}{4}D_{\{\hat{B}\}}. \quad (3.55)$$

ТЕОРЕМА 2.7. *Симметрия*

$$K(g; R) \left\{ \begin{array}{l} g \longleftrightarrow -g, \\ R \longleftrightarrow \hat{R} \\ \iff \end{array} \right\} H(g; \hat{R}) \quad (3.56)$$

строго выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что использование соотношений (3.46) в правых частях представлений (3.49)–(3.50) прямо приводит к компонентам (2.56)–(2.57) для ФМТ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Справедливо интересное тождество

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{w} = g. \quad (3.57)$$

Его можно было бы принять за определение характерного параметра g .

2.4. Вид финслероида и ко-финслероида

Запишем уравнение (2.68) для индикатрисы \mathcal{I}_g^{PD} (поверхности финслероида) в виде

$$\check{K}(g; q, Z) = 1, \quad (4.1)$$

используя метрическую функцию (2.40) от трех аргументов. Оно не может быть разрешено относительно функции

$$Z = Z(g; q) \quad (4.2)$$

в явном виде из-за сложности правых частей формул (2.26)–(2.29). Тем не менее, дифференцирование тождества

$$\check{K}(g; q, Z(g; q)) = 1 \quad (4.3)$$

дает, после использования (2.46), простые результаты для производных:

$$\frac{\partial Z(g; q)}{\partial q} = -\frac{q}{Z + gq}, \quad \frac{\partial^2 Z(g; q)}{\partial q^2} = -\frac{B(g; R)}{(Z + gq)^3}. \quad (4.4)$$

Справедливы предельные равенства

$$\left. \frac{dZ(g; q)}{dq} \right|_{q=0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dZ(g; q)}{dq} \xrightarrow{Z \rightarrow +0} -\frac{1}{g}. \quad (4.5)$$

Обратно для функции $q = q(g; Z)$, удовлетворяющей (4.1), получаем

$$\frac{\partial q}{\partial Z} = -g - \frac{Z}{q}, \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 q}{\partial Z^2} = -\frac{B(g; R)}{q^3} < 0. \quad (4.6)$$

Мы видим, что

$$\frac{\partial q}{\partial Z} > 0, \quad \text{если} \quad Z < -gq; \quad \frac{\partial q}{\partial Z} < 0, \quad \text{если} \quad Z > -gq. \quad (4.7)$$

Вышеприведенные формулы, в частности отрицательный знак в правых частях производных (4.4) и (4.6), может быть использован для прямой проверки следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.8. *Поверхность финслероида является замкнутой, регулярной и строго выпуклой фигурой.*

Ко-финслероид, описываемый уравнением

$$\check{H}(g; \hat{q}, \hat{Z}) = 1 \quad (4.8)$$

(см. формулы (3.33) и (3.52)), может быть рассмотрен вполне аналогично, что ведет к соотношениям, получающимся из (4.4)–(4.7) просто формальной заменой $\{g \rightarrow -g, R \rightarrow \hat{R}\}$ (см. свойство симметрии (3.56)).

Следовательно справедлива

ТЕОРЕМА 2.9. *Поверхность ко-финслероида является замкнутой, регулярной и строго выпуклой фигурой.*

Прямым геометрическим следствием симметрии (3.56) является

ТЕОРЕМА 2.10. *При отражении $g \rightarrow -g$ финслероид и ко-финслероид зеркально отображают друг друга:*

$$\mathcal{F}_g^{PD} \stackrel{g \leftrightarrow -g}{\iff} \hat{\mathcal{F}}_{-g}^{PD}. \quad (4.9)$$

Использование формул (2.26)–(2.29) в (4.1) прямо приводит к выводу, что значение

$$q^* := q|_{Z=0} \quad (4.10)$$

величины q на индикатрисе задается согласно

$$q^*(g) = \exp\left(-\frac{G}{2} \operatorname{arctg} \frac{G}{2}\right) \quad (4.11)$$

и что определения

$$Z|_{q=0} = Z_1(g), \quad \text{когда } Z < 0, \quad \text{и} \quad Z|_{q=0} = Z_2(g), \quad \text{когда } Z > 0, \quad (4.12)$$

ведут к значениям

$$Z_1(g) = -e^{G\pi/4} \quad \text{и} \quad Z_2(g) = e^{-G\pi/4}. \quad (4.13)$$

Таким образом, при любом заданном значении g мы получаем простое и явное значение для высоты финслероида.

ТЕОРЕМА 2.11. *Высота финслероида равна*

$$Z_2(g) - Z_1(g) = 2 \cosh \frac{G\pi}{4}. \quad (4.14)$$

Из (4.6) следует

$$\frac{\partial q}{\partial Z} = 0, \quad \text{если } Z = Z^{**} \quad \text{с} \quad Z^{**} = -gq^{**}. \quad (4.15)$$

Подстановка такого значения Z^{**} в (2.26)–(2.29) дает

$$\Phi^{**} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \frac{g^2 - 2}{2gh}, \quad \text{если } Z^{**} \geq 0 \sim g < 0, \quad (4.16)$$

$$\Phi^{**} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{G}{2} - \operatorname{arctg} \frac{g^2 - 2}{2gh}, \quad \text{если } Z^{**} \leq 0 \sim g > 0, \quad (4.17)$$

вместе с равенствами

$$q^{**}(g) = e^{-\frac{1}{2}G\Phi^{**}}, \quad (4.18)$$

$$Z^{**}(g) = -g e^{-\frac{1}{2}G\Phi^{**}}, \quad (4.19)$$

а также

$$A^{**}(g) = -\frac{1}{2}g e^{-\frac{1}{2}G\Phi^{**}}, \quad \sqrt{B^{**}(g)} = e^{-\frac{1}{2}G\Phi^{**}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (Гипер)плоскость

$$\mathcal{P} := \{R \in \mathcal{P} : R^N = Z^{**}\}$$

называется *экваториальной*. *Экваториальным сечением* финслероида называется фигура, получаемая пересечением финслероида такой (гипер)плоскостью. *Экватором* финслероида называется поверхность экваториального сечения финслероида.

В соответствии с формулами (4.15)–(4.18) справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.12. *Экваториальным сечением финслероида является шар. Экватором финслероида $\mathcal{F}_g^{PD} \subset V_N$ для N -мерного пространства является $(N - 1)$ -мерная сфера радиуса $q^{**}(g)$.*

Для финслероида существенна ориентация вдоль оси Z . Соответственно мы скажем, что финслероид при $g > 0$ ориентирован вверх, а при $g < 0$ — вниз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Вершиной* финслероида называется его верхняя точка, если $g > 0$, и его нижняя точка, если $g < 0$.

Это уточнение разбивает множество финслероидов на два альтернативных класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Up-финслероиды и down-финслероиды:*

$$g > 0 \sim \text{up-финслероид}$$

и

$$g < 0 \sim \text{down-финслероид}.$$

В таком контексте естественно ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Заряд финслероида:*

$$\mathcal{G} = \text{sign}(g),$$

так что

$$\mathcal{G} = -1, 0, 1$$

и $\mathcal{G} = 0$ относится к сфере (евклидовой геометрии).

В таком контексте можно сказать, что евклидова геометрия — не заряженная геометрия, и что \mathcal{G} — *геометрический финслероидный заряд*.

Проиллюстрируем сказанное рисунком.

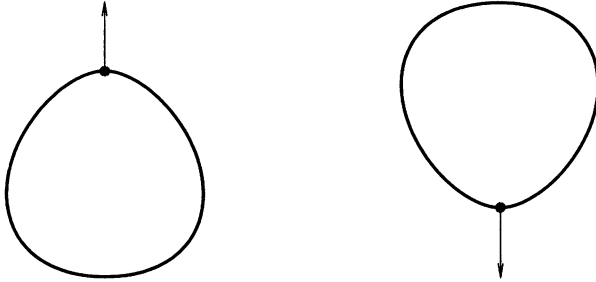


Рис. 5: Up- и down-финслероиды. Взято $g = 0.9$ и $g = -0.9$. Жирной точкой указаны вершины финслероидов. Для геометрического заряда справедливо: $\mathcal{G} = 1$ для левого случая и $\mathcal{G} = -1$ для правого случая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Сектрисой* финслероида называется отрезок, соединяющий вершину финслероида с экваториальной точкой финслероида.

С увеличением параметра $|g|$ финслероид растягивается в ширину и увеличивается в высоту, причем

$$q^{**} \xrightarrow{|g| \rightarrow 2} \infty \quad \text{и} \quad |Z^{**}| \xrightarrow{|g| \rightarrow 2} \infty, \quad (4.20)$$

а также

$$\frac{q^{**}}{|Z^{**}|} \xrightarrow{|g| \rightarrow 2} \frac{1}{2}. \quad (4.21)$$

При этом вершина финслероида стремится к началу координат и так, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.13. При $|g| \rightarrow 2$ предельный угол между сектрисой и Z -осью при вершине финслероида равен $\arctg(0.5)$.

Приведенные ниже рисунки 6–13 дают наглядное представление о виде рассматриваемых фигур (использована программа Maple9). Хорошо видно, как именно учет характерного параметра g изменяет обычную евклидову сферу: при $g > 0$ она деформируется и сдвигается книзу, а при $g < 0$ — деформируется и сдвигается вверх.

Нет необходимости дополнительно рисовать ко-финслероиды, ибо согласно свойству (4.9) они в точности отражают соответствующие финслероиды относительно $(R^N = 0)$ -гиперплоскости. Например, ко-финслероид $\hat{\mathcal{F}}_{-0.6}^{PD}$ может быть изображен рисунком для финслероида $\mathcal{F}_{0.6}^{PD}$ с соответствующей заменой осей координат: R^N на P_N и \mathbf{R} на \mathbf{P} .

Рисунки ясно подтверждают справедливость приведенной выше Теоремы 2.8 о регулярности и выпуклости, а также gZ -четности (представленной формулой (2.42)).

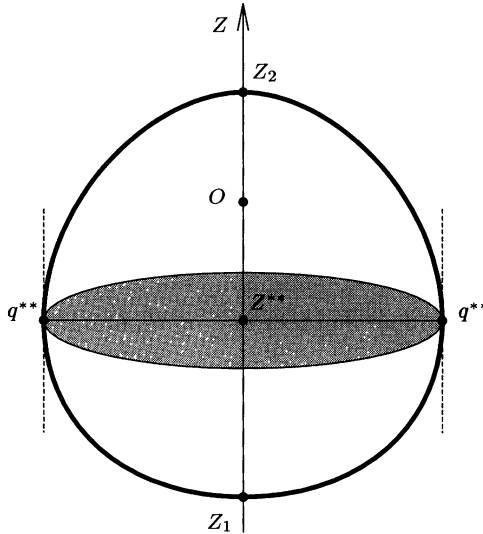


Рис. 6: Рисунок создан при значении $g = 0.6$. Показано экваториальное сечение.

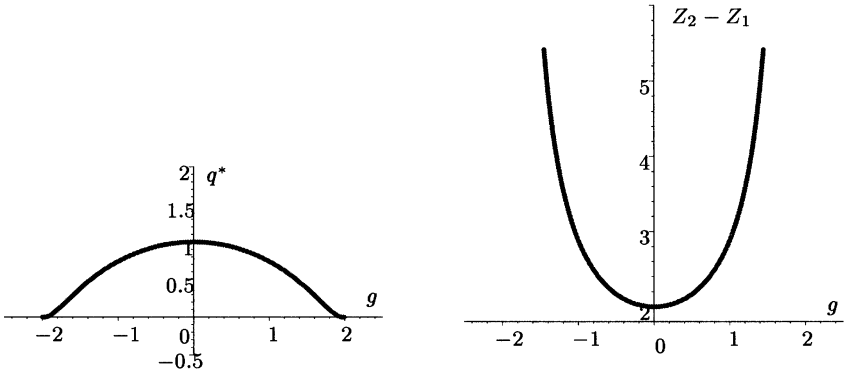


Рис. 7: Поведение характерных функций (4.11) и (4.14).

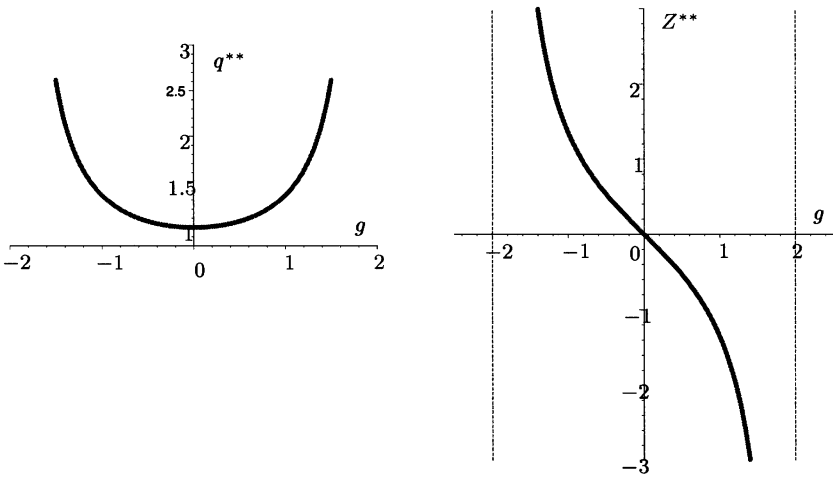


Рис. 8: Поведение характерных функций (4.18) и (4.19).

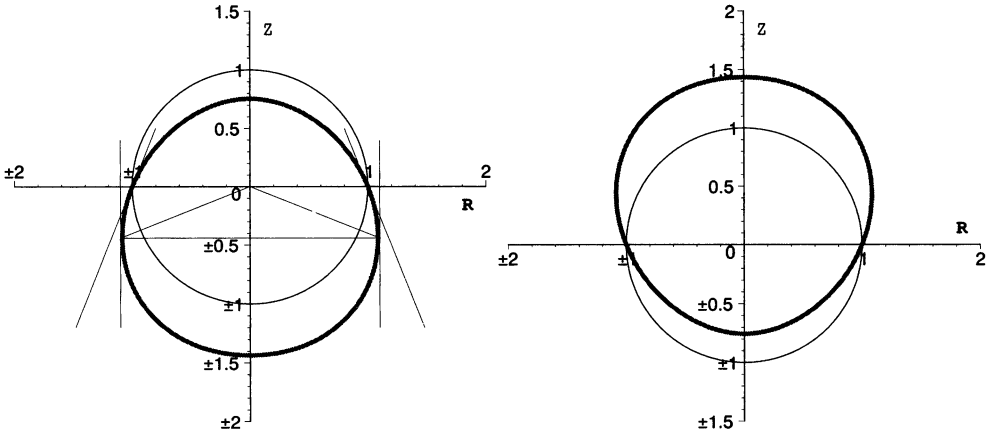


Рис. 9: Взяты соответственно значения $g = 0.4$ и $g = -0.4$ (жирная линия служит для изображения финслероида, тогда как обычным евклидовым сферам отвечает тонкая линия); левый рисунок может использоваться как удобный демонстрационный пример (*тренажер*) для финслероида, ясно показывающий характерные касательные, и мы предлагаем читателю самому вычислить появляющиеся углы и найти среди них равные.

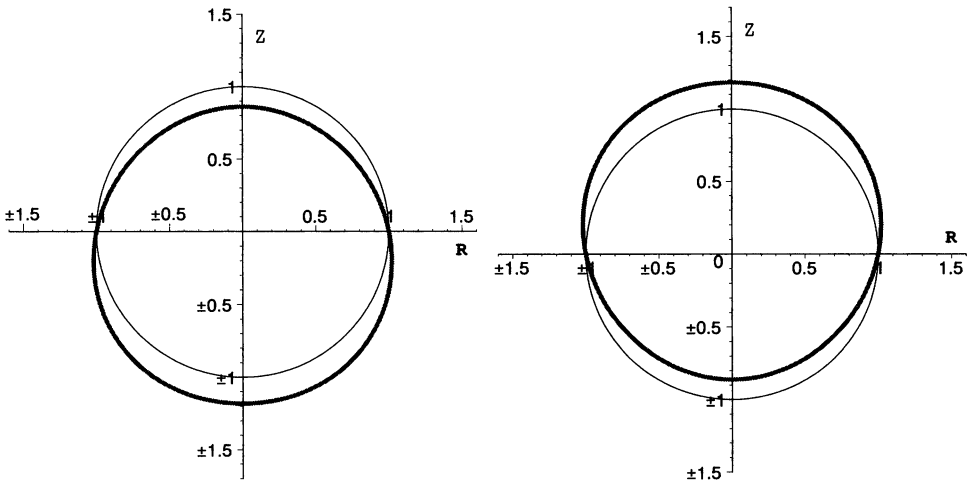


Рис. 10: Взяты соответственно значения $g = 0.2$ и $g = -0.2$.

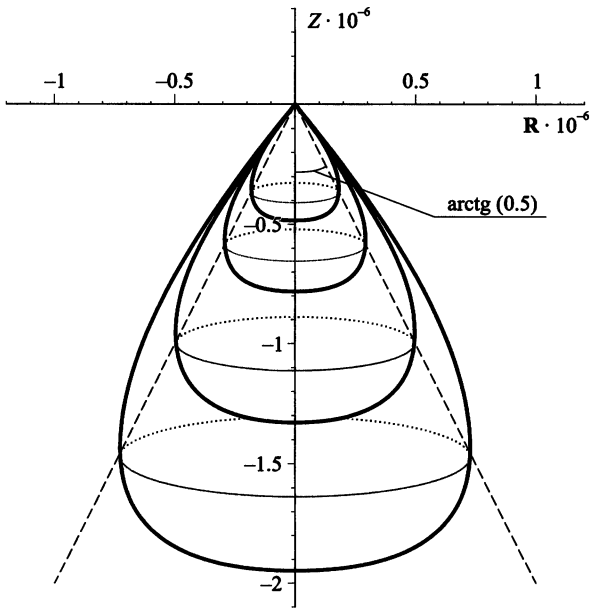


Рис. 11: Иллюстрация $\{|g| \rightarrow 2\}$ -предела (учитывая результат (4.17)–(4.18)). Взяты значения $g=1.952, 1.955, 1.958, 1.96$. Пунктиром указаны предельные сектрисы.

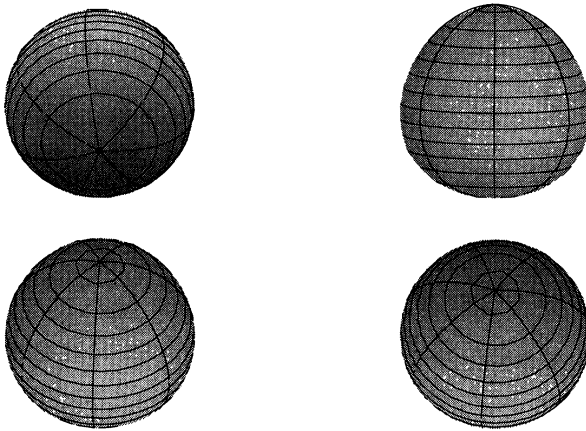


Рис. 12: Эти фигуры, построенные в 3D-графике, иллюстрируют, как, переходя от первой к четвертой, финслероид испытывает последовательное вращение (от низа слева кверху, затем направо и вниз) в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка; взято значение $g = 0.9$.

Очевидно можно изменять нормировку у ФМФ K с помощью различных (положительных) множителей, независящих от R^p . В частности, если совершить замену

$$K(g; R) \rightarrow \check{K}(g; R) = Z_2(g)K(g; R) \quad (4.22)$$

где $Z_2(g)$ — функция, определенная в формуле (4.13), то появится свойство

$$\check{K}\Big|_{R^a=0} = Z \quad \text{при } g > 0 \text{ и } Z > 0, \quad (4.23)$$

так что индикатриса, описываемая теперь формулой (2.68) с заменой уравнения $K(g; R) = 1$ на уравнение

$$\check{K}(g; R) = 1, \quad (4.24)$$

будет пересекать верхнюю часть Z -оси точно при значении $Z = 1$.

Удобно ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Индикатриса с закрепленной вершиной* определяется уравнением (4.24). Она ограничивает *финслероид с закрепленной вершиной*.

Нетрудно заметить, что в функции $\check{K}(g; R)$, определяемой правилом (4.22), возможен предельный переход к функции

$$\check{K}_{\text{Limiting}} = |T + q| \exp \frac{-q}{\nu T + q}, \quad \nu = \text{sign } g, \quad (4.25)$$

согласно

$$\check{K}(g; R) \xrightarrow{|g| \rightarrow 2} \check{K}(R)_{\text{Limiting}} \quad (4.26)$$

(использованы формулы (2.26)–(2.29); ср. (4.25) с формулой (А.59) в Приложении А в конце книги).

Удобно использовать

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предельный финслероид* определяется уравнением

$$\check{K}_{\text{Limiting}} = 1. \quad (4.27)$$

Вообще говоря, возможны различные нормировки. Если финслероид создается, используя исходную метрическую функцию (2.26), то при различных допустимых значениях характерного параметра g положение вершины финслероида различно. Введение нормировки по правилу (4.22) фиксирует вершину (очевидно, при желании можно было бы нормировать исходную метрическую функцию так, чтобы фиксировать нижнюю точку финслероида).

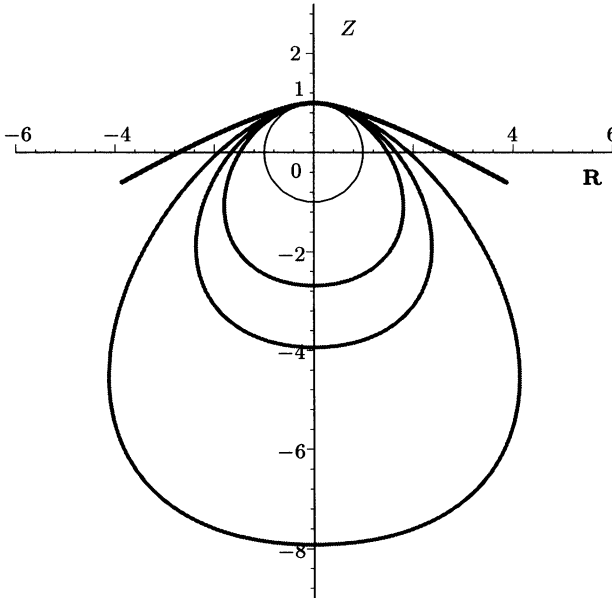


Рис. 13: Теперь финслероиды имеют общую фиксированную вершину (учтены формулы (4.22)–(4.27)). Тонкая окружность соответствует сфере (евклидовой геометрии). Жирная верхняя линия символизирует предельный финслероид (он задается формулами (4.25) и (4.27)) и мы видим, что финслероиды с закрепленной вершиной с увеличением параметра g (для него взяты последовательно значения 0.6, 0.8 и 1.1) приближаются к нему в окрестности своей вершины в согласии с законом (4.26).

Интересны задачи создания с помощью Maple анимационные файлы, которые показывали бы изменения вида финслероидов при изменениях значений характерного параметра g . Проблемы на таком пути могут возникать только при работе с 3D-графикой (мы оставляем эти увлекательные задачи читателю для самостоятельного решения).

2.5. Ортонормированные реперы

Для различных прикладных целей необходимо знание ортонормированного репера, который мы обозначим компонентами $H_q^{(P)}(g; R)$ и $H_{(P)}^q(g; R)$ (со свойством $H_q^{(P)} H_{(P)}^r = \delta_q^r$). *Условие ортонормированности*

$$g_{pq} = H_p^{(N)} H_q^{(N)} + \sum_{c=1}^{N-1} H_p^{(c)} H_q^{(c)} \quad (5.28)$$

не определяет репер однозначно, ибо очевидна возможность совершать вращения $H_q^{(P)} \rightarrow \lambda_{(Q)}^{(P)} H_q^{(Q)}$, где $\lambda_{(Q)}^{(P)}$ — компоненты матрицы евклидовых вращений.

Введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ортонормированный репер, обладающий свойством

$$H_{(N)}^P \subset R^P, \quad (5.29)$$

называется *специальным*.

Используя формулы (2.54)–(2.55), можно вычислить компоненты, совместимые с условиями (5.1)–(5.2). Результат имеет вид

$$H_p^{(N)} = R_p/K, \quad H_N^{(a)} = -w^{(a)}V/Q, \quad (5.30)$$

$$H_b^{(a)} = VQ^{-1/2}h_b^{(a)} + (1 - \sqrt{Q})VQ^{-1}w^{(a)}w_bw^{-2},$$

а также

$$H_{(N)}^P = R^P/K, \quad H_{(a)}^N = w_{(a)}V^{-1},$$

$$H_{(a)}^b = \sqrt{Q}V^{-1}h_{(a)}^b - (1 + gw + \sqrt{Q})w_{(a)}w^b w^{-2}V^{-1},$$

где

$$w^{(a)} = h_b^{(a)}w^b, \quad w_{(a)} = h_{(a)}^b w_b, \quad r_{ab} = \sum_{c=1}^{N-1} h_a^{(c)} h_b^{(c)}, \quad h_a^{(c)} h_{(c)}^b = \delta_a^b.$$

На основе формул (2.22)–(2.24) из следующей Главы 3 можно ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. \mathcal{E}_g^{PD} -инвариантные ортонормированные реперы:

$$e_q^P := f_r^P \sigma_q^r, \quad e_P^q := m_P^r \mu_r^q \quad (5.31)$$

строятся с помощью формул (1.29)–(1.31) и (1.36)–(1.38) из следующей Главы 3.

Такие реперы не обладают свойством типа (5.2). Взаимность $e_q^P e_R^q = \delta_R^P$ легко проверяется. Вычисления дают

$$e_q^P = \frac{1}{h} \sigma_q^P + \frac{h-1}{h} \sigma^P l_q / K, \quad e_P^q = h \mu_P^q + (1-h) \sigma_P l^q / K. \quad (5.32)$$

Справедлив аналог представления (5.1):

$$g_{pq}(g; R) = e_p^N(g; R) e_q^N(g; R) + \sum_{c=1}^{N-1} e_p^c(g; R) e_q^c(g; R). \quad (5.33)$$

\mathcal{E}_g^{PD} -инвариантные коэффициенты вращения Риччи

$$R^{PQ}{}_q(g; R) = R^{PQ}{}_r(g; t) \sigma_r^q \quad (5.34)$$

после использования формулы (2.27) из Главы 3 находятся в виде

$$R^{PQ}{}_q(g; R) = (h-1)(\sigma^P e_q^Q - \sigma^Q e_q^P) / K^2(g; R) \quad (5.35)$$

или

$$R^{PQ}{}_q(g; R) = \frac{h-1}{h} (\sigma^P \sigma_q^Q - \sigma^Q \sigma_q^P) / K^2(g; R). \quad (5.36)$$

Имеем

$$\sigma^P / K = L^P, \quad e_P^q L^P = l^q, \quad e_P^q \sigma^P = R^q, \quad R^{PQ}{}_p R^p = 0. \quad (5.37)$$

Вычисления дают

$$e_{Pt} e_{Qs} (\partial_p R^{PQ}{}_q - \partial_q R^{PQ}{}_p) = \frac{2(h-1)h}{K^2} (h_{pt} h_{qs} - h_{ps} h_{qt}) = \frac{2h}{1+h} S_{pqt} \quad (5.38)$$

(на втором шаге мы применили формулы (2.62)–(2.63); $e_{Pt} = g_{rt} e_P^r$).

Укажем дополнительно, что

$$\partial_p R^{PQ}{}_q - \partial_q R^{PQ}{}_p =$$

$$\frac{2(h-1)h}{K^2} \left[e_P^P e_q^Q - e_P^Q e_q^P + \frac{1}{K} (-e_P^P \sigma^Q l_q - e_q^Q \sigma^P l_p + e_P^Q \sigma^P l_q + e_q^P \sigma^Q l_p) \right] \quad (5.39)$$

и

$$R_{rsp} = (h-1)(l_r h_{sp} - l_s h_{rp}) / K. \quad (5.40)$$

2.6. Конформное преобразование

Введем скаляр

$$\varkappa(g; R) = \left(\frac{1}{2} K^2(g; R) \right)^\gamma \equiv (\varkappa(g; R))^2, \quad (6.1)$$

где

$$\gamma = h - 1 \equiv \sqrt{1 - \frac{g^2}{4}} - 1, \quad (6.2)$$

и определим новый тензор $\{s_{pq}(g; R)\}$ согласно

$$g_{pq}(g; R) = \frac{1}{\varkappa(g; R)} s_{pq}(g; R). \quad (6.3)$$

Взяв символы Кристоффеля

$$S_p^t{}_{r} := \frac{1}{2} s^{ts} \left(\frac{\partial s_{ps}}{\partial R^r} + \frac{\partial s_{rs}}{\partial R^p} - \frac{\partial s_{pr}}{\partial R^s} \right), \quad (6.4)$$

мы можем прямо вычислить соответствующий тензор кривизны

$$M_t^u{}_{rs} := \frac{\partial S_t^u{}_{r}}{\partial R^s} - \frac{\partial S_t^u{}_{s}}{\partial R^r} + S_t^w{}_{r} S_w^u{}_{s} - S_t^w{}_{s} S_w^u{}_{r}. \quad (6.5)$$

Оказывается, что результат имеет вид

$$M_t^u{}_{rs} \equiv 0. \quad (6.6)$$

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 2.14. *Пространство \mathcal{E}_g^{PD} является конформно-плоским. Конформный множитель может быть взят согласно формулам (6.1)–(6.3).*

Следовательно, должно существовать такое отображение

$$\mathcal{Z} : V_N \mapsto V_N, \quad (6.7)$$

переводящее векторы в векторы:

$$\check{R} \xrightarrow{\mathcal{Z}} R : \check{R}^r = \zeta^r(g; R), \quad (6.8)$$

что при соответствующем отображении тензора $\{s_{pq}(g; R)\}$ он переходит в исходный евклидов метрический тензор $\{r_{pq}\}$ (определенный согласно (2.11)), т.е. верно

$$\{s_{pq}\} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \{r_{pq}\} : s_{pq}(g; R) = \zeta_p^r(g; R) \zeta_q^s(g; R) r_{rs}, \quad (6.9)$$

где коэффициенты равны

$$\zeta_q^r(g; R) := \frac{\partial \zeta^r(g; R)}{\partial R^q}. \quad (6.10)$$

Скрупулезные рассуждения показывают, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.15. \mathcal{Z} -отображение (6.7)–(6.8) может быть задано явно компонентами

$$\zeta^a(g; R) = \varkappa(g; R)R^a J(g; R), \quad \zeta^N(g; R) = \varkappa(g; R)A(g; R)J(g; R)/h, \quad (6.11)$$

где $J(g; R)$ и $A(g; R)$ – функции (2.27) и (2.34).

Такое отображение является диффеоморфизмом (как нетрудно проверить). Оно также обладает свойством однородности степени h :

$$\zeta^p(g; bR) = b^h \zeta^p(g; R), \quad b > 0, \quad (6.12)$$

что влечет за собой тождество

$$R^q \zeta_q^r(g; R) \equiv h \zeta^r(g; R) \quad (6.13)$$

(ср. формулы (2.10)–(2.11) в Главе 1). Общий множитель в (6.11) подобран так, чтобы в правой части равенства (6.9) появился просто исходный евклидов тензор (2.11).

Дифференцируя (6.11) и используя (2.44)–(2.49) и (2.52), получаем представления

$$\zeta_N^N(g; R) = \left(\gamma A(Z + gq) + B + \frac{1}{2} gqA \right) \frac{J \varkappa}{hB},$$

$$\zeta_a^N(g; R) = \left(\gamma A - \frac{g(ZA - B)}{2q} \right) \frac{J \varkappa r_{ab} R^b}{hB},$$

$$\zeta_N^a(g; R) = \left(\gamma(Z + gq) + \frac{1}{2} gq \right) \frac{J \varkappa R^a}{B},$$

$$\zeta_b^a(g; R) = \left(B \delta_b^a + \gamma r_{bc} R^c R^a - \frac{g r_{bc} R^c R^a Z}{2q} \right) \frac{J \varkappa}{B}.$$

Они могут быть приведены к виду

$$\zeta_N^N(g; R) = (A(Z + gq) + q^2) \frac{J \varkappa}{B}, \quad \zeta_a^N(g; R) = (-Zh + A) \frac{J \varkappa r_{ac} R^c}{B}, \quad (6.14)$$

$$\zeta_N^a(g; R) = (h(Z + gq) - A) \frac{J \varkappa R^a}{B}, \quad (6.15)$$

$$\zeta_b^a(g; R) = \left(B \delta_b^a - \left((1 - h)q + \frac{g}{2} Z \right) \frac{r_{bc} R^c R^a}{q} \right) \frac{J \varkappa}{B}. \quad (6.16)$$

Справедливо $\det(\zeta_p^r) = (J\kappa)^N$ и

$$\det(\zeta_b^a) = (ZA + hq^2) \frac{(J\kappa)^{N-1}}{B}, \quad R^b \zeta_b^a = (ZA + hq^2) \frac{J\kappa R^a}{B}, \quad (6.17)$$

а также

$$\partial_q \kappa = \frac{\gamma \kappa}{K^2} R_q. \quad (6.18)$$

Нетрудно проверить, что

$$r_{cd} \zeta_a^c(g; R) \zeta_b^d(g; R) = \left[r_{ab} - \left(g + (1-h)q + (h^2-h) \frac{q(Z^2 - q^2)}{B} \right) \frac{r_{ac} r^c r_{be} R^e}{Bq} \right] (J\kappa)^2$$

и

$$\zeta_a^N(g; R) \zeta_b^N(g; R) = \left[\left((1-h)q + (h^2-h) \frac{q(Z^2 - q^2)}{B} \right) \frac{r_{ac} R^c r_{be} R^e}{Bq} \right] (J\kappa)^2,$$

а также

$$\zeta_a^N(g; R) \zeta_b^N(g; R) + r_{cd} \zeta_a^c(g; R) \zeta_b^d(g; R) = \left[r_{ab} - g \frac{r_{ac} R^c r_{be} R^e}{Bq} \right] (J\kappa)^2 \equiv \kappa^2 g_{ab},$$

откуда следует

$$s_{ab}(g; R) = \zeta_a^r(g; R) \zeta_b^s(g; R) r_{rs}.$$

Аналогично получаем равенства

$$s_{Nb}(g; R) = \zeta_N^r(g; R) \zeta_b^s(g; R) r_{rs}, \quad s_{NN}(g; R) = \zeta_N^r(g; R) \zeta_N^s(g; R) r_{rs}.$$

Так проверяется справедливость всех компонент в (6.9). Преобразование (6.9) полностью согласуется с конформным преобразованием (2.37)–(2.39) из Главы 3.

Преобразование

$$\mathcal{Z}^{-1} : V_N \rightarrow V_N \sim R \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \check{R}, \quad (6.19)$$

обратное к (6.7)–(6.11), представляется формулой

$$R^p = \eta^p(g; \check{R}) \quad (6.20)$$

с функциями

$$\eta^a(g; \check{R}) = \frac{\nu(g; \check{R})}{s(g; \check{R})} \check{R}^a h, \quad \eta^N(g; \check{R}) = \frac{\nu(g; \check{R})}{s(g; \check{R})} \left(h \check{R}^N - \frac{1}{2} g \sqrt{r_{ce} \check{R}^c \check{R}^e} \right), \quad (6.21)$$

где $\nu(g; \check{R}) = 1/\kappa(g; R)$ и $s(g; \check{R}) = J(g; \eta(g; \check{R}))$.

С помощью производных

$$\eta_r^p(g; \check{R}) := \frac{\partial \eta^p(g; \check{R})}{\partial \check{R}^r} \quad (6.22)$$

можно переписать (6.9) в обратном направлении:

$$\{r_{pq}\} \xrightarrow{Z^{-1}} \{s_{pq}\} : \eta_r^p(g; \check{R}) \eta_s^q(g; \check{R}) s_{pq}(g; R) = r_{rs}. \quad (6.23)$$

При вычислениях часто полезно использовать равенства

$$\eta_r^p \zeta_p^s = \delta_r^s, \quad \eta_r^p \zeta_q^r = \delta_q^p, \quad \eta_r^p = \zeta_q^s s^{pq} r_{rs}, \quad \zeta^r \eta_r^p = R^p. \quad (6.24)$$

Коэффициенты (6.23) находятся в виде

$$\eta_N^N = (ZA + hq^2) \frac{h}{J\kappa B}, \quad \eta_a^N = (hZ - A) \frac{r_{ac} R^c h}{J\kappa B}, \quad (6.25)$$

$$\eta_N^a = (A - h(Z + gq)) \frac{R^a h^2}{J\kappa B}, \quad (6.26)$$

$$\eta_b^a = \left[B \delta_b^a + \left((hZ - A)q + \frac{1}{2}gB \right) \frac{r_{bc} R^c R^a}{qZ} \right] \frac{h^2}{J\kappa B}. \quad (6.27)$$

Их проще всего проверить прямо из условий взаимности (6.24). Справедливо $\det(\eta_q^p) = (J\kappa)^{-N}$. Вычисления дают

$$R_p \eta_N^p = \frac{AK^2}{J\kappa B}, \quad R_p \eta_a^p = \frac{K^2 r_{ac} R^c h}{J\kappa B},$$

$$\eta_N^p \frac{\partial w}{\partial R^p} = -\frac{hq}{J\kappa Z^2}, \quad \eta_a^p \frac{\partial w}{\partial R^p} = AB \frac{r_{ac} R^c}{qJ\kappa Z^3},$$

а также

$$\eta_N^p \frac{\partial J}{\partial R^p} = \frac{1}{2}g \frac{hq}{\kappa B}, \quad \eta_a^p \frac{\partial J}{\partial R^p} = -\frac{1}{2}gA \frac{r_{ac} R^c}{q\kappa Z},$$

$$\eta_N^p \frac{\partial \kappa}{\partial R^p} = \gamma A \frac{1}{JhB}, \quad \eta_a^p \frac{\partial \kappa}{\partial R^p} = \gamma h \frac{r_{ac} R^c}{qhJB},$$

$$\eta_N^p \frac{\partial (J\kappa)}{\partial R^p} = \left(\frac{1}{2}ghq + \gamma A \right) \frac{1}{B}, \quad \eta_a^p \frac{\partial (J\kappa)}{\partial R^p} = \left(-\frac{1}{2}gA + \gamma hZ \right) \frac{r_{ac} R^c}{qB},$$

а также $\sqrt{\det(s_{pq})} = (Jh\kappa)^N \sqrt{\det(r_{ab})}$, откуда следует интересное тождество

$$\frac{\partial \left(\sqrt{\det(s_{rs}(g; R))} \eta_q^p(g; R) \right)}{\partial R^p} \equiv 0.$$

2.7. Геодезические, угол и скалярное произведение

Пусть заданы два вектора $R_1 \in V_N$ и $R_2 \in V_N$ с общей опорной точкой “ O ”. Введем обозначения

$$K_1 = K(g; R_1), \quad J_1 = J(g; R_1), \quad B_1 = B(g; R_1), \quad A_1 = A(g; R_1),$$

$$K_2 = K(g; R_2), \quad J_2 = J(g; R_2), \quad B_2 = B(g; R_2), \quad A_2 = A(g; R_2).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В изучаемом пространстве применяется \mathcal{E}_g^{PD} -скалярное произведение

$$\langle R_1, R_2 \rangle = K_1 K_2 \cos \left[\frac{1}{h} \arccos \frac{A_1 A_2 + h^2 r_{be} R_1^b R_2^c}{\sqrt{B_1} \sqrt{B_2}} \right]. \quad (7.1)$$

Ему соответствует \mathcal{E}_g^{PD} -угол

$$\alpha(R_1, R_2) = \frac{1}{h} \arccos \frac{A_1 A_2 + h^2 r_{be} R_1^b R_2^c}{\sqrt{B_1} \sqrt{B_2}} \quad (7.2)$$

между векторами R_1 и R_2 .

Формула (7.1) является результатом применения обратного квазиевклидова преобразования (см. (1.15) и (3.22) в Главе 3). Формула (7.2) — квазиевклидов образ угла (3.13) из Главы 3.

ТЕОРЕМА 2.16. *Общее решение с краевыми условиями*

$$R^p(s) = R^p(g; R_1, R_2, s) \quad (7.3)$$

для \mathcal{E}_g^{PD} -геодезических в компонентном виде записывается следующим образом:

$$R^p(s) = \mu^p(g; t^r(s)), \quad (7.4)$$

где μ^p — функции, реализующие обратное квазиевклидово преобразование согласно формулам (1.14) и (1.15) из Главы 3, а s — параметр длины дуги геодезической (см. формулу (7.2) в Главе 1). Явный вид компонент таков:

$$R^N(s) = (t^N(s) - \frac{1}{2} Gm(s))/k(s), \quad R^a(s) = \frac{1}{h} t^a(s)/k(s), \quad (7.5)$$

где

$$t^N(s) = \frac{K_s}{\sin(h\alpha)} \left[\frac{A_1}{\sqrt{B_1}} \sin(h(\alpha - \nu)) + \frac{A_2}{\sqrt{B_2}} \sin(h\nu) \right] \quad (7.6)$$

и

$$t^a(s) = h \frac{K_s}{\sin(h\alpha)} \left[\frac{R_1^a}{\sqrt{B_1}} \sin(h(\alpha - \nu)) + \frac{R_2^a}{\sqrt{B_2}} \sin(h\nu) \right] \quad (7.7)$$

(см. формулы (3.31) и (1.11)–(1.12) в Главе 3), а также

$$K_s = \sqrt{(K_1)^2 + 2bs + s^2}, \quad (7.8)$$

$$b = K_1 \sqrt{1 - \left(\frac{K_2 \sin \alpha}{\Delta s} \right)^2} \quad (7.9)$$

(использованы формулы (3.2) и (3.20) из Главы 3) и

$$k(s) = \exp\left(\frac{1}{2}G \operatorname{arctg} \frac{t^N(s)}{m(s)}\right), \quad m(s) = \sqrt{r_{ab}t^a(s)t^b(s)}. \quad (7.10)$$

Сформулированная теорема фактически утверждает, что общее решение для геодезических (представленных уравнением (7.7) в Главе 1) в случае изучаемого пространства может быть найдено в виде $R(s) :=$ квазиевклидов образ решения (3.31) из Главы 3.

Для промежуточного угла ν (см. (3.30) в Главе 3) получается представление

$$\nu = \operatorname{arctg} \frac{sK_2 \sin \alpha}{K_1 \Delta s + (K_2 \cos \alpha - K_1)s}. \quad (7.11)$$

Справедливы равенства $\nu|_{s=\Delta s} = \alpha$, а также $K_s = K(g; R(s))$ и $a = K_1$.

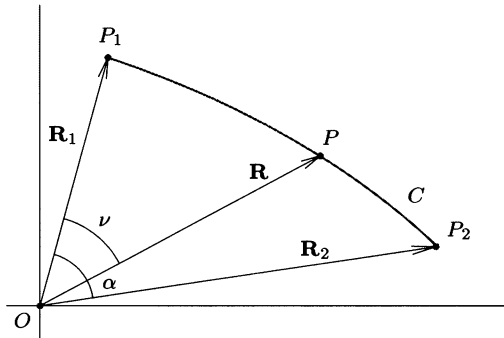


Рис. 14: Геодезическая C и углы $\alpha = \angle P_1OP_2$ и $\nu = \angle P_1OP$; длина дуги P_1P равна s , а длина дуги P_1P_2 равна Δs .

Вдоль геодезических закон поведения функции K^2 квадратичен по используемому параметру s :

$$(K(g; R(s)))^2 = a^2 + 2bs + s^2 \equiv (b + s)^2 + (a^2 - b^2), \quad (7.12)$$

где a и b — константы интегрирования (ср. (3.2) в Главе 3 и (7.8) в Главе 1).
Условия

$$a > 0 \quad \text{и} \quad a^2 - b^2 \geq 0 \quad (7.13)$$

предполагаются (ср. (7.13) в Главе 1).

На таком пути мы получаем следующие фундаментальные законы для изучаемого пространства.

\mathcal{E}_g^{PD} -расстояние Δs между двумя точками:

$$(\Delta s)^2 = (K_1)^2 + (K_2)^2 - 2K_1K_2 \cos \alpha. \quad (7.14)$$

\mathcal{E}_g^{PD} -скалярное произведение

$$\langle R_1, R_2 \rangle = K_1K_2 \cos \alpha. \quad (7.15)$$

Редукция

$$\langle R, R \rangle = (K(g; R))^2 \quad (7.16)$$

при равенстве векторов.

\mathcal{E}_g^{PD} -перпендикулярность:

$$\langle R, R^\perp \rangle = 0; \quad (7.17)$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ в таком случае.

При отождествлении

$$|R_1 \ominus R_2| = \Delta s \quad (7.18)$$

формула (7.14) может читаться как

\mathcal{E}_g^{PD} -теорема косинуса:

$$|R_1 \ominus R_2|^2 = (K_1)^2 + (K_2)^2 - 2K_1K_2 \cos \alpha. \quad (7.19)$$

Отсюда в свою очередь вытекает

\mathcal{E}_g^{PD} -теорема Пифагора:

$$|R \ominus R^\perp|^2 = (K(g; R))^2 + (K(g; R^\perp))^2. \quad (7.20)$$

Очевидно справедлива симметрия

$$|R_1 \ominus R_2| = |R_2 \ominus R_1|. \quad (7.21)$$

В частности, из (7.2) прямо следует, что значение угла α , образуемое вектором R с R^N -осью финслерида, равно

$$\alpha = \frac{1}{h} \arccos \frac{A(g; R)}{\sqrt{B(g; R)}}, \quad (7.22)$$

а с $(N - 1)$ -мерной экваториальной $\{\mathbf{R}\}$ -плоскостью финслерида равно

$$\alpha = \frac{1}{h} \arccos \frac{L(g; R)}{\sqrt{B(g; R)}}; \quad (7.23)$$

здесь L — функция (2.32).



Рис. 15: Эти два рисунка символизируют углы, определяемые соответственно формулами (7.22) и (7.23).

Полностью аналогичные соотношения получаются в ко-подходе. Если заданы два ко-вектора $P_1 \in \hat{V}_N$ и $P_2 \in \hat{V}_N$, то для них аналог формулы (7.1) читается как $\hat{\mathcal{E}}_g^{PD}$ -скалярное произведение

$$\langle P_1, P_2 \rangle = H(g; P_1)H(g; P_2) \cos \left[\frac{1}{h} \arccos \frac{\hat{A}(g; P_1)\hat{A}(g; P_2) + h^2 r^{be} P_{1b} P_{2e}}{\sqrt{\hat{B}(g; P_1)} \sqrt{\hat{B}(g; P_2)}} \right]. \quad (7.24)$$

Ему соответствует $\hat{\mathcal{E}}_g^{PD}$ -угол

$$\hat{\alpha}(P_1, P_2) = \frac{1}{h} \arccos \frac{\hat{A}(g; P_1)\hat{A}(g; P_2) + h^2 r^{be} P_{1b} P_{2e}}{\sqrt{\hat{B}(g; P_1)} \sqrt{\hat{B}(g; P_2)}}. \quad (7.25)$$

Справедлив так же полный аналог

$$|P_1 \ominus P_2|^2 = (H(g; P_1))^2 + (H(g; P_2))^2 - 2H(g; P_1)H(g; P_2) \cos \hat{\alpha} \quad (7.26)$$

формулы (7.19) и симметрия

$$|P_1 \ominus P_2| = |P_2 \ominus P_1|. \quad (7.27)$$

Финслероидный угол α между двумя векторами изменяется в пределах

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \quad (7.28)$$

где

$$\alpha_{\max} = \frac{1}{h}\pi \geq \pi \quad \text{с равенством только если } g = 0, \quad (7.29)$$

так что

$$\alpha_{\max} \xrightarrow{|g| \rightarrow 2} \infty. \quad (7.30)$$

Поскольку зависимость от параметра g входит в α_{\max} (через h) квадратичным образом, α_{\max} не зависит от знака параметра g .

В собственно евклидовом пределе правые части в (7.2) и в (7.22) в наших обозначениях имеют вид

$$\alpha(R_1, R_2) \Big|_{g=0} = \arccos \frac{R_1^N R_2^N + r_{be} R_1^b R_2^e}{\sqrt{(R_1^N)^2 + r_{be} R_1^b R_1^e} \sqrt{(R_2^N)^2 + r_{be} R_2^b R_2^e}}$$

и

$$\hat{\alpha}(P_1, P_2) \Big|_{g=0} = \arccos \frac{P_{1N} P_{2N} + r^{be} P_{1b} P_{2e}}{\sqrt{(P_{1N})^2 + r^{be} P_{1b} P_{1e}} \sqrt{(P_{2N})^2 + r^{be} P_{2b} P_{2e}}}.$$

Подставляя (7.5) и (7.6) в (7.4), получаем представление

$$R^p(s) = \frac{K_s}{k(s)\sqrt{B_1}} \frac{\sin(h(\alpha - \nu))}{\sin(h\alpha)} R_1^p + \frac{K_s}{k(s)\sqrt{B_2}} \frac{\sin(h\nu)}{\sin(h\alpha)} R_2^p + X(s)\delta_N^p, \quad (7.31)$$

где

$$X(s) = \frac{1}{2}g \frac{K_s}{k(s)} \left[\frac{\sin(h(\alpha - \nu))}{\sin(h\alpha)} \frac{q_1}{\sqrt{B_1}} + \frac{\sin(h\nu)}{\sin(h\alpha)} \frac{q_2}{\sqrt{B_2}} - \frac{m(s)}{hK_s} \right]. \quad (7.32)$$

Поскольку в правой части формулы (7.31) появился дополнительный член, а правая часть в (7.32) не равна нулю тождественно, мы должны сделать вывод, что вообще говоря вектор $R^p(s)$ не растягивается двумя конечными векторами R_1^p и R_2^p . Следовательно, вообще говоря геодезические изучаемого пространства \mathcal{E}_g^{PD} не являются плоскими кривыми.

Используя коэффициенты $\{\mu_q^p\}$, заданные явными формулами (1.36)–(1.38) в Главе 3, находим свертки

$$\mu_q^N(g; t(s))t_1^q = \frac{J_1}{J} \left[\frac{1}{h^2} A_1 - \frac{1}{2}g \frac{1}{h^2} \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}} (h^2 q + \frac{1}{2}gA) \cos(h\nu) \right], \quad (7.33)$$

$$\mu_q^a(g; t(s))t_1^q = \frac{J_1}{J} \left\{ R_1^a + \frac{1}{2}g \frac{1}{h^2 q} \left[\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}} A \cos(h\nu) - A_1 \right] R^a \right\}, \quad (7.34)$$

$$\mu_q^N(g; t(s))t_2^q = \frac{J_2}{J} \left[\frac{1}{h^2} A_2 - \frac{1}{2}g \frac{1}{h^2} \frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B}} (h^2 q + \frac{1}{2}gA) \cos(h(\alpha - \nu)) \right], \quad (7.35)$$

$$\mu_q^a(g; t(s))t_2^q = \frac{J_2}{J} \left\{ R_2^a + \frac{1}{2}g \frac{1}{h^2 q} \left[\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B}} A \cos(h(\alpha - \nu)) - A_2 \right] R^a \right\}. \quad (7.36)$$

С их помощью нетрудно вычислить *компоненты скорости*

$$U^p(s) := \frac{dR^p}{ds} = \mu_q^p(g; \mathbf{t}(s)) \frac{dt^q}{ds} = \mu_q^p(g; \mathbf{t}(s)) v^q(s) \quad (7.37)$$

и получить следующий результат:

$$U^p(s) = \frac{b+s}{(K_s)^2} R^p(s)$$

$$-\frac{h\sqrt{a^2-b^2} \cos(h(\alpha-\nu))}{K_1 K_s} \frac{\cos(h\nu)}{\sin(h\alpha)} \mu_q^p(g; \mathbf{t}(s)) t_1^q + \frac{h\sqrt{a^2-b^2} \cos(h\nu)}{K_2 K_s} \frac{\cos(h\nu)}{\sin(h\alpha)} \mu_q^p(g; \mathbf{t}(s)) t_2^q \quad (7.38)$$

(использовано разложение (3.35) из Главы 3), так что

$$U^p(s) = \frac{b+s}{(K_s)^2} R^p(s) + \frac{hK_1 K_2 \sin \alpha}{k_s K_s \sin(h\alpha) \Delta s} T^p(s) \quad (7.39)$$

с функциями

$$T^N(s) = \frac{A_2}{h^2 \sqrt{B_2}} \cos(h\nu) - \frac{A_1}{h^2 \sqrt{B_1}} \cos(h(\alpha-\nu)) \quad (7.40)$$

и

$$T^a(s) = \frac{1}{\sqrt{B_2}} \left[R_2^a(s) - \frac{1}{2} g \frac{A_2}{h^2 q} R^a \right] \cos(h\nu) - \frac{1}{\sqrt{B_1}} \left[R_1^a(s) - \frac{1}{2} g \frac{A_1}{h^2 q} R^a \right] \cos(h(\alpha-\nu)). \quad (7.41)$$

Начальная и конечная скорости

$$U_1^p := U^p(0), \quad U_2^p := U^p(\Delta s) \quad (7.42)$$

могут быть вычислены с помощью формул

$$U_1^p = \mu_q^p(g; \mathbf{t}_1) v_1^q, \quad U_2^p = \mu_q^p(g; \mathbf{t}_2) v_2^q. \quad (7.43)$$

Их обращение имеет вид

$$v_1^q = \sigma_p^q(g; R_1) U_1^p, \quad v_2^q = \sigma_p^q(g; R_2) U_2^p. \quad (7.44)$$

Получаем

$$U_1^p = \frac{1}{a} \left[\frac{b}{a} - \frac{h\sqrt{a^2-b^2} (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \frac{1}{a} \right] R_1^p + \frac{h\sqrt{a^2-b^2}}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \mu_q^p(g; \mathbf{t}_1) t_2^q \quad (7.45)$$

(для $\{v_1^q\} = \mathbf{v}_1$ использована формула (3.35) из Главы 3), так что

$$\mu_q^p(g; \mathbf{t}_1) t_1^q = R_1^p \quad (7.46)$$

и

$$\mu_q^p(g; \mathbf{t}_1) t_2^q = \frac{J_2}{J_1} \left[R_2^p + \frac{1}{2} g \frac{(q_{12})^2 A_1 - (q_1)^2 A_2}{q_1 B_1} R_1^p + \frac{1}{2} g \frac{q_1 q_2 - (q_{12})^2}{q_1} \delta_N^p \right], \quad (7.47)$$

где

$$q_1 = \sqrt{r_{bc} R_1^b R_1^c}, \quad q_2 = \sqrt{r_{bc} R_2^b R_2^c}, \quad q_{12} = \sqrt{r_{bc} R_1^b R_2^c}.$$

Окончательно получаем представление

$$U_1^p = U_1^p(g; R_1, R_2) \quad (7.48)$$

со значениями

$$U_1^p = \frac{1}{K_1} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{K_2 \sin \alpha}{\Delta s} \right)^2} - \frac{h K_2 \cos(\alpha)}{\Delta s} \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \sin \alpha \right] R_1^p + \frac{h \sin \alpha}{(\Delta s) \sin(h\alpha)} \frac{J_2}{J_1} \left[R_2^p + \frac{1}{2} g \frac{(q_{12})^2 A_1 - (q_1)^2 A_2}{q_1 B_1} R_1^p + \frac{1}{2} g \frac{q_1 q_2 - (q_{12})^2}{q_1} \delta_N^p \right]. \quad (7.49)$$

Аналогичное представление получается для U_2^p . Равенства

$$U^p(s)|_{g=0} = U_1^p|_{g=0} = U_2^p|_{g=0} = \frac{R_2^p - R_1^p}{\Delta s}, \quad (7.50)$$

$$R_p(s)U^p(s) = b + s, \quad R_{1p}U_1^p = b, \quad R_{2p}U_2^p = b + \Delta s \quad (7.51)$$

и

$$g_{pq}(g; R(s))U^p(s)U^q(s) = 1 \quad (7.52)$$

легко проверяются.

Ниже рис. 16 показывает элементы решения.

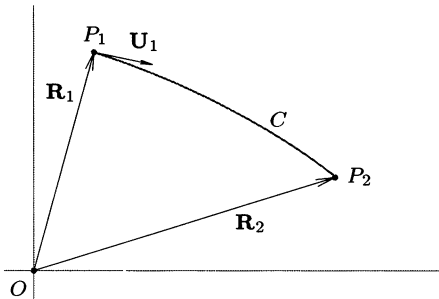


Рис. 16: Геодезическая C и начальная скорость U_1 ; длина дуги от P_1 до P_2 равна Δs .

Из приведенных формул вытекает

ТЕОРЕМА 2.17. *Решение с начальными данными*

$$R_2^p = R_2^p(g; R_1, U_1, \Delta s) \quad (7.53)$$

задается в явном виде представлением

$$R_2^p = \mu^p(g; t_2) \quad (7.54)$$

с функциями

$$t_2^p = z(\Delta s)\sigma^p(g; R_1) + n(\Delta s)\sigma_q^p(g; R_1)U_1^q, \quad (7.55)$$

$$z(\Delta s) = \frac{1}{h} \frac{\sin(h\alpha)}{\sin \alpha} + \frac{K_2}{K_1} \left[\cos(h\alpha) - \frac{1}{h} \frac{\sin(h\alpha)}{\sin \alpha} \cos \alpha \right], \quad (7.56)$$

$$n(\Delta s) = \frac{1}{h} \frac{\sin(h\alpha)}{\sin \alpha} \Delta s. \quad (7.57)$$

При этом справедливы равенства

$$K_2 = \sqrt{(K_1)^2 + 2b\Delta s + (\Delta s)^2} \quad (7.58)$$

и

$$b = r_{pr}\sigma^p(g; R_1)\sigma_q^r(g; R_1)U_1^q,$$

а значит

$$b = R_{1q}U_1^q; \quad (7.59)$$

угол α может быть взят в виде

$$\alpha = \arccos \frac{(K_1)^2 + b\Delta s}{K_1 K_2} \quad (7.60)$$

или альтернативно в виде

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{(K_1)^2 - b^2} \Delta s}{K_1 K_2}. \quad (7.61)$$

Эта теорема — аналог теоремы 3.7 из Главы 3.

Ниже на рис. 17 и 18 изображены кривые, которые в финслероидном смысле перпендикулярны оси Z . Использовано решение (7.55)–(7.57) и введены соответствующие начальные данные для построения кривых с помощью программы Maple. Визуально угол отклонения отличен от 90 градусов.

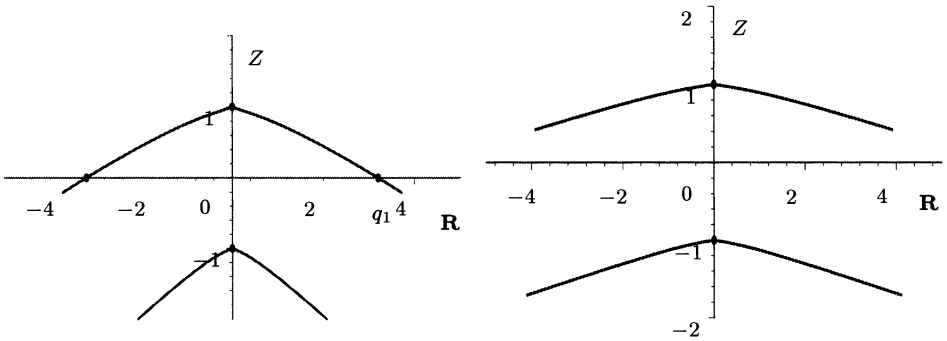


Рис. 17: Для левого рисунка $g = 0.6$ и расчетное пересечение с осью абсцисс происходит при $q_1 \sim 3.2$, а для правого рисунка $g = 0.2$ и $q_1 \sim 6.29$. Ветви кривых монотонно убывают.

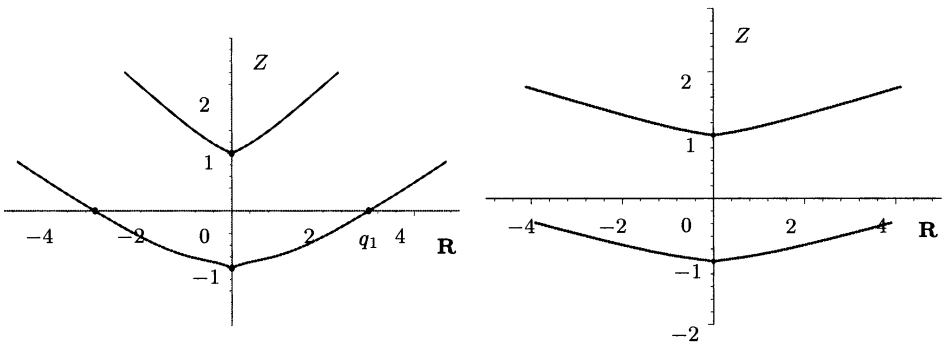


Рис. 18: Для левого рисунка $g = -0.6$ и расчетное пересечение с осью абсцисс происходит при $q_1 \sim 3$, а для правого рисунка $g = -0.2$ и $q_1 \sim 5.911$. Ветви кривых монотонно возрастают.

2.8. Использование финслероидных координат

В евклидовой геометрии и в приложениях, основывающихся на такой геометрии, важную роль играют сферические координаты. Использование их позволяет удобно представлять векторы, вычислять площади и объемы, изучать кривизну поверхностей, во многих ситуациях упрощать рассуждения и точно решать уравнения, а также вводить и использовать различные тригонометрические функции. В контексте настоящей теории такие координаты можно содержательно обобщить.

Ограничимся для определенности трехмерным случаем

$$N = 3,$$

воспользуемся формулами (2.73)–(2.78) и введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Финслероидные координаты* $\{z^q\}$, $p, q, \dots = 1, 2, 3$, задаются согласно

$$z^1 = K, \quad z^2 = \phi, \quad z^3 = f, \quad (8.1)$$

где ϕ — *полярный угол* в экваториальной плоскости финслероида, а f — *финслероидный азимутальный угол*

$$f = \arctg \frac{hq}{A} = \arccos(JA), \quad f \in (0, \pi), \quad (8.2)$$

(ср. (2.76) и (2.77); см. ниже рис. 19). Величины q и A определяются формулами (2.8) и (2.34), а J — функция (2.75).

Для векторов $\{R^p\}$ справедливо представление

$$R^p = R^p(g; z^q) = R^p(g; K, \phi, f) \quad (8.3)$$

со значениями

$$R^1 = K \frac{1}{hJ} \cos \phi \sin f, \quad R^2 = K \frac{1}{hJ} \sin \phi \sin f, \quad (8.4)$$

$$R^3 = K \frac{1}{J} (\cos f - \frac{1}{2} G \sin f) \quad (8.5)$$

(см. (2.73)). Они очевидно обладают свойством

$$K(g; R^p(g; z^q)) = K. \quad (8.6)$$

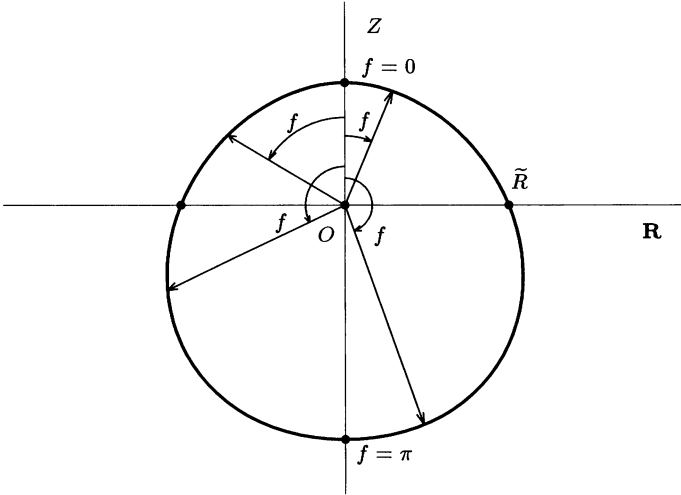


Рис. 19: Угол f отсчитывается от оси Z ; при изображении финслероида взято $g = 0.4$; точке \tilde{R} соответствует значение $f = \arctg(2/G)$.

Вычисление производных дает

$$\frac{\partial R^p}{\partial K} = \frac{1}{K} R^p, \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial R^1}{\partial \phi} = -K \frac{1}{hJ} \sin \phi \sin f, \quad \frac{\partial R^2}{\partial \phi} = K \frac{1}{hJ} \cos \phi \sin f, \quad \frac{\partial R^3}{\partial \phi} = 0, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial R^1}{\partial f} = K \frac{1}{hJ} \cos \phi \left(\cos f + \frac{1}{2} G \sin f \right), \quad \frac{\partial R^2}{\partial f} = K \frac{1}{hJ} \sin \phi \left(\cos f + \frac{1}{2} G \sin f \right), \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial R^3}{\partial f} = -K \frac{1}{h^2 J} \sin f. \quad (8.10)$$

Ковариантная формулировка

$$R_p = R_p(g; z^q) \quad (8.11)$$

включает функции

$$R_1 = K \cos \phi \frac{J}{h} \sin f, \quad R_2 = K \sin \phi \frac{J}{h} \sin f, \quad (8.12)$$

$$R_3 = K J \left(\cos f + \frac{1}{2} G \sin f \right), \quad (8.13)$$

так что $H(g; R_p(g; z^q)) = H$, а также

$$\frac{\partial R_1}{\partial f} = K \cos \phi \frac{J}{h} (\cos f - \frac{1}{2} G \sin f), \quad \frac{\partial R_2}{\partial f} = K \sin \phi \frac{J}{h} (\cos f - \frac{1}{2} G \sin f), \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial f} = -K \frac{J}{h^2} \sin f. \quad (8.15)$$

Производные удовлетворяют тождествам

$$R^1 \frac{\partial R^1}{\partial \phi} + R^2 \frac{\partial R^2}{\partial \phi} \equiv 0, \quad \frac{\partial R^1}{\partial \phi} \frac{\partial R^1}{\partial f} + \frac{\partial R^2}{\partial \phi} \frac{\partial R^2}{\partial f} \equiv 0.$$

Вычисление вторых производных дает

$$\frac{\partial^2 R^1}{\partial f^2} = K \cos \phi \frac{1}{hJ} \left(G \cos f - \left(1 - \frac{G^2}{4}\right) \sin f \right), \quad (8.16)$$

$$\frac{\partial^2 R^2}{\partial f^2} = K \cos \phi \frac{1}{hJ} \left(G \cos f - \left(1 - \frac{G^2}{4}\right) \sin f \right), \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial^2 R^3}{\partial f^2} = -K \frac{1}{h^2 J} (\cos f + \frac{G}{2} \sin f). \quad (8.18)$$

Преобразуем ФМТ к таким координатам:

$$a_{rs}(g; z) := g_{pq}(g; R) \frac{\partial R^p}{\partial z^r} \frac{\partial R^q}{\partial z^s}. \quad (8.19)$$

Получим

$$a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0 \quad (8.20)$$

и

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = (z^1)^2 \frac{1}{h^2} \sin^2 f, \quad a_{33} = (z^1)^2 \frac{1}{h^2}. \quad (8.21)$$

Взаимные компоненты имеют вид

$$a^{12} = 0, \quad a^{13} = 0, \quad a^{23} = 0 \quad (8.22)$$

и

$$a^{11} = 1, \quad a^{22} = h^2 \frac{1}{(z^1)^2 \sin^2 f}, \quad a^{33} = h^2 \frac{1}{(z^1)^2}. \quad (8.23)$$

Часто удобны обозначения

$$r = K, \quad \theta = f. \quad (8.24)$$

Для элемента объема $dV_{\text{Finsleroid}} := \sqrt{\det(a_{pq})} d^3z$ финслероидного пространства получается представление

$$dV_{\text{Finsleroid}} = \frac{1}{h^2} K^2 \sin f dK d\phi df,$$

а элемент площади поверхности финслероида равен

$$dS_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = \frac{1}{h^2} K^2 \sin f d\phi df.$$

Формальное отличие здесь от евклидовых прототипов только в появлении множителя $\frac{1}{h^2}$. Для полного объема финслероида и всей площади его поверхности получаются следующие результаты:

$$V_{\text{Finsleroid}} = \frac{1}{h^2} \frac{4\pi}{3} \quad (8.25)$$

и

$$S_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = \frac{1}{h^2} 4\pi \quad (8.26)$$

(ср. (2.89)). Поскольку $h = \sqrt{1 - \frac{g^2}{4}} \leq 1$ (см. (2.13)), можно сделать вывод, что

$$V_{\text{Finsleroid}} \geq V_{\text{Euclidean unit ball}}, \quad S_{\text{Finsleroid Indicatrix}} \geq S_{\text{Euclidean unit sphere}},$$

причем равенство возможно только при $g = 0$. Из (8.25) и (8.26) вытекает

$$\frac{S_{\text{Finsleroid Indicatrix}}}{V_{\text{Finsleroid}}} = \frac{1}{3}. \quad (8.27)$$

Такое рассмотрение может быть обобщено на произвольную размерность, что дает

$$V_{\text{Finsleroid}} = \frac{1}{h^{N-1}} V_{\text{Euclidean unit ball}} \quad (8.28)$$

и

$$S_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = \frac{1}{h^{N-1}} S_{\text{Euclidean unit sphere}}. \quad (8.29)$$

Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 2.18. *В любой размерности $N \geq 2$ и при любом допустимом значении параметра $g \in (-2, 2)$ отношение площади поверхности финслероида к его объему универсально*

$$\frac{S_{\text{Finsleroid Indicatrix}}}{V_{\text{Finsleroid}}} = \frac{S_{\text{Euclidean unit sphere}}}{V_{\text{Euclidean unit ball}}}, \quad (8.30)$$

т.е. оно не зависит от того, проводится ли финслероидное обобщение евклидовой геометрии или нет.

Линейный элемент ds в финслероидных координатах таков, что

$$(ds)^2 = (dr)^2 + \frac{1}{h^2} r^2 (\sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2). \quad (8.31)$$

Фактически ds — метрика финслероидного пространства после перехода к финслероидным координатам.

Если построить телесный угол по евклидову правилу

$$d\Omega = \sin^2 \theta (d\phi)^2 + (d\theta)^2, \quad (8.32)$$

то (8.31) можно переписать в виде

$$(ds)^2 = (dr)^2 + \frac{1}{h^2} \cdot d\Omega. \quad (8.33)$$

Поскольку $h < 1$ пока $g \neq 0$ (см. определение (2.13) для h), то можно сказать, что геометрической причиной такого ds является *дефицит угла*.

Соответственно для *финслероидного оператора Лапласа*

$$\Delta\psi := \frac{1}{\sqrt{\det(a_{pq})}} \partial_r \left(\sqrt{\det(a_{pq})} a^{rs} \partial_s \psi \right) \quad (8.34)$$

получается представление

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + h^2 \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]. \quad (8.35)$$

Мы видим, что единственное отличие от соответствующего евклидова представления здесь состоит в присутствии множителя h^2 перед вторым членом в правой части.

Вычисление с помощью (8.19)–(8.23) соответствующих символов Кристоффеля

$$\Gamma_p^r{}_q := a^{rt} \Gamma_{ptq}, \quad \Gamma_{ptq} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{pt}}{\partial z^q} + \frac{\partial a_{qt}}{\partial z^p} - \frac{\partial a_{pq}}{\partial z^t} \right) \quad (8.36)$$

дает

$$\Gamma_{122} = \frac{1}{h^2} r \sin^2 f = -\Gamma_{212}, \quad \Gamma_{133} = \frac{1}{h^2} r = -\Gamma_{313},$$

$$\Gamma_{223} = \frac{1}{h^2} r^2 \sin f \cos f = -\Gamma_{232}$$

(остальные компоненты равны нулю) и

$$\Gamma_1^2{}_2 = \Gamma_1^3{}_3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_2^2{}_3 = \text{ctg } f, \quad \Gamma_2^3{}_2 = -\sin f \cos f, \quad (8.37)$$

$$\Gamma_2^1{}_2 = -\frac{1}{h^2} r \sin^2 f, \quad \Gamma_3^1{}_3 = -\frac{1}{h^2} r \quad (8.38)$$

(остальные компоненты равны нулю). В списке (8.37)–(8.38) финслеров параметр g входит только в компоненту (8.38) (через h). Если по символам Кристоффеля (8.37)–(8.38) построить тензор кривизны $\{R_{pqrs}\}$, то у него отличны от нуля будут только компоненты

$$R_{2323} = -R_{2332} = -R_{3223} = R_{3232} = -\frac{g^2 r^2}{4 h^4} \sin^2 f.$$

Для соответствующего тензора Риччи $R_{pq} = a^{rs} R_{prqs}$ получаем две отличные от нуля компоненты:

$$R_{22} = -\frac{G^2}{4} \sin^2 f, \quad R_{33} = -\frac{G^2}{4}.$$

Полная свертка не зависит от угла:

$$a^{pq} R_{pq} = -\frac{g^2}{2} \frac{1}{r^2}.$$

Представления (8.4), (8.5), (8.12) и (8.13) подсказывают идею ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Финслероидные тригонометрические функции* задаются согласно

$$\text{Cos } f := \frac{1}{J}(\cos f - \frac{G}{2} \sin f), \quad \text{Sin } f := \frac{1}{hJ} \sin f \quad (8.39)$$

и

$$\text{Cos}^* f := J(\cos f + \frac{G}{2} \sin f), \quad \text{Sin}^* f := \frac{1}{h} J \sin f. \quad (8.40)$$

Они приводят к представлениям

$$R^1 = K \cos \phi \text{Sin } f, \quad R^2 = K \sin \phi \text{Sin } f, \quad R^3 = K \text{Cos } f \quad (8.41)$$

и

$$R_1 = K \cos \phi \text{Sin}^* f, \quad R_2 = K \sin \phi \text{Sin}^* f, \quad R_3 = K \text{Cos}^* f. \quad (8.42)$$

Легко проверить справедливость тождеств

$$\text{Cos } f_1 \text{Cos } f_2 - \text{Sin } f_1 \text{Sin } f_2 = \text{Cos}(f_1 + f_2), \quad (8.43)$$

$$\text{Cos } f_1 \text{Sin } f_2 + \text{Sin } f_1 \text{Cos}^* f_2 = \text{Sin}(f_1 + f_2), \quad (8.44)$$

$$\text{Sin } f_1 \text{Cos } f_2 + \text{Cos}^* f_1 \text{Sin } f_2 = \text{Sin}(f_1 + f_2), \quad (8.45)$$

$$\text{Cos}^* f_1 \text{Cos}^* f_2 - \text{Sin } f_1 \text{Sin } f_2 = \text{Cos}^*(f_1 + f_2). \quad (8.46)$$

2.9. Двувекторное обобщение

Пусть $R \in V_N$ и $S \in V_N$ — два вектора. Из (7.1) и (7.15) находим

$$\frac{\partial \langle R, S \rangle}{\partial R^p} = R_p \frac{\langle R, S \rangle}{K^2(g; R)} + hK(g; S)s_p(g; R, S) \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial \langle R, S \rangle}{\partial S^q} = S_q \frac{\langle R, S \rangle}{K^2(g; S)} + hK(g; R)s_p(g; S, R) \sin \alpha.$$

Для ассоциируемого \mathcal{E}_g^{PD} -двувекторного метрического тензора

$$G_{pq}(g; R, S) := \frac{\partial^2 \langle R, S \rangle}{\partial S^q \partial R^p} \quad (9.1)$$

получается явное представление

$$\begin{aligned} G_{pq}(g; R, S) = & \left(\frac{R_p}{K(g; R)} \frac{S_q}{K(g; S)} - h^2 s_p(g; R, S) s_q(g; S, R) \right) \cos \alpha \\ & + h \left[\left(\frac{R_p}{K(g; R)} s_q(g; S, R) + \frac{S_q}{K(g; S)} s_p(g; R, S) \right) + s_{pq}(g; R, S) \right] \sin \alpha, \end{aligned}$$

где

$$s_p(g; R, S) = \frac{M_p(g; R, S) K(g; R)}{W(g; R, S) B(g; R)},$$

$$s_{pq}(g; R, S) = K(g; S) \frac{\partial s_p(g; R, S)}{\partial S^q},$$

$$W(g; R, S) = \sqrt{B(g; R)B(g; S) - [A(g; R)A(g; S) + h^2 r_{be} R^b S^e]^2},$$

а также

$$M_p(g; R, S) = B(g; R) \sqrt{B(g; R)} \sqrt{B(g; S)} \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial R^p} \frac{A(g; R)A(g; S) + h^2 r_{be} R^b S^e}{\sqrt{B(g; R)} \sqrt{B(g; S)}}.$$

Компоненты вектора $\{M_p\}$ таковы, что

$$h^2 M_N(g; R, S) = B(g; R)A(g; S) - [A(g; R)A(g; S) + h^2 r_{be} R^b S^e] A(g; R)$$

и

$$h^2 M_a(g; R, S) = B(g; R) \left(\frac{1}{2} g \frac{R^b}{q(R)} A(g; S) + h^2 S^b \right) r_{ab} \\ - \left[A(g; R) A(g; S) + h^2 r_{be} R^b S^e \right] \left(\frac{1}{2} g R^N + q(R) \right) \frac{R^b}{q(R)} r_{ab},$$

откуда после упрощений окончательно получаются представления

$$M_N(g; R, S) = q^2(R) A(g; S) - r_{be} R^b S^e A(g; R),$$

$$M_a(g; R, S) = \left(-R^N R^b A(g; S) + S^b B(g; R) - r_{ec} R^e S^c \left(q(R) + \frac{1}{2} g R^N \right) \frac{R^b}{q(R)} \right) r_{ab}.$$

Выполняется тождество

$$M_p(g; R, S) R^p = 0.$$

Справедливость симметрии

$$G_{pq}(g; R, S) = G_{qp}(g; S, R) \quad (9.2)$$

и собственно *финслероидного предела*

$$\lim_{S^r \rightarrow R^r} \left\{ G_{pq}(g; R, S) \right\} = g_{pq}(g; R) \quad (9.3)$$

(ср. (4.5) в Главе 3) проверяется прямыми выкладками; компоненты $g_{pq}(g; R)$ представлены формулами (2.54)–(2.55). Двувекторный \mathcal{E}_g^{PD} -метрический тензор (9.1) может быть получен также в результате преобразования

$$G_{pq}(g; R, S) = \sigma_p^r(g; R) \sigma_q^s(g; S) N_{rs}(g; t_1, t_2)$$

(см. (2.2) в Главе 3) двувекторного квазиевклидова метрического тензора (см. (4.2) в Главе 3), где

$$t_1^r = \sigma^r(g; R), \quad t_2^s = \sigma^s(g; S)$$

(ср. (1.10) и (1.33) в Главе 3).

Глава 3

Квазиевклидово рассмотрение

Структура изучаемого пространства в большой степени определяется существованием нелинейного преобразования, условно названного нами квазиевклидовым, которое диффеоморфно переводит индикатрису (поверхность финслероида) в единичную сферу и одновременно переводит ассоциируемый метрический тензор в весьма простой тензор, также названный нами квазиевклидовым. Этот тензор строится как линейная комбинация евклидова тензора и произведения единичных векторов. Его детерминант является константой. Квазиевклидово пространство не плоское, но конформно-плоское.

По этим причинам основные объекты квазиевклидова пространства, — включая коэффициенты преобразования, символы Кристоффеля, тензор кривизны, ортонормированные реперы и коэффициенты вращения Риччи, — вычисляются легко и не имеют существенных сложностей в своей структуре (Раздел 3.1 и Раздел 3.2).

Более того, уравнение для геодезических такого пространства допускает решение в явном и достаточно простом виде, причем как в формулировке с краевыми условиями, так и в формулировке с начальными данными. Оно подробно изложено в Разделе 3.3. Соответствующие геодезические оказываются плоскими кривыми. Метод решения основывается на замечательном свойстве уравнений, что вектор ускорения пропорционален ридиус-вектору (точка на геодезической получает строго радиальное ускорение “от центра” “ O ” согласно закону (3.4)). На основе найденного решения, и при сохранении обычного вида для теоремы косинуса, получаются скалярное произведение и угол, а также обобщенные законы сложения и вычитания векторов. Использование квазиевклидова преобразования может рассматриваться как эффективный метод решения (вообще говоря нелинейных и часто сложных) уравнений в финслероидной геометрии: преобразуя их в квазиевклидово пространство, решая и выясняя структуру входящих объектов, можно получать явные решения в исходном пространстве, просто применяя обратное квазиевклидово преобразование. Именно так мы получили угол в финслероидном пространстве. Обычно ожидают, что угловая мера должна быть аддитивной (для углов с общей вершиной). Найденный угол α характеризуется свойством $\alpha = \frac{1}{h}\alpha_{\text{Euclidean}}$ и вследствие этого аддитивен. К такому углу α относятся формулы (7.28)–(7.30) Главы 2.

В заключительном Разделе 3.4 настоящей главы представлен расчет двувекторного обобщения метрического тензора и родственных объектов.

3.1. Квазиевклидово отображение финслероида

Теорема 2.3 из Главы 2 может быть продолжена дальше путем указания для индикатрисы \mathcal{I}_g^{PD} диффеоморфизма

$$\mathcal{I}_g^{PD} \xrightarrow{i_g} S^{PD} \quad (1.1)$$

единичной сфере

$$S^{PD} := \{R \in S^{PD} : S(R) = 1\}, \quad (1.2)$$

где

$$S(R) = \sqrt{r_{pq} R^p R^q} \equiv \sqrt{(R^N)^2 + r_{ab} R^a R^b} \quad (1.3)$$

является евклидовой метрической функцией (см. (2.11) в Главе 2). Очевидно,

$$\mathcal{I}_{g=0}^{PD} = S^{PD}.$$

Он, в свою очередь, может быть расширен, чтобы получить диффеоморфное отображение

$$V_N \xrightarrow{\sigma_g} V_N \quad (1.4)$$

всего векторного пространства V_N . Для этого достаточно воспользоваться однородностью

$$\sigma_g \cdot (bR) = b\sigma_g \cdot R, \quad b > 0, \quad (1.5)$$

и взять просто

$$\sigma_g \cdot R = \|R\| i_g \cdot \left(\frac{R}{\|R\|} \right), \quad (1.6)$$

где

$$\|R\| = K(g; R). \quad (1.7)$$

Из (1.1)–(1.7) вытекает

$$K(g; R) = S(\sigma_g \cdot R), \quad (1.8)$$

так что ограничение такого отображения на финслероид очевидно переведет его в единичный евклидов шар.

Тождество (2.52a) из Главы 2 подсказывает идею использовать отображение

$$\bar{R} = \sigma_g \cdot R \quad (1.9)$$

с помощью компонент

$$\bar{R}^p = \sigma^p(g; R) \quad (1.10)$$

с функциями

$$\sigma^a = R^a hJ(g; R), \quad \sigma^N = A(g; R)J(g; R) \quad (1.11)$$

(здесь $J(g; R)$ и $A(g; R)$ — функции (2.27) и (2.34) из Главы 2). Действительно, вставляя компоненты (1.11) в (1.3) и принимая во внимание формулы (2.26) и (2.52) из Главы 2, мы получаем тождество

$$S(\bar{R}) = K(g; R), \quad (1.12)$$

которое эквивалентно (1.8).

Итак, можно сделать вывод, что справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. *Отображение, задаваемое явно формулами (1.9)–(1.11), устанавливает диффеоморфизм между индикатрисой финслероида и единичной сферой.*

Естественно ввести

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При этих условиях отображение (1.1) называется *квазиевклидовым отображением индикатрисы финслероида*. Расширение такого отображения на финслероид называется *квазиевклидовым отображением финслероида*.

Для преобразования (1.9)–(1.11) обращение

$$R = \mu_g \cdot \bar{R}, \quad \mu_g = (\sigma_g)^{-1}, \quad (1.13)$$

может быть представлено компонентами

$$R^p = \mu^p(g; \bar{R}) \quad (1.14)$$

с функциями

$$\mu^a = \bar{R}^a / hk(g; \bar{R}), \quad \mu^N = I(g; \bar{R}) / k(g; \bar{R}), \quad (1.15)$$

где

$$k(g; \bar{R}) := J(g; \mu(g; \bar{R})) \quad (1.16)$$

и

$$I(g; \bar{R}) = \bar{R}^N - \frac{1}{2} G \sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}. \quad (1.17)$$

Тождество

$$\mu^p(g; \sigma(g; R)) \equiv R^p \quad (1.18)$$

легко проверяется. Заметим, что

$$\frac{\sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}}{\bar{R}^N} = \frac{hq}{A(g; R)}, \quad w^a = \frac{R^a}{R^N} = \frac{\bar{R}^a}{hI(g; \bar{R})}, \quad (1.19)$$

и

$$\frac{\sqrt{B}}{Z} = \sqrt{Q} = \frac{S}{I}. \quad (1.20)$$

Соответствующий σ_g -образ

$$\phi(g; \bar{R}) := \Phi(g; R)|_{R=\mu(g; \bar{R})} \quad (1.21)$$

функции Φ (представленной формулами (2.28)–(2.38) в Главе 2) имеет ясный смысл угла:

$$\phi(g; \bar{R}) = \arctg \frac{\bar{R}^N}{\sqrt{r_{ab} \bar{R}^a \bar{R}^b}} \quad (1.22)$$

(использовано (1.19)). Он лежит в пределах

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.23)$$

(ср. формулу (2.35) в Главе 2). Мы имеем

$$\phi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \bar{R}^a = 0 \text{ и } \bar{R}^N > 0; \quad \phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \bar{R}^a = 0 \text{ и } \bar{R}^N < 0, \quad (1.24)$$

а также

$$\phi|_{\bar{R}^N=0} = 0. \quad (1.25)$$

Сравнение формулы (1.16) с формулой (2.27) из Главы 2 показывает, что

$$k = e^{\frac{1}{2}G\phi}. \quad (1.26)$$

Правые части в (1.11) — однородные функции степени 1:

$$\sigma^p(g; bR) = b\sigma^p(g; R), \quad b > 0. \quad (1.27)$$

Следовательно тождество

$$\sigma_s^p(g; R)R^s = \bar{R}^p \quad (1.28)$$

должно быть верным для производных

$$\sigma_p^q(g; R) := \frac{\partial \sigma^q(g; R)}{\partial R^p}. \quad (1.29)$$

На таком пути получаются простые представления

$$\sigma_N^N(g; R) = \left(B + \frac{1}{2}gqA \right) \frac{J}{B}, \quad \sigma_a^N(g; R) = -\frac{g(ZA - B)}{2q} \frac{Jr_{ab}R^b}{B}, \quad (1.30)$$

и

$$\sigma_N^a(g; R) = \frac{1}{2}gq \frac{JR^a h}{B}, \quad \sigma_b^a(g; R) = \left(B\delta_b^a - \frac{gr_{bc}R^c R^a Z}{2q} \right) \frac{Jh}{B}, \quad (1.31)$$

а также детерминант

$$\det(\sigma_p^q) = h^{N-1} J^N. \quad (1.32)$$

Во многих вычислениях, включающих коэффициенты $\{\sigma_p^q\}$, полезны соотношения

$$\sigma_b^a R^b = JhR^a \frac{AZ + q^2}{B}, \quad r^{cd} \sigma_c^a \sigma_d^b = J^2 h^2 \left[r^{ab} - g \frac{R^a R^b Z}{qB} + \frac{1}{4} g^2 \frac{R^a R^b Z^2}{B^2} \right].$$

Для упрощения обозначений часто будем использовать подстановку

$$t^p = \bar{R}^p. \quad (1.33)$$

Снова учитываем однородность

$$\mu^p(g; bt) = b\mu^p(g; t), \quad b > 0, \quad (1.34)$$

для функций (1.15), откуда вытекает тождество

$$\mu_s^p(g; t) t^s = R^p \quad (1.35)$$

для производных

$$\mu_q^p(g; t) := \frac{\partial \mu^p(g; t)}{\partial t^q}. \quad (1.36)$$

Находим

$$\mu_N^N = 1/k(g; t) - \frac{1}{2} g \frac{m(t) I(g; t)}{hk(g; t) (S(t))^2}, \quad \mu_a^N = -\frac{1}{2} g \frac{r_{act} I^*(g; t)}{h^2 k(g; t) (S(t))^2}, \quad (1.37)$$

$$\mu_N^a = -\frac{1}{2} g \frac{m(t) t^a}{h^2 k(g; t) (S(t))^2}, \quad \mu_b^a = \frac{1}{hk(g; t)} \delta_b^a + \frac{1}{2} g \frac{t^N t^a r_{bct}}{m(t) h^2 k(g; t) (S(t))^2}, \quad (1.38)$$

где

$$m(t) = \sqrt{r_{ab} t^a t^b}, \quad (1.39)$$

$$I^*(g; t) = hm(t) + \frac{1}{2} g t^N \quad (1.40)$$

и

$$S(t) = \sqrt{r_{rs} t^r t^s} \equiv \sqrt{(t^N)^2 + r_{ab} t^a t^b}. \quad (1.41)$$

В частности, из вышеприведенных формул получаются соотношения

$$\frac{\partial(1/k(g; t))}{\partial t^N} = -\frac{1}{2} g \frac{m(t)}{hk(g; t) (S(t))^2}, \quad \frac{\partial(1/k(g; t))}{\partial t^a} = \frac{1}{2} g \frac{t^N r_{ab} t^b}{m(t) hk(g; t) (S(t))^2}.$$

Следует отметить также, что

$$R_p \mu_q^p = t_q, \quad t_p \sigma_q^p = R_q. \quad (1.42)$$

Квазиевклидовы единичные векторы

$$L^p := \frac{t^p}{S(t)}, \quad L_p := r_{pq} L^q \quad (1.43)$$

удовлетворяют соотношениям

$$L^q = l^p \sigma_p^q, \quad l^p = \mu_q^p L^q, \quad l_p = \sigma_p^q L_q, \quad L_p = \mu_p^q l_q, \quad (1.44)$$

где $l^p = R^p/K(g; R)$ и $l_p = R_p/H$ — единичные векторы исходного финслероидного пространства.

Теперь мы используем формулы (1.29)–(1.32) вместе с явными выражениями для контравариантных компонент метрического тензора (формулы (2.56)–(2.57) из Главы 2) для нахождения преобразования

$$n^{rs}(g; t) := \sigma_p^r \sigma_q^s g^{pq} \quad (1.45)$$

ФМТ $\{g_{pq}\}$ при \mathcal{F}_g^{PD} -индуцированном отображении (1.9)–(1.11). Соответствующие прямые вычисления приводят к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.2. *Для квазиевклидова метрического тензора (1.45) справедливо простое представление*

$$n^{rs} = h^2 r^{rs} + \frac{1}{4} g^2 L^r L^s. \quad (1.46)$$

Ковариантная версия имеет аналогичный вид

$$n_{rs} = \frac{1}{h^2} r_{rs} - \frac{1}{4} G^2 L_r L_s. \quad (1.47)$$

Детерминант этого тензора является константой:

$$\det(n_{rs}) = h^{2(1-N)} \det(r_{ab}). \quad (1.48)$$

Заметим также, что

$$L^p L_p = 1, \quad n_{pq} L^q = L_p, \quad n^{pq} L_q = L^p, \quad n_{pq} L^p L^q = 1,$$

$$n_{pq} t^p t^q = (S(t))^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Качественно сущность финслероидной геометрии можно видеть в том, что при отображении финслероида в единичный евклидов шар соответствующий метрический тензор $\{g_{pq}\}$ переходит не в евклидов метрический тензор $\{r_{rs}\}$, а в более сложный тензор $\{n_{rs}\}$, являющийся линейной комбинацией тензора $\{r_{rs}\}$ и произведения единичных векторов согласно формуле (1.47).

Поясним сказанное рисунками 20–22.

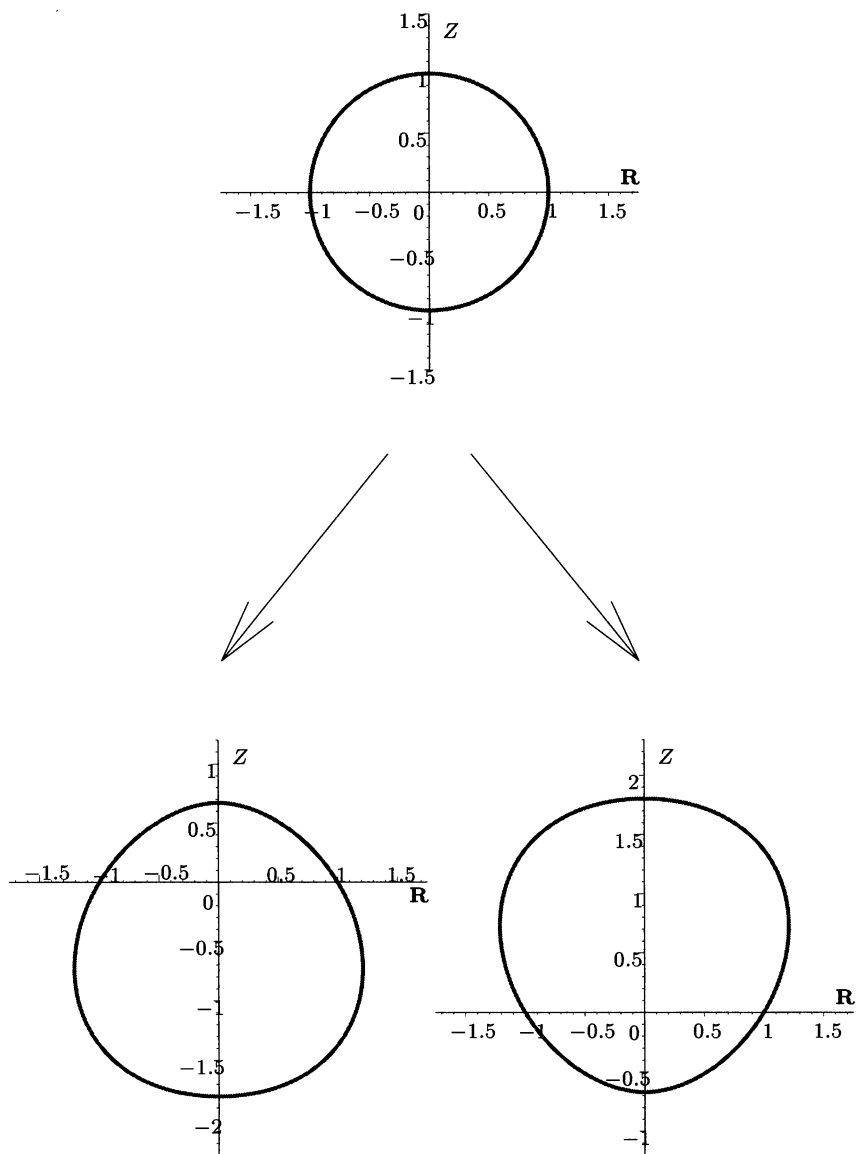


Рис. 20: Верхний рисунок соответствует обычной евклидовой сфере. Стрелки символизируют обратное квазиевклидово отображение; левый нижний рисунок отвечает финслерииду с $g = 0.6$, а правый нижний рисунок отвечает финслерииду с $g = -0.6$ (ср. рис. 1 в Главе 2). Центр “ O ” сферы отображается в точку “ O ” финслерида.

При квазиевклидовом отображении прямые не переходят в прямые, а они переходят в искривленные линии; аналогично, плоскости переходят в поверхности.

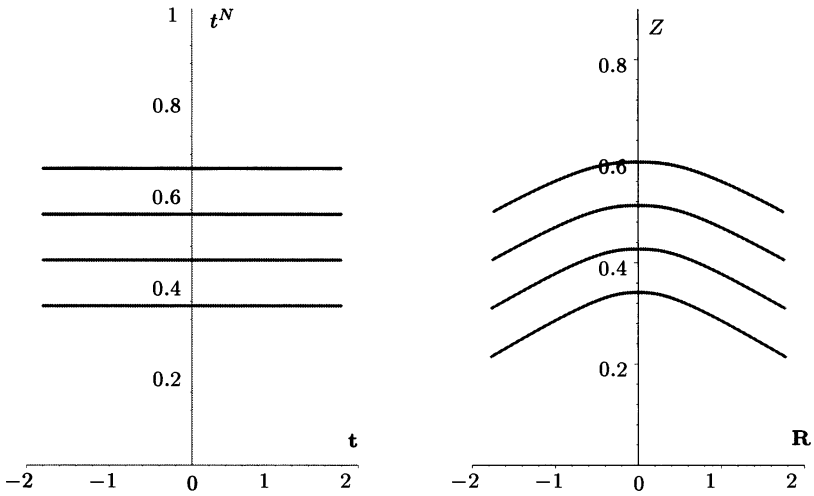


Рис. 21: Отображение линий (слева направо), для которых $t^N = \text{const}$, из квазиевклидова пространства в исходное финслероидное пространство ($g=0.2$; $t^N=0.35, 0.45, 0.55, 0.65$).

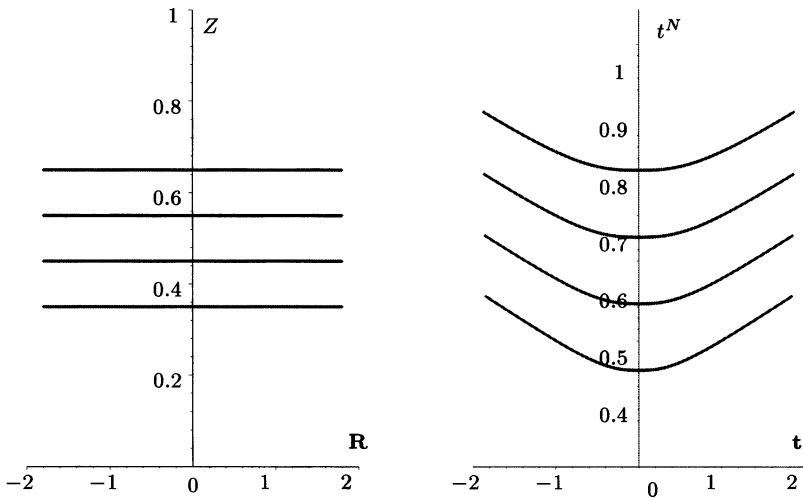


Рис. 22: Отображение линий (слева направо), для которых $Z = \text{const}$, из исходного пространства в квазиевклидово пространство ($g=0.2$; $Z=0.35, 0.45, 0.55, 0.65$).

3.2. Квазиевклидово пространство

Введем следующие два понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Метрический тензор $\{n_{pq}(g; t)\}$ с компонентами (1.46)–(1.47) называется *квазиевклидовым*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квазиевклидово пространство*

$$\mathcal{Q}_N := \{V_N; g; n_{pq}(g; t)\} \quad (2.1)$$

обобщает евклидово пространство $\{V_N; r_{pq}\}$ на случай $g \neq 0$.

Преобразование (1.45) может быть обращено, что дает представление

$$g_{pq} = \sigma_p^r \sigma_q^s n_{rs}. \quad (2.2)$$

Для углового метрического тензора (см. формулы (2.60)–(2.62) в Главе 2), из (1.44) и (2.2) мы выводим

$$h_{pq} = \sigma_p^r \sigma_q^s H_{rs} \frac{1}{h^2}, \quad (2.3)$$

где

$$H_{rs} := r_{rs} - L_r L_s = h^2(n_{rs} - L_r L_s) \quad (2.4)$$

— тензор, показывающий свойство ортогональности

$$L^r H_{rs} = 0. \quad (2.5)$$

Вычислим ассоциируемые *квазиевклидовы символы Кристоффеля* $N_p^r{}_q(g; t)$. Последовательно находим

$$n_{pq,r} := \frac{\partial n_{pq}}{\partial t^r} = -\frac{1}{4}G^2(H_{pr}L_q + H_{qr}L_p)/S \quad (2.6)$$

и затем

$$N_p^r{}_q = n^{rs}N_{psq}, \quad N_{prq} = \frac{1}{2}(n_{pr,q} + n_{qr,p} - n_{pq,r}) \quad (2.7)$$

вместе со значениями

$$N_{prq}(g; t) = -\frac{1}{4}G^2 H_{pq} L_r / S, \quad (2.8)$$

что окончательно дает

$$N_p^r{}_q(g; t) = -\frac{1}{4}G^2 L^r H_{pq} / S. \quad (2.9)$$

Сравнение (2.9) с тождеством (2.5) показывает, что

$$t^p N_p^r{}_q = 0, \quad N_p^p{}_q = 0. \quad (2.10)$$

Рассмотрим уравнение квазиевклидовых геодезических

$$\frac{dv^p}{ds} + N_q^p r(g; t) v^q v^r = 0, \quad (2.11)$$

применяя его к какой-либо кривой $C : t^p = t^p(s)$, где

$$ds = \sqrt{n_{pq}(g; t) dt^p dt^q}, \quad (2.12)$$

а

$$v^p = \frac{dt^p}{ds} \quad (2.13)$$

— касательный вектор (скорость), так что

$$n_{pq}(g; t) v^p v^q = 1, \quad L_p v^p = \frac{dS}{ds}. \quad (2.14)$$

Из (2.8) и (2.9) следуют тождества

$$N_p^s s = 0, \quad N_t^s r N_p^t q = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial N_p^r q}{\partial t^s} - \frac{\partial N_p^r s}{\partial t^q} = -\frac{1}{4} G^2 (H_{pq} H_s^r - H_{ps} H_q^r) / S^2. \quad (2.16)$$

Используя их в квазиевклидовом тензоре кривизны:

$$R_p^r q_s(g; t) := \frac{\partial N_p^r q}{\partial t^s} - \frac{\partial N_p^r s}{\partial t^q} + N_p^w q N_w^r s - N_p^w s N_w^r q, \quad (2.17)$$

мы приходим к простому результату:

$$R_{prqs}(g; t) = -\frac{1}{4} G^2 (H_{pq} H_{rs} - H_{ps} H_{qr}) / S^2. \quad (2.18)$$

Справедливо

$$L^p R_{pqrs} = L^q R_{pqrs} = L^r R_{pqrs} = L^s R_{pqrs} = 0. \quad (2.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вследствие законов преобразования (1.12), (1.42) и (2.2) представление (2.18) равнозначно представлению (2.65)–(2.66) из Главы 2 для тензора кривизны финслероидного пространства. Следовательно мы получили другое строгое доказательство Теоремы 2.2, а также показывающей кривизну индикатрисы финслероида формулы (2.69) из Главы 2.

Квазиевклидов ортонормированный репер $\{m_P^q\}$, $\{f_q^P\}$, определяемый представлениями

$$n^{pq} = \sum_{P=1}^N m_P^p m_P^q, \quad n_{pq} = \sum_{P=1}^N f_p^P f_q^P, \quad (2.20)$$

оказывается берущимся в простом виде

$$f_q^P(g; t) = \frac{1}{h} h_q^P + \frac{h-1}{h} L_q L^P \quad (2.21)$$

и

$$m_P^q(g; t) = h h_P^q + (1-h) L_P L^q \quad (2.22)$$

с векторами

$$L^P = h_q^P L^q, \quad L_P = h_P^q L_q. \quad (2.23)$$

Здесь $\{h_q^P\}$ и $\{h_P^q\}$ — ортонормированные реперы для начального метрического тензора (2.11) из Главы 2, так что

$$r^{pq} = \sum_{P=1}^N h_P^p h_P^q, \quad r_{pq} = \sum_{P=1}^N h_p^P h_q^P. \quad (2.24)$$

Верно тождество

$$f_q^P(g; t) t^q = t^P. \quad (2.25)$$

Ассоциируемые квазиевклидовы коэффициенты вращения Риччи

$$R^{PQ}_p(g; t) := (\partial_p f_q^Q - N_p^r{}_q f_r^Q) m_T^q \delta^{TP} \quad (2.26)$$

находятся в простом явном виде:

$$R^{PQ}_p(g; t) = (h-1)(L^P f_p^Q - L^Q f_p^P)/S(t). \quad (2.27)$$

Структура правой части представления (2.18) такова, что квазиевклидов метрический тензор $\{n_{pq}\}$ соответствует пространству постоянной кривизны только в собственно евклидовом случае $g = 0$ (в таком случае и $G = 0$). В то же время, используя метрику (1.3) и трактуя сферу радиуса r

$$\mathcal{S}_r := \{R \in \mathcal{S}_r : S(t) = r\} \quad (2.28)$$

как гиперповерхность в квазиевклидовом пространстве (2.1):

$$\mathcal{S}_r \subset \mathcal{Q}_N, \quad (2.29)$$

можно легко убедиться, что справедлива

ТЕОРЕМА 3.3. *\mathcal{Q}_N -индуцированная геометрия на сфере (2.28) является геометрией постоянной кривизны, равной h^2/r^2 .*

Формально эта теорема утверждает, что для кривизны \mathcal{C} гиперповерхности (2.28)–(2.29) должно получиться

$$\mathcal{C}_{\text{quasi-Euclidean}} = h^2 \mathcal{C}_{\text{Euclidean}}, \quad (2.30)$$

где

$$C_{\text{Euclidean}} = \frac{1}{r^2}. \quad (2.31)$$

Для проверки достаточно заметить, что при любой допустимой параметризации

$$t^p = t^p(u^a)$$

гиперповерхности (2.27)–(2.28) проекционные множители

$$T_a^p = \frac{\partial t^p}{\partial u^a},$$

где $a = 1, \dots, N - 1$, удовлетворяют тождеству

$$L_p T_a^p \equiv 0$$

(см. первый член в формуле (4.12) в Главе 1), и что ввиду (2.29) L_p -множители исчезают в индуцированном метрическом тензоре

$$q_{ab} = T_a^p T_b^q n_{pq} \equiv T_a^p T_b^q \left(\frac{1}{h^2} r_{pq} - \frac{1}{4} G^2 L_p L_q \right) \quad (2.32)$$

(применена формула (1.47)), оставляя представление

$$q_{ab} = T_a^p T_b^q r_{pq} / h^2. \quad (2.33)$$

Оно прямо указывает на справедливость теоремы 3.3.

Удобен частный способ параметризации

$$t^a = u^a, \quad t^N = \sqrt{r^2 - u^2} \quad (2.34)$$

с функцией

$$u = \sqrt{r_{ab} u^a u^b}. \quad (2.35)$$

Он приводит к следствию

$$T_a^N = -\frac{u_a}{\sqrt{r^2 - u^2}}, \quad T_b^a = \delta_b^a,$$

и затем к представлениям

$$h^2 q_{ab}(u) = r_{ab} + \frac{u_a u_b}{r^2 - u^2}, \quad \frac{1}{h^2} q^{ab}(u) = r^{ab} - \frac{1}{r^2} u^a u^b$$

и

$$\det(q_{ab}(u)) = h^{2(1-N)} \frac{r^2}{r^2 - u^2} \det(r_{ab}).$$

Построение по тензору $\{g_{ab}(u)\}$ соответствующих символов Кристоффеля дает

$$I_{ab,e} = \frac{r_{ab} u_e}{r^2 - u^2} \frac{1}{h^2} + \frac{u_a u_b u_e}{(r^2 - u^2)^2} \frac{1}{h^2} = \frac{u_e}{r^2 - u^2} q_{ab}, \quad I_a^e{}_b = \frac{h^2}{r^2} u^e q_{ab},$$

откуда следует, что \mathcal{Q}_N -индуцированный тензор кривизны

$$R_e^c{}_{ab}(u) := \frac{\partial I_e^c{}_a}{\partial u^b} - \frac{\partial I_e^c{}_b}{\partial u^a} + I_e^d{}_a I_d^c{}_b - I_e^d{}_b I_d^c{}_a$$

на сфере (2.28) таков, что

$$R_{ecab}(u) = h^2 \frac{1}{r^2} (q_{ea}q_{cb} - q_{eb}q_{ac}). \quad (2.36)$$

Последнее представление прямо показывает справедливость равенств (2.29)–(2.30).

Справедлива

ТЕОРЕМА 3.4. *Квазиевклидов метрический тензор $\{n_{pq}\}$ является конформным евклидову метрическому тензору. Конформный множитель равен $[\frac{1}{2}S^2(\bar{R})]^{1-h}$.*

Действительно, если мы рассмотрим отображение

$$\bar{R}^p \rightarrow \tilde{R} : \quad \tilde{R}^p = \xi(g; \bar{R}) \bar{R}^p / h \quad (2.37)$$

с функцией

$$\xi(g; \bar{R}) = a \left(g; \frac{1}{2} S^2(\bar{R}) \right)$$

и используем коэффициенты

$$k_q^p := \frac{\partial \tilde{R}^p}{\partial \bar{R}^q} = (\xi \delta_q^p + a' \bar{R}^p \bar{R}_q) / h$$

для определения тензора

$$c^{pq}(g; \tilde{R}) := k_r^p k_s^q n^{rs}(g; \bar{R}),$$

то, подставляя сюда (1.46), найдем, что

$$c^{pq} = \xi^2 r^{pq} \quad (2.38)$$

при

$$\xi = \left[\frac{1}{2} S^2(\bar{R}) \right]^{(h-1)/2}. \quad (2.39)$$

Тензор $\{r^{pq}\}$ в правой части в (2.37) является евклидовым (см. (2.11) в Главе 2). Доказательство Теоремы 3.4 завершено.

Полезно сравнить формулы (2.37)–(2.38) с формулами (1.9)–(1.11), а представление детерминанта (1.48) с представлением

$$\det(c_{pq}) = \xi^{-2N} \det(r_{pq}). \quad (2.40)$$

3.3. Решение квазиевклидовых уравнений геодезических

Использование квазиевклидовых символов Кристоффеля (2.9) позволяет представить уравнения (2.11)–(2.13) для квазиевклидовых геодезических в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} G^2 \frac{\mathbf{t}}{S^2} H_{pq} v^p v^q, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{t} = \{t^p\}$. С помощью (2.4) и (2.14)–(2.15) из (3.1) получаем

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} g^2 \frac{\mathbf{t}}{S^2} \left(1 - \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 \right).$$

Отсюда легко вывести квадратичный закон

$$S^2(s) = a^2 + 2bs + s^2, \quad (3.2)$$

где a и b — константы, подчиненные условию (7.13). Действительно, из равенства

$$\frac{1}{2} \frac{dS^2}{ds} = r_{pq} t^p v^q \quad (3.3)$$

при использовании формул (3.2) и (2.12)–(2.15) получается

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2(S^2)}{ds^2} &= r_{pq} v^p v^q + t_q \frac{dv^q}{ds} = (h^2 n_{pq} + \frac{1}{4} g^2 L_p L_q) v^p v^q + \frac{1}{4} g^2 \left(1 - \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 \right) \\ &= h^2 + \frac{1}{4} g^2 \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 + \frac{1}{4} g^2 \left(1 - \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 \right) = 1. \end{aligned}$$

Поэтому (3.2) верно (ср. (7.8) в Главе 1).

Следовательно, уравнение (3.1) может быть переписано в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{t}}{ds^2} = \frac{1}{4} g^2 \frac{a^2 - b^2}{S^4} \mathbf{t}. \quad (3.4)$$

Справедливы равенства

$$S(\Delta s) = \sqrt{a^2 + 2b\Delta s + (\Delta s)^2}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}(0), \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}(\Delta s), \quad (3.6)$$

$$a = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \quad (3.7)$$

и

$$S(\Delta s) = \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}. \quad (3.8)$$

Здесь \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 — два вектора, выходящих из общей точки; они оканчиваются соответственно на начальной точке и на конечной точке геодезической дуги. Скобки $(..)$ используются для обозначения евклидова скалярного произведения, так что

$$(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) = r_{pq} t_1^p t_1^q, \quad (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) = r_{pq} t_2^p t_2^q, \quad (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) = r_{pq} t_1^p t_2^q;$$

напомним, что $\{r_{pq}\} = \{\delta_{pq}\}$ при выборе ортогонального базиса.

Правая часть в (3.4) пропорциональна радиус-вектору \mathbf{t} , так что *ускорение направлено (строго) от центральной точки "O"*:

$$\text{Радиальное ускорение} = \frac{1}{4} g^2 \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + 2bs + s^2)^2} \geq 0. \quad (3.9)$$

Точка "O" играет роль *центра отталкивания*.

Какое значение следует приписать скалярному произведению $(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)$? Специальный анализ показывает, что соответствующий корректный выбор, совместимый с решением (см. ниже (3.25) и (3.26)) уравнения (3.1), таков:

$$(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) = aS(\Delta s) \cos \left[h \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]. \quad (3.10)$$

Из (3.7)–(3.9) прямо следует

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} = \operatorname{tg} \left[\frac{1}{h} \arccos \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \right], \quad (3.11)$$

откуда вытекают равенства

$$\cos \left[h \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right] = \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}$$

и

$$\sin \left[h \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right] = \frac{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}},$$

где

$$u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) - (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)^2}. \quad (3.12)$$

Они подсказывают идею ввести следующий *квазиевклидов угол*

$$\alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) := \frac{1}{h} \arccos \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}, \quad (3.13)$$

так что

$$\alpha = \frac{1}{h} \alpha_{\text{Euclidean}}. \quad (3.14)$$

Такой угол очевидно *аддитивен*:

$$\alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_3) = \alpha(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) + \alpha(\mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \quad (3.15)$$

в планарном случае тройки векторов $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$. Традиционное обращение в нуль при равенстве векторов сохраняется:

$$\alpha(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0. \quad (3.16)$$

Используя равенство

$$(a^2 + b\Delta s)^2 + (\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s)^2 \equiv a^2 S^2(\Delta s) \quad (3.17)$$

(следствие формулы (3.5)), мы также устанавливаем соотношения

$$a^2 + b\Delta s = aS(\Delta s) \cos \alpha \quad (3.18)$$

и

$$\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s = aS(\Delta s) \sin \alpha, \quad (3.19)$$

где α — в точности угол (3.12). Из них в свою очередь можно вывести равенства

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{S(\Delta s) \cos \alpha - a}{S(\Delta s) \sin \alpha}, \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{S(\Delta s)}{\Delta s} \right)^2 \sin^2 \alpha \quad (3.20)$$

из которых можно получить выражение для b .

Итак, *каждый член входящего набора $\{a, b, \Delta s, S(\Delta s)\}$ явно выражается через краевые векторы \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 .*

Таким образом, мы получаем следующие фундаментальные представления.

Квазиевклидово расстояние между двумя точками

$$(\Delta s)^2 = (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) + (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) - 2\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha. \quad (3.21)$$

Квазиевклидово скалярное произведение

$$\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha, \quad (3.22)$$

где α — введенный выше угол (3.12).

Отождествление

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1| = \Delta s \quad (3.23)$$

переводит (3.20) в “квазиевклидову теорему косинуса”:

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2 = (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) + (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) - 2\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha. \quad (3.24)$$

Справедлива симметрия

$$|\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1| = |\mathbf{t}_1 \ominus \mathbf{t}_2|. \quad (3.25)$$

Сравнение формулы

$$(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos(h\alpha) = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha_{\text{Euclidean}}$$

(см. (3.9)–(3.13)) с (3.21) показывает, что

$$\langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle \neq (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \quad \text{при } g \neq 0.$$

Такой путь вычислений приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3.5. *Общее решение с граничными данными для уравнений геодезических (3.1) может быть найдено в следующем явном виде:*

$$\begin{aligned} & \mathbf{t}(s) = \\ &= \frac{S(s)}{a} \frac{\sin \left[h \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} (\Delta s - s)}{a^2 + b\Delta s + (b + \Delta s)s} \right]}{\sin \left[h \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]} \mathbf{t}_1 + \frac{S(s)}{S(\Delta s)} \frac{\sin \left[h \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} s}{a^2 + bs} \right]}{\sin \left[h \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s} \right]} \mathbf{t}_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Справедливость этого утверждения может быть проверена прямой подстановкой (3.26) в (3.2). Из (3.26) вытекает равенство

$$(\mathbf{t}(s)\mathbf{t}(s)) = S^2(s) \quad (3.27)$$

в согласии с (3.3).

Поскольку

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} (\Delta s - s)}{a^2 + b\Delta s + (b + \Delta s)s} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} s}{a^2 + bs} \equiv \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{a^2 + b\Delta s},$$

то

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} (\Delta s - s)}{a^2 + b\Delta s + (b + \Delta s)s} = \alpha - \nu, \quad (3.28)$$

где

$$\nu = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} s}{a^2 + bs}. \quad (3.29)$$

Использование здесь формул (3.19) приводит предыдущее выражение к виду

$$\nu = \operatorname{arctg} \frac{sS(\Delta s) \sin \alpha}{a\Delta s + [S(\Delta s) \cos \alpha - a]s}. \quad (3.30)$$

Производная от такой функции имеет простой вид

$$\frac{d\nu}{ds} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{S^2(s)}.$$

Использование (3.28) и (3.29) в решении (3.26) упрощает его запись:

$$\mathbf{t}(s) = \frac{S(s)}{a} \frac{\sin(h(\alpha - \nu))}{\sin(h\alpha)} \mathbf{t}_1 + \frac{S(s)}{S(\Delta s)} \frac{\sin(h\nu)}{\sin(h\alpha)} \mathbf{t}_2. \quad (3.31)$$

Отсюда, в частности, получаются простые произведения

$$(\mathbf{t}(s)\mathbf{t}_1) = S(s)a \cos(h\nu) \quad (3.32)$$

и

$$(\mathbf{t}(s)\mathbf{t}_2) = S(s)S(\Delta s) \cos(h(\alpha - \nu)). \quad (3.33)$$

Отождествление $\mathbf{t}(s)|_{s=0} = \mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}(s)|_{s=\Delta s} = \mathbf{t}_2$ легко проверяется. В евклидовом пределе решение (3.31) имеет традиционный вид

$$\mathbf{t}(s)|_{g=0} = \frac{(\Delta s - s)\mathbf{t}_1 + s\mathbf{t}_2}{\Delta s} = \mathbf{t}_1 + (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) \frac{s}{\Delta s},$$

т.е. геодезические упрощаются до прямых линий.

Поскольку общее решение (3.26) таково, что его правая часть — линейная сумма двух фиксированных векторов, \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 , то мы вправе сделать вывод, что справедлива

ТЕОРЕМА 3.6. *При квазиевклидовом рассмотрении изучаемые геодезические являются плоскими кривыми.*

Вычисление первой производной

$$\mathbf{v}(s) := \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \quad (3.34)$$

от (3.26) дает

$$\mathbf{v}(s) = \frac{b+s}{S^2(s)}\mathbf{t}(s) - \frac{\sqrt{a^2-b^2}h \cos(h(\alpha-\nu))}{aS(s) \sin(h\alpha)}\mathbf{t}_1 + \frac{\sqrt{a^2-b^2}h \cos(h\nu)}{S(s)S(\Delta s) \sin(h\alpha)}\mathbf{t}_2. \quad (3.35)$$

Здесь правая часть такая, что

$$\mathbf{t}(s) \left(\mathbf{v}(s) - \frac{b+s}{S^2(s)}\mathbf{t}(s) \right) = 0.$$

Из последнего наблюдения следует (эквивалентное (3.27)) равенство

$$\mathbf{t}(s)\mathbf{v}(s) = b + s.$$

Начальная скорость $\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\Big|_{s=0}$ и конечная скорость $\mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\Big|_{s=\Delta s}$ равны

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{b}{a^2}\mathbf{t}_1 - \frac{\sqrt{a^2-b^2}h \cos(h\alpha)}{a^2 \sin(h\alpha)}\mathbf{t}_1 + \frac{\sqrt{a^2-b^2}h}{aS(\Delta s) \sin(h\alpha)}\mathbf{t}_2 \\ &= \frac{b}{a^2}\mathbf{t}_1 - \frac{\sqrt{a^2-b^2}h}{a^2} \frac{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}\mathbf{t}_1 + \sqrt{a^2-b^2}h \frac{1}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}\mathbf{t}_2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \frac{b + \Delta s}{S^2(\Delta s)} \mathbf{t}_2 - \frac{\sqrt{a^2 - b^2} h}{aS(\Delta s)} \frac{1}{\sin(h\alpha)} \mathbf{t}_1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} h \cos(h\alpha)}{S^2(\Delta s) \sin(h\alpha)} \mathbf{t}_2 \\ &= \frac{b + \Delta s}{S^2(\Delta s)} \mathbf{t}_2 - \sqrt{a^2 - b^2} h \frac{1}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \mathbf{t}_1 + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} h}{S^2(\Delta s)} \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \mathbf{t}_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

(с использованием (3.10)), где $u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ — функция (3.12). Полезно заметить, что

$$(\mathbf{t}_1 \mathbf{v}_1) = b, \quad (\mathbf{t}_2 \mathbf{v}_2) = b + \Delta s, \quad (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1) = 1, \quad (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2) = 1 \quad (3.38)$$

и

$$n_{pq}(g; \mathbf{t}_1) v_1^p v_1^q = n_{pq}(g; \mathbf{t}_2) v_2^p v_2^q = 1$$

(ср. (2.14)), а также

$$\mathbf{v}_1 \Delta s = \left(-1 + \frac{1}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} C_1\right) \mathbf{t}_1 + h \frac{\sin \alpha}{\sin(h\alpha)} \mathbf{t}_2, \quad (3.39)$$

и

$$\mathbf{v}_2 \Delta s = \left(1 - \frac{1}{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} C_1\right) \mathbf{t}_2 - h \frac{\sin \alpha}{\sin(h\alpha)} \mathbf{t}_1. \quad (3.40)$$

Для разности между последними векторами получаем

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \Delta s = \left(1 - h \frac{\sin \alpha}{\sin(h\alpha)}\right) (\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1) - C_1 \left(\frac{\mathbf{t}_2}{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} + \frac{\mathbf{t}_1}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}\right),$$

где $C_1 = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha - h(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)(\sin \alpha)/(\sin(h\alpha))$. В соответствии с собственно евклидовыми правилами справедливы пределы

$$\mathbf{v}_2|_{g=0} = \mathbf{v}_1|_{g=0} = (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1)/\Delta s, \quad C_1|_{g=0} = 0, \quad h|_{g=0} = 1, \quad \alpha|_{g=0} = \alpha_{\text{Euclidean}}.$$

Можно привести решение (3.31) к виду

$$\mathbf{t}(s) = z(s) \mathbf{t}_1 + n(s) \mathbf{v}_1, \quad (3.41)$$

где

$$z(s) = -\frac{bS(s)}{a\sqrt{a^2 - b^2} h} \sin(h\nu) + \frac{S(s)}{a} \cos(h\alpha) \frac{\sin(h\nu)}{\sin(h\alpha)} + \frac{S(s)}{a} \frac{\sin(h(\alpha - \nu))}{\sin(h\alpha)} \quad (3.42)$$

и

$$n(s) = \frac{aS(s)}{\sqrt{a^2 - b^2} h} \sin(h\nu). \quad (3.43)$$

В частности, получается следующая

ТЕОРЕМА 3.7. Для изучаемых геодезических решение с начальными данными, $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2(\mathbf{t}_1, \mathbf{v}_1)$, имеет вид

$$\mathbf{t}_2 = z(\Delta s)\mathbf{t}_1 + n(\Delta s)\mathbf{v}_1 \quad (3.44)$$

с функциями

$$\begin{aligned} z(\Delta s) &= \frac{S(\Delta s)}{a} \left[\cos(h\alpha) - \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}h} \sin(h\alpha) \right] \\ &\equiv \frac{1}{h} \frac{\sin(h\alpha)}{\sin \alpha} + \frac{S(\Delta s)}{a} \left[\cos(h\alpha) - \frac{1}{h} \frac{\sin(h\alpha)}{\sin \alpha} \cos \alpha \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

и

$$n(\Delta s) = \frac{aS(\Delta s)}{\sqrt{a^2 - b^2}h} \sin(h\alpha) \equiv \frac{1}{h} \frac{\sin(h\alpha)}{\sin \alpha} \Delta s. \quad (3.46)$$

Здесь

$$a = \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}, \quad b = (\mathbf{t}_1 \mathbf{v}_1), \quad (3.47)$$

$$S(\Delta s) = \sqrt{a^2 + 2b\Delta s + (\Delta s)^2}, \quad (3.48)$$

а угол α может быть взято согласно

$$\alpha = \arccos \frac{a^2 + b\Delta s}{aS(\Delta s)} \quad (3.49)$$

или $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \Delta s}{aS(\Delta s)}$ (использованы формулы (3.18) и (3.19)).

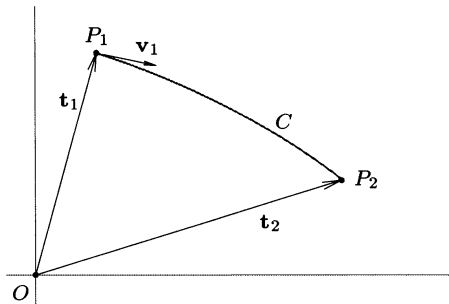


Рис. 23: Геодезическая C и начальная скорость \mathbf{v}_1 ; длина дуги от P_1 до P_2 равна Δs .

Введем вектор

$$\mathbf{t}_3 := \mathbf{v}_1 \Delta s. \quad (3.50)$$

Для него

$$(\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3) = (\Delta s)^2, \quad (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3) = b \Delta s$$

(поскольку $(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1) = 1$ и $(\mathbf{t}_1 \mathbf{v}_1) = b$). Величины $S(\Delta s)$ и α , входящие в (3.37)–(3.39), легко выражаются через векторы \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_3 :

$$S^2(\Delta s) = (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) + 2(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_3) + (\mathbf{t}_3 \mathbf{t}_3) \equiv \left((\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3) \right) = |\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3|^2 \quad (3.51)$$

(использовано (3.5)) и

$$\alpha = \arccos \frac{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3)}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} S(\Delta s)} \equiv \arccos \frac{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3)}{|\mathbf{t}_1| |\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3|} \quad (3.52)$$

(учтено (3.17)).

С помощью удобных переменных

$$\mathbf{d}_1 = \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) \mathbf{t}_2 - (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_1}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}, \quad \mathbf{d}_2 = \frac{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_1 - (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \mathbf{t}_2}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}$$

для векторов (3.32) и (3.33) получаются разложения по набору $\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$:

$$\mathbf{v}_1 \Delta s = -\mathbf{t}_1 + \frac{\mathbf{t}_1}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha + h \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}} \mathbf{d}_1 \sin \alpha$$

и

$$\mathbf{v}_2 \Delta s = \mathbf{t}_2 - \frac{\mathbf{t}_2}{\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \cos \alpha - h \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}}{\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \mathbf{d}_2 \sin \alpha.$$

Укажем для сравнения, что для производных векторов

$$\mathbf{b}_1 := \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2}{\partial \mathbf{t}_1}, \quad \mathbf{b}_2 := \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2}{\partial \mathbf{t}_2}$$

получаются выражения

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{t}_1 - \frac{\mathbf{t}_1}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \cos \alpha - \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}{h \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}} \mathbf{d}_1 \sin \alpha$$

и

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{t}_2 - \frac{\mathbf{t}_2}{\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \cos \alpha - \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}}{h \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \mathbf{d}_2 \sin \alpha,$$

так что в векторах $\mathbf{v}_1 \Delta s$ и $-\mathbf{b}_1$, соответственно в векторах $\mathbf{v}_2 \Delta s$ и \mathbf{b}_2 , совпадают только первые члены, а в третьих членах константа h входит по-разному.

3.4. Вычисление двухвекторного метрического тензора

Теперь мы вычислим *квазиевклидов двухвекторный метрический тензор*, задаваемый компонентами

$$N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) := \frac{\partial^2 \langle \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \rangle}{\partial t_2^q \partial t_1^p} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 |\mathbf{t}_2 \ominus \mathbf{t}_1|^2}{\partial t_2^q \partial t_1^p}. \quad (4.1)$$

Прямые вычисления на основе (3.22) и (3.13) показывают, что

$$\begin{aligned} N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}{h \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \frac{\sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} r_{pq} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} A_1 t_{1p} t_{2q} - \frac{1}{h \sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} A_2 d_{1p} d_{2q}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$A_1 = \cos \alpha - \frac{1}{h} (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \frac{\sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}, \quad (4.3a)$$

$$A_2 = \frac{1}{h} \cos \alpha - (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \frac{\sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}. \quad (4.3b)$$

Для детерминанта тензора (4.2) находим просто

$$\det(N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)) = \left(\frac{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)} \sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \right)^{N-2} h^{-N} \det(r_{ab}). \quad (4.4)$$

Можно установить следующее фундаментальное *предельное отождествление*:

$$\lim_{\mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}} \{N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)\} = n_{pq}(g; \mathbf{t}), \quad (4.5)$$

где $n_{pq}(g; \mathbf{t})$ — квазиевклидов метрический тензор (1.47).

Дифференцирование тензора (4.2) дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}{\partial t_1^s} &= -\frac{1}{h} \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}} A_2 d_{1s} r_{pq} + \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} A_1 t_{2q} H_{sp}(\mathbf{t}_1) \\
&+ \frac{1}{h} \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \frac{1}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} A_2 d_{1s} t_{1p} t_{2q} \\
&+ \frac{1}{h} \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \frac{1}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} A_2 \\
&\times \left[\frac{1}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} ((\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) d_{2p} d_{2q} + (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) d_{1p} d_{1q}) d_{1s} + (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) H_{ps}(\mathbf{t}_1) d_{2q} - (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) H_{qs}(\mathbf{t}_1) d_{1p} \right] \\
&+ \frac{1}{h} \frac{1}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \left[\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) \sin \alpha - \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} A_2 \right] d_{1s} d_{1p} d_{2q},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\tag{4.7}$$

где использованы соотношения

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t_1^s} = -\frac{1}{h} \frac{\mathbf{d}_1}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}, \quad \frac{\partial \frac{1}{u}}{\partial t_1^s} = -\frac{1}{u^2} \mathbf{d}_2,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1^s} = \frac{1}{h} \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} A_2 d_{1s},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_2}{\partial t_1^s} &= \frac{1}{h} \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} A_1 d_{1s} - \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) \frac{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \frac{\sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} d_{1s} \\
&= \frac{d_{1s}}{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \left[-\left(1 - \frac{1}{h^2}\right) \sin \alpha + \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} A_2 \right].
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{\mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_1} \left\{ A_1 \right\} = 1 - \frac{1}{h^2}, \quad \lim_{\mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_1} \left\{ \frac{A_2}{u} \right\} = 0,$$

$$\lim_{\mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}} \left\{ \frac{\partial N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}{\partial t_1^s} \right\} = \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) \frac{t_q}{(\mathbf{t}\mathbf{t})} H_{sp}(\mathbf{t}),$$

$$\lim_{\mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}} \left\{ \frac{\partial N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}{\partial t_2^s} \right\} = \left(1 - \frac{1}{h^2}\right) \frac{t_p}{(\mathbf{t}\mathbf{t})} H_{sq}(\mathbf{t}),$$

получается фундаментальное равенство

$$\lim_{\mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}} \left\{ \frac{\partial N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}{\partial t_1^s} + \frac{\partial N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}{\partial t_2^s} \right\} = \frac{\partial n_{pq}(g; \mathbf{t})}{\partial t^s}.$$

Разложение по соответствующему ортонормированному реперу $f_p^R(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$ может быть получено в виде

$$N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \sum_{R=1}^N f_p^R(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) f_q^R(g; \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_1),$$

так что

$$\begin{aligned} \sqrt{h\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}} f_p^R(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= zh_p^R \\ &- \frac{1}{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)} \left[z - \sqrt{z^2 + (\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \left(h \cos \alpha - (\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \frac{\sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \right)} \right] t_2^R t_{1p} \\ &+ \frac{1}{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)} \left[z - \sqrt{z^2 + (\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \left(\frac{1}{h} \cos \alpha - (\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \frac{\sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \right)} \right] d_{2p} d_1^R, \end{aligned}$$

где

$$z = \sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2) \frac{\sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}},$$

или окончательно

$$\begin{aligned} \sqrt{h\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}} f_p^R(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) &= zh_p^R - \frac{1}{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)} \left[z - \sqrt{h(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} \right] t_2^R t_{1p} \\ &+ \frac{1}{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)} \left[z - \sqrt{\frac{1}{h}(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} \right] d_{2p} d_1^R. \end{aligned}$$

Свертывание репера с векторами дает

$$\begin{aligned} f_p^R(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) t_1^p &= \frac{1}{\sqrt{h\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)}}} \left[\frac{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)} \left(\sqrt{h(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} \right. \right. \\ &\left. \left. - \sqrt{\frac{1}{h}(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} \right) t_2^R + \sqrt{\frac{1}{h}(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} t_1^R \right], \end{aligned}$$

а также

$$f_p^R(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)t_2^p = \frac{1}{\sqrt{h\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}}} \sqrt{h(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} t_2^R$$

вместе с равенствами

$$\sum_{R=1}^N f_p^R(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)t_1^R = \frac{1}{\sqrt{h\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}}} \sqrt{h(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} t_{1p},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{R=1}^N f_p^R(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)t_2^R \\ &= \frac{1}{\sqrt{h\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)}}} \left[\frac{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2)} \left(\sqrt{h(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\frac{1}{h}(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} \right) t_{1p} + \sqrt{\frac{1}{h}(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2) \cos \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \sin \alpha} t_{2p} \right]. \end{aligned}$$

Оказывается возможным получить и *ко-версию* двуметрического подхода путем введения *ко-векторов*

$$T_{1p}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) := n_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)t_2^q, \quad T_{2q}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) := t_1^p n_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2). \quad (4.8)$$

Применяя (4.2), находим

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}}{\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}} \mathbf{t}_1 \cos \alpha + \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}}{h\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}} \mathbf{d}_1 \sin \alpha, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{T}_2 = \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}}{\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}} \mathbf{t}_2 \cos \alpha + \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}}{h\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)}} \mathbf{d}_2 \sin \alpha. \quad (4.10)$$

Выполняется равенство

$$(\mathbf{t}_1\mathbf{T}_1) + (\mathbf{t}_2\mathbf{T}_2) = 2 < \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 > = 2\sqrt{(\mathbf{t}_1\mathbf{t}_1)}\sqrt{(\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2)} \cos \alpha. \quad (4.11)$$

Кроме того, получаются пределы

$$\lim_{\mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}} \{\mathbf{T}_1\} = \lim_{\mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}} \{\mathbf{T}_2\} = \mathbf{t}. \quad (4.12)$$

Метрический тензор (4.1)–(4.2) строится из этих векторов следующим образом:

$$N_{pq}(g; \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \frac{\partial T_{1p}}{\partial t_2^q} = \frac{\partial T_{2q}}{\partial t_1^p}. \quad (4.13)$$

Соответствующие произведения находятся в виде

$$(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_1) = (\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2) \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right), \quad (\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2) = (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1) \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right), \quad (4.14)$$

$$(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) = \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right) (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) + 2 \frac{1}{h} u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \cos \alpha \sin \alpha, \quad (4.15)$$

причем справедливо

$$u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = \frac{2}{h} (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \sin \alpha \cos \alpha - \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right) u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2), \quad (4.16)$$

где

$$u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = \sqrt{(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_1)(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2) - (\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2)^2}. \quad (4.17)$$

Из (4.7)–(4.8) можно получить равенства

$$\left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right)^2 u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \frac{2}{h} (\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) \sin \alpha \cos \alpha - \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right) u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2),$$

$$\left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right)^2 (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) = \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right) (\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) + \frac{2}{h} \sin \alpha \cos \alpha u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2),$$

а также

$$\left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha \right) \left[-\frac{1}{h} (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2) \sin \alpha + u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \cos \alpha \right] = \frac{1}{h} (\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) \sin \alpha - u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \cos \alpha$$

Использование полученных формул при расчете ко-представления

$$\alpha = \hat{\alpha}(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) \quad (4.18)$$

для угла (1.21) дает следующее явное уравнение:

$$\cos(h\alpha) = \frac{(\cos^2 \alpha - \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha)(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) + \frac{2}{h} \sin \alpha \cos \alpha u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)}{(\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha) \sqrt{(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_1)} \sqrt{(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2)}}. \quad (4.19)$$

Соответствующая ко-версия скалярного произведения (1.36) имеет вид

$$\langle \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \rangle = \sqrt{(\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_1)} \sqrt{(\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_2)} \cos \alpha. \quad (4.20)$$

На таком пути система уравнений (3.2)–(3.3) может быть обращена, давая

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1(g; \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = & \frac{1}{\xi} \left[\frac{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}}{\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}} \left(\cos \alpha - \frac{1}{h} \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \sin \alpha \right) \mathbf{T}_1 \right. \\ & \left. - \frac{1}{h} \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \sin \alpha \mathbf{T}_2 \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_2(g; \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) = & \frac{1}{\xi} \left[\frac{\sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)}} \left(\cos \alpha - \frac{1}{h} \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \sin \alpha \right) \mathbf{T}_2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{h} \frac{\sqrt{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)} \sqrt{(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2)}}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \sin \alpha \mathbf{T}_1 \right], \end{aligned} \quad (4.22)$$

где

$$\xi = \left(\cos \alpha - \frac{1}{h} \frac{(\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \sin \alpha \right)^2 - \frac{1}{h^2} \left(\frac{\sin \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} \right)^2 (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1)(\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2),$$

или в другой записи

$$\xi = \cos^2 \alpha - \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha - \frac{2}{h} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)} (\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2). \quad (4.23)$$

Принимая во внимание (4.14), можно записать эту функцию просто как

$$\xi = -\frac{u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)}{u(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)}. \quad (4.24)$$

Таким способом получается представление

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\sqrt{(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_2)}}{\sqrt{(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1)}}\mathbf{T}_1 \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha} + \frac{1}{h} \frac{\sqrt{(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_2)}}{\sqrt{(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1)}}\mathbf{D}_1 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha}, \quad (4.25)$$

а также

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\sqrt{(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1)}}{\sqrt{(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_2)}}\mathbf{T}_2 \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha} + \frac{1}{h} \frac{\sqrt{(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1)}}{\sqrt{(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_2)}}\mathbf{D}_2 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha}, \quad (4.26)$$

где

$$\mathbf{D}_1 = \frac{(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1)\mathbf{T}_2 - (\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)\mathbf{T}_1}{u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)}, \quad \mathbf{D}_2 = \frac{(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_2)\mathbf{T}_1 - (\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)\mathbf{T}_2}{u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2)}. \quad (4.27)$$

Справедливы тождества

$$(\mathbf{T}_1\mathbf{D}_1) = 0, \quad (\mathbf{T}_2\mathbf{D}_2) = 0,$$

$$(\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2) = -(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2), \quad (\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1) = (\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1), \quad (\mathbf{D}_2\mathbf{D}_2) = (\mathbf{T}_2\mathbf{T}_2),$$

а также

$$(\mathbf{D}_1\mathbf{T}_2) = (\mathbf{T}_1\mathbf{D}_2) = u(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2).$$

С помощью формул (4.19)–(4.20) (и в полной аналогии с (4.11)) можно прийти к ко-версии

$$N^{pq}(g; \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2) := \frac{\partial t_1^p}{\partial T_{2q}} = \frac{\partial t_2^q}{\partial T_{1p}}$$

двувекторного метрического тензора (4.2).

Инвариантность

Как обычные евклидовы вращения обобщаются на изучаемое финслероидное пространство? Вопрос, очевидно, относится к числу фундаментальных. Мы проведем анализ в несколько этапов и получим явные формулы для соответствующих (вообще говоря, нелинейных) \mathcal{E}_g^{PD} -вращений, которые мы будем также называть *финслероидными вращениями*. Они содержат столько же параметров, сколько входит в соответствующие евклидовы вращения.

Мы начнем с формулировки общей точки зрения на \mathcal{E}_g^{PD} -инвариантность с помощью отображения в квазиевклидово пространство (Раздел 4.1). Исходным является наблюдение, что метрический тензор такого пространства, не являясь евклидовым, в то же время вследствие своей структуры является инвариантным относительно обычных евклидовых вращений. Поэтому наша задача просто сводится к тому, чтобы эту инвариантность “перенести” в исходное финслероидное пространство с помощью обратного квазиевклидова преобразования (описанного выше в Главе 3). Поскольку оно явно нелинейно, в результате мы придем к нелинейным преобразованиям — получим *нелинейное представление евклидовых вращений*. Коэффициенты (1.5) и (1.9) ниже являются именно результатом такого перенесения. Можно было бы начинать и с конформных аналогов. Любое (линейное) евклидово вращение в квазиевклидовом пространстве вызывает (вообще говоря, нелинейное) преобразование векторов исходного пространства, оставляющее инвариантной ФМФ и одновременно осуществляющее преобразование инвариантности для ассоциируемого ФМТ. Затем в Разделе 4.2 находится \mathcal{E}_g^{PD} -инвариантный ортонормированный репер.

Все выводы строго согласуются с условием метричности, введенным в Разделе 1.6 Главы 1. Соответственно в Разделе 4.3 устанавливается \mathcal{E}_g^{PD} -инвариантность метрического тензора финслероидного пространства, в явном виде находятся соответствующие нелинейные инвариантные преобразования, обобщающие евклидовы вращения, и затем указывается инфинитезимальная формулировка \mathcal{E}_g^{PD} -вращений.

В последнем Разделе 4.4 настоящей Главы 4 мы указываем две линейные подгруппы. Поскольку Z -ось является осью аксиальной симметрии, возникают инвариантные преобразования, которые осуществляют евклидовы вращения вокруг этой оси. Линейными преобразованиями также являются *бусты*, совершаемые в плоскостях, проходящих через Z -ось, причем они естественным образом представляются с помощью финслероидных тригонометрических функций.

4.1. Введение финслероидных вращений

При использовании $(N \times N)$ -матричного представления $\|L_q^p(k_A)\|$ евклидовых вращений в квазиевклидовом пространстве, параметризованных некоторым набором $\{k_A\}$, так что индекс A пробегает значения $\{1, \dots, \frac{1}{2}N(N-1)\}$ и выполняется предельное равенство

$$L_q^p(k_A)|_{k_A=0} = \delta_q^p, \quad (1.1)$$

очевидно справедливы тождества

$$L_p^r(k_A)L_q^s(k_A)r_{rs} = r_{pq}. \quad (1.2)$$

В компонентной записи они читаются так:

$$(L_N^N)^2 + L_N^c L_N^d r_{cd} = 1, \quad L_N^N L_a^N + L_N^c L_a^d r_{cd} = 0, \quad L_a^N L_b^N + L_a^c L_b^d r_{cd} = r_{ab} \quad (1.3)$$

(использована формула (2.11) из Главы 3).

Нас интересуют преобразования вида

$$R^p = \mathcal{F}^p(g; k_A; \tilde{R}) \quad (1.4)$$

с функциями

$$\mathcal{F}^p = \mu^p \left(g; L_q^p(k_A) \sigma^q(g; \tilde{R}) \right), \quad (1.5)$$

построенными из функций σ^p и μ^p (введенных в Главе 3 формулами (1.11) и (1.15), определяющими квазиевклидовы преобразования и обратные к ним). Как следствие однородности (см. формулы (1.27) и (1.34) в Главе 3), функции (1.5) являются однородными степени 1 по \tilde{R} , так что

$$\mathcal{F}^p(g; k_A; b\tilde{R}) = b\mathcal{F}^p(g; k_A; \tilde{R}), \quad b > 0, \quad (1.6)$$

(для любого допустимого набора аргументов). Из (1.6) следует, что если использовать производные

$$\mathcal{F}_q^p := \frac{\partial \mathcal{F}^p(g; k_A; \tilde{R})}{\partial \tilde{R}^q}, \quad (1.7)$$

то преобразование (1.4) можно переформулировать в виде

$$R^p = \mathcal{F}_q^p(g; k_A; \tilde{R}) \tilde{R}^q, \quad (1.8)$$

так что матрица коэффициентов (1.7) будет играть роль прямого финслерова обобщения исходной матрицы вращений $\|L_q^p(k_A)\|$.

Используя определения (1.29) и (1.36) из Главы 3 и дифференцируя (1.5) по \tilde{R}^q , для коэффициентов (1.7) можно получить представление

$$\mathcal{F}_q^p = \mu_r^p(g; \tilde{R}) L_s^r(k_A) \sigma_q^s(g; \tilde{R}). \quad (1.9)$$

Поскольку функции μ^p и σ^p взаимно обратны, справедливо тождество

$$\mathcal{F}_q^p|_{k_A=0} = \delta_q^p.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Преобразования (1.4)–(1.5) называются \mathcal{E}_g^{PD} -вращениями или просто *финслероидными вращениями*.

При отличии параметра g от нуля вторые производные

$$\mathcal{F}_{qr}^p := \frac{\partial \mathcal{F}_q^p(g; k_A; \tilde{R})}{\partial \tilde{R}^r} \quad (1.10)$$

вообще говоря не обращаются тождественно в нуль, так что справедлива

ТЕОРЕМА 4.1. \mathcal{E}_g^{PD} -вращения, вообще говоря, являются нелинейными.

Если преобразования удовлетворяют еще и условию

$$R_p \mathcal{F}_{qr}^p(g; k_A; \tilde{R}) = 0, \quad (1.11)$$

то их можно назвать *метрическими* в том смысле, что они оставляют ФМТ $\{g_{pq}(g; R)\}$ инвариантным:

$$\mathcal{F}_r^p(g; k_A; \tilde{R}) \mathcal{F}_s^q(g; k_A; \tilde{R}) g_{pq}(g; \mathcal{F}(g; k_A; \tilde{R})) = g_{rs}(g; \tilde{R}) \quad (1.12)$$

(см. (6.10)–(6.11) в Главе 1). При этих условиях можно сказать, что мы имеем дело с *метрическими* \mathcal{E}_g^{PD} -вращениями.

Другой важный вопрос, можно ли аналогично ввести такое поле реперов $\{e_p^r(g; R)\}$, что, во-первых, поле \mathcal{E}_g^{PD} -инвариантно:

$$\mathcal{F}_q^p(g; k_A; \tilde{R}) e_p^r(g; \mathcal{F}(k_A; \tilde{R})) = e_q^s(g; \tilde{R}) L_s^r(k_A), \quad (1.13)$$

и, во-вторых, поле *метрическое*, т. е. реализует для ФМТ $\{g_{pq}(g; R)\}$ ортонормированное представление

$$g_{pq}(g; R) = r_{rs} e_p^r(g; R) e_q^s(g; R). \quad (1.14)$$

При выполнении этих двух условий мы имеем *метрическое* \mathcal{E}_g^{PD} -инвариантное поле реперов $\{e_p^r(g; R)\}$.

Свернутое поле

$$e^r(g; R) := e_p^r(g; R) R^p \quad (1.15)$$

очевидно удовлетворяет закону преобразования

$$\tilde{e}^r(g; R) = e^s(g; \tilde{R}) L_s^r. \quad (1.16)$$

Наконец, в дополнение к тензору $\{g_{pq}(g; R)\}$, оказывается возможным ввести тензор $\{a_{pq}(g; R)\}$, преобразующийся по простому закону

$$L_p^r(k_A) L_q^s(k_A) a_{rs}(g; \tilde{R}) = a_{pq}(g; \mathcal{F}(g; k_A; \tilde{R})) \quad (1.17)$$

(ср. ниже (2.1)).

4.2. Инвариантные поля

Тождество (1.12) из Главы 3 позволяет находить преобразования инвариантности для изучаемой ФМФ $K(g; R)$. Действительно, использование евклидова вращения

$$t^p(g; R) = t^q(g; \tilde{R})L_p^q \quad (2.1)$$

(функции t^r были определены в Главе 3 формулами (1.33) и (1.10)–(1.11)) совместно с (1.1)–(1.3) позволяет сделать вывод, что справедлива

ТЕОРЕМА 4.2. *Изучаемая ФМФ остается инвариантной при преобразованиях вида (1.4)–(1.5):*

$$K(g; \mathcal{F}(g; k_A; \tilde{R})) = K(g; \tilde{R}). \quad (2.2)$$

Прямыми (довольно длинными) вычислениями (с использованием представления (1.13)) можно проверить, что метрическое свойство (1.11)–(1.12) тоже вытекает из приведенных выше соотношений, так что справедлива

ТЕОРЕМА 4.3. *ФМТ, ассоциируемый с ФМФ $K(g; R)$, инвариантен относительно \mathcal{E}_g^{PD} -вращений.*

Можно провести доказательство и прямо путем использования равенства

$$L_r^p L_s^q n_{pq}(g; t) = n_{rs}(g; \tilde{t}) \quad (2.3)$$

с учетом преобразования (2.2) из Главы 3.

Поле реперов $\{e_p^r(g; R)\}$ можно ввести согласно формулам

$$e_q^P e_R^q = \delta_R^P, \quad (2.4)$$

$$e_q^P = \frac{1}{h} \sigma_q^P + \frac{h-1}{h} \sigma^P l_q / K \quad (2.5)$$

и

$$e_P^q = h \mu_P^q + (1-h) \sigma_P l^q / K. \quad (2.6)$$

(см. (2.20)–(2.22) в Главе 3). Применение к ним \mathcal{E}_g^{PD} -вращений ведет после простых прямых вычислений к свойству инвариантности (1.13). Более того, можно легко проверить, что поле (2.5) удовлетворяет и условию метричности (1.14).

Поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 4.4. *Формулы (2.4)–(2.6) вводят поле реперов, которое является метрическим и \mathcal{E}_g^{PD} -инвариантным.*

Из (2.6) можно сделать вывод, что свернутое поле (1.15) равно просто

$$e^r = \sigma^r. \quad (2.7)$$

Наконец, мы вводим тензор

$$a_{pq}(g; R) = \frac{1}{h^2} r_{pq} - \frac{1}{4} G^2 e_p(g; R) e_q(g; R) K^{-2}(g; R), \quad (2.8)$$

где

$$e_p(g; R) = r_{pq} e^q(g; R).$$

После использования формул (1.9) и (1.14) из Главы 3 вместе с тождеством

$$\frac{\partial K}{\partial R^p} = r_{rs} \sigma^r \sigma_p^s \quad (2.9)$$

(которое получается после дифференцирования введенного в Главе 3 соотношения инвариантности (1.12) по R^p) закон преобразования (1.17) вытекает из (2.1) и (2.7). Справедливы соотношения

$$a_{pq}(g; R) = n_{pq}(g; \sigma(g; R)) \quad (2.10)$$

и

$$g_{pq} = a_{rs} \sigma_p^r \sigma_q^s. \quad (2.11)$$

Отсюда в свою очередь следует

$$S_{pqrs}(g; R) = R_{uvwxyz}(g; t) \sigma_p^u \sigma_q^v \sigma_r^w \sigma_s^z. \quad (2.12)$$

4.3. Явное представление для обобщенных вращений

Мы начинаем с преобразования (2.1), записанного в виде

$$t^p = \tilde{t}^q L_q^p, \quad (3.1)$$

и вводим следующие удобные обозначения:

$$\tilde{b} = (\tilde{Q} - \tilde{s}^2)^{1/2}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{s} = L_N^N \tilde{E} + h L_b^N \tilde{w}^b \equiv t^N / \tilde{J} R^N, \quad \tilde{M} = -\frac{1}{2} \tilde{g} \tilde{b} + \tilde{s} h. \quad (3.3)$$

Функция E была определена в Главе 2 формулой (2.23). При рассмотрении (3.1) совместно с (1.3) и формулами (1.11) и (1.15) из Главы 3 можно получить искомый закон преобразования. Действительно, последовательно выводим соотношения:

$$w^a = R^a/R^N = \mu^a/\mu^N = t^a/hI(g; t),$$

$$w^a = (L_N^a \tilde{E} + hL_c^a \tilde{w}^c)/\tilde{M}, \quad (3.4)$$

$$w = \tilde{b}/\tilde{M}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{M}E = \tilde{s}h, \quad \sqrt{Q} = \sqrt{\tilde{Q}h/\tilde{M}} \quad (3.6)$$

и

$$1 + g_{\pm}w = h(\tilde{s} \pm \tilde{b})/\tilde{M}. \quad (3.7)$$

При проверке удобно использовать равенства

$$\tilde{b} = \left[r_{de} \left(\tilde{E}L_N^d + hL_a^d \tilde{w}^a \right) \left(\tilde{E}L_N^e + hL_b^e \tilde{w}^b \right) \right]^{1/2} \equiv \frac{1}{\tilde{J}\tilde{R}^N} [r_{de} t^d t^e]^{1/2}.$$

При получении (3.4) использован явный вид функции (1.17) из Главы 3.

Формула (3.5), если ее использовать совместно с формулами (2.23)–(2.26) из Главы 2 для вычисления функции

$$\tilde{U} := j(g; \tilde{w})/j(g; w) = \tilde{J}/J, \quad (3.8)$$

показывает, что эта функция может быть представлена в явном виде

$$\begin{aligned} \tilde{U}(g; \tilde{w}) &= \exp \left[\frac{1}{2} G \left(\operatorname{arctg} \frac{h\tilde{b} + \frac{1}{2}g\tilde{s}}{-\frac{1}{2}g\tilde{b} + \tilde{s}h} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{w} + \frac{1}{2}g}{h} \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} G \operatorname{arctg} \frac{\tilde{E}\tilde{b} - h\tilde{w}\tilde{s}}{\tilde{E}\tilde{s} + h\tilde{w}\tilde{b}} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

(использовано тождество $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}[(x - y)/(1 + xy)]$).

Это дает нам возможность применить формулы (1.11) и (1.15) из Главы 3 совместно с формулой (3.1) и сделать вывод, что

$$R = \mathcal{F}(g; \tilde{R}) : \{R^N = \frac{1}{h} \tilde{R}^N \tilde{M} \tilde{U}, \quad R^a = (L_b^a \tilde{R}^b + \frac{1}{h} L_N^a \tilde{R}^N \tilde{E}) \tilde{U}\}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{R} = \mathcal{F}(g; R) : \{\tilde{R}^N = \frac{1}{h} R^N M U, \quad \tilde{R}^a = (l_b^a R^b + \frac{1}{h} l_N^a R^N E) U\}, \quad (3.11)$$

где $\|l_q^p(k_A)\|$ — матрица обратных евклидовых вращений, так что $L_q^p l_r^q = \delta_r^p$.

С помощью предыдущих формул \mathcal{E}_g^{PD} -инвариантность используемой ФМФ K может быть проверена непосредственно:

$$\begin{aligned} K(g; R) &= R^N j(g; w) \sqrt{Q(g; w)} = \frac{1}{h} \tilde{R}^N \tilde{M} \tilde{U} j(g; w) \sqrt{\tilde{Q}} h / \tilde{M} = \\ &= \tilde{R}^N \tilde{U} j(g; w) \sqrt{\tilde{Q}} = \tilde{R}^N j(g; \tilde{w}) \sqrt{\tilde{Q}} = K(g; \tilde{R}) \end{aligned}$$

(на первом шаге использованы формулы (2.44)–(2.45) из Главы 2, а на втором шаге была применена вторая формула из (3.6)).

Дифференцирование функции (3.9) дает значения

$$\frac{\partial U}{\partial R^N} = -gU(2R^N Qb)^{-1} f, \quad \frac{\partial U}{\partial R^a} = gU(2R^N Qb)^{-1} f_a$$

с функциями

$$f = -EL_b^N w^b + hL_N^N w^2 - bw \equiv -\frac{1}{h}(Es - L_N^N Q) - bw \equiv f_a w^a,$$

$$\begin{aligned} f_a &= \left[hL_N^N + L_b^N w^b \left(1 + \frac{1}{2} g w^{-1} \right) - b w^{-1} \right] w_a - L_a^N Q \\ &\equiv \left\{ \frac{1}{h} \left[\left(1 + \frac{1}{2} g w^{-1} \right) s - \frac{1}{2} g w^{-1} L_N^N Q \right] - b w^{-1} \right\} w_a - L_a^N Q. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$R^N \frac{\partial U}{\partial R^N} + R^a \frac{\partial U}{\partial R^a} \equiv 0.$$

С помощью полученных соотношений можно явно выписать коэффициенты (1.7) финслеровых \mathcal{E}_g^{PD} -вращений. Результат таков:

$$\mathcal{F}_N^N = \tilde{U} \left[L_N^N - \frac{g}{2h\tilde{b}} \left(\tilde{E} - \tilde{s}L_N^N + \tilde{M}\tilde{f}\tilde{Q}^{-1} \right) \right], \quad (3.12)$$

$$\mathcal{F}_a^N = \tilde{U} \left\{ \left(1 + \frac{g\tilde{s}}{2h\tilde{b}} \right) \left(hL_a^N + \frac{1}{2} g L_N^N \frac{\tilde{w}_a}{\tilde{w}} \right) - \frac{g}{2h\tilde{b}} \left[\left(1 + \frac{1}{2} g \tilde{w}^{-1} \right) \tilde{w}_a - \tilde{M}\tilde{f}_a\tilde{Q}^{-1} \right] \right\}, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{F}_b^a = \tilde{U} \left[L_b^a + \frac{1}{2h} g L_N^a (\tilde{w}_b / \tilde{w}) + \frac{g}{2h\tilde{b}} \left(hL_c^a \tilde{w}^c + L_N^a \tilde{E} \right) \tilde{f}_b \tilde{Q}^{-1} \right], \quad (3.14)$$

$$\mathcal{F}_N^a = \tilde{U} \left[\frac{1}{h} L_N^a - \frac{g}{2h\tilde{b}} \left(hL_c^a \tilde{w}^c + L_N^a \tilde{E} \right) \tilde{f} \tilde{Q}^{-1} \right]. \quad (3.15)$$

Детерминант

$$\det(\mathcal{F}_q^p) = \tilde{U}^N \quad (3.16)$$

является следствием представлений (3.12)–(3.15); он не обращается в нуль; для проверки равенства (3.16) можно использовать (1.12). Заметим для сравнения, что

$$\det(\mathcal{F}_q^p) \Big|_{\text{Euclidean}} = 1.$$

Проведенные вычисления приводят к выводу, что верна

ТЕОРЕМА 4.5. *Все коэффициенты финслеровых \mathcal{E}_g^{PD} -вращений явно находятся.*

Дополнительный расчет показывает, что справедлива

ТЕОРЕМА 4.6. *Коэффициенты (3.12)–(3.15) удовлетворяют условию метричности (1.11).*

Фактически эта теорема утверждает, что метрический тензор финслероидного пространства инвариантен относительно \mathcal{E}_g^{PD} -вращений.

При рассмотрении *инфинитезимальных* евклидовых вращений часто удобно использовать параметризацию

$$\{k_A\} = \{\omega^{rs}\}, \quad |\omega^{sr}| \ll 1, \quad (3.17)$$

подчиненную условию кососимметричности

$$\omega^{rs} + \omega^{rs} = 0. \quad (3.18)$$

Соответственно коэффициенты инфинитезимальных вращений имеют вид

$$L_r^p = \delta_r^p + r_{rs}\omega^{ps}. \quad (3.19)$$

Подставляя их в (1.5) и (1.9), приходим к выводу, что справедлива

ТЕОРЕМА 4.7. *При параметризации (3.17)–(3.19) коэффициенты инфинитезимальных \mathcal{E}_g^{PD} -вращений имеют следующий явный вид:*

$$\mathcal{F}^p = \tilde{R}^p + \mu_r^p(g; \tilde{R})r_{sq}\sigma^q(g; \tilde{R})\omega^{rs} \quad (3.20)$$

и

$$\mathcal{F}_q^p = \delta_q^p + \left[\mu_r^p(g; \tilde{R})r_{st}\sigma_q^t(g; \tilde{R}) + \mu_{tr}^p(g; \tilde{R})r_{sf}\sigma^f(g; \tilde{R})\sigma_q^t(g; \tilde{R}) \right] \omega^{rs}. \quad (3.21)$$

Коэффициенты перед ω^{rs} могут естественно рассматриваться как обобщение генераторов евклидовых вращений.

4.4. Линейные случаи

Собственно $(N - 1)$ -мерные вращения вокруг R^N -оси определяются условиями

$$L_N^a = L_a^N = 0, \quad L_N^N = 1, \quad L_c^a L_d^b r_{ab} = r_{cd}, \quad (4.1)$$

из которых вытекает

$$b = h w, \quad s = E, \quad M = h, \quad \tilde{w} = w, \quad \tilde{U} = U = 1 \quad (4.2)$$

и следовательно

$$R^N = \tilde{R}^N, \quad R^a = L_b^a \tilde{R}^b, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{F}_N^N = 1, \quad \mathcal{F}_a^N = \mathcal{F}_N^a = 0, \quad \mathcal{F}_b^a = L_b^a, \quad (4.4)$$

поэтому справедлива

ТЕОРЕМА 4.8. *Рассматриваемое финслероидное обобщение не влияет на обычный линейный закон преобразования вектора при собственно $(N - 1)$ -мерных вращениях вокруг R^N -оси.*

\mathcal{E}_g^{PD} -вращение называется *бустом*, если оно действует в двумерной плоскости, проходящей через R^N -ось. Для определенности мы предположим ортогональность координат, так что $r_{ab} = \delta_{ab}$, и возьмем $\{R^N \times R^1\}$ -плоскость в качестве области действия буста:

$$\text{финслеров буст} \sim \mathcal{E}_g^{PD}\text{-вращение в } \{R^N \times R^1\}\text{-плоскости.} \quad (4.5)$$

Он характеризуется условиями

$$L_2^N = \dots = L_{N-1}^N = 0, \quad \dots, \quad L_N^2 = \dots = L_N^{N-1} = 0, \dots, \quad (4.6a)$$

$$R^2 = \dots = R^{N-1} = 0. \quad (4.6b)$$

В этом случае условия (1.3) упрощаются и сводятся к системе уравнений

$$(L_N^N)^2 + (L_1^N)^2 = 1, \quad L_N^N L_1^N + L_N^1 L_1^N = 0, \quad (L_1^N)^2 + (L_1^1)^2 = 1, \quad (4.7)$$

которая разрешается в явном виде:

$$L_N^N = L_1^1, \quad L_1^N = -L_N^1, \quad (L_1^N)^2 = 1 - (L_1^1)^2. \quad (4.8)$$

Используя (4.8) в формулах (3.2)–(3.4), мы приходим к представлениям

$$\tilde{s} = \tilde{E} L_N^N + h L_1^N \tilde{w}, \quad \tilde{b} = \tilde{E} L_1^N + h L_1^1 \tilde{w} \quad (4.9)$$

и

$$h\tilde{b} + \frac{1}{2}g\tilde{s} = hL_1^N + (\tilde{w} + \frac{1}{2}g)L_N^N, \quad \tilde{M} = hL_N^N - \left(\tilde{w} + \frac{1}{2}g\right)L_1^N, \quad (4.10)$$

где для определенности была предположена положительность $\tilde{w}^1 > 0$ и было

учтено тождество $Q - h^2 \omega^2 = E^2$. Вследствие (4.9)–(4.10) множитель \tilde{U} (формула (3.9)) теряет свою зависимость от переменных \tilde{R}^p :

$$\tilde{U} = \exp \left[\frac{1}{2} G \left(\arctg \frac{L_N^1}{L_N^N} \right) \right], \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{R}^p} \equiv 0. \quad (4.11)$$

Как следствие (4.6)–(4.10), нелинейное преобразование (3.10) сводится к линейному преобразованию

$$R^N = \left[\left(L_N^N - \frac{1}{2} G L_N^1 \right) \tilde{R}^N - \frac{1}{h} L_N^1 \tilde{R}^1 \right] \tilde{U}, \quad R^1 = \left[\frac{1}{h} L_N^1 \tilde{R}^N + \left(L_1^1 + \frac{1}{2} G L_N^1 \right) \tilde{R}^1 \right] \tilde{U}. \quad (4.12)$$

Итак, мы можем сделать вывод, что справедлива

ТЕОРЕМА 4.9. \mathcal{E}_g^{PD} -вращения, ограниченные до бустов, являются линейными преобразованиями.

Если параметризовать коэффициенты евклидовых вращений обычным двумерным способом с помощью угла f , так что $L_1^1 = L_N^N = \cos f$, $L_N^1 = \sin f$ и $L_1^N = -\sin f$, то формулы (4.11)–(4.12) примут вид

$$\tilde{U} = e^{\frac{1}{2} G f} = \frac{1}{J} \quad (4.13)$$

и

$$R^N = \tilde{R}^N \cos f - \tilde{R}^1 \sin f, \quad R^1 = \tilde{R}^N \sin f + \tilde{R}^1 \cos^* f, \quad (4.14)$$

куда входят обобщенные тригонометрические функции (8.39)–(8.40) из Главы 2.

Если совершить повторный “бустовый” поворот

$$\tilde{R}^N = \tilde{\tilde{R}}^N \cos f' - \tilde{\tilde{R}}^1 \sin f', \quad \tilde{R}^1 = \tilde{\tilde{R}}^N \sin f' + \tilde{\tilde{R}}^1 \cos^* f', \quad (4.15)$$

то получатся равенства

$$R^N = \tilde{\tilde{R}}^N \cos f'' - \tilde{\tilde{R}}^1 \sin f'', \quad R^1 = \tilde{\tilde{R}}^N \sin f'' + \tilde{\tilde{R}}^1 \cos^* f'' \quad (4.16)$$

при простом сложении углов

$$f'' = f + f' \quad (4.17)$$

(для проверки следует использовать тождества (8.43)–(8.46) из Главы 2). Мы видим, что справедлива

ТЕОРЕМА 4.10. При совершении финслероидных бустов выполняется аддитивность для углов.

П р и л о ж е н и я

А. Псевдофинслероидное релятивистское пространство

Используемая ниже финслер-релятивистская метрическая функция характеризуется одним безразмерным параметром g . Он может принимать любое значение $g \in (-\infty, \infty)$. Ассоциируемый псевдофинслероидный метрический тензор имеет сигнатуру с одним плюсом и остальными минусами (см. (A.38)), так что соответствующее пространство имеет пространственно-временной тип. В собственно пространственной области сохраняется вращательная инвариантность (P -четность). Качественно сущность псевдофинслероидного обобщения псевдоевклидовой теории можно видеть в деформации релятивистского гиперболоида, при которой осью асимметрии является временная ось (см. ниже рис. 24 и 25). Соответствующую псевдофинслероидную индикатрису мы назовем \mathcal{F}_g -гиперболоидом, а ко-сопряженную ей гиперповерхность назовем $\hat{\mathcal{F}}_g$ -ко-гиперболоидом. Они регулярны и локально выпуклы. Кривизна их поверхности постоянна и отрицательна. Как и в положительно-определенном случае (ему были посвящены Главы 2–4), в излагаемом ниже псевдофинслероидном случае картановский тензор и тензор кривизны имеют специальный алгебраический тип. Вычисление кривизны приводит к формуле (A.44); ее можно принять за определение характерного псевдофинслероидного параметра g .

Мы будем обозначать используемую псевдофинслероидную метрическую функцию через F , так что

$$K(g; R) \rightarrow F(g; R). \quad (\text{A.1})$$

Многие соотношения и формулы финслероидной геометрии переносятся в псевдофинслероидную геометрию с помощью замены

$$R^N \rightarrow iR^0 \quad \text{и} \quad g \rightarrow ig \quad (\text{A.2})$$

(i — мнимая единица). Одновременно следует заменять тригонометрические функции на соответствующие гиперболические функции.

В частности, значение кривизны поверхности финслероида переходит в значение кривизны поверхности псевдофинслероида по правилу

$$\mathcal{R}_{\text{Finsleroid Indicatrix}} = 1 - \frac{1}{4}g^2 \implies \mathcal{R}_{\text{pseudo-Finsleroid Indicatrix}} = -1 - \frac{1}{4}g^2. \quad (\text{A.3})$$

Все результаты предыдущих Глав 2–4 могут быть переформулированы псевдофинслероидным образом. Для рассматриваемого ниже пространства мы будем использовать обозначение \mathcal{E}_g^{SR} , где верхние индексы указывают на его “специально-релятивистский” тип.

В собственно физическом контексте мы должны брать размерность $N = 4$. Однако ниже для общности мы часто допускаем для N произвольное целочисленное положительное значение $N \geq 2$. Практически все формулы и утверждения, которые приведены ниже, могут быть распространены на такое значение (если не записаны явно). Соответственно индексы p, q, \dots и a, b, \dots будут принимать значения на интервалах $(0, \dots, N - 1)$ и $(1, \dots, N - 1)$. Для компонент диагонализированного псевдоевклидова метрического тензора используются обозначения $e_{pq} = e^{pq} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots)$, так что $e_{00} = 1$ и $e_{11} = e_{22} = \dots = -1$.

Желая обобщить псевдоевклидову геометрию финслеровым образом, мы должны адаптировать построения к предполагаемому разбиению

$$V_N = S_g^+ \cup \Sigma_g^+ \cup \mathcal{R}_g \cup \Sigma_g^- \cup S_g^-, \quad (\text{A.4})$$

секторы которого отвечают случаям, когда контравариантный вектор $R \in V_N$ является, соответственно, времениподобным будущего, изотропным будущего, пространственноподобным, изотропным прошлого и времениподобным прошлого. Ко-аналог для ковариантных векторов (импульсов) $P \in \hat{V}_N$ имеет вид:

$$\hat{V}_N = \hat{S}_g^+ \cup \hat{\Sigma}_g^+ \cup \hat{\mathcal{R}}_g \cup \hat{\Sigma}_g^- \cup \hat{S}_g^-. \quad (\text{A.5})$$

С этой целью мы введем следующие удобные в дальнейшем обозначения:

$$G = \frac{g}{h}, \quad (\text{A.6})$$

$$h = \sqrt{1 + \frac{1}{4}g^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$g_+ = -\frac{1}{2}g + h, \quad g_- = -\frac{1}{2}g - h, \quad (\text{A.8})$$

$$G_+ = \frac{g_+}{h} \equiv -\frac{1}{2}G + 1, \quad G_- = \frac{g_-}{h} \equiv -\frac{1}{2}G - 1, \quad (\text{A.9})$$

$$g^+ = \frac{1}{g_+} = -g_-, \quad g^- = \frac{1}{g_-} = -g_+, \quad (\text{A.10})$$

$$g^+ = \frac{1}{2}g + h, \quad g^- = \frac{1}{2}g - h, \quad (\text{A.11})$$

$$G^+ = \frac{g^+}{h} \equiv \frac{1}{2}G + 1, \quad G^- = \frac{g^-}{h} \equiv \frac{1}{2}G - 1. \quad (\text{A.12})$$

Справедливы тождества

$$g_+ + g_- = -g, \quad g_+ - g_- = 2h, \quad (\text{A.13})$$

$$g^+ + g^- = g, \quad g^+ - g^- = 2h, \quad (\text{A.14})$$

$$g_+ g_- = -1, \quad g^+ g^- = -1, \quad (\text{A.15})$$

а также *g*-симметрия

$$g_+ \overset{g \rightarrow -g}{\longleftrightarrow} -g_-, \quad g^+ \overset{g \rightarrow -g}{\longleftrightarrow} -g^-, \quad G_+ \overset{g \rightarrow -g}{\longleftrightarrow} -G_-, \quad G^+ \overset{g \rightarrow -g}{\longleftrightarrow} -G^-. \quad (\text{A.16})$$

Мы будем разбивать векторы на временные и трехмерные пространственные компоненты:

$$R = \{R^0, \mathbf{R}\}, \quad P = \{P_0, \mathbf{P}\}.$$

Области, входящие в разбиения (A.4) и (A.5), определяются следующим образом:

$$\mathcal{S}_g^+ = \{R \in \mathcal{S}_g^+ : R^0 > -g_- |\mathbf{R}|\}, \quad \Sigma_g^+ = \{R \in \Sigma_g^+ : R^0 = -g_- |\mathbf{R}|\},$$

$$\mathcal{R}_g^+ = \{R \in \mathcal{R}_g^+ : -g_- |\mathbf{R}| > R^0 > 0\}, \quad \mathcal{R}^0 = \{R \in \mathcal{R}^0 : R^0 = 0\},$$

$$\mathcal{R}_g^- = \{R \in \mathcal{R}_g^- : 0 > R^0 > -g_+ |\mathbf{R}|\}, \quad \Sigma_g^- = \{R \in \Sigma_g^- : R^0 = -g_+ |\mathbf{R}|\},$$

$$\mathcal{S}_g^- = \{R \in \mathcal{S}_g^- : R^0 < -g_+ |\mathbf{R}|\}, \quad \mathcal{R}_g = \mathcal{R}_g^+ \cup \mathcal{R}_g^- \cup \mathcal{R}^0,$$

а также

$$\hat{\mathcal{S}}_g^+ = \{P \in \hat{\mathcal{S}}_g^+ : P_0 > -g^- |\mathbf{P}|\}, \quad \hat{\Sigma}_g^+ = \{P \in \hat{\Sigma}_g^+ : P_0 = -g^- |\mathbf{P}|\},$$

$$\hat{\mathcal{R}}_g^+ = \{P \in \hat{\mathcal{R}}_g^+ : -g^- |\mathbf{P}| > P_0 > 0\}, \quad \hat{\mathcal{R}}^0 = \{P \in \hat{\mathcal{R}}^0 : P_0 = 0\},$$

$$\hat{\mathcal{R}}_g^- = \{P \in \hat{\mathcal{R}}_g^- : 0 > P_0 > -g^+ |\mathbf{P}|\}, \quad \hat{\Sigma}_g^- = \{P \in \hat{\Sigma}_g^- : P_0 = -g^+ |\mathbf{P}|\},$$

$$\hat{\mathcal{S}}_g^- = \{P \in \hat{\mathcal{S}}_g^- : P_0 < -g^+ |\mathbf{P}|\}, \quad \hat{\mathcal{R}}_g = \hat{\mathcal{R}}_g^+ \cup \hat{\mathcal{R}}_g^- \cup \hat{\mathcal{R}}^0.$$

Асимметрия между будущим и прошлым

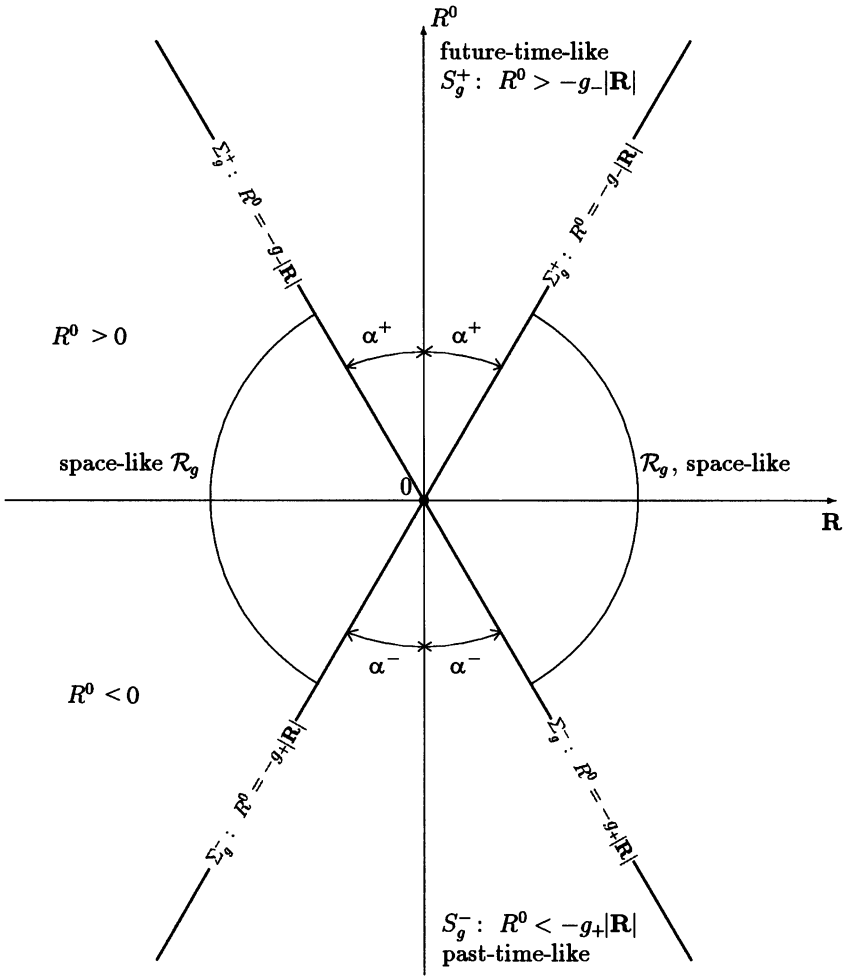


Рис. 24: Разбиение псевдофинслероидного релятивистского пространства по секторам при $g \neq 0$. Справедливо $\alpha^- \neq \alpha^+$. Верхний конус Σ_g^- не является зеркальным образом нижнего конуса Σ_g^+ , ибо $\operatorname{tg} \alpha^+ = g_+$, $\operatorname{tg} \alpha^- = -g_-$ и $\operatorname{tg} \alpha^+ - \operatorname{tg} \alpha^- = -g$; $\alpha^+ < \pi/4$ и $\alpha^- > \pi/4$, когда $g > 0$; $\alpha^+ > \pi/4$ и $\alpha^- < \pi/4$, когда $g < 0$.

Асимметрия между $P_0 > 0$ и $P_0 < 0$

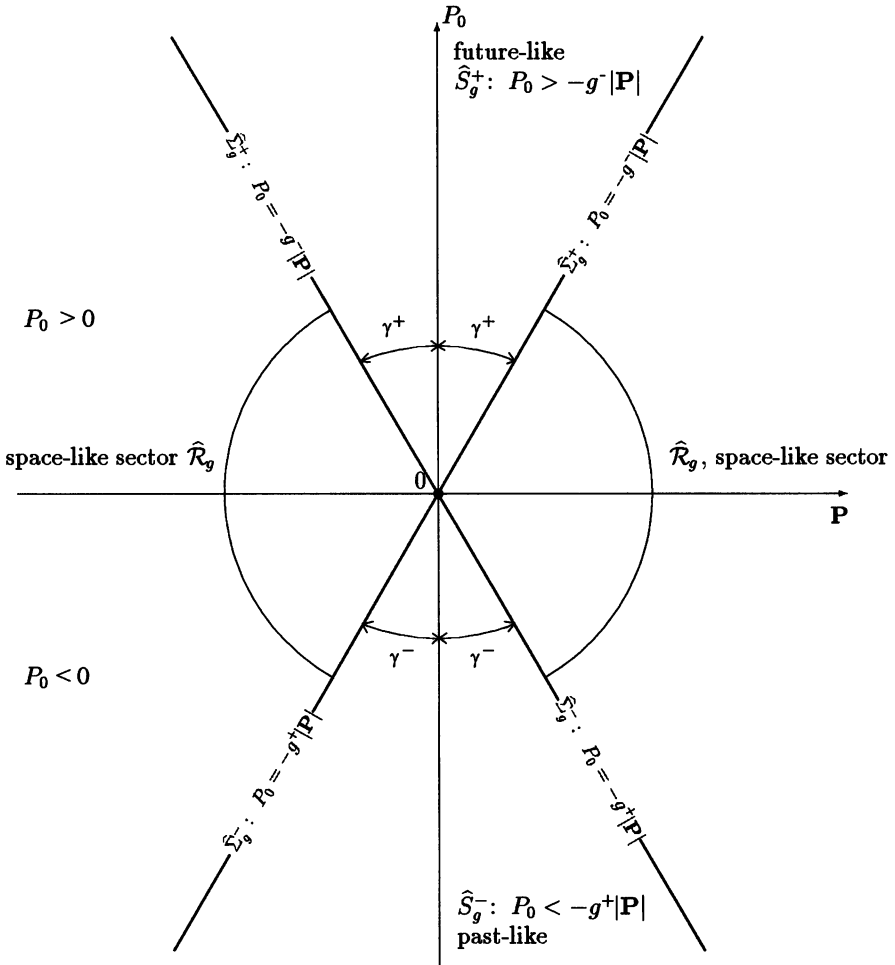


Рис. 25: Показано разбиение псевдофинслероидного релятивистского ко-пространства при $g \neq 0$. Здесь $\gamma^- \neq \gamma^+$. Нетрудно проверить, что $\text{tg } \gamma^+ = g^+$, $\text{tg } \gamma^- = -g^-$, $\text{tg } \gamma^+ - \text{tg } \gamma^- = g$, $\text{tg } \gamma^+ = \text{ctg } \alpha^+$, $\text{tg } \gamma^- = \text{ctg } \alpha^-$, а также $\gamma^+ + \alpha^+ = \pi/2$, $\gamma^- + \alpha^- = \pi/2$; $\gamma^+ > \pi/4$ и $\gamma^- < \pi/4$, если $g > 0$; $\gamma^+ < \pi/4$ и $\gamma^- > \pi/4$, если $g < 0$.

Введем следующие метрические функции F и гамильтоновы функции H финслеровой природы. В секторах временного типа мы возьмем

$$F^{(+)}(g; R) = (R^0 + g_- |\mathbf{R}|)^{G_+/2} (R^0 + g_+ |\mathbf{R}|)^{-G_-/2}, \quad R^0 > 0, \quad R \in \mathcal{S}_g^+; \quad (\text{A.17})$$

$$F^{(-)}(g; R) = (-R^0 - g_- |\mathbf{R}|)^{G_+/2} (-R^0 - g_+ |\mathbf{R}|)^{-G_-/2}, \quad R^0 < 0, \quad R \in \mathcal{S}_g^-; \quad (\text{A.18})$$

$$H^{(+)}(g; P) = \left(P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^+}\right)^{G_+/2} \left(P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^-}\right)^{-G_-/2}, \quad P_0 > 0, \quad P \in \hat{\mathcal{S}}_g^+; \quad (\text{A.19})$$

$$H^{(-)}(g; P) = \left(-P_0 + \frac{|\mathbf{P}|}{g^+}\right)^{G_+/2} \left(-P_0 + \frac{|\mathbf{P}|}{g^-}\right)^{-G_-/2}, \quad P_0 < 0, \quad P \in \hat{\mathcal{S}}_g^-. \quad (\text{A.20})$$

В секторах пространственного типа мы используем

$$F^{(+)}(g; R) = (-R^0 - g_- |\mathbf{R}|)^{G_+/2} (R^0 + g_+ |\mathbf{R}|)^{-G_-/2}, \quad R^0 > 0, \quad R \in \mathcal{R}_g^+; \quad (\text{A.21})$$

$$F^{(-)}(g; R) = (-R^0 - g_- |\mathbf{R}|)^{G_+/2} (R^0 + g_+ |\mathbf{R}|)^{-G_-/2}, \quad R^0 < 0, \quad R \in \mathcal{R}_g^-; \quad (\text{A.22})$$

$$H^{(+)}(g; P) = \left(-P_0 + \frac{|\mathbf{P}|}{g^+}\right)^{G_+/2} \left(P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^-}\right)^{-G_-/2}, \quad P_0 > 0, \quad P \in \hat{\mathcal{R}}_g^+; \quad (\text{A.23})$$

$$H^{(-)}(g; P) = \left(-P_0 + \frac{|\mathbf{P}|}{g^+}\right)^{G_+/2} \left(P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^-}\right)^{-G_-/2}, \quad P_0 < 0, \quad P \in \hat{\mathcal{R}}_g^-. \quad (\text{A.24})$$

С помощью квадратичных форм

$$B(g; R) = -(R^0 + g_- |\mathbf{R}|) (R^0 + g_+ |\mathbf{R}|) \equiv -\left((R^0)^2 - gR^0 |\mathbf{R}| - |\mathbf{R}|^2\right) \quad (\text{A.25})$$

и

$$\hat{B}(g; P) = -\left(P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^+}\right) \left(P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^-}\right) \equiv -\left((P_0)^2 + gP_0 |\mathbf{P}| - |\mathbf{P}|^2\right) \quad (\text{A.26})$$

все случаи (А.17)–(А.24) могут быть охвачены одной финслеровой метрической функцией

$$F(g; R) = \sqrt{|B(g; R)|} j(g; R), \quad (\text{А.27})$$

где

$$j(g; R) = \left| \frac{R^0 + g_- |\mathbf{R}|}{R^0 + g_+ |\mathbf{R}|} \right|^{-G/4}, \quad (\text{А.28})$$

и одной финслеровой гамильтоновой функцией

$$H(g; P) = \sqrt{|\hat{B}(g; P)|} \hat{j}(g; P), \quad (\text{А.29})$$

где

$$\hat{j}(g; P) = \left| \frac{P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^+}}{P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^-}} \right|^{G/4}. \quad (\text{А.30})$$

Их можно также переписать в виде

$$F(g; R) = |R^0 + g_- |\mathbf{R}||^{G+/2} |R^0 + g_+ |\mathbf{R}||^{-G-/2} \quad (\text{А.31})$$

и

$$H(g; P) = \left| P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^+} \right|^{G+ / 2} \left| P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^-} \right|^{-G- / 2}. \quad (\text{А.32})$$

Наше исходное утверждение можно сформулировать как

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.1. *Псевдофинслеровидные метрическая функция и гамильтонова функция явно задаются представлениями (А.31) и (А.32).*

Так получается *псевдофинслеровидное релятивистское пространство*

$$\mathcal{E}_g^{SR} := \{V_N; R \in V_N; g; F(g; R)\} \quad (\text{А.33})$$

и *псевдофинслеровидное релятивистское ко-пространство*

$$\hat{\mathcal{E}}_g^{SR} := \{V_N; P \in \hat{V}_N; g; H(g; P)\} \quad (\text{А.34})$$

(ср. определения (2.39) и (3.31) в Главе 2).

Функция (А.31) определяет *псевдофинслеровидную индикатрису* \mathcal{I}_g^{SR} согласно

$$\mathcal{I}_g^{SR} := \{R \in V_N : F(g; R) = 1\} \quad (\text{А.35})$$

(ср. определение (2.68) в Главе 2). Мы также будем применять к определению (А.35) название *\mathcal{F}_g -гиперболоид*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тело, охватываемое псевдофинслероидной индикатрисой, называется *псевдофинслероидом*.

Аналогично в ко-подходе введем *ко-псевдофинслероидную индикатрису* \hat{I}_g^{SR} согласно

$$\hat{I}_g^{SR} := \{\hat{R} \in \hat{V}_N : H(g; \hat{R}) = 1\}. \quad (\text{A.36})$$

Мы часто будем называть ее \hat{F}_g -*ко-гиперболоидом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тело, охватываемое ко-псевдофинслероидной индикатрисой, называется *ко-псевдофинслероидом*.

Нетрудно проверить равенства

$$\det(g_{pq}(g; R)) = (-1)^{N-1} [j(g; R)]^{2N}, \quad \det(g^{pq}(g; P)) = (-1)^{N-1} [\hat{j}(g; P)]^{2N} \quad (\text{A.37})$$

и

$$\text{sign}(g_{pq}) = \text{sign}(g^{pq}) = (+ - \dots -), \quad (\text{A.38})$$

используя явные представления для компонент $\{g_{pq}\}$ и $\{g^{pq}\}$ ассоциируемого финслерова метрического тензора. Сравнивая (A.37) и (A.28), приходим к выводу, что

$$\det(g_{pq}) < 0 \text{ на всей области определения } R \in S_g^+ \cup \mathcal{R}_g \cup S_g^- \text{ при } N = 4 \quad (\text{A.39})$$

и

$$\det(g_{pq}) \text{ сингулярен на всей изотропной области } R \in \Sigma_g^+ \cup \Sigma_g^-. \quad (\text{A.40})$$

Формула (A.38) явно указывает на релятивистский характер псевдофинслероидного метрического тензора.

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.2. Для псевдофинслероидного пространства \mathcal{E}_g^{SR} картановский тензор кручения снова имеет специальный алгебраический вид (2.63) из Главы 2, но теперь со значением

$$C_s C^s = -\frac{N^2}{4F^2} g^2. \quad (\text{A.41})$$

Тензор кривизны пространства \mathcal{E}_g^{SR} имеет специальный вид

$$S_{pqrs} = \frac{S^*}{F^2} (h_{pr} h_{qs} - h_{ps} h_{qr}) \quad (\text{A.42})$$

с константой

$$S^* = \frac{1}{4} g^2. \quad (\text{A.43})$$

Поскольку кривизна $R_{\text{pseudo-Finsleroid Indicatrix}}$ индикатрисы может быть найдена из формулы $\mathcal{R}_{\text{pseudo-Finsleroid Indicatrix}} = -(1 + S^*)$ (см. (4.37) в Главе 1; знак минус учитывает наличие минусов в сигнатуре (А.38)), мы вправе из (А.42)–(А.43) сделать вывод, что верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.3. *Для псевдофинслероидного пространства \mathcal{E}_g^{SR} индикатриса является пространством постоянной отрицательной кривизны, значение которой равно*

$$\mathcal{R}_{\text{pseudo-Finsleroid Indicatrix}} = - \left(1 + \frac{1}{4} g^2 \right) \leq -1. \quad (\text{А.44})$$

Рассматриваемое пространство очевидно вырождается в обычное псевдоевклидово пространство в пределе $g \rightarrow 0$:

$$B|_{g=0} = -[(R^0)^2 - \mathbf{R}^2], \quad \hat{B}|_{g=0} = -[(P_0)^2 - \mathbf{P}^2], \quad j|_{g=0} = 1, \quad \hat{j}|_{g=0} = 1,$$

$$F|_{g=0} = \sqrt{|(R^0)^2 - \mathbf{R}^2|}, \quad H|_{g=0} = \sqrt{|(P_0)^2 - \mathbf{P}^2|},$$

$$g_{pq}|_{g=0} = e_{pq}, \quad g^{pq}|_{g=0} = e^{pq}, \quad C_{pqr}|_{g=0} = 0, \quad R_{\text{Ind}}|_{g=0} = -1.$$

Часто при вычислениях появляются функции

$$A(g; R) = R^0 - \frac{1}{2} g |\mathbf{R}|, \quad \hat{A}(g; P) = P_0 + \frac{1}{2} g |\mathbf{P}|. \quad (\text{А.45})$$

Для введенной выше псевдофинслероидной метрической функции (А.31) уравнение ассоциируемой индикатрисы (см. определение (А.35)) имеет вид

$$|R^0 + g_- |\mathbf{R}|^{G_+/2} |R^0 + g_+ |\mathbf{R}|^{-G_-/2} = 1. \quad (\text{А.46})$$

Во времениподобной области его удобно записывать следующим образом:

$$R^0 V \left(g; \frac{|\mathbf{R}|}{R^0} \right) = 1, \quad R^0 > 0, \quad R \in S_g^+. \quad (\text{А.47})$$

Выполняя в нем дифференцирование по $|\mathbf{R}|$, для описания поведения образующей индикатрисы получим простое уравнение

$$\frac{dR^0}{d|\mathbf{R}|} = \frac{|\mathbf{R}|}{R^0 - g|\mathbf{R}|}, \quad (\text{А.48})$$

откуда после повторного дифференцирования следует неравенство

$$\frac{d^2 R^0}{d|\mathbf{R}|^2} = \frac{B(g; R)}{(R^0 - g|\mathbf{R}|)^3} > 0. \quad (\text{А.49})$$

Мы видим, что

$$\left. \frac{dR^0}{d|\mathbf{R}|} \right|_{\mathbf{R}=0} = 0, \quad \frac{dR^0}{d\mathbf{R}} \xrightarrow{R^0 \rightarrow +0} -\frac{1}{g}. \quad (\text{А.50})$$

В пространственноподобной области \mathcal{R}_g^+ уравнение (A.46) может быть записано как

$$|\mathbf{R}|\tilde{V}\left(g; \frac{R^0}{|\mathbf{R}|}\right) = 1, \quad R^0 > 0, \quad R \in \mathcal{R}_g^+. \quad (\text{A.51})$$

Оно определяет $|\mathbf{R}|$ как функцию от R^0 . Дифференцируя (A.51) по R^0 , находим уравнение образующей для ко-индикатрисы

$$\frac{d|\mathbf{R}|}{dR^0} = \frac{R^0 - g|\mathbf{R}|}{|\mathbf{R}|}. \quad (\text{A.52})$$

Повторно дифференцируя, получаем

$$\frac{d^2|\mathbf{R}|}{d(R^0)^2} = \frac{B(g; R)}{|\mathbf{R}|^3} > 0. \quad (\text{A.53})$$

Справедливы неравенства

$$\frac{d|\mathbf{R}|}{dR^0} > 0, \quad \text{если } R^0 > g|\mathbf{R}|; \quad \text{и} \quad \frac{d|\mathbf{R}|}{dR^0} < 0, \quad \text{если } R^0 < g|\mathbf{R}|, \quad (\text{A.54})$$

а также

$$\frac{d|\mathbf{R}|}{dR^0} = 0, \quad \text{если } R^0 = \check{R}^0 \quad \text{при} \quad \check{R}^0 = g|\mathbf{R}|. \quad (\text{A.55})$$

Из приведенных выше формул нетрудно заключить, что верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.4. *Образующая \mathcal{F}_g -гиперboloида такова, что производная $d|\mathbf{R}|/dR^0$ обращается в нуль при $R^0 = g|\mathbf{R}|$.*

Для сравнения заметим, что при обычном псевдоевклидовом подходе (ему отвечает $g = 0$) указанная производная обращается в нуль просто при $R^0 = 0$.

В ко-подходе мы должны использовать финслерову гамильтонову функцию (A.32) и заменить (A.46) на аналогичное уравнение

$$\left|P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^+}\right|^{G^+/2} \left|P_0 - \frac{|\mathbf{P}|}{g^-}\right|^{-G^-/2} = 1. \quad (\text{A.56})$$

Из приведенных выше формул прямо вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.5. *\mathcal{F}_g -гиперboloид является всюду регулярным и локально-выпуклым. Такой же вывод применим и к $\hat{\mathcal{F}}_g$ -ко-гиперboloиду. Графики этих двух (гипер)поверхностей переходят друг в друга при g -отражениях:*

$$\mathcal{F}_g \stackrel{g^+}{\longleftrightarrow} \hat{\mathcal{F}}_{-g}. \quad (\text{A.57})$$

При $g = 0$ уравнение (A.46) очевидно сводится к обычному псевдоевклидову виду $|(R^0)^2 - \mathbf{R}^2| = 1$, а \mathcal{F}_g -гиперboloид — к обычному гиперboloиду.

Приведенные ниже рисунки 26 и 27 псевдофинслероидного типа во многом аналогичны рисункам 9 и 10 из Главы 2.

Вид псевдофинслериоида и ко-псевдофинслериоида

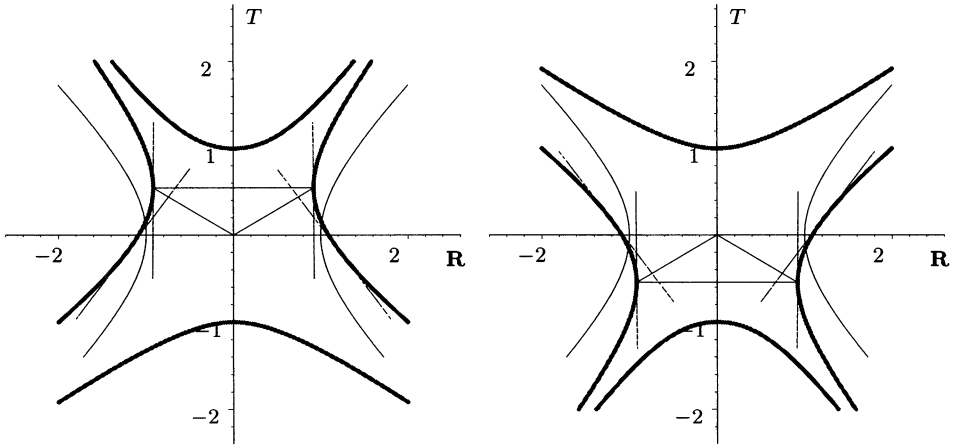


Рис. 26: Использваны значения $g = 0.6$ и $g = -0.6$ (жирная линия соответствует псевдофинслериоиду, тогда как обычным псевдоевклидовым гиперболами (псевдосферам) отвечает тонкая линия).

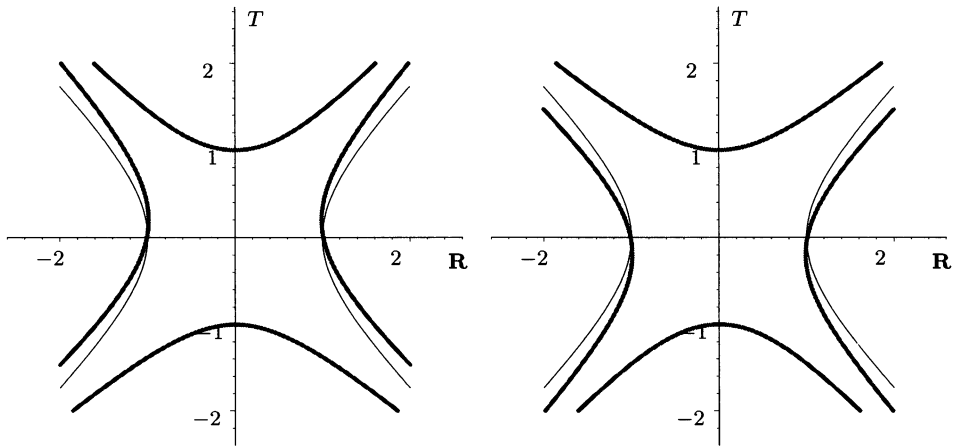


Рис. 27: Использваны значения $g = 0.2$ и $g = -0.2$.

Во времениподобном секторе S_g^+ удобно использовать обозначения

$$w^a = \frac{R^a}{R^0}, \quad w = \frac{|\mathbf{R}|}{R^0}, \quad w_a = w^a, \quad (\text{A.58})$$

и представлять псевдофинслероидную метрическую функцию (A.31) в виде

$$F(g; R) = R^0 V(g; w), \quad R \in S_g^+, \quad (\text{A.59})$$

где

$$V(g; w) = \sqrt{Q(g; w)} \left(\frac{1+g_-w}{1+g_+w} \right)^{-G/4} \equiv (1+g_-w)^{G/2} (1+g_+w)^{-G/2}, \quad w < g_+, \quad (\text{A.60})$$

и $Q(g; w) = -B(g; R)/(R^0)^2$, так что

$$Q(g; w) = 1 - gw - w^2 \equiv (1 + g_+w)(1 + g_-w) \quad (\text{A.61})$$

и

$$j(g; w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V(g; w)}{\sqrt{Q(g; w)}} = \left(\frac{1 + g_-w}{1 + g_+w} \right)^{-G/4}. \quad (\text{A.62})$$

Использование производных

$$V'(g; w) = -wV(g; w)/Q(g; w), \quad V''(g; w) = -V(g; w)/Q^2(g; w) \quad (\text{A.63})$$

и

$$j'(g; w) = \frac{1}{2} g j(g; w)/Q(g; w), \quad (\text{A.64})$$

где штрих ' означает дифференцирование по w , позволяет легко вычислить компоненты ковариантного вектора $\{R_p\} = \{R_0, R_a\}$ и ковариантного псевдофинслероидного метрического тензора $\{g_{pq}(g; R)\} = \{g_{00}(g; R), g_{0a}(g; R), g_{ab}(g; R)\}$, основываясь на определениях (2.8) и (2.9) из Главы 1. Получаем

$$R_0 = (1 - gw) \frac{F^2}{B}, \quad R_a = -w_a \frac{F^2}{B} \quad (\text{A.65})$$

и

$$g_{00}(g; R) = [(1 - gw)^2 - w^2] \frac{F^2}{B^2}, \quad g_{0a}(g; R) = gw w_a \frac{F^2}{B^2}, \quad (\text{A.66})$$

$$g_{ab}(g; R) = -\frac{F^2}{B} \delta_{ab} - g \frac{w_a w_b}{w} \frac{F^2}{B^2}. \quad (\text{A.67})$$

Компоненты взаимного контравариантного метрического тензора могут быть записаны в виде

$$g^{00}(g; R) = (1 - w^2) \frac{1}{V^2}, \quad g^{0a}(g; R) = gw w^a \frac{1}{V^2}, \quad (\text{A.68})$$

$$g^{ab}(g; R) = -\frac{Q}{V^2} \delta^{ab} + g(1 - gw) \frac{w^a w^b}{w} \frac{1}{V^2}. \quad (\text{A.69})$$

Для компонент углового метрического тензора (см. (2.21) в Главе 1) получаем

$$h_{00} = -w^2 \frac{V^2}{Q^2}, \quad h_{0a} = w_a \frac{V^2}{Q^2}, \quad (\text{A.70})$$

$$h_{ab} = -\frac{V^2}{Q} \delta_{ab} - (g+w) \frac{w_a w_b V^2}{w Q^2}. \quad (\text{A.71})$$

В пространственноподобной области \mathcal{R}_g удобно проводить расчеты с использованием обозначений

$$n^a = R^a / |\mathbf{R}|, \quad n_a = e_{ab} n^b = -n^a, \quad k = R^0 / |\mathbf{R}|. \quad (\text{A.72})$$

Получаем

$$F(g; R) = |\mathbf{R}| Z(g; k), \quad R \in \mathcal{R}_g, \quad (\text{A.73})$$

с функцией

$$Z(g; k) = \sqrt{L(g; k)} \left(\frac{-g_- - k}{g_+ + k} \right)^{-G/4} \equiv (-g_- - k)^{G_+/2} (g_+ + k)^{-G_-/2}, \quad k < -g_-, \quad (\text{A.74})$$

где

$$L(g; k) = 1 + gk - k^2 \equiv (-g_- - k)(g_+ + k), \quad (\text{A.75})$$

а также

$$j(g; k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Z(g; k)}{\sqrt{L(g; k)}} = \left(\frac{-g_- - k}{g_+ + k} \right)^{-G/4}, \quad k < -g_-. \quad (\text{A.76})$$

Мы имеем

$$Z'(g; k) = (g - k) Z(g; k) / L(g; k), \quad Z''(g; k) = -Z(g; k) / L^2(g; k) \quad (\text{A.77})$$

и

$$j'(g; k) = \frac{1}{2} g j(g; k) / L(g; k), \quad (\text{A.78})$$

где штрих (') означает дифференцирование по k . Аналог формул (A.65)–(A.68) имеет вид

$$R_0 = (g - k) |\mathbf{R}| j^2(g; k), \quad R_a = e_{ab} R^b j^2(g; k), \quad (\text{A.79})$$

и

$$g_{00} = -[1 - (g - k)^2] \frac{Z^2}{L^2}, \quad g_{0a} = g n_a \frac{Z^2}{L^2}, \quad (\text{A.80})$$

$$g_{ab} = (L \delta_{ab} - g k n_a n_b) \frac{Z^2}{L^2}, \quad (\text{A.81})$$

а также

$$g^{00} = -(1 - k^2) \frac{1}{Z^2}, \quad g^{0a} = gn^a \frac{1}{Z^2}, \quad (\text{A.82})$$

$$g^{ab} = [L\delta^{ab} + g(k - g)n^a n^b] \frac{1}{Z^2}. \quad (\text{A.83})$$

Для компонент углового метрического тензора аналогично (A.70)–(A.71) получаются значения

$$h_{00} = -\frac{Z^2}{L^2}, \quad h_{0a} = kn_a \frac{Z^2}{L^2}, \quad (\text{A.84})$$

$$h_{ab} = [L\delta_{ab} - (1 + gk)n_a n_b] \frac{Z^2}{L^2} \equiv (Ln_{ab} - k^2 n_a n_b) \frac{Z^2}{L^2}. \quad (\text{A.85})$$

Квазипсевдоевклидово преобразование вводится совершенно аналогично тому, как вводилось квазиевклидово преобразование в Главе 3, и задается правилом

$$t^i = \sigma^i(g; R) \quad (\text{A.86})$$

($i, j, \dots = 0, 1, \dots, N - 1$) с функциями

$$\sigma^0 = \left| \frac{R^0 + g_- |\mathbf{R}|}{R^0 + g_+ |\mathbf{R}|} \right|^{-G/4} \left(R^0 - \frac{1}{2} g |\mathbf{R}| \right), \quad \sigma^a = h \left| \frac{R^0 + g_- |\mathbf{R}|}{R^0 + g_+ |\mathbf{R}|} \right|^{-G/4} R^a; \quad (\text{A.87})$$

константа h задается формулой (A.7). С его помощью можно перейти от исходных переменных $\{R^p\}$ к новым переменным $\{t^i\}$. Обратное преобразование

$$R^p = \mu^p(g; t) \quad (\text{A.88})$$

включает функции

$$\mu^0 = I(g; t)/k(g; t), \quad \mu^a = t^a/hk(g; t), \quad (\text{A.89})$$

где

$$k(g; t) = \left| \frac{t^0 - |\mathbf{t}|}{t^0 + |\mathbf{t}|} \right|^{-G/4} \quad (\text{A.90})$$

и

$$I(g; t) = t^0 + \frac{1}{2} G |\mathbf{t}| \quad (\text{A.91})$$

(ср. формулы (1.14)–(1.17) в Главе 3), так что

$$t^i \equiv \sigma^i(g; \mu(g; t)), \quad R^p \equiv \mu^p(g; \sigma(g; R)). \quad (\text{A.92})$$

Подстановка функций (A.87) в псевдоевклидову метрическую функцию

$$S(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|e_{ij} t^i t^j|} \equiv \sqrt{|(t^0)^2 - |\mathbf{t}|^2|} \quad (\text{A.93})$$

дает, как нетрудно заметить, тождество

$$F(g; R) = S(t), \quad (\text{A.94})$$

где $F(g; R)$ — точно псевдофинслероидная метрическая функция (A.31).

Квазипсевдоевклидов тензор

$$n^{ij}(g; t) \stackrel{\text{def}}{=} t_p^i t_q^j g^{pq} \quad (\text{A.95})$$

имеет компоненты

$$n^{ij}(g; t) = h^2 e^{ij} - \frac{1}{4} g^2 l^i l^j, \quad n_{ij}(g; t) = \frac{1}{h^2} e_{ij} + \frac{1}{4} G^2 l_i l_j \quad (\text{A.96})$$

($e_{ij} e^{jm} = \delta_i^m$ и $n_{ij} n^{jm} = \delta_i^m$), где

$$l^i \stackrel{\text{def}}{=} t^i / S(t), \quad \text{и} \quad l_i \stackrel{\text{def}}{=} e_{ij} l^j$$

— компоненты единичного вектора. Для них выполняются равенства

$$l^i l_i = 1, \quad n_{ij} l^j = l_i, \quad n^{ij} l_j = l^i, \quad n_{ij} l^i l^j = 1, \quad n_{ij} t^i t^j = S^2.$$

Обращение преобразования (A.81) имеет вид

$$g_{pq}(g; R) = n_{ij}(g; \sigma(g; R)) t_p^i(g; R) t_q^j(g; R). \quad (\text{A.97})$$

Справедливо

$$\det(n_{ij}) = (-h^2)^{1-N}. \quad (\text{A.98})$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство

$$\mathcal{K}_g := \{\mathcal{Q}_N; S(t); n_{ij}(g; t); t \in \mathcal{Q}_N\} \quad (\text{A.99})$$

называется квазипсевдоевклидовым.

Аналоги формул (2.4)–(2.5) и (2.8)–(2.10) из Главы 3 имеют вид

$$H_{mi} = e_{mi} - L_m L_i \equiv h^2 (n_{mi} - L_m L_i), \quad L^i H_{ij} = 0$$

и

$$N_{mjn} = \frac{1}{4} G^2 H_{mn} L_j / S, \quad N_m{}^i{}_n = \frac{1}{4} G^2 H_{mn} L^i / S,$$

$$N_i{}^m{}_j(t) = \frac{1}{4} G^2 L^m H_{ij} / S, \quad t^i N_i{}^m{}_j = 0,$$

$$N_i{}^j{}_j = 0.$$

Псевдофинслероидные скалярное произведение, угол и геодезические находятся в явном виде. А именно, внимательное рассмотрение показывает, что формулы Раздела 2.7 Главы 2, относящиеся к положительно-определенному \mathcal{E}_g^{PD} -пространству, могут быть перенесены на рассматриваемое релятивистское \mathcal{E}_g^{SR} -пространство, следуя правилам (A.1)–(A.3). Ниже мы формулируем кратко получающиеся результаты.

Для двух векторов возникает \mathcal{E}_g^{SR} -скалярное произведение

$$\langle R_1, R_2 \rangle := F(g; R_1)F(g; R_2) \cosh \left[\frac{1}{h} \operatorname{arccosh} \frac{A(g; R_1)A(g; R_2) - h^2 r_{be} R_1^b R_2^e}{\sqrt{B(g; R_1)} \sqrt{B(g; R_2)}} \right] \quad (\text{A.100})$$

и \mathcal{E}_g^{SR} -угол

$$\alpha(R_1, R_2) := \frac{1}{h} \operatorname{arccosh} \frac{A(g; R_1)A(g; R_2) - h^2 r_{be} R_1^b R_2^e}{\sqrt{B(g; R_1)} \sqrt{B(g; R_2)}}. \quad (\text{A.101})$$

Общее решение $R^p = R^p(s)$ уравнений геодезических \mathcal{E}_g^{SR} -пространства может быть представлено компонентами

$$R^0(s) = (t^0(s) + \frac{1}{2} Gm(s))/k(s), \quad R^a(s) = \frac{1}{h} t^a(s)/k(s) \quad (\text{A.102})$$

с функциями

$$t^0(s) = \frac{F_s}{\sinh(h\alpha)} \left[\frac{A(g; R_1)}{\sqrt{B(g; R_1)}} \sinh(h(\alpha - \nu)) + \frac{A(g; R_2)}{\sqrt{B(g; R_2)}} \sinh(h\nu) \right], \quad (\text{A.103})$$

$$t^a(s) = h \frac{F_s}{\sinh(h\alpha)} \left[\frac{R_1^a}{\sqrt{B(g; R_1)}} \sinh(h(\alpha - \nu)) + \frac{R_2^a}{\sqrt{B(g; R_2)}} \sinh(h\nu) \right], \quad (\text{A.104})$$

где

$$F_s = \sqrt{(F(g; R_1))^2 + 2bs + s^2}, \quad (\text{A.105})$$

$$b = F(g; R_1) \sqrt{1 + \left(\frac{F(g; R_2) \sinh \alpha}{\Delta s} \right)^2}, \quad (\text{A.106})$$

а также

$$k(s) = \left| \frac{t^0(s) - m(s)}{t^0(s) + m(s)} \right|^{-G/4}, \quad m(s) = \sqrt{r_{ab} t^a(s) t^b(s)}. \quad (\text{A.107})$$

Промежуточный угол ν равен

$$\nu = \operatorname{arctanh} \frac{sF(g; R_2) \sinh \alpha}{F(g; R_1) \Delta s + [F(g; R_2) \cosh \alpha - F(g; R_1)]s}. \quad (\text{A.108})$$

Вдоль геодезических выполняются равенства

$$F(g; R(s)) = F_s \quad (\text{A.109})$$

и

$$(F(g; R(s)))^2 = a^2 + 2bs + s^2 \equiv (b + s)^2 - (b^2 - a^2), \quad (\text{A.110})$$

где $a = F(g; R_1)$ и b — константы, подчиненные условиям

$$a > 0 \quad \text{и} \quad b^2 - a^2 \geq 0 \quad (\text{A.111})$$

(вместо условий (7.13) из Главы 2).

При использовании введенного выше угла α , у изучаемого пространства появляются следующие важные свойства.

\mathcal{E}_g^{SR} -расстояние Δs между двумя точками удовлетворяет равенству

$$(\Delta s)^2 = (F(g; R_1))^2 + (F(g; R_2))^2 - 2F(g; R_1)F(g; R_2) \cosh \alpha. \quad (\text{A.112})$$

\mathcal{E}_g^{SR} -скалярное произведение

$$\langle R_1, R_2 \rangle = F(g; R_1)F(g; R_2) \cosh \alpha. \quad (\text{A.113})$$

Отождествление

$$\langle R, R \rangle = (F(g; R))^2 \quad (\text{A.114})$$

при равных векторах.

\mathcal{E}_g^{SR} -ортогональность

$$\langle R, R^\perp \rangle = 0. \quad (\text{A.115})$$

Следуя отождествлению $|R_1 \ominus R_2|$ с длиной Δs , можно интерпретировать формулу (A.112) как

$$|R_1 \ominus R_2| = (F(g; R_1))^2 + (F(g; R_2))^2 - 2F(g; R_1)F(g; R_2) \cosh \alpha. \quad (\text{A.116})$$

Полностью аналогичные соотношения получаются и в ко-подходе. Задав два вектора $P_1 \in \hat{V}_N$ и $P_2 \in \hat{V}_N$, можно вывести $\hat{\mathcal{E}}_g^{SR}$ -скалярное произведение

$$\langle P_1, P_2 \rangle = H(g; P_1)H(g; P_2) \cosh \left[\frac{1}{\hbar} \operatorname{arccosh} \frac{\hat{A}(g; P_1)\hat{A}(g; P_2) - \hbar^2 r^{be} P_{1b} P_{2e}}{\sqrt{\hat{B}(g; P_1)} \sqrt{\hat{B}(g; P_2)}} \right], \quad (\text{A.117})$$

которому соответствует следующий $\hat{\mathcal{E}}_g^{SR}$ -угол:

$$\hat{\alpha}(P_1, P_2) = \frac{1}{h} \operatorname{arccosh} \frac{\hat{A}(g; P_1)\hat{A}(g; P_2) - h^2 r^{be} P_{1b} P_{2e}}{\sqrt{\hat{B}(g; P_1)} \sqrt{\hat{B}(g; P_2)}}. \quad (\text{A.118})$$

Аналог представления (A.116) имеет вид

$$|P_1 \ominus P_2|^2 = (H(g; P_1))^2 + (H(g; P_2))^2 - 2H(g; P_1)H(g; P_2) \cosh \hat{\alpha}. \quad (\text{A.119})$$

В пределе $g \rightarrow 0$ введенный угол сводится к обычному псевдоевклидову углу, а именно,

$$\alpha(R_1, R_2)|_{g=0} = \operatorname{arccosh} \frac{R_1^0 R_2^0 - r^{be} R_1^b R_2^e}{\sqrt{(R_1^0)^2 - r^{be} R_1^b R_1^e} \sqrt{(R_2^0)^2 - r^{be} R_2^b R_2^e}}$$

и

$$\hat{\alpha}(P_1, P_2)|_{g=0} = \operatorname{arccosh} \frac{P_{10} P_{20} - r^{be} P_{1b} P_{2e}}{\sqrt{(P_{10})^2 - r^{be} P_{1b} P_{1e}} \sqrt{(P_{20})^2 - r^{be} P_{2b} P_{2e}}}.$$

Решение (A.102) может быть переписано в виде

$$R^p(s) = \frac{F_s}{k(s)\sqrt{B(g; R_1)}} \frac{\sinh(h(\alpha - \nu))}{\sinh(h\alpha)} R_1^p + \frac{F_s}{k(s)\sqrt{B(g; R_2)}} \frac{\sinh(h\nu)}{\sinh(h\alpha)} R_2^p + \tilde{X}(s) \delta_N^p \quad (\text{A.120})$$

с функций

$$\tilde{X}(s) = -\frac{1}{2g} \frac{F_s}{k(s)} \left[\frac{\sinh(h(\alpha - \nu))}{\sinh(h\alpha)} \frac{q_1}{\sqrt{B(g; R_1)}} + \frac{\sinh(h\nu)}{\sinh(h\alpha)} \frac{q_2}{\sqrt{B(g; R_2)}} - \frac{m(s)}{hF_s} \right] \quad (\text{A.121})$$

(ср. (7.31)–(7.32) в Главе 2).

Для компонент скорости $U^p(s) = dR^p/ds$ удобно использовать преобразование

$$U^p(s) = \mu_j^p(g; \mathbf{t}(s)) \frac{dt^j}{ds} \quad (\text{A.122})$$

(ср. (7.37) в Главе 2). Вычисления дают явное выражение

$$U^p(s) = \frac{b+s}{(F_s)^2} R^p(s) + \frac{hF(g; R_1)F(g; R_2) \sinh \alpha}{k_s F_s \sinh(h\alpha) \Delta s} T^p(s) \quad (\text{A.123})$$

со значениями

$$T^N(s) = \frac{A(g; R_2)}{h^2 \sqrt{B(g; R_2)}} \cosh(h\nu) - \frac{A(g; R_1)}{h^2 \sqrt{B(g; R_1)}} \cosh(h(\alpha - \nu)), \quad (\text{A.124})$$

$$T^a(s) = \frac{1}{\sqrt{B(g; R_2)}} \left[R_2^a + \frac{1}{2} g \frac{A(g; R_2)}{h^2 q} R^a(s) \right] \cosh(h\nu) - \frac{1}{\sqrt{B(g; R_1)}} \left[R_1^a + \frac{1}{2} g \frac{A(g; R_1)}{h^2 q} R^a(s) \right] \cosh(h(\alpha - \nu)). \quad (\text{A.125})$$

Полезно сравнить (A.123)–(A.125) с формулами (7.38)–(7.49) из Главы 2 и обратить внимания на различия. Что касается равенств (7.50)–(7.52) из Главы 2, они применимы буквально и в рассматриваемом псевдофинслероидном подходе.

Чтобы Теорема 2.17 из Главы 2, формулирующая решение для геодезических с начальными данными, тоже оказалась применимой к псевдофинслероидному случаю, достаточно в формулах (7.55)–(7.61) Главы 2 сделать замены $K \rightarrow F$, $\sin \rightarrow \sinh$ и $\cos \rightarrow \cosh$.

Псевдофинслероидные вращения могут быть найдены явным образом с помощью метода, изложенного в Разделе 4.3 Главы 4. Пусть $\|L_q^p(k_A)\|$ — матрица псевдоевклидовых вращений в квазипсевдоевклидовом пространстве, так что справедливы тождества

$$L_i^m(k_A) L_j^n(k_A) r_{mn} = r_{ij} \quad (\text{A.126})$$

(k_A — параметры). В компонентной записи они читаются так:

$$(L_0^0)^2 - L_0^c L_0^d r_{cd} = 1, \quad L_0^0 L_a^0 - L_0^c L_a^d r_{cd} = 0, \quad L_a^0 L_b^0 - L_a^c L_b^d r_{cd} = -\delta_{ab}. \quad (\text{A.127})$$

Задача состоит в том, чтобы отобразить псевдоевклидовы вращения

$$t^i = \tilde{t}^j L_j^i \quad (\text{A.128})$$

из квазипсевдоевклидова пространства в псевдофинслероидное пространство. Удобны обозначения

$$v^b = w^b \equiv \frac{R^b}{R^0}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\delta_{ab} v^a v^b}, \quad (\text{A.129})$$

$$\tilde{b} = (\tilde{s}^2 - \tilde{Q})^{1/2}, \quad \tilde{s} = L_0^0 \tilde{E} + h L_b^0 \tilde{v}^b, \quad \tilde{M} = \frac{1}{2} g \tilde{b} + \tilde{s} h. \quad (\text{A.130})$$

Функция (3.9) из Главы 4 заменится на функцию

$$\tilde{U} = \left(\frac{(1 + g_- \tilde{w})(\tilde{s} + \tilde{b})}{(1 + g_+ \tilde{w})(\tilde{s} - \tilde{b})} \right)^{-G/4}, \quad (\text{A.131})$$

а преобразование (3.10)–(3.11) на \mathcal{E}_g^{SR} -вращение

$$R = \mathcal{F}(g; \tilde{R}) : \left\{ R^0 = \frac{1}{h} \tilde{R}^0 \tilde{M} \tilde{U}, \quad R^a = (L_b^a \tilde{R}^b + \frac{1}{h} L_0^a \tilde{R}^0 \tilde{E}) \tilde{U} \right\}, \quad (\text{A.132})$$

$$\tilde{R} = \mathcal{F}(g; R) : \left\{ \tilde{R}^0 = \frac{1}{h} R^0 M U, \quad \tilde{R}^a = (l_b^a R^b + \frac{1}{h} l_0^a R^0 E) U \right\}, \quad (\text{A.133})$$

где коэффициенты l_n^j определяются условиями взаимности $L_j^i l_n^j = \delta_n^i$.

Дифференцирование функции (A.119) дает

$$\frac{\partial U}{\partial R^0} = gU(2R^0Qb)^{-1}f, \quad \frac{\partial U}{\partial R^a} = -gU(2R^0Qb)^{-1}f_a$$

с функциями

$$f = EL_b^0 w^b + L_0^0 w^2 - bw \equiv \frac{1}{h}(Es - L_0^0 Q) - bw \equiv f_a w^a$$

и

$$\begin{aligned} f_a &= \left[L_0^0 + L_b^0 w^b \left(1 + \frac{1}{2} g w^{-1} \right) - b w^{-1} \right] w_a + L_a^0 Q \\ &\equiv \left\{ \frac{1}{h} \left[\left(1 + \frac{1}{2} g w^{-1} \right) s - \frac{1}{2} g w^{-1} L_0^0 Q \right] - b w^{-1} \right\} w_a + L_a^0 Q. \end{aligned}$$

Соответствующие релятивистские аналоги формул (3.12)–(3.15) из Главы 4 имеют вид

$$\mathcal{F}_0^0 = \tilde{U} \left[L_0^0 + \frac{g}{2h\tilde{b}} \left(\tilde{s} L_0^0 - \tilde{E} + \tilde{f} \tilde{M} \tilde{Q}^{-1} \right) \right]$$

$$\equiv \tilde{U} \left\{ L_0^0 + \frac{g}{2h\tilde{b}} \left[\left(\frac{1}{2} g - \left(1 + \frac{1}{2} g^2 \right) \tilde{w} \right) L_b^0 \tilde{w}^b + (1 - g\tilde{w}) \left(\tilde{b} - h\tilde{w} L_0^0 \right) \right] \right\}, \quad (\text{A.134})$$

$$\mathcal{F}_a^0 = \tilde{U} \left\{ \left(1 + \frac{s\tilde{s}}{2h\tilde{b}} \left(hL_a^0 - \frac{1}{2} g L_0^0 (\tilde{w}_a / \tilde{w}) \right) \right) + \frac{g}{2h\tilde{b}} \left[\left(1 + \frac{1}{2} g \tilde{w}^{-1} \right) \tilde{w}_a - \tilde{f}_a \tilde{M} \tilde{Q}^{-1} \right] \right\}, \quad (\text{A.135})$$

$$\mathcal{F}_b^a = \tilde{U} \left[L_b^a - \frac{1}{2h} g L_0^a (\tilde{w}_b / \tilde{w}) - \frac{g}{h\tilde{b}} \left(hL_c^a \tilde{w}^c + L_0^a \tilde{E} \right) \tilde{f}_b \right], \quad (\text{A.136})$$

$$\mathcal{F}_0^a = \frac{1}{h} \tilde{U} \left[L_0^a + \frac{g}{2b\tilde{Q}} \left(hL_c^a \tilde{w}^c + L_0^a \tilde{E} \right) \tilde{f}^a \right]. \quad (\text{A.137})$$

Детерминант матрицы таких коэффициентов не является константой. Формула (3.16) из Главы 4 применима и в псеодофинслеровидном подходе.

Аналогичные формулы получаются в пространственноподобном \mathcal{R}_g^+ -секторе, а именно,

$$\tilde{b} = (\tilde{s}^2 + \tilde{L})^{1/2}, \quad \tilde{s} = L_0^0 \tilde{f} + h L_a^0 \tilde{n}^a, \quad \tilde{M} = \frac{1}{2} g \tilde{b} + \tilde{s} h,$$

$$n^a = (L_0^a \tilde{f} + h L_c^a \tilde{n}^c) / \tilde{b}, \quad k = \tilde{M} / \tilde{b},$$

$$1 - g_+ k = g_+ h (\tilde{b} - \tilde{s}) / \tilde{b}, \quad 1 - g_- k = -g_- h (\tilde{b} + \tilde{s}) / \tilde{b},$$

и затем

$$\tilde{U} = \left(\frac{(1 - g_+ \tilde{k})(s + b)(-g_-)}{(1 - g_- \tilde{k})(s - b)g_+} \right)^{-G/4}, \quad (\text{A.138})$$

так что

$$R = \mathcal{F}(g; \tilde{R}) : \left\{ R^0 = \frac{1}{h} \tilde{q} \tilde{M} \tilde{U}, \quad R^a = (L_b^a \tilde{R}^b + \frac{1}{h} L_0^a \tilde{q} \tilde{f}) \tilde{U} \right\}, \quad (\text{A.139})$$

$$\tilde{R} = \mathcal{F}(g; R) : \left\{ \tilde{R}^0 = \frac{1}{h} q M U, \quad \tilde{R}^a = (l_b^a R^b + \frac{1}{h} l_0^a q f) U \right\}. \quad (\text{A.140})$$

Псевдофинслероидное обобщение кинематики может быть во всех деталях развито на основе метрической функции (А.31), следуя известным кинематическим принципам. В наиболее общем смысле Релятивистская Кинематика как раздел физики изучает ситуации, в которых одна инерциальная система отсчета (ИСО) заменяется на другую. Пусть Ξ — класс предполагаемых допустимых ИСО. Обозначим соответствующих представителей через $S_0, S(v), S_1, S_2, \dots$. В каждой ИСО предполагается введенной собственная система координат (ССК). О таких ССК мы как обычно предположим, что они прямолинейные и что в каждой из них выделена временная координата, имеющая смысл собственного времени наблюдателя. Априори мы *не должны предполагать*, что понятие пространственной изотропности применимо к каждой ИСО, ибо такое предположение может не иметь никакого конструктивного содержания вне пределов псевдоевклидова подхода. Мы последуем более слабому предположению, а именно, что существует ИСО, ниже обозначаемая как $S_0 \in \Xi$, в которой строго выполняется *принцип пространственной изотропности*. Геометрически он означает просто, что в ИСО S_0 фундаментальная финслерова метрическая функция, будучи записанной в терминах ССК $\{T, X, Y, Z\} \in S_0$, обладает следующим свойством: существует такая функция $f(T, r)$, что

$$F(T, X, Y, Z) = f(T, \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}). \quad (\text{A.141})$$

Будем говорить о такой S_0 как о *выделенной* ИСО.

Рассмотрим относительно S_0 другую ИСО $S(v) \in \Xi$, возьмем какой-либо времениподобный вектор $\{X^p\} \in S_g^+$ и введем удобные обозначения

$$v = w^1, \quad \mathbf{w} = \{w^1, w^2, w^3\}, \quad \mathbf{w} = \frac{\Delta \mathbf{X}}{\Delta T}, \quad w = \frac{|\Delta \mathbf{X}|}{\Delta T}. \quad (\text{A.142})$$

Использование псевдофинслероидной метрической функции (A.31) (а она обладает свойством (A.141)) однозначно приводит к обобщению кинематических законов и соотношений.

Псевдофинслероидное обобщение специальных преобразований Лоренца имеет вид

$$T = \frac{1}{V(g; w)}t + \frac{1}{V(g; w)}vx, \quad X = \frac{1}{V(g; w)}vt + \frac{1}{V(g; w)}(1 - gw)x, \quad (\text{A.143})$$

$$Y = \frac{\sqrt{Q(g; w)}}{V(g; w)}y, \quad Z = \frac{\sqrt{Q(g; w)}}{V(g; w)}z \quad (\text{A.144})$$

и

$$t = \frac{V(g; w)}{Q(g; w)}(1 - gw)T - \frac{V(g; w)}{Q(g; w)}vX, \quad x = -\frac{V(g; w)}{Q(g; w)}vT + \frac{V(g; w)}{Q(g; w)}X, \quad (\text{A.145})$$

$$y = \frac{V(g; w)}{\sqrt{Q(g; w)}}Y, \quad z = \frac{V(g; w)}{\sqrt{Q(g; w)}}Z \quad (\text{A.146})$$

(предполагается, что ИСО S_0 и $S(v)$ имеют общее начало; в противном случае следовало бы ставить знак приращения Δ перед координатами).

Аналогично, для преобразования компонент четырехмерных импульсов, $\{P_p\} \in \hat{S}_g^+$, справедливо

$$P_0 = \frac{V(g; w)}{Q(g; w)}(1 - gw)p_0 - \frac{V(g; w)}{Q(g; w)}vp_1, \quad P_1 = -\frac{V(g; w)}{Q(g; w)}vp_0 + \frac{V(g; w)}{Q(g; w)}p_1, \quad (\text{A.147})$$

$$P_2 = \frac{V(g; w)}{\sqrt{Q(g; w)}}p_2, \quad P_3 = \frac{V(g; w)}{\sqrt{Q(g; w)}}p_3 \quad (\text{A.148})$$

и

$$p_0 = \frac{1}{V(g; w)}P_0 + \frac{1}{V(g; w)}vP_1, \quad p_1 = \frac{1}{V(g; w)}vP_0 + \frac{1}{V(g; w)}(1 - gw)P_1, \quad (\text{A.149})$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{Q(g; w)}}{V(g; w)}P_2, \quad p_3 = \frac{\sqrt{Q(g; w)}}{V(g; w)}P_3. \quad (\text{A.150})$$

Свертка инвариантна:

$$TP_0 + XP_1 + YP_2 + ZP_3 = tp_0 + xp_1 + yp_2 + zp_3. \quad (\text{A.151})$$

Предполагается, что переменные $\{T, X, Y, Z\}$ и $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ относятся к выделенной ИСО S_0 , обладающей свойством пространственной изотропности, в то время как наборы $\{t, x, y, z\}$ и $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ служат для введения координат в другой движущейся ИСО $S(v)$. Функции V и Q задаются формулами (А.60) и (А.61).

При $g \rightarrow 0$ преобразования очевидно сводятся к обычным специальным преобразованиям Лоренца:

$$T = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}t + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}x, \quad X = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}t + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}x, \quad (\text{А.152})$$

$$Y = y, \quad Z = z, \quad (\text{А.153})$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}T - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}X, \quad x = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}X, \quad (\text{А.154})$$

и

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}p_0 - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}p_1, \quad P_1 = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}p_0 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}p_1, \quad (\text{А.155})$$

$$P_2 = p_2, \quad P_3 = p_3, \quad (\text{А.156})$$

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}P_0 + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}P_1, \quad p_1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}P_0 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}P_1. \quad (\text{А.157})$$

К указанным преобразованиям (А.143)–(А.150) приводит следование общему и релятивистскому кинематическому принципу рассматривать ортонормированные тетрады как координатные базисы для ИСО. Его можно сформулировать как

ТЕТРАДНЫЙ КИНЕМАТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП. ССК для ИСО представляются геометрически соответствующими ортонормированными тетрадами $\{H_{(Q)}^P\}$ и $\{H_Q^{(P)}\}$ фундаментального метрического тензора, так что тетрадное представление псевдофинслероидного метрического тензора $\{g_{PQ}\}$ должно иметь вид

$$g_{pq}(g; v) = \epsilon_{RS} H_p^{(R)}(g; v) H_q^{(S)}(g; v), \quad (\text{А.158})$$

где $\epsilon_{RS} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Следуя этому принципу, мы используем тетрады для того, чтобы связать пространства наблюдений в ИСО S_0 и $S(v)$:

$$X^P = H_{(Q)}^P x^Q, \quad (\text{А.159})$$

где $X^P = (T, X, Y, Z)$ и $x^P = (t, x, y, z)$.

В частности, в специально-релятивистском случае имеем

$$T = H_{(0)}^0 t + H_{(1)}^0 x, \quad (\text{A.160})$$

$$X = H_{(0)}^1 t + H_{(1)}^1 x, \quad Y = H_{(2)}^2 y, \quad Z = H_{(3)}^3 z. \quad (\text{A.161})$$

Аналогично, рассматривая ковариантный вектор (например, импульс) и обозначая $P_P = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ и $p_P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, получаем закон преобразования

$$P_P = H_P^{(Q)} p_Q, \quad (\text{A.162})$$

который в специально-релятивистском случае записывается в следующем виде:

$$P_0 = H_0^{(0)} p_0 + H_0^{(1)} p_1, \quad P_1 = H_1^{(0)} p_0 + H_1^{(1)} p_1, \quad (\text{A.163})$$

$$P_2 = H_2^{(2)} p_2, \quad P_3 = H_3^{(3)} p_3. \quad (\text{A.164})$$

Инвариантность свертки

$$X^P P_P = x^P p_P \quad (\text{A.165})$$

является прямым следствием тетрадного метода.

Псевдофинслероидные специально-релятивистские тетрады $\{H_Q^{(P)}\}$ и $\{H_{(Q)}^P\}$ имеют соответственно компоненты

$$H_0^{(0)} = \frac{V(g; w)}{Q(g; w)}(1 - gw), \quad H_1^{(0)} = H_0^{(1)} = -\frac{V(g; w)}{Q(g; w)}v, \quad H_1^{(1)} = \frac{V(g; w)}{Q(g; w)}, \quad (\text{A.166})$$

$$H_2^{(2)}(g; w) = H_3^{(3)}(g; w) = \frac{V(g; w)}{\sqrt{Q(g; w)}} \quad (\text{A.167})$$

и

$$H_{(0)}^0 = \frac{1}{V(g; w)}, \quad H_{(0)}^1 = H_{(1)}^0 = \frac{1}{V(g; w)}v, \quad H_{(1)}^1 = \frac{1}{V(g; w)}(1 - gw), \quad (\text{A.168})$$

$$H_{(2)}^2(g; w) = H_{(3)}^3(g; w) = \frac{\sqrt{Q(g; w)}}{V(g; w)} \quad (\text{A.169})$$

(для остальных компонент тождественно получается нуль).

Они находятся однозначно из формул (A.66), (A.67) и (A.158) при дополнительном условии, что компонента $H_{(0)}^R$ параллельна четырехмерному вектору движения $\{X^R\}$:

$$H_{(0)}^R(g; X) \parallel X^R. \quad (\text{A.170})$$

Предполагается специально-релятивистское движение, так что $v^1 = v$ и $v^2 = v^3 = 0$. Применение представлений (А.166)–(А.169) к законам (А.160)–(А.161) ведет к кинематическим преобразованиям (А.143)–(А.150).

Укажем, что из (А.167) следует

$$H_2^{(2)} \neq 1 \text{ и } H_3^{(3)} \neq 1 \text{ при } g \neq 0, \quad (\text{А.171})$$

так что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.6. *Псевдофинслероидное обобщение преобразований Лоренца предполагает преодоление представления, что “масштабы, перпендикулярные направлению движения, не деформируются”.*

Справедливо также

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.7. *Кинематическая симметрия*

$$H_Q^{(P)} = H_P^{(Q)} \text{ и } H_{(P)}^Q = H_{(Q)}^P$$

сохраняется при псевдофинслероидном обобщении.

Обобщение закона сложения релятивистских относительных скоростей непосредственно вытекает из (А.143)–(А.146). Оно записывается так:

$$v_3 = v_2 \oplus v_1 : \quad v_3 = \frac{v_2 + v_1 - gv_2v_1}{1 + v_2v_1}. \quad (\text{А.172})$$

Обратный закон вычитания имеет вид

$$v_2 = v_3 \ominus v_1 : \quad v_2 = \frac{v_3 - v_1}{1 - v_1v_3 - gv_1}, \quad (\text{А.173})$$

что влечет за собой соотношения

$$\frac{1}{v_3 \ominus v_1} + \frac{1}{v_1 \ominus v_3} = g \quad (\text{А.174})$$

и

$$\ominus v = -\frac{v}{1 - gv}. \quad (\text{А.175})$$

Нетрудно проверить справедливость группового свойства

$$(v_1 \oplus v_2) \oplus v_3 = v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3). \quad (\text{А.176})$$

Финслерово обобщение дает поправки к принципу взаимности относительных скоростей (который гласит, что скорость СО S , измеряемая из другой СО S' , равна и противоположна скорости СО S' , измеряемой из S), поскольку формула (А.175) показывает, что $\ominus v \neq -v$ при $g \neq 0$. Вследствие (А.176) финслерово обобщение специальной теории относительности, возникающее в результате выбора метрической функции псевдофинслероидного типа, удовлетворяет требованию, что кинематические преобразования, связывающие пары наблюдателей, *должны образовывать группу.*

Псевдофинслероидные тригонометрические функции

$$\text{Ch } \beta := \frac{1}{2h}(g^+ e^{g+\beta} - g^- e^{g-\beta}), \quad \text{Sh } \beta := \frac{1}{2h}(e^{g+\beta} - e^{g-\beta}), \quad (\text{A.177})$$

$$\text{Ch}^* \beta := \frac{1}{2h}(g_+ e^{g+\beta} - g_- e^{g-\beta}), \quad \text{Sh}^* \beta := \text{Sh } \beta \quad (\text{A.178})$$

(ср. тригонометрические функции (8.39)–(8.40) в Главе 2) позволяют записать \mathcal{E}_g^{SR} -аналог представлений (4.14) из Главы 4 в виде

$$R^0 = R'^0 \text{Ch } \beta + R'^1 \text{Sh } \beta, \quad R^1 = R'^0 \text{Sh } \beta + R'^1 \text{Ch}^* \beta. \quad (\text{A.179})$$

Справедливы тождества

$$\text{Ch } \alpha \text{Ch } \beta + \text{Sh } \alpha \text{Sh } \beta = \text{Ch}(\alpha + \beta), \quad \text{Sh } \alpha \text{Ch } \beta + \text{Ch}^* \alpha \text{Sh } \beta = \text{Sh}(\alpha + \beta), \quad (\text{A.180})$$

$$\text{Ch } \alpha \text{Sh } \beta + \text{Sh } \alpha \text{Ch}^* \beta = \text{Sh}(\alpha + \beta), \quad \text{Sh } \alpha \text{Sh } \beta + \text{Ch}^* \alpha \text{Ch}^* \beta = \text{Ch}^*(\alpha + \beta), \quad (\text{A.181})$$

$$\text{Sh } \alpha \text{Ch}^* \beta + \text{Ch}^* \alpha \text{Sh } \beta + g \text{Sh } \alpha \text{Sh } \beta = \text{Sh}(\alpha + \beta) \quad (\text{A.182})$$

(ср. тождества (8.43)–(8.46) в Главе 2).

Естественно применить к так появляющемуся углу β название *псевдофинслероидный угол*. В специально-релятивистском контексте также естественно называть его *псевдофинслероидной быстротой*. Аналогично свойству (4.17) из Главы 4, выполняется *аддитивность быстрот*

$$\beta'' = \beta + \beta'. \quad (\text{A.183})$$

Следовательно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А.7. *Псевдофинслероидные бусты (А.179) обладают групповым свойством с сохранением закона простого сложения для быстрот.*

При переходе в псевдоевклидов предел получаем просто

$$\text{Ch } \beta \Big|_{g=0} = \text{Ch}^* \beta \Big|_{g=0} = \text{ch } \beta, \quad \text{Sh } \beta \Big|_{g=0} = \text{Sh}^* \beta \Big|_{g=0} = \text{sh } \beta.$$

Анализу различных псевдофинслероидных релятивистских аспектов были посвящены работы [11-21].

В. Следствия условия постоянства кривизны индикатрисы

Примем наиболее общую точку зрения на возможную структуру метрического тензора в аксиально-симметричном случае. А именно, воспользуемся формулами (2.1)–(2.11) из Главы 2, введем набор функций $B_A = B_A(w^b)$, $A = 1, 2, 3, 4$, и зададим метрический тензор $\{a_{pq}(w^c)\}$ компонентами

$$a_{NN} = B_1, \quad a_{ab} = B_2 r_{ab} + B_2 w_a w_b, \quad a_{Na} = B_4 w_a. \quad (\text{B.1})$$

Нетрудно проверить, что

$$\det(a_{pq}) = D B_2^{N-2} \det(r_{ab}), \quad (\text{B.2})$$

где

$$D = B_1(B_2 + B_3 w^2) - B_4^2 w^2. \quad (\text{B.3})$$

Ниже будет предполагаться

$$B_2 \neq 0 \quad \text{и} \quad D \neq 0, \quad (\text{B.4})$$

чтобы ограничиться несингулярным случаем

$$\det(a_{pq}) \neq 0. \quad (\text{B.5})$$

Предположим также для определенности, что

$$a_{pq}(R) R^p R^q \geq 0 \quad \text{и} \quad B_1 > 0. \quad (\text{B.6})$$

Поскольку $\text{sign } D = \text{sign } B_2$ (ср. знаки у функций D и B_2 при $w \rightarrow 0$), имеем

$$e_1 := \text{sign}[\det(a_{pq})] = \text{sign}(B_2^{N-1}), \quad (\text{B.7})$$

так что

$$e_1 = 1, \quad \text{если} \quad B_2^{N-1} > 0, \quad \text{и} \quad e_1 = -1, \quad \text{если} \quad B_2^{N-1} < 0.$$

Определяя ассоциируемую финслерову метрическую функцию

$$F = a_{pq} R^p R^q \quad (\text{B.8})$$

и вводя генерирующую метрическую функцию V согласно

$$F = R^N V \quad (\text{B.9})$$

(ср. (4.46) в Главе 1), с помощью (B.1) получаем представление

$$V^2 = B_1 + (B_2 + B_4)w^2 + (B_4 + B_3 w^2)w^2. \quad (\text{B.10})$$

Компоненты взаимного тензора имеют вид

$$a^{NN} = B^1, \quad a^{ab} = B^2 r^{ab} + B^3 w^a w^b, \quad a^{Na} = B^4 w^a \quad (\text{B.11})$$

$(r^{ab}r_{bc} = \delta_c^a)$. Из условия взаимности $a^{pq}\overline{a_{qr}} = \delta_r^p$ вытекают соотношения

$$B^1 = (B_2 + B_3w^2)D^{-1}, \quad B^2 = (B_2)^{-1}, \quad B^3 = B^2(B_4^2 - B_1B_3)D^{-1}, \quad B^4 = -B_4D^{-1}, \quad (\text{B.12})$$

из которых в частности следует, что

$$B^2 + (B^1 + B^3 - 2B^4)w^2 = V^2D^{-1}, \quad 2B^4 - B^1 = -(B_2 + B_4)D^{-1}. \quad (\text{B.13})$$

Если построить тензор $\{A_{pqr}\}$ с компонентами

$$A_{pqr} := \frac{1}{2} \frac{\partial a_{pq}}{\partial R^r}, \quad (\text{B.14})$$

то в финслеровом случае он должен удовлетворять условию

$$R^p A_{pqr} = 0 \quad (\text{B.15})$$

(см. (3.43) в Главе 1).

Ниже штрихом мы будем обозначать производную по \sqrt{w} . Справедлива

ТЕОРЕМА В.1. *Тензор $\{a_{pq}\}$, задаваемый компонентами (В.1), является финслеровым метрическим тензором тогда и только тогда, когда входящие в (В.1) функции удовлетворяют условиям*

$$B_4 = -B_3w^2, \quad B_3 = 2B'_2, \quad 2B'_1 + 2B'_4w^2 + B_4 = 0. \quad (\text{B.16})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисление компонент (В.14) дает

$$2R^N A_{NNN} = -2B'_1w^2, \quad 2R^N A_{NNc} = 2B'_1w_c, \quad (\text{B.17a})$$

$$2R^N A_{aNN} = -(B_4 + 2B'_4w^2)w_a, \quad 2R^N A_{Nac} = B_4r_{ac} + 2B'_4w_a w_c, \quad (\text{B.17b})$$

$$2R^N A_{abN} = -2B'_2w^2r_{ab} - 2(B_3 + B'_3w^2)w_a w_b, \quad (\text{B.17c})$$

$$2R^N A_{abc} = 2B'_2r_{ab}w_c + 2B'_3w_a w_b w_c + B_3(r_{ac}w_b + r_{cb}w_a); \quad (\text{B.17d})$$

отсюда следует

$$2R^p A_{Npc} = (2B'_1 + 2B'_4w^2 + B_4)w_c \quad (\text{B.18})$$

и

$$2R^p A_{apc} = (B_4 + B_3w^2)r_{ac} + (2B'_2 + 2B'_2w^2 + B_3 + 2B_4)w_a w_c, \quad (\text{B.19})$$

а также

$$2R^p A_{NpN} = -2R^p A_{Npc}w^c, \quad 2R^p A_{apN} = -2R^p A_{apc}w^c.$$

Требую, чтобы правые части в (В.18) и (В.19) были равны нулю в соответствии с (В.15), получаем равенства (В.16). Теорема доказана.

Ниже мы рассматриваем только финслеров случай тензора (В.1), производя замены

$$a_{pq} \rightarrow g_{pq}, \quad A_{pqr} \rightarrow C_{pqr}, \quad (\text{В.20})$$

чтобы использовать принятые в Главе 1 обозначения.

Справедлива

ТЕОРЕМА В.2. *Метрический тензор $\{a_{pq}\}$, задаваемый компонентами (В.1), является (псевдо)евклидовым метрическим тензором тогда и только тогда, когда $B'_2 = 0$.*

Для доказательства достаточно внимательно сравнить (В.12) с (В.13).

Имея ввиду эту теорему, ниже мы всегда будем предполагать

$$B'_2 \neq 0. \quad (\text{В.21})$$

Первое равенство в списке (В.16) обращает в нуль последний член в (В.10). В рассматриваемом случае компоненты ковариантного вектора (см. формулу (2.8) в Главе 1) равны

$$R_a = B_2 r_{ab} R^b, \quad R_N = (B_1 + B_4 w^2) R^N, \quad (\text{В.22})$$

а для компонент углового метрического тензора (см. (2.21) в Главе 1) получаем выражения

$$h_{ab} = B_2 r_{ab} + (B_3 - B_2^2 V^{-2}) w_a w_b, \quad (\text{В.23a})$$

$$h_{Nb} = [B_4 - B_2(B_1 + B_4 w^2) V^{-2}] w_a = -w_a h_{NN} w^{-2} = -D V^{-2} w_a, \quad (\text{В.23b})$$

$$h_{NN} = B_1 - (B_1 + B_4 w^2) V^{-2} = D V^{-2} w^2, \quad (\text{В.23c})$$

где было принято во внимание тождество

$$B_2^2 w^2 + (B_4 - B_2) V^2 = -D. \quad (\text{В.24})$$

Будучи выраженным через входящие в (В.11) коэффициенты, условие $B_4 = -B_3 w^2$ (см. (В.16)) имеет вид

$$B^4 (B^2 - B^4 w^2) + B^1 B^3 w^2 = 0. \quad (\text{В.25})$$

Нетрудно также проверить тождества

$$B^2 + B^3 w^2 = B_1 D^{-1}, \quad B^1 - B^4 = B_2 D^{-1} \quad (\text{В.26})$$

вместе с равенствами

$$(V^2)' = B_2, \quad (\text{В.27})$$

$$D' = \left(\frac{1}{2} B_3 - B'_4 \right) V^2. \quad (\text{В.28})$$

Указанные в (В.16) условия имеют своим следствием симметричность тензора $\{A_{pqr}\}$ по всем своим индексам и упрощают представления (В.17):

$$2R^N A_{NN} = \rho_N, \quad 2R^N A_{NNa} = \rho_1 w_a, \quad (\text{В.29a})$$

$$2R^N A_{Nba} = \rho_2 r_{ab} + \rho_3 w_a w_b, \quad (\text{В.29b})$$

$$2R^N A_{abc} = \rho_4 (w_a r_{bc} + w_b r_{ac} + w_c r_{ab}) + \rho_5 w_a w_b w_c, \quad (\text{В.29c})$$

где

$$\rho_N = -2B'_1 w^2, \quad \rho_1 = 2B'_1 = (-\rho_3 + B_3) w^2, \quad (\text{В.30a})$$

$$\rho_2 = -B_3 w^2 = B_4, \quad \rho_3 = -2(B_3 + B'_3 w^2) = 2B'_4, \quad (\text{В.30b})$$

$$\rho_4 = B_3, \quad \rho_5 = 2B'_3, \quad (\text{В.30c})$$

откуда следует

$$\rho_N = -\rho_1 w^2, \quad \rho_2 = -\rho_4 w^2, \quad 2\rho_4 + \rho_5 w^2 = -\rho_3, \quad \rho_2 + \rho_3 w^2 = -\rho_1. \quad (\text{В.31})$$

Справедлива

ТЕОРЕМА В.3. *Тензор $\{C_{pqr}\}$ имеет структуру*

$$C_{pqr} = a(C_p h_{qr} + C_q h_{pr} + C_r h_{pq}) + (2R^N)^2 b C_p C_q C_r, \quad (\text{В.32})$$

где

$$a = k^{-1} \rho_2 B^2, \quad (\text{В.33})$$

$$b = k^{-3} (\rho_N - 3\rho_2 B^2 D V^{-2} w^2), \quad (\text{В.34})$$

$$k = (N - 2) B^2 \rho_2 - \rho_1 V^2 D^{-1} \quad (\text{В.35})$$

и использована свертка

$$C_p = C_{pqr} a^{qr}. \quad (\text{В.36})$$

Доказательство получается непосредственно после использования формул (В.29)–(В.31). Условия (В.4)–(В.6) выполняются. Вид (В.32) является ближайшим обобщением представления $C_{pqr} = m C_p C_q C_r$, справедливого в любом 2-мерном финслеровом пространстве.

Теперь мы можем выяснить структуру тензора кривизны $\{S_{pqrs}\}$ (см. (3.9) в Главе 1). Прямые вычисления дают следующий простой результат:

$$F^2 S_{pqrs} = S(h_{pr}h_{qs} - h_{ps}h_{qr}) + D_{pqrs}, \quad (\text{B.37})$$

где

$$D_{Nqrs} = D_{pNrs} = D_{pqNs} = D_{pqrN} = 0, \quad (\text{B.38})$$

$$D_{aebc} = \tilde{S}(k_{ab}h_{ec} - k_{ac}h_{eb} - k_{eb}h_{ac} + k_{ec}h_{ab}) \quad (\text{B.39})$$

и

$$k_{ab} = w_a h_{Nb} + \frac{1}{2} w h_{ab}, \quad (\text{B.40})$$

а также

$$S = \frac{1}{4} B_2^{-2} B_3 D^{-2} V^4 (Z - D\rho_4) w^2, \quad (\text{B.41})$$

$$\tilde{S} = -\frac{1}{4} B_3 B_2^{-2} D^{-2} V^4 Z \quad (\text{B.42})$$

с функцией

$$Z = B_2(\rho_3 - \rho_4)V^2 + 2D\rho_4. \quad (\text{B.43})$$

Нетрудно заметить, что

$$R^a D_{aebc} = 0 \quad (\text{B.44})$$

и

$$D_{aebc} = 0 \quad \text{в трехмерном случае } N = 3. \quad (\text{B.45})$$

Если мы рассмотрим свертки $S_{pq} := a^{rs} S_{prqs}$, а также $D_{ab} := a^{ec} S_{aebc}$, то из (B.37) получим

$$F^2 S_{pq} = (N - 2) S h_{pq} + D_{pq} \quad (\text{B.46})$$

со значениями $D_{NN} = D_{Na} = D_{aN} = 0$ и $D_{ab} := (N - 3) D^{-1} V^2 \tilde{S}(h_{NN} h_{ab} - h_{Na} h_{Nb})$. Были использованы тождества

$$h_{ab} a^{ab} = N - 1 - (B_2 + B_4) D^{-1} h_{NN}, \quad h_{ec} h_{ab} a^{eb} = h_{ac} - (B_2 + B_4) D^{-1} h_{Na} h_{Nc},$$

$$h_{ec} h_{Nb} a^{eb} = B_1 V^{-2} h_{Nc}, \quad h_{ab} w^d a^{eb} r_{ed} = -B_1 D^{-1} h_{Na},$$

$$h_{Nb} w^d a^{eb} r_{de} = -B_1 D^{-1} h_{NN}, \quad h_{Ne} h_{Nc} a^{ec} = B_1 V^{-2} h_{NN}$$

(они получаются после использования формул (B.13), (B.23) и (B.26)).

Из (B.37)–(B.40) следует представление

$$F^2 S_{pqrs} = h_{pr} M_{qs} - h_{ps} M_{qr} - h_{qr} M_{ps} + h_{qs} M_{pr}, \quad (\text{B.47})$$

где $M_{qs} = \frac{1}{2} S h_{qs} + \tilde{S} k_{qs}$ и $k_{00} = k_{0a} = k_{a0} = 0$. Для тензора кривизны вида (B.47) вейлевский конформный тензор тождественно обращается в нуль. Поэтому верна

ТЕОРЕМА В.4. *Индикатриса любого финслерова пространства рассматриваемого аксиально-симметричного типа в размерности $N > 4$ является конформно плоским пространством.*

В $(N = 4)$ -мерных пространствах тензор кривизны имеет структуру вида (В.47) (см. (4.39) в Главе 1).

Скаляр \tilde{S} (см. (В.41)) сводится к нулю тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{Z} = 0. \quad (\text{В.48})$$

Сравнивая (В.42) с (В.28), можно сразу сделать вывод, что (В.45) эквивалентно условию

$$D = eCB_2^2, \quad C > 0, \quad (\text{В.49})$$

где C — произвольная положительная константа и

$$e = \text{sign } B_2. \quad (\text{В.50})$$

Подставляя (В.49) в (В.3) и используя (В.16) вместе с (В.27), находим, что условие (В.48) выполняется, только если генерирующая метрическая функция V удовлетворяет уравнению

$$[2(V^2)''w^2 + (V^2)']V^2 - (eC + w^2)[(V^2)']^2 = 0. \quad (\text{В.51a})$$

Оно может быть переписано в виде

$$2VV''w^2 + VV' - 2eC(V')^2 = 0. \quad (\text{В.51b})$$

Подстановка

$$V^2 = \exp \int \frac{dw}{Q(w)} \quad (\text{В.52})$$

существенно упрощает уравнение (В.51) и приводит к решению

$$Q = eC + C_1w + w^2, \quad (\text{В.53})$$

где C_1 — константа интегрирования. При таком решении получаются следующие равенства:

$$B_1 = V^2Q^{-2}[eCw^2 + (eC + C_1w)^2], \quad B_2 = V^2Q^{-1}, \quad (\text{В.54})$$

$$B_3 = -V^2Q^{-2}C_1w^{-1}, \quad B_4 = V^2Q^{-2}C_1w, \quad (\text{В.55})$$

$$D = eCV^4Q^{-2}, \quad (\text{В.56})$$

а функция (В.39) сводится к константе

$$S = -\frac{eC_1^2}{4C}. \quad (\text{В.57})$$

Введем величину

$$D_1 := C_1^2 - 4eC. \quad (\text{B.58})$$

Из (B.51)–(B.52) после интегрирования функция V находится в явном виде:

$$V^2 = C_2 Q \exp \frac{-2w}{\nu C_1^{1/2} + w}, \quad \text{если } D_1 = 0, \quad (\text{B.59})$$

где $\nu = \text{sign } C_1$;

$$V^2 = C_2 C_3 Q \exp \left[2C_1 (-D_1)^{-1/2} \text{arctg} \frac{(-D_1)^{1/2}}{C_1 + 2w} \right], \quad \text{если } D_1 < 0, \quad (\text{B.60})$$

где

$$C_3 = \exp \left[-2C_1 (-D_1)^{-1/2} \text{arctg} \frac{(-D_1)^{1/2}}{C_1} \right];$$

а также

$$\begin{aligned} V^2 &= C_2 C (1 - k_+^{-1} w)^{2k_+ / (k_+ - k_-)} (1 - k_-^{-1} w)^{-2k_- / (k_+ - k_-)} \\ &= C_2 |Q| \left| \frac{1 - k_+^{-1} w}{1 - k_-^{-1} w} \right|^{-C_1 / (D_1)^{1/2}}, \quad \text{если } D_1 > 0, \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

где

$$k_{\pm} = \frac{1}{2} (-C_1 \pm D_1^{1/2}) \quad (\text{B.62})$$

и

$$Q = (k_+ - w)(k_- - w). \quad (\text{B.63})$$

Здесь C_2 — положительная константа. Во всех рассмотренных выше случаях функция V нормирована так, что

$$V^2 \Big|_{w=0} = C_2 C.$$

Функция (B.60) стремится к функции (B.59) при $D_1 \rightarrow 0$.

Из (B.57) следует

$$S = -1 \quad \text{и} \quad e = 1 \quad \text{в случае (B.59);}$$

$$-1 < S = 0 \quad \text{и} \quad e = 1 \quad \text{в случае (B.60);}$$

$$S < -1, \quad \text{если } e = 1, \quad \text{и} \quad S > 0, \quad \text{если } e = -1, \quad \text{в случае (B.61).}$$

Решения охватывают все возможные значения для величины S .

При $\mathcal{Z} = 0$ тензор $\{D_{pqrs}\}$ тождественно равен нулю (см. формулы (B.38), (B.39) и (B.42)) и вследствие (B.37) получается простое равенство

$$F^2 S_{pqrs} = S(h_{pr}h_{qs} - h_{ps}h_{qr}). \quad (\text{B.64})$$

Используя его и учитывая формулы (4.34) и (4.48) из Главы 1, приходим к выводу, что в рассматриваемых случаях тензор кривизны индикатрисы имеет простой вид

$$R_{pqrs}^* = (1 + S)(g_{pr}^*g_{qs}^* - g_{ps}^*g_{qr}^*). \quad (\text{B.65})$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что индикатриса является пространством постоянной кривизны и что эта кривизна равна

$$\mathcal{R}_{\text{Indicatrix}} = e(1 + S) \equiv -\frac{1}{4}D_1C^{-1}. \quad (\text{B.66})$$

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА В.5. *Если для $(N > 2)$ -мерного пространства генерирующая метрическая функция V принадлежит классу (B.59)–(B.61), то индикатриса является пространством постоянной кривизны со значением (B.66).*

Верно ли обратное утверждение? При $N > 3$ оно верно, поскольку в случае постоянства кривизны индикатрисы тензор кривизны имеет характерное строение (вида (4.42) из Главы 1), в котором S при $N > 3$ должно быть константой, а значит $\tilde{S} = 0$. Итак, верна

ТЕОРЕМА В.6. *При размерности $N > 3$ генерирующие метрические функции (B.59)–(B.61) исчерпывают (локально) все аксиально-симметричные финслеровы случаи, обладающие свойством, что ассоциируемая с ними индикатриса является пространством постоянной кривизны.*

Возможность распространить такую теорему на трехмерный случай не очевидна, поскольку предполагает решение уравнения $S' = 0$, где S — функция (B.41). Мы оставляем такую задачу будущим исследователям.

ЗАМЕЧАНИЕ. Читатель может легко проверить, что при отождествлении $e_1 = 1$, $C = 1$ и $C_1 = g$ решение (B.60) эквивалентно использованной выше в Главе 2 метрической функции финслероидного типа (задаваемой формулами (2.26)–(2.38) в Главе 2), и при этом $D_1 = -4h^2$ (h — константа (2.13) из Главы 2), функция (B.53) эквивалентна функции (2.22) из Главы 2, а формула (B.66) для кривизны индикатрисы эквивалентна формуле (2.69) из Главы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение (B.61) соответствует отрицательности кривизны $\mathcal{R}_{\text{Indicatrix}} < 0$ (и включает релятивистский случай; см. Приложение А).

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение (B.59) реализуется при $\mathcal{R}_{\text{Indicatrix}} = 0$.

В данном Приложении В мы воспроизвели основное содержание статьи [10].

ПОСЛЕСЛОВИЕ

В евклидовой геометрии индикатрисой является сфера (поверхность концов векторов единичной длины, выходящих из фиксированной точки). Переход к финслеровым метрикам предполагает отказ от полной изотропности (равноправности направлений) пространства. Априори вопрос о том, как обобщать евклидову метрическую функцию на финслеров случай, выглядит чрезмерно общим и весьма неясным для нахождения конкретного ответа. Если же основываться на предположении постоянства кривизны индикатрисы и ее строгой выпуклости, то открываются конструктивные методы выделения классов финслеровых метрик и выхода за рамки евклидовой геометрии. При этом появляются возможности ввести угол и скалярное произведение, основываясь на идее выводить угловую меру из решений уравнений геодезических, коль скоро решения находятся в явном и достаточно простом виде. Следствием постоянства кривизны индикатрисы является инвариантность финслероидной метрической функции относительно группы (вообще говоря нелинейных) вращений. Степень неевклидовости измеряется одним характерным параметром g . Подход допускает естественное и привлекательное двуметрическое обобщение. Легко перенести рассмотрение на псевдофинслероидный случай, что дает основу для построения финслер-релятивистских теорий и соответствующего обобщения лоренцевых преобразований.

Конечно, как бы ни было глубоко мотивировано стремление выйти за узкие границы “квадратичных представлений”, речь не может идти о “полном преодолении квадратичной метрики”. Иерархия геометрий глубоко коренится в обобщениях. В самой римановой геометрии присутствуют и работают идеи и методы евклидовой геометрии. В работах по финслеровой геометрии многие авторы использовали “ассоциируемую риманову геометрию”, вводили “риманову связность” или “финслер-риманову связность”, “ассоциируемую относительную риманову геометрию вдоль векторных полей”, строили “соприкасающееся риманово пространство” и “риманову развертку финслерова пространства вдоль кривой”, и т. п. В метрических теориях постоянно использовалась ассоциируемая евклидова геометрия.

Евклидовы представления сформировали и продолжают предопределять (и ограничивать!) геометрически образ мыслей и логику исследователей, сам характер проводимого ими анализа. Например, риманова геометрия с самого исходного определения основывается на квадратичной форме (и даже иногда просто называлась “геометрией, порождаемой квадратичной формой”), теории расслоенных пространств также используют квадратичный метод (но разнообразнее, чем риманова геометрия), лагранжианы в теориях физических полей как правило квадратичны по производным, энергия и импульс релятивистской частицы связаны квадратичной формой и т. д. Специальная и общая теория относительности так же основываются строго на квадратичной форме, но теперь уже содержащей как плюс +, так и минус -; к этому типу относится и геометрия Лобачевского.

В книге были систематически введены исходные определения и подробно изложены результаты вычислений основных величин для финслероидной геометрии, предполагающей наличие ровно одного выделенного направления. Очевидно, имеется множество путей развития соответствующих новых научных направлений в метрической дифференциальной геометрии, теоретической и математической физике и в других областях. Можно также развивать методы поиска и моделирования различных неевклидовых эффектов, используя финслероид вместо привычного единичного шара. В реальном физическом мире анизотропия — поистине всюду, но возникновение финслероидной метрики предполагает, что анизотропия принимает “метрический” характер. Интересна проблема нахождения двуосного финслероида — ее решение позволило бы анализировать ситуации, в которых присутствует два выделенных направления. Расслоенные реализации финслероидной геометрии (еще не созданные) могут оказаться тесно связанными с теорией калибровочных полей.

Псевдофинслероидный вариант развитой выше геометрии непосредственно применим к релятивистским теориям. При этом асимметрия относится к временной координате, а собственно пространство остается изотропным (отсутствие в нем геометрически выделенных направлений). Понятно, что такая реализация геометрии предполагает асимметрию между прошлым и будущим, что в свою очередь для физики элементарных частиц может означать асимметрию в свойствах частиц и античастиц. И мерой всех таких асимметрий служит один характерный параметр g . Можно предложить различные актуальные программы соответствующего обобщения и перестройки релятивистских теорий. Точно также, как финслероид порождает положительно-определенную геометрию, псевдофинслероид предопределяет обобщение псевдоевклидовой геометрии.

Предлагаемая вниманию читателя книга — “авторская”, в том смысле, что она излагает результаты исследований финслероидных пространств автором книги за многие прошедшие годы; все приведенные в настоящей книге результаты были предварительно опубликованы им в отечественной и зарубежной научной литературе. Автор надеется, что уже в ближайшие годы увлекательная тема построения финслероидных геометрий и их приложений начнет становиться предметом серьезного и пристального внимания как опытных исследователей, так и молодых научных энтузиастов.

Список литературы

- [1] *Cartan E.* Les espaces de Finsler. Actualites 79. — Paris: Hermann, 1934.
- [2] *Busemann H.* Angular Measure and Integral Curvature // *Canad. J. Math.* 1949. V. 1. P. 279.
- [3] *Буземан Г.* Геометрия геодезических. — М.: Физматгиз, 1962.
- [4] *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. — М.: Наука, 1981.
- [5] *Asanov G. S.* Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. — Dordrecht: D. Reidel Publ. Comp., 1985.
- [6] *Ingarden R. S.* Differential Geometry and Physics // *Tensor.* 1976. V. 30. P. 201.
- [7] *Kozma I., Tamassy L.* Finsler Geometry without Line Element Faced to Application // *Reports on Mathematical Physics.* 2003. V. 42. P. 77.
- [8] *Bao D., Chern S. S., Shen Z.* An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. — N.Y.; Berlin: Springer, 2000.
- [9] *Thompson A. C.* Minkowski Geometry // *Encycl. of Math. and its Appl.* V. 63. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [10] *Asanov G. S.* Finsler Cases of GF-Spaces // *Aequationes Mathematicae.* 1995. V. 49. P. 234.
- [11] *Асанов Г. С.* Финслерово релятивистское обобщение, совместимое с пространственной изотропностью // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1994. № 1. С. 19.
- [12] *Асанов Г. С.* Финслерова нелинейная инвариантность и преобразования Лоренца // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1996. № 2. С. 8.
- [13] *Асанов Г. С.* Финслеров подход к теории квантованных полей. Положительность энергии скалярного поля и обобщение функций Паули-Йордана // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1998. № 3. С. 15.
- [14] *Asanov G. S.* Finslerian Metric Functions over the Product $R \times M$ and their Potential Applications // *Reports on Mathematical Physics.* 1998. V. 41. P. 117.
- [15] *Asanov G. S.* Finslerian Extension of Lorentz Transformations // *Reports on Mathematical Physics.* 1998. V. 42. P. 273.
- [16] *Asanov G. S.* Finslerian future-past asymmetry // *Reports on Mathematical Physics.* 2000. V. 46. P. 383.
- [17] *Asanov G. S.* The Finsler-type recasting of Lorentz transformations. The SR Finslerian metric function and Hamiltonian function. The light signal velocity case. Implications. // In: *Proceedings of PIRT-VII*, — London, Sunderland, 2000. P. 40.
- [18] *Asanov G. S.* Can neutrinos and high-energy particles test Finsler metric of space-time? — E-print Arxiv: hep-ph/0009305.
- [19] *Asanov G. S.* Finslerian extension of Lorentz transformations and first-order censorship theorem // *Foundations of Physics.* 2002. V. 15. P. 199.
- [20] *Asanov G. S.* Finsleroid-Relativistic space endowed with angle. — E-print ArXiv: math-ph/0406029.
- [21] *Asanov G. S.* Finsleroid space with angle and scalar product // *Publ. Math. Debrecen.* 2005. V. 67. P. 777; E-print ArXiv: math.MG/0402013.

Предметный указатель

- Аддитивность угла 9
- быстрот 146
- Аксиальная симметрия 7, 8, 147
- Анизотропия 9, 156
- Асимметрия 121, 125, 126
- Бусты финслероидные 111, 120
- псевдофинслероидные 146
- Вектор единичный 14
- ковариантный 13
- контравариантный 34
- Векторное пространство 12
- центрированное 34
- Вращения евклидовы 112
- инфинитезимальные 118
- метрические 113
- нелинейные 113
- псевдофинслероидные 139
- финслероидные 111
- Гамильтонова функция 5, 22, 45, 127
- Геодезические квазиевклидовы 96
- , решения
- — с граничными данными 99
- — с начальными данными 102
- псевдофинслероидные 138
- финслеровы 25
- финслероидные 66
- Геометрия
- евклидова 4
- псевдоевклидова 121
- риманова 155
- финслерова 6, 155
- Двувекторный репер 106
- тензор 81, 104
- — метрический 81
- Дефицит угла 79
- Длина вектора 11
- дуги 25, 27, 33
- Единичный вектор 14, 88
- Заряд геометрический 53
- Индикатриса 16, 40
- , индуцированный тензор 18
- , тензор кривизны 19
- , параметрическое представление 17
- , постоянной кривизны 154
- Инерциальная система отсчета 141
- Квадратичная форма 4, 155
- характеристическая 35, 45
- Квазиевклидов метрический тензор 88
- тензор кривизны 92
- угол 97
- , коэффициенты вращения Риччи 95
- Квазиевклидово отображение
- преобразование 83
- — индикатрисы и финслероида 84, 85
- —, псевдослучай 134
- —, уравнение геодезических 92, 96
- Ковариантный вектор 13
- Ко-индикатриса 23
- Конформное преобразование 5, 62, 95
- Конформный множитель 5, 62, 95
- Ко-пространство 23, 44, 46
- Ко-финслероид 49
- Кривизна индикатрисы 20
- — отрицательная 129
- — положительная 49
- на сфере 94
- Лучи 26
- Метрическая функция 12
- — гамильтонова 22
- — генерирующая 21, 37, 47
- — евклидова 84
- — псевдоевклидова 134
- — псевдофинслероидная 127
- — финслерова 12
- — финслероидная 36
- Метрический тензор 13
- шар 10
- — двувекторный 81
- — квазиевклидов 7, 88
- — псевдофинслероидный 152
- — угловой 14
- — финслеров 13
- — финслероидный 10
- —, сигнатура 39, 128

- Неравенство треугольника 10, 11
 Норма вектора 11
 Однородность 11, 16
 — метрического тензора 13
 — метрической функции 12
 —, теорема Эйлера 17, 23
 Перпендикулярность 68, 90
 Предельный финслероид 8, 58
 Преобразования лоренцеры
 — метрические 24
 — финслеровы метрические 22
 — — обобщенные 141
 — — — псевдофинслероидные 7, 142
 Проекционные множители 17, 21, 94
 Пространство
 — банахово 5,6
 — квазиевклидово 91
 — конформно плоское 62, 95, 152
 — метрическое 10
 — Минковского 6
 — положительно определенное 37, 39
 — постоянной кривизны 20
 — — положительной кривизны 40
 — — отрицательной кривизны 129
 — псевдофинслероидное 127
 — финслерово 6
 — финслероидное 37, 46
 — хаусдорфово 10
 Псевдофинслероид 7, 127, 128
 Расслоенные пространства 6, 156
 Расстояние между точками 10, 30, 68, 137
 — кратчайшее 27
 Релятивистская кинематика 141
 Репер инвариантный 61
 — ортонормированный 15, 79, 144
 — специальный 60
 — — метрический 113, 115
 Символы Кристоффеля 15, 83, 123
 Скалярное произведение 6, 30, 69, 137
 Скорости, начальная и конечная 71
 — релятивистские 145
 Сумма углов треугольника 8, 30
 Тензор Вейля, конформный 5, 151
 — картановский 14, 39
 — — кривизны 19, 20, 40
 — — пространства
 — — — трехмерного 20
 — — — четырехмерного 20
 Теорема Пифагора 4, 68
 — косинуса 29, 68
 — Эйлера 17, 23
 Треугольник
 —, высота 28
 —, сумма углов 8, 9, 30
 Тригонометрические функции 33
 — — псевдофинслероидные 146
 — — финслероидные 80, 120
 Угол, аддитивность 30
 —, дефицит 79
 — евклидов 33, 83, 97
 — квазиевклидов 97
 — промежуточный 67
 — псевдофинслероидный 146
 — финслероидный 6, 66
 Универсальные соотношения 8
 Фигуратриса 23
 Финслероид 5, 40
 —, вершина 52
 —, площадь поверхности 78
 — предельный 8, 58
 — с закрепленной вершиной 58, 59
 —, объем 78
 — экваториальное сечение 52
 Финслероидные координаты 75
 — вращения 113
 — геодезические 66
 —, заряд 54
 —, оператор Лапласа 79
 Фундаментальная форма 12
 Характерный параметр, g 5, 35
 Центральная точка, “ O ” 26, 89, 97
 down -финслероид 52
 \mathcal{E}_g^{PD} -пространство 127
 \mathcal{E}_g^{SR} -ко-пространство 127
 \mathcal{F}_g^{PD} -финслероид 54
 $\hat{\mathcal{F}}_g^{PD}$ -ко-финслероид 54
 \mathcal{F}_g -гиперboloид 121, 127
 $\hat{\mathcal{F}}_g$ -ко-гиперboloид 121, 127
 g -симметрия 123
 gZ -четность 37, 54
 Maple, программа 54
 up -финслероид 53
 Z -ось 34

Научное издание

АСАНОВ Геннадий Семенович

ФИНСЛЕРОВИДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издательство Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.
119899, Москва, Воробьевы Горы. Лицензия ЛР № 021293 от 18.06.98.

Подписано к печати 08.09.04. Формат 70×100/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 12.9. Тираж 567 экз. Заказ № 10721

Отпечатано в ГУП ППП «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-8279-0047-8



9 78 5827 900474