



ГЕОРГИЙ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ
КУРДЮМОВ

Т. С. Ахромеева
С. П. Курдюмов
Г. Г. Малинецкий
А. А. Самарский

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ И ДИФфуЗИОННЫЙ ХАОС



Москва "Наука"
Главная редакция
физико-математической литературы
1 9 9 2

ББК 22.18
А95
УДК 519.7

А х р о м е е в а Т.С., К у р д ю м о в С.П., М а л и н е ц к и й Г.Г.,
С а м а р с к и й А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. -
М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. - 544 с. - ISBN 5-02-014252-2.

Книга посвящена математическому моделированию процессов в открытых нелинейных системах. В качестве примеров рассматриваются математические модели, возникающие в физике плазмы, теории горения, химической кинетике, при математическом моделировании морфогенеза.

Для научных работников, инженеров, студентов старших курсов, занимающихся изучением открытых нелинейных систем.

Табл. 2. Илл. 204. Библиогр. 434 назв.

А $\frac{1602110000-005}{053(02)-92}$ 18-91

© «Наука». Физматлит, 1992

ISBN 5-02-014252-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. САМООРГАНИЗАЦИЯ И СТАЦИОНАРНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ	5
§ 1.1. Диссипативные структуры и моделирование морфогенеза	13
§ 1.2. Самоорганизация	14
Глава 2. СЛОЖНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ	22
§ 2.1. Модель тепловых структур	32
§ 2.2. Диссипативные структуры в средах с триггерными свойствами	32
Глава 3. ИЕРАРХИЯ УПРОЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ	62
§ 3.1. Универсальное описание в окрестности термодинамической ветви	72
§ 3.2. Иерархия упрощенных моделей для уравнения Курамото – Цузуки	74
§ 3.3. Другие направления исследований	88
Глава 4. ОДНОМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ	97
§ 4.1. Переход к хаосу. Сценарий Фейгенбаума	105
§ 4.2. Переменяемость	106
§ 4.3. Аттракторы одномерных отображений	117
§ 4.4. Метастабильный хаос, кризисы	120
§ 4.5. Систематика циклов	131
Глава 5. ДВУМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ	139
§ 5.1. Характеристики хаотических режимов. Гиперболичность	145
§ 5.2. Разрушение инвариантных торов. Сценарий Рюэля – Такенса	146
Глава 6. КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОСА	164
§ 6.1. Фракталы и сложная упорядоченность	186
§ 6.2. Размерности странных аттракторов	187
§ 6.3. Обобщенные размерности, α -спектр и другие характеристики странных аттракторов	199
	217

§ 6.4.	Определение фрактальной размерности по результатам измерений	235
§ 6.5.	Определение ляпуновских показателей по экспериментальным данным	240
§ 6.6.	О методах построения ζ – векторов	245
§ 6.7.	Экспериментальное исследование маломодового хаоса	252
§ 6.8.	О задачах прогноза поведения хаотических систем	272
Глава 7.	ПЕРЕХОД К ХАОСУ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	275
§ 7.1.	Система Лоренца. Гомоклинический взрыв	280
§ 7.2.	Усложнение аттракторов в динамической системе (3.15)	289
§ 7.3.	Странный аттрактор в динамической системе (3.15)	298
§ 7.4.	Странные аттракторы в системах более высокой размерности	318
Глава 8.	ОТ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ К НЕЛИНЕЙНЫМ СРЕДАМ	334
§ 8.1.	Простейшие автомодельные решения и простые циклы	335
§ 8.2.	Другие автомодельные и пространственно–симметричные решения	340
§ 8.3.	Пространственно–временная упорядоченность, не имеющая аналогов в двухмодовой системе. Задача построения полного набора автомодельных решений	344
Глава 9.	ДИФFUЗИОННЫЙ ХАОС И ДРУГИЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ	354
§ 9.1.	Диффузионный хаос в малых областях	356
§ 9.2.	Хаотические режимы в нелинейных средах и уравнение Курамото – Сивашинского	372
§ 9.3.	Хаос в системах с переносом	376
§ 9.4.	Маломодовый хаос в двух гидродинамических задачах	378
§ 9.5.	Пространственно–временной хаос в системах, близких к интегрируемым	386
§ 9.6.	Априорные оценки размерности аттракторов	391
§ 9.7.	Хаотические режимы в нелинейных средах. Альтернативные подходы	412
Глава 10.	ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ УПОРЯДОЧЕННОСТИ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ	423
§ 10.1.	Упрощенная конечномерная система	425
§ 10.2.	Потеря устойчивости пространственно–однородного решения	429
§ 10.3.	Усложнение решений задачи в частных производных	438
§ 10.4.	Спиральные волны в системах реакция – диффузия	451
§ 10.5.	Спиральные волны в некоторых возбудимых средах	462
Глава 11.	НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР	480
§ 11.1.	Сложные упорядоченные и стохастические режимы в дискретных системах	480
§ 11.2.	Сложная упорядоченность и хаос в пространственно – неоднородных системах	503
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	511
	ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	539

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия большой интерес вызывает изучение нелинейных диссипативных сред. При исследовании таких сред было замечено, что в них часто происходит уменьшение числа степеней свободы, эффективно описывающих систему. В некоторых случаях удается выделить несколько степеней свободы, к которым подстраиваются все остальные. Они определяют динамику процессов и поэтому часто называются *параметрами порядка*. Факт их существования очень важен. При изучении диссипативных систем он позволяет надеяться на их упрощенное описание или же на построение целой *иерархии упрощенных моделей*. Можно ожидать, что на таком пути будет достигнуто понимание многих сложных нелинейных явлений.

В связи с этим особое значение приобретает исследование простейших нелинейных моделей (часто их называют *базовыми*), которые возникают в различных областях естествознания. Такой подход уже позволил выяснить ряд глубоких общих закономерностей, привел к появлению новых идей и понятий (таких, как солитоны, странные аттракторы, диссипативные структуры), помог обнаружить ряд новых явлений.

Уменьшение числа степеней свободы означает, что в системе происходит *самоорганизация*. Другими словами, у нее появляются свойства, которыми не обладает ни одна из подсистем. У целого появляются свойства, которыми не обладают части.

Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, теорию самоорганизации часто называют *синергетикой*. (Дословно – теорией совместного действия.) Этот термин ввел Г.Хакен [193]. Он поясняет его следующим образом:

«Я назвал новую дисциплину синергетикой. В ней исследуется совместное действие многих подсистем (преимущественно одинаковых или нескольких различных видов), в результате которого на макроскопическом уровне возникает структура и соответствующее функционирование. С другой стороны, для нахождения общих принципов, управляющих самоорганизующимися системами, необходимо кооперирование многих различных дисциплин».

Возникновение структур, тесно связанных с диссипативными процессами (или, как их называют, *диссипативных структур*), оказалось общим свойством самых разных нелинейных систем. Сам термин «диссипативная структура» был введен бельгийским ученым И.Пригожиным. Работы ученых брюссельской школы, которую он возглавляет, помогли установить связь между возникновением структур, феноменологическими моделями и представлениями неравновесной термодинамики. Они сыграли большую роль как в теоретическом, так и в экспериментальном изучении упорядоченности в открытых системах.

Вот как характеризуют Г.Николис и И.Пригожин новое понятие, появившееся в естественных науках: «... как удаленность от равновесия, так и нелинейность могут служить причиной возникновения упорядоченности в системе. Между упорядоченностью, устойчивостью и диссипацией возникает в высшей степени нетривиальная связь. Чтобы четче выделить эту связь, мы будем называть упорядоченные конфигурации, появляющиеся вне области устойчивости термодинамической ветви, диссипативными структурами ... Такие структуры могут существовать вдали от равновесия лишь за счет достаточно большого потока энергии и вещества ... Диссипативные структуры являют собой поразительный пример, демонстрирую-

щий способность неравновесности служить источником упорядоченности» [151].

Возникновение упорядоченности в открытых нелинейных системах на первый взгляд кажется парадоксальным. В равновесных системах диссипативные процессы уничтожают любую упорядоченность — устанавливается термодинамическое равновесие. В нелинейных открытых системах диссипация выступает в совершенно ином качестве. Ее совместное действие с другими процессами приводит к возникновению структур, она влияет на их тип, форму, размеры.

При изучении открытых нелинейных систем в последние годы был получен ряд важных результатов. Анализ сравнительно простых математических моделей, таких, как системы «реакция — диффузия», уравнения Лоренца, одномерные отображения ($x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$), стал источником новых идей, привел к разработке ряда математических теорий. Разумеется, использование упрощенных моделей, идей и представлений синергетики не должно подменять глубокого анализа конкретной ситуации. Однако эти представления могут определить направление исследований, что во многих случаях оказывается очень важным. Об этом свидетельствует быстрый рост исследований, где применяются методы и представления теории диссипативных структур, и появление многих содержательных экспериментальных работ, посвященных явлениям самоорганизации. В качестве примеров здесь можно привести исследование сценариев перехода к турбулентности и анализ маломодового хаоса в гидродинамических системах [225], изучение колебательных химических реакций [358], поведения активных биологических сред [166], динамики морфогенетических процессов [32, 273] и ряд других. Оказалось, что для решения многих конкретных задач в физике плазмы, микроэлектронике, гидродинамике, химической кинетике, астрофизике, во многих других областях необходимо ответить на ряд общих вопросов. Каковы механизмы возникновения пространственно-временной упорядоченности в нелинейных средах? Могут ли простые структуры быть объединены в сложные, ка-

ковы законы организации возникающих структур? Как происходит переход от простейших упорядоченных к сложным стохастическим режимам? Существуют ли эффективные способы управления процессами в диссипативных системах? Попытки ответить на эти вопросы позволили выделить некоторые черты, характерные для нелинейных сред. Остановимся на некоторых из них.

Обычно с целого класса начальных данных в таких системах происходит выход на один и тот же установившийся режим, другими словами, наблюдается «забывание» *деталей начальных данных*. Это позволяет поставить вопрос о направлении процессов, об их «цели». Для замкнутых систем ответ на него дает второе начало термодинамики. Для ряда нелинейных сред ответ оказывается аналогичным. С течением времени в них устанавливаются однородные по пространству стационарные распределения. Для моделей, которые их описывают, можно по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями построить функцию Ляпунова, которая и определяет направление процессов [90, 197].

Однако анализ многих математических моделей показывает, что описанная ситуация является не правилом, а исключением. Обычно установившийся режим является более сложным. Его математическим образом является предельное множество, к которому притягиваются траектории в фазовом пространстве системы. Часто его называют *аттрактором*.

В гамильтоновых системах, где энергия сохраняется, ситуация может быть совершенно иной – при мало отличающихся значениях энергии или других интегралов (которые определяются начальными данными) решения не стремятся друг к другу [135].

«Забывание» начальных данных намного упрощает исследование открытых диссипативных систем. Можно ожидать, что в системе будет существовать конечное число различных структур и что для их анализа удастся использовать сравнительно простой математический аппарат.

Исследования показали, что во многих случаях установившиеся режимы в нелинейных диссипативных средах обладают *инвариантно-групповой структурой*. В простейших ситуациях это могут быть автомодельные решения, стационары, бегущие или стоячие волны. Часто наблюдаются также двух- или трехчастотные режимы. Современные методы инвариантно-группового анализа позволяют найти полный набор автомодельных решений изучаемых уравнений [153]. Для большого класса стохастических режимов характерна *масштабная инвариантность* [323]. Аттрактор оказывается подобным себе на разных пространственных масштабах. Инвариантные решения все чаще выступают не как исключения или частные случаи, а как асимптотика большого класса других решений. Таким образом, в зависимости от начальных данных в сравнительно простых диссипативных системах может происходить выход на решения качественно различных типов — стационарные, периодические, многочастотные или стохастические. Такое поведение было зафиксировано и в ряде экспериментальных работ. Например, в работе [376] отмечалось, что в течении Куэтта-Тейлора (движение жидкости между вращающимися цилиндрами) при определенных значениях параметра было зафиксировано более 100 различных установившихся режимов. То есть в одной и той же открытой диссипативной системе ход процессов на развитой стадии, их «цели» могут быть различными.

Наличие нескольких аттракторов тесно связано с новыми возможностями управления процессами в нелинейных средах. В самом деле, в фазовом пространстве можно выделить границы, разделяющие области притяжения различных аттракторов. Малое изменение начальных данных вблизи этой границы может привести к качественно различному поведению на развитой стадии. Это свойство является общим для многих открытых нелинейных систем. В большинстве из них есть определенная область параметров или стадия, где система особенно чувствительна к воздействиям, согласованным с ее внутренними свойствами. (В ряде работ их называют *резонансным возбуждением системы* [121].) Далее мы увидим, что амплитуда и

продолжительность воздействий зачастую менее важны, чем их соответствие свойствам среды (в простейших случаях это может быть определенный профиль начальных данных или определенный тип их симметрии). Резонансное воздействие может существенно изменить ход процессов. Появляется надежда, что исследование внутренних свойств нелинейных сред, изучение законов организации диссипативных структур даст новые инструменты воздействия на сложные системы.

Принципиальную роль в исследовании диссипативных структур и явлений самоорганизации играет использование компьютеров. Оказалось, что анализ большинства нелинейных математических моделей требует сочетания современных аналитических методов с большими сериями расчетов на ЭВМ. Такое сочетание сегодня все чаще называют *вычислительным экспериментом*. Анализ результатов вычислительного эксперимента может приводить к появлению новых понятий и представлений, а иногда и к предсказанию новых явлений.

Если ранее в задачах синергетики основное внимание уделялось стационарным диссипативным структурам, то в последние годы исследователям удалось продвинуться в понимании сложной пространственной и временной упорядоченности. Обзор некоторых важных результатов содержится в этой книге.

Для анализа стохастического поведения во многих случаях не требуется учета огромного количества степеней свободы, оно может быть понято в рамках упрощенных моделей, учитывающих взаимодействие нескольких переменных. Поэтому подход синергетики, связанный с построением иерархии упрощенных моделей, оказывается здесь очень эффективным. Их исследование в ряде случаев позволяет выявить не только качественные, но и универсальные количественные закономерности, характерные для многих нелинейных систем [263].

Двадцать лет назад Р. Фейнман одной из ключевых задач науки будущего считал анализ процессов в нелинейных средах, построение качественной теории нелинейных уравнений в частных производных [190]. За прошедшие годы в этом направлении был сделан важный шаг.

Синергетика представляет собой междисциплинарный подход — она помогает увидеть место конкретных исследований в общей картине, во многих случаях определяет приоритеты, помогает выработать язык, на котором удобно говорить о нелинейных явлениях. Последнее представляется особенно важным. Сейчас быстро возникают и активно развиваются новые научные направления. Поэтому анализ общих представлений, взаимосвязей между ними вызывает особый интерес.

При этом возникают две тенденции. Тенденция к сверхспециализации самого междисциплинарного подхода. Уже появились сборники по биологической синергетике, социосинергетике, синергетике разрушения. И тенденция к переходу на философский уровень, на котором трудно говорить о конкретных задачах. Поэтому все чаще встает вопрос, есть ли у синергетики будущее. Это во многом определяется тем, насколько интересные задачи удастся поставить в различных областях. Это зависит и от того, насколько интересными окажутся ответы на вопросы, поставленные при создании синергетики.

Один из таких вопросов — анализ процессов в нелинейных средах, построение иерархии упрощенных моделей. Результаты последних лет говорят о значительном прогрессе в этой области.

Мы охарактеризуем ряд математических результатов, касающихся сложной пространственной и временной упорядоченности, и приведем ряд физических ситуаций, в которых эти результаты эффективно используются. В книге рассматривается иерархия упрощенных моделей, возникающая в теории систем реакция — диффузия.

Естественно, книга не охватывает очень многих областей, где математическое моделирование нелинейных явлений и идеи синергетики играют фундаментальную роль. Среди них глобальные модели [148], теория гиперциклов Эйгена [Д25], многие математические модели экономики, социологии и психологии. [Д13, Д19, Д22], теория нейронных сетей, позволя-

ющая поставить вопрос о моделировании обучения и саморазвития [Д6], а также множество других.

В последние годы появилось несколько подробных обзоров, посвященных переходу к турбулентности в гидродинамических системах [68]. Поэтому основное внимание мы уделим другим работам, в которых изучается сложная пространственная и временная упорядоченность, прежде всего имея в виду системы типа реакция – диффузия и некоторые другие модели.

Книга рассчитана на сравнительно широкий круг читателей. Вероятно, математикам будет интересно, какие результаты имеют ключевое значение при анализе конкретных математических моделей, а также какие вопросы остаются открытыми. Многим специалистам в области физики, техники, химии, биологии будет полезно познакомиться с рядом современных математических подходов, активно используемых в теории самоорганизации. Большая часть книги доступна студентам старших курсов.

Библиография в этой работе не претендует на полноту. В основном она содержит либо работы, где те или иные результаты изложены в наиболее полной и доступной форме, либо оригинальные работы, в которых можно уточнить важные детали, касающиеся обсуждаемых задач.

Г Л А В А 1

САМООРГАНИЗАЦИЯ И СТАЦИОНАРНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

Важным классом математических моделей, отражающим многие общие свойства нелинейных сред, стали системы типа реакция – диффузия. По-видимому, впервые модель такого типа была использована А.Тьюрингом при математическом моделировании морфогенеза [384]. В этой работе, вышедшей более 35 лет назад, были получены результаты, определившие развитие большого научного направления.

А.Тьюринг выдвинул гипотезу, позволяющую объяснить возникновение морфологических и физиологических различий клеток в ходе развития организма. Он предположил, что возникновение структур в первоначально однородной ткани может быть объяснено диффузионными процессами и простейшими химическими реакциями. Реакции описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Учет диффузионных процессов приводит к системе параболических уравнений

$$u_t = Du_{xx} + Q(u)$$

(u – вектор, Q – векторная функция, D – диагональная матрица).

Если Q – линейная функция, то при $t \rightarrow \infty$ $\|u\| \sim e^{\lambda t}$ (т. е. либо $\|u\| \rightarrow 0$, либо $\|u\| \rightarrow \infty$). Чтобы описывать возникновение структур, функция $Q(u)$ должна быть нелинейна. Нелинейность может быть связана с законом действующих масс (при этом в $Q(u)$ входят произведения концентраций), либо с другими факторами.

Рассмотрим возникновение стационарных диссипативных структур на примере нескольких математических моделей биологии.

§ 1.1. Диссипативные структуры и моделирование морфогенеза

Одной из наиболее интересных задач, стоящих перед современной биологией, является исследование процессов, которые управляют развитием органов, т. е. включают в определенной последовательности и определенном соотношении механизмы их развития. Иногда эту задачу называют *проблемой морфогенеза*.

Современная биология дает достаточно полную картину того, как происходит передача генетической информации от одного поколения клеток к другому и как информация передается в каждой клетке, обеспечивая синтез ферментов. (Ферментами называют органические катализаторы белковой природы, синтезируемые живыми клетками, которые регулируют скорости практически всех биохимических реакций.) Однако использование только этих представлений не дает ответа на другой вопрос: почему клетки различных органов отличаются как морфологически, так и физиологически, и как возникают эти различия (или, как говорят, идет процесс клеточной дифференцировки)? Другими словами, нужно ответить на вопросы: « 1) как регулируется количество того или иного фермента, синтезируемого в данной клетке; 2) почему тот или иной фермент появляется на определенной стадии развития организма; 3) почему в клетках каждого типа образуются свои специфические комплексы белков, хотя все клетки многоклеточного организма содержат одну и ту же генетическую информацию?» [54].

А.Тьюринг предположил, что «инструкции» клеткам, необходимые для клеточной дифференцировки, вырабатываются в ходе коллективного процесса, в котором основными являются химические реакции. Ход рассуждений был таков. Пусть ве-

щество X стимулирует развитие клеток (такие вещества сейчас известны, и их часто называют *активаторами*), Y — замедляет его (и называется *ингибитором*). Учет реакций, в которые вступают X и Y , привел бы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако основной интерес представляют пространственные распределения $X(x, t)$, $Y(x, t)$, на которые существенно влияют диффузионные процессы. Поэтому для моделирования таких явлений естественно воспользоваться системами типа реакция — диффузия. Рассматривая одномерный случай и считая, что на границах области заданы условия отсутствия потоков, получим задачу

$$\begin{aligned} X_t &= D_1 X_{xx} + Q_1(X, Y, \lambda), \\ Y_t &= D_2 Y_{xx} + Q_2(X, Y, \lambda), \\ X_x(a, t) &= X_x(b, t) = Y_x(a, t) = Y_x(b, t) = 0, \\ a &\leq x \leq b, \quad 0 < t < \infty, \\ X(x, 0) &= X_0(x), \quad Y(x, 0) = Y_0(x), \end{aligned} \quad (1.1)$$

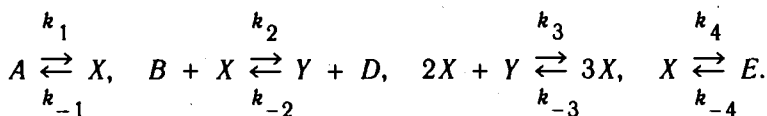
где D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии веществ X и Y , которые остаются постоянными. Нелинейные правые части, которые описывают химические реакции, зависят от параметра λ . Он отражает характеристики ткани, которые постепенно меняются в ходе развития. Начальные данные $X_0(x)$, $Y_0(x)$ считаются близкими к пространственно однородным, но содержат малые случайные возмущения. Оказалось, что эти уравнения могут описывать спонтанное возникновение упорядоченности. При этом принципиальную роль играют диффузионные процессы.

В самом деле, допустим, что в сосредоточенной системе

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= Q_1(X, Y, \lambda), \\ \frac{dY}{dt} &= Q_2(X, Y, \lambda), \\ X(0) &= X_0, \quad Y(0) = Y_0, \quad 0 < t < \infty \end{aligned} \quad (1.2)$$

(\bar{X}, \bar{Y}) при $\lambda = \lambda_0$ является устойчивой особой точкой. Тогда после несложных выкладок можно убедиться, что при определенных соотношениях между коэффициентами диффузии D_1, D_2 и производными $Q_{1X}, Q_{1Y}, Q_{2X}, Q_{2Y}$ в точке $(\bar{X}, \bar{Y}, \lambda_0)$ стационарное решение системы (1.1) будет неустойчивым относительно малых возмущений вида e^{ikx} . Диффузионные процессы здесь выступают в необычной дестабилизирующей роли. Это явление получило название *неустойчивости Тьюринга*.

Оказалось, что неустойчивость Тьюринга характерна для большого класса моделей физики, химии, биологии, других областей. Одной из наиболее известных является *модель брюсселятора*, которая описывает при определенных условиях химические реакции, идущие по схеме



Нелинейные источники определяются формулами

$$Q_1 = A - (B + 1)X + X^2Y, \quad Q_2 = BX - X^2Y. \quad (1.3)$$

Роль параметра обычно играет величина B . Чаще всего исследуется поведение решений на больших характерных временах.

Типичное поведение системы Тьюринга, модели брюсселятора и многих других таково. Когда $\lambda < \lambda_0$, функции $X(x, t), Y(x, t)$ стремятся к пространственно однородному устойчивому решению (\bar{X}, \bar{Y}) . Такое решение часто называют *термодинамической ветвью*. При $\lambda > \lambda_0$ картина качественно меняется. Несмотря на то, что начальные данные близки к однородным, возмущения нарастают, и в среде возникает структура — неоднородное по пространству стационарное распределение концентраций.

Стандартный линейный анализ позволяет определить значение λ_0 и показать, что при $\lambda > \lambda_0$ решение (\bar{X}, \bar{Y}) становится неустойчивым относительно малых возмущений

$\sim e^{ikx}$ [384]. Более сложный нелинейный анализ, связанный с применением асимптотических методов и теории бифуркаций, позволяет найти профили стационарных решений при $\lambda > \lambda_0$ [151, 193]. Когда $\lambda \gg \lambda_0$, необходимо использовать численные методы.

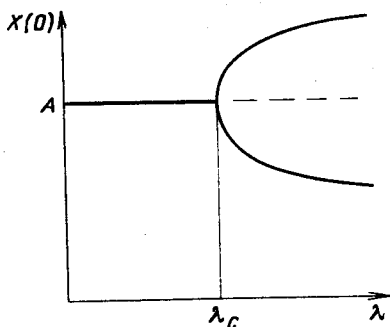


Рис. 1.1

Типичная зависимость амплитуды стационарных структур при $\lambda > \lambda_0$ показана на рис. 1.1. В точке λ_0 у системы появляются два новых стационарных решения. Происходит *ветвление* или *бифуркация*. При $\lambda > \lambda_0$ выход на ту или иную ветвь может определяться *малыми внешними воздействиями* или *флуктуациями*. Принципиальная роль флуктуаций в нелинейных системах, которые усиливаются и могут приводить к возникновению макроскопического порядка, отмечалась в книге [151]. По-видимому, такое поведение характерно для многих нелинейных систем. Путь развития такой системы может быть неединственным, и, зная точки бифуркации, можно эффективно воздействовать на ее эволюцию.

Типичный вид стационарного решения в модели брюсселятора показан на рис. 1.2. В этой модели с целого класса начальных данных происходит выход на одно и то же установившееся решение. Такое «забывание» деталей начальных данных типично для открытых диссипативных систем.

Оно наблюдалось как в модели А.Тьюринга, так и во многих других системах типа реакция – диффузия, которые использовались при математическом описании морфогенеза

[32, 166, 273, 274, 331]. Подробно возникновение диссипативных структур в одномерном и многомерном случаях изучалось для модели, предложенной А.Гирером и М.Мейнхардтом, в которой

$$Q_1 = \rho + kX^2 / Y - \mu X, \quad Q_2 = cX^2 - \nu Y, \quad (1.4)$$

где ρ, k, μ, c, ν — постоянные.

Поведение решений задачи (1.1), (1.4) согласуется с рядом имеющихся наблюдений и проведенных экспериментов. Например, если «отрезать» часть диссипативной структуры (то есть в момент $t = t^1$, положить $X = \bar{X}, Y = \bar{Y}$ на участке $0 < l_1 < x < l$), то возникнет волна «самодостройки», и опять появится структура. Такую волну естественно сопоставить с явлением регенерации.

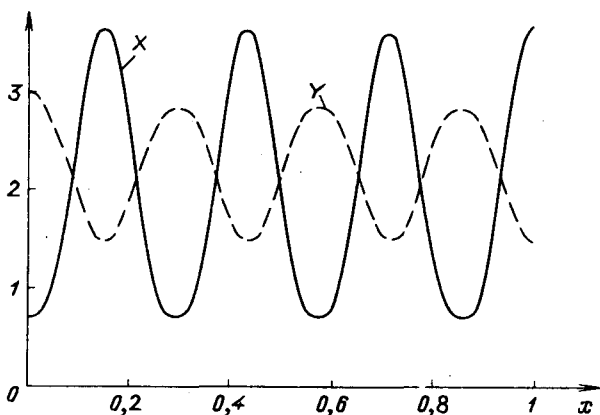


Рис. 1.2. Пример стационарной диссипативной структуры в модели брюсселятора. Параметры расчета: $A = 2, B = 4,6, l = 1, D_1 = 0,0016, D_2 = 0,008$

Проводилось сравнение предсказаний модели (1.1), (1.4) с морфогенезом у простейших многоклеточных организмов [32, 273, 274, 331]. Многомерные обобщения этой системы позволяют описывать рост листьев на стебле растения. В зависимости от параметров модели расположение листьев оказывается различным [331].

Математическое описание морфогенеза является сложной задачей. В зависимости от того, какие черты этого явления представляются наиболее важными, приходится использовать различные методы исследования, разрабатывать новые математические теории. Обратим внимание на несколько направлений, развивающихся в последние годы.

Оказалось, что в ряде случаев наиболее существенными являются не взаимодействие активатора и ингибитора, а механические напряжения ткани и химические вещества, которые на них воздействуют. Это привело к появлению механических моделей морфогенеза. В простейшем случае они сводятся к системе параболического и эллиптического уравнений [32, 33]. Пример более сложной механической модели, учитывающей изменение плотности клеток, плотности межклеточной матрицы и ее смещения, был построен в работе [321]

$$n_t = D_1 n_{xx} - D_2 n_{xxxx} - \alpha [n(\rho + \alpha^2 \rho_{xx})_x]_x - [nu_t]_x + rn(1-n),$$

$$\mu_1 u_{xxt} + \mu_2 u_{xx} + \tau [n(\rho + \beta \rho_{xx})]_x - \text{sup} = 0,$$

$$\rho_t + (\rho u_t)_x = 0.$$

Судя по проведенному анализу, эта модель может описывать большой набор диссипативных структур различных типов.

В системах реакция – диффузия существенной оказывается длина области. Можно изменить количество структур и их конфигурацию, меняя параметр l (например, произвольно увеличивая его). Вместе с тем, в природе рост происходит только до определенного предела. Размеры растущего организма оказываются обусловлены внутренними причинами, а не ограничениями, накладываемыми извне. Поэтому один из подходов к моделированию морфогенеза связан с использованием уравнений, описывающих локализованные процессы [121]. Диссипативные структуры в этом случае определяются не краевыми условиями, а внутренними свойствами нелинейной среды. Примеры таких систем мы рассмотрим в следующей главе.

Все упоминавшиеся модели можно рассматривать как развитие идеи А.Тьюринга – во всех случаях изучалась непрерывная среда, процессы в которой описывались уравнениями в частных производных. Однако возможны и альтернативные подходы.

Большую известность получила книга Р.Тома, посвященная моделированию морфогенеза [381]. В процессе развития организма происходит ряд качественных скачков (например, связанных с потерей различных симметрий). Эффективное описание таких переходов в системах, зависящих от нескольких параметров, удается дать лишь для сравнительно простого класса объектов, который рассматривает теория катастроф

$$\dot{x} = - \frac{\partial U(x, \lambda)}{\partial x}$$

(x и λ здесь вектора). В отличие от подхода Тьюринга, здесь не удается получить информацию о пространственной структуре объекта, однако в ряде случаев можно выяснить, как меняются его качественные черты при изменении параметров. Построены математические теории морфогенеза, в которых основное внимание уделяется форме развивающихся объектов и, в частности, их топологии.

Другое направление, предложенное Дж.Нейманом [340] и активно развивающееся в настоящее время [2], связано с переходом к дискретному описанию. Оказалось, что для моделирования таких явлений, как развитие и самовоспроизведение, можно эффективно использовать простейшие дискретные среды. Каждая ячейка–клетка в них соединена с ближайшими соседями. Несмотря на то, что ее поведение определяется несложными правилами, эволюция больших конфигураций клеток может быть очень интересной и разнообразной. Некоторые примеры таких сред обсуждаются в гл. 11.

Анализ проблемы морфогенеза во многом типичен для синергетики. В ее исследовании можно проследить несколько этапов.

1. Выделение основных черт, характеризующих сложную систему.

2. Формирование гипотезы о механизме явления. В частности, в работе А.Тьюринга это предположение о том, что наиболее важными являются химические и диффузионные процессы. Такой тип моделирования, при котором нужно установить механизм явления и приходится отвечать на вопрос «как это могло бы происходить», часто называют «мягким моделированием». Он сейчас широко используется в нетрадиционных областях исследований. При «жестком» моделировании обычно нужно вывести конкретные следствия из более общей теории. Такая постановка задачи характерна для многих разделов теоретической и вычислительной физики в случае, когда законы, определяющие ход процессов, известны.

3. Установление соотношений между изучаемыми величинами. Обычно при этом вводятся или используются определенные математические структуры, которые детально исследуются. В проблеме морфогенеза это системы типа реакция – диффузия.

4. Использование созданных представлений в других областях. Применение систем реакция–диффузия оказалось очень полезным в экологии, физике плазмы и в других задачах. Неустойчивость Тьюринга позволила объяснить ряд наблюдавшихся и предсказать новые явления.

5. Постановка экспериментов, исходя из предложенной модели. Ее уточнение, либо пересмотр исходной концепции. Выше были приведены примеры и того, и другого. На определенном этапе возможен переход к «жесткому» моделированию.

По-видимому, предложенные к настоящему времени математические модели морфогенеза достаточно далеки от реальности. Однако их построение и исследование принесло большую пользу. В результате были сформулированы некоторые общие представления, касающиеся появления упорядоченности в нелинейных средах, а также поставлены содержательные вопросы перед экспериментаторами.

§ 1.2. Самоорганизация

Основным аппаратом, который используется при исследовании нелинейных сред, являются уравнения с частными производными. Формально они описывают системы с бесконечным числом степеней свободы. Однако не все степени свободы играют одинаковую роль. В нелинейной диссипативной системе обычно удается выделить конечное, а иногда и небольшое число переменных, к которым «подстраиваются» все остальные. Эти переменные обычно называют параметрами порядка.

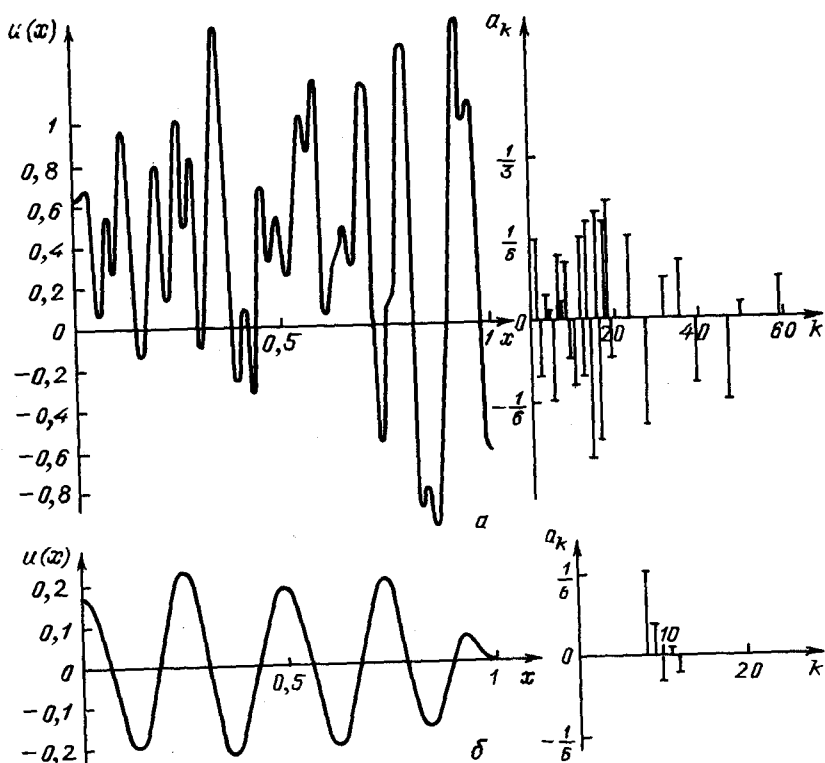


Рис. 1.3

Их введение можно пояснить на следующем простом примере. Возьмем функцию $u(x)$, заданную на интервале от 0 до l . Ее можно разложить в ряд Фурье и найти амплитуду каждой гармоники. Пусть функция $u(x)$ имеет сложный изрезанный вид (см. рис. 1.3,а). В ее поведении не видно какой-либо закономерности или упорядоченности. При этом амплитуды многих гармоник a_k сравнимы между собой. Напротив, гладкая функция на рис. 1.3,б ведет себя очень просто, в ней легко заметить закономерности: она близка к периодической. Для того чтобы передать ее профиль, достаточно задать амплитуды всего нескольких гармоник. Если процесс идет так, что количество гармоник большой амплитуды уменьшается, то в системе будет возникать упорядоченность, будет происходить самоорганизация.

Посмотрим, как меняются со временем амплитуды коэффициентов Фурье решений в простейших линейных и нелинейных уравнениях. Задачу для линейного уравнения теплопроводности

$$T_t = aT_{xx},$$

$$0 \leq x \leq l, \quad T(x,0) = T_0(x), \quad T_x(0,t) = T_x(l,t) = 0 \quad (1.5)$$

можно свести к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, разложив функцию T в ряд Фурье $T(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) \cos(\frac{\pi m x}{l})$ и подставив ее в уравнение (1.5). В силу линейности задачи все уравнения в получаемой системе будут независимы

$$\frac{dC_n}{dt} = -a \left[\frac{\pi n}{l} \right]^2 C_n, \quad C_n(0) = C_n^0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

Пусть нас интересует решение задачи (1.5) на моменты времени $t > t_1$, и ответ мы хотим получить с достаточно высокой точностью ε . Посмотрим на рис. 1.4, на котором показано, как меняются амплитуды нескольких первых гармоник со временем. Чем больше номер гармоники, тем быстрее уменьшается ее амплитуда. В результате, чтобы получить ответ с

точностью $\epsilon = 0,001$ при $t > t_1$, (см. рис. 1.4) нам нужно решить только первые пять уравнений в (1.6), на моменты $t > t_2$ достаточно трех уравнений, а на моменты $t > t_3$ хватит двух. Это замечательный факт – вместо решения всей бесконечной системы (1.6), начиная с некоторого момента времени, достаточно решить всего несколько уравнений. Указание точности и времени, начиная с которого нам нужен ответ, очень упростило задачу.

Такой подход был развит Г.Хакеном и для анализа нелинейных диссипативных систем [193, 194]. Пусть мы знаем уравнения в частных производных, описывающие такую систему. Поступая с ними так же, как при выводе (1.6) из уравнения теплопроводности, получим бесконечную систему уравнений

$$\frac{dC_m}{dt} = f_m(C_0, C_1, \dots) - \gamma_m C_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

В этих уравнениях C_m – коэффициенты Фурье. Члены $\gamma_m C_m$ обусловлены диффузионными (или другими диссипативными) процессами, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < \dots$, $f_0, f_1, \dots, f_m, \dots$ – нелинейные функции, которые могут зависеть от амплитуд всех гармоник. Система (1.7) гораздо сложнее, чем (1.6), – в ней все уравнения связаны. Однако посмотрим вновь на зависимости $C_m(t)$ для какого-нибудь нелинейного уравнения, полученные с помощью ЭВМ. В качестве примера возьмем уравнение

$$u_t = ku_{xx} + Q(u), \quad (1.8)$$

где $Q(u) = u - 2u^3$. Уравнения такого типа используются в некоторых математических моделях биологии [114]. Здесь видна та же закономерность (см. рис. 1.5), что и для линейного уравнения (см. рис. 1.4): амплитуды гармоник с высшими номерами убывают быстрее, и с определенного момента ими можно пренебречь. Учитывая это, можно построить приближенный метод анализа системы (1.8).

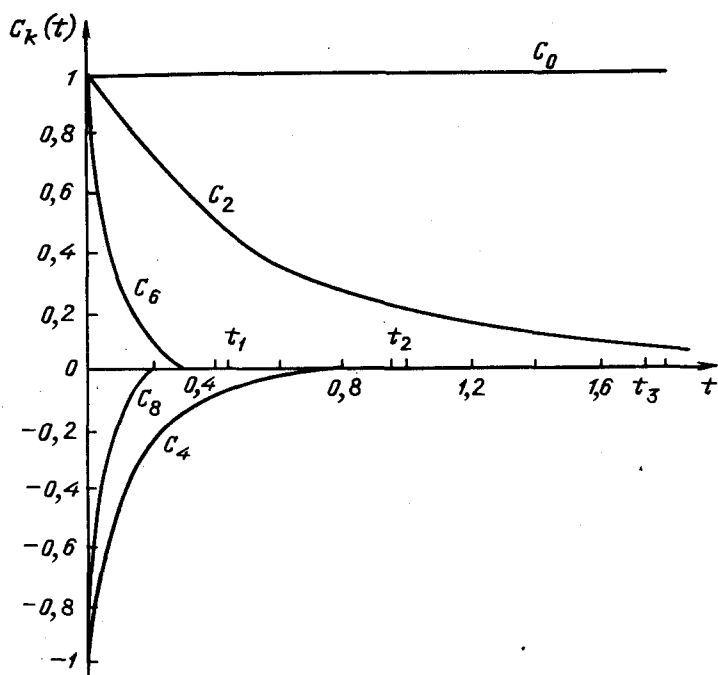


Рис. 14. Типичная картина изменения функций $C_k(t)$ для линейного уравнения теплопроводности

Рассмотрим вначале простое уравнение

$$\frac{dC_m}{dt} = -\gamma_m C_m + F(t). \quad (1.9)$$

Если $F(t) = 0$, то функция $C_m^0 e^{-\gamma_m t}$ является его решением. Если характерное время изменения функции F равно δ , $\tau_m \equiv \equiv 1/\gamma_m \ll \delta$, и нас интересуют процессы, которые идут с характерными временами, гораздо большими τ_m , то изменение амплитуды C_m можно описать не дифференциальным уравнением (1.9), а алгебраическим уравнением

$$-\gamma_m C_m + F(t) = 0. \quad (1.10)$$

К тому же выводу приводит анализ точного решения уравнения (1.9).

Фундаментальное допущение о том, что $\delta \gg 1/\gamma_m$, получило название *адиабатического приближения*.

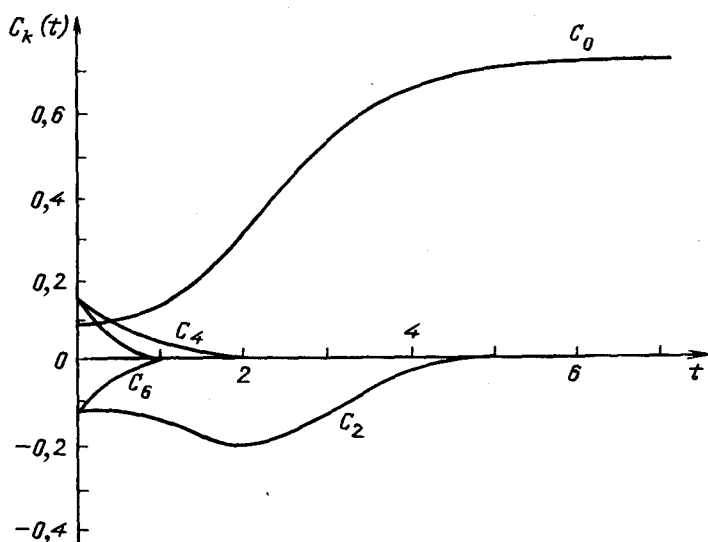


Рис. 1.5

Предположим также, что выполнены неравенства $\gamma_m \ll \ll \gamma_{m+1} < \gamma_{m+2} < \dots$. Они говорят о том, что процессы, описываемые первыми $m + 1$ уравнениями, идут гораздо медленнее остальных. Если, кроме того, функции f_m таковы, что применимо адиабатическое приближение, то мы придем к системе $m + 1$ дифференциального и последовательности алгебраических уравнений

$$\frac{dC_n}{dt} = f_n(C_0, C_1, \dots) - \gamma_n C_n, \quad n = 0, 1, \dots, m,$$

$$C_p = f_p(C_0, C_1, \dots) / \gamma_p, \quad p = m + 1, m + 2, \dots, \quad (1.11)$$

которые описывают процессы с характерными временами $\tau \gg 1/\gamma_m$.

Допустим, что нам удалось выразить C_{m+1} , C_{m+2} , амплитуды прочих мод через C_0, C_1, \dots, C_m из последовательности алгебраических уравнений (или мы знаем, что C_{m+1}, C_{m+2}

и остальные моды гораздо меньше, чем первые m). Тогда цель достигнута: указав точность и характерные времена, мы приходим к системе $m + 1$ дифференциального уравнения

$$\frac{dC_n}{dt} = \varphi_n(C_0, C_1, \dots, C_m) - \gamma_n C_n, \quad n = 0, 1, \dots, m, \quad (1.12)$$

которая значительно проще, чем исходная система. Этот подход оказался плодотворным при исследовании ряда задач физики лазеров и при решении многих других задач [166, 193, 194, 255].

Приведенные рассуждения носят эвристический характер, однако в некоторых случаях такая процедура может быть строго обоснована. Одним из основных результатов здесь является теорема А.Н.Тихонова [53, 183].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \mu \frac{dz}{dt} &= F(z, y, t), & \frac{dy}{dt} &= f(z, y, t), \\ z(0) &= z^0, & y(0) &= y^0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где z и F — M -мерные вектор-функции, y и f — m -мерные векторные функции, $\mu > 0$ — малый параметр. Это именно та ситуация, с которой мы сталкиваемся, если возьмем из бесконечной системы (1.7) первые $M + m$ уравнений, полагая, что влияние остальных гармоник мало.

Если положить в (1.13) $\mu = 0$, то получим систему (аналог (1.11)), порядок которой ниже, чем исходной:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{z}, \bar{y}, t) &= 0, & \frac{d\bar{y}}{dt} &= \bar{f}(\bar{z}, \bar{y}, t). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Такие задачи получили название *сингулярно возмущенных* (в отличие от регулярно возмущенных, в которых при $\mu = 0$ понижения порядка не происходит). Чтобы решить (1.14), нужно выразить \bar{z} из уравнения $\bar{F}(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0$, подставить выбранное решение $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ (в силу нелинейности их может быть не-

сколько) во второе уравнение (1.14) и затем решить получившуюся систему

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\varphi(\bar{y}, t), \bar{y}, t), \quad \bar{y}(0) = y^0. \quad (1.15)$$

Будем считать, что в некоторой области пространства переменных уравнение $F(z, y, t) = 0$ имеет непрерывное изолированное решение $\varphi(\bar{y}, t)$, а также что (1.15) имеет единственное решение.

Наряду с системой (1.13) рассмотрим присоединенную систему

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(\tilde{z}, y, t), \quad (1.16)$$

в которой y и t рассматриваются как параметры. Понятно, что $\tilde{z} = \varphi(y, t)$ является изолированной точкой покоя системы (1.16). Будем считать, что эта точка покоя асимптотически устойчива по Ляпунову в изучаемой области (y, t) (т. е. для любого $\varepsilon > 0$, найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что при $\|\tilde{z}(0) - \varphi(y, t)\| < \delta(\varepsilon)$ выполняются условия $\|\tilde{z}(\tau) - \varphi(y, t)\| < \varepsilon$ при $\tau \geq 0$ и $\tilde{z}(\tau) \rightarrow \varphi(y, t)$ при $\tau \rightarrow \infty$). А также предположим, что $\tilde{z}(\tau) \rightarrow \varphi(y^0, 0)$, $\tau \rightarrow \infty$. Это означает, что z^0 принадлежит области притяжения точки покоя $\tilde{z} = \varphi(y^0, 0)$.

Тогда при выполнении этих требований (а также некоторых технических условий, касающихся гладкости правых частей и областей их определения) теорема Тихонова гарантирует, что найдется значение μ_0 такое, что при $0 < \mu \leq \mu_0$ решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи (1.13) существует при $0 \leq t \leq T$, единственно и удовлетворяет предельным равенствам

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) &= \bar{y}(t) && \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) &= \bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}(t), t) && \text{при } 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В теореме Тихонова не затрагивается важный вопрос о поведении решений изучаемой системы при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, полезно было бы знать, сколько уравнений из бесконеч-

номерной системы (1.7) нужно оставить, чтобы эффективно описывать процессы в нелинейной среде. Такая оценка особенно важна при анализе стохастических режимов. В последнее время появился ряд работ, позволяющих ответить на этот вопрос для некоторого класса задач [267, Д28], на них мы остановимся позже.

Физический смысл приведенных результатов прост: параметрами порядка в таких системах являются моды с наибольшими характерными временами. Медленные моды «подчиняют» быстрые. В качестве C_n здесь естественно выступают амплитуды Фурье-гармоник.

Проблема обоснования такого подхода возникает и в теории численных методов: насколько близки решения исходной бесконечномерной задачи и решения конечномерной системы, полученной применением к исходному уравнению метода Галеркина [169].

Не менее интересным представляется другой класс явлений, в которых также наблюдается самоорганизация и возникают диссипативные структуры. В 70-е годы в физике плазмы внимание исследователей привлекли сверхбыстрые режимы, которые позволяли во многих случаях использовать одни группы процессов и пренебрегать многими другими [93]. Это привело к появлению большого класса математических моделей, где параметры порядка могут быть не связаны с Фурье-гармониками и определяются наиболее быстрыми процессами в системе.

В качестве простого примера такой модели можно привести нелинейное уравнение теплопроводности с объемным источником [81, 93, 121, 172].

$$T_t = (k(T) T_x)_x + Q(T),$$

$$-\infty < x < \infty, \quad k(T), \quad Q(T) > 0, \quad T(x,0) = T(x). \quad (1.18)$$

Здесь T можно интерпретировать как температуру среды, горение которой моделирует источник $Q(T)$. Для простоты будем

полагать, что источник и коэффициент теплопроводности являются степенными функциями температуры:

$$k(T) = k_0 T^\sigma, \quad Q(T) = q_0 T^\beta, \quad k_0, q_0, \beta, \sigma > 0. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.18) имеет автомодельное решение

$$T = g(t) f(\xi), \quad \xi = x/\varphi(t), \quad (1.20)$$

где $g(t)$ характеризует амплитуду решения, $\varphi(t)$ — полуширину, f — форму. Его тоже естественно интерпретировать как диссипативную структуру, которая, в отличие от структур в модели Тьюринга, а также многих других, нестационарна.

Будем полагать, что начальный профиль таков, что происходит выход на автомодельное решение (в некоторых случаях можно получить строгие результаты, касающиеся выхода на решение вида (1.20)). Для описания этого процесса можно использовать метод усреднения [81, 121].

В самом деле, подставив формулу (1.20) в уравнение (1.18), можно найти выражение для $g(t)$ и $\varphi(t)$, а также получить краевую задачу для функции $f(\xi)$. Но можно поступить иначе: после подстановки проинтегрировать уравнение (1.18) по пространству, затем домножить его на T и вновь проинтегрировать по x . Можно убедиться, что возникает динамическая система

$$\begin{aligned} \dot{g} &= q_0 [c-a] g^\beta - k_0 b g^{\sigma+1} \varphi^{-2}, \\ \dot{\varphi} &= -q_0 [c-2a] g^{\beta-1} \varphi + k_0 b g^\sigma \varphi^{-1}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \int_{-\infty}^{\infty} f^\beta(\xi) d\xi / \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi, \quad b = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f^\sigma(\xi) [f'_\xi(\xi)]^2 d\xi \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi \right]^{-1}, \quad c = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f^{\beta+1}(\xi) d\xi / \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1.22)$$

а в качестве f берется начальный профиль температуры.

Проведенное исследование показало, что модель (1.21) хорошо описывает решения исходной системы, имеющие один

максимум [81, 121]. В частности, с ее помощью удастся предсказать интересный эффект. Существуют значения параметров и начальные \bar{g} , $\bar{\varphi}$ (и естественно $T_0(x)$), при которых амплитуда уменьшается, а полуширина растет ($g \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \infty$). Однако малые возмущения могут перевести систему в другой режим, когда решение не существует в целом ($g \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$, $t \rightarrow t_f < \infty$). Соответственно $\max_x T(x, t) \rightarrow \infty$, при $t \rightarrow t_f < \infty$. Роль флуктуаций в этом случае оказывается принципиальной.

В модели (1.18) в качестве параметров порядка выступают функции g и φ . Они характеризуют самые быстрые процессы.

Существование параметров порядка в нелинейных диссипативных системах очень важно. В ряде случаев с их помощью удается построить иерархию упрощенных моделей, исследование которой намного упрощает анализ изучаемых систем.

Г Л А В А 2

СЛОЖНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ

§ 2.1. Модель тепловых структур

Изучение нелинейных диссипативных сред естественно начать с самых простых моделей. Оказывается, многие парадоксальные свойства нестационарных структур, типичные для нелинейных систем, могут быть исследованы с помощью одного нелинейного параболического уравнения, т. е. с помощью более простой модели, чем та, которую рассматривал А.Тьюринг:

$$u_t = (k_0 u_x)_x + Q(u). \quad (2.1)$$

1. По-видимому, впервые параболическое уравнение с нелинейным источником рассматривалось в работе А.Н.Колмогорова, И.Г.Петровского, Н.С.Пискунова [114]. При этом изучалась задача Коши и предполагались выполненными следующие требования:

$$Q(u) \in C^1[0,1]; \quad Q(0) = Q(1) = 0;$$

$$Q(u) > 0, \quad 0 < u < 1; \quad Q'(0) > 0.$$

Впоследствии это уравнение использовалось для описания эпидемий, движения возбуждений в нервном волокне, распространения пламени в горючей среде [213]. В работе был построен набор бегущих волн, т. е. решений вида $u = f(x - ct)$ для различных значений c , а также доказана теорема

сравнения: если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – два решения уравнения (2.1) с начальными данными $u_1(x, 0)$, $u_2(x, 0)$ и $u_1(x, 0) > u_2(x, 0)$ при всех значениях x , то при $0 < t < \infty$ $u_1(x, t) > u_2(x, t)$. Для линейного уравнения теплопроводности без источника теорема сравнения доказывается в стандартных курсах математической физики [185], достаточно просто она обобщается на случай, когда $Q(u)$ является стоком ($Q(u) < 0$), к которому авторы работы [114] и свели свою задачу. Им удалось доказать, что асимптотика решений уравнения (2.1) при $t \rightarrow \infty$ будет определяться одним из построенных частных решений. А именно, тем, у которого скорость движения волны c минимальна и равна

$$c = 2\sqrt{k_0 \alpha}, \quad \alpha = Q'(0).$$

Если начальные данные четны, то возникнут две волны, распространяющиеся вправо и влево.

Выход на автомодельное решение при $t \rightarrow \infty$ приводит к уменьшению числа степеней свободы, т. е. в системе происходит самоорганизация. Класс источников $Q(u)$, для которых наблюдается аналогичное поведение, может быть значительно расширен [213].

Детально исследовалось также поведение решений первой и второй краевых задач для уравнения (2.1) при $t \rightarrow \infty$. При этом в случае ограниченных источников $Q(u)$ происходит выход на стационарные решения. Для последних аналитически получен критерий устойчивости [90]. В частности, из него следует, что во второй краевой задаче при условии отсутствия потоков на границах стационарное решение, имеющее хотя бы один экстремум во внутренней точке отрезка, неустойчиво по Ляпунову. Таким образом, сложные диссипативные структуры, такие, как в системах реакция – диффузия, здесь невозможны.

Асимптотика решений при $t \rightarrow \infty$ исследуется обычно в тех случаях, когда основной интерес представляют самые медленные процессы. Однако, как мы уже упоминали, в последнее время все большее внимание в физике плазмы, хими-

ческой кинетике и биологии привлекают нестационарные процессы, идущие с наименьшими характерными временами в изучаемых системах [121]. Их идеализацией являются режимы с обострением, при которых одна из исследуемых величин неограниченно возрастает за конечное время, называемое временем обострения. Далее оно будет обозначаться t_f . Уравнения, где возможны режимы с обострением, представляют собой упрощенную модель определенных стадий многих процессов [121].

Например, в одной из работ, посвященных теории эволюции, утверждается, что естественный отбор признаков, дающих преимущество в ходе развития, приводит к тому, что «...сам этот процесс идет со все большей до некоторого предела скоростью, так как в естественном отборе побеждают более совершенные формы, возникающие быстрее, раньше других» [203].

Простейшим дифференциальным уравнением, в котором возможны такие режимы, является уравнение

$$\frac{du}{dt} = Q(u), \quad \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{Q(u)} = C < \infty. \quad (2.2)$$

Последнее неравенство, выражающее необходимое и достаточное условие существования режима с обострением в такой системе, получило название критерия Осгуда [82]. Например, если $Q(u) = u^\beta$, то $u \sim (t - t_f)^{1/(1-\beta)}$, $t_f = u(0)^{(1-\beta)}/(\beta - 1)$, т. е. время существования решения зависит от начальных данных. Вопрос о наличии режимов с обострением исследовался и для многих систем обыкновенных дифференциальных уравнений [82].

Интересно изменение точки зрения на такие режимы. Еще недавно несуществование решения в целом (т. е. от $0 < t < \infty$) трактовалось как некорректность модели и неприменимость ее для описания реальных процессов. Сейчас все большее внимание привлекают явления, в которых время развития неустойчивости конечно (чего в линейных системах не бывает). В качестве примера здесь можно привести классическую

задачу, изучавшуюся Гудерлеем, о кумуляции сферических ударных волн на центр [186], некоторые модели турбулентных течений, где появляются уравнения с отрицательной вязкостью [181], вопросы, связанные с воздействием нестационарных краевых режимов на линейные среды [170], задачи физики плазмы, и в частности, коллапс ленгмюровских волн [89], многие другие системы [383].

Рассмотрим вновь уравнение нелинейной теплопроводности

$$T_t = (k(T)T_x)_x + Q(T), \quad -\infty < x < \infty, \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad (2.3)$$

$T(x, t)$ будем интерпретировать как температуру среды, горение которой моделирует объемный источник $Q(T)$.

В линейном уравнении теплопроводности без источника (а также с линейным источником или стоком) в случае финитных начальных данных ($T_0(x) \equiv 0$ вне некоторой области G) при $t > 0$ температура оказывается отличной от нуля во всем пространстве — тепловые возмущения в такой модели распространяются с бесконечной скоростью. Совершенно иное поведение наблюдается в системах, где теплопроводность нелинейна и

$$\int_0^{T_0} k(u)u^{-1} du < \infty. \quad (2.4)$$

При финитных начальных данных в уравнении без источника скорость фронта тепловой волны в таких средах оказывается конечной [155].

Основные качественные эффекты в системе удается выявить при исследовании уравнения со степенными функциями $k(T)$ и $Q(T)$ $k(T) = k_0 T^\sigma$, $Q(T) = q_0 T^\beta$ [93, 121, 170, 172].

Пусть $\beta = \sigma + 1$, $\beta > 1$. Типичная эволюция решения задачи (2.3) показана на рис. 2.1. Сначала максимальная температура падает (момент времени t_2), но затем она начинает расти (t_3, t_4). Как следует из неравенства (2.4), в каждый момент времени тепло сосредоточено в ограниченной области пространства. Далее фронт доходит до некоторых точек A и B (см. рис. 2.1, момент t_4) и останавливается. Тепло оказы-

вается локализованным в ограниченной области, размер которой мы обозначим через L_f . После этого полуширина нагретой области остается постоянной, а амплитуда (максимальная температура) увеличивается. Причем рост температуры происходит в режиме с обострением – за конечное время t_f ее максимум обращается в бесконечность. Результат расчета представляется парадоксальным – несмотря на неограниченный рост температуры и наличие диссипативных процессов, тепло оказывается локализованным в ограниченной области пространства. Отметим, что закон изменения полуширины и амплитуды профиля температуры в этом случае хорошо согласуется с решениями осредненной системы [121].

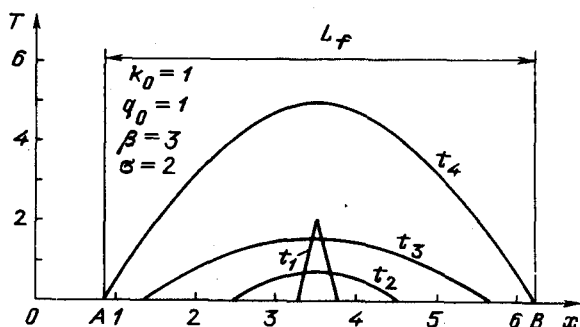


Рис. 2.1. Возникновение диссипативной тепловой структуры с постоянной полушириной (S-режим)

Большой цикл работ, выполненных в последние годы, показал, что локализация является общим свойством многих нелинейных сред. Оно может быть обусловлено действием специальным образом подобранных краевых режимов [60], наличием стоков [144, 109]. К локализации тепла в нелинейной среде в течение конечного времени может приводить постановка начальных данных определенной конфигурации [129].

Будем менять амплитуду и полуширину начального распределения. Расчеты показывают, что это приводит к изменению значения t_f , однако величина области локализации (для широкого класса $T_0(x)$) и форма профиля температуры (при $t \rightarrow \infty$) сохранится. Здесь также происходит забывание дета-

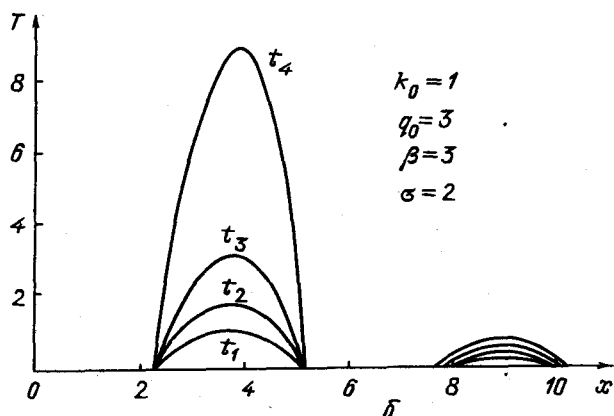
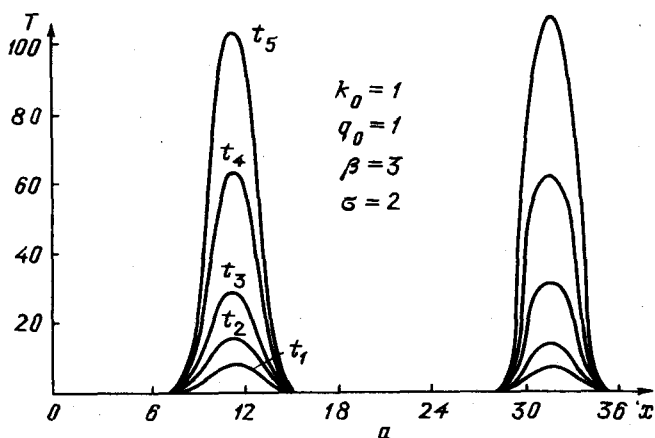


Рис. 2.2.а - Эффект локализации тепла. Две тепловые структуры в нелинейной среде развиваются независимо: $t_1 = 0,0$; $t_2 = 3,56 \cdot 10^{-2}$; $t_3 = 3,93 \cdot 10^{-2}$; $t_4 = 3,98 \cdot 10^{-2}$; $t_5 = 4,00 \cdot 10^{-2}$. б - Развитие структуры с минимальным временем обострения. Оставшаяся часть профиля «замирает» при $t \rightarrow t_1$; $t_1 = 0,0$;

$$t_2 = 0,147; t_3 = 0,220; t_4 = 0,245$$

лей начальных данных. Сохранение формы распределения, полуширина которого не меняется, говорит о том, что горение в пределах области длины L_1 происходит согласованно, — закон роста температуры в каждой точке оказывается одним и тем же с точностью до множителя.

Обратим внимание на принципиальную роль диссипативных процессов в такой системе. Допустим, что $k_0 = 0$. Тогда в соответствии с уравнением (2.2) в каждой точке пространства, где $T_0(x) \neq 0$, горение происходит со своим значением t_f . Если $k_0 \neq 0$, то в пределах целой области горение происходит с одним значением времени обострения. Поэтому естественно рассматривать упорядоченность, возникающую в такой среде и развивающуюся в режиме с обострением, как нестационарную диссипативную структуру. Поэтому модель (2.3) в ряде работ называют моделью тепловых структур [121, 170].

Сохранение формы профиля при $t \rightarrow t_f$ позволяет предположить, что на развитой стадии происходит выход на автономное решение вида

$$T(x, t) = g(t)f(\xi), \quad \xi = x / \varphi(t). \quad (2.5)$$

Подставив (2.5) в задачу (2.3), можно получить закон изменения амплитуды $g(t)$ и полуширины $\varphi(t)$

$$g(t) = A_1(1 - t/t_f)^{-1/(\beta-1)},$$

$$\varphi(t) = A_2(1 - t/t_f)^{0.5(\beta-\sigma-1)/(\beta-1)}. \quad (2.6)$$

(Здесь A_1, A_2 — постоянные величины, которые определяются параметрами β, σ, k_0, q_0 .) Для определения функции $f(\xi)$, которая задает форму диссипативной структуры, получаем нелинейную краевую задачу

$$-\frac{1}{(\beta-1)t_f} f + \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)t_f} \xi f_\xi = (f^\sigma f_\xi)_\xi + f^\beta, \quad (2.7)$$

$$f_\xi|_{\xi=0} = 0, \quad f^\sigma f_\xi|_{\xi=\xi_\phi} = 0, \quad f|_{\xi=\xi_\phi} = 0. \quad (2.8)$$

Условие при $\xi = 0$ позволяет выделить только симметричные решения, на которые и происходит выход при $t \rightarrow t_f$. Два

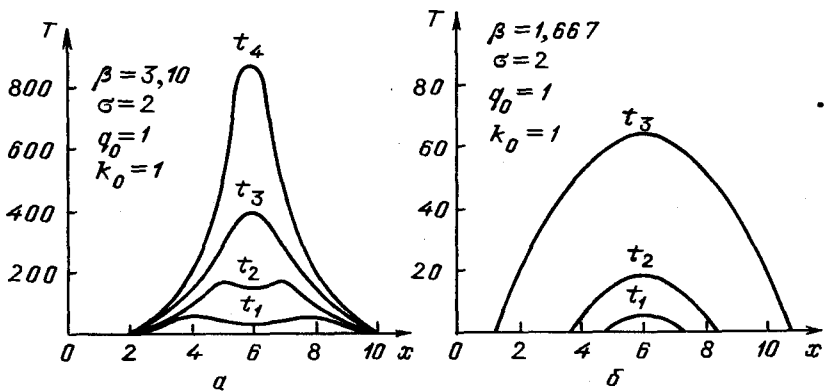


Рис. 2.3.а - Возникновение тепловой структуры с сокращающейся, полушириной (*LS*-режим с обострением): $t_1 = 0,0$; $t_2 = 2,15 \cdot 10^{-4}$; $t_3 = 2,38 \cdot 10^{-4}$; $t_4 = 2,44 \cdot 10^{-4}$. б - Тепловые волны растущей амплитуды (*HS*-режим с обострением): $t_1 = 0,0$; $t_2 = 0,69$; $t_3 = 0,875$

других условия позволяют выделить локализованные решения. При $\beta = \sigma + 1$ задача (2.7), (2.8) имеет аналитическое решение, описывающее локализованную структуру

$$f(\xi) = [\cos^2(\pi\xi/L_f) 2(\sigma + 1)\sigma^{-1}(\sigma + 2)^{-1}]^{1/(\sigma+1)}, \quad (2.9)$$

где

$$L_f = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\sigma + 1} \sqrt{k_0/q_0} \quad (2.10)$$

и есть размер области локализации. Форма структуры и величина L_f совпадают с тем, что дают расчеты. Формулы (2.9), (2.10) позволяют строить множество других решений задачи (2.7), (2.8). Если на расстоянии, большем L_f , задать два одинаковых начальных профиля, приводящих к возникновению локализованных структур, то они никак не будут влиять друг на друга (см. рис. 2.2,а). Если один из профилей по амплитуде несколько меньше, то он просто «замирает» при $t \rightarrow t_f$, а второй неограниченно растет (см. рис. 2.2,б). Это типичная картина для режимов с обострением. Поэтому в нелинейной среде, которая описывается уравнением (2.3), надо

рассматривать только самые быстрые процессы с минимальными временами обострения.

До сих пор мы полагали, что $\beta = \sigma + 1$. Выясним, что происходит при изменении параметров нелинейной среды β и σ . Из формулы (2.6) следует, что для $\beta > \sigma + 1$ $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_1$, и что $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_1$, если $\beta < \sigma + 1$. В первом случае полуширина распределения температуры должна сокращаться, при этом говорят, что реализуется LS-режим с обострением, во втором случае она неограниченно возрастает, и мы имеем HS-режим. Примеры обоих режимов показаны на рис. 2.3. Когда $\beta = \sigma + 1$, полуширина остается постоянной (S-режим) [121, 170, 172].

Для нелинейной задачи (2.3) не справедлив принцип суперпозиции. Действительно, если изменить начальные данные в несколько раз, то это приведет не к умножению решения на постоянную величину, а к процессу, идущему в совершенно другом темпе, с другим временем обострения. Здесь нельзя «сшить» общее решение из известного набора частных. Так какова же ценность найденного автомодельного решения?

Ответ следует из ряда приведенных расчетов [121] и некоторых строгих утверждений [170]: любое распределение при $t \rightarrow t_1$ выходит на одно или несколько автомодельных решений. И хотя здесь нет принципа суперпозиции, мы знаем, какие структуры возникнут на стадии интенсивного горения. Это глубокий и интересный факт.

Один из традиционных способов анализа линейных задач математической физики связан с разделением переменных и последующим нахождением множества частных решений. Для этого ищутся собственные функции изучаемой задачи (которые также являются некоторыми автомодельными решениями). Они существенно зависят от области, в которой решается уравнение, и от граничных условий. Далее с помощью этого набора частных решений строится общее [185].

На первый взгляд обсуждаемая ситуация оказывается похожей, нелинейная задача (2.3) допускает обобщенное разделение переменных (2.5). Определение профиля автомодельного

решения приводит к нелинейной краевой задаче на собственные значения (2.7), (2.8). Собственным значением при заданном t_f является координата фронта ξ_ϕ . Преобразование подобия позволяет найти профили $f(\xi)$ и для других t_f . В последние годы близкие задачи возникли во многих областях науки [182].

В связи с этим решения уравнений, которые описывают конфигурации нестационарных структур, получили название собственных функций нелинейной среды [80, 171]. В отличие от обычных собственных функций, они описывают локализованные процессы и не зависят от граничных условий. (Например, формула (2.9) может определять решение огромного класса различных краевых задач для уравнения (2.3), в которых длина $L > L_f$.) Можно сказать, что они описывают внутренние свойства нелинейной среды. Не удивительно, что исследованию этих функций было уделено большое внимание [121, 170, 58]. Отметим несколько принципиальных результатов.

Решение (2.9), (2.10) оказывается очень простым, профиль температуры, который оно описывает, имеет единственный максимум. (Будем говорить, что оно определяет *простую структуру*.) Возникает вопрос, могут ли в нелинейных средах, которые описывает уравнение (2.3), существовать сложные структуры, имеющие большее число максимумов и по-прежнему сохраняющие свою форму.

Физическая идея оказывается достаточно простой. Пусть в среде есть две структуры, каждая из которых имеет область локализации L_f . Если расстояние между ними превышает L_f , то они не влияют друг на друга. Если это расстояние гораздо меньше, чем L_f , то они быстро вырождаются в простую структуру. В промежуточном случае в течение длительного времени максимумы движутся к оси симметрии, но форма профиля меняется мало. Это позволяет говорить о взаимодействии тепловых структур.

Пример такого взаимодействия показан на рис. 2.4. Видно, что четыре локальных максимума температуры при $t \rightarrow t_f$ движутся к центру. В процессе взаимодействия

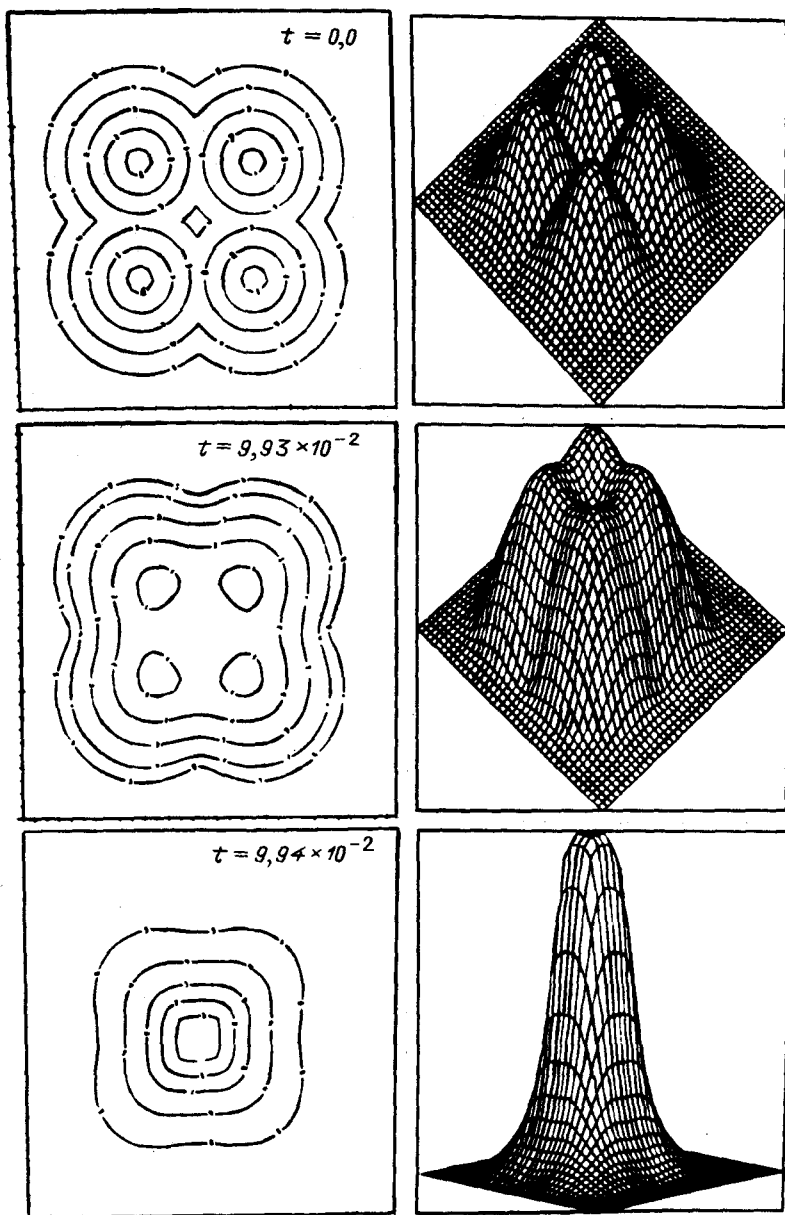


Рис. 2.4. Взаимодействие четырех тепловых структур. Линии уровня и видо-
вые проекции распределения температуры в последовательные моменты времени

пространственная симметрия начальных данных играет важную роль. В работе [127] с помощью численных методов изучалось взаимодействие структур в многомерном случае и был приведен следующий пример. Рассматриваются начальные данные вида

$$T_0(\mathbf{r}) = \max_{i \leq n} \{A_i \exp [-\alpha_i |\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|^2]\}, \quad (2.11)$$

где \mathbf{r} и \mathbf{a}_i — двумерные векторы. Пусть $n = 3$, $A_1 = A_2 = A_3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, а векторы \mathbf{a}_i выбраны так, что один раз они образуют равносторонний треугольник ($|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3| = |\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3| = a$), а другой раз — равнобедренный треугольник с углом при вершине 120° ($|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3| = a$), $\beta = 4,0$, $\sigma = 2,0$, $k_0 = 1,0$, $q_0 = 5,25$; $A = 1,35$, $\alpha = 2,5$, $a = 2,08$. В первом случае большая энергия сосредоточена в меньшем объеме, чем во втором. Несмотря на это, $t_{f_1} > t_{f_2}$ — симметричная конфигурация существует дольше. Можно дать приближенное описание различных стадий взаимодействия структур и показать, что близкие закономерности характерны и для трехмерного случая.

Профили вида (2.11) при $t \rightarrow t_f$ меняют свою форму (поэтому их иногда называют *квазиструктурами*). Обнаруженные в расчетах закономерности взаимодействия структур позволяют предположить, что существуют сложные структуры. Они определяются решениями уравнения (2.7) (или его многомерного аналога), имеющими несколько максимумов, или, как их называют, *высшими собственными функциями нелинейной среды*.

В работах [80, 121, 171] были исследованы такие функции в одномерном случае. Они существуют в случае LS -режима при $\beta > \sigma + 1$. При этом решение автомодельной задачи не имеет конечного фронта, и поскольку нас интересуют эффективно локализованные решения, вместо условий (2.8) естественно потребовать, чтобы при $x \rightarrow \infty$ температура и поток стремились к нулю

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad f^\sigma f_\xi \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad f \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что

$$f \rightarrow C_i \xi^{-2(\sigma + 1)/(\beta - \sigma - 1)} \quad (2.13)$$

$\xi \rightarrow \infty$

Если при решении нелинейной задачи (2.7), (2.8) нужно было найти значение ξ_Φ (величину t_f можно положить единичной), то здесь требуется определить C_i .

Построенные численно решения (2.7), (2.12) позволили установить интересную закономерность [80, 171]. В решении можно выделить две части. В одной из них решение представляет собой малые колебания около $f = 1$. (В исходном уравнении решению $f = 1$ соответствует однородный фон $T(x, t) \sim (1 - t/t_f)^{1/(1-\beta)}$, поэтому его иногда называют *гомотермическим*.) В другой происходит быстрый выход на асимптотику (2.13). Это хорошо видно на рис. 2.5, где показан полный набор собственных функций нелинейной среды, которая описывается уравнением (2.3) со степенными нелинейностями при $\beta = 3,18$, $\sigma = 2$; $q_0 = 1$, $k_0 = 1$.

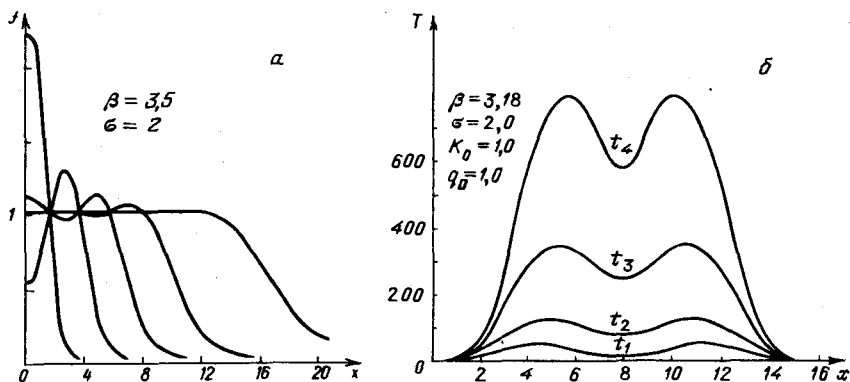


Рис. 2.5.а — Полный набор собственных функций данной нелинейной среды зависящих от одной пространственной координаты. б — Эволюция второй собственной функции

Такой характер решений позволил дать оценку числа собственных функций N нелинейной среды, связанную с анализом линеаризованной около $f = 1$ задачи [171]

$$N = [a - [[a]a^{-1}]] + 1, \quad a = (\beta - 1) (\beta - \sigma - 1)^{-1}, \quad (2.14)$$

а также получить ряд строгих результатов [1].

Оказалось, что можно сшить решения линеаризованной задачи с асимптотикой при $\xi \rightarrow \infty$, выбрав точку сшивания так, чтобы в ней выполнялись естественные условия гладкости. Расчеты показали, что построенные таким образом функции очень близки к решениям, полученным численно [124, 125]. Типичную картину иллюстрирует рис. 2.6. Здесь показаны две численно построенные собственные функции нелинейной среды при $\beta = 3,5$, $\sigma = 2$ и соответствующие асимптотики в окрестности гомотермического решения и при $\xi \rightarrow \infty$ (рис. 2.6, а). Рис. 2.6, б позволяет сравнить численно построенные собственные функции и приближения, полученные методом сшивания. Видно, что они близки.

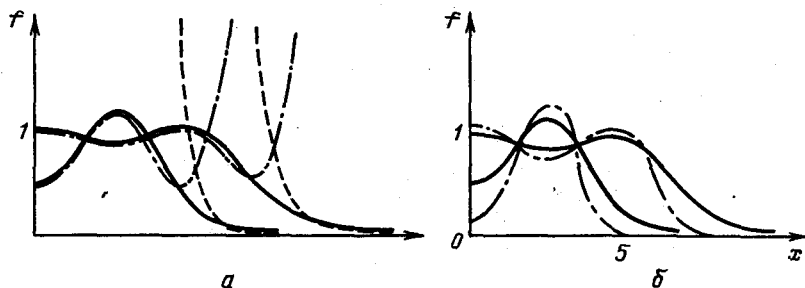


Рис. 2.6. Собственные функции нелинейной среды при $\beta = 3,5$; $\sigma = 2$. а) вторая и третья собственные функции (сплошная линия), соответствующие асимптотики вблизи гомотермического решения (штрих-пунктирная линия) и при $\xi \rightarrow \infty$ (пунктирная линия), б) те же функции и их приближения, полученные методом сшивания асимптотик

Таким образом, метод сшивания позволил получить хорошие приближенные решения (приближения) исходной нелинейной задачи (2.7), (2.12). Такие приближения были использованы для построения новых численных алгоритмов, связанных с

итерационными процессами и применением метода Ньютона [125].

Это, в свою очередь, позволило продвинуться в построении многомерных собственных функций нелинейной среды. Двумерный аналог задачи (2.3) (в котором член $(k(T)T_x)_x$ заменен оператором $\text{div}(k(T) \text{grad } T)$) допускает автомодельное решение вида $T(r, t) = g(t)f(r/\varphi(t), \theta)$, где r и θ — полярные координаты. При этом двумерная функция f , определяющая форму сложной структуры, удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению

$$\frac{1}{\sigma+1} \Delta y - \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)t_f} \xi \frac{\partial(y^{1/(\sigma+1)})}{\partial \xi} + y^{\beta/(\sigma+1)} - \frac{y^{1/(\sigma+1)}}{(\beta-1)t_f} = 0,$$

$$y(0) < C, \quad y \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad |\nabla y| \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad y \equiv f^{1/(\sigma+1)}(\xi). \quad (2.15)$$

Стандартные численные методы позволяют строить только простейшие центрально-симметричные решения $f(\xi) = f(|\xi|)$. Если действовать по аналогии с одномерным случаем, то нужно искать границу, на которой можно сшить решение линеаризованной задачи с асимптотикой при $|\xi| \rightarrow \infty$. Возникает задача со свободной границей, представляющая большие сложности.

Оригинальный подход был предложен в работах [124, 125, 161]. При исследовании открытых нелинейных систем, которые описываются нелинейными параболическими уравнениями, зачастую удается выделить набор параметров порядка, к которым «подстраиваются» все остальные степени свободы. Попробуем найти параметры порядка, характеризующие функцию f . Допустим, она переходит в себя при повороте на угол $2\pi/n$. Разложим ее в ряд Фурье по угловой переменной. Понятно, что соответствующий ряд будет содержать только гармоники с номерами $0, n, 2n, \dots$

Будем считать, что существенны только первые гармоники этого ряда. Это позволяет намного уменьшить количество степеней свободы системы. При этом условия сшивания

уже не могут быть выполнены на некоторой непрерывной кривой. Естественно требовать, чтобы они были удовлетворены на нескольких лучах в секторе $2\pi/n$. Такой подход дает целую иерархию упрощенных конечномерных моделей. Они позволяют предсказывать конфигурацию высших собственных функций в области немонотонности и дают хорошие начальные приближения, необходимые для численного построения таких решений.

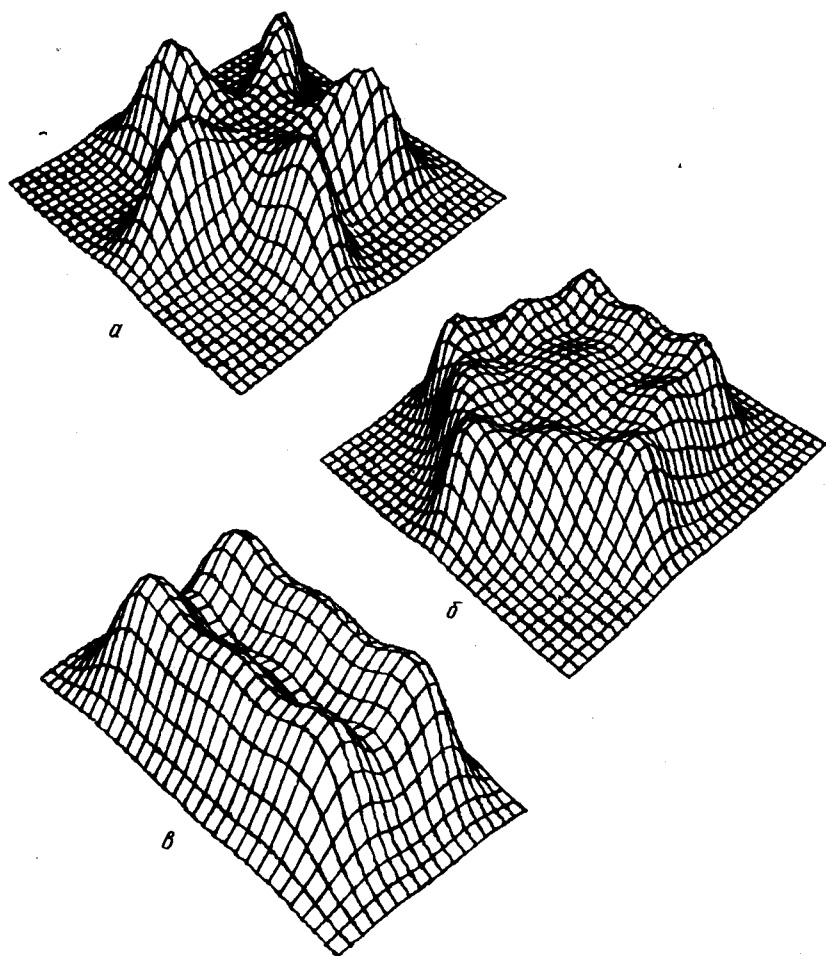


Рис. 2.7. Видовые проекции нескольких собственных функций нелинейной среды

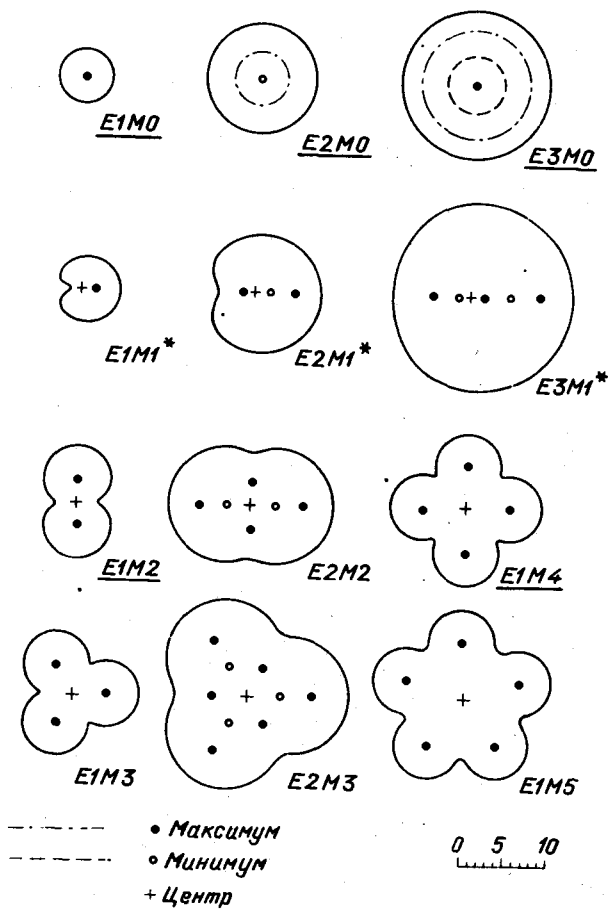


Рис. 2.8. Набор собственных функций, предсказанных с помощью приближенного анализа и затем построенных численно

В работах [125, 161] эти приближения широко использовались, и был построен большой класс высших собственных функций нелинейных сред. Видовые проекции нескольких таких функций показаны на рис. 2.7. Рис. 2.7 дает представление о наборе собственных функций, предсказанных на основе приближенного анализа и затем построенных численно для некоторой нелинейной среды. Этот результат оказывается очень интересным.

Наряду с простейшими конфигурациями, состоящими из одинаковых квазиструктур, существует и много других форм. Максимумы в них могут иметь разную амплитуду и располагаться несколькими слоями, с ними определенным образом оказываются согласованы и минимумы температуры. Напомним, что все эти структуры описывают сходящиеся к центру волны горения растущей амплитуды.

Таким образом, в простейшей нелинейной среде может существовать сложная организация. В ней есть *конечное* число конфигураций, сохраняющих в процессе эволюции свою форму. Их можно интерпретировать как несколько простых структур с различными максимумами, объединенных в одну сложную (см. рис. 2.8). Законы такого объединения и определяют высшие собственные функции нелинейной среды. Создать более сложную упорядоченность в среде с данными значениями β и σ нельзя [121, 125].

Постановку начальных данных можно рассматривать как способ воздействия на нелинейную среду. (Они могут быть созданы с помощью других процессов, которые модель (2.3) не учитывает.) При этом в общем случае происходит быстрое формирование одной или нескольких простых структур, каждая из которых локализована в некоторой области G_A . Если начальные данные поставлены в соответствии с высшими собственными функциями нелинейной среды, то процессы идут в большей области, возникающая тепловая волна сходится к центру и сохраняет свою форму. Ход процессов при этом существенно отличается от того, что происходит в общем случае. Такой способ воздействия на нелинейные среды в работах [121, 171] был назван *резонансным возбуждением нелинейной системы*. Подчеркнем, что здесь наиболее важной оказывается не амплитуда начальных профилей, а их конфигурация, соответствие собственным функциям нелинейной среды.

Анализ собственных функций разных нелинейных сред представляется очень важной задачей при исследовании многих систем в физике, биологии, в экологических задачах. При управлении многими системами не удастся навязать им

желаемое поведение, и было бы очень заманчиво использовать резонансные возбуждения, явления самоорганизации, эффективно опираться на внутренние свойства самой системы. Это особенно необходимо в тех случаях, когда нет возможности действовать методом проб и ошибок.

Можно сказать, что на сегодняшний день модель тепловых структур представляет собой одну из немногих систем, для которой установлены законы организации диссипативных структур. Поиск близких закономерностей проводился и для ряда других моделей. Во многих случаях он оказался успешным. Трудно остановиться даже на основных результатах, полученных в последние годы при изучении модели (2.3) и ее обобщений. Поэтому мы охарактеризуем только несколько крупных направлений исследований.

Первое направление связано с обобщениями модели (2.3) на более сложные среды и с ее использованием в различных физических задачах. Было показано, что явление локализации и режимы с обострением характерны для систем, параметры которых явно зависят от пространственных координат. Были рассмотрены случаи, когда плотность среды и нелинейный источник степенным образом зависят от координаты r ($r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ или $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$) [122]. Здесь также возникают локализованные структуры, развивающиеся в режиме с обострением. Они могут, например, представлять собой локализованные цилиндрические или сферические слои.

В ряде случаев здесь также удается построить собственные функции нелинейной среды как в одномерном, так и в двумерном случае [124, 125, 161].

Аналогичные результаты были получены и для системы двух квазилинейных уравнений параболического типа с объемными источниками.

$$\begin{aligned} u_t &= (k_1 u^{\sigma_1} u_x)_x + q_1 u^{\beta_1} v^{\gamma_2}, \\ v_t &= (k_2 v^{\sigma_2} v_x)_x + q_2 u^{\gamma_1} v^{\beta_2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$q_1, q_2 > 0; \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0; \quad \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0.$$

Здесь также существуют LS -, S -, HS -режимы с обострением. Для LS -режима были построены высшие собственные функции нелинейной среды. Интересно, что для них характерна та же закономерность, что и для одного уравнения (2.3), – в области немонотонности они хорошо согласуются с решениями линеаризованной задачи [123, 126].

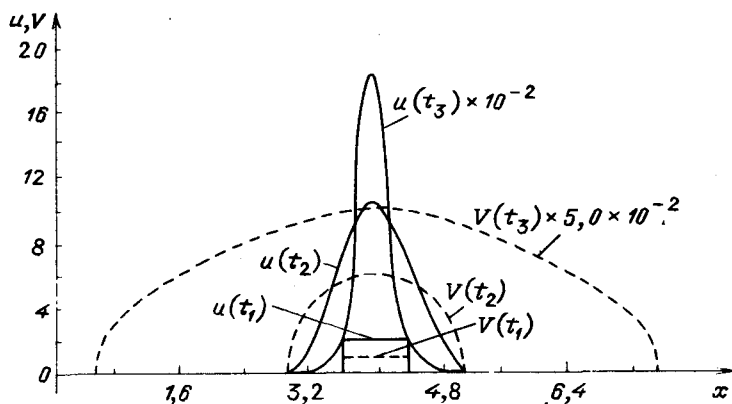


Рис. 2.9. Смешанный режим. LS -режим с обострением по первой концентрации и HS -режим с обострением по второй. Параметры расчета $\sigma_1 = 1$; $\sigma_2 = 3$; $\beta_1 = \beta_2 = 1,5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 1,5$; $k_1 = k_2 = 1$; $q_1 = q_2 = 5,25$; $t_1 = 0,0$; $t_2 = 7,45 \cdot 10^{-2}$; $t_3 = 7,708429 \cdot 10^{-2}$

Вместе с тем поведение системы (2.16) при $t \rightarrow t_f$ далеко не всегда определяется автомодельными решениями. Это показывает следующее простое рассуждение. Рассмотрим пространственно однородное решение $u_x = v_x = 0$, можно проверить, что при этом уравнения (2.16) имеют интеграл ($q_1 = q_2 = 1$)

$$u \alpha_1 / \alpha_1 - v \alpha_2 / \alpha_2 = C, \quad \alpha_1 = \gamma_1 + 1 - \beta_1,$$

$$\alpha_2 = \gamma_2 + 1 - \beta_2. \quad (2.17)$$

Значение постоянной определяется начальными данными. Тогда ясно, что при $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ режим с обострением по первой компоненте ($u \rightarrow \infty$, $t \rightarrow t_f$) имеет место, когда $C > 0$, по

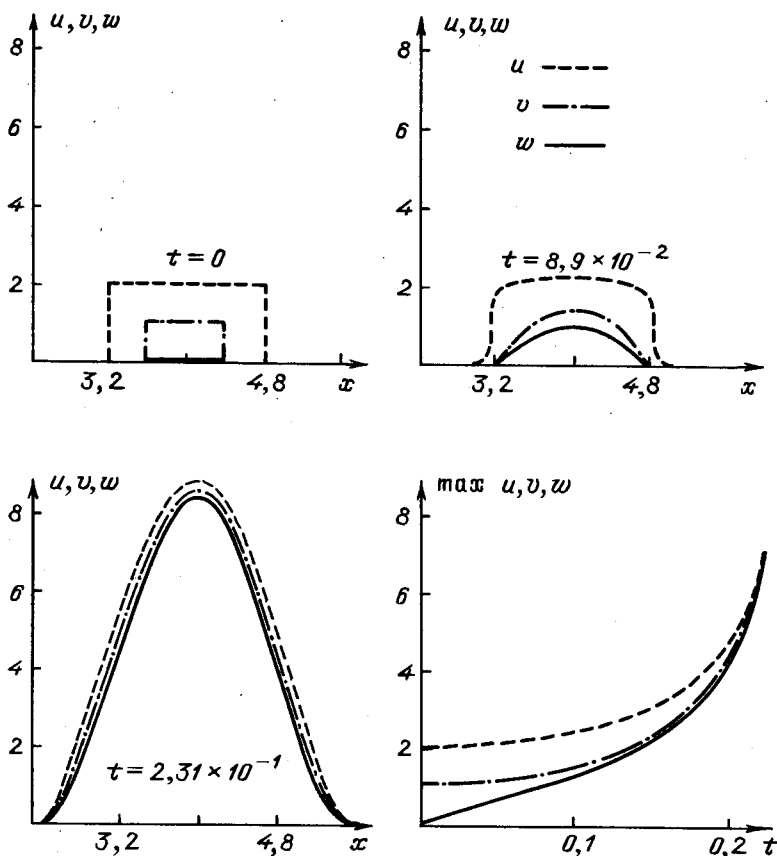


Рис. 2.10. Выход на собственную функцию нелинейной среды в S-режиме в трехкомпонентной среде, описываемой системой (2.18) $k_0 = 1.0$; $q_0 = 5.25$; $t_1 = 0.0$; $t_2 = 8.9 \cdot 10^{-2}$; $t_3 = 2.91 \cdot 10^{-1}$

второй – когда $C < 0$ и по обеим компонентам, если $C = 0$. Естественно, что автомодельное решение, описывающее режим с обострением по обеим компонентам (даже то, которое описывает простую структуру), будет неустойчивым. Именно такая картина и наблюдалась в проведенных расчетах [123]. Кроме того, большой интерес при исследовании двухкомпонентных систем вида (2.16) представляют режимы с обострением, при которых полуширина различных компонент меняется по разным законам. Пример такого процесса представлен на рис. 2.9. В этом случае локализованной оказывается только одна компонента.

В модели (2.3) режимы с обострением существуют, когда $\beta > 1$, а локализованные структуры — когда $\beta > \sigma + 1$. Это является достаточно жестким требованием для многих реальных моделей. Однако такие режимы возможны в системах, где источник по компоненте u не зависит от самой этой компоненты. Таковы, например, уравнения

$$\begin{aligned} u_t &= k_0 (uu_x)_x + q_0 v \omega, \\ v_t &= k_0 (vv_x)_x + q_0 u \omega, \\ \omega_t &= k_0 (\omega\omega_x)_x + q_0 uv. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Можно убедиться, что решение (2.9), (2.10) удовлетворяет этой задаче при $u = v = \omega$. На него и происходит выход в проведенных расчетах. Пример такого процесса показан на рис. 2.10.

Для многих моделей физики плазмы характерны степенные зависимости коэффициента теплопроводности от температуры [94]. Поэтому модель (2.3) эффективно использовалась при решении ряда физических задач [94, 121]. В задаче о θ -пинче использование локализованных процессов позволяет уменьшить теплотери с торцов, что может привести к уменьшению размеров экспериментальных установок [95].

Отметим, что LS -режимы с обострением могут существовать и в средах с постоянной теплопроводностью. Это позволило использовать уравнения (2.3) для описания начальной стадии многих процессов в качестве упрощенной модели. Например, в работе [37] такой подход позволил объяснить эффективное сокращение полуширины профиля температуры, наблюдавшееся при окислении некоторых металлов в воздухе под воздействием лазерного излучения.

Представление о локализованных процессах, развивающихся в режиме с обострением, оказалось очень полезным и при решении многих других задач в физике и газовой динамике. Эти проблемы подробно обсуждаются в обзоре [92].

При исследовании модели тепловых структур анализ системы намного упрощало наличие известного автомодельного

решения. Встает вопрос, насколько широк класс коэффициентов теплопроводности и источников, для которых такие решения существуют. Он был решен в ряде работ, где использовались методы инвариантно-группового анализа. Подробная библиография этих работ содержится в обзоре [58].

В этих исследованиях были найдены группы преобразований, допускаемые уравнением (2.3) (т. е. не меняющие его) при произвольных $k(T)$ и $Q(T)$. При этом наряду с группами точечных преобразований

$$\begin{aligned}t^* &= f(t, x, T; a_1, \dots, a_r), \\x^* &= g(t, x, T; a_1, \dots, a_r), \\T^* &= \varphi(t, x, T; a_1, \dots, a_r),\end{aligned}\tag{2.19}$$

где a_r — параметры r -параметрической группы Ли [153], были рассмотрены группы Ли — Бэклунда, (содержащие наряду с зависимыми и независимыми переменными все производные до бесконечности), которые задаются преобразованиями

$$\begin{aligned}x^* &= x + \xi(t, x, T, T_1, T_2, \dots)a + o(a), \\t^* &= t + \eta(t, x, T, T_1, T_2, \dots)a + o(a), \\T^* &= T + U(t, x, T, T_1, T_2, \dots)a + o(a),\end{aligned}\tag{2.20}$$

где $T_i = \frac{\partial^i T}{\partial x^i}$, a — параметр группы [102].

Было обнаружено, что набор $k(T)$ и $Q(T)$, при которых существуют автомодельные решения, далеко не исчерпывается степенными и показательными функциями, а оказывается гораздо шире. В этом случае удастся не только решить задачу инвариантно — групповой классификации, но и найти много частных решений, представляющих физический интерес.

Например, уравнение

$$u_t = (u^{\sigma_1} u_x)_x + (u^{\sigma_2} u_y)_y + u^\beta, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0, \beta > 0,\tag{2.21}$$

описывающее распространение тепла в анизотропной среде, имеет автомодельное решение вида

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= (t_f - t)^{1/(1-\beta)} \tilde{u}(\xi, \eta), \\
 \xi &= x(t_f - t)^{0.5(\sigma_1 + 1 - \beta)/(\beta - 1)}, \\
 \eta &= y(t_f - t)^{0.5(\sigma_2 + 1 - \beta)/(\beta - 1)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

Из этой формулы следует неожиданный результат — тепло в такой среде может быть локализовано по одному направлению ($\xi(t) < C$) и может неограниченно распространяться по другому ($\eta(t) \rightarrow \infty$).

При $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ уравнение (2.21) имеет другое парадоксальное решение [58]

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, t) &= (t_f - t)^{1/(1-\beta)} \tilde{u}(R, \Phi), \\
 R &= r(t_f - t)^{0.5(\beta - \sigma - 1)/(1-\beta)}, \\
 \Phi &= \theta_0 - c_0 \ln(t_f - t), \\
 x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

в котором локальные максимумы должны двигаться вдоль логарифмической спирали, раскручивающейся ($\beta < \sigma + 1$) или закручивающейся ($\beta > \sigma + 1$) при $t \rightarrow t_f$. Подчеркнем, что такие сложные решения могут существовать в одном уравнении теплопроводности с источником, где в силу принципа максимума температура в каждой точке не убывает [170]. Несмотря на то, что до сих пор не были построены собственные функции нелинейной среды такого типа ($\tilde{u}(R, \Phi)$ при $c_0 \neq 0$), сама возможность существования таких решений представляется очень интересной.

В последние годы была развита математическая теория, которая сделала автомодельные решения еще более полезными

при анализе нестационарных диссипативных структур [170]. В ее основе лежит идея сравнения различных решений нелинейных параболических уравнений. Обратимся к рис. 2.1. Видно, что вначале амплитуда решения падала, однако затем функция $T(x,t)$ начала расти в каждой точке профиля. Распределения, у которых $T_t(x,0) > 0$, были названы *критическими*. Можно убедиться, что во многих задачах типа (2.3) критические начальные данные приводят к критическим решениям при $t > 0$. Оказалось, что можно доказать большой класс теорем сравнения для различных критических решений.

Например, если два решения $T^{(1)}(x,t)$ и $T^{(2)}(x,t)$ задачи (2.3) критичны и $T^{(1)}(x,0) > T^{(2)}(x,0)$, то $T^{(1)}(x,t) > T^{(2)}(x,t)$. Это позволяет, например, получать информацию об эволюции профиля $T^{(2)}(x,t)$, зная автомодельное решение $T^{(1)}(x,t)$ [59].

Удается сравнивать не только различные решения одного, но и решения разных уравнений, что особенно важно в прикладных задачах, где $k(T)$ и $Q(T)$ могут иметь достаточно сложный вид. Такой подход получил название операторного сравнения [61, 62]. К примеру, решения уравнений

$$u_t^{(v)} = k^{(v)}(u^{(v)}, |\nabla u^{(v)}|) \Delta u^{(v)} + Q^{(v)}(u^{(v)}, |\nabla u^{(v)}|),$$

$$v=1,2,$$

можно сравнить, если выполнены неравенства

$$k^{(2)}(p, q) \geq k^{(1)}(p, q),$$

$$k^{(1)}(p, q) Q^{(2)}(p, q) \geq k^{(2)}(p, q) Q^{(1)}(p, q),$$

$$u^{(1)}(x, 0) > u^{(2)}(x, 0).$$

В работах [61, 62] был установлен новый подход к исследованию асимптотической стадии процессов (так называемый метод *приближенных автомодельных решений*). Оказалось, что при $t \rightarrow t_f$ некоторые совершенно различные уравнения, в

том числе и те, которые не имеют автомодельных решений, ведут себя одинаково. Они сходятся к решениям некоторых вырожденных базовых уравнений, которые уже могут иметь такие решения. При этом в зависимости от величины предела

$$B_k = \lim_{u \rightarrow \infty} [k(u)/k'(u)]'$$

базовые решения будут различными. Например, при $B_k \rightarrow \infty$ такое приближенное автомодельное решение, к которому сходится решение исходной задачи (2.3) при $t \rightarrow t_1$, удовлетворяет уравнению первого порядка типа Гамильтона – Якоби [62]

$$v_t = \frac{k(v)}{v+1} |\nabla v|^2 + Q(v).$$

В настоящее время получен также ряд строгих результатов, касающихся локализации решений, оценки времени обострения, устойчивости первых собственных функций нелинейных сред [58].

Таким образом, в модели тепловых структур автомодельные решения выступают не как вырожденные случаи или решения некоторых специальных уравнений. Они описывают асимптотику процессов в широком классе различных нелинейных сред, являются эффективным инструментом теоретического анализа, определяют законы, по которым простые структуры могут быть объединены в сложные.

Мы обсудили некоторые понятия, введенные при исследовании процессов в нелинейных средах: «режимы с обострением», «локализованные процессы», «диссипативные структуры». В некоторых физических задачах эти понятия играют ключевую роль. Обратим внимание на некоторые из них.

С 60-х годов параллельно в СССР и США велись работы по лазерному термоядерному синтезу (ЛТС). Этот проект при успешном завершении смог бы изменить саму постановку энергетической проблемы (но, конечно, поставил бы ряд новых). Идея очень проста: на короткое время сжать мишень из дейтерия лазерными импульсами и нагреть до таких температур,

чтобы стала возможной термоядерная реакция. Сверхвысокое сжатие позволяет намного снизить требования к лазерам. «В лазерном термоядерном синтезе, — писал американский ученый Дж.Наккольс, — мы пытаемся использовать преимущества следующего важного принципа: для сжатия мишени в 10 тысяч раз по отношению к ее нормальной плотности требуется только один процент той энергии, которая нужна, чтобы нагреть мишень до температуры зажигания» [Д21].

Выяснилось, что оптимальные условия для такого синтеза будут созданы, если мощность лазера можно менять в режиме с обострением $I \approx (t_f - t)^s$, $s < 0$. Режимы с обострением и новый подход к решению крупной научно-технической задачи оказались тесно связанными. Об этом периоде в проблеме ЛТС подробно рассказывается в книге [Д21].

Изучение проблемы ЛТС привело к расцвету вычислительного эксперимента в физике плазмы. Система настолько сложна, что без вычислительного эксперимента нельзя рассчитывать на успех натурального, нельзя браться за создание уникальных экспериментальных установок. Необходимостью стало появление нового поколения вычислительных методов, более глубокий анализ различных физических явлений.

Одно из явлений, подвергшихся такому анализу, — самофокусировка и коллапс ленгмюровских волн. Плазма, как известно, состоит из электронов и ионов, плотности зарядов которых приближенно равны. Представим, что электроны сместились относительно ионов. Тогда возникнет электрическое поле, которое стремится возратить электроны в положение равновесия, возникают колебания, называемые ленгмюровскими, и по плазме начинают распространяться волны с близкой частотой. Их может возбуждать лазерный импульс или электронный пучок. Появление ленгмюровских волн в плазме может сопровождаться появлением локализованных каверн (кавитонов), в которых растет напряженность электрического поля и понижается плотность плазмы. При этом, хотя система и не является диссипативной, в ней возможны режимы с обострением. Здесь одномерные и двумерные задачи принципиально от-

личаются. Например, самофокусировку ленгмюровских волн моделируют с помощью уравнения

$$i\varphi_t + \Delta\varphi + \varphi|\varphi|^2 = 0,$$

где φ – комплексная функция, которая характеризует напряженность электрического поля. В одномерном случае это уравнение, называемое кубическим уравнением Шредингера, может быть решено аналитически (оно сводится к некоторому линейному уравнению). Его решения – уединенные волны или *солитоны*. Уравнение имеет бесконечное число законов сохранения.

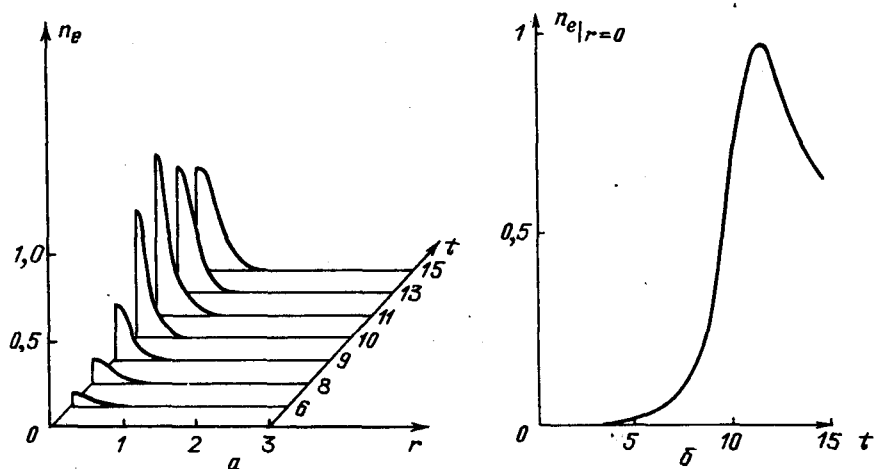


Рис. 2.11. Типичная картина возникновения плазменного шнура. Амплитуда падающей волны $E \sim A H_0^{(1)}(r)$; $A = 0,55$; $\alpha = 0$; $\tilde{\gamma} = 1$; $\delta = 10,0$; $\beta = 2,0$

В многомерном случае решения качественно меняются – это локализованные распределения, которые определяются соотношениями вида $\varphi \approx (t - t_f)^\gamma f(r/(t - t_f)^\delta)$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Однако если в модели тепловых структур показатели степеней выражались через параметры среды β и σ , то здесь определение степени γ и δ требует проведения сложных численных расчетов. Вопрос о том, каковы γ и δ , дискутируется до настоящего времени.

Задачи, связанные с коллапсом и самофокусировкой ленгмюровских волн, обсуждаются в обзоре [89]. Примеры алгоритмов, созданных для анализа таких процессов, дает работа [76].

Примеры множества нестационарных диссипативных структур дает другая область физики плазмы – теория СВЧ-разряда. Электромагнитные волны сверхвысокой частоты в газе могут привести к возникновению плазмы. Это явление дает принципиальную возможность создать слой плазмы в атмосфере, который может служить отражающим экраном («загоризонтное» телевидение). Если бы этот проект оказался приемлемым с экологической точки зрения, то такой подход смог бы конкурировать с трансляционными спутниками.

В качестве примера математической модели, возникающей в этой области, можно привести систему уравнений [40]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \epsilon E = 0, \quad \epsilon = 1 - n_e(1 + i\delta n)F,$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rvn_e) = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial n_e}{\partial r} \right] + n(|E|^{2\beta} F^\beta - 1)n_e - \alpha n_e^2,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rvn) = 0,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = \tilde{\gamma} n n_e |E|^2 F, \quad F = \frac{1 + \delta^2}{1 + \delta^2 n^2}.$$

Она описывает пространственно-временную эволюцию неравновесного заряда, формируемого полем сходящейся цилиндрической волны в условиях сильного нагрева газа. Температура электронов предполагается много больше температуры нейтрального газа. Такой сильно неравновесный режим представляет наибольший интерес для ряда прикладных задач.

В этой модели E характеризует амплитуду электромагнитной волны, n – плотность газа, v – его скорость, n_e – концентрацию электронов, δ , β , α , $\tilde{\gamma}$, k – постоянные, характеризующие свойства газа. Газодинамические процессы при

таком подходе учитываются в изобарическом приближении. Для функции E выполнены условия излучения.

Типичный пример возникновения локализованной нестационарной структуры в поле сходящейся цилиндрической СВЧ-волны показан на рис. 2.11. Видно, что рост амплитуды распределения сопровождается сокращением его полуширины (рис. 2.11,а). На рис. 2.11,б представлен рост концентрации n_e в центре волны. Видно, что на определенном временном интервале она выглядит так, как если бы процесс шел в режиме с обострением. И действительно, представления, развитые при анализе тепловых структур, эффективно используются и в теории СВЧ-пробоя.

Режимы с обострением характерны и для других модельных уравнений. Например, недавно было показано, что упрощенной моделью многих явлений в гидродинамике, астрофизике, физике плазмы и нелинейной оптике является уравнение

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad v_t + vv_x = C_0^2 m(\rho^{1/m})_x.$$

Это уравнение движения газа с отрицательной сжимаемостью описывает не бегущие волны, типичные для обычных газов, а стоячие возмущения, нарастающие со временем в режиме с обострением. Одна из первых моделей такого типа была предложена русским ученым С.А.Чаплыгиным в 1896–1902гг. Однако общность этой модели была осознана только в последние годы [383]. Интересно, что с помощью преобразования годографа эта модель сводится к линейному уравнению.

Локализованы могут быть не только стационарные диссипативные структуры или структуры, развивающиеся в режиме с обострением, но и более сложные колебательные или хаотические процессы. Вероятно, в ближайшие годы анализ таких локализованных процессов будет активно развиваться.

§ 2.2. Диссипативные структуры в средах с триггерными свойствами

Модель тепловых структур и другие модели, связанные с одним параболическим уравнением, не обладают двумя важными особенностями, характерными для многих нелинейных сред. В силу принципа максимума в таких системах не могут возникать новые экстремумы, и, следовательно, не могут появляться новые структуры. Кроме того, в рассмотренных средах устойчивы только простые структуры, для создания сложной упорядоченности нужно задать специальным образом начальные данные.

Описание сложных устойчивых структур, процессов их возникновения требует перехода к системе уравнений. В ряде случаев и здесь удается выяснить, каким образом из простых структур могут быть построены сложные, как возникает упорядоченность в таких средах, как меняется ход процессов при переходе от одномерных к многомерным моделям. Эти вопросы были исследованы для систем с триггерными свойствами [128]. Обратим внимание на некоторые из полученных результатов.

Пусть при $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ (когда нет диффузии), система может находиться в двух устойчивых состояниях (\bar{u}_1, \bar{v}_1) и (\bar{u}_2, \bar{v}_2) и в одном неустойчивом $(0, 0)$. Такие системы получили название бистабильных или триггерных. Триггерные системы с диффузией возникают в химической кинетике, в нелинейной оптике, при моделировании морфогенеза [33].

Для простоты возьмем следующую модель:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{xx} + A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (u^2 + v^2),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.24)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0;$$

u и v здесь можно рассматривать как отклонения от равновесия концентраций каких-либо веществ. Понятно, что u и v могут быть как положительными, так и отрицательными. Будем

считать, что собственные значения матрицы A — комплексно сопряженные числа с положительными действительными частями. (Это является достаточным условием неустойчивости нулевого решения задачи (2.24).) Матрица B определена отрицательно, что является достаточным условием ограниченности решения при $0 < t < \infty$. Задача (2.24) инвариантна относительно преобразования $\{u, v\} \rightarrow \{-u, -v\}$, поскольку правые части уравнений содержат только нечетные степени функций, поэтому $\bar{u}_2 = -\bar{u}_1 = -u^*$, $\bar{v}_2 = -\bar{v}_1 = -v^*$, $(Q_i(\bar{u}_j, \bar{v}_j)) = 0$; $i = 1, 2$; $j = 1, 2$). Будем рассматривать такие значения D_1, D_2 и l , при которых неустойчивость Тьюринга не возникает.

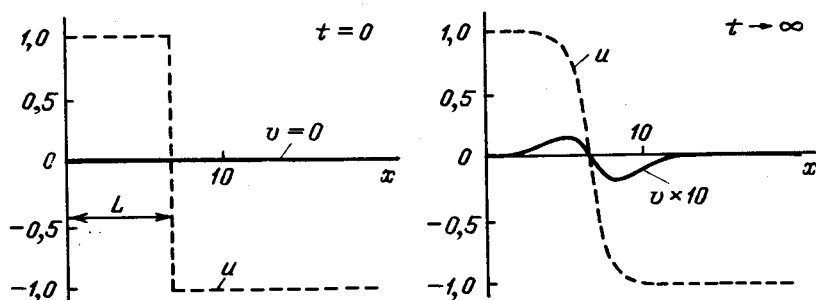


Рис. 2.12. Пример элементарной структуры в триггерной среде. Параметры расчета: $D_1 = 0,18$; $D_2 = 0,576$; $Q_1 = u - v + (4v - u)(u^2 + v^2)$; $Q_2 = u + v - (4v + u)(u^2 + v^2)$

В качестве начальных данных вначале зададим «ступеньку» ($u_0 = u^*$, $v_0 = v^*$ при $0 \leq x \leq a$, $u = -u^*$, $v = -v^*$ при $a \leq x \leq l$). В расчетах наблюдается быстрый выход на стационарное решение, типичный вид которого показан на рис. 2.12. Возникает переходная область, слева от которой находится один устойчивый фон (u^*, v^*), справа другой ($-u^*, -v^*$). Такое решение мы назовем элементарной структурой (смысл названия мы поясним далее). Можно в большом интервале менять длину области и параметр a , возникающая элементарная структура при этом практически не меняется. Она эффективно локализована.

Обратим внимание на то, что в модели тепловых структур была возможна строгая локализация: $T(x,t) \equiv 0$ вне G_A при $0 < t < t_f$. Здесь есть эффективная локализация: можно задать малое число ε и указать область G , вне которой $\max_{x \in G} [(u - u^*)^2 + (v - v^*)^2] < \varepsilon$ или $\max_{x \in G} [(u + u^*)^2 + (v + v^*)^2] < \varepsilon$.

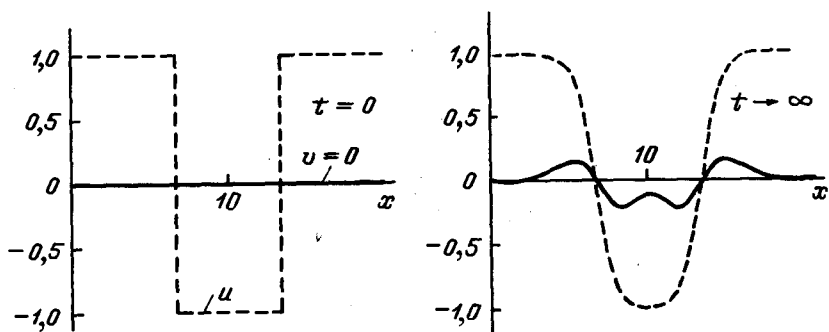


Рис. 2.13. Пример сложной стационарной структуры в триггерной среде. Параметры среды те же, что на рис. 2.12

В отличие от модели тепловых структур, здесь явление локализации связано не с источниками, а со стоками, так как в окрестности каждого из устойчивых фонов $Q_1(u,v)$ и $Q_2(u,v)$ ведут себя как стоки. Кроме того, если в триггерной среде возникли структуры, то далее решение от времени не зависит.

Поскольку элементарные структуры локализованы, из них можно построить более сложные конфигурации, задав в качестве начальных данных несколько «ступенек». Расчеты показывают, что их действительно можно построить, если расстояние между «ступеньками» не слишком мало ($L > \tilde{l}, \tilde{l}$ определяется свойствами нелинейной среды). Пример решения, возникающего в этом случае, показан на рис. 2.13. Все остальные структуры в этой среде состоят из множества элементарных, находящихся на разном расстоянии друг от друга. Метод сшивания, оказавшийся очень полезным при исследовании модели тепловых структур, и в этом случае дает хорошие

зультаты, т. е. приближенные решения, соответствующие элементарным структурам [161].

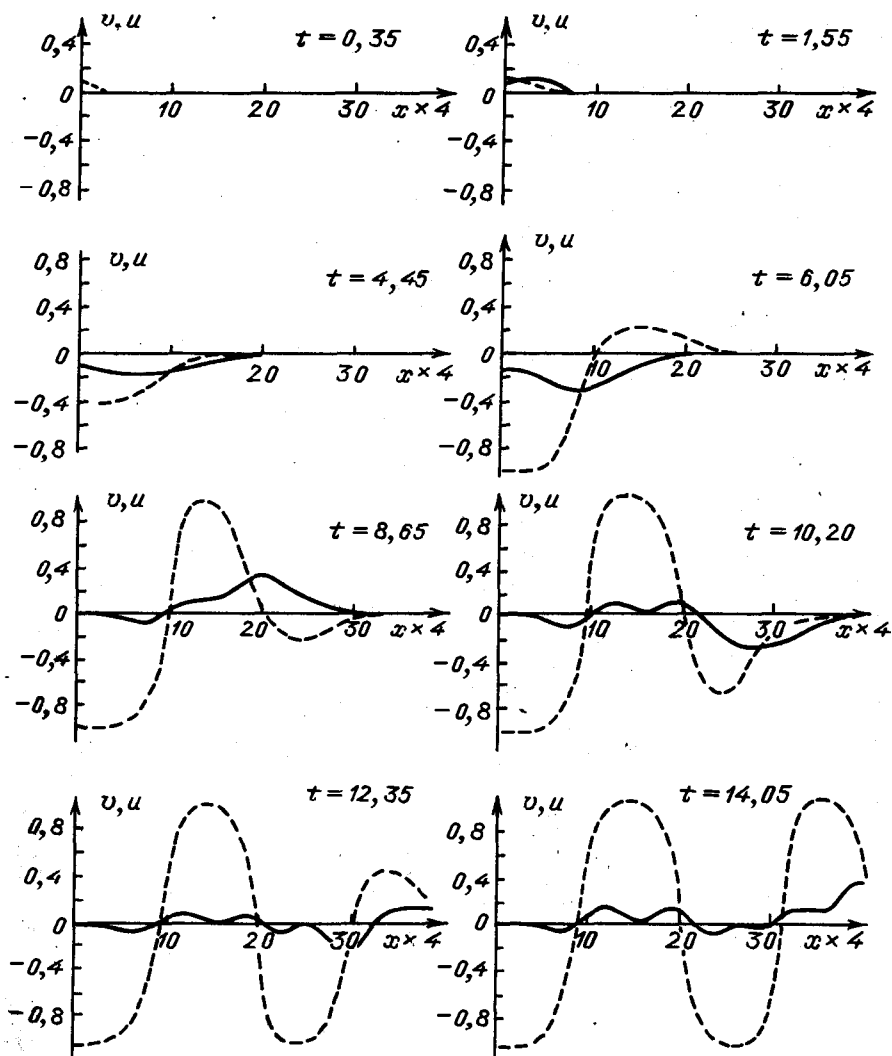


Рис. 2.14. Последовательное появление структур в соседних пространственных областях: $D_1 = 0,18$; $D_2 = 0,576$; $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$

Одним из самых интересных свойств этой нелинейной среды является возможность рождения диссипативных структур и их самоорганизации. Для того чтобы создать сложную упорядоченность, совсем не обязательно задавать ее извне, «навязать» нелинейной среде, задав нужное число ступенек. Посмотрим, что произойдет с малым возмущением, поставленным на неустойчивом фоне. Пример такого расчета показан на рис. 2.14. Видно, что на соседних участках последовательно возникают структуры. При этом в расчетах наблюдается четкая граница области, где происходит воспроизведение диссипативных структур, что позволяет говорить о волновом характере процесса и отождествлять эту границу с фронтом распространяющейся волны.

Такое поведение характерно и для многих других двухкомпонентных систем, когда в начале имеются малые возмущения вблизи потерявшей устойчивость термодинамической ветви. Например, для одной из наиболее известных двухкомпонентных систем – модели брасселятора, описывающей некоторый класс химических реакций в открытых системах, $Q_1 = A - (B + 1)u + u^2v$, $Q_2 = Bu - u^2v$ [151] или модели Гирера – Мейнхардта, возникающей при математическом описании морфогенетических процессов $Q_1 = \rho + ku^2v^{-1} - \mu u$, $Q_2 = cu^2 - \nu v$. (Здесь A , B , ρ , k , μ , c , ν – постоянные величины, являющиеся параметрами модели.)

Триггерные среды рассмотренного типа обладают интересной особенностью – диссипативные структуры в одномерном и многомерном случае в таких системах качественно различаются. В многомерном случае возникает большой набор локализованных нестационарных структур, время существования которых конечно.

Будем рассматривать двумерный аналог уравнения (2.24), в котором члены $D_1 u_{xx}$ и $D_2 u_{xx}$ заменены соответственно на $\text{div}(D_1 \text{grad} u)$ и $\text{div}(D_2 \text{grad} v)$, в квадратной области со стороной, равной l , при условии отсутствия потоков на границе. Поставим в качестве начальных данных в правом нижнем углу области квадрат со стороной l , в пределах ко-

того $u = u^*$, $v = v^*$, в остальной области пусть $u = -u^*$, $v = -v^*$. Величину l выберем таким образом, чтобы в одномерной задаче при $u_0(x) = u^*$, $v_0(x) = v^*$ ($0 \leq x \leq l$), $u_0(x) = -u^*$, $v_0(x) = -v^*$ ($l \leq x \leq l$) возникали стационарные структуры. За время τ возникает переходная область, структура которой остается постоянной для различных точек границы, несмотря на то, что кривизна контура Γ_0 , ограничивающего область G_0 , где $u(x, y) > 0$, меняется от точки к точке (см. рис. 2.15).

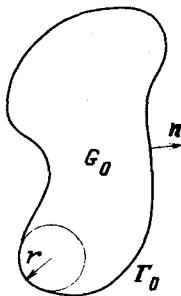


Рис. 2.15

Область G_0 медленно симметризуется, стремясь к кругу, радиус которого уменьшается со временем. Увеличение параметра l практически не меняет процесса, выход на стационарное решение не наблюдается ни при каких значениях l . Независимость переходной области от начальных данных, эффективная локализация, большие времена существования, которые могут на несколько порядков превышать τ , позволяют рассматривать этот процесс как эволюцию нестационарной диссипативной структуры.

Эти качественные представления позволяют построить приближенную модель, описывающую эволюцию контура $\Gamma(t)$. Можно убедиться, что если переписать двумерный аналог системы (2.24) в цилиндрической системе координат, то в нем появятся члены $\sim \frac{D_1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$ и $\sim \frac{D_2}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$. Расчеты показывают, что вдоль контура $\Gamma(t)$ профиль практически такой же, как в случае элементарной структуры (которая описывается уравне-

ниями (2.24)). Поэтому именно слагаемые $\sim D_1 \frac{\partial u}{\partial r}$ и $\sim D_2 \frac{\partial v}{\partial r}$ приводят к деформации контура. Следовательно, для точек контура Γ можно записать уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{r}(x, y, t)}{\partial r} = - \frac{c \mathbf{n}}{r},$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к контуру, r – радиус кривизны в данной точке, c определяется свойствами среды. Такая упрощенная модель хорошо согласуется с результатами ряда численных расчетов.

В двумерной задаче малое возмущение на неустойчивом фоне вначале, как и в одномерном случае, приводит к последовательному возникновению структур (см. на рис. 2.16 t_1, t_2, t_3). Однако здесь структуры после их возникновения медленно перестраиваются. Радиусы структур, имеющих форму круга, медленно уменьшаются (см. на рис. 2.11 t_4, t_5, t_6).

На первый взгляд кажется, что в двумерном случае в триггерных средах вообще нет стационарных, не зависящих от времени структур. Однако это не так. Построить такие решения позволяют соображения симметрии. В самом деле, уравнение не меняется при замене x на $-x$, y на $-y$, u, v на $-u, -v$. Будем обозначать область, где $u < 0$, черным цветом, где $u > 0$, белым. Эволюция одной структуры, имеющей форму круга, будет выглядеть как сокращение черного круга на белом фоне или белого круга на черном.

Теперь поставим «черное» и «белое» в одинаковые условия. Например так, как показано на рис. 2.17,а справа. Если бы начали уменьшаться жерные квадраты, то это означало бы нарушение симметрии между черным и белым, которое присутствует в уравнении (2.24). Расчеты показывают, что в этом случае действительно возникает стационарная структура «крест» (см. рис. 2.17,а слева). Резонансное возбуждение в такой среде определяется симметрией, конкретный вид начальных данных, в отличие от модели тепловых структур, здесь оказывается не важен.

Интересно, что метод шивания позволяет с высокой точностью построить приближенное решение, соответствующее

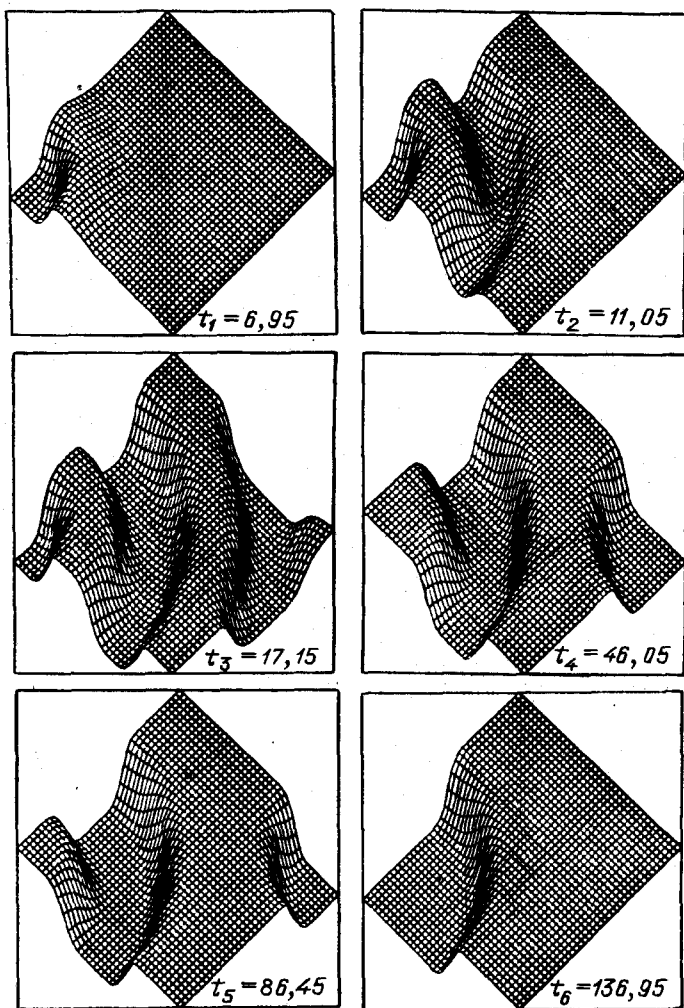
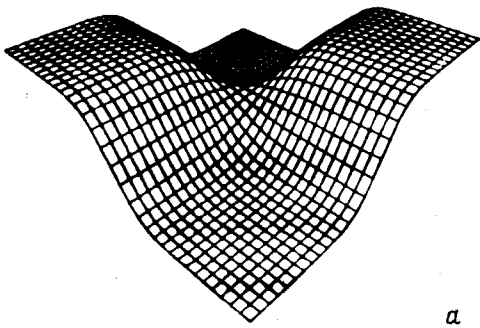
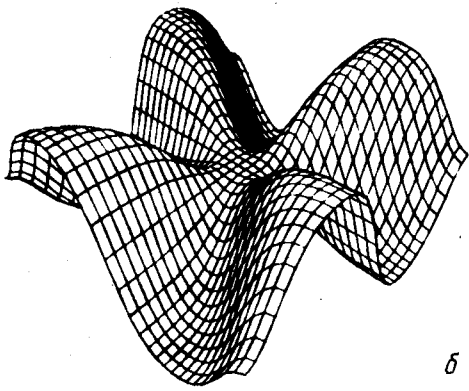
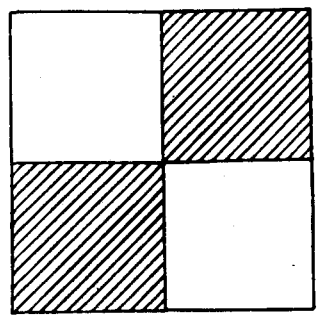


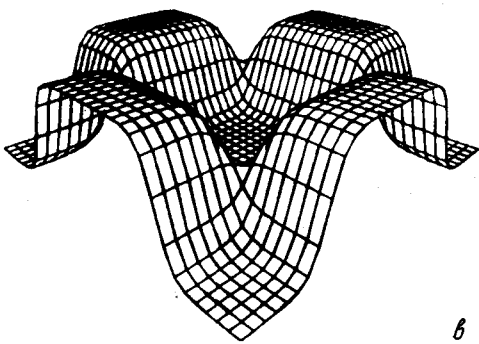
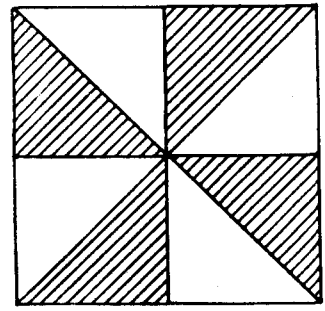
Рис. 2.16. Возникновение структур и их последующий распад в двумерной задаче. Параметры расчета те же, что на рис. 2.14



a



б



в

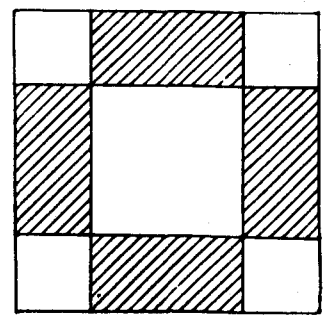


Рис. 2.17. Примеры двумерных стационарных структур в триггерной среде

этой структуре [161]. С его помощью могут быть построены и другие стационарные конфигурации. Например, «мельница» и «паркет» (см. рис. 2.17).

Мы рассмотрели примеры, в которых важную роль играет простейшая «цветная» симметрия (между «черным» и «белым»). В ряде работ, посвященных другим типам цветной симметрии, развита ее математическая теория [86]. Возможно, эти представления окажутся полезными при анализе уравнений в частных производных и, в частности, систем типа реакция – диффузия.

Таким образом, законы организации структур в рассмотренном классе триггерных сред оказываются связанными с локализованными процессами и с симметрией.

Мы обсудили два типа нестационарных структур, каждый из которых может обладать сложной пространственной упорядоченностью. В обоих случаях удалось выяснить, каким образом сложные структуры могут быть построены из более простых. В настоящее время это направление исследований быстро развивается. И возможно, не менее важной, чем конкретные математические и физические результаты, здесь является новая постановка вопроса – изучение внутренних свойств нелинейной среды, законов организации диссипативных структур, а затем поиск эффективных путей воздействия на изучаемые процессы.

Г Л А В А 3

ИЕРАРХИЯ УПРОЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

В последнее десятилетие для описания конкретных систем в химической кинетике, физике плазмы, экологии, многих других областях были предложены десятки различных моделей типа реакция – диффузия. Их анализу посвящено большое количество работ, в которых рассматриваются конкретные зависимости $Q_1(X, Y, \lambda)$, $Q_2(X, Y, \lambda)$ различных типов. Поэтому возникает следующий вопрос: существуют ли общие черты в поведении решений системы (1.1) при различных правых частях, можно ли провести классификацию двухкомпонентных систем по каким-либо признакам? Классификация и выделение общих черт позволили бы перейти от исследования конкретных моделей частного вида к созданию их теории. Это, в свою очередь, помогло бы упростить исследование каждой конкретной задачи.

При анализе систем реакция – диффузия одним из основных методов исследования является вычислительный эксперимент. Задав конкретные функции $Q_1(X, Y, \lambda)$, $Q_2(X, Y, \lambda)$, коэффициенты D_1 , D_2 , начальные данные и краевые условия, можно проследить эволюцию одного решения в течение определенного времени. Однако, наблюдая за этим решением, в котором зачастую трудно усмотреть какую-либо закономерность, мы не можем сказать, что поняли, как оно устроено.

О понимании можно говорить тогда, когда мы умеем предсказывать вид решения, его качественные особенности при различных значениях параметров, не решая для этого каждый раз само уравнение. Хорошо было бы предсказывать и основные количественные характеристики, пользуясь явными формулами или более простыми моделями. Таких упрощенных моделей может быть несколько, отличающихся областью применения, сложностью, методом получения. Достаточно полный набор приближенных моделей позволил бы говорить о сложных явлениях, которые описываются уравнениями (1.1), пользуясь теми понятиями и образами, которые появились при изучении более простых задач. Разработку упрощенных моделей, выяснение их взаимосвязей, областей применения, свойств сейчас часто называют построением *иерархии моделей* или созданием *системы моделей*.

Построение иерархии упрощенных моделей оказывается очень важным при изучении многих нелинейных диссипативных систем. В качестве примера можно привести анализ конвекции Рэлея – Бенара [136, 241], некоторые задачи нелинейной оптики [208], исследование земного и солнечного динамо [388]. Это становится необходимым в тех случаях, когда возможности современных ЭВМ не позволяют непосредственно решать возникающие уравнения. Например, при моделировании сложных гидродинамических и магнитогидродинамических течений, систем типа реакция – диффузия большой размерности со многими характерными временами.

При изучении открытых нелинейных систем можно условно выделить несколько областей изменения внешнего параметра λ .

I. $\lambda \approx \lambda_0$. В этой области параметров амплитуда возникающих структур мала, и они лежат в окрестности термодинамической ветви. В качестве малого параметра здесь можно рассматривать $\epsilon \sim (\lambda - \lambda_0)$, где λ_0 – точка потери устойчивости термодинамической ветви.

II. Промежуточная область значений. Амплитуда возникающих решений уже не мала, однако число степеней свободы, которые эффективно определяют динамику процесса, невелико.

III. $\lambda \gg \lambda_0$. В этом диапазоне параметров могут возникать сложные режимы, описание которых требует учета многих пространственных и временных гармоник. Такова, например, многомодовая развитая турбулентность.

Основные представления и наиболее эффективные математические методы были развиты при изучении первой области параметров. Кратко охарактеризуем некоторые подходы, развивавшиеся в этой связи.

§ 3.1. Универсальное описание в окрестности термодинамической ветви

Одним из наиболее эффективных методов анализа нелинейных систем является теория бифуркаций. Классической задачей этой теории, поставленной еще в прошлом веке, является задача об изгибе колонны.

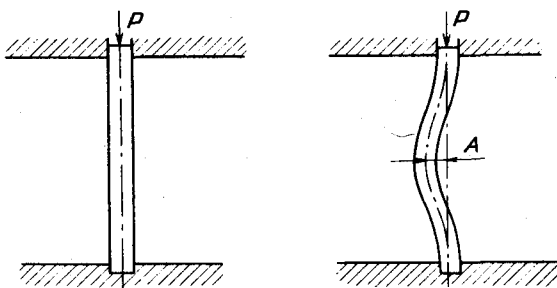


Рис. 3.1

Представим себе колонну прямоугольного сечения, на которую сверху действует нагрузка P (рис. 3.1). При увеличении нагрузки колонна будет укорачиваться и утолщаться, но ее ось будет оставаться прямой. Однако при некотором критическом значении P_c картина качественно изменится — колонна потеряет прямолинейную форму и прогнется вправо или влево. При $P < P_c$ у колонны есть единственная равновесная форма. При $P > P_c$ их стало три: прямолинейная форма, которая стала неустойчивой, и две устойчивые (одна со-

ответствует прогибу вправо, другая – влево). Если мы нарисуем зависимость отклонения A оси колонны от величины нагрузки P , то картина будет такой, как показано на рис. 3.2. На этом и других рисунках в этой главе устойчивые состояния равновесия лежат на сплошной кривой, неустойчивые – на пунктирной. При $P = P_c$ изменяется число состояний равновесия и их устойчивость. Изменение числа и устойчивости решений уравнения называется *ветвлением* или *бифуркацией* решений. Это типично нелинейное явление. Классическая линейная теория упругости дает в этом случае единственное прямолинейное состояние равновесия. Подробное обсуждение потери устойчивости колонны и некоторых других нелинейных моделей теории упругости можно найти в книге [182].

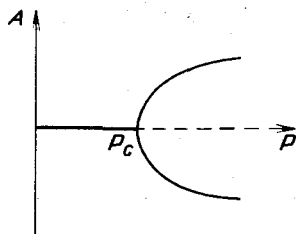


Рис. 3.2

Задачей о потере устойчивости колонны занимались Эйлер, Бернулли, Лагранж. Одним из первых термин «бифуркация» ввел К.Якоби в 1834г. Однако в полной мере значение теории бифуркаций было осознано выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре в конце прошлого века.

Пусть нам известно решение некоторой нелинейной задачи при значении параметра $\lambda = \lambda_0$, тогда можно попробовать найти решение и при $\lambda_0 + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ – малое число. При этом наш анализ становится локальным – вместо поиска общего решения мы ограничиваемся тем, что происходит с конкретным решением в окрестности одного значения параметра. Естественно в первую очередь выбрать наиболее важные зна-

чения параметра, где поведение системы качественно меняется, т. е. точки бифуркации. При этом важнейшей целью становится выяснение всех основных типов бифуркаций в различных задачах. А. Пуанкаре полагал, что решение этой большой и сложной проблемы поможет в исследовании многих конкретных нелинейных явлений.

Исследовательская программа, предложенная А. Пуанкаре, получила развитие в теории нормальных форм дифференциальных уравнений [42], в теории катастроф [71, 381], в других развивающихся разделах математики.

Простейшие типы бифуркаций, характерных для систем реакция – диффузия, рассмотрим на следующем примере.

Пусть у нас есть химическая реакция, в которой изменение концентрации интересующего нас продукта $\frac{dx}{dt}$ зависит от самой концентрации x и внешних воздействий, которые могут описываться параметром λ . Это дает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda). \quad (3.1)$$

Решения этого уравнения ведут себя очень просто. При $t \rightarrow \infty$ функция $x(t)$ стремится к постоянному значению x . Будем считать, что неограниченных решений это уравнение не имеет.

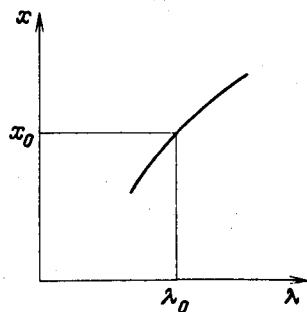


Рис. 3.3

Таких значений x может быть несколько: x_1 , x_2 и т. д. Понятно, что при этом

$$F(x, \lambda) = 0. \quad (3.2)$$

В зависимости от начальных данных $x(0)$ решение стремится к одному из x_n . Поэтому осталось решить уравнение (3.2) и найти зависимость всех его корней от параметра λ .

Допустим, что нам известно какое-либо одно решение уравнения (3.2). Для того чтобы найти решение при близком значении $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$, $\Delta\lambda \ll 1$, можно воспользоваться формулой Тейлора

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, \lambda_0 + \Delta\lambda) = & F(x, \lambda_0) + \frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial x} \Delta x + \\ & + \frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} \Delta\lambda + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F(x, \lambda_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 F(x, \lambda_0)}{\partial x \partial \lambda} \Delta x \Delta\lambda + \frac{\partial^2 F(x, \lambda_0)}{\partial \lambda^2} (\Delta\lambda)^2 \right] + G, \quad (3.3) \end{aligned}$$

где G — остаток ряда, в который входят члены, пропорциональные $(\Delta x)^3$, $(\Delta x)^2 \Delta\lambda$, $\Delta x (\Delta\lambda)^2$, $(\Delta\lambda)^3$ и т. д., его конкретный вид для нас не важен. Поскольку нас интересует состояние равновесия, то $F(x + \Delta x, \lambda_0 + \Delta\lambda) = 0$. Но тогда мы получаем при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta\lambda \rightarrow 0$

$$\Delta x = - \frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} \Delta\lambda \left[\frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial x} \right]^{-1}. \quad (3.4)$$

Из этой формулы следует, что если $\frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial x}$ отлично от нуля, то мы можем приближенно определить новое состояние равновесия (рис. 3.3). Такое состояние, судя по формуле (3.4), будет одно, а значит, в точке λ_0 , x не происходит бифуркации.

Но может оказаться, что $\frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial x} = 0$, и тогда нужно учитывать следующие слагаемые. Если $\frac{\partial^2 F(x, \lambda_0)}{\partial x^2} \neq 0$, то

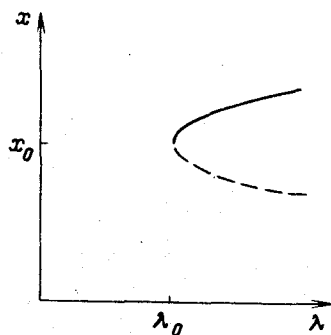


Рис. 3.4

вместо (3.4) получится следующая формула:

$$\Delta x = \pm \sqrt{-2\Delta\lambda \frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} / \left[\frac{\partial^2 F(x, \lambda_0)}{\partial x^2} \right]} = \pm \sqrt{c_1 \Delta\lambda}. \quad (3.5)$$

Здесь картина другая (рис. 3.4) – при $\lambda > \lambda_0$ появились два решения, а при $\lambda < \lambda_0$ их нет совсем (если считать, что c_1 положительно). Пример такого поведения дает все та же задача о нагрузке колонны. Пусть в начальном состоянии колонна не идеально прямая, а немного изогнута в одну сторону. Тогда зависимость максимального изгиба от нагрузки, изображенная на рис. 3.2, изменится и станет такой, как показано на рис. 3.5.

Если колонна находится в устойчивом состоянии, соответствующем точке на нижней ветви бифуркационной диаграммы (см. рис. 3.5), и нагрузка медленно уменьшается, то при некотором значении P произойдет скачкообразный переход в другое равновесное состояние на верхней ветви. Это явление, получившее название «хлопка», используется в тех-

нике [157]. Изменение типа бифуркационной диаграммы, например, при малом нарушении симметрии изучаемой системы, исследуется одним из разделов теории бифуркаций – *теорией несовершенств* [107].

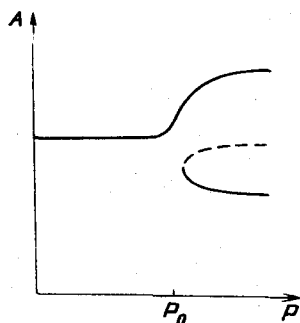


Рис. 3.5

Если $\frac{\partial^2 F(x, \lambda_0)}{\partial x^2} = 0$, нужно учитывать следующие члены: $\frac{\partial^2 F(x, \lambda_0)}{\partial \lambda^2} (\Delta \lambda)^2$, $\frac{\partial^2 F(x, \lambda_0)}{\partial x \partial \lambda} \Delta x \Delta \lambda$ и т. д.

Если хотя бы одна из вторых производных не равна нулю, то типичные бифуркации будут такими, как показано на рис. 3.6. Картинку 3.6,а мы видели в задаче о прогибе колонны. Рис. 3.6,б соответствует бифуркации, которую условно можно назвать *обменом устойчивостью*. Состояния равновесия, лежащие на одной ветви, становятся в точке λ_0 , x устойчивыми, лежащие на другой – неустойчивыми. Бифуркацию, показанную на рис. 3.6,в, называют *подкритической* (в отличие от *надкритической*, показанной на рис. 3.6,а). Она отличается тем, что возникшие в результате ветвления решения лежат в той же области параметров ($\lambda < \lambda_0$), где была расположена первоначальная устойчивая ветвь. Анализ показывает, что в этом случае они неустойчивы. При увеличении параметра λ устойчивое состояние равновесия просто исчезает и решение уравнения (3.1) переходит в другую область по x . Бифуркации, показанные на рис. 3.6, возникают при исследовании большинства стационарных диссипативных структур.

Более сложные типы бифуркаций можно получить, считая равными нулю следующие коэффициенты ряда Тейлора. Однако, чем больше условий накладывается на коэффициенты этого ряда, тем более вырожденными и нетипичными оказываются такие бифуркации. Они существенны только при исследовании семейств математических моделей, зависящих от нескольких параметров, либо в системах, обладающих рядом симметрий.

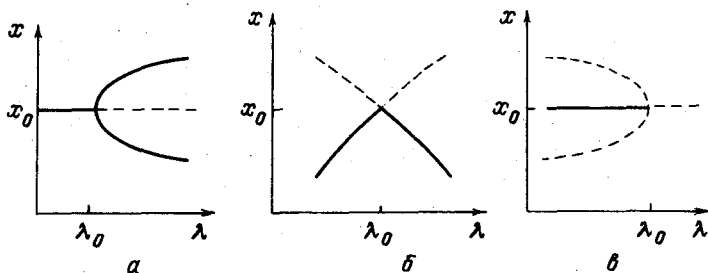


Рис. 3.6

В уравнении (3.1) бифуркации были связаны с появлением или исчезновением стационарных решений. В системах двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= F_1(X, Y, \lambda), \\ \frac{dY}{dt} &= F_2(X, Y, \lambda) \end{aligned} \quad (3.6)$$

в результате бифуркации могут возникать периодические режимы. Пример такого процесса показан на рис. 3.7, где представлены типичные фазовые траектории (т. е. проекции решения $X(t)$, $Y(t)$ на плоскость $\{X, Y\}$).

Из точки $(0, 0)$, являющейся устойчивым фокусом (см. рис. 3.7, а) при $\lambda < \lambda_0$, при $\lambda > \lambda_0$ рождается предельный цикл. Этот цикл определяет устойчивые периодические решения, к нему стремятся близкие траектории (в этом случае все траектории, кроме $(0, 0)$).

Используя методы теории нормальных форм [8, 42], можно показать, что в окрестности точки $(0,0)$ все системы (3.6), в которых происходит такая бифуркация, с помощью некоторой замены переменных могут быть приведены к виду

$$\frac{dW}{dt} = \lambda W - (1 + ic_2)|W|^2W,$$

где $\lambda_0 = 0$, $W = u + iv$. Или в полярных координатах

$$u = r \cos\varphi, \quad v = r \sin\varphi,$$

$$\dot{r} = \lambda r - r^3,$$

$$\dot{\varphi} = -c_2 r^2.$$

Когда λ становится положительным, фокус теряет устойчивость, и появляется предельный цикл, радиус которого меняется как $\lambda^{1/2}$. Бифуркация рождения предельного цикла была открыта А.А.Андроновым в 1931 году и активно использовалась при математическом моделировании радиотехнических систем, а также при построении теории колебаний [4, 143]. Анализ этой бифуркации для многомерных динамических систем был проведен З.Хопфом, поэтому в литературе ее часто называют бифуркацией Хопфа.

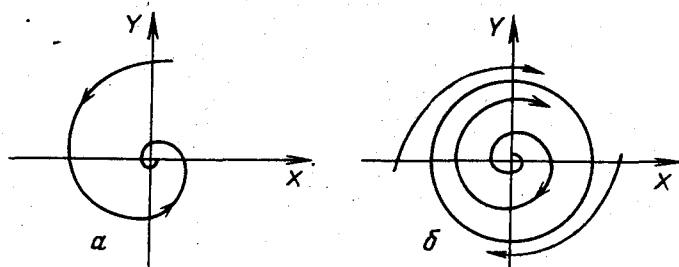


Рис. 3.7

Мы обсудили ветвление в простейших системах. Однако уже в начале века в работах А.Н.Ляпунова и Э.Шмидта были

развиты методы, позволяющие исследовать уравнения в частных производных с помощью теории бифуркаций.

Типичную ситуацию можно представить следующим образом. При $\lambda < \lambda_0$ существует единственное устойчивое стационарное решение. Его устойчивость в линейном приближении определяется набором собственных значений μ , характеризующих поведение решений линеаризованной задачи. Когда $\lambda < \lambda_0$, действительные части всех собственных значений отрицательны. При $\lambda = \lambda_0$ появляется p собственных значений, у которых $\operatorname{Re} \mu_i = 0$; $i = 1, \dots, p$. (Например, в случае бифуркации Хопфа $\mu_1 = i\omega$, $\mu_2 = -i\omega$.)

А.Н.Ляпунов и Э.Шмидт предложили разбить изучаемое уравнение на два: одно в конечномерном подпространстве размерности p , другое в его бесконечномерном дополнении. При этом возникает система p уравнений с p неизвестными (так называемое *уравнение разветвления*). Для многих задач удается показать, что свойства ответвившихся при $\lambda > \lambda_0$ решений исходного уравнения определяются свойствами уравнения разветвления [50, 107, 182].

В этом случае вся информация о количестве и устойчивости ответвившихся решений содержится в некоторой конечномерной задаче. Бесконечномерная нелинейная система в окрестности точки бифуркации ведет себя как конечномерная.

Этот подход оказался очень полезным при решении прикладных задач. С его помощью изучались многие гидродинамические системы. Некоторые из них подробно обсуждаются в книге [77]. Бифуркация Хопфа позволяет объяснить многие важные явления в гидродинамике, химии, биологии [143]. Ее особенности в системах типа реакция – диффузия и, в частности, в модели брюсселятора обсуждаются в книге [199]. Пример использования методов теории бифуркаций для исследования двумерных диссипативных структур мы обсудим в гл. 10.

Несмотря на простоту многих уравнений разветвления, определение их коэффициентов и исследование устойчивости ответвившихся решений требует громоздких вычислений, а во

многих случаях и применения численных методов. При этом чем сложнее само решение, которое претерпевает бифуркацию, тем с большими техническими трудностями связано использование этих методов.

В семидесятых годах в связи с изучением гидродинамических систем, моделей типа реакция – диффузия, ряда физических явлений появился класс задач, выходящих за рамки традиционных методов теории бифуркаций и потребовавших другого подхода.

Представим себе, что в некоторой нелинейной системе произошла бифуркация Тьюринга, и при $\lambda > \lambda_0$ система стала неустойчивой к малым возмущениям вида $W(X, T) e^{ik_c x}$, где $W(X, T)$ описывает медленную пространственно–временную модуляцию, X и T – «медленные» пространственная и временная переменные. При изучении таких систем представляется разумным перейти к более простым уравнениям, описывающим изменение $W(X, T)$.

Такой подход, связанный с многомасштабными разложениями, широко используется в теории нелинейных волн, с его помощью удается описывать различные волновые процессы одними и теми же уравнениями. В качестве примера можно привести параболическое уравнение, широко применяемое в нелинейной оптике [108], и кубическое уравнение Шредингера, возникающее при описании волн на глубокой воде и во многих других задачах [88, 176, 180].

В работе А.Ньюэлла и Дж.Уайтхеда [341] многомасштабные разложения использовались для описания конвекции Рэлея – Бенара в подогреваемом снизу слое жидкости толщины d . Эта система очень часто обсуждается в связи с задачами синергетики [193, 194]. В качестве исходной физической модели рассматривались уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска. Состояние, в котором жидкость покоится, при значении числа Рэлея $R = R_c$ оказывается неустойчивым относительно возмущений вида

$$\omega \sim e^{ikx} \sin(\pi z/d), \quad k^2 = \pi^2/(2d^2),$$

где ω – вертикальная компонента скорости, направленная вдоль оси z . Полагая, что при $R > R_c$

$$\omega = (W(X, Y, T) e^{ikx} + W^*(X, Y, T) e^{-ikx}) \sin \frac{\pi z}{d}$$

и выписывая соответствующие выражения для давления, температуры и других компонент скорости, для функции W можно получить уравнение

$$2 \frac{\rho+1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial T} - 8(n\nabla_\chi)^2 W = (3\pi^2 \chi - W W^*) W, \quad (3.7)$$

где $X = \varepsilon x$, $Y = \varepsilon y$, $T = \varepsilon^2 t$, ρ – число Прандтля, χ – некоторая постоянная, \mathbf{n} – единичный вектор в направлении критической моды. Малый параметр ε характеризует отклонение R от R_c . В работе [341] было показано, что уравнение (3.7) позволяет объяснить результаты ряда экспериментов и эффективно описать многие явления, которые не охватывают традиционные методы.

Для анализа систем типа реакция – диффузия такой подход был применен в 1975г. в работе И.Курамото и Т.Цузуки [315].

Удобно выделить два класса систем. Если длина области невелика, то можно эффективно использовать стандартные методы теории бифуркаций. В больших областях $((\lambda - \lambda_0) \gg \gg \Gamma^{-2})$, как и в задаче о конвекции, удобно перейти к медленным переменным. При этом естественно вновь рассматривать два случая – бифуркацию Тьюринга, когда при $\lambda = \lambda_0$ у линеаризованной задачи появляется нулевое собственное значение, и бифуркацию Хопфа, когда появляется пара комплексно-сопряженных значений $\pm i\omega$.

В обоих случаях уравнение, предложенное в работе [315], имеет вид

$$W_T = (\pm 1 + ic_0) W + (1 + ic_1) W_{RR} - (1 + ic_2) |W|^2 W. \quad (3.8)$$

Здесь $W = u + iv$; c_0, c_1, c_2 — действительные постоянные. В работах [314, 315] дан алгоритм, позволяющий найти значения этих постоянных по коэффициентам D_1, D_2 , функциям $Q_1(X, Y, \lambda)$, $Q_2(X, Y, \lambda)$ и их производным. Знак плюс в правой части уравнения (3.8) соответствует области параметров $\lambda > \lambda_0$, минус — $\lambda < \lambda_0$.

Поясним смысл переменных W, R, T . Возможность перейти от (1.1) к уравнению (3.8) связана с наличием малого параметра $\varepsilon \sim (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$. В работе [315] показано, что решение уравнения (1.1) в этом случае можно искать в виде

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon \left[W(R, T) f \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \text{к.с.} \right] + \dots,$$

$$e_1, e_2 = \text{const},$$

где $\{X_0, Y_0\}$ — термодинамическая ветвь; W зависит от медленных переменных $R = \varepsilon x$, $T = \varepsilon^2 t$; $f = e^{ikc^x}$, если появляются стационарные решения, $f = e^{i\omega_0 t}$ в случае бифуркации Хопфа. Другими словами, R и T — это медленные переменные, определяющие модуляцию по времени и пространству простейших решений f , вид которых следует из линейного анализа. Далее мы будем обозначать независимые переменные в уравнении (3.8) через x и t .

Функция $W(x, t)$ характеризует отклонение решений системы уравнений (1.1) от $\{X_0, Y_0\}$. Поэтому уравнение (3.8) описывает только те случаи, когда при $t \rightarrow \infty$ решения остаются в окрестности термодинамической ветви. Уравнение не описывает также вырожденные случаи, когда более двух собственных значений линеаризованной задачи пересекает мнимую ось.

Исследование уравнения (3.8) оказывается тесно связанным с задачей классификации двухкомпонентных систем. Пусть известны качественные особенности его решений (тип асимптотики, симметрия и т. д.) при всех значениях c_0, c_1, c_2 и длины области l . Тогда можно объединить в один класс все системы вида (1.1), для которых решения уравнения

(3.8) ведут себя сходным образом. Такой подход окажется еще более полезным, если удастся предложить эффективные приближенные и качественные методы анализа решений различных типов.

Уравнение (3.8) представляет большой интерес при моделировании ветровых волн на воде [5] и ионно-звуковых волн в плазме [165]. Близкие задачи рассматривались при изучении устойчивости течения Пуазейля [375], а также в нелинейной оптике [222]. Это уравнение естественно возникает во многих задачах, в которых изучаются возмущения конечной амплитуды в неравновесной системе при малой надкритичности.

Для уравнения (3.8) в литературе используются различные названия. В работах [290, 309] его относят к $\lambda - \omega$ -системам. В работах [17 - 19] называют уравнением Курамото - Цузуки, в работах [311, 315] - обобщенным зависящим от времени уравнением Гинзбурга - Ландау.

Под уравнением Гинзбурга - Ландау и зависящим от времени уравнением Гинзбурга - Ландау обычно понимаются совершенно конкретные уравнения в теории фазовых переходов второго рода, не совпадающие с (3.8) [137]. Напротив, в книгах Г.Хакена обобщенными уравнениями Гинзбурга - Ландау называется огромный класс уравнений, включающий (3.8), уравнения с квадратичными нелинейностями и много других систем [193, 194].

Поэтому имея в виду использование уравнения (3.8) для анализа класса систем реакция - диффузия, мы будем называть его уравнением Курамото - Цузуки.

Остановимся на нескольких свойствах уравнения (3.8). Во второй краевой задаче при условии отсутствия потоков на границах или в задаче с периодическими краевыми условиями $\int_0^l |W(x,t)|^2 dx \rightarrow 0$, если в уравнении Курамото - Цузуки выбран знак минус. В этом можно убедиться, домножив его на W^* и проинтегрировав по всей области. Поэтому будем считать, что выбран знак плюс.

Сделав замену переменных $W = W_1 e^{ic_0 t}$, легко убедиться, что без ограничения общности можно положить $c_0 = 0$. Далее будем считать, что такая замена уже сделана. Записав комплексно-сопряженное уравнение (3.8), можно проверить, что $W^*(x, t)$ будет решением уравнения (3.8), если заменить c_1 и c_2 на $-c_1$ и $-c_2$. Это означает, что достаточно рассматривать область параметров $c_1 \geq 0$.

Простейшими решениями уравнения (3.8) являются нулевое решение (всегда неустойчивое в линейном приближении) и пространственно однородное решение

$$W = \exp \{-ic_2 t + i\alpha\}, \quad (3.9)$$

где α — действительная постоянная. Оно устойчиво относительно малых возмущений вида $\exp(ikx)$ при условии [315]

$$(c_1^2 + 1) k^4 + 2k^2(1 + c_1 c_2) > 0, \quad (3.10)$$

т. е. устойчиво при любом k , когда $1 + c_1 c_2 > 0$.

Можно доказать, что во второй краевой задаче при условии отсутствия потоков на границах решение ограничено в норме L_2 (т. е. ограничена величина $\|W\|_{L_2} = (\int_0^l (u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx)^{1/2}$ при $0 < t < \infty$). В работе [342] показано, что при условии неубывания нормы в L_2 решение ограничено в норме C (ограничена величина $\max_{x>0} (|u(x, t)| + |v(x, t)|)$, $0 < t < \infty$).

Уравнение Курамото — Цузуки представляет собой сложный математический объект. Оно может иметь стационарные, периодические и хаотические решения. В настоящее время его можно рассматривать как одно из наиболее важных модельных уравнений в теории открытых нелинейных систем. Его исследование помогает продвинуться в понимании свойств многих нелинейных сред и ряда физических явлений. На методах анализа уравнения Курамото — Цузуки и некоторых результатах далее мы остановимся подробно.

Выше обсуждались методы исследования нелинейных сред при λ , близких к λ_0 , когда амплитуды ответившихся решений были малы. С ростом λ амплитуды перестают быть малыми, однако и в этом случае иногда удается описывать процессы в распределенных системах некоторыми упрощенными конечномерными системами. Большинство результатов здесь было получено с помощью метода Галеркина. Предполагается, что в решении наиболее важными являются некоторые гармоники (их конечное число), и вместо исходных уравнений в частных производных рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающая их амплитуды [136].

В других случаях переход к конечномерной системе может быть сделан, если исходное уравнение можно рассматривать как малое возмущение нелинейных уравнений, решения которых известны. Обычно в качестве последних выступают вполне интегрируемые системы, имеющие солитонные решения [208, 221].

Можно ожидать, что при увеличении параметра λ сложность решения будет быстро нарастать. В простейших случаях, когда рассматривается только временное поведение систем определенного типа, теория универсальности Фейгенбаума позволяет предсказать поведение решений после бесконечного количества бифуркаций [261 – 263]. Далее мы обсудим некоторые результаты этой теории. Однако вопрос об эффективном описании нелинейных систем, в которых с ростом λ увеличивается число как временных, так и пространственных мод, характеризующих динамику процесса, остается открытым. Интересный подход к этой проблеме предлагается в работе [208].

§ 3.2. Иерархия упрощенных моделей для уравнения Курамото – Сузуки

При исследовании систем типа реакция – диффузия широко использовались различные упрощенные модели. Каждая из них может применяться в определенной области параметров и

оказывается проще исходных уравнений. Рассмотрим несколько упрощенных моделей, возникающих при описании нелинейных сред в окрестности точки бифуркации. Обратим внимание на их взаимосвязь.

Математические модели многих конкретных физических, химических, биологических систем представляют собой нелинейные параболические уравнения вида

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}_t &= \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}_{xx} + \\ &+ \begin{bmatrix} Q_1(u_1, \dots, u_N; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \dots \\ Q_N(u_1, \dots, u_N; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Рассматривая процессы с наибольшими характерными временами, удается выделить параметры порядка, которые определяют поведение остальных функций, описывающих состояние системы. Некоторые методы выделения этих параметров обсуждались в гл. 1.

В ряде случаев эволюция параметров порядка описывается системой двух нелинейных уравнений в частных производных, зависящих от одного параметра λ .

Их типичное поведение таково [151, 193]. При $\lambda < \lambda_0$ существует единственное стационарное пространственно однородное решение, называемое *термодинамической ветвью*. В точке λ_0 термодинамическая ветвь обычно становится неустойчивой относительно малых возмущений вида $f \sim e^{ik_c x}$ или $f \sim e^{i\omega_0 t}$.

Если размеры системы достаточно велики, удобно рассматривать уравнение для переменной W , которая характеризует медленную пространственную и временную модуляцию функций f , вид которых следует из линейного анализа. По-видимому, к настоящему времени наиболее подробно изучена вторая краевая задача для этого уравнения

$$W_t = W + (1 + ic_1) W_{xx} - (1 + ic_2) |W|^2 W, \\ 0 \leq x \leq l, \quad (3.12)$$

$$0 < t < \infty, W_x(0, t) = W_x(l, t) = 0, W(x, 0) = W_0(x).$$

Если длина области l в (3.12) невелика, то коэффициенты Фурье решений быстро убывают с ростом номера. В простейшем случае существенными оказываются только нулевая и первая гармоники.

Предположим, что в изучаемом решении есть только две моды

$$W = u + iv = (x_0 + iy_0) + (x_1 + iy_1) \cos kx, \quad (3.13)$$

k будем выбирать так, чтобы выполнялись граничные условия задачи (3.12). Это возможно, только если $k = \pi m/l$, $m=1,2,\dots$, $k=\pi/l$ соответствует первой гармонике. Подставим (3.13) в формулу (3.12) и отбросим все члены, куда входит $\cos(\pi mx/l)$, $m > 1$, считая, что они пренебрежимо малы. Это приводит к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_0 - (x_0 - c_2 y_0) (\rho_0^2 + \rho_1^2 / 2) - s(x_1 - c_2 y_1), \\ \dot{y}_0 &= y_0 - (c_2 x_0 + y_0) (\rho_0^2 + \rho_1^2 / 2) - s(c_2 x_1 + y_1), \\ \dot{x}_1 &= x_1 - (x_1 - c_2 y_1) (\rho_0^2 + 3\rho_1^2 / 4) - \\ &\quad - 2s(x_0 - c_2 y_0) - k^2(x_1 - c_1 y_1), \\ \dot{y}_1 &= y_1 - (c_2 x_1 + y_1) (\rho_0^2 + 3\rho_1^2 / 4) - \\ &\quad - 2s(c_2 x_0 + y_0) - k^2(c_1 x_1 + y_1), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\rho_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad \rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad s = x_0 x_1 + y_0 y_1.$$

Ее можно еще более упростить, если перейти к переменным $\rho_0, \rho_1, \varphi_0, \varphi_1$ по формулам $x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0, x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1$, а затем к ξ, η, θ ($\xi = \rho_0^2, \eta = \rho_1^2, \theta = 2(\varphi_0 - \varphi_1)$). Тогда уравнений станет три:

$$\dot{\xi} = 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2 \sin\theta),$$

$$\dot{\eta} = 2\eta - 2\eta(2\xi + 3\eta/4) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta) - 2k^2\eta, \quad (3.15)$$

$$\dot{\theta} = c_2(2\xi - \eta/2) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1 k^2,$$

$$k = \pi/l.$$

Связь между переменными ξ, η, θ и переменной φ_0 определяется уравнением

$$\dot{\varphi}_0 = -c_2(\xi + \eta) + 0,5\eta(\sin\theta - c_2 \cos\theta). \quad (3.16)$$

Возможность перейти к системе (3.15) связана с тем, что исходное уравнение (3.12) обладает симметрией. Если $W(x, t)$ – решение уравнения, то функция $W(x, t) e^{i\alpha}$, $\alpha = \text{const}$, также будет решением.

В системе (3.15) ξ и η характеризуют квадраты амплитуд нулевой и первой гармоник, θ – сдвиг фаз между ними.

Простейшими решениями системы уравнений (3.15) являются устойчивые особые точки (при этом $\xi \rightarrow \text{const}, \eta \rightarrow \text{const}, \theta \rightarrow \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$).

Чтобы найти координаты особой точки (ξ, η, θ) , нужно положить $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\theta}$ равными нулю и решить три получившихся алгебраических уравнения.

В работах [20, 24] приведены явные выражения для особых точек и прямых, у которых $\xi = 0$ или $\eta = 0$, и показано, что координаты остальных точек определяются алгебраическим уравнением четвертой степени. Его также можно рассматривать как одну из упрощенных моделей для задачи (3.12).

При изучении систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений и в частности системы (3.15) очень полезным оказывается изучение класса двумерных отображений или отображений плоскости в себя.

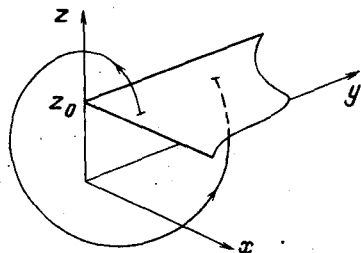


Рис. 3.8

Рассмотрим для примера систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Будем задавать начальные данные, лежащие в одной и той же плоскости $z = z_0$. Из каждой точки выпустим фазовую траекторию и посмотрим, где она вновь пересечется с выбранной плоскостью (рис. 3.8). Координаты точки пересечения (x_1, y_1, z_0) зависят от начальных данных (x_0, y_0, z_0) , т. е.

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0, y_0), \\ y &= g(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Функции f и g определяют отображение плоскости $z = z_0$ в себя, которое часто называют отображением Пуанкаре. Как правило, достаточно рассматривать не всю плоскость $z = z_0$, а только небольшую ее часть, которая содержит аттрактор.

Отображение (3.17), порожаемое системой дифференциальных уравнений, обычно позволяет исследовать ее наиболее важные свойства.

Однако может оказаться, что интервал, в котором лежат элементы последовательности $\{y_n\}$, гораздо меньше интервала, в котором лежат элементы последовательности $\{x_n\}$, или существуют другие переменные x' , y' , в которых это условие

выполнено. Тогда полезной упрощенной моделью оказывается одномерное отображение

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (3.18)$$

(отображение отрезка в себя).

Отображение вида (3.18) может возникать не только в результате анализа упрощенной двухмодовой системы, но и непосредственно в ходе исследования задачи (3.12).

В самом деле, разложим ее решение в ряд Фурье

$$W(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m(t) + ib_m(t)) \cos(\pi mx/l).$$

Рассмотрим функцию $\xi(t) = (a_0^2(t) + b_0^2(t))^{1/2}$, выделим ее локальные максимумы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dots$ и построим зависимость $\xi_{m+1}(\xi_m)$. Точки $\{\xi_{m+1}, \xi_m\}$ в ряде случаев не заполняют целые области случайным образом, а с высокой точностью ложатся на однозначную непрерывную кривую $\xi_{m+1} = F(\xi_m)$. Обычно такие кривые возникают в целом диапазоне параметров c_2 , поэтому в качестве упрощенной модели распределенной системы можно рассматривать семейство отображений (3.18).

Пусть установившийся режим таков, что $\xi_n \rightarrow \text{const}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда на кривой F ему соответствует одна точка (ξ, ξ) . Если $\xi(t)$ периодична и на периоде имеет p локальных максимумов, тогда на кривой F ей будут соответствовать p точек. Если $\xi(t)$ (а значит, и $W(x, t)$) непериодична, точки могут заполнять всю кривую или несколько участков на ней.

Прием, связанный с выделением локальных максимумов и построением зависимости $\xi_{m+1}(\xi_m)$, был предложен Э. Лоренцем [136] и эффективно использован при изучении нескольких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

При изучении большинства нелинейных уравнений в частных производных оказывается полезным анализ автомодельных решений. К ним относятся бегущие волны, свойства которых в

случае уравнения Курамото – Цузуки обсуждаются в работах [290, 309], а также решения вида

$$W(x, t) = R(x) \exp(i\omega t + i\alpha(x)).$$

Последнее решение было найдено в работе [36] при инвариантно–групповом анализе уравнения (3.8). Далее мы увидим, что в некоторой области параметров оно оказывается устойчивым и определяет асимптотическое поведение системы при $t \rightarrow \infty$. В этом случае уравнения для функций $R(x)$ и $\alpha(x)$ (либо функций, характеризующих другие автомодельные решения) можно рассматривать как еще одну упрощенную модель.

Во многих случаях фактором, необходимым для понимания различных нелинейных явлений и сильно усложняющим задачу, является многомерность.

Для изучения ряда явлений нужно рассматривать двумерные аналоги уравнения (3.12). Задачи такого типа возникают при изучении ветровых волн на воде, при моделировании морфогенеза и поверхностных реакций. Простейшим двумерным обобщением (3.12) является уравнение

$$W_t = W + (1 + ic_1)(W_{xx} + W_{yy}) - (1 + ic_2)|W|^2. \quad (3.19)$$

Оно имеет двумерные автомодельные решения вида

$$W(x, y, t) = R(x, y) \exp\{i\omega t + i\alpha(x, y)\}. \quad (3.20)$$

Уравнение Курамото – Цузуки в двумерном случае имеет решения, которые сейчас называются спиральными волнами. Они описываются формулой (3.20) при условии $R(x, y) = R(r)$, $\alpha(x, y) = S(r) + m\varphi$ ($m = 1, 2, \dots$), $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Название понятно из рис. 3.9. На нем показан типичный вид решения с $m = 1$ на некоторый момент времени t' . В заштрихованной области $u(x, y, t') > 0$, в незаштрихованной $u(x, y, t') < 0$.

Если $m > 1$, то такую спиральную волну называют многовитковой. Спиральные волны наблюдаются экспериментально, в частности в реакции Белоусова – Жаботинского [85]. Важно то, что существование спиральных волн не связано с конкретным видом изучаемых уравнений – это общее свойство многих открытых нелинейных систем. Ряд биологов полагает, что возникновением спиральных волн можно объяснить многие биологические явления, например возникновение аритмии в работе сердечной мышцы [97, 103].

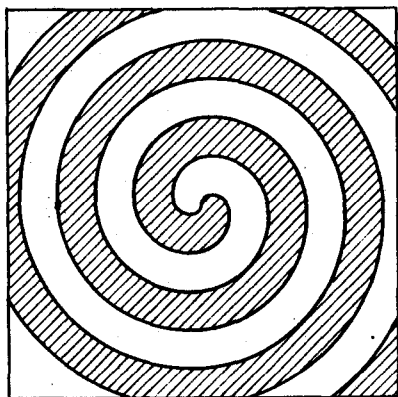


Рис. 3.9

Метод многомасштабных разложений, с помощью которого было получено уравнение (3.8), успешно применялся при исследовании конвективной неустойчивости жидкости [341], при анализе задач физики плазмы [303], в теории нелинейных волн [379]. Этот метод использовался и для анализа самого уравнения (3.8). В предположении о близости решения уравнения к пространственно однородному было получено уравнение [312, 316]

$$\dot{v} = \nu \Delta v - \mu \nabla^2 \nabla^2 v - \lambda v(\nabla v), \quad (3.21)$$

часто называемое уравнением Курамото – Сивашинского.

Здесь v – градиент фазы W , $\nu = 1 + c_1 c_2$, $\lambda = 2(c_1 - c_2)$, $\mu = (1 + c_1^2)/2$. В работе [316] было найдено аналитическое решение уравнения Курамото – Сивашинского типа бегущей волны. В работе [310] была поставлена задача о не-

устойчивости волн в активных средах в двумерном случае при переходе с одного устойчивого фона на другой. Применение метода многомасштабных разложений и в этом случае приводит к уравнению (3.21). При таком подходе v интерпретируется как локальная фазовая скорость бегущей волны.

Когда $v > 0$, (3.21) по свойствам близко к уравнению Бюргера [186]. При $v < 0$ это уравнение может иметь сложные, непериодические решения [296, 297, 396]. В самом деле, в отсутствие члена $\mu \nabla^2 \nabla^2 v$ его решения могут существовать в течение ограниченного времени. Заменой Хопфа — Коула [186] при $v < 0$ оно сводится к линейному уравнению теплопроводности с отрицательным коэффициентом k . Уравнение (3.21) вызывает интерес как одно из простейших модельных уравнений, которое в одномерном случае может описывать хаотические процессы. В работе [343] получены априорные оценки решений краевой задачи $v_x = v_{xxx} = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$ и $v(x, 0) = v^0(x)$, $0 \leq t < \infty$, доказаны теоремы существования и единственности, рассмотрены разностные схемы для этого уравнения.

Вместе с тем расчеты показывают, что во многих областях параметров у решения $W(x, t)$ уравнения (3.8) в пространстве меняется не только фаза, но и амплитуда. Поэтому область применения уравнения (3.21) гораздо меньше, чем исходного, на что обращалось внимание в работах [310, 311].

Рассматривая поведение двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации, мы привели ряд упрощенных моделей. Свойства некоторых из них мы обсудим в следующих главах. Взаимосвязь этих моделей показана ниже на схеме 3.1. Мы видели, что анализ любой модели требует применения компьютеров и самых различных математических методов. В иерархии моделей, представленной на схеме 3.1, есть несколько уровней. Работу над изучением моделей какого-либо из них нельзя считать завершенной. На каждом уровне есть задачи, требующие дальнейшего исследования.

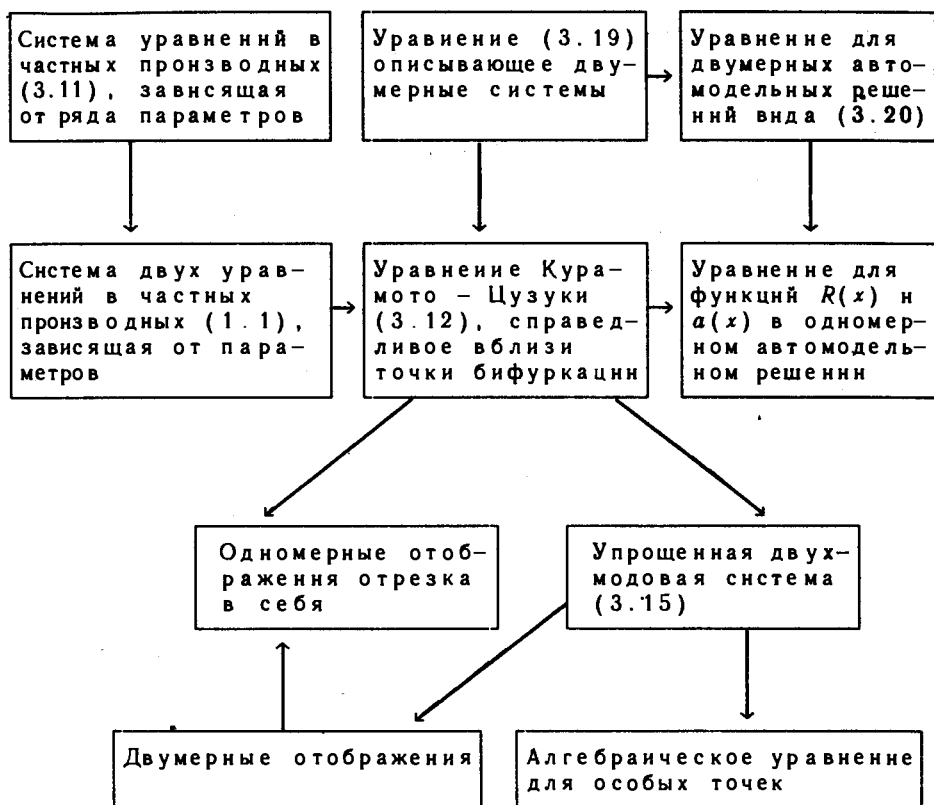


Схема 3.1*

§ 3.3. Другие направления исследований

Наряду с упоминавшимися упрощенными моделями, построенными при анализе систем реакция – диффузия, были предложены некоторые обобщения уравнения Курамото – Сузуки. Оказалось, что близкий подход может быть использован при анализе некоторых гидродинамических систем. Обратим внимание на несколько направлений исследований, возникших в этой связи.

Одно из обобщений уравнения Курамото – Цузуки связано с учетом следующих членов в разложениях по малому параметру в системах реакция – диффузия в окрестности термодинамической ветви. Пусть нелинейные источники в этой системе зависят от двух параметров λ и μ . Запишем уравнение (3.8) в виде

$$W_t = d_0 W_{xx} + (a_1 + a_2 |W|^2)W.$$

Пусть при $\mu < \mu_0$ $\text{Re } a_2 < 0$, при $\mu > \mu_0$ $\text{Re } a_2 > 0$. В последнем случае уравнение Курамото – Цузуки неприменимо: при изменении параметра λ решение скачком меняется на конечную величину. Пример такого поведения дает модель Фиц – Хью – Нагумо [176] и другие модели, где существенную роль играют пороговые эффекты. Для описания таких эффектов в работе [398] предлагается учесть следующие члены и перейти к уравнению

$$W_t = d_0 W_{xx} + (a_1 + a_2 |W|^2 - a_3 |W|^4) W, \quad (3.22)$$

где d_0 , a_1 , a_2 , a_3 – комплексные постоянные. Возможность такого перехода связана с наличием еще одного малого параметра $\sim (\mu - \mu_0)^{1/2}$. Поэтому уравнение (3.22) не обладает такой общностью, как уравнение (3.8), и имеет гораздо меньшую область приложений.

При переходе от исходной системы (1.1) к уравнению (3.8) существенна одномерность задачи: из линеаризованного уравнения можно однозначно определить вид функций f . В многомерном случае ситуация сложнее – у линеаризованной задачи может быть несколько решений, их число существенно зависит от геометрии области. Например, для квадрата $f_1 = \exp\{ikx\}$, $f_2 = \exp\{iky\}$.

Уравнения, описывающие двухкомпонентные системы в случае бифуркации Тьюринга в двумерном и трехмерном случае, рассматривались в работе [346]. Для областей различной геометрии эти уравнения могут составлять системы не

двух, как (3.8), а большего числа уравнений. Их подробный анализ также был бы очень полезен.

В классической теории бифуркаций и в теории нормальных форм существуют стандартные и строго обоснованные процедуры, позволяющие в типичных случаях переходить к асимптотическому локальному описанию [42, 107]. В теории систем реакция – диффузия строгой процедуры перехода от краевой задачи для уравнения (1.1) к краевой задаче для уравнения Курамото – Цузуки до недавнего времени не было.

В последние годы в этой области был получен ряд важных результатов [110, Д3, Д4]. Обратим внимание на некоторые из них.

Будем рассматривать параболическую краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad u(x, 0) = u^0(x), \end{aligned} \tag{3.23}$$

где $u \in R^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 < \varepsilon \ll 1$, матрица D положительно определена, $F(u)$ аналитична и имеет в нуле порядок выше первого. Удобно считать, что $F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots$, где каждое слагаемое линейно по каждому аргументу. В качестве фазового пространства рассматривается пространство $C = C_{[0,1]}(R^2)$. Будем изучать поведение решения задачи (3.23) из некоторой достаточно малой (независимой от ε) окрестности нуля пространства C . Относительно матриц A_0 и D предполагаем, что собственные значения матриц $A(z) = A_0 - zD$ при $z \geq 0$ имеют неположительные вещественные части. Заметим, что в противном случае каждое решение (3.23), лежащее при достаточно больших t в малой окрестности нуля, неустойчиво. Если же вещественные части собственных значений $A(z)$ отрицательны (при $z \geq 0$), то все решения из некоторой (не зависящей от ε) окрестности нуля экспоненциально стремятся к этому состоянию равновесия.

Поэтому будем предполагать, что найдется такое значение $z_0 \geq 0$, для которого $A(z_0)$ имеет собственные значения с нулевой вещественной частью. При этом условии счетное число характеристических показателей (при $F(u) \equiv 0$) задачи (3.23) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. Для простоты будем считать, что значение z_0 единственно.

Предположим, что $z_0 = 0$. Пусть вначале матрица $A_0 = A(0)$ имеет простое нулевое собственное значение: $A_0 a = 0$, $A_0^* \tilde{b} = 0$, $(a, \tilde{b}) = 1$. Из ограничений на $A(z)$ вытекает, что $(Da, \tilde{b}) \geq 0$. Дополнительно предположим, что $(Da, \tilde{b}) > 0$. Специальной системой, играющей роль укороченной нормальной формы, назовем краевую задачу

$$\begin{aligned} \xi_\tau &= (Da, \tilde{b}) \xi_{xx} + (A_1 a, \tilde{b}) \xi + (F_2(a, a), \tilde{b}) \xi^2, \quad \tau = \varepsilon t, \\ \xi_x(0, \tau) &= \xi_x(1, \tau) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Можно показать, что грубому состоянию равновесия $\xi_0(x)$ этой краевой задачи отвечает (при малых ε) состояние равновесия $u_0(x, \varepsilon) = \varepsilon \xi_0(x) + O(\varepsilon^2)$ краевой задачи (3.23) той же устойчивости.

Пусть теперь A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$), а все остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Пусть $A_0 a = i\omega_0 a$, $A_0^* \tilde{b} = -i\omega_0 \tilde{b}$, $(a, \tilde{b}) = 1$, $(\bar{a}, \tilde{b}) = 0$. (A_0^* — комплексно сопряженная матрица, \bar{a} — вектор, комплексно сопряженный к a). Предположим, что $\text{Re}(Da, \tilde{b}) > 0$. Специальной системой, играющей роль укороченной нормальной формы, здесь является краевая задача

$$\begin{aligned} \xi_\tau &= (Da, \tilde{b}) \xi_{xx} + [(A_1 a, \tilde{b}) + d |\xi|^2] \xi, \quad \tau = \varepsilon t, \\ \xi_x(0, \tau) &= \xi_x(1, \tau) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь d — первая ляпуновская величина (комплексная) динамической системы, в которую переходит уравнение (3.24) при $D = 0$ [ДЗ].

Краевая задача (3.25), очевидно, совпадает с (3.12). Исходная переменная $u(t, x, \varepsilon)$ связана с медленной амплитудой $\xi(\tau, x)$ при $d \neq 0$ формулой

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau, x) a e^{i\omega t} + \overline{\xi(\tau, x) a e^{-i\omega t}}] + 0(\varepsilon).$$

Пусть теперь $z_0 > 0$. Тогда матрица $A(z_0)$ имеет на мнимой оси только одно простое нулевое собственное значение: $A(z_0)a = 0$, $A^*(z_0)\tilde{b} = 0$, $(a, \tilde{b}) = 1$. Можно показать, что $(Da, \tilde{b}) = 0$, $\lambda = (Da_1, \tilde{b}) \geq 0$, где a_1 - решение уравнения $A(z_0)a_1 = Da$. Введем также величину $n(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z_0}{\varepsilon}} + \theta$, где $\theta = \theta(\varepsilon) \in (-1, 0]$ и определяется равенством $\theta = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z_0}{\varepsilon}} - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z_0}{\varepsilon}}$. Можно показать, что в этом случае аналогом укороченной нормальной формы является краевая задача

$$\begin{aligned} \xi_t &= \xi_{xx} + 2\pi\theta\eta_x + (a - \pi^2\theta^2)\xi + b\xi(\xi^2 + \eta^2), \\ \eta_t &= \eta_{xx} - 2\pi\theta\xi_x + (a - \pi^2\theta^2)\eta + b\eta(\xi^2 + \eta^2), \\ \xi_x(0, t) &= \xi_x(1, t) = \eta(0, t) = \eta(1, t) = 0, \\ 0 \leq x \leq 1, \quad -1 < \theta \leq 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь a и b - постоянные величины, которые определяются матрицами A_0 , A_1 , D и функцией F . Имеет место следующее утверждение [Д4].

Т е о р е м а 3.1. Пусть при некотором $\theta = \theta_0$ краевая задача (3.26) имеет состояние равновесия $\xi_0(x, \theta_0)$, $\eta_0(x, \theta_0)$ и спектр линеаризованной на этом состоянии равновесия краевой задачи не пересекается с мнимой осью.

Тогда найдется такая последовательность $\varepsilon_k \rightarrow +0$, что система (3.23) имеет состояние равновесия $u_0(x, \varepsilon_k) = \sqrt{\varepsilon_k} [\xi_0(x, \theta_0) \cos(\pi n(\varepsilon_k)x) + \eta_0(x, \theta_0) \sin(\pi n(\varepsilon_k)x)] a + 0(\varepsilon)$ той же устойчивости, что и $\xi_0(x, \theta_0)$, $\eta_0(x, \theta_0)$. Выбор ε_k определяется условием постоянства величины $\theta_0 = \theta(\varepsilon_k)$.

Обратим внимание на интересный качественный эффект, следующий из (3.26). Если в уравнении Курамото – Сузуки данной системе реакция – диффузия соответствовал один набор параметров c_1, c_2, l , то здесь одной системе (3.23) соответствует целый отрезок $a = \text{const}$ и $\theta \in (-1, 0]$, и асимптотический анализ не позволяет указать, какое θ будет реализоваться. Малое возмущение длины области приводит к тому, что система «сдвигается» вдоль линии $a = \text{const}$. При этом может меняться вид решения. Это явление напоминает «чувствительность по отношению к параметрам», ранее изучавшуюся для хаотических систем [258]. Поэтому такое явление естественно назвать «чувствительностью по отношению к малому параметру».

В ряде случаев возникают более сложные аналоги укороченных нормальных форм. Пусть существуют два значения z_{01} и z_{02} , для которых матрица $A(z_{0i})$ ($i = 1, 2$) имеет собственные значения с нулевой вещественной частью. Матрица $A(z_{01})$ имеет на мнимой оси только одно простое нулевое собственное значение $z_{01} > 0$, $z_{02} = 0$ и матрица $A(z_{02})$ имеет пару чисто мнимых собственных значений. Квазинормальной формой в этом случае является краевая задача

$$\begin{aligned} \xi_t &= \xi_{xx} + 2\pi\theta\eta_x + (a - \pi^2\theta^2)\xi + b\xi(\xi^2 + \eta^2) + c\xi|v|^2, \\ \eta_t &= \eta_{xx} - 2\pi\theta\xi_x + (a - \pi^2\theta^2)\eta + b\eta(\xi^2 + \eta^2) + c\eta|v|^2, \\ v_t &= \alpha v_{xx} + \beta v + \gamma v|v|^2 + \delta v(\xi^2 + \eta^2), \\ \xi_x(0, t) &= \xi_x(1, t) = \eta(0, t) = \eta(1, t) = 0, \\ v_x(0, t) &= v_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -1 < \theta \leq 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

где a , b , c и β – действительные параметры, а α , γ и δ – комплексные параметры. Ряд свойств этой модели мы обсудим далее.

Близкий подход, связанный с построением иерархии упрощенных моделей, в последние годы активно развивается при исследовании конвективной неустойчивости.

При этом удается рассматривать системы, длина и ширина которых намного превышает характерные размеры ячеек или конвективных валов. Непосредственное численное моделирование таких неустойчивостей требует решения трехмерной гидродинамической задачи в большой области, что связано с огромным объемом вычислений. В то же время решение уравнений, возникающих при анализе системы в окрестности термодинамической ветви, намного проще. Обычно при этом получаются краевые задачи для системы двух параболических уравнений в двумерной области.

При таком описании часто возникают более сложные уравнения, чем (3.7), в которых фигурируют четвертые производные [341]:

$$W_T = W + \left[\frac{\partial}{\partial X} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right]^2 W - |W|^2 W.$$

Учет различных физических факторов может приводить к усложнению уравнений, получаемых с помощью асимптотических методов [324]. Обсуждение различных способов упрощенного описания конвективной неустойчивости и топологических особенностей возникающих течений можно найти в работе [241]. Численное решение получающихся уравнений обычно дает картину, хорошо согласующуюся с результатами экспериментов [286].

Мы обсудили иерархию упрощенных моделей для случая, когда оба коэффициента диффузии достаточно близки. Однако в настоящее время активно развивается исследование и другого класса моделей типа реакция – диффузия. Один коэффициент диффузии у них намного меньше другого ($D_1 = \epsilon D_2$, $\epsilon \ll 1$). Такие задачи типичны для моделей морфогенеза, экологии, физики полупроводников [32, 52, 166]. В этих системах обычно возникают стационарные диссипативные структуры, называемые *контрастными*. Контрастные структуры содержат чередующиеся участки резкого и плавного изменения переменных.

Пример контрастных структур дают так называемые пиковые структуры, типичный вид которых показан на рис. 3.10. Такие структуры могут наблюдаться в модели Брюсселя-Тора или в модели А.Тьюринга.

Большие сложности вызывает численное моделирование контрастных структур. Оно требует специальных численных методов, включающих построение *адаптивных сеток*, узлы которых сгущаются в окрестности больших градиентов.

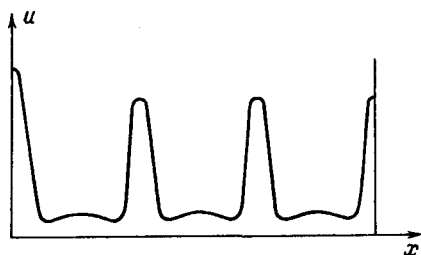


Рис. 3.10

Для их описания естественно воспользоваться асимптотическими методами. Однако стандартный подход здесь неприменим. Эта задача является сингулярно возмущенной: при $\varepsilon = 0$ понижается порядок системы уравнений. Поэтому обычно здесь используются качественные представления, возникшие в теории колебаний [52].

В последние годы в работах А.Б.Васильевой и В.Ф.Бутузова были построены асимптотические разложения решений, описывающих пиковые структуры, и получен ряд строгих результатов. «Всплескам» концентраций при таком подходе соответствуют внутренние пограничные слои [49]. Развитый подход допускает обобщение и на пространственно многомерный случай. Дальнейшее развитие этого важного направления исследований, прежде всего связанное с изучением устойчивости построенных асимптотических решений, представляет большой интерес.

Г Л А В А 4

ОДНОМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Одной из базовых моделей, позволяющих исследовать сложную временную упорядоченность и стохастические режимы в нелинейных средах, являются *отображения отрезка в себя*, или, как их часто называют, *одномерные отображения*.

Исследование одномерных отображений позволило ввести новые понятия, применимые к большому классу диссипативных систем, обнаружить ряд новых явлений, ответить на несколько принципиальных вопросов. Как происходит переход от простейших упорядоченных к стохастическим режимам? Как чередуются в пространстве параметров области, в которых наблюдается порядок и хаос? Как происходит усложнение упорядоченности при изменении параметра? Каковы основные типы стохастических режимов в таких системах и способы их описания?

Обратим внимание на парадоксальность этих вопросов. В самом деле, одномерное отображение — детерминированная система. Тем не менее процессы, которые она описывает, могут обладать рядом стохастических свойств.

Рассмотрим для определенности простейшую модель, приводящую к одномерным отображениям.

Допустим, что нас интересует изменение численности какого-либо вида животных в определенном районе. Один раз в год мы считаем их и получаем число x . По этим данным можно построить последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ($n = 1$ соответствует первому измерению). Для краткости бу-

дем обозначать ее $\{x_n\}$. По-видимому, среди этих чисел есть какая-то закономерность. Естественно ожидать, что численность популяции в данный год x_{n+1} зависит от того, сколько животных было год назад, т. е. от величины x_n . Таким образом, в простейшем случае

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda). \quad (4.1)$$

Здесь f – непрерывная функция, λ – параметр, который зависит от того, какую конкретную задачу мы рассматриваем. Часто используется функция f вида $\lambda x(N-x)$:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(N - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq N. \quad (4.2)$$

Эта формула показывает, что если $\lambda N > 1$, численность вида быстро растет, пока она мала ($x_n \ll N$), и начинает убывать, когда животных становится слишком много. Удобно сделать замену переменных $x_n = x'_n N$, $\lambda = \lambda' / N$, при этом формула (4.2) приобретает вид

$$x'_{n+1} = \lambda' x'_n(1 - x'_n), \quad 0 \leq x'_n \leq 1. \quad (4.3)$$

В дальнейшем штрихи у новых переменных будем опускать.

Нас интересует вопрос о том, что произойдет с различными видами по прошествии достаточно долгого времени. Для ответа на него в этой простейшей модели достаточно выяснить, какой будет последовательность $\{x_n\}$, $n \rightarrow \infty$ при различных значениях λ . Отображения вида (4.1) используются при феноменологическом описании многих других явлений.

§ 4.1. Переход к хаосу. Сценарий Фейгенбаума

При небольших значениях λ ($0 < \lambda < 1$) $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ независимо от выбора x_1 . Поведение последовательности в этом и в других случаях удобно представлять графически.

Нарисуем кривую $y = f(x)$ при выбранном значении λ и прямую $y = x$ (рис. 4.1). Отложим x_1 по оси абсцисс, проведем вертикаль до пересечения с кривой $y = f(x)$ (точка А), затем из нее горизонталь до пересечения с линией $y = x$ (точка В). Теперь вновь проведем вертикаль до пересечения с осью x . Легко проверить, что $x_2 = f(x)$. Взяв точку x_2 за начальную и повторив все те же операции, получим x_3 , затем x_4 и т. д. Из рисунка видно, что $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

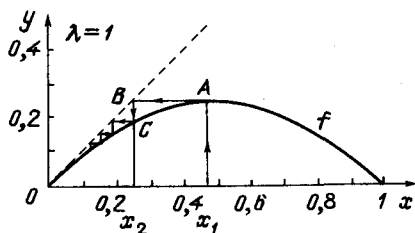


Рис. 4.1

Из формулы (4.3) следует, что функция $f(x)$ переводит отрезок $[0,1]$ в отрезок $[0, \lambda/4]$. Если $\lambda \leq 4$, то все значения x_n лежат на отрезке $[0,1]$ при условии, что $0 \leq x_1 \leq 1$. Именно поэтому говорят, что формула (4.3) задает отображение отрезка в себя.

Пусть теперь λ немного больше единицы. При этом последовательность $\{x_n\}$ ведет себя по-другому (рис. 4.2): $\{x_n\}$ стремится к постоянному значению $x^* > 0$. В применении к исходной биологической задаче это означает, что численность такого вида по прошествии нескольких лет стабилизируется и перестанет меняться со временем.

Значение x^* может быть найдено из уравнения

$$x^* = f(x^*, \lambda). \quad (4.4)$$

Все точки, удовлетворяющие этому уравнению, называются неподвижными точками отображения, так как $x_n = x^*$ при любом n , если $x_1 = x^*$.

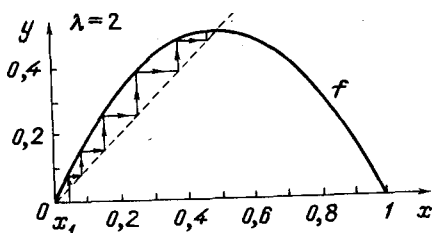


Рис. 4.2

При $\lambda < 1$ квадратное уравнение $x^* = \lambda x^*(1 - x^*)$ имеет один неотрицательный корень $x^* = 0$. При $\lambda > 1$ неотрицательных корней два: $x^* = 0$ и $x^* = (\lambda - 1)/\lambda$. При $\lambda = 1$ неподвижная точка $x^* = 0$ теряет устойчивость, а вновь появившаяся точка становится устойчивой.

Нетрудно определить, будет ли устойчивой неподвижная точка x^* отображения $f(x)$. Пусть $x_n = x^* + \Delta x_n$, где Δx_n — малое число. Если точка устойчива, то с ростом n величина $|\Delta x_n|$ должна уменьшаться. Перепишем формулу (4.1) в виде

$$x^* + \Delta x_{n+1} = f(x^* + \Delta x_n) \approx f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx} \Delta x_n.$$

При анализе устойчивости особых точек обыкновенных дифференциальных уравнений показывается, что в невырожденном случае все определяется линейными членами (первый метод теории устойчивости Ляпунова). Проводя здесь аналогичные рассуждения, можно убедиться, что устойчивость точки x^* определяется поведением отображения

$$\Delta x_{n+1} = \frac{df(x^*)}{dx} \Delta x_n. \quad (4.5)$$

Для того чтобы $\Delta x_n \rightarrow 0$, должно выполняться неравенство

$$\left| \frac{df(x^*)}{dx} \right| < 1. \quad (4.6)$$

Это и есть достаточное условие устойчивости точки x^* . Если выполнено противоположное неравенство, то можно утверждать, что точка x^* будет неустойчивой. Если производная равна единице, то нужно рассматривать следующие члены ряда Тейлора.

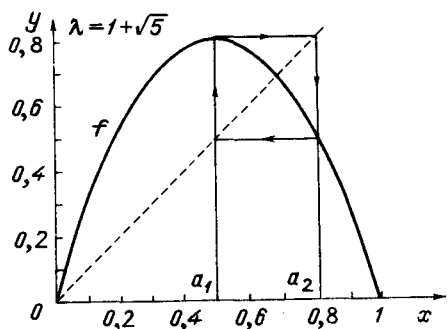


Рис. 4.3

Будем дальше увеличивать параметр λ . Поведение системы снова изменится: в последовательности $\{x_n\}$, начиная с достаточно больших n , будут чередоваться два числа: a_1 и a_2 . (Точнее говоря, последовательность $\{x_n\}$ устроена так, что $x_{2n+1} \rightarrow a_1$, $x_{2n} \rightarrow a_2$ при $n \rightarrow \infty$). Эти числа связаны соотношениями $a_1 = f(a_2)$, $a_2 = f(a_1)$. Будем говорить, что в этом случае отображение (4.3) имеет устойчивый цикл с периодом 2, и обозначать его S^2 . Рис. 4.3 показывает, как выглядит цикл S^2 на графике.

Переход от неподвижной точки (ее можно считать циклом S^1) к циклу S^2 произошел в результате бифуркации, которая получила название *бифуркации удвоения периода*. Точка x^* при этом не исчезла, однако величина $\frac{df(x^*)}{dx}$ стала меньше -1 .

При дальнейшем увеличении λ последовательность $\{x_n\}$ опять изменяется. Возникает цикл S^4 : $x_{4m} \rightarrow a_1$, $x_{4m+1} \rightarrow a_2$, $x_{4m+2} \rightarrow a_3$, $x_{4m+3} \rightarrow a_4$ при $m \rightarrow \infty$, причем $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, $a_4 = f(a_3)$, $a_1 = f(a_4)$ (рис. 4.4).

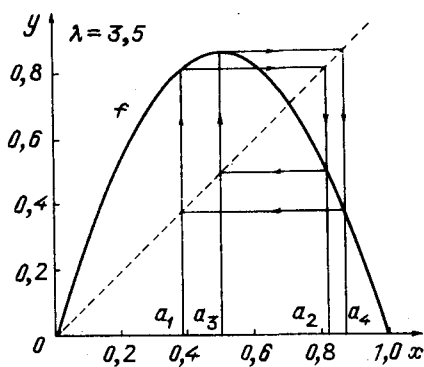


Рис. 4.4

Увеличивая далее значение параметра λ , мы увидим циклы S^8 , S^{16} , S^{32} и т. д. При этом каждый раз цикл S^{2^p} теряет устойчивость, происходит бифуркация удвоения периода, и устойчивым становится цикл $S^{2^{p+1}}$. Наконец, при некотором значении λ (его иногда обозначают λ_∞) формула (4.3) дает уже непериодическую последовательность $\{x_n\}$.

Наблюдаемая картина оказывается очень интересной. Во-первых, в поразительно простой модели (4.1) заложено очень сложное поведение. Во-вторых, в ней удастся проследить большое количество бифуркаций, приводящих к усложнению решения. Сделать это в более сложных моделях гораздо труднее. В-третьих, при $0 < \lambda < \lambda_\infty$ устойчивы только циклы, период которых равен 2^p . Хотелось бы понять, чем это вызвано, и изучить поведение модели более подробно.

Наряду с отображением (4.1), удобно рассмотреть отображение

$$x_{n+1} = f(f(x_n)) \equiv f^2(x_n). \quad (4.7)$$

В этой главе $f^n(x)$ всегда будет соответствовать n -й итерации функции f . В нашем случае вид функции $f^2(x)$ показан на рис. 4.5 и 4.6. Первый рисунок соответствует устойчивой неподвижной точке, второй — устойчивому циклу S^2 . График $f^2(x)$ пересекается с прямой $y = x$ во всех неподвиж-

ных точках отображения, а также в точках, принадлежащих циклам S^2 , потому что $a_2 = f(a_1) = f(f(a_2))$, $a_1 = f(a_2) = f(f(a_1))$. Увеличивая параметр λ , мы растягиваем функцию $f^2(x)$ вдоль оси y . И если при некотором значении λ линии $y = x$ и $y = f^2(x)$ пересекаются в одной точке (см. рис. 4.5), то с увеличением λ могут появиться еще две точки пересечения (см. рис. 4.6). Они-то и будут определять цикл S^2 . Переход $S^1 \rightarrow S^2$ в отображении $f(x)$ обусловлен тем, что в отображении $f^2(x)$ одна из неподвижных точек теряет устойчивость, и в ее окрестности появляются две новые устойчивые неподвижные точки. Рассматривая функции $f^4(x)$, $f^8(x)$ и т. д., можно увидеть, как происходят следующие удвоения. В каждом из этих случаев одна точка теряет устойчивость и появляются две другие устойчивые точки, поэтому период цикла удваивается. При этом возникновение устойчивого цикла S^4 у отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ связано с появлением двух устойчивых циклов у отображения f^2 и четырех неподвижных точек у f^4 .

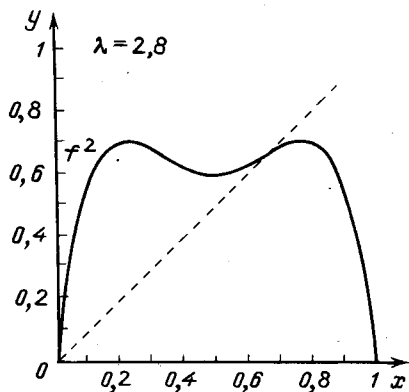


Рис. 4.5

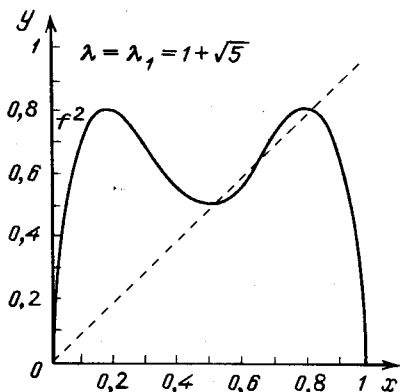


Рис. 4.6

Действуя так же, как в случае неподвижной точки, можно показать, что устойчивость цикла S^P с элементами x_1, \dots, x_P будет определяться формулой $\left| \frac{df^P(x_k)}{dx} \right| < 1$, $k = 1, \dots, P$.

..., P . Продифференцировав эту функцию, легко убедиться, что это эквивалентно неравенству

$$\left| \frac{df(x_1)}{dx} \times \dots \times \frac{df(x_p)}{dx} \right| < 1. \quad (4.8)$$

Из этой формулы следует также, что величина $\left| \frac{df^P}{dx} \right|$ будет одной и той же во всех точках цикла S^P .

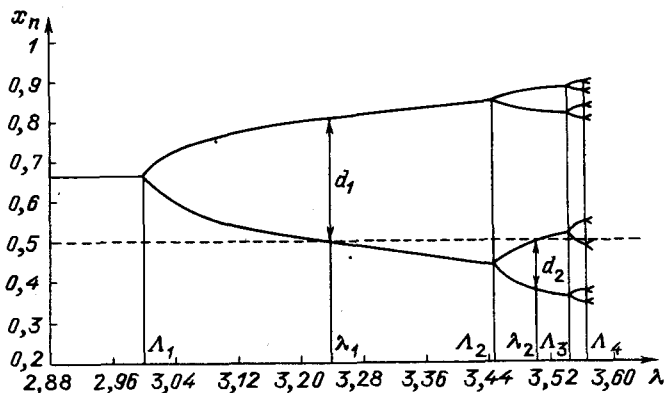


Рис. 4.7

Оказалось, что на примере модели (4.3) удается понять не только качественные, но и количественные закономерности возникновения хаоса. Чтобы проследить за ними, построим график $x(\lambda)$. По оси x будем откладывать x_1, x_2, \dots, x_p , лежащие на устойчивом цикле, по оси λ — значения параметра. Циклу S^2 будут соответствовать две точки на одной вертикали, циклу S^4 — четыре, и т. д. Обозначим через $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$ те значения параметра λ , в которых происходили удвоения, а через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ — значения параметра, при которых $x = 1/2$ является элементом цикла S^2, S^4, S^8 , и т. д. (такие циклы называются *сверхустойчивыми*). Введем также величины $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$, равные расстоянию между $x = 1/2$ и ближайшим к нему элементом цикла S^{2^n} при $\lambda = \lambda_n$. Все эти обозначения пояснены на рис. 4.7.

Расчеты, проведенные на ЭВМ, показали, что числа Λ_n и λ_n при больших n ведут себя как геометрическая прогрессия. Ее знаменатель равен $\delta = 4,6692016\dots$. Другими словами,

$$\frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta. \quad (4.9)$$

Отношение d_n/d_{n+1} также имеет предел, равный α , где $\alpha = 2,5029078\dots$.

Можно вместо (4.3) рассмотреть другое семейство симметричных функций, имеющих на отрезке $[0,1]$ один максимум и близких около вершины к квадратичной параболе, в котором также происходит бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода при изменении параметра λ . Оказалось, что в любой такой модели числа α и δ будут одними и теми же. Более того, независимо от вида $f(x)$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n}((x - 0,5)/(-\alpha)^n, \lambda_n)$ существует и будет одним и тем же. Его называют *универсальной функцией* $g_0(x)$.

Эти удивительные закономерности были обнаружены и поняты американским математиком М.Фейгенбаумом в 1978 году [261 – 263]. М.Фейгенбаум предложил функциональные уравнения, определяющие α , δ , $g_0(x)$. В силу универсальности чисел α , δ , $g_0(x)$ и других функций такого типа, эту теорию называют *теорией универсальности*. То, что переход к хаосу во многих одномерных отображениях происходит в результате бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода, было установлено в ряде предшествующих работ [201, 327]. Однако свойство (4.9) и существование универсальных функций получили объяснение именно в этой теории.

В этой теории применяется метод ренорм-группы, широко используемый в квантовой теории поля и статистической физике. При таком подходе постоянная α может быть определена из уравнения, которое имеет наглядный геометрический смысл.

Сравним рис. 4.3 и 4.8. Элемент кривой $f^2(x)$, попавший внутрь меньшего квадрата, очень похож на дугу функций

$f^1(x)$, содержащуюся внутри квадрата на рис. 4.3. Практически, они отличаются только масштабом и ориентацией осей. Расчеты показывают, что для функций f^{2^n} , $n > 1$, при $\lambda = \lambda_n$ такое подобие также имеет место. Оно выполняется тем точнее, чем больше n .

Пусть для некоей функции $g(x)$ такое подобие выполняется точно. Если считать, что коэффициент растяжения вдоль обеих осей равен α , то для функции $g(x)$ можно получить функциональное уравнение

$$g(x) = -\alpha g\left(\frac{x}{\alpha}\right) \equiv (Tg)(x). \quad (4.10)$$

Оно позволяет определить как функцию $g(x)$, так и значение α . Функция g определена на отрезке $[-1, 1]$; считается, что она имеет единственный максимум при $x = 0$ и симметрична: $g(x) = g(-x)$. Вблизи максимума $g(x)$ должна быть близка к квадратичной параболе, причем $g(0) = 1$. Оператор T называется *преобразованием удвоения* [261, 262].

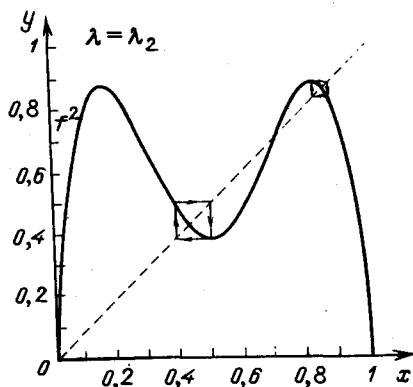


Рис. 4.8

В теории универсальности рассматривается пространство отображений отрезка $[-1, 1]$ в себя таких, что $f(x) \in C^2([-1, 1])$, $x = 0$ является точкой максимума $f(0) = 1$. Это пространство инвариантно относительно преобразования T .

Уравнение Фейгенбаума определяет неподвижную точку g преобразования удвоения. Спектр $DT(g)$ линеаризованного преобразования в точке g лежит внутри единичного круга, за исключением собственного значения $\delta = 4,6992\dots$, которое и определяет постоянную Фейгенбаума. Этому собственному значению соответствует одномерная неустойчивая сепаратриса $\Gamma^u(g)$, состоящая из отображений, удаляющихся от $g(x)$ под действием преобразования T (рис. 4.9). По другим направлениям, принадлежащим устойчивой сепаратрисе $\Gamma^s(g)$, отображения стремятся к этой точке.

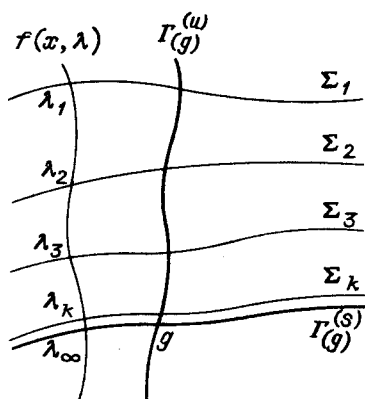


Рис. 4.9

Обозначим через Σ_1 поверхность в функциональном пространстве, на которой в отображениях происходит первая бифуркация удвоения периода. Далее обозначим

$$\Sigma_2 = T^{-1}\Sigma_1, \dots, \Sigma_k = T^{-1}\Sigma_{k-1}$$

При пересечении поверхности Σ_k происходит k -ая бифуркация удвоения: из устойчивого цикла периода 2^{k-1} рождается устойчивый цикл периода 2^k .

Оказалось, что поверхности Σ_k сходятся к $\Gamma^s(g)$, причем при больших k расстояние между Σ_{k+1} и $\Gamma^s(g)$ в δ раз меньше, чем расстояние между Σ_k и $\Gamma^s(g)$. Поэтому бифуркационные значения параметров для любого семейства отображений $f(x, \lambda)$ образуют геометрическую прогрессию.

Подробное обсуждение ряда строгих результатов теории универсальности и ссылки на оригинальные работы можно найти в книге [235] и обзоре [57]. Имеющиеся доказательства существенно опираются на результаты вычислений на ЭВМ. С помощью ЭВМ решается уравнение Фейгенбаума, ищутся постоянные α и δ . Для решения этих задач можно использовать различные методики [28, 262]. Теория универсальности применима и к случаю, когда вершина является гладкой, но не квадратичной. Однако при этом постоянные α и δ оказываются другими [262].

Интересным объектом является предельное множество, возникающее после бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода ($\lambda = \lambda_\infty$), называемое *аттрактором Фейгенбаума*. Оно обладает сложной структурой, повторяющей себя на меньших масштабах. В частности, с аттрактором Фейгенбаума существует бесконечное количество неустойчивых циклов типа S^{2^p} . Структура и эргодические свойства предельных множеств одномерных отображений при $\lambda = \lambda_\infty$ подробно обсуждаются в работе [57]. В окрестности точки λ_∞ аттракторы имеют характерный спектр мощности, по которому можно судить о том, что в эксперименте реализуется сценарий перехода к хаосу, связанный с бесконечным каскадом бифуркаций удвоения периода [235].

В соответствии со сценарием Фейгенбаума происходит переход к хаосу во многих диссипативных системах, в некоторых нелинейных средах [19, 68]. Поэтому особый интерес представляет обобщение результатов теории универсальности на отображения более высокой размерности. В частности, изучались двумерные преобразования $R^2 \rightarrow R^2$, близкие к отображению F :

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\sqrt{x^2 - y}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где g – универсальная функция, являющаяся решением уравнения (4.10) $(g(x) = 1 - 1,52763x^2 + 0,104815x^4 -$

$0,0267057x^6 + \dots$). Было доказано, что в каждом двумерном семействе отображений $R^2 \rightarrow R^2$, которое проходит достаточно близко к F , происходит бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода при λ_k , λ_k имеют предел λ_∞ и $|\lambda_n - \lambda_\infty| \approx \text{const} \cdot \delta^{-n}$ [235].

Таким образом, переход от простейших упорядоченных к непериодическим режимам в соответствии со сценарием Фейгенбаума связан с бесконечным каскадом бифуркаций удвоения периода. При этом точки бифуркации расположены в соответствии с геометрической прогрессией со знаменателем δ . Хаос (непериодическая последовательность при λ_∞) здесь выступает как предел сверхсложной временной упорядоченности.

§ 4.2. Переमेжаемость

Переход к хаосу может происходить по-разному даже в простейших физических системах. Например, в гидродинамике было описано следующее явление. Если наблюдать за течением достаточно долго, не изменяя его параметров, то можно увидеть, что в упорядоченном ламинарном потоке вдруг появляются вихри, поведение которых кажется случайным. Затем картина течения вновь становится простой и регулярной до появления следующих вихрей. Это явление получило название *перемежаемости*. Регулярный режим перемежается с «островками» хаоса.

Простейшую модель, позволяющую объяснить это явление, предложили П.Манневиль и И.Помо в 1980 году [325]. Ее можно проиллюстрировать на примере семейства одномерных отображений (4.3).

При некотором значении λ ($\tilde{\lambda} = 3,83$) из хаоса скачком появляется устойчивый цикл S^3 . Чтобы понять происходящее, рассмотрим одномерное отображение $f^3(x) = f(f(f(x, \lambda)))$ до того, как цикл появился, $\lambda < \tilde{\lambda}$ (рис. 4.10, а), и после этого, $\lambda > \tilde{\lambda}$ (рис. 4.10, б). При увеличении параметра λ кри-

вая $f^3(x)$ становится круче, и у нее появляются новые точки пересечения с прямой $y = x$. Они обозначены буквами $M_{1,2,3}$ и $N_{1,2,3}$ на рис. 4.10, б. Все они являются неподвижными точками отображения $f^3(x)$. Производная функции $f^3(x)$ в точках M_1, M_2, M_3 (см. формулу(4.8)) одинакова и по модулю не превосходит единицы. Именно эти точки и определяют устойчивый цикл S^3 . Наклон в точках $N_{1,2,3}$ также одинаков, но там выполняется противоположное неравенство. В отображении f им соответствует неустойчивый цикл S^3 , который появился одновременно с устойчивым.

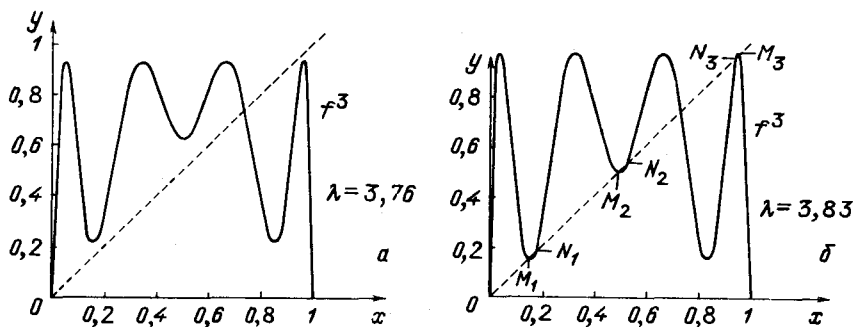


Рис. 4.10

Одновременное появление устойчивой и неустойчивой особой точки получило название *тангенциальной бифуркации*. Название связано с тем, что в точке бифуркации кривая $f(x)$ касается диагонали $y = x$. Соответственно производная $\frac{df}{dx}$ в этой точке равна единице.

Зададим какое-нибудь начальное значение x_1 и посмотрим, как действует отображение f^3 , когда $\lambda > \tilde{\lambda}$ и $\lambda < \tilde{\lambda}$. Другими словами, мы будем следить за каждым третьим элементом последовательности $\{x_n\}$. Расчеты показывают, что в первом случае после длительного переходного процесса точки притягиваются к циклу S^3 (рис. 4.11, а). Во втором случае вначале происходит медленное движение к точке M (рис. 4.11, б). Однако потом элементы последовательности быстро

отходят от этой точки. В дальнейшем они вновь начинают приближаться к ней. Такое поведение для одного из отображений с острой вершиной иллюстрирует рис. 4.12. Видно, что интервалы движения к точке M , когда решение похоже на регулярное, чередуются в нем с быстрыми хаотическими выбросами. В зависимости x_n от n короткие турбулентные всплески чередуются с длительными промежутками «ламинарной фазы» (см. рис. 4.12, б). В этой простейшей модели есть перемежаемость.

Анализ реальных систем с перемежаемостью вблизи точки тангенциальной бифуркации может представлять значительные трудности, так как в течение длительного времени может наблюдаться только ламинарная фаза.

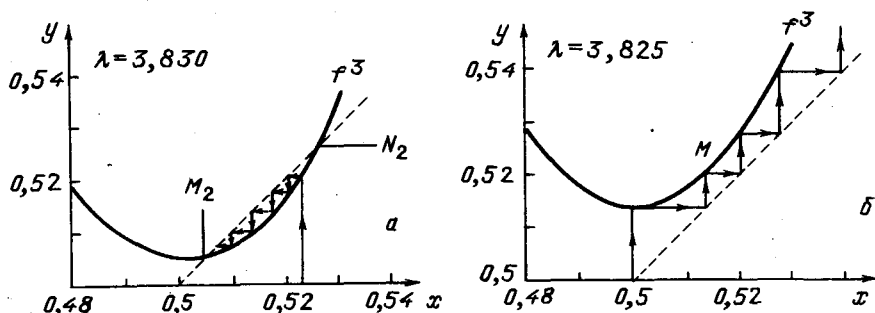


Рис. 4.11. Функция f^3 в большем масштабе: а) точка M соответствует устойчивому циклу S^3 , точка N — неустойчивому циклу; б) характерная картина перед возникновением цикла S^3 в результате тангенциальной бифуркации

Можно оценить, как зависит продолжительность Δt ламинарной фазы от параметра λ . Пусть при $\lambda = 0$ происходит тангенциальная бифуркация. Из рис. 4.11 ясно, что на интересующем нас участке отображение $f^3(x)$ (или $g(x)$, см. рис. 4.12) может быть приближено отображением

$$x_{n+1} = x_n + ax_n^2 - \lambda. \quad (4.11)$$

Поскольку $x_{n+1} - x_n \ll 1$ (при $\lambda \rightarrow 0$), формулу (4.11) можно аппроксимировать дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = ax^2 - \lambda.$$

Интегрируя его, можно убедиться, что время Δt (а значит, и количество итераций), которое траектория $x(\tau)$ проводит вблизи нуля, пропорционально $\lambda^{-1/2}$.

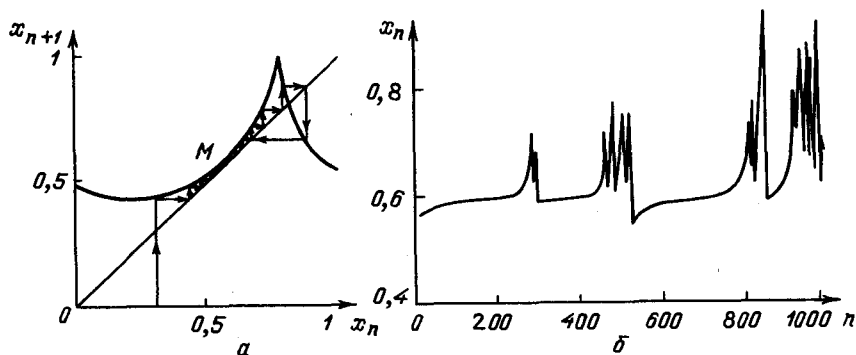


Рис. 4.12. Типичная картина перемежаемости: а) несколько итераций отображения $x_{n+1} = 1 - |x_n - \lambda|^{1/2} / [1 + (x_n - \lambda)^2]$, $\lambda = 0,769$; б) зависимость точек последовательности от номера итерации. Для наглядности x_n и x_{n+1} соединены, $x_1 = 0,01$

Именно такая зависимость и наблюдается в расчетах. Переход к хаосу, связанный с перемежаемостью, наблюдается во многих сосредоточенных системах [150, 204] и, по-видимому, характерен для большого класса нелинейных сред.

§ 4.3. Аттракторы одномерных отображений

До сих пор, рассматривая одномерные отображения, мы не уточняли, с каких начальных данных происходит выход на тот или иной установившийся режим. Вместе с тем кажется естественным, что во многих случаях выбор начального значения может определить поведение системы при $n \rightarrow \infty$. Обсудим этот вопрос подробнее.

Интуитивное представление об установившемся режиме может быть связано с понятием *притягивающего множества*, или *аттрактора* [134]. Аттрактором называется замкнутое множество A , которое является инвариантным относительно отображения f ($f(A) = A$) и имеет область притяжения U_0 ($U_0 \supset A$), все точки из которой попадают в A (т. е. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U_0)$). Иногда в определение аттрактора включают свойство неразложимости, означающее, что A нельзя разделить на две замкнутые непересекающиеся инвариантные части.

Приведем примеры аттракторов. Пусть отображение (4.3) при $\lambda = \bar{\lambda}$ (например при $\bar{\lambda} = 2$) имеет устойчивую неподвижную точку x^* . Она и является аттрактором. В самом деле $f(x^*) = x^*$, и мы видели, что существует достаточно малая окрестность точки x^* , из которой все точки стремятся к x^* . Вместе с тем нельзя сказать, что итерации всех точек отрезка стремятся к x^* , ($f^n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$).

Другим примером может служить устойчивый цикл S^n .

Можно ожидать, что в общем случае одномерное отображение имеет несколько аттракторов, выход на которые происходит в зависимости от начальных данных. Наиболее подробно этот вопрос исследован для класса так называемых S – унимодальных отображений [235, 370], к которым, в частности, после замены переменных можно привести семейство (4.3).

Функция f называется унимодальной, если:

1. f непрерывна;
2. $f(0) = 1$;
3. f строго убывает на $[0, 1]$ и строго возрастает на $[-1, 0]$.

Если, кроме того,

4. f непрерывно дифференцируема и $f'(x) = 0$ при $x = 0$ то $f(x)$ называется C^1 – унимодальной.

Производной Шварца $Sf(x)$ будем называть функцию

$$Sf(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2. \quad (4.12)$$

Функция $f(x)$ называется S – унимодальной, если:

1. f является C^1 – унимодальной;

2. $f \in C^3$;

3. $Sf(x) < 0$ для всех $x \in [-1, 1]$; в точке $x = 0$ $Sf(x)$ может быть равна $-\infty$;

4. f'' отображает $[f(1), 1]$ на себя;

5. $f'(0) < 0$.

Справедливы следующие утверждения [235].

Т е о р е м а 4.1. Если отображение f S – унимодально, то оно имеет не более одного устойчивого цикла и, возможно, устойчивую неподвижную точку на интервале $[-1, f(1)]$.

Т е о р е м а 4.2. Если f S – унимодально и имеет устойчивый цикл, то мера тех точек, которые не сходятся к нему, равна нулю.

Т е о р е м а 4.3. Если f S – унимодально и имеет устойчивый цикл, то итерации точки $x = 0$ сходятся к нему.

Последнее утверждение дает способ строить отображения, не имеющие устойчивых циклов. Для этого нужно проследить, чтобы одна из итераций нуля попала в неустойчивую точку или неустойчивый цикл.

Простейший пример такой функции был приведен С.Уламом и Дж.Нейманом в 1947 году. Это функция $f_1(x) = 1 - 2x^2$; $f(0) = 1$, $f^2(0) = -1$, $f^k(0) = -1$ при $k > 2$, но $f(-1) = 4$.

Итерации этого отображения дают пример хаотического поведения. Рассмотрим его более подробно. Можно проверить, что замена переменных

$$y = \frac{4}{\pi} \left[\arcsin \sqrt{\frac{x+1}{2}} \right] - 1$$

приводит его к виду

$$y_{n+1} = 1 - 2|y_n|. \quad (4.13)$$

Можно исследовать свойства последовательности $\{y_n\}$, пользуясь очень простыми соображениями. Пусть y_1 имеет k знаков после запятой ($k+1$ -й, $k+2$ -й и все остальные знаки

равны нулю). Тогда можно проверить, пользуясь формулой (4.13), что y_2, y_3 и все остальные элементы последовательности $\{y_n\}$ будут иметь столько же или меньше знаков. Однако чисел, у которых есть только k знаков, а все остальные нули, не больше, чем $N_k = 10^k$. Следовательно, через $N < N_k$ элементов в последовательности $\{y_n\}$ начнут появляться одинаковые числа. Такие же рассуждения можно провести, если y_1 — рациональное число, $y = p/q$, $-1 \leq y_1 \leq 1$, p и q — целые числа. Все эти циклы будут неустойчивы, так как $\left| \frac{df(y_1)}{dy} \times \dots \times \frac{df(y_n)}{dy} \right| = 2^n > 1$ для любого цикла S^n (см. формулу (4.8)).

Верно и обратное утверждение: если отображение (4.13) имеет цикл, то все его элементы и их прообразы являются рациональными числами (его нетрудно доказать, пользуясь рассуждениями от противного).

Мы получили интересный качественный вывод: любое рациональное число дает цикл, любое иррациональное — непериодическую траекторию. Но все рациональные числа, лежащие на отрезке $[-1, 1]$, можно перенумеровать (они образуют счетное множество), иррациональные — нет. Можно построить такую систему интервалов, которая будет иметь сколь угодно малую общую длину и содержать все рациональные числа. Координата взятой наугад точки почти всегда оказывается иррациональной и определяет хаос. Если бы при анализе отображения (4.13) мы опирались только на результаты численных расчетов, то пришли бы к противоположному выводу: всегда наблюдались бы циклы, поскольку все начальные значения y_1 ЭВМ хранит с конечным числом десятичных знаков.

Как охарактеризовать непериодические траектории отображения (4.13)? Естественно поступить так же, как при исследовании случайных процессов — определить, с какой вероятностью элементы $\{y_n\}$ попадают в окрестность точки y .

В этом случае естественно рассматривать не одну динамическую систему вида (4.1), а целый ансамбль таких систем. Начальные точки x_1 у каждой из систем определенным

образом распределены по всему отрезку. Это распределение удобно характеризовать некоторой мерой ν . Будем полагать, что $\nu([-1, 1]) = 1$.

Точки $x_2 = f(x_1)$ будут иметь уже другое распределение. В окрестность некоторой точки x_2 попадут точки, ранее лежавшие в окрестности всех прообразов точки x_2 : x_1, \dots, x_k ; $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k) = x_2$.

Исходя из этого, можно ввести меру μ , определенную равенством $\mu(E) = \nu(f^{-1}E)$, где E — любое измеримое подмножество отрезка $[-1, 1]$. При этом говорят, что отображение f переводит меру ν в меру μ ; μ называют образом меры ν под действием отображения f и обозначают через $f\nu$.

Меру ν называют *инвариантной* для преобразования f , если $\nu = f\nu$, т. е. $\nu(E) = \nu(f^{-1}(E))$.

Пусть μ_1 и μ_2 — две меры на $[-1, 1]$. Говорят, что μ_1 *абсолютно непрерывна относительно μ_2* , если для любого подмножества A из $\mu_2(A) = 0$ следует $\mu_1(A) = 0$.

Когда мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то определена и принадлежит пространству L_1 плотность меры $\rho(x) = \frac{d\nu}{dx}$ ($\nu(dx) = \rho(x)dx$).

Для многих отображений можно доказать следующее утверждение. Если задать некоторую меру μ и вычислить n ее итераций, то последовательность $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} f^k \mu$ сходится к инвариантной мере, характеризующей аттрактор этого отображения [207, 235].

Отображение f может иметь много инвариантных мер. Однако предельная мера, к которой происходит сходимость, оказывается наиболее важной. Сходимость к инвариантной мере связана с «забыванием начальных данных», характерным для диссипативных систем, с выходом на аттрактор.

Приведем несколько примеров. Циклам S^p соответствуют меры, у которых $\rho(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \delta(x - x_p)$ представляет собой p δ -функций. Для отображения (4.13) $\rho(x) = 1/2$. У преобразования $f(x) = (1 - 2x^2)$ $\rho(x)$ обладает особенностями: $\rho(x) =$

$= \frac{1}{\pi\sqrt{-x^2+1}}$ (рис. 4.13, а); $\rho(x)$ может представлять собой линейную функцию (рис. 4.13, б, $f(x) = 1 - 2\sqrt{|x|}$, $\rho(x) = \frac{1-x}{2}$).

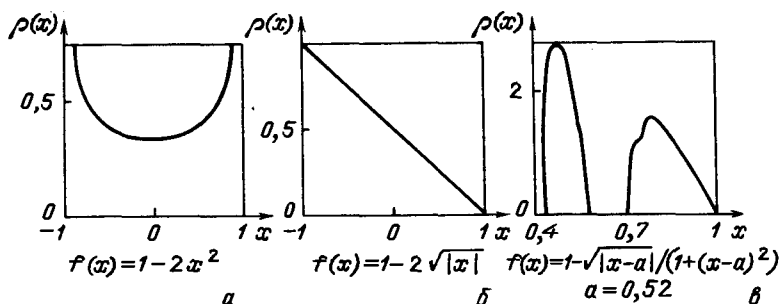


Рис. 4.13. Примеры инвариантных мер одномерных отображений

Существуют другие аттракторы одномерных отображений, занимающие промежуточное положение между устойчивыми циклами и стохастическими режимами. Они получили название *шумящих циклов* или *полупериодических траекторий*. Когда отображение имеет шумящий цикл, на отрезке $[-1, 1]$ можно выделить набор непересекающихся отрезков I_1, \dots, I_p , которые содержат итерации почти всех точек. В этом случае χ — инвариантная мера — сосредоточена на p «островах» (см. рис. 4.13, в). Такие аттракторы будем обозначать χ^p . Порядок обхода островов оказывается строго фиксированным, поэтому можно точно предсказать, в пределах какого из островов окажется элемент x_n при любом n (это сближает их с циклами). Однако положение точки в пределах каждого острова при больших n меняется случайным образом, и в этом смысле они близки к стохастическим режимам.

Для некоторых классов одномерных отображений можно доказать существование абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) инвариантной меры. К ним, в частности, относятся *всюду растягивающие отображения* [207, 235], у которых

$$\left| \frac{df}{dx} \right| \geq C_1 > 1.$$

Можно получить представление об инвариантной мере с помощью ЭВМ, построив гистограмму последовательности $\{x_n\}$.

Разобьем интервал $[-1, 1]$ на равные отрезки длины ε и каждому отрезку сопоставим число n_i . Вначале $n_i = 0$ для любого i . Значение n_i увеличивается на единицу, если элемент x_n попадает в i -й интервал. Затем n_i делятся на общую длину выборки N .

Во многих случаях

$$\rho(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} n_i / N.$$

Однако получение $\rho(x)$ с достаточно высокой точностью требует больших выборок. Можно действовать иначе. Исходя из определения инвариантной меры, выводится уравнение, определяющее $\rho(x)$, которое называется *уравнением Перрона – Фробениуса*:

$$\rho(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\rho(y)}{|f'(y)|}, \quad (4.14)$$

где сумма берется по всем прообразам точки x .

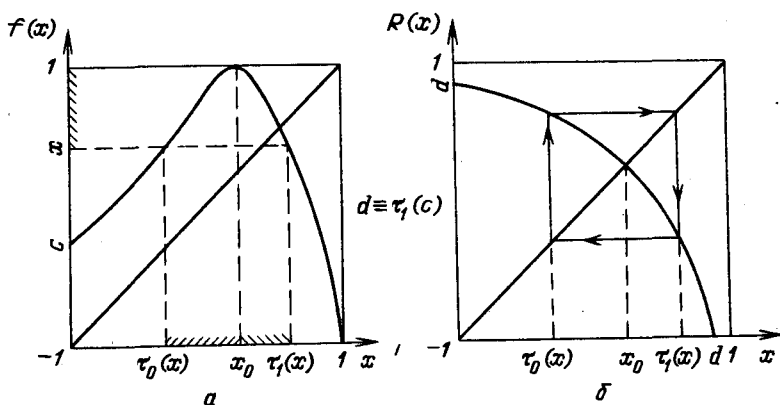


Рис. 4.14

Решение этого уравнения для одного отображения, возникающего в теории чисел, было известно еще Гауссу. Однако

в большинстве случаев аналитических решений найти не удастся. Здесь можно применять различные численные методы [84, 135].

Представляет интерес и обратная задача — по данной инвариантной мере (статистической характеристике) определить отображение f (динамику системы). Обсудим эту задачу подробнее, следуя работе [Д10]. Будем считать, что инвариантное распределение μ отлично от нуля на целых отрезках, а также что отображение f имеет один максимум. Определим ветви обратной функции $\tau_0(x)$, $\tau_1(x)$. Например, для случая, показанного на рис. 4.14,а, $\tau_0(x) = -1$ при $x \leq c$. Определим функцию $\varphi(x) = \mu([x, 1])$, $\varphi(-1) = 1$, $\varphi(1) = 0$. Тогда, учитывая, что рассматривается инвариантная мера, получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \mu([x, 1]) &= \mu(f^{-1}([x, 1])) = \mu([\tau_0(x), \tau_1(x)]) = \\ &= \varphi(\tau_0(x)) - \varphi(\tau_1(x)), \end{aligned} \quad (4.15)$$

что ясно из рис. 4.14,а. Поскольку $\tau_0(x) \in [-1, x_0]$, $\tau_1(x) \in [x_0, 1]$, то можно ввести функцию $R(x)$, переводящую прообраз в прообраз: $R(\tau_0(x)) = \tau_1(x)$, $R(\tau_1(x)) = \tau_0(x)$ (рис. 4.14,б). Эта функция монотонно не возрастает, и по определению $f(R(x)) = f(x)$. С учетом сказанного (4.15) можно записать в виде

$$\varphi(z) = \varphi(\tau_0(z)) - \varphi(R(\tau_0(z))).$$

Обозначив $x = \tau_0(z)$, $x' = \tau_1(z) = R(x)$, получим

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) - \varphi(R(x)), \quad -1 \leq x \leq x_0,$$

$$\varphi(f(x')) = \varphi(R(x')) - \varphi(x'), \quad x_0 \leq x' \leq 1.$$

Объединяя эти уравнения в одно, и учитывая, что $f(x) = f(x') = z$, получим

$$\varphi(f(x)) = |\varphi(x) - \varphi(R(x))|, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Если $\rho(x) > 0$, то φ монотонна и существует φ^{-1} , откуда

$$f(x) = \varphi^{-1}(|\varphi(x) - \varphi(R(x))|). \quad (4.16)$$

Из этих преобразований следует, что любая унимодальная функция $f(x)$, имеющая инвариантное распределение $\rho(x) = -\varphi'(x)$ и такая, что $f(R(x)) = f(x)$, удовлетворяет (4.16). Можно доказать обратное [Д10]. Если соблюдаются следующие условия:

- 1) $R(x)$ монотонно не возрастает,
- 2) $R(R(x)) = x$,
- 3) $R([-1, 1]) = [-1, 1]$,

то для любой такой функции R функция $f(x) = \varphi^{-1}(|\varphi(x) - \varphi(R(x))|)$ будет иметь инвариантное распределение $\rho(x) = -\varphi'(x)$ и удовлетворять дополнительному условию $f(R(x)) = f(x)$.

Формула (4.16) позволяет строить отображения с данной мерой. Оказывается, например, что существует бесконечное множество унимодальных отображений, порождающих на отрезке $[-1, 1]$ меру с плотностью $\sim e^{-x^2/\sigma^2}$ (при заданном σ). Примеры двух таких функций показаны на рис. 4.15.

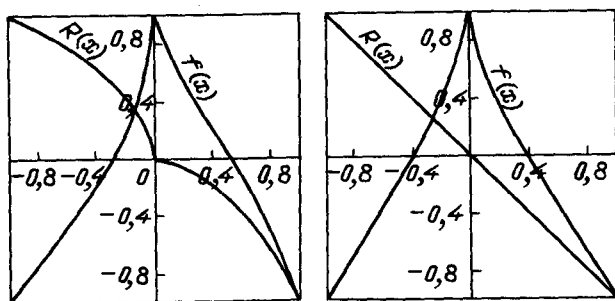


Рис. 4.15

Обсудим вопрос об устойчивости итераций одномерных отображений. Для этого рассмотрим итерации точки x_1 и близкой к ней $x' = x_1 + \Delta x$. Рассуждая так же, как при ис-

следовании цикла S^p , и устремляя Δx к нулю, можно проверить, что устойчивость траектории $\{x_n\} = \{x_1, f(x_1), f^2(x_1) \dots\}$ определяется величиной

$$\lambda(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{\partial f^n(x_1)}{\partial x} \right|,$$

$\lambda(x_1)$ называется ляпуновским показателем. Во многих случаях можно доказать, что почти все точки x_1 дают одни и те же значения λ [235].

Если $\lambda < 0$, то траектория $\{x_n\}$ устойчива, все достаточно близкие траектории стремятся к ней. Если $\lambda > 0$, то пути двух близких точек экспоненциально расходятся. Это свойство часто называют *чувствительностью к начальным данным*. Если такая чувствительность обнаруживается в какой-то системе, то мы практически не можем предсказать ее поведение в будущем.

В применении к модели (4.1) это означает следующее. Если x_1, x_1' достаточно близки, то близки будут и первые члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{x_n'\}$, но, начиная с некоторого номера N , их элементы начинают изменяться совершенно различным образом. Можно сделать вывод, что хаос, который практически не позволяет прогнозировать ход процесса, может описываться уже простейшей явной формулой (4.1).

Заметим, что в реальных системах начальные данные всегда известны с некоторой погрешностью, пусть даже очень малой. Поэтому поведение системы, которая обладает чувствительностью к начальным данным, оказывается непредсказуемым. В 1963 году Э.Лоренц высказал мысль о том, что это обстоятельство может быть тесно связано с задачей предсказания погоды [136]. Еще недавно полагали, что совершенствование ЭВМ приведет к появлению долгосрочных, хотя бы двухнедельных, прогнозов погоды. Но этого не произошло. По-видимому, уравнения, описывающие состояние атмосферы, обладают чувствительностью к начальным данным.

Детальный анализ одномерных отображений позволил уточнить понятие аттрактора. В самом деле, аттрактор отображения $x_{n+1} = 1 - 2x_n^2$ (см. рис. 4.13) не удовлетворяет определению, сформулированному в § 4.3. Для него нельзя указать открытую окрестность U_0 , точки из которой стремятся к аттрактору. Если $|x_1| > 1$, то $|x_n| \rightarrow \infty$. Нельзя указать такую окрестность и для аттрактора Фейгенбаума, который возникает после бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода. Он весь «пронизан» неустойчивыми циклами.

Вначале понятие аттрактора связывалось с устойчивыми предельными множествами (неподвижными точками или циклами). Однако установившийся режим и устойчивость — существенно отличающиеся понятия. Это показывает следующий пример: $x_{n+1} = f(x_n)$, где $f(x) = 4x(1 - x^2)^2$ для $|x| \leq 1$ и $f(x) = 0$ при $|x| > 1$. Можно убедиться, что почти все точки будут покидать квадрат $|x_n| \leq 1$, $|x_{n+1}| \leq 1$ в случае отображения $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n^2)^2$. В обсуждаемом примере все такие точки будут попадать в начало координат. Единственным аттрактором этой системы будет неустойчивая неподвижная точка $x = 0$.

Анализ таких отображений требует более общего подхода. Один из них был предложен Дж. Милнором [334].

Пусть M — гладкое компактное многообразие, f — непрерывное отображение, переводящее M в себя. $\omega(x)$ — предельное множество $\omega(x)$ точки $x \in M$ — представляет собой набор точек сгущения последовательности $x, f(x), f^2(x), \dots, y \in \omega(x)$ в том и только в том случае, если существует последовательность целых чисел $\{m\} \equiv m_1, m_2, \dots$ такая, что $f^{m_i}(x) \rightarrow y$.

Выберем некоторую меру μ на многообразии M , например эквивалентную лебеговой мере.

О п р е д е л е н и е. *Замкнутое подмножество A с M будем называть аттрактором, если оно удовлетворяет двум условиям:*

(1) Область притяжения $\rho(A)$, состоящая из всех точек $x \in M$, для которых $\omega(x) \subset A$, должна иметь строго положительную меру;

(2) не существует строго меньшего замкнутого множества A' с A такого, что $\rho(A')$ совпадает с $\rho(A)$ с точностью до меры нуль.

Из первого условия следует, что существует положительная вероятность того, что выбранная наугад точка будет притягиваться к A . Из второго условия следует, что каждая часть A играет существенную роль.

Это определение применимо ко всем обсуждавшимся выше примерам. Оказалось, что его можно использовать для большого класса установившихся режимов в различных системах.

§ 4.4. Метастабильный хаос, кризисы

При моделировании различных явлений могут возникать одномерные отображения, имеющие острые вершины, несколько максимумов, а иногда не являющиеся непрерывными [19, 373, 382]. Для моделирования такой ситуации надо изучать отображения, не являющиеся S -унимодалными, которые могут иметь несколько аттракторов.

В качестве простого примера рассмотрим семейство одномерных отображений

$$f(x, \lambda) = 1 - |x - \lambda|^{1/2} / [1 + (x - \lambda)^2]. \quad (4.17)$$

При $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ ($\lambda_1 = 0,432$, $\lambda_2 = 0,4483$) отображение имеет устойчивый цикл S^2 . В интервале $\lambda_3 < \lambda < \lambda_2$ ($\lambda_3 \approx 0,4444$) с ним сосуществует шумящий цикл χ^4 . Область притяжения цикла S^2 при $\lambda = \lambda_3$ скачком уменьшается, и появляется ст. астический аттрактор.

Чтобы объяснить наблюдаемую картину, удобно перейти к отображению $g \equiv f^4$. Рассмотрим квадрат со стороной J , способ построения которого показан на рис. 4.16. Для наглядности здесь отмечены несколько итераций точки x_1 .

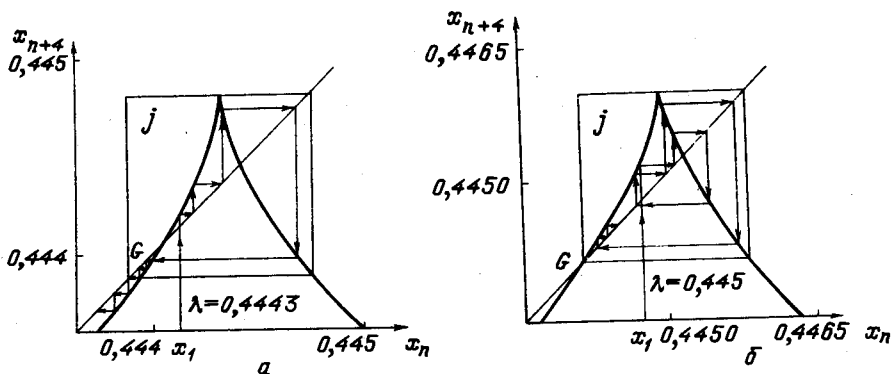


Рис. 4.16. Возникновение интервала, переходящего в себя при изменении параметра λ в отображении (4.17); $\alpha = 1/2$

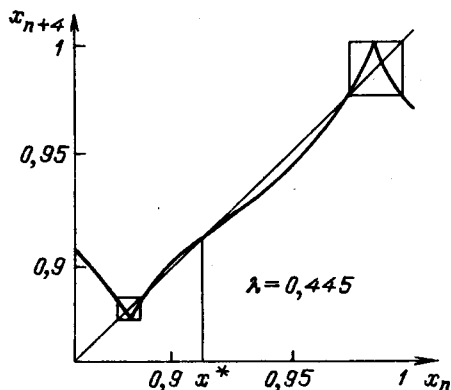


Рис. 4.17. Отображение вида (4.17), в котором сосуществует устойчивый цикл и хаотический аттрактор; $\alpha = 1/2$

Пусть точка x_1 лежит внутри квадрата и $\lambda > \lambda_3$. Видно, что функция g определяет отображение отрезка J в себя, а поэтому все итерации (образы) x_1 будут лежать внутри квадрата. Поскольку $\left| \frac{dg}{dx} \right| > 1$ внутри J , то устойчивых циклов и неподвижных точек в нем не существует, и образы точек, попавших в него, ведут себя случайным образом. На рис. 4.16 для наглядности приведен только один из участков

функции g . Если рассмотреть весь интервал $(0, 1)$, то можно убедиться, что при $\lambda = \lambda_3$ одновременно появляются четыре отрезка, каждый из которых переходит в себя, т. е. в системе возникает цикл χ^4 .

Наряду со стохастическим аттрактором при $\lambda > \lambda_3^*$ у отображения g может существовать и устойчивая особая точка (x^* на рис. 4.17). У отображения f эта точка соответствует одному из элементов устойчивого цикла S^2 .

Совершенно другая картина наблюдается при $\lambda < \lambda_3$. В этом случае отрезок I уже не переходит в себя. Образы точки x_1 покидают квадрат через маленький отрезок вблизи его левого нижнего угла (см. рис. 4.16, а). Чем меньше значение $|\lambda - \lambda_3|$, тем большее время проводят образы точки x_1 внутри квадрата. Таким образом, если x_1 лежит внутри отрезка I , то в течение длительного времени будет наблюдаться хаотический режим. Однако «время жизни» этого режима ограничено. При $n \rightarrow \infty$ происходит выход на устойчивую точку или цикл. Переходный процесс, связанный с хаотическими колебаниями, в этом случае может быть сколь угодно длинным при $\lambda \rightarrow \lambda_3$. Это интересное явление было названо в работе Дж.Йорке и Е.Йорке [106] *метастабильным хаосом*. Оно было обнаружено в системе Лоренца, которая была предложена как упрощенная модель бенаровской неустойчивости. Можно ожидать, что метастабильный хаос и возникновение стохастических режимов описанным выше способом будут наблюдаться и в некоторых нелинейных средах.

Рассмотренный пример позволяет ввести еще одно важное понятие, связанное с анализом нелинейных систем. При $\lambda > \lambda_3$ в системе есть стохастический аттрактор и неустойчивая неподвижная точка G (см. рис. 4.16), при $\lambda = \lambda_3$ они сталкиваются, в результате этого стохастический аттрактор исчезает. «Столкновение» аттрактора с неустойчивой неподвижной точкой или циклом получило название *кризиса аттрактора* [11, 281, 282].

Кризисы характерны для большого класса нелинейных систем [282], с ними связаны скачки, быстрые качественные

изменения хаотических режимов. Можно выделить *границные кризисы*, которые обычно приводят к внезапному исчезновению хаотического аттрактора (пример такого кризиса мы обсудили выше), и *внутренние кризисы*. В результате внутреннего кризиса скачком меняются размеры и области притяжения стохастического аттрактора. Они наблюдаются даже в простейших S-униmodalных отображениях [281].

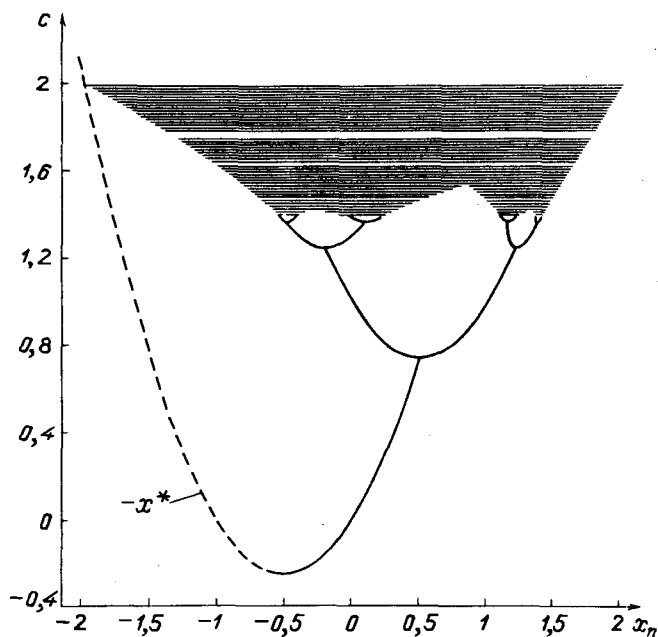


Рис. 4.18

Пример граничного кризиса, который имеет место в отображении $x_{n+1} = C - x_n^2$, представлен на рис. 4.18 [282]. На этой бифуркационной диаграмме показаны элементы последовательности $\{x_n\}$. Начальные значения x_1 выбирались наугад, и затем первые несколько тысяч итераций отбрасывались, чтобы исключить переходный процесс. Зависимость координаты неустойчивой особой точки $x = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} + C \right]^{1/2}$ от параметра C показана на рисунке штрихпунктирной линией.

При $C = 2$ неустойчивая точка сталкивается с аттрактором. В одномерном отображении исчезает интервал, переходивший в себя. Когда $C > 2$, почти при всех начальных данных последовательность $\{x_n\}$ стремится к минус бесконечности.

Внутренний кризис в том же отображении иллюстрирует рис. 4.19 [282]. Здесь в результате тангенциальной бифуркации рождается неустойчивый цикл S^3 . Положение его элементов показано штрихпунктирной линией. Затем этот цикл сталкивается с шумящим циклом χ^3 . При этом значении параметра скачком меняются размеры аттрактора и вместо χ^3 рождается шумящий цикл χ^1 .

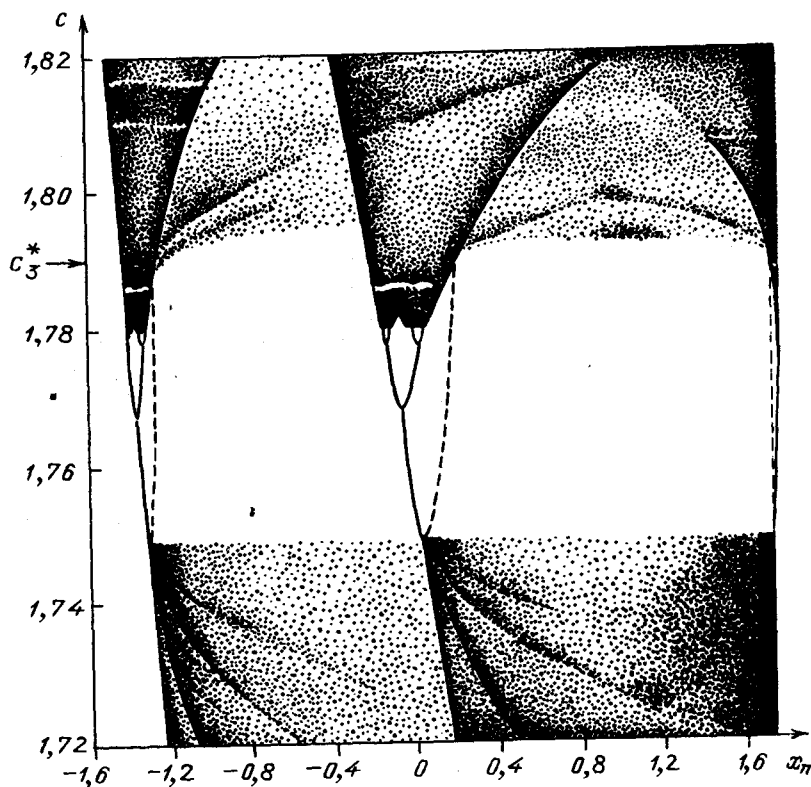


Рис. 4.19

Сценарий перехода к хаосу в отображениях, имеющих несколько экстремумов, может существенно отличаться от традиционных. Например, в работе [239] показано, что каскад бифуркаций удвоения периода в нечетных отображениях обладает интересной особенностью. Здесь точки бифуркации при $n \rightarrow \infty$ могут не стремиться к геометрической прогрессии.

Сложными свойствами могут отличаться отображения с острой вершиной. В работах [41, Д5] было рассмотрено семейство (4.17). Циклы в этом случае удобно характеризовать индексами m и n $S_{(m,n)}^p$ ($m + n = p$), показывающими, сколько элементов лежит справа и слева от вершины ($x = \lambda$). Расчеты показали, что возможен большой класс переходов с изменением топологии устойчивых циклов $S_{(m,n)}^p \rightarrow S_{(m+1,n-1)}^p$. Такие переходы могут сопровождаться каскадами бифуркаций, кризисами, возникновением хаотических режимов.

В эксперименте часто приходится иметь дело с детерминированными процессами, на которые влияет шум малой амплитуды. В простейшем случае эта ситуация описывается отображением

$$x_{n+1} = f(x_n) + \xi_n, \quad (4.18)$$

где ξ_n — малая случайная функция.

В работах [57, 328] было показано, что, несмотря на влияние шума, для систем вида (4.18) характерны многие явления, предсказываемые теорией одномерных отображений.

Пусть отображение (4.1) отрезка в себя имеет один максимум в точке x_c и переводит интервал $\{f(x_c), f(f(x_c))\}$ в себя. Тогда итерации отображения (4.18) будут лежать в интервале $I = [f(f(x_c)) + \varepsilon - \varepsilon, f(x_c) + \varepsilon]$, $-\varepsilon \leq \xi_n \leq \varepsilon$. Границы этого интервала понятны из рис. 4.20. Из него также можно получить неравенство, при выполнении которого этот интервал переходит в себя. Таким образом, если в отображении (4.1) удалось выделить интервал, переходящий в себя, то такой же интервал может существовать и в системе с шумом.

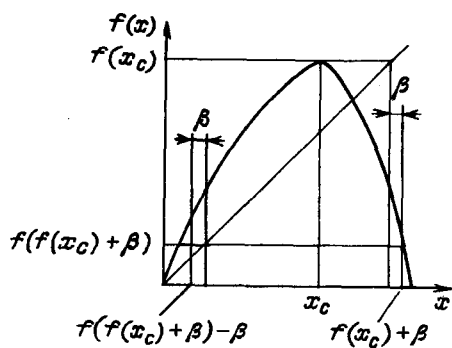


Рис. 4.20

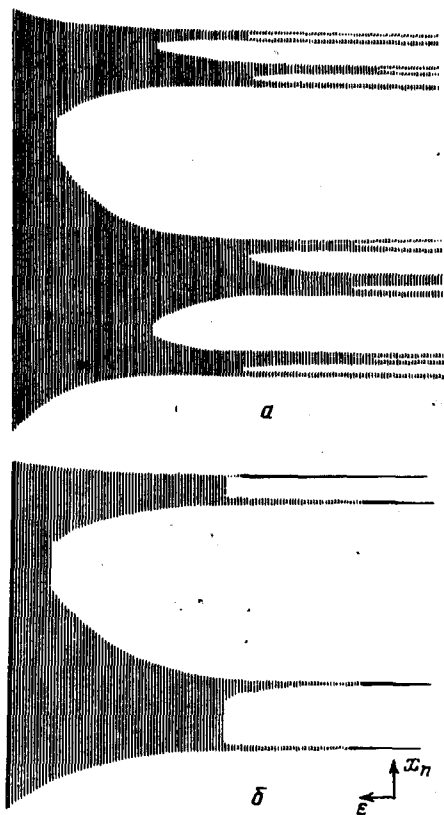


Рис. 4.21

Вместе с тем траектории точек могут существенно отличаться даже в простейших случаях. Пусть отображение имеет неподвижную точку x^* . Тогда можно представить себе ситуацию, когда $x_1 = x^*$, $x_2 = x^* + \varepsilon$, $x_3 = f(x^* + \varepsilon) - \varepsilon$, $x_4 = f(f(x^* + \varepsilon) - \varepsilon) + \varepsilon$ и т. д. В этом случае элементы последовательности $\{x_n\}$ будут удаляться от x^* .

Однако вероятность больших отклонений невелика, поскольку величина ξ_n меняется случайным образом. Если охарактеризовать распределение точек $\{x_n\}$ некоторой мерой, то, вероятно, она будет сосредоточена вблизи x^* . Можно предположить, что если отображение (4.1) имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру, то добавление малого шума несущественно изменит ее. Естественно ожидать, что при $\varepsilon \rightarrow \infty$ инвариантные меры отображения (4.18) в определенной норме стремятся к инвариантной мере отображения (4.1). В ряде случаев это удается доказать [207].

Устойчивый цикл S^p у отображения (4.1) в системе с малым шумом может превратиться в аналог шумящего цикла (рис. 4.21). На рис. 4.21 видно, как увеличение амплитуды шума ε может скачком привести к исчезновению упорядоченности, связанной с порядком обхода «островов» [328, Д2].

Однако возможны ситуации, когда наличие шума служит источником упорядоченности. В самом деле, пусть отображение (4.1) имеет несколько интервалов, переходящих в себя, как на рис. 4.17. Тогда итерации взятой наугад точки x с определенной вероятностью могут попасть в эти интервалы. В этом случае наблюдается хаос. В других случаях элементы $\{x_n\}$ стремятся к неподвижной точке. Пусть теперь x_1 лежит в «хаотическом интервале». Если в системе есть шум, то рано или поздно x_n окажется вблизи границы интервала, а добавка ε_n приведет к тому, что x_{n+1} покинет интервал. Далее будет происходить движение к неподвижной точке. В ее окрестности движение будет достаточно упорядоченным.

Анализ систем с шумом позволил убедиться, что основные эффекты, предсказанные теорией одномерных отображений, будут наблюдаться и в системах с небольшим шумом. Это име-

ет большое значение для исследования реальных систем, в которых обычно присутствует шум.

§ 4.5. Систематика циклов

Расчеты показывают, что для отображения (4.3) характерна «оконная структура» (рис. 4.22). При увеличении параметра λ ($\lambda > \lambda_\infty$) могут наблюдаться как хаотические режимы, так и неустойчивые циклы любых периодов. Встает вопрос о закономерностях, определяющих порядок появления циклов при изменении параметра.

Рассматривая сценарий Фейгенбаума, можно убедиться, что наряду с устойчивым циклом S^{2^p} при том же значении параметра существуют неустойчивые циклы периодов $S^{2^{p-1}}$, $S^{2^{p-2}}$, ..., S^1 . Поэтому важно выяснить, при каких условиях могут сосуществовать циклы различных периодов.

Для большого класса одномерных отображений эти вопросы были решены [200, 201, 235, 332]. Обратим внимание на некоторые результаты.

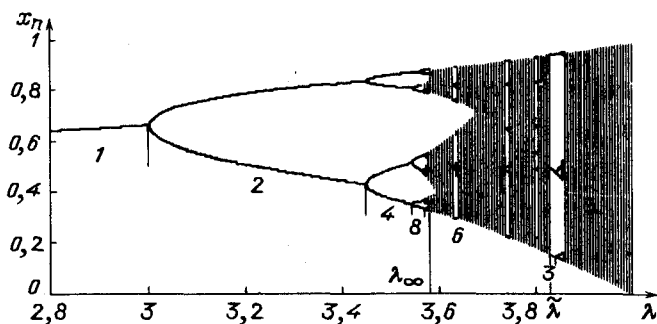


Рис. 4.22

Будем говорить, что между целыми числами m и n существует отношение порядка $m > n$, если из существования цикла S^m следует, что у того же отображения есть и цикл S^n .

Как было доказано советским математиком А.Н.Шарковским в 1964 г., это отношение упорядочивает циклы непрерывных отображений следующим образом:

$$3 > 5 > 7 > \dots > 3 \cdot 2 > 5 \cdot 2 > 7 \cdot 2 > \dots > \\ > 3 \cdot 2^2 > 5 \cdot 2^2 > 7 \cdot 2^2 > \dots > 2^3 > 2^2 > 2 > 1. \quad (4.19)$$

Последнее соотношение в этом ряду означает, что если существует цикл S^2 , то имеется и неподвижная точка (цикл S^1). Доказать его очень просто. Поскольку есть цикл S^2 , то найдутся такие значения a_1 и a_2 , что $a_1 = f(a_2)$, $a_2 = f(a_1)$, $a_2 > a_1$. Теперь рассмотрим функцию $g = x - f(x)$ в точках a_1 и a_2 : $g(a_1) = a_1 - f(a_1) = a_1 - a_2 < 0$ и $g(a_2) = a_2 - f(a_2) = a_2 - a_1 > 0$. Так как $f(x)$, а следовательно и $g(x)$ непрерывна, то существует точка a^* , где $g(a^*) = 0$, т. е. $f(a^*) = a^*$.

Остальные соотношения доказываются сложнее.

Судя по ряду (4.19), самым сложным является цикл S^3 . Американские математики Т.Ли и Дж.Йорке доказали что верна следующая теорема.

Т е о р е м а 4.4. *Если для непрерывного отображения F можно найти точки a, b, c, d такие, что $b = F(a)$, $c = F(b)$, $d = F(c)$ и $d \leq a < b < c$, то это отображение имеет циклы любого периода и несчетное множество непериодических траекторий [320].*

В теореме Шарковского рассматриваются любые непрерывные отображения и все циклы, независимо от их устойчивости. Однако во многих случаях основной интерес представляют устойчивые циклы. Оказалось, что для семейства гладких, непрерывных вместе с первой производной отображений «оконная структура» не зависит от конкретного вида функции $f(x, \lambda)$. При изменении параметра λ циклы появляются в определенном порядке.

Будем считать, что функции $f(x, \lambda)$ заданы на отрезке $[-1, 1]$ и имеют максимум при $x = 0$.

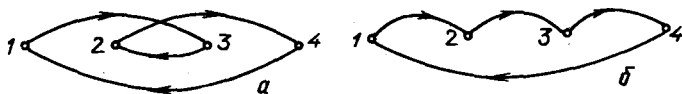


Рис. 4.23

Пусть элементы цикла S^n перенумерованы в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Кроме периода цикла, введем еще две характеристики. Первая определяет тот порядок, в котором обходятся его элементы. Например, для цикла S^4 встречаются две возможности, показанные на рис. 4.23.

Рис. 4.23,а соответствует тому, что $f(x_1) = x_3$, $f(x_3) = x_2$, $f(x_2) = x_4$, $f(x_4) = x_1$, т. е. 1324. Во втором случае порядок обхода таков: 1234 (рис. 4.23,б).

Т а б л и ц а 4.1

Период	Порядок обхода	Маршрут
2	1 2	RR
4	1 3 2 4	RLRL
6	1 4 3 5 2 6	RLRRRL
5	1 3 4 2 5	RLRRR
3	1 2 3	RLR
6	1 3 5 2 4 6	RLLRLL
5	1 2 4 3 5	RLLRL
6	1 2 4 5 3 6	RLLRRR
4	1 2 3 4	RLLR
6	1 2 3 5 4 6	RLLLRL
5	1 2 3 4 5	RLLLLR
6	1 2 3 4 5 6	RLLLLR

Для нас будет существенным также знак элементов цикла. В соответствии со знаком построим последовательность символов R , C , L . В этой последовательности на k -м месте будет стоять R , если $a_k > 0$, C , если $a_k = 0$, L в случае $a_k < 0$, где a_k — k -ый элемент цикла. Например, последовательность $RLRL$ означает, что $x_1 > 0$, $f(x_1) < 0$, $f^2(x_1) > 0$, $f^3(x_1) < 0$. Такую последовательность можно построить

для любой начальной точки x_1 . Она, вообще говоря, бесконечна и называется *маршрутом* этой точки. Но если в $\{x_n\}$ происходит выход на устойчивый цикл, то определенная комбинация элементов в маршруте начинает повторяться.

А теперь посмотрим на табл. 4.1, которая содержит информацию об устойчивых циклах, период которых не превышает шести. В левом столбце указан период цикла, в среднем – порядок обхода точек, в правом – маршрут. Удалось доказать, что в зависящих от одного параметра семействах C^1 – унимодальных отображений устойчивые циклы встречаются в том порядке, в котором они указаны в таблице. Прыжки в этом списке невозможны.

Например, если мы выяснили, что при $\lambda = \lambda_1$ есть устойчивый цикл S^4 с маршрутом $RLRL$, а при λ_2 – цикл S^3 с маршрутом RLR , то обязательно найдутся такие значения λ_3 и λ_4 , $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_2$, что при λ_3 устойчив цикл S^6 с маршрутом $RLRRRL$, а при λ_4 – S^5 с маршрутом $RLRRR$. Причем порядок обхода элементов цикла (если перенумеровать их в порядке возрастания) будет именно таким, как указано во второй колонке.

Из таблицы следует, что между двумя различными циклами будут встречаться все промежуточные. Вообще говоря, они могут встречаться не один, а несколько раз. Для отображения (4.3) при увеличении λ циклы встречаются только по одному разу.

Последовательность, в которой появляются циклы, получила название U (универсальной) – последовательности. Алгоритм ее получения и доказательства соответствующих утверждений рассмотрены в работах [235, 332].

Это очень важный результат. Оказывается, между характеристиками одномерного отображения и маршрутами различных точек есть глубокая внутренняя связь. Если посмотреть маршруты для различных начальных данных x_1 , то окажется, что почти все они совпадают, если в системе есть порядок (устойчивый цикл). И наоборот, если наблюдается хаос, то почти все маршруты различаются. Свойства последовательнос-

тей из нескольких символов тесно связаны со свойствами одномерных отображений. Теория, изучающая эти свойства, получила название *символической динамики*. Она полезна при анализе различных нелинейных моделей. В частности, ее методы широко использовались при получении приведенной выше таблицы.

Систематика устойчивых циклов используется при анализе многих нелинейных диссипативных систем. М.Якобсоном была доказана следующая теорема [300].

Т е о р е м а 4.5. Пусть F — одномерное отображение, близкое в норме C^2 к $F(x) = x(1-x)$, и λ_0 — значение параметра, при котором $\lambda_0 F(c) = 1$, c — точка максимума функции F . Тогда лебегова мера множества значений параметров M , $\lambda \in [0, \lambda_0]$, при которых аттрактор отображения $x_{n+1} = \lambda F(x_n)$ имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру, положительна.

В работе [258] были приведены результаты расчетов, позволяющие выяснить, какова она. Для этого, исходя из U — последовательности, находились сверхустойчивые циклы и «окна периодичности», в которых они находятся. Очень полезной оказалась информация о маршруте циклов.

Каждый элемент x_n у симметричных отображений с одним максимумом имеет два прообраза x'_{n-1} и x''_{n-1} , $f(x'_{n-1}) = f(x''_{n-1}) = x_n$. Однако, зная его маршрут, можно вычислить не только прямые, но и обратные итерации. Это оказалось существенным при построении численных методов.

Обозначим через $h(\epsilon)$ общую длину всех «окон», размеры которых превышают ϵ . Расчеты показали, что

$$\mu(\epsilon) = 1 - h(\epsilon) \approx \mu(0) + A\epsilon^\beta,$$

$$\mu(0) = 0,89795 \pm 0,0005, \quad \beta = 0,45 \pm 0,04.$$

Было высказано предположение, что показатель β является универсальным, не зависящим от конкретного семейства [258].

В работах [234, 358] обсуждаются результаты экспериментального исследования реакции Белоусова – Жаботинского в проточном реакторе с перемешиванием. (Перемешивание вводится, чтобы не учитывать диффузионные эффекты.) Оказывается, что максимумы одной из переменных, характеризующих реакцию, во многих случаях порождают одномерные отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, вид которых показан на рис. 4.24. При изменении контрольного параметра (скорости потока реагентов) график отображения растягивается вдоль оси ординат. Переход к хаосу происходит в соответствии со сценарием Фейгенбаума, и далее наблюдаются предсказываемые систематикой (см. табл. 4.1) устойчивые циклы.

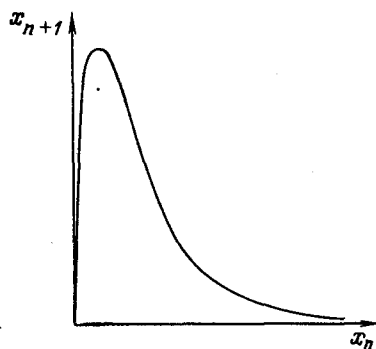


Рис. 4.24

В некоторых случаях все они встречаются по одному разу. Однако добавление примесей железа (даже в концентрации, не превышающей тысячных долей процента) меняет динамику системы. Некоторые циклы из таблицы встречаются уже не в одном, а в трех интервалах параметра [234]. Последовательность устойчивых циклов может служить индикатором, показывающим, как меняются концентрации некоторых реагентов.

Г Л А В А 5

ДВУМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

Одномерные отображения, описывающие сложную упорядоченность и стохастические режимы, необратимы. Некоторым значениям y соответствуют не менее двух прообразов $y = f(a) = f(b)$. Поэтому однозначно восстановить по данному значению x_1 предшествующие значения x_{-1} , x_{-2} , ... не удастся.

Совершенно иными свойствами обладает большинство математических моделей, используемых в естествознании. По набору переменных $x(t_1)$, характеризующих изучаемое явление в данный момент, можно предсказать не только будущее $x(t_1 + T)$, но и восстановить прошлое $x(t_1 - T)$.

Гамильтоновы системы инвариантны относительно замены $t \rightarrow -t$, а процессы, которые они описывают, оказываются обратимыми. Однако и в диссипативных системах обычно удастся восстановить по $x(t_1)$ значения $x(t_1 - T)$ (по крайней мере для конечного интервала $t < \bar{T}$).

Простейшими диссипативными системами, которые могут обладать свойством обратимости и описывать сложные стохастические процессы, являются двумерные отображения

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n). \quad (5.1)$$

Исследование системы (5.1), так же как и одномерных отображений, позволило найти новые сценарии перехода к

хаосу, обнаружить ряд интересных явлений, характерных для многих нелинейных диссипативных систем. Изучение таких отображений помогло построить математические теории, позволяющие непосредственно исследовать ряд дифференциальных уравнений, возникающих в различных физических задачах. Используя эти подходы, иногда удается выяснить, в какой мере стохастичны изучаемые объекты, и получить ряд строгих утверждений об их свойствах.

В этой главе мы обсудим некоторые двумерные отображения, оказавшиеся полезными для понимания хаотических режимов в нелинейных средах.

§ 5.1. Характеристики хаотических режимов.

Гиперболичность

Одно из простейших и очень важных отображений, описывающих хаотические режимы, определяется формулой

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (2x_n + y_n) \bmod 2\pi \\ y_{n+1} &= (x_n + y_n) \bmod 2\pi \end{aligned} ; \quad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \bmod 2\pi. \quad (5.2)$$

Поскольку в x_{n+1} и в y_{n+1} входит остаток от деления на 2π , естественно считать, что это отображение определено на торе.

Тор удобно представлять как прямоугольник, у которого отождествлены противоположные стороны, т. е. $(0, a)$ и $(2\pi, a)$, $0 \leq a \leq 2\pi$ (точно так же, как и $(b, 0)$ и $(b, 2\pi)$, $0 \leq b \leq 2\pi$ считаются одной и той же точкой).

Посмотрим, что произойдет с какой-нибудь фигурой, заданной на торе, после применения отображения (5.2) (рис. 5.1). Видно, что уже после первой итерации различные части фигуры оказались сложным образом растянуты и сдвинуты. Можно ожидать, что после большого количества итераций черные участки окажутся равномерно размазаны по всему

тору. Отметим, что определитель матрицы, входящей в формулу (5.2), равен единице, поэтому площадь фигуры в ходе итераций не меняется.

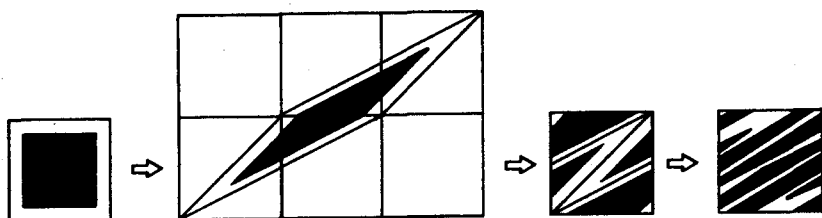


Рис. 5.1

Из рис. 5.1 видно, что прообраз любого множества также лежит на торе, а само преобразование (5.2) обратимо (по точкам образа можно однозначно найти прообраз). Для краткости будем обозначать преобразование (5.2) через A .

В зависимости от начальной точки траектории отображения (5.2) могут быть как периодическими, так и непериодическими. Циклом отображения (5.1) назовем множество точек $(x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p)$ таких, что $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$, $1 \leq n \leq p-1$, $x_1 = f(x_p, y_p)$, $y_1 = g(x_p, y_p)$.

Нетрудно проверить, что все точки (x, y) , обе координаты которых представляют собой произведение π на рациональные числа, определяют циклы отображения. Понятно, что их будет счетное число. Можно убедиться также, что все точки, координаты которых не могут быть представлены в таком виде, определяют непериодические траектории (циклы A в этом отношении похожи на циклы отображения $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$).

Матрица отображения A имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$, $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$ и собственные векторы e_1 и e_2 . Семейство прямых, параллельных собственному вектору e_1 , преобразование A переводит в себя. Расстояние между двумя близкими точками, лежащими на одной прямой, после каждой итерации увеличивается в λ_1 раз (см. рис. 5.2). Эти

прямые определяют семейство всюду плотных обмоток тора, которые отображение A переводит в себя. Такое семейство называется *расширяющимся слоением* преобразования A . Семейство прямых, параллельных вектору e_2 , определяет *сжимающееся слоение*.

Отображение (5.2) обладает многими замечательными свойствами. В начале 1960-х годов была доказана теорема Аносова, утверждающая, что преобразование A является *структурно устойчивым*. (Т. е. малое изменение динамической системы качественно не меняет поведения системы. Подробное обсуждение понятия структурной устойчивости можно найти в книге [8].) В частности, всякое отображение, достаточно близкое к A , имеет счетное множество циклов и бесконечное множество непериодических траекторий. Поэтому можно ожидать, что такие системы, а также их многомерные аналоги будут обладать сложными непериодическими траекториями. При обобщении представлений об отображении A естественно вводятся понятия об Y -системах (диффеоморфизмах Аносова) и о гиперболических системах, представляющих собой большой класс математических объектов, эргодические свойства которых удается подробно исследовать [158].

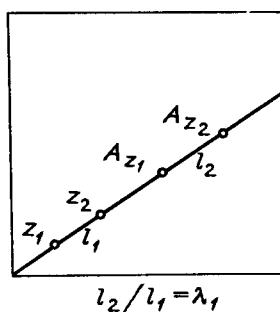


Рис. 5.2

Прежде чем говорить об этих объектах, обсудим, следуя работам [116, 175], вопрос о том, что может служить критерием стохастичности в динамических системах, по каким

признакам можно судить о степени хаотичности решения. Приведем несколько усиливающих друг друга свойств стохастичности.

1. Во многих случаях основной интерес представляет типичное поведение траекторий. Поэтому будем считать, что существует множество одинаковых систем, отличающихся только начальными данными. При этом начальные данные выбираются в фазовом пространстве с вероятностью P_0 , $dP_0(x)/dx = \rho(x)$. Введение P_0 можно рассматривать как проявление случайного механизма, действующего в начальный момент времени. Самым простым из стохастических свойств является существование *инвариантного распределения вероятностей* $P(x)$ или *инвариантной меры* в фазовом пространстве системы.

Инвариантность распределения $P(x)$ означает, что для любой функции f интеграл

$$U(f) = \int f(x(t)) dP(x) \quad (5.3)$$

не зависит от времени. Допустим, в некоторых участках фазового пространства траектория бывает редко, а в других часто. Чтобы вычислить средние значения от некоторой функции f , нужно учитывать соотношение вероятностей попадания в разные точки фазового пространства. Информацию об этих вероятностях, необходимую для усреднения, и дает $P(x)$.

Теорема Крылова – Боголюбова утверждает, что в случае непрерывного отображения и компактного фазового пространства существует по крайней мере одна инвариантная мера [116].

Даже в самых простых случаях инвариантных мер может быть много. Например, для отображения $x_{n+1} = 1 - 2|x_n|$ инвариантными являются все распределения вида $P = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \delta(x - x_i)$, $i = 1, \dots, r$, где x_i – элементы цикла S^r , и распределение $P(x) = 1/2$. Однако при исследовании странных аттракторов в диссипативных динамических системах можно

выделить меры, наиболее важные для изучения типичных решений, которые в определенном смысле устойчивы. Оказывается, в ряде случаев вначале можно задать произвольную начальную меру $P_0(x)$, проследить ее эволюцию с течением времени и убедиться, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(x) \rho(x, t) dx = \int f(x) d\bar{P}(x). \quad (5.4)$$

В этом случае $\bar{P}(x)$ определяет вероятность, с которой типичная траектория попадает в различные точки фазового пространства. Иногда удается доказать существование предела (5.4) [224, 359].

2. Средние величины, характеризующие динамическую систему, можно вычислять, усредняя по инвариантной мере (по множеству траекторий) или по времени, рассматривая какую-либо одну траекторию. В случаях, когда оба средних значения совпадают, говорят, что система *эргодична*:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T f(x(t)) dt = \int f(x) d\bar{P}(x). \quad (5.5)$$

Это равенство выполняется с вероятностью единица по мере $\bar{P}(x)$.

Система может обладать непрерывной инвариантной мерой, быть эргодичной, однако вести себя достаточно регулярным образом. Пример такого поведения дает отображение окружности

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \alpha, \quad 0 \leq \theta_n < 2\pi, \quad (5.6)$$

когда $\frac{\alpha}{2\pi}$ — иррациональное число.

Инвариантная мера здесь равна $1/2\pi$, отображение эргодично, однако расстояние между двумя любыми траекториями не меняется (если $\theta'_1 - \theta''_1 = a$, то $\theta'_n - \theta''_n = a$ при любом n). Более сильные критерии стохастичности должны учитывать, как ведут себя друг относительно друга различные траектории.

3. Отображение T , действующее на множестве M и имеющее инвариантную меру $\bar{P}(x)$, называется *перемешивающим*, если для любых $f, g \in L_2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f(T^n(x)) g(x) d\bar{P} = \int_M f d\bar{P} \int_M g d\bar{P}. \quad (5.7)$$

Смысл этого определения проясняется, если вновь рассмотреть преобразование тора A (см. формулу (5.2)). Инвариантная мера в этом случае имеет постоянную плотность. Обозначим множество, на котором действует A через S , две произвольные области, принадлежащие S , через F и G . Обозначим меры этих множеств соответственно через $\text{mes } S$, $\text{mes } F$ и $\text{mes } G$. Тогда из соотношения (5.7) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}((A^n F) \cap G)}{\text{mes } F} = \frac{\text{mes } G}{\text{mes } S}.$$

Это означает, что произвольное множество через достаточно большое число итераций будет равномерно размазано по тору. «Черные» участки (см. рис. 5.1) окажутся перемешанными с белыми. Доказательство соотношения (5.7) для отображения (5.2) можно найти в книге [8]. Определение (5.7) естественно обобщается на случай непрерывного времени. Из свойства перемешивания следует эргодичность.

Проверка соотношения (5.7) в реальных системах оказывается достаточно сложной. Поэтому, чтобы установить свойство перемешивания, обычно рассматриваются *автокорреляционные функции* $b(t)$

$$b(t) = \int f(x(t))f(x(0))d\bar{P}(x) - \int f(x(t))d\bar{P}(x) \int f(x(0))d\bar{P}(x).$$

В эргодических системах удобно заменить среднее по мере средним по времени для типичной траектории:

$$b(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T f(x(t + \tau))f(x(\tau))d\tau - \left(\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T f(x(\tau))d\tau \right)^2. \quad (5.8)$$

Если динамическая система обладает перемешиванием, то $b(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что свидетельствует о стохастичности изучаемого процесса [175]. В физике это свойство известно как свойство *расщепления временных корреляций* [87]. В частности, отображение (5.6) свойством перемешивания не обладает.

Закон убывания $b(t)$ и спектральные характеристики динамических систем тесно связаны. Представим $b(t)$ в виде интеграла

$$b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} a(\omega) d\omega. \quad (5.9)$$

В случае эргодического движения без перемешивания функция $a(\omega)$ является дискретной:

$$a(\omega) = \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k), \quad (5.10)$$

при наличии перемешивания — непрерывной [87].

4. Естественно ожидать, что многие свойства независимых случайных величин будут характерными и для динамических систем с хаотическим поведением. Одним из них является *центральная предельная теорема*. Введем величину

$$T^{1/2} \left[T^{-1} \int_0^T f(x(t)) dt - \int_0^T f(x) dP(x) \right]. \quad (5.11)$$

Величина в скобках во многих случаях убывает как $T^{-1/2}$. Поэтому по аналогии с теорией вероятностей можно ожидать, что при $T \rightarrow \infty$ величина (5.11) должна подчиняться гауссову распределению вероятностей. Физически это соответствует тому, что интеграл $\int_0^T f(x(t)) dt$ близок к сумме слабо зависимых слагаемых.

5. Одним из наиболее сильных стохастических свойств является *экспоненциальное убывание корреляций*:

$$b(t) \rightarrow \exp(-h_0 t) \quad \text{при больших } t, \quad h_0 = 1/\tau_0. \quad (5.12)$$

В этом случае функция $a(\omega)$ (см. формулу (5.9)) аналитична. Величину τ_0 часто называют *временем расщепления корреляций*, или радиусом корреляции системы.

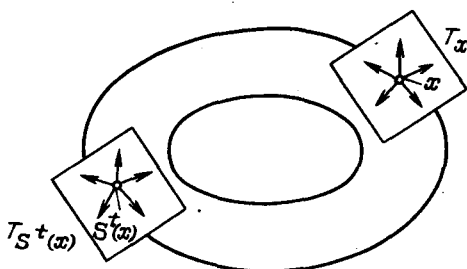


Рис. 5.3

При исследовании отображения (5.2) важным являлось наличие сжимающегося и расширяющегося слоения. В окрестности каждой траектории лежали бесконечно близкие траектории, одни из которых стремились к ней при $t \rightarrow \infty$, другие — при $t \rightarrow -\infty$. Оказывается, если таким образом устроены все траектории динамической системы, то на основе представлений о локальных свойствах траекторий можно исследовать глобальные свойства динамической системы. Такой подход развивается в *гиперболической теории*. Обратим внимание на некоторые ее результаты.

Свойство гиперболичности естественно обобщает свойства отображения (5.2) на многомерные отображения с более сложным фазовым пространством.

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем в фазовом пространстве M (в отображении (5.2) это тор). Обозначим некоторую траекторию через $\{S^t(x)\}$, а касательное пространство в точке x через T_x (рис. 5.3). Если у нас есть точка $x \in M$ и бесконечно близкие к ней точки x^1 , то все возможные вектора $x^1 - x$ и составляют касательное пространство T_x .

Траекторию $\{S^t(x)\}$, следуя работе [158], назовем *равномерно полно гиперболической*, если касательное пространство $T_{S^t(x)}$ может быть разложено на прямую сумму подпространств

$$T_{S^t(x)} = E^s(S^t(x)) + E^u(S^t(x)),$$

причем эти подпространства являются инвариантными относительно отображения T ($dS^t E^s(S^t(x)) = E^s(S^{t+\tau}(x))$, $dS^t E^u(S^t(x)) = E^u(S^{t+\tau}(x))$) и существуют постоянные числа

$$0 < \lambda < 1 < \mu$$

такие, что для всех t и $\tau > 0$

$$\|dS^t v\| \leq C \lambda^\tau \|v\|, \quad v \in E^s(S^t(x));$$

$$\|dS^t v\| \geq C^{-1} \mu^\tau \|v\|, \quad v \in E^u(S^t(x));$$

$$\gamma(S^t(x)) \geq \text{const},$$

где $\gamma(S^t(x))$ – угол между подпространствами $E^s(S^t(x))$ и $E^u(S^t(x))$ (рис. 5.4). Через $dS^t E^s(S^t(x))$ обозначено множество векторов, в которое через время τ перейдут векторы, в момент t принадлежавшие подпространству $E^s(S^t(x))$. Под $\|dS^t v\|$ понимается расстояние между траекторией, начинающейся в точке $S^0(x)$, и бесконечно близкой траекторией, выходящей из точки $S^0(x) + v$, в момент t . Чтобы найти $dS^t v$ в системах с непрерывным временем $\dot{x} = X(x)$, решают уравнение в вариациях $\dot{v} = X_x(x) v$ на интервале $0 < t < \tau$. В системах с дискретным временем вместе с $x_{n+1} = f(x_n)$ рассматривают отображение $v_{n+1} = f_x(x_n) v_n$ ($X_x = \frac{\partial X}{\partial x}$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, f , X , x – векторы).

Динамическая система называется *У-системой*, или *диффеоморфизмом Аносова*, если каждая ее траектория является равномерно полно гиперболической, а постоянные C , λ и $\mu = \lambda^{-1}$ можно выбрать одинаковыми для всех точек.

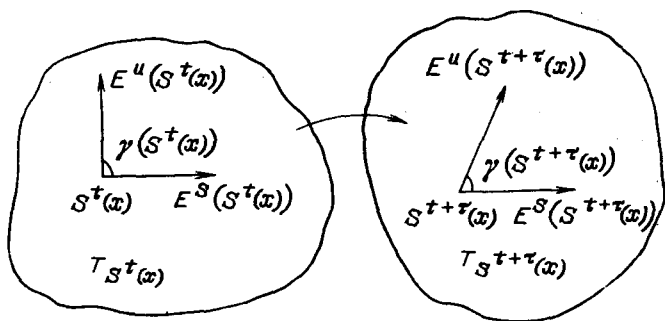


Рис. 5.4

Диффеоморфизмы Аносова, так же как отображение (5.2), являются структурно устойчивыми. Число задач, где они возникают в чистом виде, невелико. К ним, например, относится задача о движении по геодезическим на поверхностях постоянной отрицательной кривизны [158].

Гиперболические траектории характерны для интересного класса динамических систем, называемых *бильярдами*. Бильярдом называется система, отвечающая движению материальной точки по инерции внутри области с кусочно гладкой границей. Предполагается выполненным условие упругого отражения от границы. Если область ограничена гладкими выпуклыми внутрь кривыми, и кривизна положительна для каждой регулярной точки границы, бильярд называется *рассеивающим*. Он представляет собой аналог гладких гиперболических систем. Бильярды возникают в задачах акустики, радиофизики, квантовой механики. Хаотическое поведение в них во многих случаях удается детально исследовать [43].

Однако наибольший интерес при исследовании диссипативных систем представляет собой использование результатов гиперболической теории для анализа странных аттракторов.

Аттрактор динамической системы называется *гиперболическим*, если он состоит целиком из траекторий, удовлетворяющих условию равномерной полной гиперболичности с одними и теми же постоянными C и λ .

Гиперболические системы обладают хорошими стохастическими свойствами. В частности, отображение T является перемешивающим по отношению к распределению вероятностей P , если аттрактор удовлетворяет условиям гиперболичности (при некоторых дополнительных ограничениях [224, 359]). При этом для любого начального распределения P_0 с плотностью ρ_0 , сосредоточенного в окрестности аттрактора W , итерации $T^n P_0$ сходятся к \bar{P} . Однако ясно, что с помощью определения гиперболичности можно исследовать свойства достаточно узкого класса динамических систем. В работе [175] были приведены условия гиперболичности, которые в ряде случаев удастся проверить с помощью ЭВМ. В литературе их часто называют *критерием Синая*. Этот критерий может быть использован при анализе математических моделей различных явлений, для которых характерны хаотические режимы.

Следуя работе [175], приведем этот критерий для системы с дискретным временем. Наряду с отображением T в точке x будем рассматривать его матрицу Якоби $dT(x) = \partial f / \partial x$ (отображение T переводит N -мерный вектор x в N -мерный вектор $f(x)$: $x_{n+1} = f(x_n)$). Вектор e назовем *растягивающимся*, если $\|dT(x)e\| > \|e\|$. Набор всех растягивающихся векторов в данной точке x образует *конус растягивающихся векторов*. Изменив знак неравенства на противоположный, получим определение *сжимающегося вектора* и *конуса сжимающихся векторов*. Для $N = 2$ этих определений было бы достаточно. В многомерном случае приходится определять еще расширяющееся $L^{(u)}$ и сжимающееся $L^{(s)}$ подпространства или подпространства, состоящие соответственно из расширяющихся или сжимающихся векторов.

Допустим теперь, что для пары целых чисел $k, l, k+l = N$ и постоянной λ ($1 < \lambda < \infty$) для каждой точки x некоторой области Q , содержащей аттрактор ($TQ \subset Q$), задано открытое множество $\mathcal{L}^{(u)}(x)$ k -мерных *расширяющихся подпространств* $L^{(u)}$ и открытое множество $\mathcal{L}^{(s)}(x)$ *сжимающихся* l -мерных *подпространств* $L^{(s)}(x)$ (рис. 5.5) и при этом

1) $dT(x)\varphi^{(u)}(x) \subset \varphi^{(u)}(Tx)$, т. е. для любого $L^{(u)} \in \varphi^{(u)}(x)$ образ $dTL^{(u)} = L^{(u)} \in \varphi^{(u)}(Tx)$; более того, для любого вектора $e \in L^{(u)} \in \varphi^{(u)}(x)$ справедливо неравенство

$$\|dT(x)e\| \geq \lambda \|e\|;$$

2) $(dT(Tx))^{-1}\varphi^{(s)}(Tx) \subset \varphi^{(s)}(x)$, т. е. для любого $L^{(s)} \in \varphi^{(s)}(Tx)$ образ $(dT^{-1})L^{(s)} = L^{(s)} \in \varphi^{(s)}(x)$; более того, для любого вектора $e \in L^{(s)} \in \varphi^{(s)}(Tx)$ справедливо неравенство

$$\|(dT)^{-1}(Tx)e\| \geq \lambda \|e\|.$$

Эти условия можно пояснить с помощью рис. 5.5 ($N = 2$).

Первое условие означает, что оператор T переводит растягивающиеся векторы внутрь конуса, в котором лежат растягивающиеся векторы на следующей итерации. Второе условие получается, если заменить конус растягивающихся векторов на конус сжимающихся, а T на T^{-1} .

В случае двумерных отображений (5.1) эти условия упрощаются и могут в явном виде быть выражены через производные функций f и g [44]

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| < 1, \quad \left\| \left[\frac{\partial g}{\partial y} \right]^{-1} \right\| < 1; \\ \left\| \left[\frac{\partial g}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial y} \right\| \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\| < \left[1 - \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \right] \left[1 - \left\| \left[\frac{\partial g}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \right]; \quad (5.13) \\ 1 - \left\| \left[\frac{\partial g}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| > 2\sqrt{\left\| \left[\frac{\partial g}{\partial y} \right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial y} \right\| \left\| \left[\frac{\partial g}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|}. \end{aligned}$$

где $\|h(x, y)\| = \max_{(x, y) \in Q} |h(x, y)|$.

В таком виде критерий гиперболичности использовался, например, в работе [44] при исследовании модели Лоренца и

в работе [26] при изучении странного аттрактора в системе дифференциальных уравнений, связанной с уравнением типа реакция – диффузия.

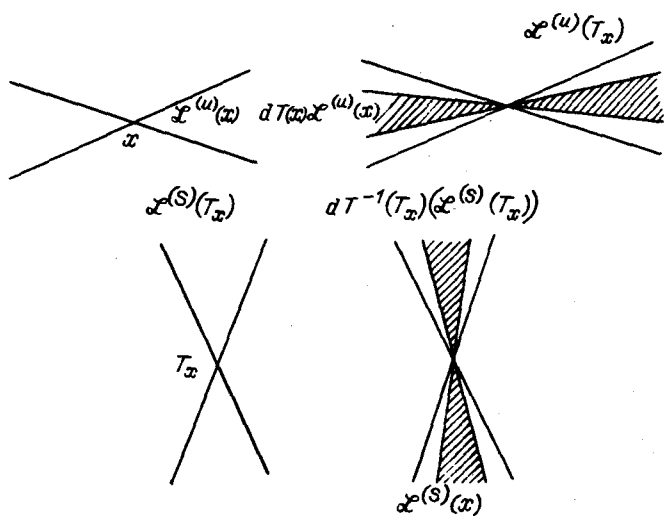


Рис. 5.5

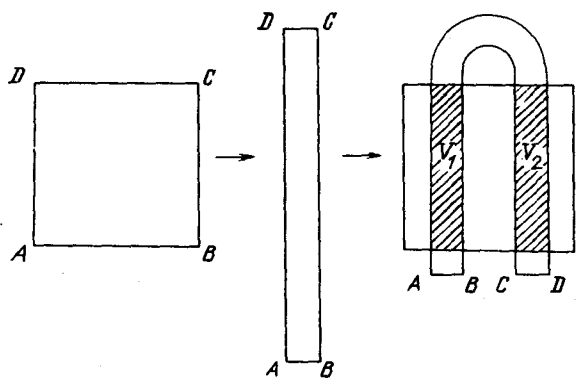


Рис. 5.6

Инвариантные множества в гиперболических системах могут обладать сложной структурой и необычными свойствами.

Примером может служить инвариантное множество отображения, называемого *подковой Смейла*.

Представим отображение T участка плоскости в себя, при котором квадрат S с вершинами $ABCD$ переходит в криволинейную фигуру $A'B'C'D'$, изображенную на рис. 5.6. Для наглядности представим его действие в два этапа. Вначале оно сжимает квадрат в одном и растягивает в другом направлении. На втором этапе полученная полоска складывается в виде подковы. Понятно, какой будет структура множества $T^2(S) \cap S$. Вместо каждой полоски возникают две меньшей ширины. Они заштрихованы на рис. 5.7. На следующей итерации каждая из полосок вновь разделится на две, на n -м шаге возникает 2^n полос. Отсюда следует, что предельное множество $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(S) \cap S$ будет обладать структурой, повторяющей себя на меньших масштабах. Такие множества часто называют *канторовыми*. Они характерны для аттракторов многих систем, проявляющих хаотическое поведение. Примеры таких систем, свойства канторовых множеств и их количественные характеристики далее мы рассмотрим более подробно.

Для итераций разных точек квадрата можно предложить простое символическое описание. Обозначим две полоски, появляющиеся на первом шаге, V_1 и V_2 . На втором шаге из первой полосы возникнут полосы V_{11} и V_{12} , из второй — V_{21} и V_{22} и т. д. Каждой точке, остающейся в пределах квадрата S , можно сопоставить бесконечную последовательность единиц и двоек следующим способом. Если образ точки на первом шаге попадает в полосу V_1 , то на первой позиции в этой последовательности будет стоять единица, если в полосу V_2 , то двойка. Пусть на k -ом шаге точка оказалась в полосе $V_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Образ этой полосы состоит из двух частей — левой и правой. Если $(k+1)$ -я итерация точки попадет в левую часть, то на $(k+1)$ месте в последовательности должна стоять единица, если в правую, то двойка. При этом каждая итерация отображения T эквивалентна сдвигу на один элемент вправо. В предельном множестве $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(S) \cap S$ все точки с

одной координатой y характеризуются одной и той же последовательностью единиц и двоек. Разные последовательности соответствуют точкам квадрата с различными значениями y (см. рис. 5.7). В самом деле, в полосу V_1 , например, могут попасть только точки с ординатой $0 \leq y < 1/2$, в полосу V_2 — с ординатой $1/2 < y \leq 1$. Поскольку отображение T на каждом шаге растягивает прообраз вдоль оси y , то, как бы ни было мало начальное расстояние по оси y между точками $y' - y''$, на некотором шаге эти точки попадут в разные полосы.

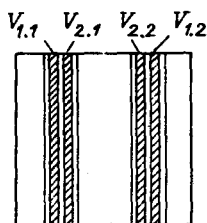


Рис. 5.7

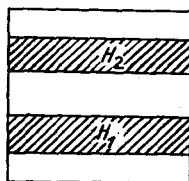


Рис. 5.8

Описанное символическое представление итераций отображения T оказывается в точности таким же, как для случайного процесса бросания монеты. Рассмотрим бесконечную серию бросаний. Если в n -й раз выпал орел, то на n -м месте в последовательности будем ставить единицу, если решка, то двойку. Одно бросание эквивалентно сдвигу на один элемент последовательности. Таким образом, каждой y -координате точки в предельном множестве $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(S) \cap S$ однозначно соответствует бесконечная серия бросаний монеты. Это очень важный факт. Он показывает глубокую связь между детерминированными обратимыми динамическими системами и традиционными объектами теории вероятностей. Такой подход, связанный с сопоставлением различным траекториям символического описания, получивший название *символической динамики*, оказался очень плодотворным. Методы символической динамики помогли исследовать хаотические режимы в ряде интересных динамических систем [152, 175, 289]. Чтобы построить инвариантное множество, поступим следующим образом.

Заметим, что $S \cap T^{-1}(S)$ состоит из двух горизонтальных полос, $S \cap T^{-2}(S)$ из четырех и т. д. (рис. 5.8). Их можно, так же как раньше, нумеровать последовательностью единиц и двоек. Рассмотрим множество $T^{-1}(S) \cap S \cap T(S)$ (рис. 5.9), оно представляет четыре квадрата. (После применения как T , так и T^{-1} эти квадраты переходят в себя.) Множество $T^{-2}(S) \cap T^{-1}(S) \cap S \cap T(S) \cap T^2(S)$ представляет собой шестнадцать квадратов. Множество $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(S) = \Lambda$ является инвариантным. При символическом описании траекторий точек множества Λ нужно рассматривать последовательность единиц и двоек, бесконечную как в одну, так и в другую сторону.

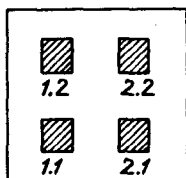


Рис. 5.9

Можно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между точками $x \in \Lambda$ и множеством бесконечных в обе стороны последовательностей двух символов [152, 289]. Итерация отображения T приводит к сдвигу на один элемент вправо.

Допустим, в последовательности $\{a_i\}$, $-\infty < i < \infty$ ($a_i = 1$ или 2), есть периодически повторяющаяся группа чисел. Проследив за траекторией точки квадрата, соответствующей этой последовательности, можно убедиться, что она принадлежит циклу отображения T .

Рассматривая непериодические последовательности $\{a_i\}$, можно строить бесконечное множество непериодических траекторий различных типов.

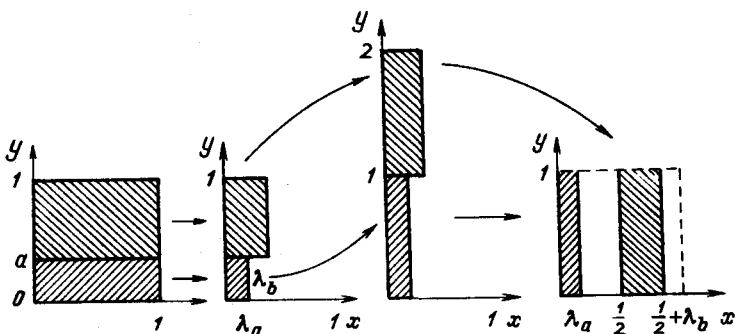


Рис. 5.10

Близкий подход, связанный с построением символической последовательности, может быть развит при анализе так называемого «преобразования пекаря», которое широко используется в качестве простой и эффективной модели в теории динамических систем [259] и термодинамике [162]. Обобщенное преобразование пекаря определяется формулой

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \lambda_a x_n, & y_{n+1} &= y_n / \alpha, & \text{если } y_n < \alpha, \\
 x_{n+1} &= 1/2 + \lambda_b x_n, & y_{n+1} &= (y_n - \alpha) / (1 - \alpha), & (5.14)
 \end{aligned}$$

если $y_n > \alpha$.

Действие этого отображения на единичный квадрат показывает рис. 5.10. Преобразование пекаря обладает чувствительностью к начальным данным и свойством перемешивания. В работе [259] подробно рассмотрены различные количественные характеристики отображения (5.14).

В условиях гиперболичности существенным оказывается наличие сжимающего и растягивающего направления, которые в каждой точке пересекаются под ненулевым углом. Однако во многих динамических системах, описывающих хаотические режимы, это условие не выполняется. Примером может служить отображение Хенона

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \quad y_{n+1} = bx_n, \quad (5.15)$$

действие которого показано на рис. 5.11. В работе Хенона [196] приведены результаты расчетов, показывающие, что вдоль одного направления аттрактор обладает канторовой структурой. Отображение (5.15) является сложным объектом. Об этом говорят, например, результаты работы [295], в которой исследованы области устойчивости циклов S^n ($n \leq 6$) на плоскости параметров (a, b) .

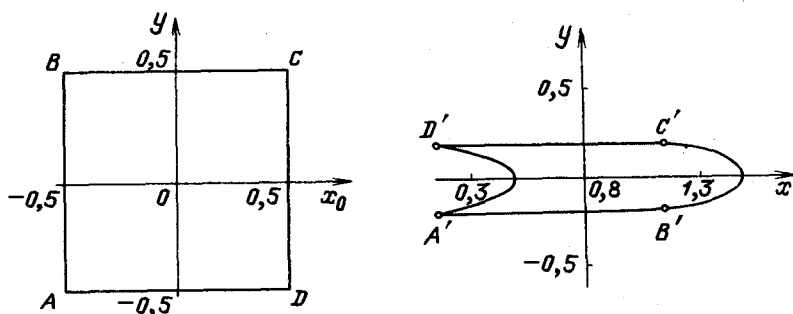


Рис. 5.11

В работе [251] были получены достаточные условия, при которых в семействе двумерных отображений наблюдается бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода. При некоторых значениях a и b эти условия оказываются выполнены и для преобразования (5.15).

При исследовании одномерных отображений оказалось, что во многих случаях проще изучать стохастические свойства отображений с острой вершиной, чем с гладкой. Можно ожидать, что в двумерном случае ситуация будет аналогичной. Это действительно так. Для аттрактора отображения

$$x_{n+1} = 1 - y_n - a|x_n|, \quad y_{n+1} = bx_n,$$

называемого *аттрактором Лози*, в определенном диапазоне параметров было доказано существование инвариантной меры, проверена гиперболичность аттрактора и показано, что он обладает перемешиванием [236, 335].

§ 5.2. Разрушение инвариантных торов.

Сценарий Рюэля – Такенса

До начала широкого исследования стохастических режимов средствами вычислительного эксперимента предполагалось, что турбулентность в гидродинамике возникает в результате последовательности бифуркаций, называемой сейчас сценарием Хопфа – Ландау [132, 133]. Обсудим этот сценарий подробнее.

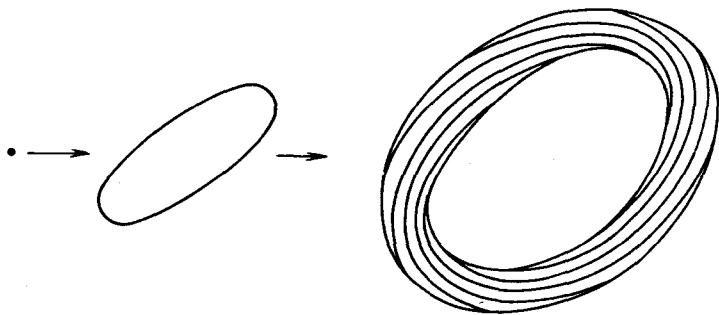


Рис. 5.12

Будем полагать, что изучаемое явление описывается конечномерной динамической системой. (Это представляется естественным, поскольку можно считать, что влияние высших пространственных гармоник из-за вязкости будет невелико.) Пусть ламинарное течение соответствует особой точке этой системы. Будем менять один из параметров течения λ (например, число Рейнольдса). При некотором значении λ особая точка теряет устойчивость, происходит *бифуркация Хопфа*, и рождается предельный цикл. В результате следующей бифуркации Хопфа возникает *инвариантный тор* (рис. 5.12). В таком решении можно выделить две независимые частоты. В самом деле, перейдем в систему координат R, φ, θ , показанную на рис. 5.13. В этих переменных простейшая спираль, намотанная на тор, определяется формулой $R = R_0, \varphi = \omega_1 t + \varphi_0, \theta = \theta_0 + \omega_2 t$, где $R_0, \varphi_0, \theta_0, \omega_1, \omega_2$ – постоянные величин-

ны. Если отношение ω_1/ω_2 – иррациональное число, то решение будет непериодично, и траектория равномерно заполнит всю поверхность тора.

Следующая бифуркация Хопфа приведет к появлению инвариантного тора более высокой размерности. При этом решение может стать похожим на спираль, которая с частотой ω_3 «навивается» на спираль, возникающую после предыдущей бифуркации. Та траектория, которая появляется после многих бифуркаций Хопфа в сценарии Хопфа – Ландау, и рассматривается как турбулентный режим.

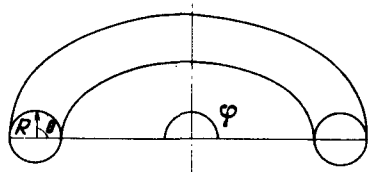


Рис. 5.13

Современная экспериментальная техника позволяет выяснить, наблюдаем ли мы в реальной системе многочастотный режим и сколько в нем разных частот [225, 376]. Обычно не удается обнаружить течений более чем с тремя независимыми частотами. Естественно ожидать, что должен существовать другой сценарий, в котором существенную роль играют бифуркации Хопфа (в отличие от обсуждавшихся ранее сценариев Фейгенбаума и Помо – Манневилля).

Его предложили в 1971 г. Д.Рюэль и Ф.Такенс [167]. Пусть интересующая нас система описывает простейший трехчастотный режим: $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t$, $\varphi_3 = \omega_3 t$, φ_n – углы в соответствующем пространстве ($n = 1, 2, 3$). Пусть, кроме того, $f(\varphi_n) = f(\varphi_n + 2\pi)$, где f – любая из функций, входящих в наши уравнения. Д.Рюэль и Ф.Такенс доказали, что можно сколь угодно мало изменить правые части системы, и решение качественно изменится. Вместо трехчастотного режима возникнет странный аттрактор, и поведение решений станет

хаотическим. При этом множество таких деформаций, меняющих тип решения, оказывается достаточно широким. Таким образом, сценарий может быть следующим: две бифуркации Хопфа и хаос, наступающий после третьей бифуркации.

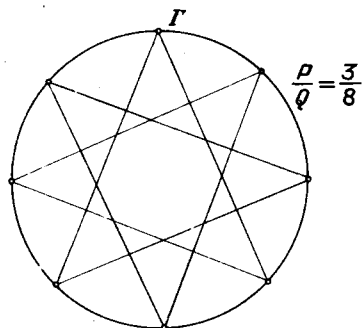


Рис. 5.14

Вопрос о том, как возникает хаотический режим из инвариантного тора, оказался сложным и активно исследовался в последние годы [14, 212]. Основным объектом в этих исследованиях являются двумерные отображения. Многие выясненные закономерности оказались универсальными, не зависящими от конкретного вида системы и ее размерности. В работе [212] такой переход исследовался на примере отображения

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= ay_n(1 - x_n). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Его можно записать в виде $x_{n+2} = ax_{n+1}(1 - x_n)$. Это двумерное отображение возникает как естественное обобщение модели (4.2). В целом диапазоне параметра a точки на плоскости (x, y) при $n \rightarrow \infty$ ложатся на гладкую замкнутую кривую Γ . Та же ситуация характерна для инвариантных торов в динамических системах с непрерывным временем (кривая Γ играет роль сечения тора *плоскостью Пуанкаре*). Например, в случае, по-

казанном на рис. 5.12, 5.13, это может быть плоскость $\varphi = \text{const}$). В случае периодического решения на этой кривой будет лежать конечное число точек (рис. 5.14), если решение неперiodично, точки будут заполнять весь контур.

Сам контур в обоих случаях является инвариантным множеством, а поведение траекторий на нем (а значит, и поведение траекторий двумерного отображения при $n \rightarrow \infty$) определяется отображением окружности в себя

$$\theta_{n+1} = F(\theta_n), \quad F(\theta_n + 2\pi) = F(\theta_n) + 2\pi. \quad (5.17)$$

Обсудим подробнее свойства отображений такого вида. Числом вращения в данной точке θ_0 назовем предел

$$\rho(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(\theta_0) - \theta_0}{2\pi n}. \quad (5.18)$$

Пусть $\rho(\theta_0) = P/Q$, где P и Q — целые числа, тогда некоторая точка θ_0 возвращается в исходное положение через Q итераций, совершив P оборотов вокруг контура (см. рис. 5.14). Для наглядности точки $F^n(\theta_0)$ и $F^{n+1}(\theta_0)$ соединены тонкими линиями.

Отображение (5.17) возникает в связи с исследованием дифференциальных уравнений на торе, которые представляют интерес в ряде задач небесной механики и при анализе других гамильтоновых систем. Они подробно изучались в работах А. Пуанкаре (1885) и А. Данжуа (1932). В частности, было показано, что предел в определении числа вращения существует и не зависит от начальной точки. Он рационален тогда и только тогда, когда отображение F^q для некоторого q имеет неподвижную точку.

Сохраняющее ориентацию отображение окружности $F'(\theta) > 0$ структурно устойчиво тогда и только тогда, когда число вращения рационально, и все циклы невырождены, т. е. единица не является собственным числом производной отображения F^q в точках цикла q . Структурно устойчивые диффеомор-

физмы*) образуют открытое всюду плотное множество в пространстве C^2 всех дважды дифференцируемых сохраняющих ориентацию отображений окружности. Это означает, в частности, что вблизи любого преобразования из этого класса есть отображение, имеющее цикл.

В качестве простейшего преобразования окружности мы рассматривали поворот на постоянный угол (5.6). Оказывается, что любое сохраняющее ориентацию преобразование F класса C^2 , имеющее иррациональное число вращения ρ , топологически эквивалентно повороту окружности на угол $2\pi\rho$ (5.6). Доказательства этих утверждений содержатся в книге [8].

Несмотря на структурную устойчивость отображений окружности, имеющих циклы, мера множества параметров, для которых число вращения ρ иррационально, может быть достаточно велика. Это показывает семейство отображений [8]

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \alpha + \varepsilon \sin \theta_n ,$$

$$\alpha \in [0, 2\pi] , \quad 0 \leq \varepsilon < 1 . \quad (5.19)$$

Схематическое разбиение плоскости параметров на области, где ρ рационально (заштрихованные участки) и иррационально (незаштрихованные участки), приведено на рис. 5.15. Из каждой точки на оси α такой, что $\alpha = \pi p/q$, выходит «язык», ограниченный парой гладких кривых. На рисунке показано только несколько таких «языков». С увеличением q ширина «языков» уменьшается. Несмотря на то, что рациональные числа составляют плотное множество на отрезке, оказывается, что мера множества точек (α, ε) , для которых ρ рационально в области $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, мала по сравнению с мерой всей области. Таким образом, взятое наугад отображение из семейства (5.19) с подавляющей вероят-

*) Дiffeоморфизм – взаимно однозначное, дифференцируемое вместе с обратным отображение.

ностью имеет иррациональное число вращения. Этот же результат справедлив, если вместо $\sin\theta$ рассматривать любую аналитическую функцию θ .

Это глубокий и интересный факт. Напомним, что аналогичная картина была характерна и для ряда семейств одномерных отображений с гладкой вершиной. В них сколь угодно близко к значениям параметров, при которых наблюдается хаотический режим, есть значения, при которых аттрактором является цикл. Вместе с тем, задав наугад параметр, с положительной вероятностью можно наблюдать хаос. Это принципиально меняет сам подход к предсказанию поведения таких систем. Он становится вероятностным не только из-за чувствительности к начальным данным, но и из-за «чувствительности к параметрам».

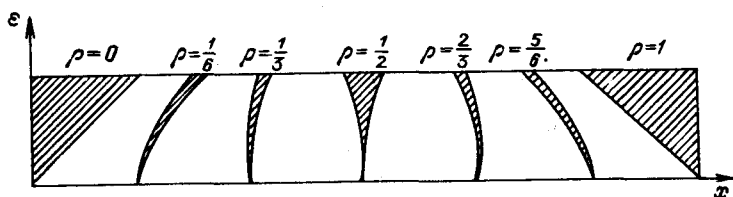


Рис. 5.15

Анализ семейств вида (5.19) самым тесным образом связан с теорией Колмогорова – Арнольда – Мозера, рассматривающей разрушение n -мерных инвариантных торов под действием малых возмущений. Результаты этой теории сыграли важную роль при анализе многих гамильтоновых систем и ряда задач статистической физики [8, 87, 147, 215].

Обратим внимание на два важных факта. Первое – для каждого значения параметра число ρ единственно и не зависит от начальной точки. Второе – свойства двухпараметрического семейства отображений (5.19) оказываются более простыми и понятными, чем свойства однопараметрических семейств, которым соответствуют различные кривые на плоскости параметров (α, ϵ) .

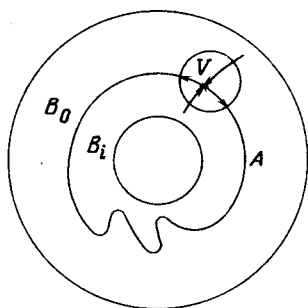


Рис. 5.16

Исходя из этого, отображения вида (5.16) в работе [212] также рассматривались как элемент двухпараметрического семейства

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + bx_n, \\ y_{n+1} &= ay_n (1 - x_n). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Будем считать, что отображение (5.20) записано в полярной системе координат

$$(r_{n+1}, \theta_{n+1}) = F(r_n, \theta_n). \quad (5.21)$$

Пусть оно переводит область B ($1 < r < 2$) в себя (рис. 5.16). Пусть $\arg(r, \theta) \equiv \theta$, $\arg F(r, \theta + 2\pi) = 2\pi + \arg F(r, \theta)$ для всех $(r, \theta) \in B$. Число вращения $\rho(r, \theta)$ определим формулой

$$\rho(r, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arg \frac{F^n(r, \theta) - \theta}{2\pi n}. \quad (5.22)$$

С помощью численных методов в работе [212] были построены границы областей на плоскости (a, b) , в которых устойчивы циклы с данным числом вращения P/Q (аналоги «язычков» или, как их называют, «резонансных рогов» на рис. 5.15). Оказалось, что есть участки плоскости, в которых устойчивы циклы с различными числами вращения (с различных

начальных данных происходит выход на различные циклы). Отсюда следует, что инвариантный тор разрушен. Другими словами, нет такой замены координат, с помощью которой фигура, возникающая на плоскости Пуанкаре, могла бы быть приведена к окружности. Если бы существовал контур, топологически эквивалентный окружности, то число вращения было бы единственно.

При исследовании гамильтоновых систем во многих физических задачах используется *критерий перекрытия резонансов* [233]. В соответствии с ним в области, где хотя бы два «языка» перекрываются, может возникать стохастичность. Близкая ситуация характерна и для отображения (5.16).

Естественно выяснить вначале, в каких случаях существует единственное число вращения, и когда их бывает несколько. Достаточные условия этого были получены в работе [212]. Прежде чем перейти к этим результатам, введем несколько определений.

Пусть компактное инвариантное множество, содержащее все точки $z \in A = \bigcap_{n \geq 0} F^n(B)$, делит область на две части — внутреннюю B_i и внешнюю B_0 (см. рис. 5.16).

Назовем неподвижную точку z отображения *седлом*, если у матрицы Якоби $DF(z)$ одно собственное значение $|\lambda_1| < 1$, второе $|\lambda_2| > 1$. Точка z цикла F^q называется *периодической седловой точкой*, если те же неравенства выполнены для собственных значений матрицы DF^q .

Пусть z — неподвижная точка F , тогда множества

$$W^s(z, F) = \{ x: F^n(x) \rightarrow z \text{ при } n \rightarrow +\infty \},$$

$$W^u(z, F) = \{ x: F^n(x) \rightarrow z \text{ при } n \rightarrow -\infty \}$$

будем называть соответственно *устойчивым* и *неустойчивым* *многообразиями* точки z . Отметим, что эти многообразия могут вести себя не так, как интегральные кривые дифференциальных уравнений, они могут пересекаться, не совпадая целиком.

В работе [212] были доказаны два утверждения.

Т е о р е м а 5.1. *Предположим, что отображение F удовлетворяет следующим требованиям:*

- а) *существует периодическая седловая точка $y \in A$ с положительными собственными значениями;*
- б) $W^s(y, F^q) \cap A = \{y\}$, где q – период y ;
- в) *одна ветвь $W^s(y, F^q)$ пересекает только B_p , в то время как другая ветвь пересекает только B_0 (см. рис. 5.16).*

Тогда $\rho(z) = \rho(y)$ для всех $z \in B$.

Т е о р е м а 5.2. *Пусть $y \in A$ – периодическая точка, принадлежащая циклу с периодом q и числом вращения p/q , где числа p и q взаимно просты. Предположим, что $W^u(y, F^q)$ пересекает $W^s(F^k(y), F^q)$ трансверсально (под ненулевым углом) для некоторого $0 < k < q$. Тогда существует невырожденный интервал I , содержащий p/q , такой, что для каждого $\alpha \in I$ существует $z \in A$, $\rho(z) = \alpha$. Более того, есть такие точки, для которых число вращения не определено.*

На рис. 5.17 звездочками обозначены седла и показано несколько итераций точки x_0 , близкой к $y' = F^k(y)$. Для итераций таких точек можно построить символическую динамику, использование которой и позволяет доказать теорему.

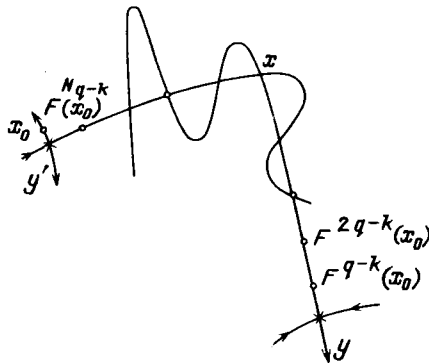


Рис. 5.17

Определение устойчивого и неустойчивого многообразия естественно обобщается на случай цикла Y периода q

$$(Y \equiv \{y, F(y), \dots, F^{q-1}(y)\}, F^q(y) = y,$$

$$F^n(y) \neq y \quad \text{для } 0 < n < q):$$

$$W^s(Y, F) = \{x : d(F^n(x), Y) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty\}$$

$$W^u(Y, F) = \{x : d(F^n(x), Y) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow -\infty\}.$$

Точка $x \in B$ называется *гомоклинической* к Y , если

$$x \in W^s(Y, F) \cap W^u(Y, F) - Y.$$

Условия второй теоремы означают, что должна существовать гомоклиническая точка.

В этой и во многих других задачах, в которых возникающие отображения обратимы, наличие гомоклинической точки оказывается принципиальным. Можно убедиться, что из наличия одной гомоклинической точки x следует, что их будет бесконечно много. В самом деле, в силу инвариантности $W^s(z, F)$ и $W^u(z, F)$, $F^k(x) \in W^s(z, F)$, $F^k(x) \in W^u(z, F)$ при любом k . Следовательно, все они являются гомоклиническими точками.

Если допустить, что точки $x, F(x), \dots, F^m(x)$ образуют цикл, получим противоречие с тем, что $F^k(x) \in W^s(z, F)$. В самом деле, из последнего соотношения следует, что точки $F^k(x)$ должны стремиться при $k \rightarrow \infty$ к z . Поэтому из существования одной невырожденной гомоклинической точки (т. е. такой, в которой W^s и W^u пересекаются, а не касаются) следует, что существует очень сложное множество, называемое *гомоклинической структурой*. В силу бесконечности точек пересечения W^s и W^u ее не удастся изобразить, однако наглядное представление о ней обычно дают с помощью рис. 5.18.

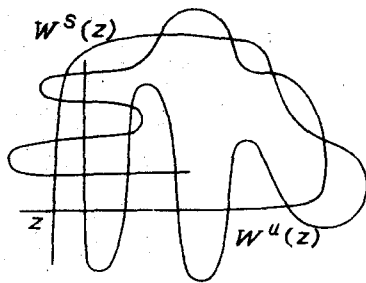


Рис. 5.18

Впервые гомоклиническая структура была открыта А. Пуанкаре при исследовании классической задачи трех тел. Наличие такой структуры связано с возникновением стохастических режимов [10, 87, 289]. Действие отображений, в которых существует гомоклиническая структура, во многом аналогично действию подковы Смейла. Отсюда следует существование инвариантных канторовых множеств, исследовать которые позволяет аппарат гиперболической теории. Можно сказать, что итерации F ведут себя как случайная последовательность бросаний монеты. Ссылки на оригинальные работы, посвященные этой задаче, можно найти в обзорах [158, 177].

Таким образом, если переход к хаосу происходит в соответствии со сценарием Рюэля – Такенса, то после двух бифуркаций Хопфа и рождения инвариантного тора может происходить *захват частоты*. При этом система в пространстве параметров оказывается в пределах одного из «резонансных рогов» (см. рис. 5.15). Возникает цикл, при этом обычно выполняются условия теоремы 5.1. Далее происходит сложная перестройка инвариантного множества, в результате которой появляются гомоклинические точки (выполняются условия теоремы 5.2). В системе наблюдается *гистерезис*: с разных начальных данных может происходить выход на циклы с различными числами вращения и на хаотические режимы.

Интересен вопрос о том, что происходит с инвариантным множеством A при изменении параметров, как оно теряет

гладкость. Этот вопрос рассматривался в работах [9, 158, 233]. Возможные варианты эволюции множества A , появление гомоклинических точек наглядно представлены в работах [14, 351].

Обратим внимание на отличие обсуждаемого сценария от тех, которые мы рассматривали до этого. Там, чтобы выяснить тип аттрактора, достаточно было рассмотреть итерации взятой наугад точки (может быть, нескольких точек). Здесь ситуация намного сложнее.

Если рассматривать последовательность $\{x_n\}$, получаемую в натурном или вычислительном эксперименте, то можно ожидать, что при изменении параметров будет обнаружена последовательность: особая точка \rightarrow цикл \rightarrow 2-тор \rightarrow цикл \rightarrow \rightarrow хаос. Однако, чтобы выяснить механизм разрушения инвариантного тора, нужно иметь математическую модель явления и тщательно ее исследовать – изучать двухпараметрическое семейство динамических систем, строить устойчивые и неустойчивые многообразия, искать гомоклинические точки. Это приводит к тому, что постановка вычислительного эксперимента оказывается достаточно сложной. Хаос в системах, описываемых двумерными отображениями, может возникать в результате разрушения инвариантных торов. Однако в двухпараметрических семействах двумерных отображений возможны и другие сценарии, при которых непериодическому режиму (точнее траектории с иррациональным значением ρ) предшествует последовательность циклов. Более того, для этой последовательности обнаружены универсальные закономерности, справедливые для различных инвариантных торов [264, 351, 368].

Удобной моделью для изучения такого поведения является двумерное отображение

$$\begin{bmatrix} \theta_{n+1} \\ r_{n+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \theta_n \\ r_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \theta_n + \Omega + b r_n - (K/2\pi) \sin 2\pi\theta_n \\ b r_n - (K/2\pi) \sin 2\pi\theta_n \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

якобиан которого постоянен и равен b . При $b = 1$ это

отображение сохраняет площадь, оно широко используется при анализе гамильтоновых систем. В другом предельном случае ($b = 0$) оно переходит в одномерное отображение

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega - (K/2\pi) \sin 2\pi\theta_n. \quad (5.24)$$

При $0 \leq K < 1$ f и f^{-1} обратимы и аналитичны. При $K = 1$ f^{-1} существует, однако при $\theta = 0$ имеет особенность $\theta^{1/3}$ и поэтому недифференцируема в этой точке. При $K > 1$ однозначной функции f^{-1} не существует. Число вращения для отображения (5.24) естественно определить формулой

$$\rho(K, \Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f^n(\theta) - \theta).$$

Выберем какое-нибудь иррациональное число $0 < \bar{\rho} < 1$.

Удобно выбрать число, наиболее просто представимое в виде цепной дроби.

Например, *золотое сечение*

$$\bar{\rho} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \langle 11111 \dots \rangle = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Построим далее последовательность рациональных чисел $\rho_i = P_i/Q_i$ таких, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i = \bar{\rho}$.

$$\rho_1 = \langle 1 \rangle = 1/1, \quad \rho_2 = \langle 11 \rangle = 1/2, \quad \rho_3 = \langle 111 \rangle = 2/3 \dots$$

Можно проверить, что

$$\rho_i = \langle \underbrace{111 \dots 1}_i \rangle = F_i / F_{i+1}$$

где F_i - числа Фибоначчи, которые определяются соотношением $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

При этом

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\rho_i - \rho_{i-1}} = -l^2.$$

Здесь $l = \bar{\rho}$. Будем считать, что значение K фиксировано, и определим последовательность значений параметра Ω в отображении (5.24) таких, что при $\Omega = \Omega_i$

$$f^{Q_i}(0) = P_i$$

То есть точка $\theta = 0$ в отображении принадлежит циклу с периодом Q_i и числом вращения ρ_i . Далее, следуя работе [264], сделаем предположение, что существует единственная предельная точка

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Omega_i(K) = \bar{\Omega}(K), \quad \rho(K, \bar{\Omega}(K)) = \bar{\rho}.$$

Пусть $\delta_i(K) = (\Omega_{i-1}(K) - \Omega_i(K)) / (\Omega_i(K) - \Omega_{i+1}(K))$.

Численные расчеты, приведенные в работе [368], показывают, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i(K) = -\Gamma^2, \quad 0 \leq K < 1,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i(K) = -\Gamma^y \equiv \delta, \quad K = 1, \quad (5.25)$$

где $y = 2,16443 \pm 0,00002$.

Так же как в теории Фейгенбаума, естественно рассмотреть расстояние между точкой $\theta = 0$ и ближайшим к ней элементом цикла (по модулю 1) с периодом Q_i :

$$d_i = f^{Q_i}(0) - P_{i-1}$$

Пусть $\alpha_i(K) = d_{i-1} / d_i$. Расчеты показывают, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i(K) = -\Gamma^1, \quad 0 \leq K < 1,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i(K) = -\Gamma^x \equiv \alpha, \quad K = 1, \quad (5.26)$$

где $x = 0,52687 \pm 0,00002$.

По аналогии с теорией одномерных отображений можно ожидать, что применение ренорм-группового подхода в этой системе позволит найти универсальные функции и соотношения (аналоги уравнения Фейгенбаума), исследуя которые можно найти значения x и y . Такая теория была построена в работах [264, 351].

В работах [351, 368] обсуждался важный вопрос о том, какой должна быть постановка эксперимента и обработка его результатов, чтобы обнаружить явления, предсказываемые теорией. В качестве примера такого экспериментального исследования можно привести работу [374]. В ней рассматривалась конвекция Рэлея – Бенара в ртути, через которую пропускался переменный ток, при этом параметры выбирались таким образом, чтобы числа вращения наблюдаемых циклов лежали в окрестности золотого $\bar{\rho} = (\sqrt{5}-1)/2 = \langle 111... \rangle$ или серебряного $\rho = \sqrt{2}-1 = \langle 122 ... \rangle$ сечений.

Вопросы, связанные с разрушением инвариантных торов, вызывают в настоящее время большой интерес. Обратим внимание на несколько направлений исследований.

Одно из них связано с исследованием сценария Рюэля – Такенса в различных математических моделях, например, в системах с симметрией. В работе [304] изучалось отображение

$$x_{n+1} = 1 - Ax_n^2 + D(y_n - x_n),$$

$$y_{n+1} = 1 - Ay_n^2 + D(x_n - y_n).$$

Была обнаружена сложная последовательность циклов и инвариантных торов. Оказалось, что значения A_n , при которых появляются циклы длины $Q_n = 8n-1$, сходятся к A_∞ при $n \rightarrow \infty$, и $A_\infty - A_n \sim Cn^{-2}$. Сложные последовательности циклов и инвариантных торов были обнаружены и при исследовании некоторых задач радиофизики [6, 78].

Другое направление связано с анализом глобальных свойств отображений, в которых реализуется сценарий Рюэля – Такенса. Например, если построить зависимость числа вращения ρ от параметра Ω для отображения (5.24), то возникает очень сложная функция. Каждый «резонансный рог» (см. рис. 5.15) с $\rho = P/Q$ дает ступеньку на этом графике. Между каждыми двумя ступеньками P/Q и P'/Q' существует ступенька $(P + P')/(Q + Q')$, и так до бесконечности. Возникающий график (и другие кривые такого типа) часто называют «дьявольской лестницей». Оказывается, можно построить ренорм-групповую теорию [246], позволяющую предсказать, с какой вероятностью взятое наугад значение параметра Ω будет давать цикл.

Появились работы, в которых развитые представления обобщаются на торы более высокой размерности [366]. В ряде случаев анализ двумерных отображений позволяет предсказать новые явления, характерные для многих нелинейных диссипативных систем. К ним относятся *кризисы аттракторов*. Оказалось, что, наряду с внутренними и граничными кризисами, могут существовать *циклические кризисы*. Это одновременное столкновение нескольких сосуществующих аттракторов с границами, которые отделяют их области притяжения [288]. При этом точка в фазовом пространстве после кризиса ($\lambda > \lambda^*$) «обходит» один за другим все существующие при $\lambda < \lambda^*$ аттракторы. Однако время, которое она проводит в каждом из них, оказывается случайным.

В некотором диапазоне параметров у отображения

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4\lambda x_n(1 - x_n) + \gamma x_n y_n, \\ y_{n+1} &= 4\lambda y_n(1 - y_n) + \gamma x_n y_n \end{aligned} \quad (5.27)$$

могут сосуществовать три аттрактора. Область притяжения каждого из них обладает сложной геометрией. В фазовом пространстве возникает «паркет» [288]. По-видимому, такая «паркетная» структура простирается вплоть до бесконечно

малых масштабов. Граница областей притяжения может быть гладкой при $\lambda < \bar{\lambda}$, а при $\lambda > \bar{\lambda}$ становится сложной изрезанной кривой, повторяющей себя на меньших масштабах. В работе [283], где изучаются такие перестройки, они названы *метаморфозами*. Можно ожидать, что аналогичные явления будут обнаружены и в различных системах дифференциальных уравнений. Важные результаты были получены при анализе двумерных отображений кольца в себя.

Аттракторами таких отображений могут быть как устойчивые неподвижные точки, так и более сложные притягивающие множества, описывающие квазипериодические режимы. Каково же типичное разбиение пространства параметров на области, в которых аттракторы имеют один тип? Какова последовательность бифуркаций, связанная с переходом от одних аттракторов к другим?

Ответ на эти вопросы, связанный с результатами вычислительного эксперимента и теоретического анализа, был получен в восьмидесятые годы. Следуя работам [14, 351], обсудим типичную картину внутри резонансного рога.

Рассмотрим двухпараметрические семейства отображений $P_{\omega, a}(r, \varphi)$:

$$r_{n+1} = 1 + \lambda(r_n - 1) - (a/2\pi) \sin(2\pi\varphi_n)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega + \lambda(r_n - 1) - (a/2\pi) \sin(2\pi\varphi_n)$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \lambda < 1,$$

в котором параметр λ связан со сжатием фазового объема, ω — с числом вращения.

Выделим неподвижные точки отображения $P_{\omega, a}$. Их устойчивость определяется собственными значениями матрицы линеаризованной системы λ_1 и λ_2 . Устойчивую точку с $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$ будем называть *стоком* (далее считаем, что $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$), а неустойчивую с $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$ — *седлом*. Простейшая бифуркация в системе — одновременное рождение или исчезновение седла и стока.

Она аналогична обсуждавшейся раньше бифуркации в системе с непрерывным временем, в ходе которой «ниоткуда» возникают устойчивое и неустойчивое положения равновесия (см. рис. 3.4). Та же картина наблюдается при возникновении седла и узла из сложного состояния равновесия седло – узла.

Можно считать, что отображение $P_{\omega, a}$ порождается трехмерной системой с непрерывным временем, в которой r и φ характеризуют координаты на плоскости Пуанкаре. При этом стоку соответствует устойчивый цикл, седлу – неустойчивый. Они возникают из сложного цикла. Особую точку на плоскости Пуанкаре, соответствующую ему, будем называть *седло-узлом*. В этой точке $\lambda_1 = 1$.

Рассмотрим некоторую кривую на плоскости параметров $a = a(\mu)$, $\omega = \omega(\mu)$. Пусть седло-узел исчезает, при $\mu = 0$.

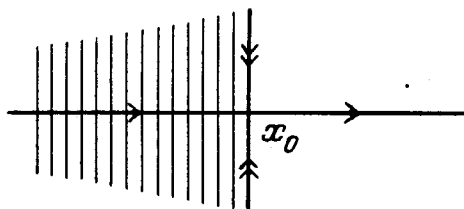


Рис. 5.19

Можно показать, что в окрестности этой точки существуют новые переменные s и z , в которых поведение динамической системы $P_{\omega, a}$ может быть описано более простым отображением.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + s_n^2 + \mu \\ z_{n+1} &= z_n/2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Его поведение при $\mu = 0$ иллюстрирует рис. 5.19. Вблизи точки $x_0 \equiv (s_0, z_0) = (0, 0)$ есть *неустойчивое многообразие* $W_u^- = \{x: P_{\omega(0), a(0)}^{-n} x \rightarrow x_0 \text{ при } n \rightarrow \infty\}$. Локально, вблизи x_0 , оно состоит из полуоси $z = 0, s \geq 0$. *Устойчивое многообразие* $W_s = \{x: P_{\omega(0), a(0)}^n x \rightarrow x_0 \text{ при } n \rightarrow \infty\}$ состоит из полупространства $\{s \leq 0\}$.

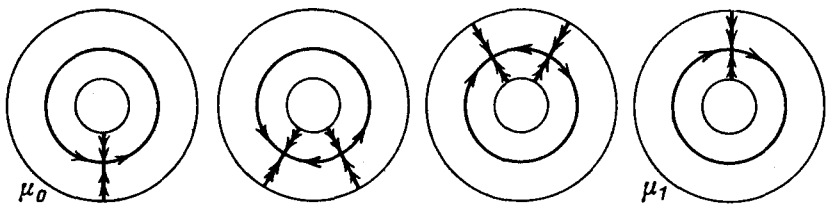


Рис. 5.20

Можно выделить так называемое *сильно устойчивое слоение* локально устойчивого многообразия. Это следующее разбиение на кривые, называемые *листами*: точки x и y принадлежат одному листу, если $|P^n x - P^n y|$ экспоненциально стремится к нулю. Это слоение инвариантно относительно P : P -образ листа содержится в одном листе. Возможный переход от периодических к квазипериодическим режимам, который реализуется в семействе $P_{\omega, a}$ при небольших a показан на рис. 5.20. Здесь при $\mu = \mu_0$ и $\mu = \mu_1$ неподвижной точкой является седло-узел. Неустойчивое многообразие содержится в устойчивом, что приводит к существованию инвариантного цикла.

При $\mu_0 < \mu < \mu_1$ в системе есть седло и сток. Последний определяет асимптотическое поведение системы. Когда $\mu \geq \mu_1$ или $\mu \leq \mu_0$, седло-узел исчезает (так же как неподвижная точка отображения (5.28) при $\mu > 0$), а динамика системы определяется инвариантным циклом O_μ . К этой ситуации применимы все результаты теории отображений окружности в себя. В частности, если наугад взять значение μ вблизи μ_0 или μ_1 , то с положительной вероятностью число вращения будет иррационально, и в системе будет иметь место квазипериодический режим.

Можно доказать, что аналогичная ситуация будет наблюдаться до тех пор, пока инвариантное множество O_μ (на рис. 5.20 это окружность) трансверсально к каждому листу сильно устойчивого слоения многообразия W_s .

Однако ситуация кардинально меняется при нарушении этого условия. Пример этого показан на рис. 5.21. Здесь

при некотором значении μ_2 $\mu_0 < \mu_2 < \mu_1$ инвариантное множество O_μ касается некоторых листов слоения.

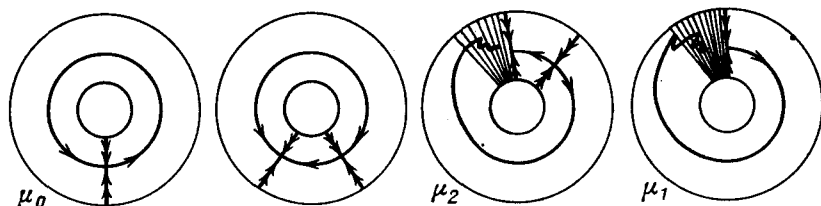


Рис. 5.21

Последние можно определить так. Пусть собственные значения соответствующей матрицы для стока равны λ_1 и λ_2 ; $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Будем говорить, что точки x и y принадлежат одному листу, если $|P^n x - P^n y| \sim \lambda_1^n$. Лист, проходящий через сток, назовем *сильно устойчивым многообразием* W^+ .

Пусть при некотором значении μ $\mu = \mu_1$ имеет место квадратичное касание между сильно устойчивым слоением узла и O_μ . Тогда можно доказать, что для любого ε в интервале $(\mu, \mu + \varepsilon)$ существуют значения μ , при которых отображение $P_{\omega, a}$ порождает отображения, аналогичные подкове Смейла, а, значит, и сложные инвариантные множества.

В отличие от предыдущего случая (см. рис. 5.20), когда аттрактор был периодическим или квазипериодическим, здесь существует бесконечно много периодических орбит. Было показано, что при этом может возникнуть бесконечно много стоков, естественно с малыми областями притяжения.

Для характеристики установившихся режимов в таких системах Л.П.Шильниковым было введено важное понятие *квазиаттрактора*. При действии малых случайных возмущений на гиперболические системы количественные характеристики хаоса обычно меняются мало. Однако в обсуждаемом случае ситуация принципиально иная. В системе могут быть и устойчивые циклы (которые и являются аттракторами), и непериодические траектории. Малые возмущения могут приводить к тому, что вместо циклов будет наблюдаться хаос, вместо аттрактора —

квазиаттрактор. Методы анализа квазиаттракторов активно развиваются в настоящее время.

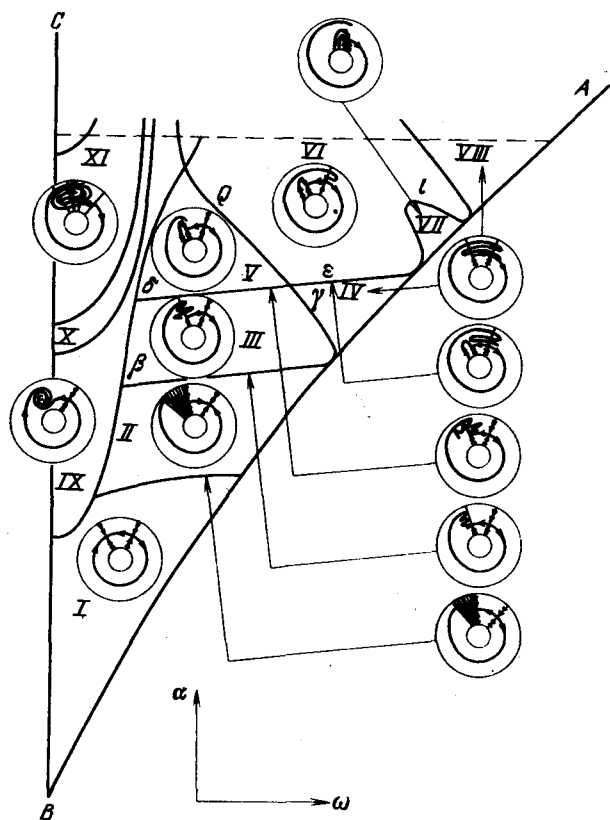


Рис. 5.22

Обратимся к типичному разбиению плоскости параметров $\{\omega, \alpha\}$ на области с различным поведением устойчивых и неустойчивых многообразий седел и стоков. Пусть $I_{P/Q}$ область, где $P_{\omega, \alpha}$ имеет устойчивую притягивающую орбиту с числом вращения P/Q . Ситуация является наиболее простой, когда $P = 0, Q = 1$. При этом в системе есть обычная неподвижная точка. В силу симметрии достаточно рассматривать только одну половину «резонансного рога» (см. рис. 5.22). На этом рисунке показано взаимное расположение сильного устойчиво-

го многообразия стока W^+ , устойчивого W_s^+ и неустойчивого W_s^- многообразия седла.

На линии AB происходит «бифуркация седло–узла».

Область I. Инвариантное множество O_μ является гладким. Внутренность кольца содержит сток и седло. W^+ и W_s^+ пересекаются с кольцом так, как показано на рисунке. Это именно тот случай, к которому относится теорема 5.1.

Область II. W_s^- квадратично касается сильного устойчивого многообразия, но не пересекает W^+ .

Область III. W_s^- трансверсально пересекает W^+ , но не пересекает W_s^+ .

Область IV и VIII. W_s^- трансверсально пересекает W^+ и W_s^+ .

Область V. W_s^- не пересекает W_s^+ . Обе ветви W^+ пересекают внутренний край кольца.

Область VI. Картина та же, что в области V. Однако W_s^- трансверсально пересекает W_s^+ .

Область VII. W^+ и W_s^+ пересекают внутреннюю часть кольца. W_s^- не пересекает W^+ и W_s^+ .

Область IX. Сток имеет два комплексных собственных значения.

Область X и XI. Собственные значения вновь становятся действительными.

Переход из области X в область XI связан с одной или несколькими бифуркациями удвоения периода.

Из рис. 5.22 ясно, что если рассматривать однопараметрические семейства $P_{\omega(\mu)a(\mu)}$, то анализ последовательности бифуркаций оказался бы гораздо сложнее. Исследование двухпараметрического семейства оказывается проще.

Для наблюдения обсуждавшейся структуры нужно иметь возможность менять несколько параметров, причем каждый из них должен быть известен с высокой точностью. Практически единственной областью, где эти условия выполнены, сейчас является радиофизика. Для нескольких радионизических систем бифуркации, связанные с захватом частоты и разрушением инвариантных торов, были детально исследованы [6, Д7].

Г Л А В А 6

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОСА

При изучении хаотических режимов в нелинейных средах возник ряд интересных вопросов. Допустим, что изучаемое явление хорошо описывается с помощью некоторого отображения (одномерного, двумерного или имеющего более высокую размерность), у которого есть хаотические режимы. Как в этом случае сравнить результаты теории с экспериментом? Пусть отображение обладает чувствительностью к начальным данным, и две близких траектории быстро удаляются друг от друга. Тогда можно ожидать, что различие между траекторией отображения и экспериментальными данными с течением времени будет расти. И причиной этого являются не недостатки модели, а природа изучаемых явлений.

Зачастую при проверке физических теорий сравнивалось небольшое число измеряемых величин (частоты, длины, времена и т. д.), либо величины, усредненные по большому интервалу времени. Однако есть большой класс задач, где интересны не только конкретные численные значения величин в данный момент в данной точке, не только усредненные по большому временному интервалу величины, а сама динамика процесса. Таковы, например, задачи, связанные с прогнозом поведения нелинейных систем (например, с предсказанием погоды).

Здесь об эффективности модели можно судить по тому, насколько точно и на каких временах она дает прогноз пове-

дения системы, а не по тому, насколько хорошо с ее помощью определяются средние значения на больших интервалах.

В таких задачах часто приходится сравнивать не траектории одной и другой системы (модели и объекта) на одни и те же моменты, а некоторые сложные характеристики, определяющие внутренние свойства изучаемых процессов. Зачастую это требует разработки новых алгоритмов обработки экспериментальных данных и широкого использования ЭВМ.

Есть и другой важный аспект. Процессы в нелинейных средах описываются бесконечномерными системами, поэтому важно выяснить, сколько и каких переменных необходимо измерять, как часто производить измерения и как обрабатывать их результаты.

Во многих физических задачах обычно имеют дело с одним, наиболее важным масштабом изменения величин. Однако, рассматривая аттрактор Фейгенбаума, ряд двумерных отображений, мы видим совершенно иную картину — возникновение сложной структуры, повторяющей себя на все меньших масштабах. Именно такая картина характерна для многих стохастических режимов. Необходимо выяснить, как характеризовать такую структуру.

Исследования, связанные с анализом этих вопросов, предпринятые в последние годы, уже привели к обнаружению интересных физических эффектов и новому взгляду на некоторые явления. Рассмотрим их более подробно.

§ 6.1. Фракталы и сложная упорядоченность

Примеры множеств, обладающих сложной структурой, были очень популярны в конце прошлого и начале нынешнего века в связи с проблемой строгого обоснования математического анализа. Они привлекали внимание таких выдающихся математиков, как Вейерштрасс, Эрмит, Кантор, Пеано. Пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции, построенной Вейерштрассом, на многие годы определил направление ряда

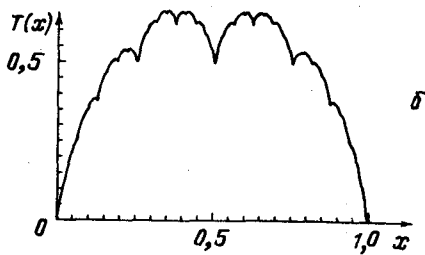
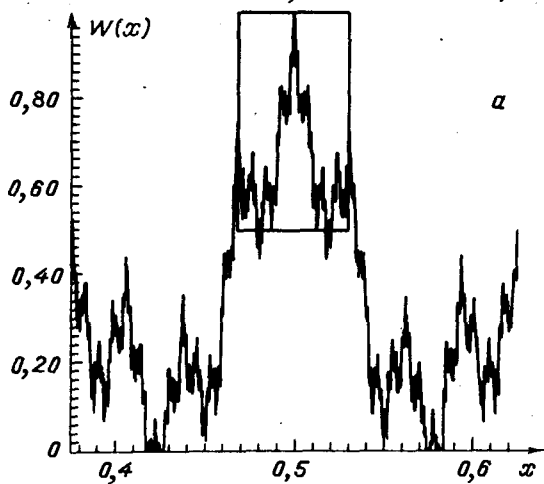
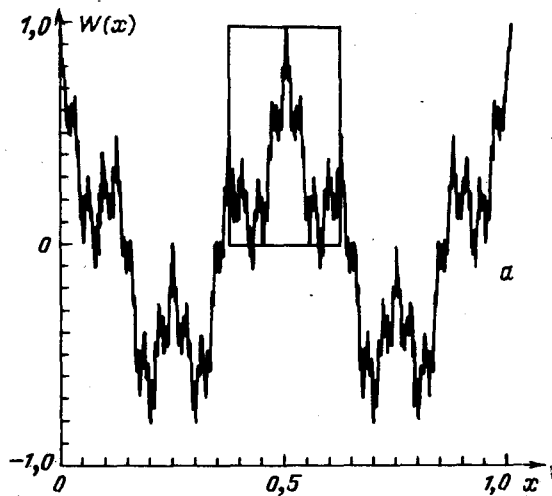


Рис. 6.1

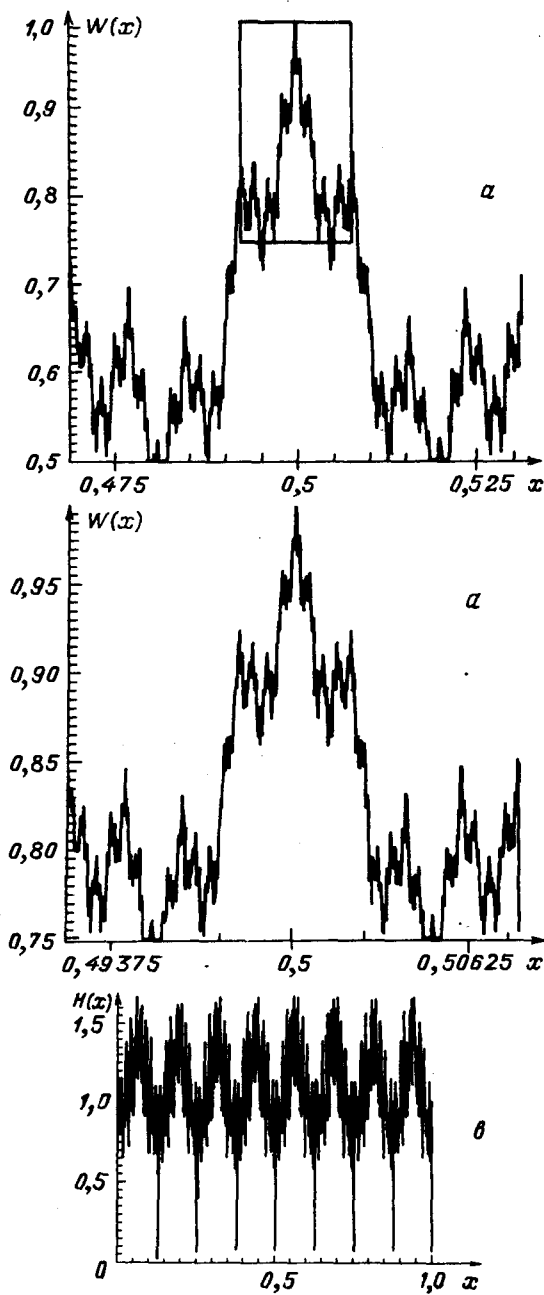


Рис. 6.1. (продолжение)

исследований в области функционального анализа и привел к повышению требований к строгости математических рассуждений.

Функция Вейерштрасса задается формулой $W(x) = \sum_{n \geq 1} a^n \cos(b^n \pi x)$. Представление о ней дает рис. 6.1, а. В этом случае $a = 0,5$; $b = 4$. На каждом следующем рисунке показан прямоугольник с предыдущего в увеличенном масштабе. К. Вейерштрасс доказал, что эта функция не имеет производной, если b нечетно, $0 < a < 1$, $ab > 1 + (3/2)\pi$. В 1916 году Харди доказал, что эта функция не является дифференцируемой ни в одной точке, если выполнены неравенства

$$a < 1, b > 1, ab \geq 1.$$

Интересно, что эта функция является решением функционального уравнения

$$f(x) - af(bx) = g(x),$$

где $g(x) = a \cos(b\pi x)$, которое при других зависимостях $g(x)$ может порождать другие недифференцируемые функции.

Другой пример функции, не имеющей производной, был приведен в 1903 г. Такаджи (см. рис. 6.1, б)

$$T(x) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \psi(2^{n-x}), \quad \psi(x) \equiv 2|x - [x + 1/2]|.$$

Квадратные скобки в последней формуле обозначают целую часть числа.

Ее обобщением является функция Хобсона (см. рис. 6.1, в) она построена для $a = 0,7$; $b = 0,8$.

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \psi(b^n x),$$

которая при $|a| < 1$ и $|ab| > 4$ непрерывна, но не имеет производной. Структуру этой функции можно пояснить следующим образом. Будем рассматривать частичные суммы ряда для $H(x)$. Функция $a\psi(bx)$ — первый член ряда — представляет собой «пилу» с амплитудой a и частотой b . Сумма двух пер-

ных членов – наложение двух «пил». Второй член имеет амплитуду a^2 и частоту b^2 . Если $a \ll 1$ и $b \gg 1$, можно сказать что 2-й член ряда определяет поведение функции H на интервале $\sim 1/b^2$ по оси x и на интервале $\sim a^2$ по оси ординат. На следующем шаге добавляется «пила» с более мелкими и частыми зубцами. При этом график следующего члена ряда получается в результате сжатия графика предыдущего члена в a раз по оси ординат и в b по оси абсцисс. Именно n -й член определяет поведение функции на масштабах $\sim a^n$ по оси ординат и на масштабах $\sim 1/b^n$ по оси абсцисс. Предыдущие члены определяют поведение функции $H(x)$ на больших масштабах по оси абсцисс, а последующие на меньших.

Усилия многих математиков были связаны с исследованием функции Римана

$$R(x) = \sum_{n \geq 1} n^{-2} \sin(\pi n^2 x).$$

Однако полное доказательство ее недифференцируемости было найдено только в 1972г. Обсуждение ряда этих и других примеров, а также обширную библиографию исследований, посвященных функциям, не имеющим производной, можно найти в работе [292]. Как правило, это функции, повторяющие себя на меньших масштабах.

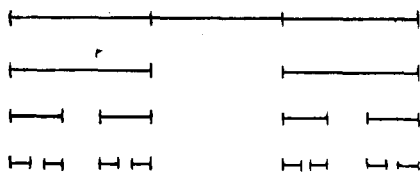


Рис. 6.2. Схема построения канторова множества

Одно из наиболее известных множеств такого типа было построено Г.Кантором [67]. Возьмем единичный отрезок $[0, 1]$, разделим на три части и выбросим середину (открытый интервал $(1/3, 2/3)$). Каждый из двух оставшихся отрезков разделим на три равные части и снова выбросим середины (рис. 6.2). Далее будем повторять эту процедуру бесконечно

много раз. Оставшееся множество C обладает многими замечательными свойствами.

Это замкнутое множество является *совершенным* (т. е. каждая точка C является предельной точкой этого множества). Нетрудно убедиться (проводя рассуждения от противного), что оно не содержит ни одного интервала. Вместе с тем C оказывается *несчетным* — не существует алгоритма, позволяющего занумеровать все его точки. Оно имеет меру нуль, в этом можно убедиться, посчитав длину выброшенных интервалов

$$p + (1 - p)p + (1 - p)^2 p + \dots = \frac{p}{1 - (1 - p)} = 1 \quad (p = 1/3),$$

которая равна единице. Известно, что мера остатка будет нулевой при любом $0 < p < 1$. Однако при различных значениях p эти множества будут существенно отличаться, а следовательно, нужны другие количественные характеристики, не совпадающие с обычной мерой.

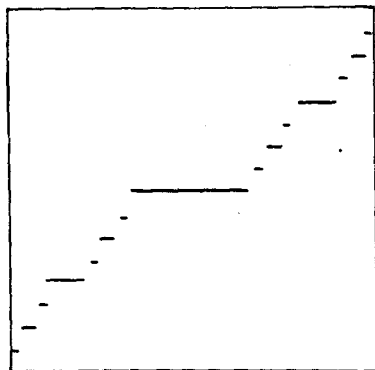


Рис. 6.3

C канторовым множеством и его обобщениями связаны другие интересные объекты, возникающие при анализе нелинейных систем. Это непрерывная монотонная функция, производная которой равна нулю почти всюду; она названа «*дьявольской лестницей*» (рис. 6.3). Здесь также на каждом шаге функция определяется на трети каждого из оставшихся

после предыдущего шага интервалов. На первом шаге всем точкам из интервала $[1/3, 2/3]$ присваивается значение $1/2$, на втором шаге значение $1/4$ присваивается всем точкам из интервала $[1/9, 2/9]$ и значение $3/4$ точкам из интервала $[7/9, 8/9]$ и т. д. «Дьявольская лестница» возникает после бесконечного количества шагов.

Канторовым множеством называют не только множество C , но и ряд других аналогичных множеств. Некоторые из них могут иметь положительную меру, несмотря на то, что они не содержат ни одного интервала. Их можно построить следующим образом [67]. Выберем произвольное число α , $0 < \alpha < 1$. На первом шаге из отрезка $[0, 1]$ выбросим все точки открытого интервала длины $\alpha/2$ с центром в точке $1/2$. Из двух оставшихся замкнутых интервалов $[0, 1/2 - \alpha/4]$ и $[1/2 + \alpha/4, 1]$ удалим открытые интервалы длины $\alpha/8$. Из оставшихся четырех выбросим средние открытые интервалы, имеющие длину $\alpha/32$. После бесконечного числа шагов мера удаленных открытых интервалов будет равна $\alpha(1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots)$, и мера оставшегося канторова множества будет равна $1 - \alpha$.

При исследовании фракталов неэффективным оказывается не только подход теории меры, но и интуитивный топологический взгляд на размерность множества.

Понятие *топологической размерности* d_T можно пояснить следующим образом. Топологическая размерность конечного или счётного множества точек равна нулю. Если некоторое множество можно разделить на не связанные друг с другом части с помощью множества размерности d_T , то его топологическая размерность равна $d_T + 1$. В частности, отрезок можно разделить на две несвязанные части одной точкой, поэтому у него $d_{T\text{отрезка}} = 1 + d_{T\text{точки}}$; плоскость — линией $d_{T\text{плоскости}} = d_{T\text{линии}} + 1 = 2$, пространство — плоскостью $d_T = 3$.

Поразительный пример, показывающий ограниченность обычного топологического представления о размерности, был предложен итальянским математиком Дж. Пеано в 1890 г. Он построил кривую, которая заполняет единичный квадрат (при

этом через некоторые точки квадрата кривая может проходить несколько раз). Способ построения такой кривой понятен из рис. 6.4. Несмотря на то, что топологическая размерность кривой равна единице, в определенном смысле она близка к двумерной фигуре – квадрату.

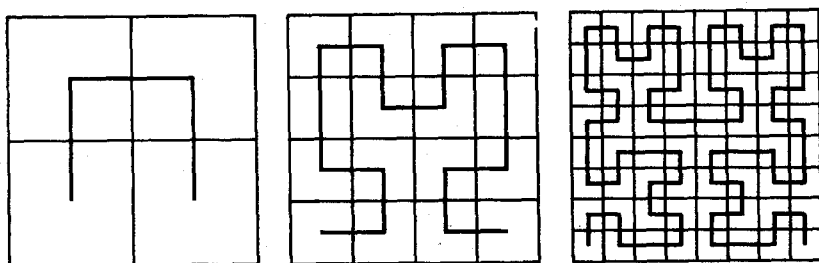


Рис. 6.4. Схема построения кривой Пеано

Во всех этих примерах множество оказывается подобно себе – оно инвариантно относительно изменения масштаба величин и обладает сложной внутренней структурой (также объекты можно рассматривать как пример сверхсложной организации). В меньшем масштабе оно выглядит так же, как в более крупном. Эта инвариантность связана с некоторой симметрией. Объекты, обладающие такими свойствами, были названы *фракталами* [323].

Фракталы можно строить не только по простым детерминированным правилам, но и пользуясь вероятностными алгоритмами. При этом получающиеся множества оказываются подобными себе в статистическом смысле. Они представляют интерес во многих физических задачах. Для характеристики фракталов используется большой класс так называемых *фрактальных размерностей*. Вероятно, первая такая размерность была введена в 1919 г. Ф. Хаусдорфом. Пусть изучаемое множество лежит в p -мерном евклидовом пространстве. Рассмотрим его покрытие p -мерными ш.рами радиусов $\varepsilon_i < \varepsilon$ и определим величины $I_d(\varepsilon)$ как

$$l_d(\varepsilon) = \inf \sum_i \varepsilon_i^d, \quad (6.1)$$

где нижняя грань берется по всем возможным покрытиям, таким, что $\varepsilon_i < \varepsilon$. Пусть

$$l_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_d(\varepsilon). \quad (6.2)$$

При больших значениях d $l_d = 0$, при малых $l_d = \infty$. Хаусдорф показал, что существует критическое значение d_H : $d_H = \inf\{d: l_d = 0\} = \sup\{d: l_d = \infty\}$. Обычно при $d = d_H$ величина l_d конечна. Она и называется *хаусдорфовой размерностью* множества. Для простых геометрических объектов хаусдорфова размерность совпадает с топологической (для отрезка $d_H = 1$, для квадрата $d_H = 2$, для куба $d_H = 3$). Однако для канторова множества хаусдорфова размерность будет дробной. При построении канторова множества на каждом шаге возникает 2^n отрезков длины $\varepsilon_n = (1/3)^n$, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/3)^{d_H n} 2^n = C, \quad d_H = \ln 2 / \ln 3. \quad (6.3)$$

(При $p \neq 1/3$, $d_H = \ln 2 / \ln(2/(1-p))$).

В начале века Ж.Перрен высказал мысль о том, что фрактальные множества и нигде не дифференцируемые функции будут полезны во многих физических задачах, в частности связанных с броуновским движением. Тем не менее широкого применения такие геометрические объекты до недавнего времени не находили. Ситуация существенно изменилась с появлением книги Б.Мандельброта [323], в которой было показано, что наличие фрактальных множеств позволяет объяснить (а в некоторых случаях и предсказать) экспериментальные результаты, полученные в различных областях физики. Обобщение ряда ранее известных результатов, обсуждение адекватного математического аппарата, указание новых возможных областей приложений, наглядные примеры, приведенные в этой книге, позволили взглянуть на фракталы как на новую перспективную область исследований в естествознании.

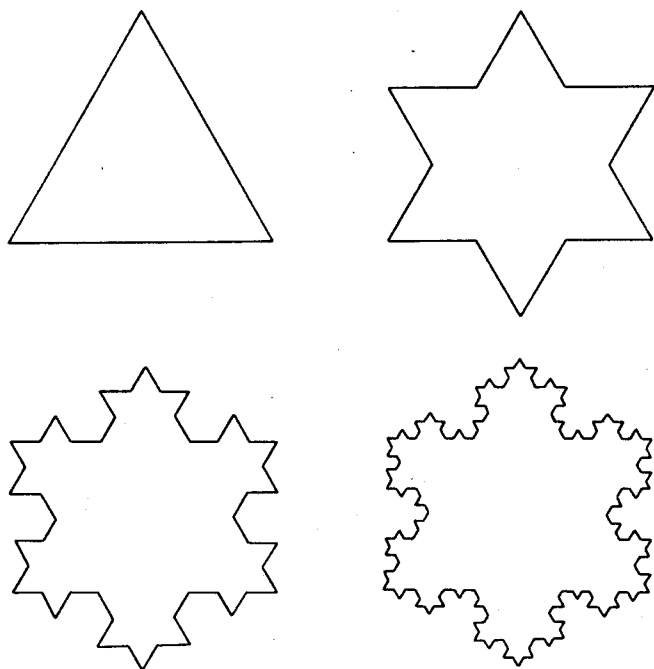


Рис. 6.5. Четыре первых элемента в последовательности многоугольников, пределом которой является остров Коха

Одним из неожиданных примеров фракталей является береговая линия многих островов. При измерении длины побережья сложная изрезанная береговая линия заменяется ломаной, состоящей из звеньев длины ϵ . Оказалось, что значение L для Великобритании зависит от ϵ по степенному закону

$$L(\epsilon) \sim C\epsilon^{1-d}, \text{ где } d \approx 1,3, 10\text{км} < \epsilon < 1000\text{км},$$

что является характерным признаком фрактальной кривой. В некотором диапазоне параметров степенная зависимость определяет длину побережья многих других островов, длину некоторых рек, путь, проходимый частицей при броуновском движении. Пример фигуры с бесконечным периметром и ограниченной площадью дает остров Коха. Он так же, как и канторово множество, возникает после бесконечного количества шагов.

Несколько первых шагов в этой последовательности показаны на рис. 6.5.

Многие парадоксы, связанные с распределением звездного вещества, могут быть объяснены, если предположить, что это вещество образует фрактальные кластеры. В ряде недавних работ указывается на большие возможности использования фракталей в космологии, теории турбулентности, химической кинетике, физике полимеров [91, 323]. Фрактальные структуры, известные как перколяционные кластеры, возникают при прохождении жидкости через твердые тела [178, 192, 392].

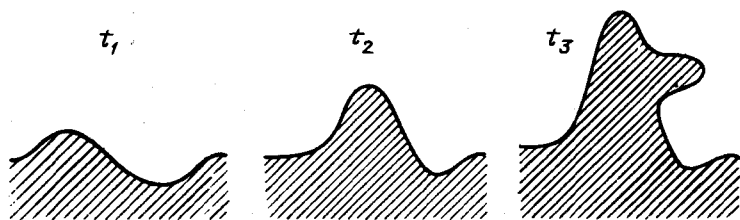


Рис. 6.6

Вместе с тем в последние годы был сделан другой важный шаг – в некоторых работах был исследован механизм возникновения фрактальных структур в различных физических задачах, а также проведен ряд экспериментов, связанных с анализом пространственной упорядоченности такого типа. Образование сложной пространственной структуры можно объяснить с помощью достаточно простых механизмов. Одним из них является *агрегация, ограниченная диффузией* [392]. Представим себе частицы, совершающие случайное блуждание, которые могут осаждаться на некоторой поверхности. Прилипая к поверхности, частицы меняют ее форму. Понятно, что вероятность столкнуться с бугорком на поверхности выше, чем вероятность попасть в ямку. Именно поэтому размеры бугорков начинают увеличиваться, возникает *неустойчивость роста*. Начиная с определенных размеров, на каждом из них появляются ветви, и в результате формируется фрактальная структура (см. рис. 6.6).

Другой механизм возникновения фракталей может быть обусловлен совместным действием диффузии и электрического поля. Он позволяет объяснить возникновение сложной структуры при электромеханическом осаждении цинка. При этом полный ток, движущийся к катоду, определяет вероятность частице быть адсорбированной. Чем больше кривизна поверхности электрода, тем выше напряженность поля, тем быстрее осаждаются ионы и происходит рост [192]. Таким образом, *неравновесный необратимый рост* может приводить к появлению фракталей.

Оказалось, что при вытеснении жидкостью с малой вязкостью другой жидкости с большой вязкостью первоначально плоская поверхность раздела переходит в поверхность, которая по форме напоминает пальцы перчатки. Такие структуры получили название *«вязких пальцев»*. Последовательное дробление кончиков таких «пальцев» приводит к возникновению фрактальных кластеров [192]. Анализ этого явления имеет важное прикладное значение. Оно наблюдается при закачке воды в нефтеносный пласт с целью повышения его нефтеотдачи. Возникновение «вязких пальцев» существенно меняет условия добычи нефти.

Интересно, что, несмотря на относительную простоту моделей фрактального роста, они достаточно хорошо предсказывают фрактальную размерность наблюдаемых в эксперименте структур. Это связано с тем, что фрактальные размерности являются усредненными характеристиками множества, они отражают только его основные черты, которые и передает модель.

Выше мы рассмотрели несколько примеров множеств, обладающих *фрактальной* (иногда ее называют *канторовой*) структурой. Оказалось, что такие множества возникают при анализе многих систем, в которых существуют стохастические режимы или сложная временная упорядоченность. В этом случае представление о фрактальных размерностях оказывается очень полезным при выделении параметров порядка и построе-

нии иерархии упрощенных моделей. Обсудим основные количественные характеристики таких систем.

§ 6.2. Размерности странных аттракторов

Следуя работе [259], удобно выделить два больших класса размерностей — *метрические* и *вероятностные*. Первые характеризуют изучаемые множества как геометрические объекты и определяются их метрическими свойствами (в работе [323] именно они называются фрактальными размерностями). Вероятностные размерности (или *размерности естественной меры*) учитывают, с какой вероятностью типичная траектория динамической системы оказывается в различных частях аттрактора.

К метрическим размерностям относится упоминавшаяся выше хаусдорфова размерность и *емкость* множества d_c (иногда ее также называют предельной емкостью [159]). *Верхняя емкость* множества определяется значением предела

$$\overline{d}_c = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \log N(\varepsilon) / \log(1/\varepsilon), \quad (6.4)$$

где через $N(\varepsilon)$ обозначено минимальное число шариков радиуса ε , необходимое, чтобы покрыть изучаемое множество в p -мерном пространстве. Можно сказать, что значение \overline{d}_c определяет, сколько информации необходимо, чтобы задать положение множества с точностью ε .

Заменив здесь верхний предел на нижний, получим нижнюю емкость \underline{d}_c . Это относится и ко всем другим размерностям, обсуждаемым ниже. В работе [159] построен пример множества, в котором $\overline{d}_c \neq \underline{d}_c \neq d_H$. Однако это является исключением, а не правилом. Обычно верхние и нижние пределы для типичных аттракторов совпадают, поэтому далее мы не будем уточнять, о каком пределе идет речь.

Так как множество всех возможных разбиений при вычислении d_H (см. (6.1), (6.2)) оказывается более широким, чем при вычислении d_c ,

$$d_c \geq d_H \quad (6.5)$$

Можно представить себе ситуацию, когда заметный вклад в значение d_c или d_H дают редко посещаемые точки (построены примеры простых двумерных отображений, где все происходит именно таким образом [259]). В этом случае полезно учесть, как часто точка, определяющая состояние динамической системы, бывает в разных частях аттрактора. Эта вероятность задается естественной мерой.

Ее можно определить следующим образом [158, 259]. Для каждого шарика C , содержащего точки аттрактора, и каждой точки x из области притяжения определим число $\mu(x, C)$, показывающее, какую долю времени траектория, начинающаяся в x , проведет в C . (Предполагается, что усреднение производится по бесконечному интервалу времени.) Если почти каждая точка x дает одно и то же значение $\mu(x, C)$, обозначим его через $\mu(C)$ и назовем μ *естественной мерой аттрактора*.

Естественная мера позволяет определить ряд вероятностных размерностей. Одной из них является *информационная размерность*, которая выражается пределом

$$d_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) / \log(1/\epsilon), \quad (6.6)$$

где

$$I(\epsilon) = \inf \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \log(1/p_i).$$

В этой формуле $p_i = \mu(C_i)$, C_i — куб с ребром, равным ϵ . В некоторых работах рассматриваются покрытия шарами с радиусами, не превышающими ϵ , и вводятся верхняя и нижняя информационные размерности \bar{d}_I и \underline{d}_I ; при этом в формуле (6.6) берутся верхние и нижние пределы [158]. Величина d_I иногда называется размерностью Реньи. Если все кубики

посещаются с одинаковой вероятностью, $I(\epsilon) = \log N(\epsilon)$ и $d_c = d_f$, если вероятности неодинаковы, $I(\epsilon) < \log N(\epsilon)$ и

$$d_c \geq d_f. \quad (6.7)$$

Можно определить вероятностные размерности, считая, что покрывается только часть аттрактора, посещаемая наиболее часто. Например, θ — емкость определяется пределом [259]

$$d_c(\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log N(\epsilon, \theta) / \log(1/\epsilon), \quad (6.8)$$

где $N(\epsilon, \theta)$ — минимальное количество кубиков со стороной ϵ , необходимых, чтобы покрыть по крайней мере θ -ю часть естественной меры аттрактора. Величины

$$\begin{aligned} \underline{d}_L(\mu) &= \overline{\lim_{\theta \rightarrow 1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log N(\epsilon, \theta) / \log(1/\epsilon)}, \\ \overline{d}_L(\mu) &= \overline{\lim_{\theta \rightarrow 1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log N(\epsilon, \theta) / \log(1/\epsilon)} \end{aligned} \quad (6.9)$$

называются соответственно *нижней* и *верхней емкостью Лед-рапье меры* μ [158].

До сих пор все введенные размерности характеризовали изучаемые множества в целом, однако в некоторых случаях удобно рассматривать размерность в окрестности данной точки

$$d_p(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log \mu(B_\epsilon(x)) / \log \epsilon, \quad (6.10)$$

где через $B_\epsilon(x)$ обозначен шар радиуса ϵ с центром в точке x . Величину $d_p(x)$ называют *поточечной размерностью*.

Наряду с упоминавшимися, существует много других фрактальных размерностей. Однако в работе [259] высказано предположение, что для типичных аттракторов значение, которое принимают различные метрические размерности, оказывается одним и тем же. Предполагается также, что значения всех вероятностных размерностей будут совпадать. Имеется несколько строгих утверждений, устанавливающих связи между различными размерностями.

Пусть μ – вероятностная мера на компактном метрическом пространстве X . Предположим, что для почти всякого x по мере μ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \mu(B_\varepsilon(x)) / \log \varepsilon = \alpha \quad (6.11)$$

(т. е. мера μ множества точек, где α другое, равна нулю). Тогда можно доказать [158], что

$$\underline{d}_L(\mu) = \overline{d}_L(\mu) = \overline{d}_I = \underline{d}_I = \alpha. \quad (6.12)$$

Вычисление с помощью ЭВМ упоминавшихся выше размерностей странных аттракторов связано с большими трудностями. Оно требует огромного объема памяти либо большого числа операций. Например, непосредственное вычисление хаусдорфовой размерности в настоящее время не представляется возможным, поскольку необходимо минимизировать сумму $\sum_i \varepsilon_i^d$ по всем возможным покрытиям. Для определения θ – емкости нужны специальные покрытия, в которых траектория должна проводить строго определенную часть времени. С другой стороны, для вычисления предела, входящего в определение поточечной размерности, требуется минимальный объем памяти, однако траекторию динамической системы нужно проследить на временах $T \gg \bar{\tau} \sim \varepsilon^{-p}$, где $\bar{\tau}$ – время возвращения в шар $B_\varepsilon(x)$, которое уже при небольших p может быть очень велико. Более доступным оказывается расчет емкости и информационной размерности. На некоторых алгоритмах их вычисления мы остановимся ниже.

В ряде работ обращается внимание на следующие трудности, возникающие при непосредственном вычислении фрактальных размерностей.

1. Необходимость большого объема памяти, либо большого объема вычислений.

2. Количество значащих цифр в величине d зависит от длины выборки N по логарифмическому закону.

3. Необходимость больших выборок $N > 1/\min p_i$, где p_i – вероятность найти точку в i -м кубике (при расчете метрических размерностей).

Обратим внимание на существенное отличие фракталей, характеризующих пространственную упорядоченность (многочисленные примеры которых дает книга Б.Мандельброта), от множеств, возникающих при изучении временной упорядоченности, странных аттракторов. В первом случае фракталы определены в пространстве небольшой размерности, а их размерность может быть определена сравнительно грубо. Это позволяет рассматривать небольшие выборки, а в некоторых случаях и не обращаться к помощи ЭВМ.

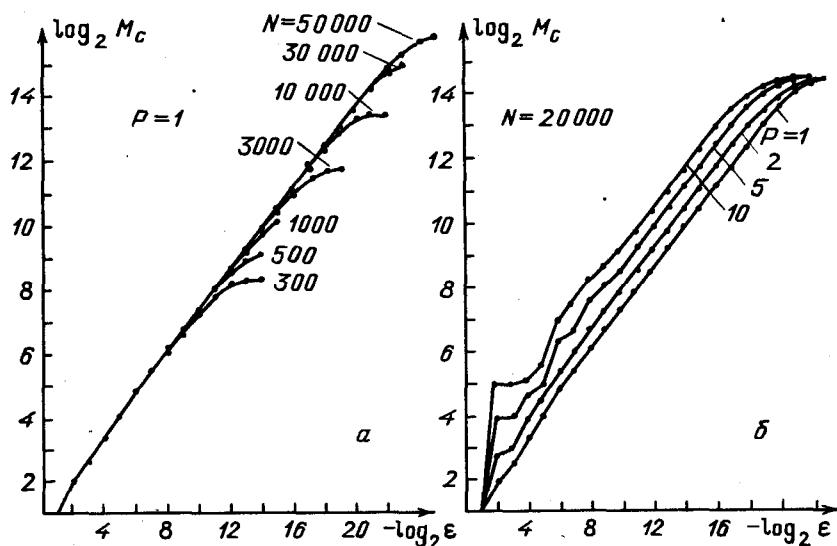


Рис 6.7, а) Кривые, определяющие корреляционный показатель при различных длинах выборки N ; б) Те же кривые для выборки длины $N = 20000$ при различных размерностях вложения P

В качестве типичного примера такой ситуации рассмотрим вычисление емкости канторова множества ($p = 1/3$ в формуле (6.3), $d_c = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309$) [138]. По оси абсцисс отложим величину $-\log_2 \epsilon$ (ϵ – длина ребра кубика), по оси ординат $\log_2 M_c$ – число кубиков, необходимых для покрытия множества. Если $M_c \sim \epsilon^{-d}$, то точки на этом графике будут

лежать на прямой, тангенс наклона которой и определяет значение d_c . (Точки, принадлежащие канторову множеству, задавались последовательностью $a_1 = 0$, $a_{2^{k+i}} = a_i + 2/3^{k+1}$ $i = 1, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ [287].) На рис. 6.7,а показана зависимость $\log_2 M_c(\epsilon)$ от $\log_2 \epsilon$ для выборок разной длины \bar{N} . Видно, что тангенс угла наклона прямой можно определить достаточно точно уже при небольших выборках. И действительно, при $\bar{N} = 300$ $d_c = 0,642 \pm 0,036$, при $\bar{N} = 500$ $d_c = 0,6717 \pm 0,026$. Увеличение \bar{N} приводит к росту линейного участка кривой и повышает точность определения d_c (при $\bar{N} = 200000$, $d_c = 0,631 \pm 0,006$).

При анализе канторова множества у нас есть априорная информация о том, что оно может быть вложено в отрезок $P = 1$. Однако часто при анализе хаотических режимов также имеется последовательность $\{a_k\}$, но такой информации нет. Это приводит к необходимости вкладывать изучаемое множество в пространства различной размерности P . Такая процедура будет подробно описана далее. На рис. 6.7,б показано, что в случае канторова множества при каждом значении $P \leq 10$ тангенс наклона линейного участка практически не меняется. Вместе с тем при больших P длина этого участка уменьшается.

При изучении странных аттракторов дробная часть размерности зачастую оказывается мала. Это типично для системы Лоренца и других систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений, поэтому величину размерности приходится вычислять достаточно точно. С другой стороны, в связи с исследованием процессов в нелинейных средах или анализом экспериментальных данных часто приходится рассматривать аттракторы, вложенные в пространство высокой размерности, что также приводит к большим трудностям [287], связанным с тем, что объем памяти при непосредственном вычислении d_c пропорционален ϵ^{-P} .

Все это привело к разработке альтернативных подходов оценки фрактальных размерностей. Наиболее интересными сейчас представляются два направления. Первое связано с вычислением динамических характеристик изучаемых систем (в частности, ляпуновских показателей), позволяющих оценить размерность [219]. В работах второго направления вводятся новые фрактальные размерности, более доступные для численного анализа, и устанавливается их связь с существующими [280].

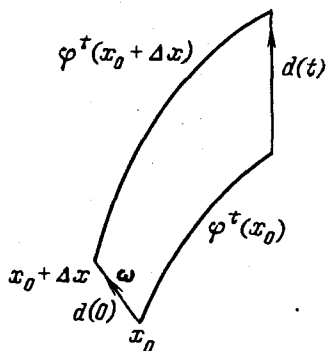


Рис. 6.8

Рассмотрим первое направление более подробно. Пусть $\varphi^t(x_0)$, $\varphi^t(x_0 + \Delta x)$ — две близкие траектории динамической системы, выходящие из точек x_0 и $x_0 + \Delta x$ (рис. 6.8), ω — произвольный вектор в направлении Δx . Показателем Ляпунова $\chi(x_0, \omega)$ называется величина

$$\chi(x_0, \omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d(0) \rightarrow 0} t^{-1} \ln[d(t)/d(0)]. \quad (6.13)$$

Можно показать, что это определение эквивалентно следующему

$$\chi(x_0, \omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \|y^t(\omega)\| / \|\omega\|, \quad (6.14)$$

где $y^t(\omega)$ — решение уравнения, линеаризованного в окрестности траектории $\varphi^t(x_0)$ (так называемого уравнения в вариациях), ω — произвольный вектор, направленный от x_0 к точ-

ке $x_0 + \Delta x$. В p -мерной динамической системе ляпуновские показатели $\chi(x_0, \omega)$ принимают конечный набор значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (далее будем считать, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$).

Если аттрактором является особая точка z , то $\chi(x, \omega)$ определяются собственными значениями матрицы системы, линейризованной в окрестности точки z . Когда все собственные значения действительны, то ляпуновские показатели совпадают с ними $\lambda_k < 0, k = 1, \dots, p$. В случае устойчивого предельного цикла $\lambda_1 = 0, \lambda_k < 0, k = 2, \dots, p$.

Ляпуновские показатели характеризуют скорость разбегания близких траекторий и являются важными характеристиками динамической системы. Во многих задачах эти значения получаются одними и теми же почти при всех начальных данных x_0 . Существование положительных ляпуновских показателей говорит о том, что система обладает чувствительностью к начальным данным и для нее характерно стохастическое поведение. Отметим, что в p -мерной динамической системе с непрерывным временем, все решения которой ограничены, один из ляпуновских показателей равен нулю, если аттрактор не является устойчивой точкой. При этом сумма всех ляпуновских показателей должна быть отрицательной (в противном случае элемент p -мерного фазового объема не сжимался бы и система при $t \rightarrow \infty$ не стремилась бы к аттрактору).

Ряд результатов, касающихся ляпуновских показателей, был получен еще А.М.Ляпуновым и О.Перроном. Однако теоретической основой для их широкого использования при анализе нелинейных систем стала доказанная в 1968 г. в работе В.Оселедца мультипликативная эргодическая теорема [156]. Ее частным случаем является следующее утверждение [116].

Пусть $x_{n+1} = Tx_n$ — динамическая система (x здесь — вектор) с фазовым пространством M и инвариантной мерой μ . Пусть $G(x)$ — измеримая функция со значениями в пространстве квадратных матриц порядка m ($m \geq 1$), $G_x^{(n)} \equiv G(x) \dots G(T^{n-1}x)$ и пусть $\max[0, \ln \|G(x)\|] \in L^1$. Тогда

1. Существует инвариантное множество Γ , $\mu(\Gamma) = 1$ такое, что при всех $x \in \Gamma$ существует предел

$$\Lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} [(G_x^{(n)})^* G_x^{(n)}]^{1/2n}$$

(Λ_x — симметричная неотрицательно определенная матрица порядка m , берется положительный корень, * — переход к сопряженной матрице).

2. Если $\exp \lambda_x^{(1)} < \exp \lambda_x^{(2)} < \dots < \exp \lambda_x^{(s)}$ $x \in \Gamma$ — упорядоченный набор различных собственных значений матрицы Λ_x , $E_x^{(1)}, E_x^{(2)}, \dots, E_x^{(s)}$ — соответствующий набор собственных подпространств, а $m_x^{(r)} \equiv \dim E_x^{(r)}$, $1 \leq r \leq s$, то функции $x \rightarrow s(x)$, $x \rightarrow \lambda_x^{(r)}$, $x \rightarrow m_x^{(r)}$ ($1 \leq r \leq s$) измеримы и инвариантны относительно T .

3. Если $x \in \Gamma$, то для любого вектора $u \in R^m$, $u \neq 0$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|G_x^{(n)} u\|,$$

равный одному из чисел $\lambda_x^{(r)}$, $1 \leq r \leq s$, а число r , которое указывает, какому именно из этих чисел равняется предел, однозначно определяется из соотношений

$$u \in E_x^{(1)} \otimes E_x^{(2)} \otimes \dots \otimes E_x^{(r)},$$

$$u \notin E_x^{(1)} \otimes E_x^{(2)} \otimes \dots \otimes E_x^{(r-1)}.$$

Через \otimes обозначен знак прямого произведения.

Под измеримыми функциями понимаются функции, конечные почти всюду и почти всюду представимые как предел сходящейся последовательности вещественных ограниченных функций.

Следовательно, для вычисления ляпуновских показателей отображения T надо взять его якобиан $J(x) = \partial T(x)/\partial x$, вычислить матрицу $J_n = [J(x_n) \ J(x_{n-1}) \ \dots \ J(x_1)]$, которая и будет играть роль матрицы $G_x^{(n)}$ в сформулированной теореме. Затем берется сопряженная матрица $G_x^{(n)*}$, рассматривается предел $\Lambda_x = \lim_{n \rightarrow \infty} [(G_x^{(n)})^* G_x^{(n)}]^{1/2n}$, и находятся собственные значения матрицы Λ_x .

Во многих случаях необходимо вычислять ляпуновские показатели в динамических системах с непрерывным временем. Для этого класса задач были построены эффективные алгоритмы [219].

Если действовать в соответствии с определением ляпуновских показателей и брать две различные близкие траектории, то из-за разбегания расстояние между ними будет расти, и взять двойной предел, входящий в формулу (6.13), не удастся.

Поэтому наряду с исходным уравнением

$$\dot{x} = f(x) \quad (6.15)$$

удобно одновременно решать задачу в вариациях

$$\dot{w} = A(x) w, \quad (6.16)$$

где A — матрица линеаризованной системы $A = \frac{\partial f}{\partial x}$. Это гарантирует, что все время будут рассматриваться траектории, бесконечно близкие к изучаемой интегральной кривой. Если x представляет собой p -мерный вектор, будем одновременно решать p систем уравнений в вариациях, таких, что начальные векторы у них w_1, \dots, w_p линейно независимы. Двигаясь вдоль траектории, будем одновременно вычислять объемы параллелепипедов, составленных векторами $w_1(t)$ (для $w_1(t)$ это будет просто длина отрезка $\|w_1(t)\|$); $w_1(t)$ и $w_2(t)$; \dots ; $w_1(t), w_2(t), \dots, w_p(t)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \text{Vol}^k[w_1(t), \dots, w_k(t)] = \lambda_1 + \dots + \lambda_k, \quad (6.17)$$

$k \leq p$, Vol^k — k -мерный объем. (Напомним, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$).

При реализации этой процедуры возникают две проблемы. Первая связана с тем, что из-за наличия положительного показателя λ_1 $\|w_1(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ для почти всех начальных векторов. Вторая обусловлена изменением направлений векторов $w_k(t)$. Все они при $t \rightarrow \infty$ стремятся к $w_1(t)$, где

$w_1(t)$ соответствует наибольшему ляпуновскому показателю. Это приводит к тому, что углы между векторами $w_k(t)$ стремятся к нулю, что не позволяет достаточно точно вычислить соответствующие k -мерные объемы (рис. 6.9).

Чтобы преодолеть первую трудность, можно перенормировать векторы $w_k(t)$ через интервал ΔT (например, сделав их единичными), вычислить значения $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ по этому интервалу, а затем усреднить эти значения по всей траектории. Если одновременно с перенормировкой проводить ортогонализацию векторов $w_k(t)$

$$w'_1 = w_1 / \|w_1\|,$$

$$w'_2 = \frac{w_2 - (w_2, w'_1)w'_1}{\|w_2 - (w_2, w'_1)w'_1\|},$$

$$\dots$$

$$w'_p = \frac{w_p - (w_p, w'_{p-1})w'_{p-1} - \dots - (w_p, w'_1)w'_1}{\|w_p - (w_p, w'_{p-1})w'_{p-1} - \dots - (w_p, w'_1)w'_1\|},$$

то можно избавиться и от второй трудности.

Этот алгоритм, предложенный в работе [219], широко используется при анализе различных динамических систем. Поскольку объем вычислений в этом методе прямо пропорционален размерности динамической системы, в некоторых случаях удается вычислить около 20 ляпуновских показателей. В работе [393] приведена программа, реализующая этот алгоритм в простейших случаях.

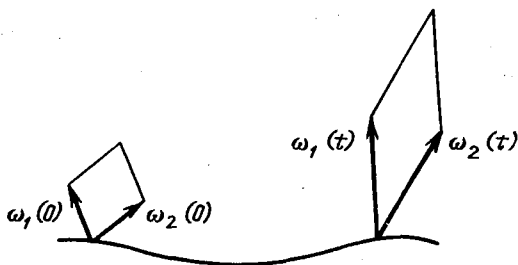


Рис. 6.9

Ляпуновские показатели определяются динамическими свойствами системы, обсуждавшиеся выше фрактальные размерности – геометрическими характеристиками изучаемых множеств. Поэтому представляет особый интерес поиск соотношений, связывающих эти величины. Одно из таких соотношений было предложено Дж.Капланом и Дж.Йорке [305].

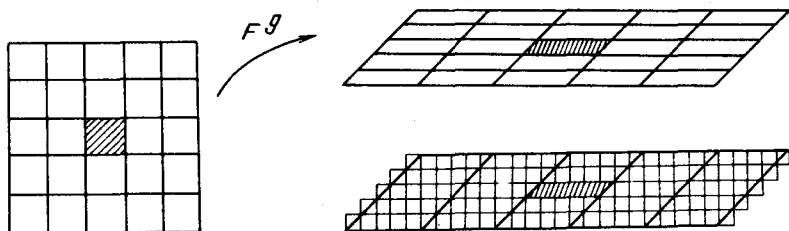


Рис. 6.10

При его обосновании использовались следующие рассуждения [259]. Пусть двумерное отображение имеет ляпуновские показатели $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ или ляпуновские числа $\chi_1 > 1 > \chi_2$ (ляпуновское число $\chi = \exp \lambda$) почти для всех точек. Нас интересует, какой будет емкость странного аттрактора в этом случае. Покроем аттрактор $N(\epsilon)$ квадратами со стороной ϵ и проитерируем отображение q раз. Рассмотрим образ одного из квадратов (рис. 6.10). Можно ожидать (см. формулу (6.17)), что площадь фигуры, полученной после q итераций, будет равна $\epsilon^2(\chi_1\chi_2)^q$. Возьмем теперь более мелкие разбиения на квадраты со стороной $(\chi_2^q)\epsilon$, имеющие площадь $\epsilon^2(\chi_2)^{2q}$. Чтобы покрыть образ исходного квадрата после q итераций потребуется примерно $(\chi_1/\chi_2)^q$ маленьких квадратиков. Если считать, что большинство исходных квадратов, покрывающих аттрактор, ведут себя таким образом, то общее число квадратиков в более мелком разбиении можно оценить как

$$N(\chi_2^q \epsilon) = (\chi_1/\chi_2)^q N(\epsilon).$$

Считая, что имеет место степенная зависимость $N(\varepsilon) \approx k(1/\varepsilon)^{d_c}$, имеем

$$k \left[\frac{1}{(\chi_2^q)\varepsilon} \right]^{d_c} \approx k \left[\frac{\chi_1}{\chi_2} \right]^q \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]^{d_c}$$

и после перехода к пределу получим выражение для емкости

$$d_c = 1 - \lambda_1 / \lambda_2. \quad (6.18)$$

Обобщение этих рассуждений на отображения более высокой размерности приводит к формуле

$$d_L = k + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{|\lambda_{k+1}|}, \quad (6.19)$$

где k — наибольшее значение, при котором $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k > 0$. Если $\lambda_1 < 0$, определим $d_L = 0$. Величину d_L , представляющую нижнюю оценку фрактальной размерности, часто называют *ляпуновской размерностью*.

Показатели Ляпунова являются усредненными характеристиками динамической системы, поэтому чаще посещаемые области аттрактора должны давать больший вклад в $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Исходя из этого, в работе [259] было высказано предположение, что для типичного аттрактора вероятностные размерности d_μ равны d_L . Результаты численных расчетов, проведенных для ряда аттракторов, подтверждают это соотношение.

Ляпуновские показатели позволяют оценить еще одну важную характеристику динамической системы — *топологическую энтропию*.

Остановимся на этой характеристике.

Пусть система A может находиться в состояниях $i = 1, \dots, n$ с вероятностями P_i . Тогда мера информации, необходимой для определения положения системы, задается энтропией, которая по формуле Шеннона определяется как

$$S \sim - \sum_i P_i \ln P_i. \quad (6.20)$$

Топологическая энтропия, или энтропия Колмогорова, показывает, насколько хаотичен изучаемый процесс. Она пропорциональна скорости потери информации о состоянии системы, поэтому оказывается тесно связанной с формулой Шеннона.

Ее можно определить следующим образом [204]. Разобьем фазовое пространство изучаемой системы на ячейки размера ϵ^p . Обозначим через $P_{i_0 \dots i_n}$ вероятность того, что в момент $t = 0$ точка на фазовой траектории находилась в ячейке с номером i_0 , в момент $t = \tau$ — в ячейке с номером i_1 и т. д. Из формулы (6.20) следует, что количество информации, необходимой для определения траектории системы с точностью ϵ (т. е. последовательности ячеек $i_0^* \dots i_n^*$) в момент $n\tau$ пропорционально величине

$$K_n = - \sum_{i_0 \dots i_n} P_{i_0 \dots i_n} \ln P_{i_0 \dots i_n},$$

а в момент $(n + 1)\tau$ — величине

$$K_{n+1} = - \sum_{i_0 \dots i_{n+1}} P_{i_0 \dots i_{n+1}} \ln P_{i_0 \dots i_{n+1}}.$$

Поэтому величина $K_{n+1} - K_n$ пропорциональна потере информации о системе. Отношение этой разности к интервалу времени и определяет колмогоровскую энтропию:

$$\begin{aligned} h &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{i_0 \dots i_N} P_{i_0 \dots i_N} \ln P_{i_0 \dots i_N}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Предел при $\epsilon \rightarrow 0$ берется после перехода к пределу при $N \rightarrow \infty$. Для дискретных отображений $\tau = 1$ и

$$h = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i_0 \dots i_N} P_{i_0 \dots i_N} \ln P_{i_0 \dots i_N}. \quad (6.22)$$

Эту величину можно определить и другим способом [158]. Пусть отображение T , действующее на многообразии M , определяет некоторую динамическую систему. Зафиксируем $n > 0$ и введем расстояние в фазовом пространстве X $\rho_n(x, y)$, положив

$$\rho_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n} \rho(T^i(x), T^i(y)).$$

Для $\epsilon > 0$ обозначим через $N(n, T, \epsilon)$ наименьшее число шаров радиуса ϵ в метрике ρ_n , необходимое для того, чтобы покрыть M . Тогда

$$h(T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n, T, \epsilon)}{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n, T, \epsilon)}{n}.$$

Колмогоровская энтропия и время убывания корреляций τ , обсуждавшееся в предыдущей главе, оказываются тесно связанными. В самом деле, воспользуемся формулой (6.21) и будем рассматривать регулярное движение, динамический хаос и случайный шум.

1. В случае регулярного движения положительных ляпуновских показателей нет и первоначально близкие точки остаются близкими и в дальнейшем, поэтому время убывания корреляций бесконечно.

Пусть $P_{i_0} = \epsilon$ и на следующем шаге точки из этой ячейки фазового пространства переходят в ячейку с номером i_1 . Но тогда $P_{i_0 i_1} = \epsilon$, а, значит, из формулы (6.21) следует, что $h = 0$. Таким образом, в случае регулярного движения $\tau = \infty$, $h = 0$.

2. Когда в системе наблюдается динамический хаос, первоначально близкие точки расходятся экспоненциально; $P_{i_0} = \epsilon$, $P_{i_0 i_1} = \epsilon e^{-\lambda}$. Поэтому $h = \lambda > 0$. Следовательно, здесь τ — конечная величина, h — положительное число.

3. Если динамику системы определяет случайный шум, то точки с равной вероятностью будут распределяться по всем ячейкам в фазовом пространстве системы $P_{i_0} = \epsilon$, $P_{i_0 i_1} \sim$

$\sim \varepsilon^2$, $h \sim -\ln \varepsilon \rightarrow \infty$. В таких системах $\tau = 0$, $h = \infty$. Величину $h(T)$ для отображений класса C^1 и многообразия можно оценить как

$$h(T) \leq \int_M \sum_{i=1}^{k(x)} q_i(x) \lambda_i(x) d\mu(x), \quad (6.23)$$

где $\lambda_1(x) \geq \dots \geq \lambda_{k(x)}(x) \geq 0 \geq \lambda_{k+1}(x) \geq \dots \geq \lambda_\rho(x)$, $\rho = \dim M$ — ляпуновские показатели в точке x , $q_i(x)$ — их кратности. Для более гладких отображений с ненулевыми показателями в (6.23) имеет место равенство [158]. Соотношение еще больше упрощается, если $\lambda_i(x)$ оказываются одними и теми же для почти всех точек x . Тогда $h(T)$ просто равна сумме положительных показателей Ляпунова.

В работе [401] было показано, что для двумерных достаточно гладких отображений с $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ предположение о совпадении значений d_L с другими вероятностными размерностями оказывается верным. Было показано, что в этом случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log \varepsilon} = \alpha = h_\mu(T) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right), \quad (6.24)$$

и поэтому θ — емкость, верхняя и нижняя размерности Ледрапье $\underline{d}_L(\mu)$ и $\overline{d}_L(\mu)$, а также верхняя и нижняя емкости совпадают и равны. Поскольку топологическая энтропия $h_\mu(T)$ здесь равна λ_1 , то α определяется формулой Каплана — Йорке.

Расчет ляпуновских показателей и оценка фрактальной размерности с их помощью очень эффективны, если известна конечномерная динамическая система, описывающая изучаемый процесс, а также система в вариациях. Однако во многих случаях (в частности, при анализе экспериментальных данных) это не так, и нужны другие подходы. Один из них связан с введением новых вероятностных размерностей. В работах П.Грассбергера и И.Прокаччо [280] был введен так называемый корреляционный показатель, оказавшийся очень полезным при изучении стохастических режимов в нелинейных

средах. Чтобы вычислить этот показатель, нужно найти расстояния $\rho(x_i, x_j)$ между всеми точками изучаемого множества в p -мерном пространстве, а затем функцию

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N^2} \right) \times \times \{ \text{число расстояний } \rho(x_i, x_j), \text{ меньших } \epsilon \}, \quad (6.25)$$

называемую *корреляционным интегралом*.

Корреляционным показателем называется число

$$v = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln C(\epsilon) / \ln \epsilon]. \quad (6.26)$$

Корреляционный показатель в большинстве случаев близок к информационной размерности, однако его вычисление гораздо проще. Оно требует небольшого объема памяти и порядка $N^2 p$ операций (далее мы обсудим алгоритмы, позволяющие уменьшить это число). Вычисление v с заданной точностью, требует гораздо меньших выборок, чем расчет других обсуждавшихся выше размерностей. В самом деле, при вычислении емкости или информационной размерности проводится статистическая обработка N координат точек аттрактора, при расчете v обрабатывается N^2 расстояний, что намного повышает точность при фиксированном объеме выборки. В тех случаях, когда увеличение длины выборки в ходе натурального или вычислительного эксперимента требует больших усилий, это обстоятельство оказывается очень важным.

В работе [280] приведены рассуждения, показывающие, что

$$v \leq d_I \leq d_C. \quad (6.27)$$

Для определенного класса фракталов эти соотношения можно строго обосновать и получить уравнения, определяющие v , d_I , d_C [294].

Вычисление корреляционных показателей в последние годы очень популярно. С их помощью удалось оценить фрактальную размерность многих аттракторов, наблюдаемых в вычислительном и натурном экспериментах.

Преимущество корреляционного показателя при анализе конкретных систем наглядно показывает следующий пример [138, 139]. Чтобы оценить емкость или информационную размерность аттрактора Хенона ($a = 1,4$, $b = 0,3$ в формуле (5.15)) с точностью в несколько процентов, требуется около 200 тыс. точек. При вычислении корреляционного показателя с более высокой точностью достаточно выборки из 5000 элементов.

При анализе поточечной размерности, по существу, вычисляется аналогичная величина, но для одной точки. Усреднение по всему аттрактору (см. формулу (6.25)) является очень важным. В результате усреднения локальные отклонения компенсируются и фрактальную размерность удается оценить по сравнительно небольшой выборке. Кроме того, при использовании формул (6.4) или (6.6) на практике обычно берут покрытие p -мерными кубиками. Две близкие точки могут попасть в разные кубики, и при оценке d_C или d_I с уменьшением ϵ они не будут рассматриваться как близкие. При вычислении корреляционного показателя этой проблемы не возникает.

При анализе экспериментальных данных важно представлять, насколько длинной должна быть выборка для надежного вычисления ν . В [372] получена следующая оценка длины выборки, необходимой для расчета корреляционного показателя с точностью в 5% :

$$N > 42^M,$$

где M — целая часть хаусдорфовой размерности аттрактора. То есть для анализа аттрактора с $d_H \approx 3$ нужно около 70 тыс. точек, а с $d_H \approx 10$ $N \sim 10^{16}$. Последнее число намного превышает возможности современного натурального или вычислительного эксперимента.

В то же время практика показывает, что хорошие результаты для аттракторов с $d_H \sim 5 \div 10$ получаются зачастую при $N \sim 30-60$ тыс. [280].

Во многих важных задачах доступные выборки гораздо меньше. В качестве примера можно привести проблему *погодного аттрактора* – определение размерности аттрактора динамической системы, которая могла бы описывать изменение погоды с характерным временным масштабом в несколько дней и была бы полезна при среднесрочном прогнозе [269, 270]. Другой пример – *климатический аттрактор*. В этой задаче делается попытка выяснить по имеющимся данным, может ли изменение климата за последний миллион лет быть описано с помощью динамической системы небольшой размерности [344, 345]. В последнем случае длина доступной выборки не превышает нескольких сотен.

Вопросы о том, в каких случаях расчет корреляционного показателя по таким выборкам будет давать разумный результат, какие величины, характеризующие размерность аттрактора, здесь могли бы быть использованы, пока остаются открытыми.

В последние годы были введены другие характеристики размерности, которые могут быть, с одной стороны, эффективно вычислены для большого класса аттракторов, с другой стороны, позволяют получать более полную информацию о системе. Рассмотрим некоторые из них.

§ 6.3. Обобщенные размерности, α -спектр и другие характеристики странных аттракторов

До сих пор мы характеризовали множество, обладающее фрактальной структурой, одним числом. Вместе с тем, можно ожидать, что во многих случаях этого будет недостаточно. В самом деле, допустим, что в разных частях множества при переходе к меньшим масштабам элементы множества уменьшаются по-разному. Чтобы характеризовать такие множества, иногда называемые *неоднородными фракталами*, вводится целый набор *обобщенных размерностей*.

Простейшим примером неоднородной фрактали является двухмасштабное канторово множество. Способ его построения ясен из рис. 6.11. После первого шага вместо единичного отрезка остается два отрезка длины α_1 и α_2 , на которые точки попадают с вероятностями p_1 и p_2 . Далее с каждым из оставшихся отрезков производится аналогичная процедура. Каждому из отрезков, получающихся после p шагов, можно сопоставить p символов R и L . На первом шаге правому отрезку соответствует R , левому L , каждому из четырех отрезков на втором шаге сопоставляется RR, RL, LR, LL (RR соответствует самому правому отрезку, LL – самому левому) и т. д.

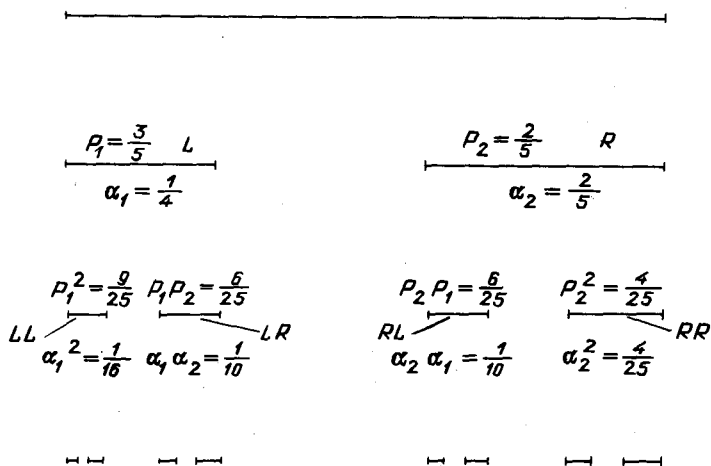


Рис. 6.11. Схема построения двухмасштабного канторова множества, $\alpha_1 = 0,25$; $\alpha_2 = 0,4$; $p_1 = 0,6$; $p_2 = 0,4$

Если рассматривать левый конец двухмасштабного канторова множества, которому соответствует последовательность $LLL\dots$, то поточечная размерность будет равна $d_p = \ln p_1 / \ln \alpha_1$.

Правому концу соответствует последовательность $RRR\dots$, поточечная размерность будет равна $d_p = \ln p_2 / \ln \alpha_2$.

Класс неоднородных фракталей, обладающих иерархической структурой, обобщающих двухмасштабные канторовы множества, был введен в работе [294]. Они строятся следующим образом.

0-уровень. На самой грубой шкале множество представляет собой N точек в кубе объема l_0^d .

1-уровень. В более мелком масштабе эти точки попадают в один из кубиков размера $(l_0/s_1)^d$ (таких кубиков M_1 штук), размера $(l_0/s_2)^d$ (таких кубиков M_2 штук), ... $(l_0/s_r)^d$ (их M_r штук) (рис. 6.12). Обозначим через p_k долю точек, попадающих в кубик со стороной (l_0/s_k) .

$n + 1$ - й уровень. Каждая из ячеек, существующих на n -м уровне, заменяется такой же конфигурацией, как на первом уровне (рис. 6.12), и т. д. Далее предполагается, что $N \rightarrow \infty$.

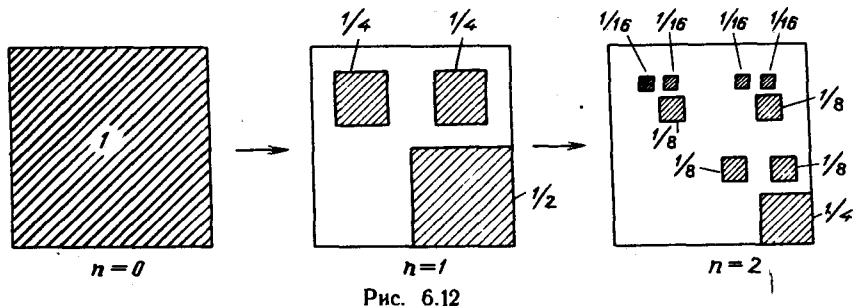


Рис. 6.12

Из приведенного определения следует, что

$$\sum_{\beta=1}^r M_{\beta} p_{\beta} = 1. \quad (6.28)$$

Можно показать, что емкость и корреляционный показатель могут быть определены из соотношений

$$\sum_{\beta=1}^r M_{\beta} s_{\beta}^{-d} = 1, \quad \sum_{\beta=1}^r M_{\beta} p_{\beta}^2 s_{\beta}^{\nu} = 1. \quad (6.29)$$

Прокомментируем эти формулы. Первое равенство является аналогом (6.1), (6.2). В (6.29) не уточнено, после какого шага построения фрактального множества нужно рас-

смаатривать эти соотношения. Поясним причину этого. Обсудим для определенности выражение для емкости d_c в случае двухмасштабного канторова множества.

На первом шаге формула (6.29) дает ($s_1 = 1/\alpha_1$, $s_2 = 1/\alpha_2$)

$$\alpha_1^{d_c} + \alpha_2^{d_c} = 1. \quad (6.30)$$

Но отсюда следует, что на втором шаге

$$\alpha_1^{2d_c} + \alpha_1^{d_c} \alpha_2^{d_c} + \alpha_2^{d_c} \alpha_1^{d_c} + \alpha_2^{2d_c} = 1, \quad (6.31)$$

$$\alpha_1^{d_c} (\alpha_1^{d_c} + \alpha_2^{d_c}) + \alpha_2^{d_c} (\alpha_1^{d_c} + \alpha_2^{d_c}) = 1.$$

Следовательно, если выполнено соотношение (6.30), то автоматически удовлетворяется равенство (6.31), а также равенства, возникающие на следующих шагах построения множества. Это связано с тем, что множество обладает фрактальной структурой, и каждый следующий шаг повторяет предыдущий.

Таким образом, формулу (6.30) можно рассматривать как соотношение, неявно определяющее d_c . Это уравнение можно решать с помощью метода простой итерации или метода Ньютона. Если аттрактор обладает четко выраженной канторовой структурой, аналогичные соотношения могут быть использованы для вычисления размерности аттрактора [318]. Соотношение для ν становится понятным, если записать формулу для корреляционного показателя в виде $A C(\epsilon) \epsilon^{-\nu} = 1$ (A — постоянная величина, C — число расстояний, меньших ϵ). Учитывая, что число точек в кубике с индексом β пропорционально ρ_β , число расстояний, меньших ϵ , пропорционально ρ_β^2 , а также то, что $\epsilon \sim 1/s$, получаем формулу (6.29) для ν .

В работе [294] были введены так называемые обобщенные размерности, позволяющие более полно охарактеризовать обсуждаемые множества. Вновь будем покрывать изучаемое множество в ρ -мерном пространстве кубиками с ребром ϵ .

Каждому кубику сопоставим вероятность, с которой точки множества попадают в кубик с индексом i — p_i . Введем набор величин D_q , определенных формулой

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i p_i^q}{\log \varepsilon}, \quad (6.32)$$

где суммирование ведется по всем кубикам покрытия, или эквивалентным выражением

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \int \mu(B_\varepsilon(x))^q d\mu(x)}{\log \varepsilon}. \quad (6.33)$$

Здесь $\mu(B_\varepsilon(x))$ — вероятность попадания в шар радиуса ε с центром в точке x (она же фигурирует в определении поточечной размерности). Величины D_q определены при любых $q > 0$, и можно показать, что $D_q > D_{q'}$, если $q < q'$. Однако в некоторых случаях (по крайней мере для обсуждавшегося выше класса фракталей) они совпадают с известными размерностями. Сравнивая формулу (6.32) с соотношениями (6.4), (6.25), (6.26), нетрудно убедиться, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} D_q = d_c, \quad D_{q=2} = v. \quad (6.34)$$

Можно показать, что

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q = d_f. \quad (6.35)$$

В самом деле, представим D_q в виде

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i p_i \exp(q-1) \ln p_i}{\log \varepsilon}.$$

При $q \rightarrow 1$ мы имеем неопределенность $0/0$. Чтобы раскрыть ее, воспользуемся правилом Лопиталья. Взяв производные от числителя и знаменателя по q при $q = 1$, получим

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon \sum p_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}, \quad (6.36)$$

что совпадает с формулой (6.6) для информационной размерности.

Можно убедиться, что для обсуждавшегося выше двухмашштабного канторова множества $D_\infty = \ln p_1 / \ln \alpha_1$, т. е. D_∞ характеризует здесь наиболее плотно заполненную часть множества вблизи левого конца (см. рис. 6.11). Весь набор обобщенных размерностей более полно характеризует изучаемое множество, чем каждая из размерностей по отдельности.

Существует несколько способов их вычисления. В работе [294] предлагаются два метода. Первый связан с введением обобщенного корреляционного интеграла $C_n(\epsilon)$ и обобщенного корреляционного показателя v_n :

$$C_n(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left\{ \text{число множеств из } n \text{ точек } (i_1, \dots, i_n), \right. \\ \left. \text{у которых } |x_{i_\alpha} - x_{i_\beta}| < \epsilon \text{ для всех } i_\alpha, i_\beta \right\}, \quad (6.37)$$

$$C_n(\epsilon) \sim \epsilon^{v_n}, \quad D_n = v_n / (n-1).$$

Однако этот способ требует огромного объема вычислений. При расчете обычного корреляционного показателя v (v_2 в формуле (6.37)) обрабатывается N^2 расстояний, а при вычислении $v_m - N^m$, что практически недоступно.

Другой подход связан с анализом соотношений, аналогичных формулам (6.29):

$$\sum_{\beta} M_{\beta} p_{\beta}^n s_{\beta}^n = 1. \quad (6.38)$$

Он очень эффективен при изучении канторовых множеств или их обобщений, обсуждавшихся выше, однако практически неприменим для анализа странных аттракторов, так как связан с оценкой вероятностей p_i и последующим решением уравнения (6.38), что в большинстве случаев является достаточно сложной задачей.

Оригинальный подход к расчету обобщенных фрактальных размерностей, широко применяемый в настоящее время, был

развит в 1985 г. Р.Бадьи и А.Полити [218]. Рассмотрим его подробнее.

Возьмем некоторую точку x и $n-1$ других точек множества, взятых наугад (по отношению к естественной мере на аттракторе). Пусть $\delta(n)$ – расстояние между x и ближайшей к ней точкой среди тех $n-1$ точек, которые были выбраны. Очевидно, по-разному выбирая $n-1$ точку, мы будем получать различные расстояния. Поэтому введем распределение вероятностей $P(\delta, n)$, которое определяет вероятность, с которой ближайший сосед среди выбранных $n-1$ точек окажется на расстоянии δ от данной. Введем моменты этого распределения

$$\langle \delta^\gamma \rangle \equiv M_\gamma(n) \equiv \int_0^\infty \delta^\gamma P(\delta, n) d\delta = K n^{-\gamma/D(\gamma)}. \quad (6.39)$$

Правое тождество можно рассматривать как определение величины $D(\gamma)$, которую мы далее будем называть *функцией размерности*. Из этого соотношения она может быть выражена явно:

$$D(\gamma) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma \ln n}{\ln M_\gamma(n)}. \quad (6.40)$$

Предел в формуле (6.40) связан с тем, что мы будем рассматривать величину $D(\gamma)$ только при больших n , считая, что изучаемое множество содержит достаточно много точек. Показатель γ позволяет учитывать различные расстояния с разным весом. Чем больше γ , тем с большим весом учитываются большие расстояния. В работе [218] показано, что $D(\gamma)$ является монотонной неубывающей функцией γ .

Чтобы выяснить ее смысл, вновь рассмотрим двухмасштабное канторово множество. Учитывая, что это множество повторяет себя на меньших масштабах, и пользуясь определением, можно получить следующее выражение для $P(\delta, n)d\delta$,

$$P(\delta, n)d\delta = p_1 P(\alpha_1^{-1}\delta, p_1 n) \alpha_1^{-1} d\delta + p_2 P(\alpha_2^{-1}\delta, p_2 n) \alpha_2^{-1} d\delta. \quad (6.41)$$

Множители $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 < 1$ связаны с изменением масштабов при переходе к следующему шагу построения канторова

множества. Множители ρ_1 и ρ_2 учитывают, что в первый и второй отрезок попала различная доля точек (мы здесь считаем, что n достаточно велико, и поэтому ближайшие соседи точек из первого или второго отрезков принадлежат тем же отрезкам).

Пользуясь формулой (6.39), получаем из равенства (6.41)

$$M_{\gamma}(n) = \rho_1 \alpha_1^{+\gamma} \int_{<1>} y^{\gamma} P(y, \rho_1, n) dy + \rho_2 \alpha_2^{+\gamma} \int_{<2>} y^{\gamma} P(y, \rho_2, n) dy. \quad (6.42)$$

Далее, подставив выражение для моментов, получим

$$1 = \alpha_1^{\gamma} \rho_1^{1-\gamma/D(\gamma)} + \alpha_2^{\gamma} \rho_2^{1-\gamma/D(\gamma)}. \quad (6.43)$$

Рассмотрим теперь решение уравнения

$$D(\gamma) = \gamma. \quad (6.44)$$

Обозначим его решение через γ^* . Но тогда, сравнивая формулу (6.44) с (6.30), мы видим, что $\gamma^* = D_0$.

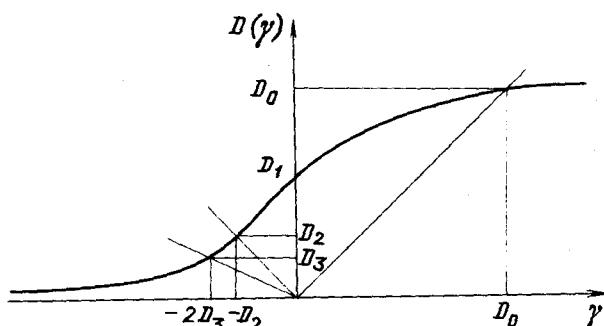


Рис. 6.13

Это дает новый способ вычисления емкости. В самом деле, будем рассматривать одномерное отображение

$$\gamma_{k+1} = D(\gamma_k) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_k \frac{\ln n}{\ln M_{\gamma_k}(n)}. \quad (6.45)$$

Задав некоторое значение γ_1 , будем строить $\gamma_2, \dots, \gamma_s$.
 Можно проверить, что $D_\gamma(\gamma^*) < 1$, поэтому $\gamma_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \gamma^*$.

Типичный вид этого отображения показан на рис. 6.13.

Из формулы (6.43) ясно, что $D(\infty) = \ln p_1 / \ln \alpha_1$. При таком подходе можно определить функцию D и для отрицательных значений γ . В этом случае $D(-\infty) = \ln p_2 / \ln \alpha_2$. Это число характеризует поточечную размерность двухмасштабного канторова множества вблизи правого конца отрезка.

Выясним теперь, как функция $D(\gamma)$ связана с обобщенными размерностями. Из их определения следует, что

$$\exp(D_q(1-q)\ln \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) = \sum_{\langle 1 \rangle} p_i^q(\varepsilon) + \sum_{\langle 2 \rangle} p_i^q(\varepsilon). \quad (6.46)$$

Или, учитывая соотношение, в котором сокращаются масштабы, и равенства $\sum_{\langle 1 \rangle} P_i = p_1$, $\sum_{\langle 2 \rangle} P_i = p_2$, получим формулу

$$\exp[D_q(1-q)\ln \varepsilon] = p_1^q \sum_{\langle 1 \rangle} \exp[D_q(1-q)\ln(\alpha_1 \varepsilon)] + p_2^q \sum_{\langle 2 \rangle} \exp[D_q(1-q)\ln(\alpha_2 \varepsilon)]. \quad (6.47)$$

Откуда следует, что

$$1 = p_1^q \alpha_1^{(1-q)D_q} + p_2^q \alpha_2^{(1-q)D_q}. \quad (6.48)$$

Или, сравнивая эту формулу с (6.43), получим

$$D[\gamma = (1-q)D_q] = D_q. \quad (6.49)$$

Из графика 6.13 ясно, каким образом, пользуясь одномерными отображениями, аналогичными (6.45), можно получать остальные обобщенные размерности.

Численная реализация метода Бадьи и Полити может быть следующей. Выборку длины $N = 2^k$ разобьем на 2^{k-l} блоков, каждый из которых содержит $n = 2^l$ точек. Расстояние $\delta_l(n)$ оценивается после вычисления расстояния от точки x_i до всех других точек в этом блоке. Затем расстояния $\delta_l(n)$ усредняются по всем точкам множества.

Чтобы сократить объем вычислений (и при этом оценить $\delta(n)$ для больших значений n), часто используют менее строгий подход. Сначала выбирают случайным образом на аттракторе m точек. Далее вычисляют расстояния от каждой следующей точки аттрактора до этих m точек. Это позволяет рассчитать функции $\delta_i(k)$ ($i = 1, \dots, m$). Функция $\delta(n)$ получается в результате их усреднения.

В настоящее время метод Бадьи и Полити широко используется при анализе странных аттракторов и экспериментальных данных. В отличие от метода Грассбергера – Прокаччо, при котором оценивается линейный участок кривой $\ln C = f(\ln \varepsilon)$, здесь решается уравнение (6.49), в котором функция $D(\gamma)$ определена формулой (6.40). В ряде случаев это оказывается более удобным.

Отметим, что в отличие от емкости, хаусдорфовой размерности, информационной размерности, ряда других размерностей, свойства которых детально исследованы [158, 159], свойства обобщенных размерностей, соотношения между ними изучены гораздо меньше. Они вводились в работе [294] для множеств, обладающих канторовой структурой. Насколько велик класс объектов, для описания которых они могут быть эффективно использованы, пока неясно.

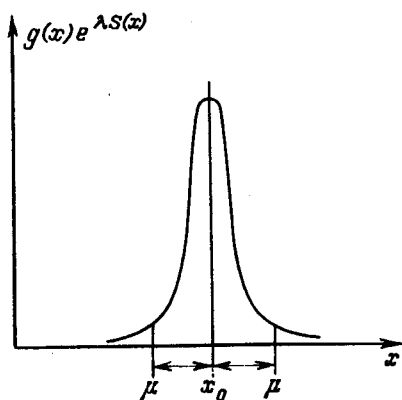


Рис. 6.14

В последние годы была предложена другая характеристика, более наглядная, чем набор обобщенных размерностей, которая позволяет описывать неоднородные фракталы. Она получила название α -спектра [291]. Обсудим ее более подробно.

Будем вновь полагать, что изучаемое множество M разбито на кубики с ребром ε . Вероятность найти точку множества в i -м кубике можно выразить как

$$\rho_i \sim \varepsilon^{\alpha_i}. \quad (6.50)$$

Поскольку множество неоднородно, можно ожидать, что разные кубики будут характеризоваться различными показателями α . Предположим, что число кубиков, в которых показатель α лежит в интервале между α' и $\alpha' + d\alpha'$, пропорционально величине

$$d\alpha' \rho(\alpha') \varepsilon^{-f(\alpha')}, \quad (6.51)$$

где $f(\alpha')$ — непрерывная функция.

Подставим формулы (6.50) и (6.51) в соотношение (6.32), определяющее обобщенные размерности

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \int d\alpha' \rho(\alpha') \varepsilon^{-f(\alpha')} \varepsilon^{q \alpha'}}{\log \varepsilon}. \quad (6.52)$$

Поскольку ε мало, основной вклад в интеграл вносят значения α' , при которых показатель степени будет близок к нулю (рис. 6.14). Это позволяет использовать метод Лапласа [188].

В самом деле, интеграл в формуле (6.52) может быть представлен в виде

$$F(\lambda) = \int_a^b g(x) \exp[\lambda S(x)] dx,$$

где λ — большой положительный параметр, пределы интегрирования можно заменить на $x_0 - \mu$ и $x_0 + \mu$, где μ — малое фиксированное число (см. рис. 6.14).

Тогда в области интегрирования

$$g(x) \approx g(x_0), \quad S(x) \approx S(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} S''(x_0).$$

Следовательно

$$F(\lambda) \approx g(x_0) \exp[\lambda S(x_0)] \int_{-\mu}^{\mu} \exp\left[\frac{\lambda S''(x_0) t^2}{2}\right] dt, \quad (6.53)$$

поэтому

$$F(\lambda) \approx \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} g(x_0) \exp(\lambda S(x_0)) \quad (\lambda \rightarrow +\infty).$$

В нашем случае $g(x) = \rho(x)$, $\lambda = \ln(1/\varepsilon)$, $S(x) = f(x) - qx$, $\alpha(q)$ определяется условием экстремума

$$\frac{d}{d\alpha'} [q\alpha' - f(\alpha')] |_{\alpha' = \alpha(q)} = 0. \quad (6.54)$$

Поскольку функция $f(x) - qx$ имеет максимум в точке $\alpha(q)$,

$$\frac{d^2}{d\alpha'^2} [f(\alpha') - q\alpha'] |_{\alpha' = \alpha(q)} < 0. \quad (6.55)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} f'(\alpha(q)) &= q \\ f''(\alpha(q)) &< 0. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Подставляя асимптотическое выражение вида (6.53) в формулу (6.52), получим

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q \alpha(q) - f(\alpha(q))]. \quad (6.57)$$

Таким образом, зная зависимость $\alpha(q)$, называемую α -спектром, можно вычислить все обобщенные размерности. И наоборот, зная все обобщенные размерности, можно найти α -спектр:

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q]. \quad (6.58)$$

Для вычисления α -спектра полезной величиной оказывается так называемая функция разбиения

$$\Gamma(q, \varepsilon) = \langle \rho_i(\varepsilon)^{q-1} \rangle, \quad (6.59)$$

где p_i — вероятность найти точку множества в i -м кубике разбиения. Сравнивая это выражение с формулой (6.32), видим, что

$$\Gamma(q, \varepsilon) \sim \varepsilon^{\tau(q)} \quad \text{или} \quad \tau(q) = D_q(q - 1). \quad (6.60)$$

Подставляя формулу (6.57) в выражение (6.60), нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= d\tau(q)/dq, \\ f(q) &= \tau(q) - qd\tau(q)/dq. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Введение α -спектра оказывается очень полезным. Оно позволяет по-новому взглянуть на обобщенные размерности, связав их с распределением показателей α' . Кроме того, α -спектр дает удобный способ характеризовать неоднородные фрактальные множества. Вновь рассмотрим двухмасштабное канторово множество, показанное на рис. 6.11. Из формулы (6.56) следует, что $f'(\alpha(0)) = 0$. Подставив $q = 0$ в равенство (6.57), получим, что $D_0 = f(\alpha(0))$. Следовательно, ордината максимума графика $f(\alpha)$ характеризует емкость этого множества. Зависимость величины D_q от q и α -спектр для двухмасштабного канторова множества представлены на рис. 6.15.

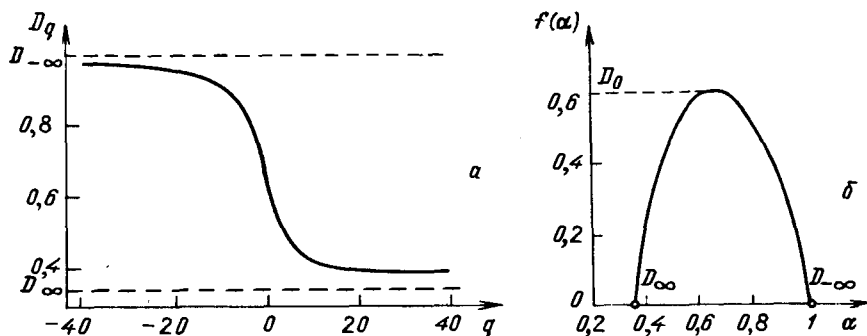


Рис. 6.15. а) Зависимость обобщенных размерностей D от q для двухмасштабного канторова множества, показанного на рис. 6.11; б) α -спектр для этого множества, $f = 0$ соответствует значениям $D_{-\infty} = \ln(0,4)/\ln(0,4) = 1,0$

$$\text{и } D_{\infty} = \ln(0,6)/\ln(0,25) = 0,3684$$

Другой пример неоднородного фрактального множества дает аттрактор Фейгенбаума. В самом деле, положим $\lambda = \lambda_\infty$ и будем следить за итерациями точки $x = 0$. Можно проверить, что при увеличении n $f^n(0)$ не попадают в интервал $(f^4(0), f^3(0))$, они также не попадают на участок $(f^6(0), f^8(0))$, $(f^7(0), f^5(0))$, и т. д. (рис. 6.16), это определяет, каким образом может быть покрыт аттрактор Фейгенбаума (сплошные линии на рис. 6.16). Видно, что ситуация оказывается близкой к той, которая наблюдается в случае двухмасштабного канторова множества.

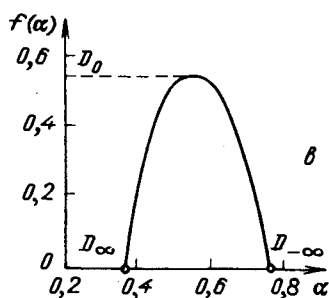
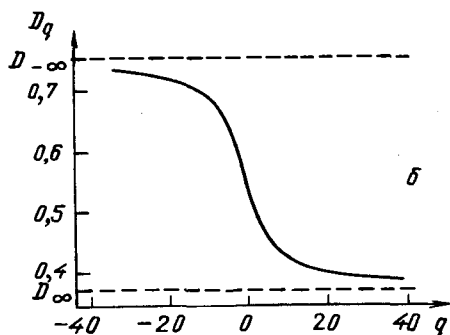
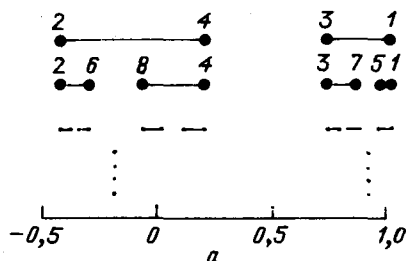


Рис. 6.16. Аттрактор Фейгенбаума [291]: а) схема построения аттрактора. Числа соответствуют числу итераций точки $x = 0$. Такой аттрактор наблюдается в одномерном отображении $x_{n+1} = \lambda(1-2x_n^2)$ при $\lambda = \lambda_\infty = 0,837005134\dots$; б) Обобщенные размерности для этого аттрактора; в) α - спектр

Теория Фейгенбаума предсказывает, в каком интервале лежат множители, характеризующие сокращение элементов покрытия при переходе к следующему шагу $1/\bar{\alpha}^2 < k < 1/\bar{\alpha}$

(здесь $\bar{\alpha}$ – постоянная Фейгенбаума). Поскольку число элементов покрытия на каждом шаге увеличивается вдвое,

$$D_{-\infty} = \ln 2 / \ln \bar{\alpha} = 0,75551 \dots$$

$$D_{\infty} = \ln 2 / \ln \bar{\alpha}^2 = 0,37775 \dots$$

В этом аттракторе, как и в других, $D_{-\infty} = \alpha_{\max}$, $D_{\infty} = \alpha_{\min}$ (это видно из формулы (6.57)). Таким образом, в двух рассмотренных выше примерах большая геометрическая информация о фрактальном множестве оказалась выражена с помощью одной непрерывной функции простого вида.

Если сравнить такое описание с универсальными функциями σ , введенными в теории Фейгенбаума для характеристики возникающих фрактальных множеств, которые имеют бесконечно много разрывов и не являются дифференцируемыми [261, 262], станут ясны преимущества обсуждавшегося подхода.

В настоящее время α -спектр вычислен для нескольких других важных множеств, характеризующих странные аттракторы. В некоторых случаях, когда аттрактор имеет небольшую размерность, он может быть рассчитан на основе экспериментальных данных [214, 301]. В частности, для этого в работе [353] было предложено использовать обобщение метода Грассбергера – Прокаччо.

Опишем этот подход подробнее. Запишем корреляционный интеграл $C(\epsilon)$ в виде

$$C^{(2)}(\epsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \theta(\epsilon - |x_i - x_j|), \quad (6.62)$$

где θ – функция Хевисайда. Это не что иное, как другая запись формулы (6.25). Индекс (2) связан с тем, что корреляционный показатель совпадает с обобщенной размерностью D_2 . Перепишем эту формулу в виде

$$C^{(2)}(\epsilon) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\sum_{j=1}^N \theta(\epsilon - |x_i - x_j|) / N \right] \right\}. \quad (6.63)$$

итерацию растягивается до длины $|f'(x_0)|\varepsilon$ (x_0 принадлежит отрезку i_1), поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$P(i_1, \dots, i_n) \sim |(f^n)'(x_0)|^{-1} \sim \exp(-\gamma n \tau),$$

где

$$\gamma = (1/n) \ln |(f^n)'(x_0)|.$$

Можно ожидать, что при $n \rightarrow \infty$

$$P(i_1, \dots, i_n) \sim \exp(-\gamma n \tau), \quad (6.69)$$

где γ характеризует сумму положительных ляпуновских показателей. Рассмотрим множество траекторий, задаваемых различными начальными данными x_0 . В этом случае значения γ могут быть различны (например, значения x_0 могут определять неустойчивые циклы с различными γ). Предположим, что по аналогии с α -спектром число траекторий, у которых значения γ лежат в интервале от γ' до $\gamma' + d\gamma'$, может быть представлено в виде

$$N(\gamma') d\gamma' \sim d\gamma' \exp(h(\gamma') n \tau). \quad (6.70)$$

Подставим формулы (6.69) и (6.70) в соотношение (6.68). Так же как при анализе α -спектра, перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ и воспользуемся методом перевала:

$$\Psi(q) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln \Gamma(q, n) = q\gamma(q) - h(\gamma(q)). \quad (6.71)$$

Отсюда следует, что

$$\gamma(q) = \frac{d}{dq} \Psi(q), \quad h(\gamma(q)) = q\gamma(q) - \Psi(q).$$

Зависимость $h(\gamma)$ и получила название γ -спектра. Гамма - спектр для нескольких моделей был найден в работах [363, 365]. Внешне он выглядит так же, как $f(\alpha)$. В этой работе также обсуждаются некоторые свойства γ -спектра.

Есть основание полагать, что использование функции $h(\gamma)$ будет полезно при описании переходных режимов. В тех случаях, когда переходный процесс, а не асимптотическое

поведение играет основную роль, информация о множестве траекторий, которую дает γ -спектр, будет очень важной.

Другая область, где γ -спектр может оказаться полезным – переходы хаос – хаос в динамических системах, которые сейчас вызывают большой интерес [209]. Можно предположить, что в точках перехода будут существенно меняться γ -спектр и времена, за которые устанавливаются ляпуновские показатели при движении вдоль траектории. Это особенно важно, если фрактальная размерность достаточно велика и трудно представить перестройку аттрактора по его проекциям на различные плоскости или изменению фрактальной размерности.

Таким образом, вычисление ляпуновской размерности, корреляционного показателя, других размерностей позволяет определить количественные характеристики большого класса фракталов. И здесь принципиальным становится вопрос, определяется ли наблюдаемая временная динамика в реальных физических системах странным аттрактором небольшой размерности, случайными флуктуациями или это просто неустановившийся переходный процесс. Перейдем к его обсуждению.

§ 6.4. Определение фрактальной размерности по результатам измерений

Будем считать, что у нас есть прибор, измеряющий одну из характеристик изучаемой системы в разные моменты времени с интервалом и Δt . Результаты измерений дают ограниченную последовательность $\{a_i\}$, $0 \leq i < \infty$. Встает вопрос, можно ли по этой последовательности выяснить, имеем ли мы дело со сложным детерминированным процессом, который описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = X(x)$ в фазовом пространстве \mathbb{R}^n , или со случайной функцией. Ответ на этот вопрос был получен в работах Ф.Такенса [377, 378].

Следуя работе [378], будем говорить, что результаты измерений могут быть описаны с помощью гладкой детермини-

рованной модели, если существует дифференциальное уравнение $\dot{x} = X(x)$ в фазовом пространстве \mathbb{R}^n с гладкой функцией X и гладкая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

1) для каждой наблюдаемой последовательности $A = \{a_i\}$, $0 \leq i < \infty$, экспериментальных данных существует точка $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ такая, что $a_i = f[\bar{x}(i\Delta t)]$, где $\bar{x}(t)$ – решение дифференциального уравнения $\dot{x} = X(x)$, у которого $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$;

2) для каждой начальной точки $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x(t)$, $x(0) = \bar{x}_0$, при $t > 0$ ограничено.

Если для некоторой последовательности $A = \{a_i\}$ удается построить функции f , X и интегральную кривую $\bar{x}_0(t)$, будем говорить, что результаты данного эксперимента могут быть объяснены с помощью гладкой детерминированной модели.

Чтобы сформулировать критерий Ф.Такенса, введем несколько определений. Пусть $A \equiv \{a_i\}$, $0 \leq i < \infty$, – ограниченная последовательность действительных чисел (экспериментальные данные). Для $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ (\mathbb{N} – множество целых положительных чисел) определим множество $\mathfrak{G}_{n,\varepsilon} \subset \mathbb{N}$ следующим образом:

$$0 \in \mathfrak{G}_{n,\varepsilon}.$$

При $i > 0$ $i \in \mathfrak{G}_{n,\varepsilon}$ в том и только том случае, если для всех $0 \leq j < i$ и $j \in \mathfrak{G}_{n,\varepsilon}$

$$\max \{|a_i - a_j|, |a_{i+1} - a_{j+1}|, \dots, |a_{i+n} - a_{j+n}|\} \geq \varepsilon.$$

Обозначим через $C_{n,\varepsilon}(A)$ число элементов $\mathfrak{G}_{n,\varepsilon}$. Так как последовательность A ограничена, $C_{n,\varepsilon}(A)$ конечно.

В работе [378] были сформулированы следующие утверждения. Результаты эксперимента, определенные последовательностью A , могут быть объяснены с помощью гладкой детерминированной модели, если величина

$$\frac{\ln C_{n,\varepsilon}(A)}{n - \ln \varepsilon} \quad (6.72)$$

равномерно ограничена при $(n - \ln(\epsilon)) \rightarrow \infty$. В противном случае последовательность измерений A не может быть объяснена с помощью гладкой детерминированной модели.

В критерии Ф.Такенса фигурирует бесконечная последовательность A . Реально эксперимент дает конечное число измерений, и приходится иметь дело не с величиной $C_{n,\epsilon}(A)$, а с $C_{n,\epsilon,m}(A)$, где m — длина выборки. Величина $\ln(\epsilon)$ также ограничена (например, конечной точностью измерений), ограниченность предела можно проверить только для конечного числа n . Однако если с помощью ЭВМ удастся убедиться, что при увеличении m и n и уменьшении ϵ пределы практически не меняются, то можно считать, что физическая система хорошо описывается конечномерной детерминированной моделью. (Обычно используется несколько иной алгоритм, к которому мы далее вернемся.)

Важно, что установить наличие детерминированного хаоса в нелинейной среде можно, измеряя любую из динамических переменных в одной точке почти при любом интервале Δt , с которым делаются измерения. Основой для такого вывода является результат Ф.Такенса, показавшего, что для компактного многообразия M размерности p , диффеоморфизма $g: M \rightarrow M$, и гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, отображение $\Phi_{g,f}(x) = (f(x), f(g(x)), \dots, f(g^{2m}(x)))$ является в общем случае вложением (то есть оператор Φ является непрерывным, взаимно однозначным отображением M в \mathbb{R}^{2m+1}), $m > p$.

В качестве g в системе $\dot{x} = X(x)$ можно рассматривать оператор сдвига вдоль траектории за время Δt ; в качестве функции f можно взять одну из динамических переменных $\xi(s\Delta t)$, $s = 0, 1, \dots, 2m$. Отсюда следует, что фрактальная размерность предельного множества может быть определена по дискретному набору $\xi(t_i) = \xi_r$, $t_i \rightarrow \infty$. По этим данным можно построить набор m -мерных векторов

$$\zeta_k = (\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l-1}) \quad (6.73)$$

для $l = 1, 2$ и т. д. и определить размерность (обычно корреляционный показатель ν) множества $\{\zeta_k\}$ в l -мерном фа-

зовом пространстве. Если размерность аттрактора M конечна и равна p , можно ожидать, что при $l > 2p + 1$ полученные значения уже не будут зависеть от m .

Это означает, что существует набор $2p + 1$ параметров порядка, к которым «подстраиваются» все остальные степени свободы системы. Такое поведение характерно для многих математических моделей, изучаемых синергетикой [151, 193], в том числе для нелинейных систем с бесконечным числом степеней свободы, которые описываются уравнениями в частных производных. Множества, состоящие из векторов вида (6.73), часто называются множествами в ζ -пространстве, а само их построение – *реконструкцией аттрактора*.

Отметим, что результаты Ф.Такенса не в полной мере соответствуют тем физическим ситуациям, в которых обычно производится реконструкция аттрактора. Одно из наиболее серьезных ограничений связано с предположением о том, что M является многообразием. Инвариантный тор и предельный цикл – действительно многообразия, однако для большинства странных аттракторов характерна канторова структура – они не являются многообразиями. Оценка $2p + 1$ связана с теоремой Уитни, касающейся гладких многообразий. Есть основания полагать, что в общем случае она неприменима.

Требование компактности также накладывает жесткие ограничения. Вопрос о том, в какой мере эти результаты могут быть применены к аттракторам бесконечномерных систем, которые описываются уравнениями в частных производных, остается открытым.

Пусть аттрактор m -мерной динамической системы имеет хаусдорфову размерность d_H . Дифференцируемая замена переменных (преобразование, которое является диффеоморфизмом) не меняет значения d_H . Однако непрерывное взаимно однозначное преобразование может изменить значение хаусдорфовой размерности аттрактора.

Таким образом, теоретическую работу по обоснованию процедуры реконструкции аттрактора нельзя считать завершённой.

Исследование множеств в ζ -пространстве позволяет предложить ряд алгоритмов вычисления фрактальной размерности, более эффективных, чем при анализе аттракторов в обычном фазовом пространстве (X -пространстве) [138, 280].

Как уже упоминалось, при использовании стандартного алгоритма вычисления корреляционного показателя ν расчет величины $C(\epsilon)$ (см. формулы (6.25) и (6.26)) требуется хранить N векторов (N p -чисел) и $\sim N^2 p$ действий.

Вычисление корреляционного интеграла $C(\epsilon)$ для множества в ζ -пространстве требует N слов памяти и $\sim N^2 + Np$ действий. В самом деле,

$$\rho(\zeta_k, \zeta_m) \equiv \left| \sum_{i=0}^{p-1} (\xi_{k+i} - \xi_{m+i})^2 \right|^{1/2}, \quad (6.74)$$

$$k = 1, \dots, N - p - 1, \quad m = 1, \dots$$

$$\dots, \quad N - p - 1, \quad m - k = \text{const},$$

$$\begin{aligned} \rho^2(\zeta_{k+p}, \zeta_{m+p}) &= \rho^2(\zeta_k, \zeta_m) + \\ &+ (\xi_{k+p} - \xi_{m+p})^2 - (\xi_k - \xi_m)^2. \end{aligned}$$

Формула (6.74), определяющая так называемый алгоритм *скользящей суммы* [138, 139], позволяет вычислять $\rho^2(\zeta_{k+p}, \zeta_{m+p})$, добавляя и вычитая из $\rho^2(\zeta_k, \zeta_m)$ по одному слагаемому независимо от размерности пространства.

Более эффективные алгоритмы могут быть предложены и для вычисления емкости и информационной размерности. Они требуют объема памяти, меньшего $4N$ и числа действий, меньшего N^2 [138, 139]. Идея таких алгоритмов связана с упорядочением ζ -векторов по первой компоненте, благодаря чему удается уменьшить количество необходимых сравнений.

Предварительное упорядочивание позволяет также построить алгоритмы вычисления корреляционного показателя, в которых число действий не зависит от длины выборки N . Они могут быть очень полезны в случае больших выборок $N > (l_0/\epsilon_{\min})^d$, где l_0 — характерный размер аттрактора,

d — его размерность, ε_{\min} — наименьшее расстояние между векторами ζ_m и ζ_n , которое может быть надежно измерено.

§ 6.5. Определение ляпуновских показателей по экспериментальным данным

При исследовании динамических систем важной характеристикой служили ляпуновские показатели. Наличие положительного показателя свидетельствовало о хаотическом режиме в системе. Поэтому большое значение имеют алгоритмы, позволяющие оценивать ляпуновские показатели по экспериментальным данным. Здесь можно выделить два различных подхода. Первый был предложен в 1985 году в работе Дж.Экмана и Д.Рюэля [256], а также в работе М.Сано и И.Савады [364]. В литературе он известен как *метод якобиана*.

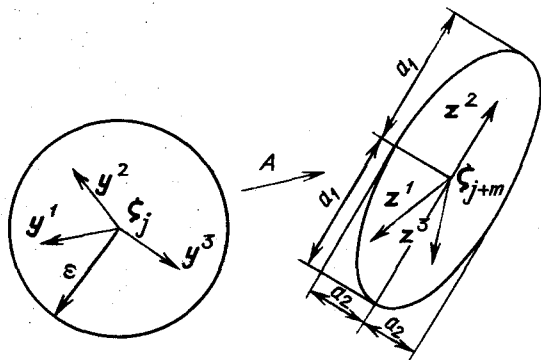


Рис. 6.17

Будем вновь полагать, что мы имеем дело с ζ -векторами $\zeta_k = (\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+p-1})$ в p -мерном пространстве, построенными по результатам наблюдений ξ_1, ξ_2, \dots . Обозначим через T оператор, переводящий ζ_k в ζ_{k+1} .

Идея метода очень проста. Выберем сферу малого радиуса ε в ζ -пространстве (рис. 6.17). Через t итераций

оператор T^m переводит эту сферу в эллипсоид с полуосями a_1, \dots, a_p . Если в системе есть s положительных показателей, то шар будет растягиваться вдоль некоторых s осей и $a_1, \dots, a_s > \epsilon$. Если радиус сферы выбрать достаточно малым, то оператор T^m близок к сумме оператора сдвига и линейного оператора A , собственные значения которого и нужно оценить. Затем, проводя усреднение этих собственных значений по всему аттрактору, мы и получим оценку ляпуновских показателей.

Выберем вектор ζ_j и найдем множество векторов $\{\zeta_{k_i}\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), попадающих в его ϵ -окрестность. Другими словами, векторы $y^i \equiv \zeta_{k_i} - \zeta_j$ таковы, что $\|y^i\| \leq \epsilon$, где $\|w\| = (\omega_1^2 + \dots + \omega_p^2)^{1/2}$, $\omega_1, \dots, \omega_p$ — компоненты вектора w . Через время $m\Delta t$ оператор T^m переводит вектор ζ_j в ζ_{j+m} , а вектор ζ_{k_i} в $\zeta_{k_{i+m}}$. Вектора y^i при этом перейдут в

$$z^i = \zeta_{k_i} - \zeta_{k_{i+m}}$$

Если сфера ϵ достаточно мала, то можно считать, что существует линейный оператор A_j :

$$z^i = A_j y^i. \quad (6.75)$$

Можно сказать, что A_j характеризует систему в вариациях. Чтобы оценить наилучшим образом оператор A естественно воспользоваться методом наименьших квадратов, т. е. минимизировать функционал

$$\min_{A_j} S = \min_{A_j} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (z^i - A_j y^i)^2. \quad (6.76)$$

Обозначим через $a_{kl}(j)$ элемент матрицы A_j , находящийся в k -й строке и l -м столбце. Условия минимума функционала $\partial S / \partial a_{kl}(j) = 0$ дадут систему $p \times p$ уравнений вида

$$A_j V = C, \quad (V)_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{ik} y^{il},$$

$$(C)_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z^{ik} y^{il},$$
(6.77)

где V и C – матрицы размера $p \times p$, а через y^{ik} и z^{ik} обозначены k -е компоненты векторов y^i и z^i соответственно.

Далее ляпуновские показатели можно будет найти по формуле

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{j=1}^n \ln A_j e_i^j, \quad (6.78)$$

где A – решение уравнений (6.77), $\{e_j\}$ – набор базисных векторов в касательном пространстве в ζ_j .

При реализации этого алгоритма можно поступать так же, как при вычислении ляпуновских показателей в аналитически заданных системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно выбрать вначале произвольный базис $\{e^s\}$ и следить, как меняется длина вектора $A_j e^{s'}$, площадь параллелограмма, построенного на векторах $A_j e^{s''}$, $A_j e^{s''}$, и т. д. при изменении j .

По мере роста компонент векторов $A_j e^s$ и изменения их ориентации с ростом j периодически надо проводить их перенормировку и ортогонализацию, получать новый базис. Далее процедура повторяется.

В 1985 году в работе [393] был предложен другой метод, который условно может быть назван *методом аналога*. Его суть ясна из рис. 6.18. Выбирается вектор ζ_j и ищется его сосед $\zeta_{j'}$, расположенный достаточно близко к ζ_j на расстоянии $L(t_0)$. Если разность $j - j'$ достаточно велика, то можно считать, что мы имеем две различные близкие траектории. Поскольку в системе есть положительный показатель, расстояние между образами $\zeta_{j'}$ и ζ_j растет и в момент t_1 становится равным $L'(t_1)$, когда его уже нельзя считать малым, а траектории близкими. В этот момент ищется другой близкий вектор $\zeta_{j''}$ такой, чтобы ориентация векторов

$\zeta_{j''}(t) - \zeta_j(t_1)$ и $\zeta_{j'}(t) - \zeta_j(t_1)$ была близка. Если таких векторов нет, выбирается любой близкий сосед. Далее траектории прослеживаются, пока расстояние между ними не станет равным $L'(t_2)$, потом ищется новый вектор на расстоянии $L(t_1)$ и т. д.

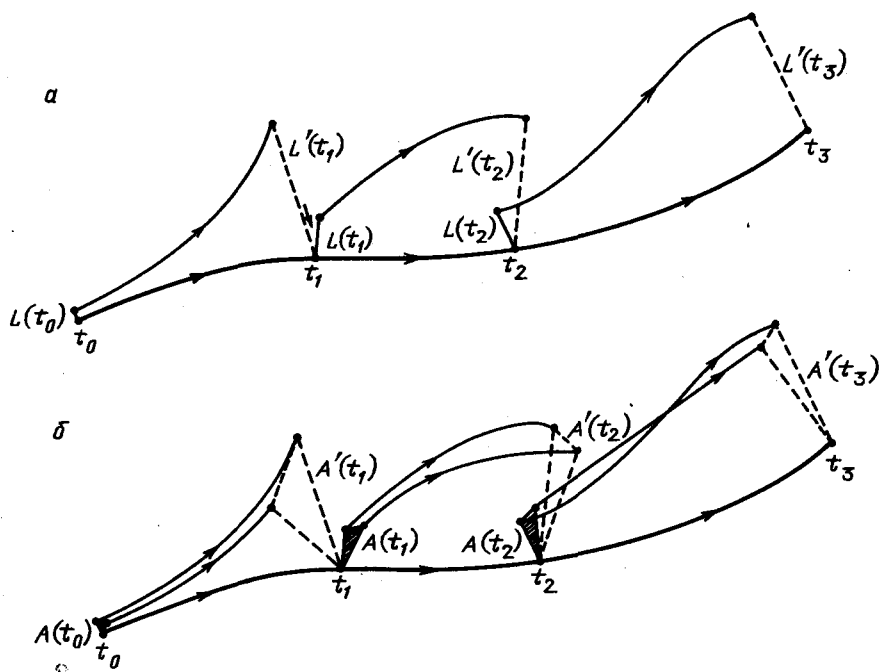


Рис. 6.18

При таком подходе максимальный ляпуновский показатель определяется по формуле

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \quad (6.79)$$

Чтобы вычислить сумму двух наибольших показателей, нужно рассматривать пары близких траекторий и изменение площадей соответствующих треугольников (см. рис.6.18). Когда ищутся

новые соседние векторы, также надо следить, чтобы ориентация треугольников была близка. Здесь

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{A'(t_k)}{A(t_{k-1})}. \quad (6.80)$$

Обычно, пользуясь методом аналога, больше двух ляпуновских показателей не вычисляют.

Тестовые расчеты позволили выявить область применимости обоих методов и их ограничения. Примером такого анализа может служить работа [387].

Допустим, что имеется априорная информация о том, какова размерность вложения p изучаемой системы. Тогда оба метода дают разумные оценки старших показателей при сравнительно небольших выборках. Результаты в обоих случаях слабо зависят от выбора ϵ и шага интегрирования. Метод якобиана в этом случае в ряде тестовых расчетов позволял оценить не только положительные, но и отрицательные ляпуновские показатели.

Однако при обработке экспериментальных данных обычно приходится иметь дело с другой ситуацией – априорно неизвестно, какова размерность системы. И здесь естественно было бы ожидать, что начиная с некоторого p , так же как при вычислении размерности аттрактора, значения первых ляпуновских показателей перестанут меняться. В противном случае мы просто не сможем сказать, какие же показатели “настоящие”. Проведенные исследования показали, что этим важным свойством обладает метод аналога и не обладает метод якобиана [387].

При использовании последнего метода увеличение p обычно приводит к росту значений положительных ляпуновских показателей и их числа. Пояснить это можно следующим образом. Допустим, экспериментальные данные порождаются динамической системой, вложенной в p -мерное пространство. Тогда при $p > \tilde{p}$ должны появляться большие отрицательные показатели (в идеальном случае $\lambda_{\tilde{p}+1}^{\sim} = \lambda_{\tilde{p}+2}^{\sim} = \dots = -\infty$),

что приводит к тому, что матрица A является плохо определенной. Поиск ее собственных значений становится некорректной задачей.

По-видимому, вопрос о возможности расчета отрицательных ляпуновских показателей по экспериментальным данным в настоящее время остается открытым. В самом деле, нетрудно представить себе ситуацию, в которой аттрактор в p -мерном пространстве лежит в k -мерном многообразии. На больших характерных временах можно считать, что траектория лежит на аттракторе. Чтобы узнать, каковы $p - k$ отрицательных показателей, должны быть траектории, которые лежат вне аттрактора и стремятся к нему. А последовательность экспериментальных данных, соответствующих движению по аттрактору, таких траекторий может не содержать.

Отметим, что применение алгоритмов вычисления ляпуновских показателей по временным рядам оправдано, если в фазовом пространстве есть много точек, у которых существуют достаточно близкие соседи. Иначе не удастся проследить поведение близких траекторий, и результаты вычислений могут быть никак не связаны с динамикой изучаемой системы.

§ 6.6. О методах построения ζ -векторов

Выше считалось, что время Δt , в соответствии с которым строятся ζ -вектора, каким-то образом задано. И действительно, по критерию Такенса оператор Φ является вложением почти для любого Δt . Однако при этом предполагается доступной выборка неограниченной длины и возможность перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, рассматривая сколь угодно малые масштабы.

Реально оба требования не выполнены, и выбор Δt становится важным методическим вопросом. Часто именно от его успешного решения зависит, будет ли обнаружена фрактальная структура того или иного аттрактора. В настоящее время во многих натуральных и вычислительных экспериментах вначале оп-

ределяют статистические характеристики процесса, затем по ним выбирают Δt и потом получают серию экспериментальных данных [271, 376]. Рассмотрим несколько методов выбора Δt , которые широко используются в настоящее время.

Тестовые расчеты показали, что при выборе Δt полезными оказываются следующие простые соображения. Пусть Δt очень мало. Тогда все ζ -векторы будут лежать вблизи прямой в ζ -пространстве, где $\zeta_{k+1} = \zeta_k$. Это приведет к тому, что интервал масштабов, на котором сосредоточен линейный участок кривой $\ln C = f(\ln \varepsilon)$, будет смещен в область очень малых масштабов и оценить его будет очень трудно.

Напротив, пусть Δt будет достаточно велико. Тогда ζ_n и ζ_{n+1} практически независимы и ζ -векторы будут заполнять некоторый куб в ζ -пространстве. Оценить наклон линейного участка кривой $\ln C = f(\ln \varepsilon)$ также будет трудно.

Естественно выбрать Δt так, чтобы ζ_k и ζ_{k+1} были бы достаточно близки, но в наименьшей степени коррелированы. Тогда каждый следующий ζ -вектор будет независим от предыдущего, что позволит, используя выборку данной длины, наиболее полно охарактеризовать аттрактор. Этим требованиям удовлетворяют такие значения Δt , при которых автокорреляционная функция

$$a(\Delta t) = T^{-1} \int_0^T \xi(t) \xi(t+\Delta t) dt - \left[T^{-1} \int_0^T \xi(t) dt \right]^2$$

в первый раз достигает нуля (напомним, что $\xi(t)$ — переменная, по которой строятся ζ -векторы).

Смысл такого выбора Δt можно проиллюстрировать следующим примером. Пусть в системе реализуется простейший колебательный режим $\xi(t) = \sin(\omega t)$. Посмотрим, при каком значении Δt вложение в двумерное пространство будет наиболее простым. В этом случае

$$\zeta_n = \begin{bmatrix} \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\omega n \Delta t) \\ \sin(\omega(n+1)\Delta t) \end{bmatrix}.$$

Если представить ξ_{n+1} в виде $\sin(\omega n \Delta t) \cos(\omega \Delta t) + \cos(n\omega \Delta t) \sin(\omega \Delta t)$, нетрудно убедиться, что

$$\xi_{n+1}^2 + \xi_n^2 - 2\cos(\omega \Delta t)\xi_n \xi_{n+1} = \sin^2(\omega \Delta t).$$

Это уравнение определяет эллипс с соотношением полуосей $\alpha = (1 - \cos(\omega \Delta t))/(1 + \cos(\omega \Delta t))$. При малых Δt эллипс оказывается сильно вытянутым вдоль диагонали $\xi_{n+1} = \xi_n$. Вблизи точек поворота, через которые проходит большая полуось, будет лежать много ζ -векторов. Такая неравномерность заполнения фигуры требует для достижения данной точности больших выборок. Автокорреляционная функция в этом случае равна $\frac{1}{2}\cos(\omega \Delta t)$. Первый ноль достигается при $\bar{\Delta t} = \pi/2\omega$. В этом случае точки (ξ_n, ξ_{n+1}) будут лежать на окружности. При $\Delta t \approx \bar{\Delta t}$ точки (ξ_n, ξ_{n+1}) будут равномерно заполнять фигуру, близкую к окружности, что и позволит определить размерность множества с помощью выборки небольшой длины. (Строго говоря, при точном выборе $\bar{\Delta t}$ на этой окружности будут пробегаться только четыре точки, поэтому в этом случае разумно брать значения Δt , лежащие вблизи $\bar{\Delta t}$. Это связано с постоянством времени оборота $T = 2\pi/\omega$. В странных аттракторах дифференциальных уравнений время оборота варьируется в определенных пределах, и такой проблемы не возникает. Тем не менее, в ряде работ рекомендуется брать Δt таким, что $a(\Delta t) = a(0)/e$. При выборе Δt с помощью автокорреляционной функции на каждый виток траектории в среднем обычно приходится от 4 до 10 точек.

Применение автокорреляционной функции для выбора Δt было связано с предположением, что наилучшим будет Δt , при котором $\xi(t)$ и $\xi(t + \Delta t)$ статистически независимы. Однако вопрос может быть поставлен иначе: при каком значении Δt каждый следующий вектор ζ_{n+1} будет добавлять наибольшую информацию об аттракторе? Это зависит от того, каков был предыдущий ζ -вектор. И здесь естественно использовать представления теории информации.

Такой подход был развит в работе [271]. Рассмотрим его более подробно.

Пусть экспериментатор рассматривает систему S . Изменяя ее состояние, он может получить результаты s_1, s_2, \dots, s_n с вероятностями $P_s(s_1), P_s(s_2), \dots, P_s(s_n)$. Тогда, как было показано Шенноном, среднее количество информации, которое может быть получено после одного изменения, определяет энтропию системы

$$H(S) = - \sum_i P_s(s_i) \log P_s(s_i)$$

(если брать \log по основанию 2, то H будет измеряться в битах).

Введем следующее обозначение для пары $\xi(t), \xi(t + \Delta t)$: $[s, q] = [\xi(t), \xi(t + \Delta t)]$, а множество всех таких пар будем обозначать через (S, Q) . Будем считать, что $\xi(t)$ попадает в ячейку s , с вероятностью $P_s(s_i)$, вероятность попадания $\xi(t + \Delta t)$ в ячейку q_j обозначим через $P_q(q_j)$, совместную вероятность двух этих событий — через $P_{sq}(s_i, q_j)$.

Пусть измерение величины $\xi(t)$ дало значение s_i (т. е. $\xi(t)$ попало в ячейку s_i). Тогда неопределенность величины q определяется формулой

$$\begin{aligned} H(Q|s_i) &= - \sum_j P_{q|s}(q_j|s_i) \log [P_{q|s}(q_j|s_i)] = \\ &= - \sum_j [P_{sq}(s_i, q_j)/P_s(s_i)] \times \log [P_{sq}(s_i, q_j)/P_s(s_i)], \end{aligned}$$

где $P_{q|s}(q_j|s_i)$ — условная вероятность того, что измерение величины q дало q_j , если измерение s дало s_i .

Чтобы выяснить, какова неопределенность $H(Q|s)$ в измерении величины $\xi(t + \Delta t)$ после измерения $\xi(t)$, нужно просто просуммировать $H(Q|s_i)$ по всем ячейкам:

$$\begin{aligned} H(Q|s) &= \sum_i P_s(s_i) H(Q|s_i) = \\ &= - \sum_{i,j} P_{sq}(s_i, q_j) \log [P_{sq}(s_i, q_j)/P_s(s_i)] = H(S, Q) - H(S), \end{aligned}$$

где

$$H(S, Q) = - \sum_{i, j} P_{sq}(s_i, q_j) \log[P_{sq}(s_i, q_j)],$$

$H(Q)$ – неопределенность в измерении величины q , $H(Q|S)$ – неопределенность величины q в случае, когда измерена величина s . Таким образом, измерение величины s уменьшает неопределенность q на величину

$$\begin{aligned} I(Q, S) &= H(Q) - H(Q|S) = \\ &= H(Q) + H(S) - H(S, Q) = I(S, Q), \end{aligned} \quad (6.81)$$

называемую *взаимной информацией*.

Эта формула естественно обобщается на непрерывный случай

$$I(S, Q) = \int P_{sq}(s, q) \log[P_{sq}(s, q)/P_s(s)P_q(q)] dsdq. \quad (6.82)$$

Если две величины некоррелированы, то $I(s, Q) = 0$. Предлагается брать в качестве Δt такое значение, при котором $I(S, Q)$ в первый раз достигает минимума.

Если пользоваться этим критерием для выбора Δt , то нужно для различных значений Δt оценить по данным натурального или вычислительного эксперимента вероятности $P_s(s)$, $P_q(q)$, $P_{sq}(s, q)$, рассчитать взаимную информацию $I(S, Q)$ и найти первый минимум этой функции. В работе [271] предложен экономичный способ расчета интеграла вида (6.82).

Представление о том, как выглядит аттрактор в ζ – пространстве, если для выбора Δt пользоваться двумя обсуждавшимися выше критериями, дает рис. 6.19, взятый из работы [271]. В ней рассматривался реконструированный аттрактор системы, возникшей при наблюдении реакции Белоусова – Жаботинского. Зависимость автокорреляционной функции $C(\Delta t)$ и функция взаимной информации $I(\Delta t)$ строились по массиву из 32768 точек.

Слева приведена проекция аттрактора при значении Δt , определяемом нулем автокорреляционной функции, справа Δt найдено с помощью критерия минимума взаимной информации.

Слева большая часть аттрактора проектируется в несколько узких полосок. Это приводит к смещению линейного участка $\ln C = f(\ln \epsilon)$ в область малых масштабов, что затрудняет оценку его размерности. Справа траектории сравнительно равномерно заполняют довольно большую область фазового пространства. Такой выбор Δt более удачен.

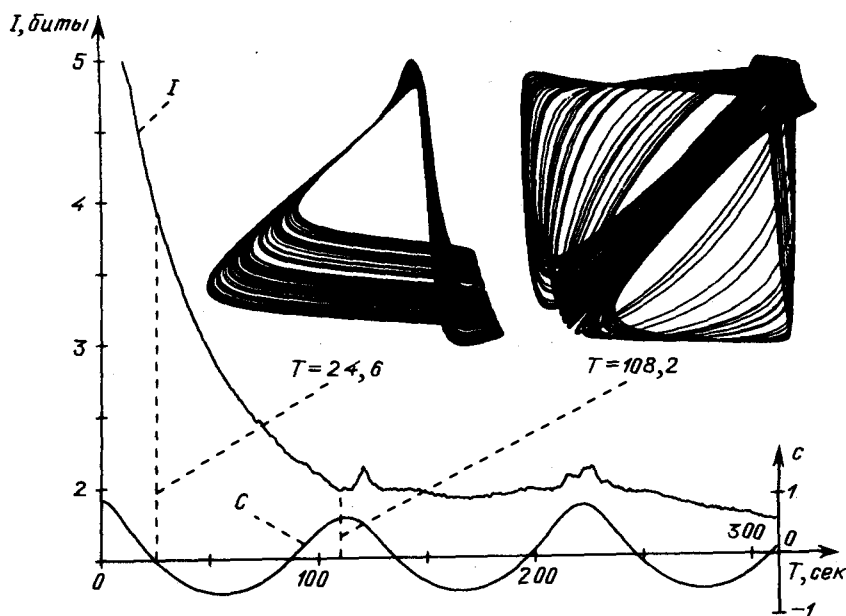


Рис. 6.19

Критерий, использующий взаимную информацию, широко используется во многих работах и обычно дает хорошие результаты.

Экспериментальные данные, которые сейчас обрабатываются для оценки фрактальной размерности, могут относиться к самым разным объектам. Поэтому можно ожидать, что для ряда выборок наилучший выбор Δt не будет связан с двумя обсуждавшимися критериями, и существуют другие способы построения ζ -векторов.

Выбирая Δt , мы, по существу, сразу выбираем не один, а два параметра. Один характеризует способ построения ζ -векторов. Другой определяет частоту, с которой мы строим ζ -векторы, сдвигаясь по траектории. В общем случае оба параметра независимы, и можно ожидать, что наилучшие результаты будут получены, если оптимизировать по обоим. Первый параметр по-прежнему будем обозначать через Δt , второй через ΔT . Тогда ζ -вектора в p -мерном пространстве будут таковы:

$$\bar{\zeta}_1 = (\xi(\Delta t), \xi(2\Delta t), \dots, \xi(p\Delta t)),$$

$$\bar{\zeta}_2 = (\xi(\Delta T + \Delta t), \xi(2\Delta T + 2\Delta t), \dots, \xi(\Delta T + p\Delta t)), \dots,$$

$$\bar{\zeta}_n = (\xi(\Delta t + (n-1)\Delta T), \xi(2\Delta t + (n-1)\Delta T), \dots, \xi(p\Delta t + (n-1)\Delta T)).$$

Пусть $\Delta T/\Delta t$ — целое число. Тогда можно считать, что мы строим ζ -вектора так же, как они строятся в теореме Такенса. Однако далее проводится обработка не всех векторов, а только их части.

Выбрав ΔT большим Δt , можно распорядиться ζ -векторами так, чтобы они наилучшим образом характеризовали аттрактор при данной длине выборки. Величина $s = (p-1)\Delta t$ в литературе часто называется *длиной окна*. Важное замечание относительно этой величины сделано в работе [211].

В теории Такенса предполагается, что имеется одна траектория и нет никаких возмущений. В расчетах странных аттракторов в силу чувствительности к начальным данным вычисленная траектория оказывается в окрестности различных траекторий исходной системы и дает представление о целом множестве последних. Однако представленные по ним ζ -векторы могут не иметь отношения к изучаемому аттрактору. Длина окна s должна быть выбрана таким образом, чтобы все компоненты ζ -вектора с высокой точностью определялись одной траекторией. Это зависит и от величин положительных

ляпуновских показателей, и от величины вносимых возмущений.

В работе [211] предлагается оптимизировать Δt таким образом, чтобы длина линейного участка $\log C = f(\log \varepsilon)$ была максимальной, предварительно обрабатывая сам массив ζ -векторов определенным образом. При таком подходе объем вычислительной работы значительно увеличивается по сравнению с двумя методиками, обсуждавшимися выше.

Однако вопрос о том, как оптимизировать ΔT и Δt , чтобы наилучшим образом оценить размерность странных аттракторов, остается открытым.

§ 6.7. Экспериментальное исследование маломодового хаоса

Анализ общих свойств динамических систем позволил выдвинуть предположение, что сложные стохастические режимы в нелинейных средах часто связаны не с возбуждением бесконечного числа гармоник, как это считалось ранее, а со сложным взаимодействием нескольких переменных, т. е. со странным аттрактором небольшой размерности [136, 167]. Подчеркнем, что это предположение носит общий характер и относится не только к переходу от ламинарных к турбулентным течениям в гидродинамике, но и к стохастическим режимам в колебательных химических реакциях, к ряду систем в нелинейной оптике, ко многим другим явлениям. Развитые в последние годы алгоритмы анализа фракталей, странных аттракторов позволили перейти к экспериментальной проверке этого предположения.

Одной из систем, в которой наблюдается переход от упорядоченного ламинарного режима к хаотическому турбулентному, является течение Куэтта – Тейлора. Это течение жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами высоты L , радиусы которых равны a и b . Внешний цилиндр вращается с угловой скоростью Ω_2 , внутренний – со скоростью Ω_1 . Число

Рейнольдса в такой задаче определяется по формуле $Re = \Omega_1 a(b - a)v^{-1}$ при $\Omega_2 = 0$ (v – кинематическая вязкость).

При небольших числах Рейнольдса движение жидкости ламинарно, его можно описать явной формулой. Далее при увеличении частоты Ω_1 возникают диссипативные структуры – так называемые вихри Тейлора. При увеличении частоты вращения вихри Тейлора теряют устойчивость, движение жидкости становится периодическим (аналог предельного цикла). При еще больших числах Рейнольдса возникает двухчастотный режим (аналог инвариантного тора) и далее при $Re = Re_c$ движение становится турбулентным. Таким образом, переход к хаосу, наблюдаемый в эксперименте при определенных значениях Ω_1, a, b, L, v , происходит в соответствии со сценарием Рюэля–Такенса [265].

Для анализа этого течения была предложена эффективная экспериментальная техника, связанная с лазерной доплеровской спектроскопией. Измеряя доплеровский сдвиг лазерного луча, проходящего через жидкость, можно измерить одну из компонент скорости в данной точке. Последовательные измерения этой компоненты дают массив a_1, \dots, a_N . В работе [225] проводилась статистическая обработка более 32 тыс. точек. Рассматривая переменную $a_i(t)$, можно выделить среднее время T , через которое эта переменная принимает одно и то же значение $a(\frac{da}{dt} > 0)$ (в динамических системах это среднее время возвращения на плоскость Пуанкаре). В эксперименте выбирался временной интервал $\sim 300 T$ (300 орбит), примерно по 100 точек на орбите ($\Delta t \sim 10^{-2} T$). По этим данным были вычислены корреляционный показатель, положительные ляпуновские показатели и независимо рассчитана топологическая энтропия. По ним же оценивалась размерность аттрактора изучаемой системы. Оказалось, что при увеличении числа Рейнольдса ($Re > Re_c$) размерность аттрактора увеличивается, однако в интервале $Re_c \leq Re \leq 1,3 Re_c$ она не превышает 5,4. Таким образом, было убедительно показано, что в изучаемой бесконечномерной системе существует маломодовый хаос. Предположение о наличии странного аттрактора

небольшой размерности, описывающего течение Куэтта – Тейлора, оказывается справедливым. Этот важный экспериментальный результат указывает на принципиальную возможность описания таких явлений с помощью сравнительно небольшого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Близкие закономерности имеют место и для течения жидкости между вращающимися сферами [205, 206]. Такая система представляет интерес в связи с задачами физики атмосферы.

Другой пример перехода от диссипативных структур к турбулентным режимам дает конвекция Рэлея – Бенара, происходящая в подогреваемом снизу слое жидкости [322]. Обработка соответствующего эксперимента проводилась по 15 тысячам измерений, проведенных с интервалом Δt ($T/\Delta t \sim 2 \div 10$). По ним определялся корреляционный показатель. Вначале задавалась размерность p ζ -векторов и рассчитывался корреляционный показатель ν , далее величина p увеличивалась до тех пор, пока значение ν не переставало меняться. Отметим, что в работе расчет проводился не по всем N^2 расстояниям, а по расстояниям от n_1 точек до остальных точек множества (в работе [322] $n_1 = 100$, в работе [275] $n_1 = 15$). Этот прием, позволяющий намного сократить объем вычислений, но уменьшающий точность определения величины ν , широко используется в настоящее время в физических работах. Экспериментальное исследование рэлей–бенаровской неустойчивости показало, что во многих конвективных течениях турбулентный режим определяется странным аттрактором небольшой размерности ($2,5 \leq \nu \leq 6$). Увеличение числа Рейнольдса или переход к системам, где нужен учет других усложняющих факторов, обычно приводит к росту размерности [322].

В упоминавшихся работах рассматривалось движение жидкости в ограниченном объеме, поэтому естественно ожидать, что из-за вязкости движение на малых масштабах будет подавляться и аттрактор окажется конечномерным. В связи с этим особый интерес представляет экспериментальное исследование стохастических течений, в которых движение жидкос-

ти происходит в неограниченной области. Примерами могут служить движение периодически возбуждаемой изотермической реактивной струи [223] и течение типа «затопленной струи» [73]. В этих работах были вычислены корреляционные показатели и изучено, как меняется поведение системы при изменении пространственной координаты. Оказалось, что и здесь движение определяется странным аттрактором небольшой размерности.

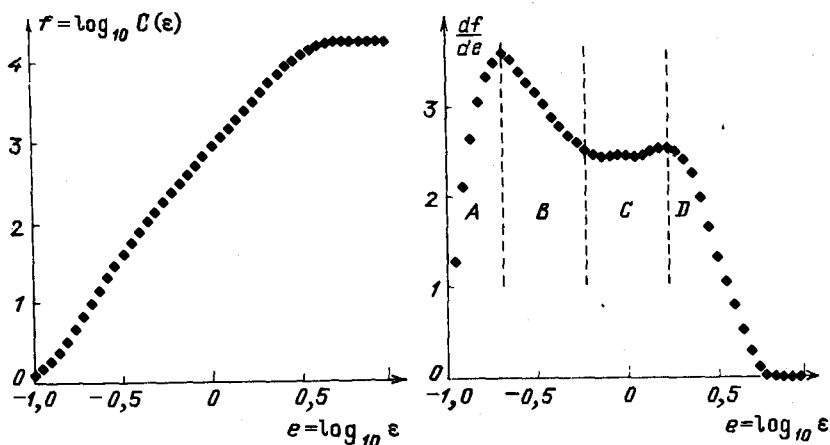


Рис. 6.20

Результаты натуральных и вычислительных экспериментов, в которых исследовался маломодовый хаос, позволяют по-новому взглянуть на явление турбулентности, на роль фракталей и странных аттракторов в естествознании. Успех анализа хаотических режимов зависит от того, насколько успешно решен ряд методических вопросов. Обратим внимание на некоторые из них.

В большинстве упоминавшихся выше работ по временному ряду измерений вычисляется корреляционный показатель. Типичная зависимость корреляционного интеграла и тангенса наклона кривой $f = \log_{10} C$ от величины $e = \log_{10} \epsilon$, приведенная в работе [226], представлена на рис. 6.20. В этой

статье проводилась обработка данных, полученных в натурном эксперименте при анализе течения Куэтта – Тейлора. На кривой, определяющей зависимость $s = df/de$ можно выделить четыре области, они типичны для гидродинамических и ряда других задач.

Область А. В этом интервале масштабов размеры ячеек слишком малы. В каждую ячейку обычно попадают всего несколько точек, они не позволяют оценить вероятности p_i .

Область В. В этой области выборка недостаточна, чтобы передать канторову структуру аттрактора. Кроме того, в ней обычно существенна погрешность эксперимента или точность, с которой известны точки аттрактора.

Область С. Точки кривой в этом интервале характеризуют фрактальную размерность аттрактора. Чтобы расширить область С, можно увеличить размер выборки, повысить точность эксперимента, наилучшим образом выбирать переменные, которые будут анализироваться, или применять специальные методы обработки экспериментальных данных.

Область D. Размеры ячеек разбиения стремятся к размерам аттрактора и не характеризуют его канторову структуру.

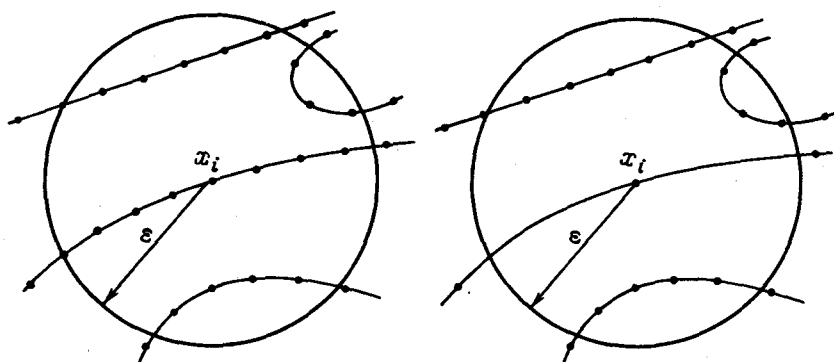


Рис. 6.21

При исследовании странных аттракторов более высокой размерности картина оказывается близкой, однако с увеличением размерности уменьшается длина участка С. Для того,

чтобы увеличить ее, часто используют прием, предложенный в работе [380].

Пусть выборка невелика: $N < 2\tau^{m/2}$, где τ – время убывания автокорреляционной функции (в единицах Δt), m – размерность вложения. Тогда при малых значениях ϵ в каждой ячейке разбиения будут преобладать точки, лежащие на том же участке траектории (см. рис. 6.21). На этих масштабах аттрактор будет выглядеть как одномерная кривая. Зависимость $\log_2 C = f(\log_2 \epsilon)$ в этом случае окажется искаженной. Соседние точки на траектории, попадающие в одну ячейку покрытия, при обработке таких экспериментальных данных не отражают свойства аттрактора, а характеризуют только способ выбора Δt . Чтобы восстановить зависимость $C(\epsilon)$, отражающую свойства аттрактора, нужно просто не учитывать ближайших соседей, лежащих на одном отрезке траектории. Это можно сделать, если модифицировать соотношение (6.63) для корреляционного интеграла следующим образом:

$$C(r, N, W) = \frac{2}{N^2} \sum_{n=W}^N \sum_{i=1}^{N-n} \theta(r - |x_{i+n} - x_i|). \quad (6.83)$$

При $W = 1$ формула (6.83) переходит в стандартное выражение для корреляционного интеграла. Значение $W > 1$ соответствует отбрасыванию того или иного числа ближайших соседей на траектории. Естественно отбрасывать число точек W , пропорциональное τ (именно они и лежат на линейном участке). Тестовые примеры, разобранные в статье [380], показывают, что в качестве W лучше брать величину $\tau \ln(m/2)$.

Вычисляя C по этой формуле, можно «убрать одномерный участок» и получить зависимость, близкую к той, которая характеризует канторову структуру изучаемого множества. Во многих случаях, и в частности при анализе гидродинамических систем, этот прием оказывается очень полезным.

В работе [140] он используется при исследовании турбулентных режимов течения вязкой жидкости в круглой трубе при $Re = 4000$. Зависимости $x(t)$ в этом случае были получе-

ны в результате вычислительного эксперимента. В качестве $x(t)$ используются различные компоненты скорости в нескольких точках.

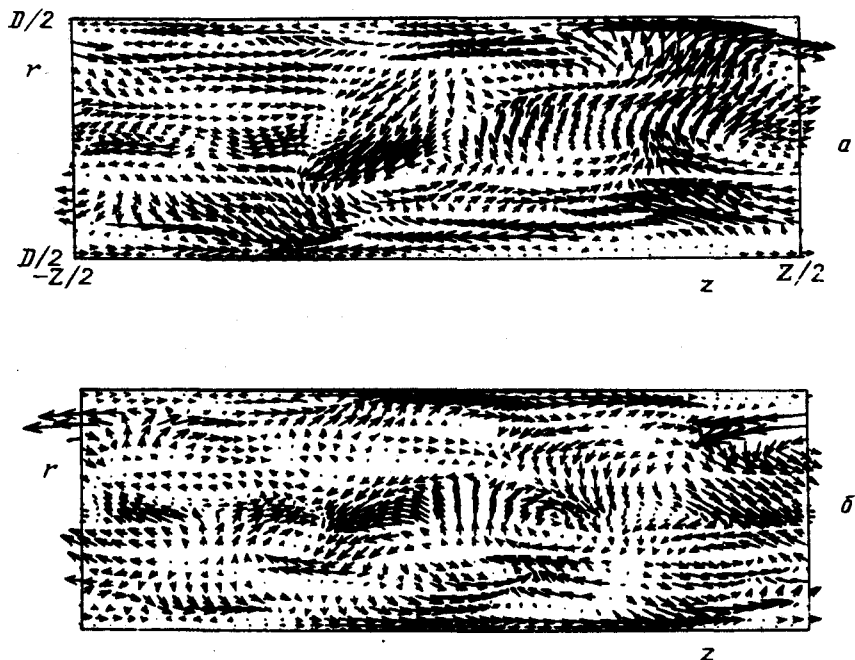


Рис. 6.22

На рис. 6.22 показана типичная картина течения в бесконечной круглой трубе, полученная в расчете. Решалась трехмерная краевая задача для уравнения Навье – Стокса. Показаны мгновенные отклонения от средних значений скорости в каждой точке на один момент времени в двух перпендикулярных плоскостях, проходящих через ось трубы. Результаты этого расчета были любезно предоставлены авторам В.Г.Приймаком. Обширная библиография, касающаяся трехмерных гидродинамических расчетов, приведена в работе [Д20].

Интервал дискретизации Δt ($x(n\Delta t) = x_n$) выбирался с помощью критерия, в котором используется взаимная информация (6.82). При расчете корреляционного интеграла исполь-

звалась формула (6.74). Обработывались выборки длиной $2 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^4$.

Зависимость $\ln C = f(\ln \epsilon)$ для различных компонент скорости и тангенса наклона от $\ln \epsilon$ в одной точке трубы показана на рис. 6.23. Видно, что $\nu = 15 \pm 2$. В силу того, что размерность достаточно велика, длина линейного участка мала. Увеличение размерности вложения (до тех пор, пока она не слишком велика) практически не меняет наблюдаемой картины.

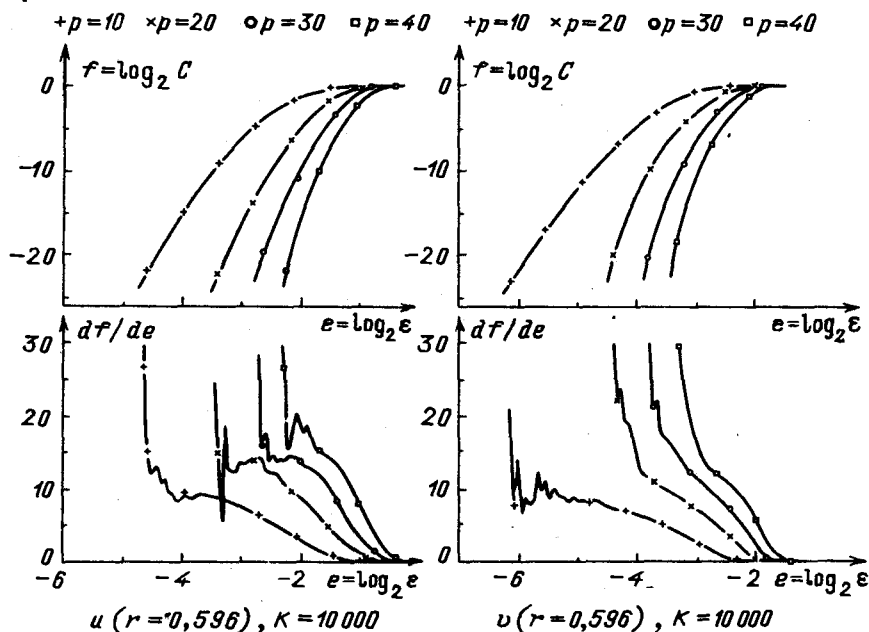


Рис. 6.23. Зависимость корреляционного показателя и локального наклона, рассчитанного по z и x -компонентам скорости, в точке с радиальной координатой $r = 0,596$ (в единицах $D/2$). Видно, что значение ν , определенное тангенсом наклона линейного участка, практически не зависит от размерности вложения. Длина выборки $N = 10^4$

Интересно, как будут меняться количественные характеристики течения, если мы будем измерять скорость в разных точках трубы. Очевидно, эти скорости будут меняться в разных пределах, поэтому в каждом случае надо заново выбирать значения Δt . На рис. 6.24 показано, как меняется наклон

кривой $\ln C = f(\ln \epsilon)$ в разных точках трубы. В пределах точности расчетов корреляционный показатель, вычисленный по одной из компонент скорости в различных точках, оказывается одним и тем же.

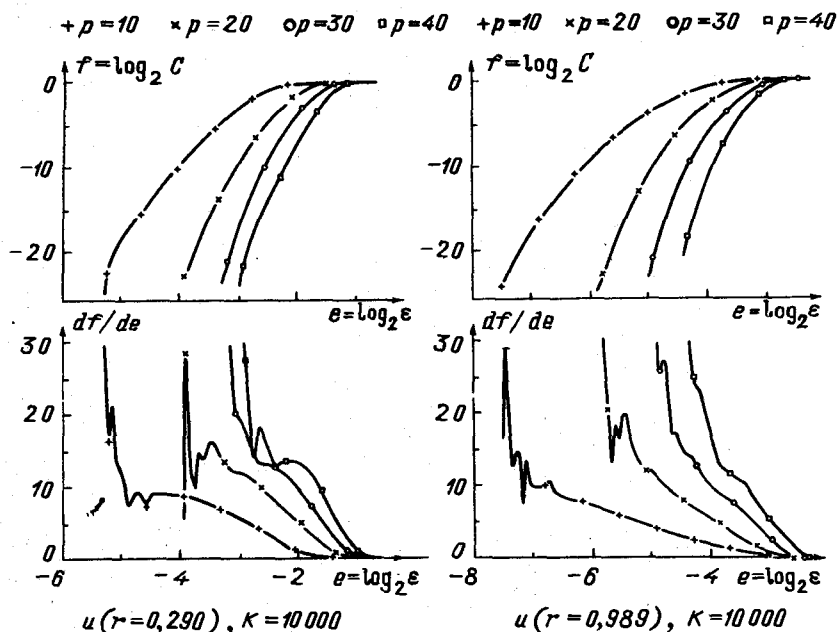


Рис. 6.24. Зависимость корреляционного показателя и локального наклона, рассчитанная по z -компонентам скорости в точках с радиальными координатами $r = 0,290$ и $r = 0,989$

В настоящее время очень мало известно о геометрии аттракторов даже небольшой размерности. Нет и простых наглядных образов, позволяющих представить такие множества. Вместе с тем во многих случаях геометрические характеристики оказываются очень полезными.

Приведем пример, связанный с обсуждавшейся выше задачей. При изучении геометрии аттракторов в теории динамических систем полезную информацию дает использование так называемого базиса Карунена – Лоева $\{\xi_n\}$ [140], состоящего из собственных векторов матрицы ковариаций

$$A\xi_n = -\lambda_n \xi_n; \quad \lambda_n \geq \lambda_{n+1}; \quad A_{i,j} = \sum_k x_{k,i} \cdot x_{k,j} = \sum_k U(t_k + (i-1)\Delta t) U(t_k + (j-1)\Delta t); \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Здесь $\{x_n\}$ – анализируемая выборка, представляющая набор ζ -векторов, построенных по значениям величины U , измеряемой в моменты $t_k, t_k + \Delta t, \dots$. Обычно $t_k = k\Delta t$; A – матрица $p \times p$, $x_{k,i}$ – i -я координата вектора x_k .

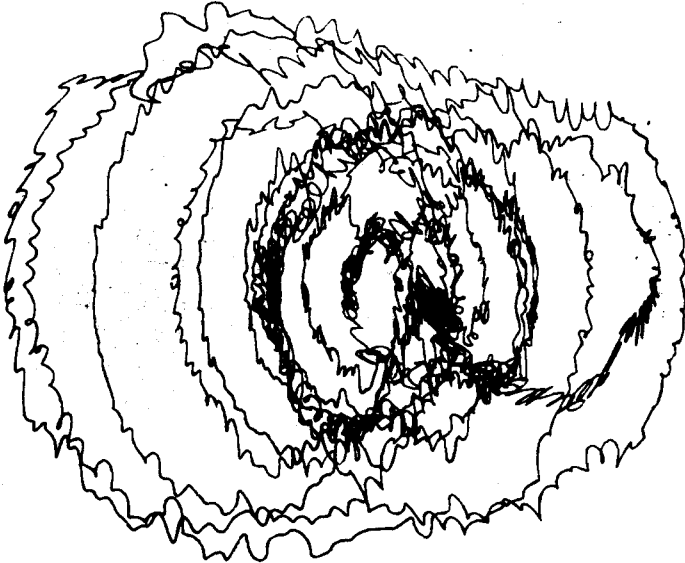


Рис. 6.25

На рисунке 6.25 показана проекция отрезка траектории аттрактора на плоскость (ξ_1, ξ_2) . Траектория построена по значениям z -компоненты скорости в точке с радиальной координатой $r = 0,596$. Наблюдаемая картина ясно указывает на существование быстрого и медленного временных масштабов. Быстрым движениям соответствует мелкая рябь на отвечающих медленным движениям орбитах большого диаметра. Это подтверждают и результаты частотного анализа [140].

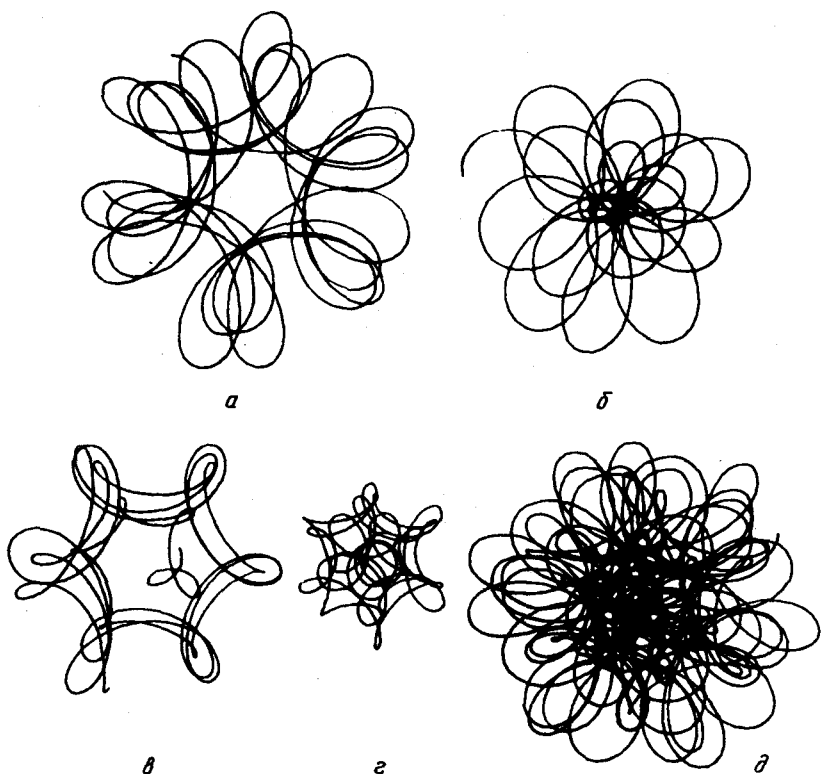


Рис. 6.26

Анализ проекций аттрактора на различные плоскости (ξ_r, ξ_j) позволяет обратить внимание на следующую интересную закономерность. Будем следить (рис. 6.26) в течение небольших, следующих друг за другом, интервалов времени за проекцией той же траектории (ξ_3, ξ_4). На каждом интервале времени траектория ведет себя простым регулярным образом, как если бы она лежала в окрестности сложного цикла или инвариантного тора. В течение следующего промежутка времени она оказывается в окрестности другого неустойчивого цикла (тора). В итоге на больших временах проекция выглядит как беспорядочный клубок траекторий. Заметим, что похожая картина уже наблюдалась при исследовании более прос-

тых динамических систем, у которых странные аттракторы оказываются «пронизаны» множеством неустойчивых циклов. Имеющаяся выборка оказалась достаточной для оценки корреляционного показателя, но она слишком коротка для оценки даже старшего ляпуновского показателя.

При анализе течения Куэтта – Тейлора [226] и течения между вращающимися сферами [205] в определенной области параметров можно было оценить количественные характеристики турбулентных режимов. В случае аттракторов большой размерности многие алгоритмы становятся неэффективными. Поэтому в ряде работ предлагаются другие методы вычисления фрактальной размерности [228]. Однако в некоторых гидродинамических задачах оценить фрактальную размерность, пользуясь современными компьютерами и численными методами, не удастся. Такова, например, задача о течении между двумя плоскостями при $Re = 2600$ [227] и о течении вязкой жидкости в круглой трубе с $Re = 28500$ [369].

Другая проблема, возникающая при обработке экспериментальных данных, связана с тем, что во многих случаях длина выборки оказывается малой.

При оптимальном выборе Δt , небольшой размерности аттрактора и высокой точности данных в некоторых случаях удается оценить не только корреляционный показатель, но также обобщенные размерности и α -спектр по экспериментальным данным, пользуясь небольшими выборками. Пример такого исследования дает работа [214], в которой изучался временной ряд, полученный в результате анализа рентгеновского излучения нейтронной звезды Нег Н-1. Эта звезда входит в двойную систему. Из-за сильного гравитационного поля она притягивает часть вещества другой звезды. Вещество движется вдоль силовых линий магнитного поля и замедляется вблизи поверхности, что приводит к появлению рентгеновского излучения.

Удачный выбор Δt и использование формулы (6.66) позволяет построить α -спектр аттрактора, пользуясь малой выборкой $N < 10^3 \div 2 \cdot 10^3$.

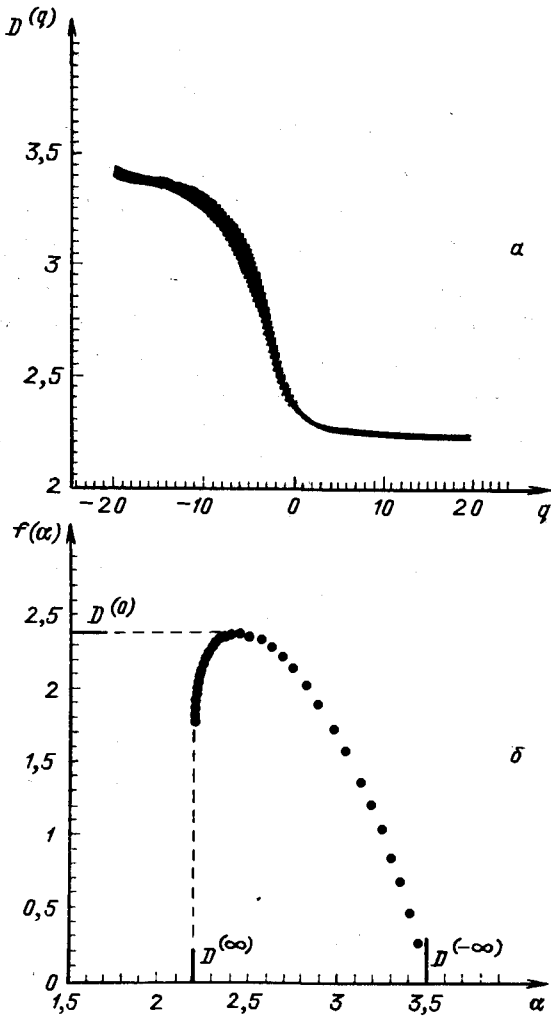


Рис. 6.27. а) Обобщенные размерности; б) α -спектр после сглаживания. Длина выборки $N = 2000$. Доверительные интервалы для величин D_q показаны вертикальными штрихами

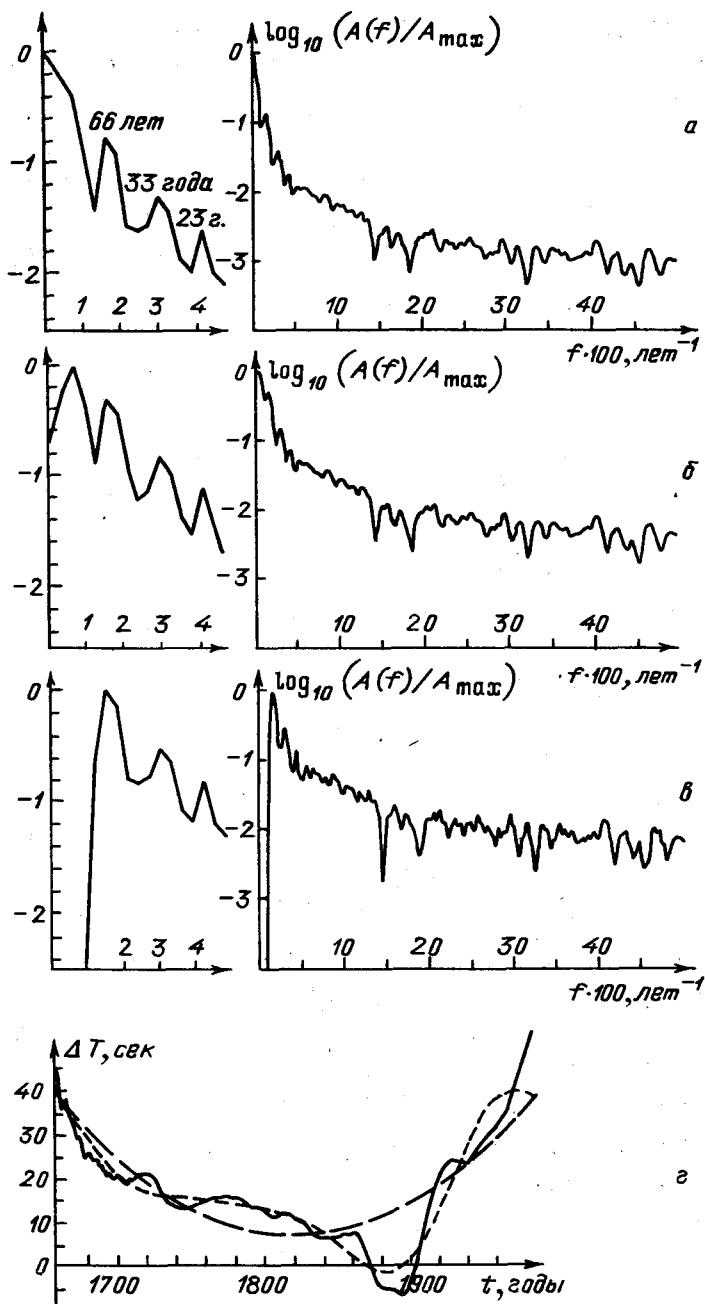


Рис. 6.28. а) Спектр данных ΔT ; б) спектр после удаления параболического тренда; в) удален спектральный тренд; г) данные ΔT (сплошная линия), параболический тренд (длинный штрих) и «спектральный» тренд (короткий штрих)

Вид этого спектра показан на рис. 6.27. Хаусдорфова размерность в этом случае не превышает 3, что позволяет надеяться на построение сравнительно простой модели явления. Знание геометрических свойств аттрактора, определяемых α -спектром, в этом случае будет полезно при сравнении результатов моделирования с данными наблюдений.

Однако типичной является другая ситуация. Обычно по небольшой выборке удается только грубо оценить, какова фрактальная размерность, выяснить, имеем ли мы дело с периодическим режимом, инвариантным тором или странным аттрактором.

Пример такой постановки дает работа [69], в которой рассматриваются данные о вариациях продолжительности суток в период с 1656 по 1984 г. В изучаемой выборке около 700 элементов. В этой и многих других системах возможность отличить хаотический режим от периодического зависит от отношения $\Delta t/T$. Обычно для этого требуется дополнительная информация. В частности, в обсуждаемой работе было показано, что методика, связанная с определением корреляционного показателя, оказывается эффективной, если основной период колебаний лежит в интервале от 2 до 25 лет, и не дает информации о колебаниях, период которых превышает 100 лет.

Распространенной процедурой при обработке экспериментальных данных является исключение медленно меняющейся составляющей – удаление тренда. Например, в данных о вариациях длины суток амплитуда низкочастотных гармоник порядка сотен лет достаточно велика (см. рис. 6.27). Однако, следуя работе [329], естественно считать, что они обусловлены не поведением динамической системы, а другими факторами (например, трением, связанным с влиянием океанов). Чтобы не рассматривать действие этих факторов, тренд удаляется. Например, исходя из физических данных, в работе [329] удаляется квадратичный тренд. По имеющимся данным с помощью метода наименьших квадратов строится парабола $z(t) = mt^2 + nt + c$. Далее она вычитается из данных о вариации суток $\Delta T(t)$ и проводится обработка массива

$\Delta T(t) - z(t)$. На рис. 6.28 показан спектр данных, полученных в результате удаления тренда. Заметно уменьшение амплитуд низкочастотных колебаний.

Вместе с тем видно, что удаление тренда с помощью квадратичного полинома (см. рис. 6.28) не позволяет в достаточной мере избавиться от таких составляющих. Это можно сделать, если непосредственно исключить несколько низкочастотных гармоник (удаление спектрального тренда). В данном случае гармоник, соответствующих периодам, превышающим 100 лет (где $z_s(t) - 330, 165$ и 110 лет), а также постоянную составляющую. Обработка этой последовательности дает корреляционный показатель $\nu = 1,9 \pm 0,2$, что говорит о наличии двухчастотного режима или странного аттрактора.

Удаление тренда обычно меняет значения корреляционного показателя. Поэтому для того, чтобы определенным образом обрабатывать экспериментальные данные, нужно либо иметь информацию о том, какая их обработка допустима, либо в явном виде формулировать сделанные предположения. Были предложены и другие способы обработки данных, чтобы наилучшим образом определять корреляционный показатель ν .

Другой распространенной процедурой является фильтрация, обычно помогающая избавиться от аппаратного шума или малых флуктуаций, не связанных с поведением динамической системы. Остановимся подробнее на этом вопросе.

Обычно при экспериментальном исследовании динамического хаоса в той или иной мере присутствует шум. Он может быть связан с несовершенством аппаратуры, малыми флуктуациями изучаемого процесса или другими факторами.

Анализ одномерных отображений с шумом позволяет выяснить, как будет влиять шум на притягивающее множество [57, 328]. Допустим, мы имеем дело с аттрактором, который обладает канторовой структурой (для определенности – аттрактором Фейгенбаума). В случае без шума, увеличивая уровень разрешения δ , мы будем наблюдать все большее количество «островов», в которых лежат точки изучаемого множества $n \sim -\ln \delta$. При $\delta \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. В системе с шумом число этих

островов будет расти только до определенного предела $\bar{n}(\epsilon)$. Чем меньше ϵ , тем больше \bar{n} . В некоторых случаях это удается строго показать.

Если n достаточно велико, то в определенном интервале $\underline{\epsilon} < \epsilon < \bar{\epsilon}$ кривая, определяющая зависимость логарифма корреляционного интеграла $\ln C$ от величины $\ln \epsilon$, имеет линейный участок. В этом интервале значений ϵ геометрию притягивающего множества характеризует корреляционный показатель. При $\epsilon < \underline{\epsilon}$ увеличение размерности пространства, в которое вкладывается аттрактор, приводит к росту тангенса наклона линейного участка кривой.

Типичные ситуации удобно проиллюстрировать следующим примером [69]. Пусть в системе реализуется простейший двухчастотный режим, на который накладывается равномерно распределенный шум амплитуды δ ($\max_t |\delta(t)| = \delta$):

$$x(t) = a \sin \omega_1 t + b \sin \omega_2 t + \delta(t) \quad (6.84)$$

(мы считаем, что выборка достаточно велика).

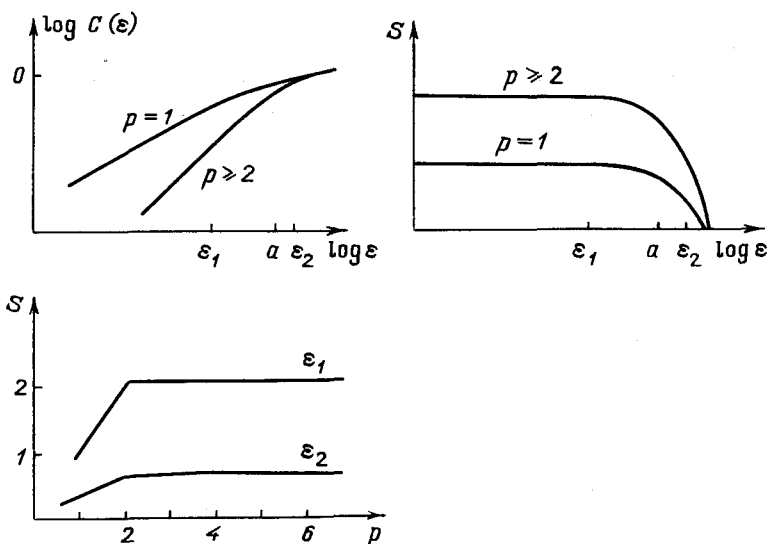


Рис. 6.29. Двухчастотный режим, $a \sim b$, шум отсутствует

Когда $\delta(t) = 0$ и $a \sim b$, то зависимость логарифма корреляционного интеграла от $\log \epsilon$ имеет вид, представленный на рис. 6.29 слева (справа показан локальный наклон этой кривой),

$$s = d \log C(\epsilon) / d \log \epsilon.$$

На рис. 6.29 внизу представлена зависимость локального наклона кривой $\ln C = f(\log \epsilon)$ соответственно при $\epsilon = \epsilon_1$ и $\epsilon = \epsilon_2$ от размерности пространства p , в которое вкладывается аттрактор. (В случае небольших выборок участок кривой $\log C = f(\log \epsilon)$, наиболее близкий к линейному, может смещаться вдоль оси $\log \epsilon$. Это может приводить к неверной оценке корреляционного показателя. Поэтому в ряде случаев удобно следить за локальным значением наклона $s(\epsilon) = \frac{df(\log \epsilon)}{d(\log \epsilon)}$). Видно, что при $\epsilon = \epsilon_2$ кривая $\log C = f(\log \epsilon)$ выходит на плоский участок, что обусловлено близостью значения ϵ к характерным размерам аттрактора, поэтому график $s(\epsilon_2)$ не характеризует его геометрических свойств.

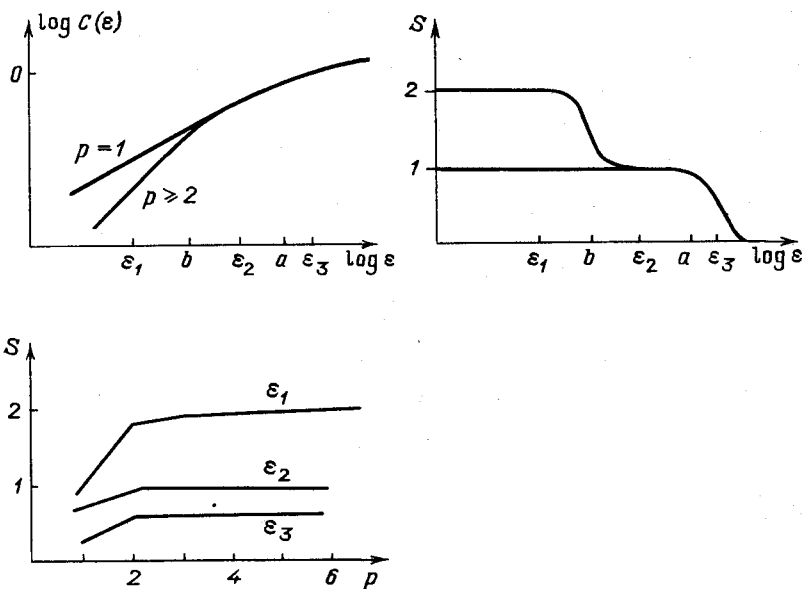


Рис. 6.30. Двухчастотный режим, $b \ll a$, шум отсутствует

Если $b \ll a$ и $\delta = 0$, то размерность аттрактора определяется поведением $C(\varepsilon)$ при $\varepsilon < b$, а при $a > \varepsilon > b$ мы получим, что $\nu \sim 1$ (рис. 6.30).

Пусть теперь в системе имеется шум и $b \sim a \gg \delta$. В этом случае можно установить и размерность аттрактора (здесь $\nu = 2$) и амплитуду шума (рис. 6.31).

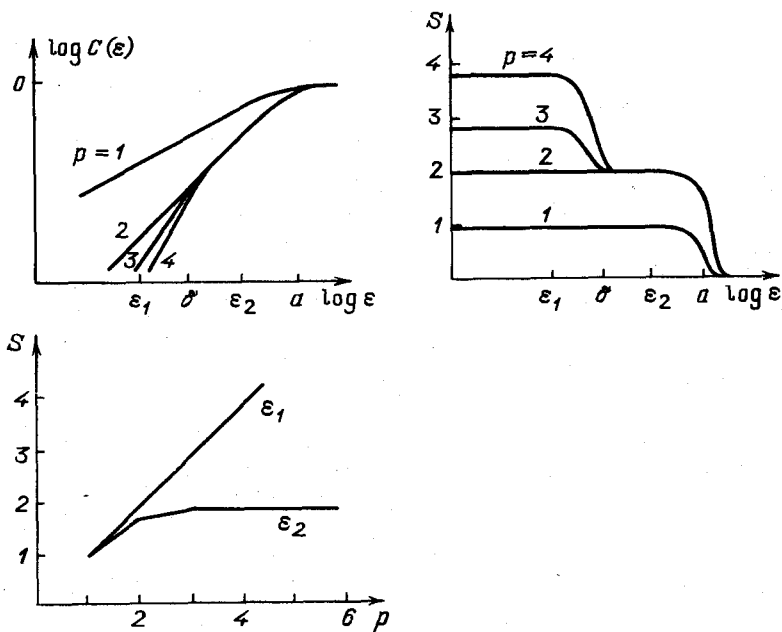


Рис. 6.31. Двухчастотный режим $a \sim b$, амплитуда шума $\delta \ll a$, $\delta \ll b$

Когда же $a \gg \delta \gg b$, зависимость будет такой, как показано на рис. 6.32. Здесь можно установить амплитуду шума, однако нельзя выяснить, какова размерность аттрактора (шум слишком велик для выяснения структуры аттрактора).

Дифференцирование данных и их сглаживание может существенно изменить результаты вычисления фрактальной размерности аттрактора даже при отсутствии шума. Чтобы про-

иллюстрировать этот факт, в работе [217] был предложен следующий наглядный пример. Пусть, для определенности, изучается динамика процесса, описываемая системой трех дифференциальных уравнений, имеющей странный аттрактор:

$$\dot{x} = f(x). \quad (6.85)$$

Пусть этот аттрактор характеризуется ляпуновскими показателями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$.

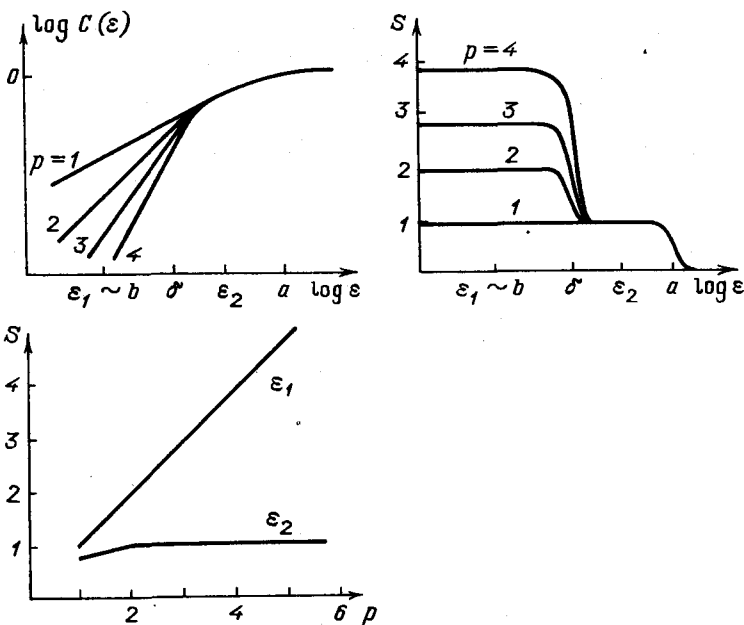


Рис. 6.32. Двухчастотный режим $b \ll \delta \ll a$

Как правило, измерительный прибор обладает некоторой инерционностью, поэтому можно считать, что измеряется не одна из компонент вектора x , а величина z , получающаяся в результате усреднения по некоторому временному интервалу τ . (То же происходит, если полученные данные сглаживают—

ся.) Измерительный прибор в этой ситуации естественно моделировать с помощью интегрирующего фильтра

$$\dot{x} = f(x),$$

$$\ddot{z} = -dz + g(x), \quad d = 1/\tau.$$

В отличие от исходной, эта система имеет ляпуновские показатели λ_1 , λ_2 , λ_3 и d . Ляпуновская размерность аттрактора, вычисленная по формуле Каплана - Йорке, равна

$$d_L = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}.$$

Такой же она оказывается, если $d > |\lambda_3|$.

Пусть теперь $|\lambda_3| < d$ и $\lambda_1 < d$. В этом случае

$$d_L = 2 + \lambda_1/d.$$

При $\lambda > d$

$$d_L = 3 + \frac{\lambda_1 - d}{\lambda_3}.$$

Проведенные расчеты для ряда конкретных динамических систем хорошо согласуются с этими формулами [217]. Таким образом, в идеальном случае в отсутствие шума сглаживание данных может изменить измеряемую размерность аттрактора. Это приводит к необходимости методических исследований, позволяющих выяснить, какие способы обработки данных допустимы в изучаемом случае.

В случае с шумом ситуация оказывается еще более сложной. Например, в работе [69] приведен следующий пример. На синусоиду накладывается равномерно распределенный шум небольшой амплитуды. Далее производится численное дифференцирование и сглаживание с параметрами, которые использовались при обработке экспериментальных данных [329]. Корреляционный показатель, рассчитанный по обработанным данным, близок к двум. Поэтому вместо того, чтобы установить, что изучается одночастотный режим с шумом, данные будут интерпретироваться как двухчастотный режим или странный аттрактор.

§ 6.8. О задачах прогноза поведения хаотических систем

Рассматривая системы с хаотическим поведением, мы сталкиваемся с необходимостью сравнивать результаты предсказаний с наблюдениями. Если система обладает чувствительностью к начальным данным, то со временем предсказываемая и наблюдаемая траектории будут расходиться, даже если модель хорошо описывает систему. Кроме того, во многих биологических и химических системах неизвестны уравнения или отображения, определяющие их поведение. В тех же случаях, когда уравнения известны (например, в гидродинамических задачах), часто неизвестны начальные данные, что также затрудняет предсказание.

Поэтому интерес представляют модели, позволяющие по данным наблюдений предсказывать на определенный промежуток времени поведение системы на основе ее предыстории. Приведем простейший пример такой феноменологической модели.

Пусть динамика некоторой системы с хаотическим поведением определяется одномерным отображением $x_{n+1} = f(x_n)$ с положительным ляпуновским показателем, и нам известна часть последовательности $\{x_n\}$: x_1, \dots, x_n . Чтобы предсказать x_{n+1} , можно поступить следующим образом. По точкам x_1, \dots, x_n на плоскости (x_n, x_{n+1}) строится кривая $x_{n+1} = \tilde{f}(x_n)$ (при этом можно воспользоваться тем или иным алгоритмом интерполяции). Кривую $\tilde{f}(x)$ естественно рассматривать как приближение кривой $f(x)$. Тогда отображение

$$x_{n+1} = \tilde{f}(x_n)$$

представляет собой некоторую модель изучаемого процесса. Она позволяет приближенно предсказывать x_{n+1} ($x'_{n+1} = \tilde{f}(x_n)$), x_{n+2}, \dots, x_{n+k} и т. д. Однако, если среднее значение производной $(\frac{\partial f}{\partial x}) > 1$ в точках траектории (что типично для хаотических режимов), то ошибка предсказания с ростом k будет расти. Это же свойство характерно и для ис-

ходной системы, если x_n известно с некоторой погрешностью. Тем не менее, несколько ближайших значений величины x могут быть предсказаны с помощью этой модели. Таким образом, мы получаем прогноз поведения рассматриваемой нелинейной системы.

В работе [260] аналогичный подход был развит для систем более высокой размерности. Чтобы предсказывать значение x_{n+1} по x_n, x_{n-1}, \dots предлагается строить так называемые *локальные предикторы*. В пространстве векторов выбирается некоторая норма, затем ищутся s ближайших по этой норме соседей, далее по ним проводится линейная (или более сложная) интерполяция функции $f(x_{k+1} = f(x_k), k = 1, \dots, n)$; это дает приближенное значение $f(x_n)$.

В статье [260] этот подход был применен к анализу экспериментальных данных, характеризующих течение Куэтта – Тейлора, конвекцию Рэлея – Бенара и уравнение с запаздыванием (в первых двух случаях фрактальная размерность аттрактора менялась от 2 до 3). Проведенные тесты показали, что в тех случаях, когда размерность вложения существенно больше, чем фрактальная размерность аттрактора, локальные предикторы дают лучшие результаты, чем стандартный подход, связанный с глобальной аппроксимацией по всем N точкам выборки. В этой работе также приводится оценка погрешности полученных таким образом предсказаний.

Таким образом, знание фрактальной размерности позволяет не только оценить число параметров порядка, которые необходимо учитывать при построении упрощенных моделей, но и помогает построить феноменологические модели, дающие прогноз поведения нелинейных систем.

Г Л А В А 7

ПЕРЕХОД К ХАОСУ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В прошлом веке основное внимание при построении математических моделей уделялось гамильтоновым системам, которые характерны для задач небесной механики. Однако в тридцатые годы нашего века появился большой класс задач, связанных с исследованием диссипативных систем. Их появление было обусловлено быстрым развитием радиотехники и теории колебаний. Эффективной моделью, позволяющей объяснить многие наблюдаемые явления, оказалась система двух обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= P(X, Y, \lambda), \\ \frac{dY}{dt} &= Q(X, Y, \lambda).\end{aligned}\tag{7.1}$$

Класс нелинейных функций P и Q может быть очень широким, однако при моделировании реальных систем естественно использовать такие P и Q , при малых возмущениях которых решение качественно не меняется. Их и надо рассматривать в первую очередь. Математическая формулировка таких представлений была дана А.А.Андроновым и Л.С.Понтрягиным и привела к понятию *грубости* или *структурной устойчивости* системы [4].

Это понятие является общим для многих разделов математики и пояснить его можно на простом примере семейства

функций, зависящих от одного параметра:

$$F(x, \varepsilon) = 0. \quad (7.2)$$

Рассмотрим для примера две различные функции F (рис. 7.1, а, б). Легко видеть, что число корней первой функции не изменится при малых деформациях кривой. Во втором случае все происходит иначе. Уравнение $F(x) = 0$ имеет два решения, $F(x) + \varepsilon = 0$ — одно (рис. 7.1, в), а $F(x) - \varepsilon = 0$ — три решения, сколь малым мы ни выбирали бы положительное число ε . Систему, описываемую уравнением (7.2), в которое входит функция, показанная на рис. 7.1, б, естественно отнести к негрубым. Две другие функции F характеризуют грубые системы. Грубые случаи иногда также называют *случаями общего положения*.

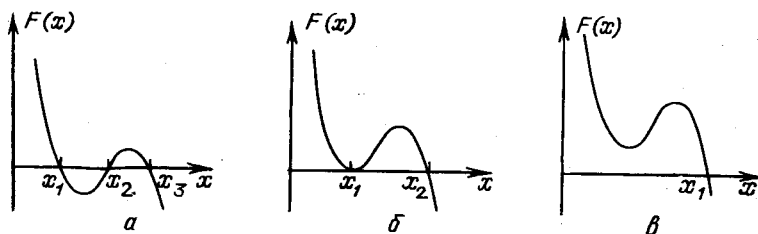


Рис. 7.1

Рассматривая какую-нибудь конкретную модель, всегда можно считать, что она является грубой. Но если нас интересует целое семейство моделей, зависящих от параметра λ , то нам иногда будут встречаться и негрубые ситуации. Например, при изменении параметра ε мы переходим от одной грубой системы (см. рис. 7.1, а) к другой (см. рис. 7.1, в) через негрубую (см. рис. 7.1, б).

Понятие грубости связано с разбиением множества динамических систем на некоторые классы (обсуждая рис. 7.1, мы сравнивали функции по числу нулей). Кажется естественным отнести в один класс все системы, которые переводятся друг в друга простейшими заменами переменных. Приняв такое оп-

деление, мы вынуждены считать различными системы $\dot{x} = \alpha x$ и $\dot{x} = (\alpha + \varepsilon)x$, α и ε — постоянные, которые качественно ведут себя аналогично. Это обусловлено тем, что производная правой части дифференциального уравнения в особой точке является инвариантом. Она не меняется при невырожденной замене переменных. Поэтому вводится иное определение, опирающееся на топологические представления. Исходя из него, две динамические системы относят к одному классу, если существует некоторое взаимно однозначное соответствие между фазовыми кривыми первой и второй системы [8, 177]. Понятно, что при таком подходе две упоминавшиеся системы попадут в один и тот же класс.

Можно привести примеры грубых динамических систем на двумерных поверхностях. К ним относятся уравнения, у которых аттрактором является особая точка, если нуль не является собственным значением линеаризованных уравнений в этой точке. Таковы, например, устойчивый фокус или узел (рис. 7.2, а). Для грубых систем характерны также седла (см. рис. 7.2, б), неустойчивые фокусы (см. рис. 7.2, в) и узлы. Если нуль является собственным значением, то при малом изменении параметра обычно изменяется число точек и их устойчивость.

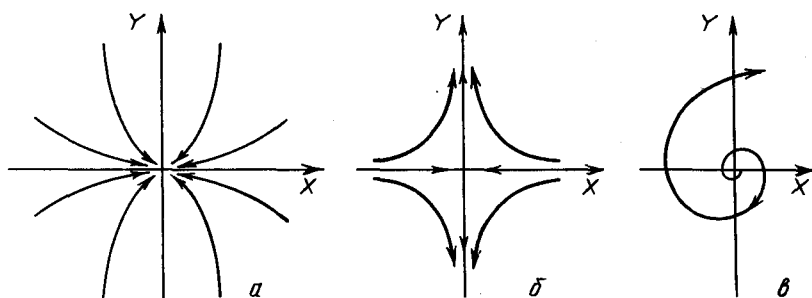


Рис. 7.2

У предельных циклов в грубых системах отображение Пуанкаре не имеет собственных значений, равных единице по модулю. Негрубыми же являются системы вида (7.1), в которых существуют *гомоклинические* (см. рис. 7.3, а) или

гетероклинические траектории (см. рис. 7.3, б). Точка, лежащая на гомоклинической траектории, стремится к одной особой точке как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Гетероклиническая траектория соединяет две особые точки.

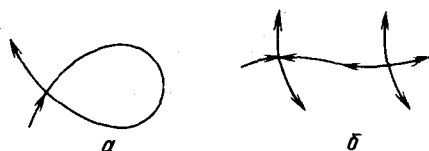


Рис. 7.3

Было доказано, что уравнения (7.1) определяют структурно устойчивые системы, если они имеют конечное число невырожденных особых точек и циклов, а также не имеют гомоклинических и гетероклинических траекторий.

Оказалось, что структурно устойчивые системы вида (7.1) в пространстве всех таких систем образуют открытое всюду плотное множество [8].

Этот важный результат согласуется с интуитивным представлением о том, что сколь угодно близко к негрубым системам в пространстве параметров должны существовать грубые. Подробно рассмотрев грубые системы, можно выяснить все основные типы качественного поведения моделей типа (7.1).

Встает вопрос, можно ли получить аналогичные результаты для систем более высокой размерности. При обобщении условий грубости был введен важный класс грубых многомерных систем — *системы Морса — Смейла*. В уравнениях, которые их определяют, все решения стремятся к периодическим траекториям или особым точкам, как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Число периодических траекторий и неподвижных точек конечно, все они гиперболичны, и их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются только трансверсально (под ненулевым углом). (Точка называется *гиперболической*, когда действительные части всех собственных значений линеаризованной системы отличны от нуля. Цикл

называется *гиперболическим*, если отображение Пуанкаре для него не имеет λ_i с $|\lambda_i| = 1$.)

Принципиальные результаты, касающиеся свойств динамических систем в многомерном случае, были получены С.Смейлом. Они подробно обсуждаются в обзорах [7, 177].

Оказалось, что не все грубые системы являются системами Морса – Смейла. Например, U -системы структурно устойчивы, однако имеют бесконечное число замкнутых траекторий. (Простые примеры U -систем были приведены в гл. 5.) Кроме того, С.Смейлом был построен пример динамической системы, в окрестности которой нет ни одной грубой [8].

Такое поведение связано с наличием хаотических режимов и с возникновением сложных инвариантных множеств (таких, например, как в подкове Смейла).

Эти результаты показывают, что задача полной топологической классификации дифференциальных уравнений достаточно большой размерности не может быть решена. То есть здесь не приходится рассчитывать на построение такой же качественной теории, какая была создана для динамических систем вида (7.1). Это приводит к тому, что изучаются либо модельные уравнения и ситуации, для которых удастся получить строгие результаты [8 – 14], либо анализируются базовые модели, отражающие характерные особенности той или иной области исследований. В качестве примеров можно привести систему Лоренца в гидродинамике [136], уравнения Ресслера в химической кинетике [65], систему Рикитакки в теории земного динамо [Д14], ряд систем в радиофизике и электронике [6, Д7].

Изучение хаотических режимов в динамических системах с непрерывным временем оказалось очень интересной областью исследований. Этот анализ является достаточно сложным и требует широкого использования вычислительного эксперимента. Поэтому число подробно исследованных систем с хаотическим поведением невелико. Тем не менее здесь были обнаружены интересные явления, разработаны новые приемы и методы исследования, развиты важные представления, приме-

нимые ко многим моделям, возникающим при анализе нелинейных диссипативных сред. Обратим внимание на некоторые из них.

§ 7.1. Система Лоренца. Гомоклинический взрыв

По-видимому, системой обыкновенных дифференциальных уравнений, вызвавшей наибольший интерес в последние годы, является система Лоренца. При ее анализе широко использовались методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии, гиперболической теории, других разделов математики. Это позволило развить методы и представления, полезные при изучении странных аттракторов в других динамических системах. Обширную библиографию работ, посвященных модели Лоренца, можно найти в книге [373] и обзоре [12].

Система Лоренца была предложена в качестве упрощенной модели для описания конвекции Бенара в подогреваемом снизу слое жидкости. Движение жидкости в этой задаче зависит от двух безразмерных параметров. Первый параметр – это число Рэлея

$$R = \frac{\alpha g d^3 \Delta T}{\nu \kappa}.$$

Здесь α – коэффициент объемного расширения жидкости; g – ускорение свободного падения; d – толщина слоя жидкости, ΔT – разность температур между нижним и верхним слоем жидкости, ν – вязкость, κ – коэффициент теплопроводности. Второй параметр – число Прандтля

$$Pr = \nu / \kappa.$$

Уравнения, описывающие движение жидкости, имеют равновесное решение, когда жидкость покоится, а ее температура линейно меняется с глубиной. Рэлеи обнаружил, что при $R > R_c = 27\pi^4/4$ это решение неустойчиво, и развивается конвекция.

Применяя метод Галеркина, в простейшем случае можно получить систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений [136]:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $r = R/R_c$, $b = 8/3$. Наиболее подробно исследовались аттракторы на линии $\sigma = 10$.

Система (7.3) диссипативна. Объем V малой области фазового пространства, каждая точка которой движется в соответствии с (7.3), меняется по закону

$$\dot{V} = \Omega V, \quad \Omega = \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(\sigma + b + 1). \quad (7.4)$$

Она обладает следующей симметрией: преобразование

$$X \rightarrow -X, \quad Y \rightarrow -Y, \quad Z \rightarrow -Z$$

не меняет вида уравнений.

При $r < 1$ начало координат является глобально притягивающим, $X \rightarrow 0$, $Y \rightarrow 0$, $Z \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Конвекция отсутствует.

При $r = 1$ у линеаризованной задачи, определяющей устойчивость точки $(0, 0, 0)$, появляется нулевое собственное значение. Происходит бифуркация, в результате которой точка $(0, 0, 0)$ теряет устойчивость, и появляются два симметричных состояния равновесия:

$$X = \pm \sqrt{b(r-1)}, \quad Y = \pm \sqrt{b(r-1)}, \quad Z = r - 1.$$

Пример такой бифуркации показан на рис. 3.2. При дальнейшем увеличении r у устойчивых состояний равновесия появляется пара комплексно-сопряженных собственных значений.

Начало координат при $r > 1$ является седлом, оно имеет два устойчивых и одно неустойчивое направление. Траекто-

рии, входящие в него, вблизи нуля принадлежат некоторой поверхности — *устойчивому многообразию*. Из него выходят две симметричные траектории — *неустойчивые многообразия* нуля. Далее они по спиральям наматываются на устойчивые точки (рис. 7.4, а).

При увеличении параметра r витки спиралей становятся все больше, и при значении $r = r' \approx 13,926$ появляется пара гомоклинических траекторий, двигаясь по которым точки как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к началу координат (рис. 7.4, б).

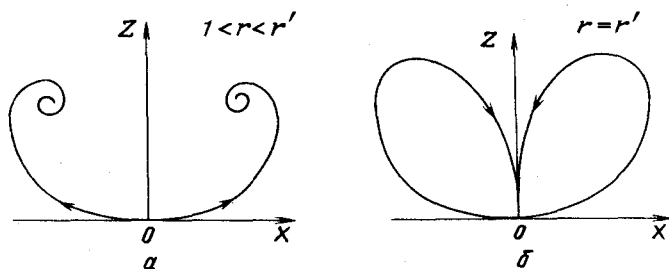


Рис. 7.4

Появление таких траекторий оказывается очень важным. Удобно проследить, как их возникновение меняет динамику системы, рассмотрев маленький кубик вблизи нуля и две трубки, окружающие неустойчивые многообразия нуля.

Следуя книге [373], можно пояснить происходящее с помощью нескольких схем. Рассмотрим маленький прямоугольник $ABCD$ на верхней грани кубика. Точки A и D принадлежат устойчивому многообразию начала координат, и траектории, проходящие через AD , стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$. Поэтому интегральные кривые, проходящие через $ABCD$, будут пересекать боковую грань кубика внутри треугольника MNP (рис. 7.5).

При движении вдоль трубки от боковой грани кубика до верхней на пути траектории нет особых точек. Поэтому треугольник MNP не будет «сильно деформироваться». Образом прямоугольника $ABCD$ после первого возвращения траекторий

на плоскость верхней грани будет треугольник $RB'C'$ (рис. 7.6) (R — точка пересечения правого неустойчивого многообразия с этой плоскостью). Так как при $r = r'$ существует гомоклиническая траектория, то R попадает точно на линию AD (рис. 7.6,б).

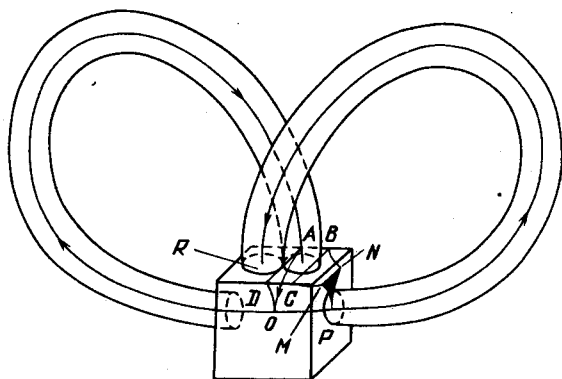


Рис. 7.5

Изменение образа прямоугольника $ABCD$ и симметричного ему $ADEF$ в зависимости от параметра r показано на рис. 7.6. Система Лоренца определяет двумерное отображение верхней грани кубика в себя.

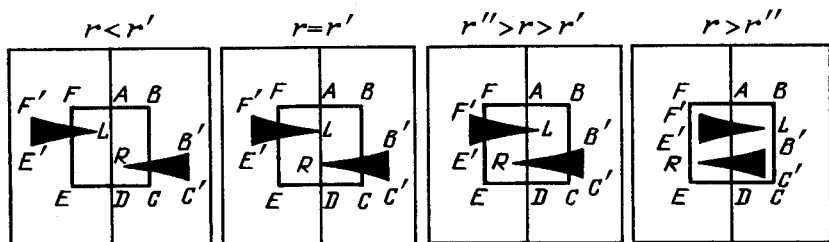


Рис. 7.6

При $r > r'$ происходит растяжение вдоль горизонтального и сжатие вдоль вертикального направления. Такое поведение позволило использовать при исследовании модели Лоренца идеи гиперболической теории [12, 44]. Поскольку пря-

моугольники определенным образом растягиваются и складываются, то можно ожидать, что это двумерное отображение будет вести себя как подкова Смейла и при $r > r'$ породит сложные инвариантные множества.

В самом деле, выберем в прямоугольнике $ABCD$ четыре маленьких симметричных квадрата 1, 2, 3, 4 и посмотрим, каково будет пересечение этих квадратов с их образами $\Psi(1)$, $\Psi(2)$, $\Psi(3)$, $\Psi(4)$. Получающаяся картина схематично показана на рис. 7.7. Исключим из рассмотрения все точки, итерации которых не попадают в эти квадраты. Тогда траекторию каждой оставшейся точки можно охарактеризовать последовательностью из четырех символов 1, 2, 3, 4. Правила, по которым можно комбинировать эти символы, чтобы они соответствовали траектории какой-либо точки, удобно представить в виде схемы (рис. 7.7, б).

Понятно, что здесь, как и в подкове Смейла, можно построить бесконечное множество периодических и несчетное количество различных непериодических траекторий. Это явление, происходящее сразу после появления гомоклинической траектории, получило название *гомоклинического взрыва*.

Гомоклинические взрывы в других системах с симметрией могут отличаться от обсуждавшегося выше (их можно представить, если считать, что до взрыва треугольник $A'B'R$ попадает не внутрь $ABCD$, а внутрь $ADEF$). В динамических системах может происходить сложная последовательность гомоклинических взрывов [373].

Явления, характерные для модели Лоренца при $r \geq r'$, типичны для многих нелинейных уравнений. В самом деле, поведение траекторий в маленьком кубике, содержащем начало координат, близко к поведению решений линеаризованной около нуля системы, которое определяется собственными значениями и собственными векторами получающейся матрицы. Это важное обстоятельство существенно используется при анализе решений вблизи гомоклинических траекторий [13, 202]. Для того, чтобы картина была качественно такой же, как в системе Лоренца при первом гомоклиническом взрыве, достаточ-

до, чтобы три обыкновенных дифференциальных уравнения обладали той же симметрией и чтобы собственные числа матрицы линеаризованной системы вблизи начала координат были действительны и удовлетворяли неравенствам $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3$, где λ_3 — собственное значение, соответствующее собственному вектору, лежащему на оси симметрии [373].

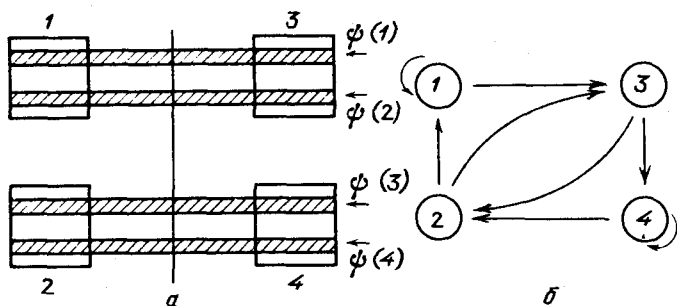


Рис. 7.7

Появившиеся инвариантные множества при $r = r'$ как и в случае подковы Смейла, не являются аттракторами. В самом деле, на рис. 7.6, видно, что прямоугольник $ABCD$ не переходит в себя — часть траекторий после каждой итерации покидает его. Однако существует значение r'' , при котором треугольники $A'B'R$ и $C'D'L$ целиком оказываются внутри ABC . При $r = r''$ и рождается странный аттрактор.

При $r \approx r''$ ($r < r''$) наблюдается метастабильный хаос. Почти все траектории из $ABCD$ ведут себя сложным непериодическим образом, однако затем стремятся к одной из устойчивых точек.

При $r = r'''$ особые точки в результате обратной бифуркации Хопфа теряют устойчивость, и асимптотическое поведение почти всех траекторий определяется странным аттрактором. В этой области параметров его часто называют *стандартным аттрактором Лоренца*. Обратим внимание на то, что и метастабильный хаос, и аналог гомоклинического взрыва характерны для одномерных отображений (см., например, рис. 4.16). Для систем нескольких дифференциальных уравне-

ний, в которых быстро уменьшается фазовый объем (большое значение Ω в формуле (7.4)), одномерные отображения широко используются в качестве упрощенных моделей [136, 373, 382]. Обычно они дают важную информацию о качественном поведении системы и помогают разобраться в наблюдаемой последовательности бифуркаций.

При анализе модели Лоренца в различных областях параметров было предложено несколько упрощенных моделей. В качестве примера можно привести модель Мариока–Шимицу, предложенную для изучения динамики уравнения Лоренца в некоторой области параметров

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - \lambda y - xz \\ \dot{z} &= -\alpha z + x^2.\end{aligned}$$

В самом деле, модель Лоренца после замены переменных

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2b\sigma}} x, & y' &= \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\sigma}} (y - x), \\ z' &= \varepsilon^2 \left(z - \frac{x^2}{2\sigma} \right), & t' &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} t\end{aligned}$$

и введения параметров

$$\begin{aligned}\alpha &= \varepsilon b \sigma^{-1/2}, & \beta &= \varepsilon (2\sigma - b)^{-1/2}, \\ \lambda &= \varepsilon (b\sigma + 1)^{-1/2}, & \varepsilon &= (r - 1)^{-1/2}\end{aligned}$$

преобразуется к виду

$$\dot{x}' = y', \quad y' = -\frac{x'^3}{\beta} + x' - \lambda y' - x' z', \quad \dot{z}' = -\alpha z' + x'^2.$$

Модель Мариока–Шимицу получается из последней системы при $\beta \rightarrow \infty$. Развитие при изучении системы Лоренца методы позволили детально проанализировать и эту модель [Д23].

Ряд интересных задач возник в связи с обобщением модели Лоренца. Среди них особенно важными представляются

системы, не обладающие симметрией. По-видимому, наиболее подробно изученной моделью такого типа является система уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= rx - y - xz + R, \\ \dot{z} &= -bz + xy.\end{aligned}$$

В задаче о подогреваемом снизу слое жидкости это может соответствовать тому, что внешние факторы делают одно из направлений вращения предпочтительным.

Оказалось, что введение несимметрии существенно меняет не только количественные характеристики системы, но и сценарии возникновения в ней хаоса [Д24]. В частности, при исследовании движения жидкости в подогреваемом снизу торе, заполненном жидкостью [399], и при анализе неустойчивости Марангони. Неустойчивость Марангони связана с возникновением вихрей вблизи границы двух движущихся жидкостей с разными коэффициентами поверхностного натяжения [Д9]. Изучение этой неустойчивости имеет большой прикладной интерес. Многие технологические процессы связаны с адсорбцией газообразных веществ в жидкой фазе. Если жидкость неподвижна, то скорость этого процесса определяется только диффузионными процессами. Когда возникает неустойчивость Марангони, то связанные с ней конвективные процессы могут значительно ускорить процесс адсорбции [Д9].

В частности, такая система возникает в физике лазеров [193]. Она описывает одномодовый, не зависящий от координат режим для кольцевого лазера. Роль X , Y и Z при этом играют медленно меняющиеся амплитуды бегущих волн поля и поляризации, а также инверсия. Эта аналогия во многом и послужила основой для создания синергетики.

Проведенный анализ показал, что для системы Лоренца область параметров, в которой можно использовать для исследования хаотического аттрактора методы гиперболической теории, сравнительно невелика [373]. Хаотические режимы наблюдаются в гораздо большей области.

Такое поведение многих динамических систем нашло отражение во введенном Л.П.Шильниковым понятии *квазиаттрактора*. Нетрудно представить себе семейство двумерных отображений, у которых при изменении параметра рождаются не только гиперболические подмножества траекторий, но и различные циклы. Если области притяжения этих циклов достаточно малы, а их периоды достаточно велики, если в системе есть малый шум, то поведение траекторий будет хаотическим. При этом мы имеем дело не с аттрактором, который может описывать периодические движения в случае идеальной постановки натурального или вычислительного эксперимента, а с хаотическим квазиаттрактором. Теоретический анализ таких объектов имеет большое значение.

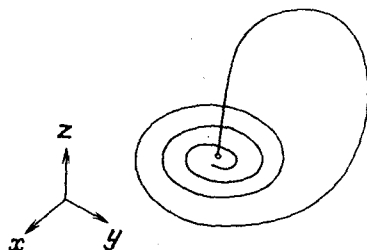


Рис. 7.8

Наличие гомоклинических траекторий оказывается важным не только при анализе модели Лоренца и других систем с симметрией, но и при изучении большого класса других уравнений. Например, в работе Л.П.Шильникова [202] были рассмотрены динамические системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x - \omega y + P(x, y, z) \\ \dot{y} &= \omega x + \rho y + Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z), \end{aligned} \quad (7.5)$$

где P, Q, R – функции, равные нулю вместе с первыми производными в точке $(0, 0, 0)$. Предполагалось, что особая точка в начале координат является седло-фокусом $\rho < 0, \lambda > 0$,

также считалось, что $\lambda > -\rho$ (рис. 7.8). Если одна из траекторий Γ_0 , выходящих из седло-фокуса, при $t \rightarrow \infty$ возвращается в него, то можно доказать, что в любой окрестности Γ_0 содержится бесконечное количество периодических траекторий.

Кроме того, двумерные отображения, порождаемые уравнениями вида (7.5), имеют сложные инвариантные множества. Библиографию ряда работ, в которых анализ различных физических явлений приводит к уравнениям типа (7.5), можно найти в книге [289].

§ 7.2. Усложнение аттракторов в динамической системе (3.15)

Посмотрим, как может происходить усложнение решений при изменении параметров динамической системы. В качестве такой системы, следуя работам [19, 20, 24, 26], рассмотрим уравнения (3.15), возникающие в теории систем реакция - диффузия. В отличие от системы Лоренца, задача не обладает симметрией относительно знаков переменных, и можно ожидать, что ее поведение будет более простым и типичным.

Из первых двух уравнений можно получить, что

$$\begin{aligned} 2\dot{\xi} + \dot{\eta} &= 2(2\xi + \eta) - (2\xi + \eta)^2 - \eta^2/2 - 2k^2\eta - \\ &- 4\xi\eta(1 + \cos\theta) \leq 2(2\xi + \eta) - (2\xi + \eta)^2. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что $2\xi + \eta \leq z$, где $z(t)$ - решение уравнения

$$\dot{z} = 2z - z^2, \quad z(0) = 2\xi(0) + \eta(0) \geq 0.$$

Так как $z(t)$ ограничена, а $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, то каждая из функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ также ограничена.

Важной характеристикой динамической системы является величина Ω , которая определяет скорость изменения малого объема при движении по траекториям $\dot{V} = \Omega V$. Эта величина

характеризует диссипативные свойства системы и показывает, насколько быстро ее решения сходятся к аттрактору. В нашем случае

$$\Omega = \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 4 - 2k^2 - 8\xi - 5\eta. \quad (7.6)$$

При $k < \sqrt{2}$ в фазовом пространстве появляется область, где $\Omega > 0$. В ней не могут лежать ни устойчивые точки, ни устойчивые предельные циклы. Однако аттракторы, которые мы будем рассматривать в дальнейшем, лежат целиком вне этой области.

Простейшие решения уравнений (3.15) можно получить, положив $\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta} = 0$. К ним относятся инвариантная прямая

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \theta = 2c_1 k^2 t + \text{const},$$

а также особые точки или инвариантные прямые

$$\xi = 1, \quad \eta = 0.$$

Инвариантная прямая ($\theta = \theta(t)$) существует, если выполнено неравенство [20]

$$c_1^2 k^4 + 2c_1 c_2 k^2 - 1 > 0. \quad (7.7)$$

На кривой $c_1^2 k^4 + 2c_1 c_2 k^2 - 1 = 0$ рождается пара особых точек $\xi = 1$, $\eta = 0$: седло и устойчивый узел. Этот узел теряет устойчивость на линии

$$(c_1^2 + 1)k^4 + 2k^2(1 + c_1 c_2) = 0. \quad (7.8)$$

Другое семейство частных решений можно получить, считая $\xi = 0$. Полагая ξ , η , θ равными нулю, можно получить уравнения, определяющие координаты особых точек ξ , η , θ . После замен переменных и алгебраических преобразований оно сводится к уравнению четвертой степени [19, 24]

$$y^4 + by^2 + cy + d = 0. \quad (7.9)$$

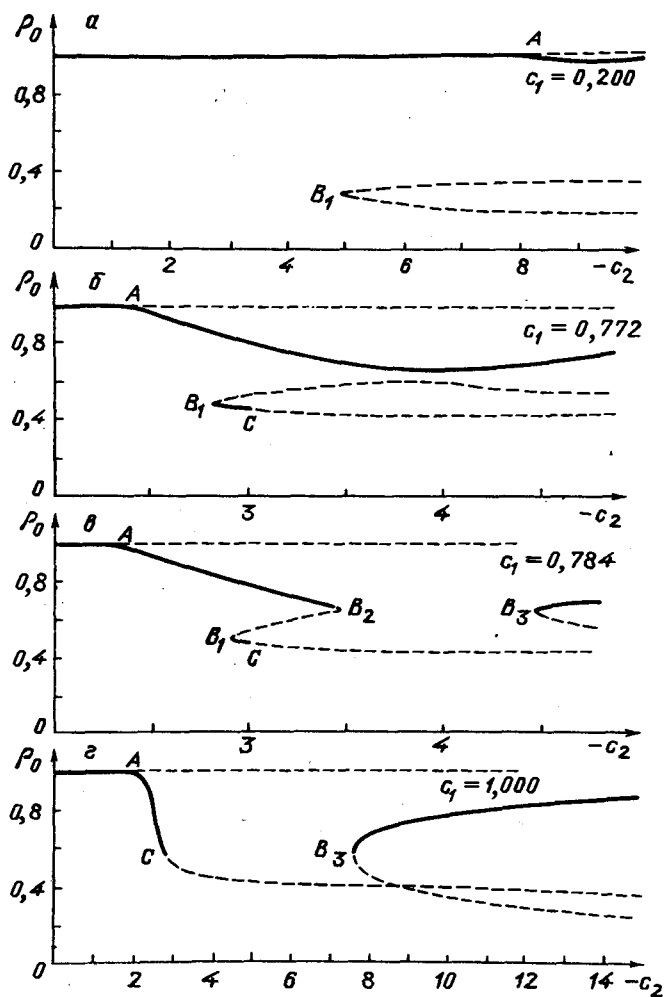


Рис. 7.9. Картина появления особых точек при разных значениях c_1 . Сплошная кривая – устойчивые точки, штриховая – неустойчивые точки. Ось $\rho = 0$ неустойчива

Коэффициенты b , c , d достаточно сложно зависят от c_1 , c_2 , k , поэтому вместо использования явных выражений удобнее решать уравнение (7.9) численно. Наглядное представление о появлении состояний равновесия дает рис. 7.9. Зафиксируем значение c_1 и будем уменьшать параметр c_2 . На ри-

сунке показано измененне величины $\rho_0 = \xi^{1/2}$ у всех особых точек с $\xi > 0$, $\eta > 0$ и у точки $\xi = 1$, $\eta = 0$, полученное в расчетах для разных значений c_1 . Значения параметра c_2 , при которых меняется число особых точек или их устойчивость, обозначены буквами А, В₁, В₂, В₃, С.

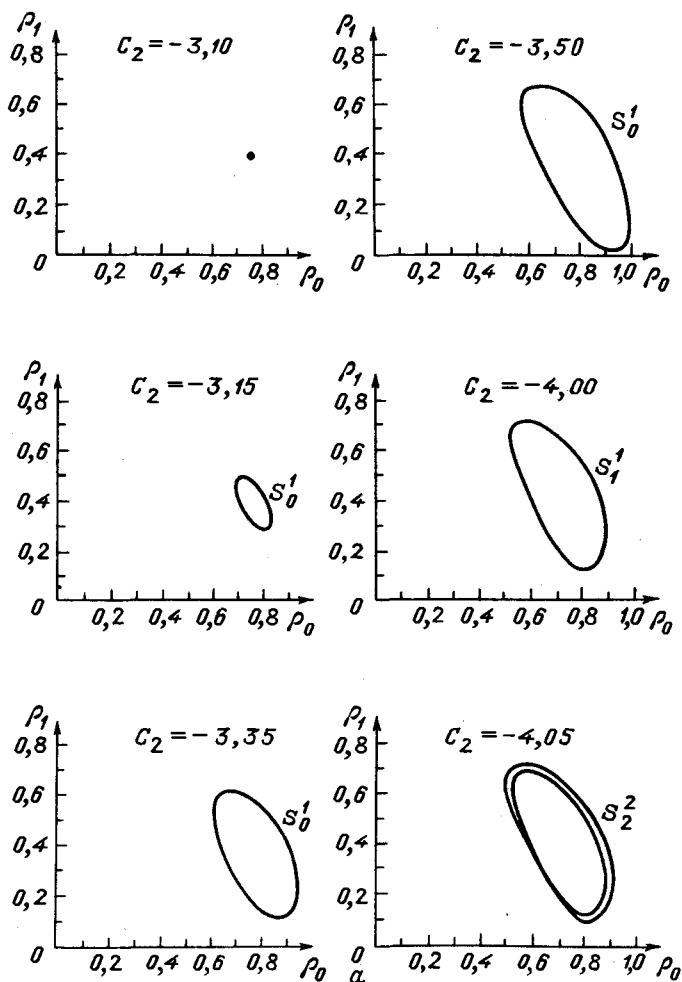


Рис. 7.10,а) Эволюция аттракторов системы (3.15) $k = 1$, $c_1 = 3$

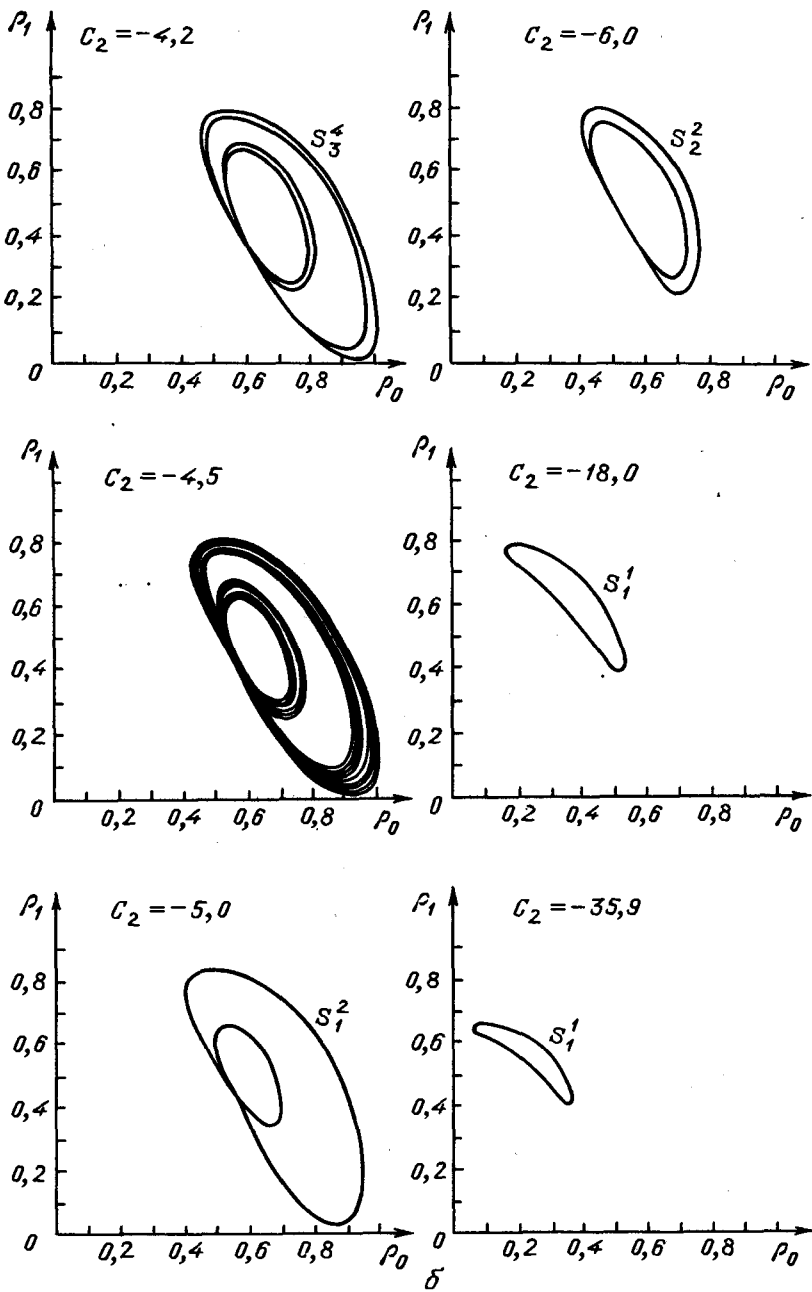


Рис. 7.10,б) Эволюция аттракторов системы (3.15) $k = 1$, $c_1 = 3$

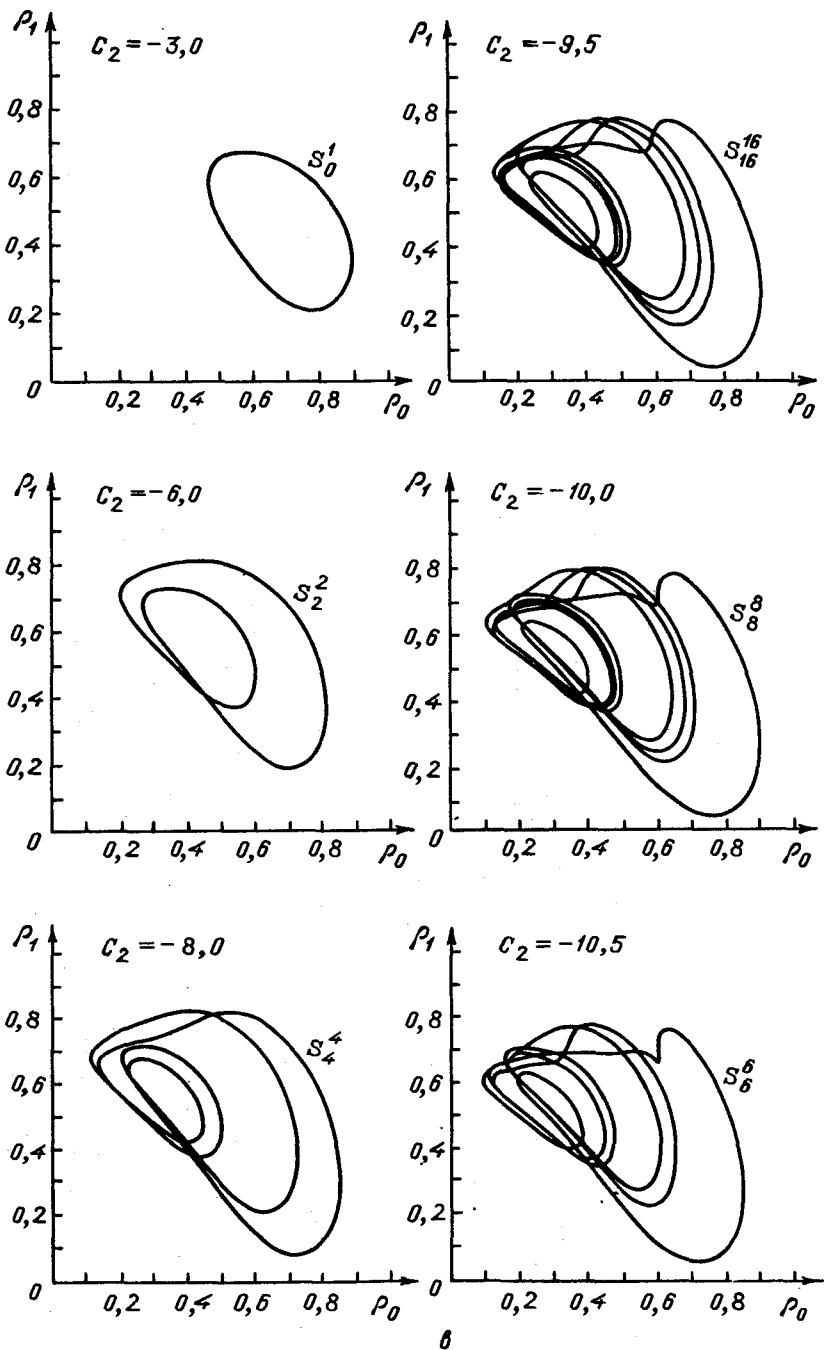


Рис. 7.10,в). Эволюция аттракторов системы (3.15) $k = 1$, $c_1 = 1,5$

Вначале в системе есть единственная устойчивая особая точка $\xi = 1, \eta = 0$. В точке A происходит бифуркация типа «обмен устойчивостью» такая, как на рис. 3.6,б. Левее точки A на рис. 7.9 показано только одно решение, поскольку у второго $\eta < 0$ и оно соответствует комплексным значениям ρ_1 .

В точках B_1 и B_3 появляется пара состояний равновесия, в точке B_2 — исчезает. Бифуркацию такого типа мы видели, рассматривая изгиб несимметричной колонны (см. рис. 3.4).

В точке C происходит бифуркация рождения предельного цикла, при этом в системе уравнений (4.4) возникает периодическое решение. В разных комбинациях мы здесь встречаемся с одними и теми же простейшими бифуркациями.

Из рис. 7.9 видно, что кое-где одновременно существуют две устойчивые особые точки. В зависимости от начальных данных $\xi(0), \eta(0), \theta(0)$ решение стремится к одной из них. Есть области, где устойчивых точек нет, и аттрактор в системе должен быть другим.

Зафиксируем параметр $c_1 = 3$ и посмотрим, что будет происходить с решением при уменьшении c_2 (рис. 7.10,а,б). Вначале была устойчива особая точка ($c_2 = -3,10$), а затем появился предельный цикл ($c_2 = -3,15$). Циклы в системе уравнений (3.15) могут быть разными. Их удобно различать по числу оборотов n , которые они совершают вокруг некоторой центральной области. Из формул (3.15) видно, что если функции ξ и η меняются периодически с периодом T , то $\cos \theta, \sin \theta$ и $\dot{\theta}$ будут иметь тот же период. А сама фаза θ получает за это время приращение $2\pi m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$): $\theta(t + T) - \theta(t) = 2\pi m$. В простейшем случае ($m = 0$) циклам соответствуют замкнутые кривые в пространстве ξ, η, θ (рис. 7.11,а). Если $m > 0$, то $\xi(t), \eta(t), \theta(t)$ определяют спирали (рис. 7.11,б). Цикл, который характеризуется числами m и n , будем обозначать S_m^n .

В момент бифуркации Хопфа появляется предельный цикл S_0^1 , при уменьшении параметра c_2 он переходит в S_1^1 . При уменьшении c_2 амплитуда устойчивого цикла S_0^1 растет. По

мере приближения к точке перехода c_2^* цикл приближается к седлам $\xi = 1, \eta = 0$ (см. рис. 7.10). После перехода $c_2 < c_2^*$ цикл от них удаляется. При $c_2 = c_2^*$ цикл проходит через две особые точки. При этом значении параметра и происходит переход от замкнутых кривых к спиралям. Естественно ожидать, что при этом

$$T(c_2) \rightarrow \infty, \quad c_2 \rightarrow c_2^*.$$

Далее происходят бифуркации удвоения периода $S_m^n \rightarrow S_{2m}^{2n}$, а также переходы $S_m^n \rightarrow S_{m\pm 1}^n$.

Затем возникают хаотические режимы (см. рис. 7.10, б, $c_2 = -4,5$). При уменьшении c_2 аттрактор системы упрощается. Здесь могут происходить обратные бифуркации удвоения периода [18, 20]. Наиболее сложные периодические решения наблюдаются при небольших значениях $c_1, 1 \leq c_1 \leq 2$. Они могут иметь релаксационный характер. Это связано с тем, что в окрестности цикла лежит особая точка динамической системы. При одних и тех же параметрах здесь могут существовать два устойчивых предельных цикла. Типичная эволюция аттракторов в этой области представлена на рис. 7.10, в. Видно, что число локальных максимумов функций $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ у показанных циклов может не совпадать с числом витков цикла n .

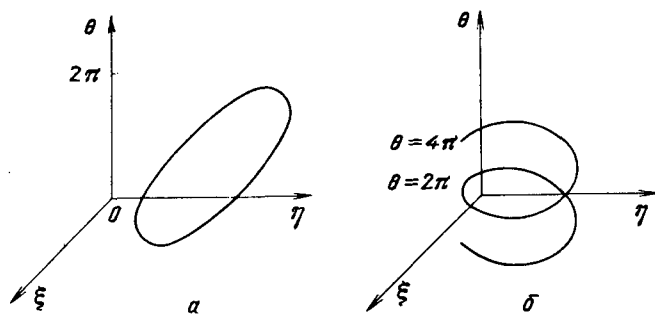


Рис. 7.11

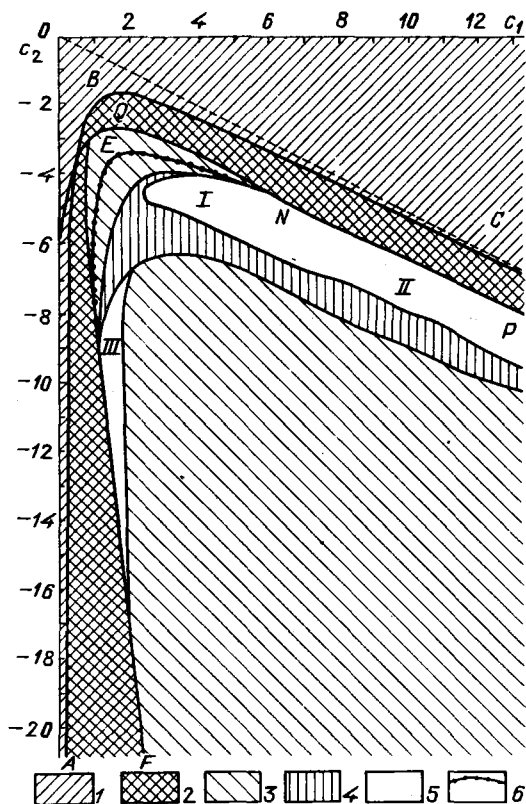


Рис. 7.12. Типы аттракторов для системы уравнений (3.15) при $k = 1$. 1 – решение $\xi = 1, \eta = 0$; 2 – особая точка с $\xi > 0, \eta > 0$; 3 – простой цикл; 4 – цикл S^2 ; 5 – более сложные решения; 6 – линия, на которой происходит переход $S_0^1 \rightarrow S_1^1$. QNP – линия бифуркации Хопфа. Картина получена в результате численного решения уравнений (3.15). По параметру c_1 шаг $h_1 = 1,0$, по параметру c_2 шаг $h_2 = 0,5$. В окрестности границ между областями шаг уменьшался до 0,1. Начальными данными для задачи с параметрами $\{c_1, c_2 - h_2\}$ ниже линии ABC служила точка, принадлежащая аттрактору системы уравнений (3.15) для значений $\{c_1, c_2\}$. Расчеты начинались при $c_2 = 0$

Как было показано в работе [18], при $k = 1$ система (3.15) в определенном интервале параметров хорошо описывается семействами одномерных отображений. Пример такого семейства мы приведем ниже. Это глубокий и интересный факт. Он говорит об эффективности ряда упрощенных моделей.

Сочетание численных и аналитических методов позволяет получить карту аттракторов, которая показывает тип решения системы (3.15) при различных значениях c_1 и c_2 (рис. 7.12). Параметр k всюду считается равным единице.

В большой области параметров выше кривой ABC (см. рис. 7.12) устойчива особая точка $\xi = 1, \eta = 0$. С ней граничит область, где есть другие особые точки, появление которых мы проследили выше. Во многих случаях асимптотику системы (3.15) при $t \rightarrow \infty$ определяют простой S^1 или двойной S^2 циклы. Области устойчивости более сложных циклов и те области, где есть сразу два аттрактора, в масштабе рис. 7.12 не видны, и поэтому на нем не показаны. Карта аттракторов дает классификацию решений системы уравнений (3.15) при $k = 1$ по их поведению при $t \rightarrow \infty$. Полученная картина является достаточно простой.

§ 7.3. Странный аттрактор в динамической системе (3.15)

Рассмотрим более подробно одно из непериодических решений системы (3.15). На этом примере удобно проследить, как обсуждавшиеся выше методы исследования используются при изучении странных аттракторов конкретных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Число подробно изученных странных аттракторов к настоящему времени невелико. Поэтому представления о системах, в которых возможен динамический хаос, могут оказаться полезными при построении моделей различных физических явлений.

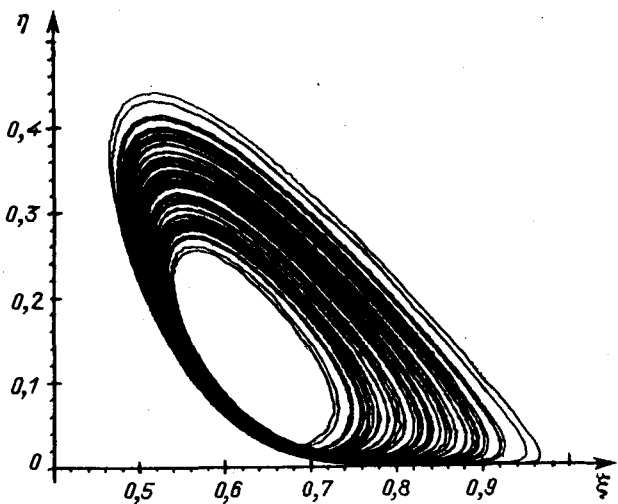


Рис. 7.13

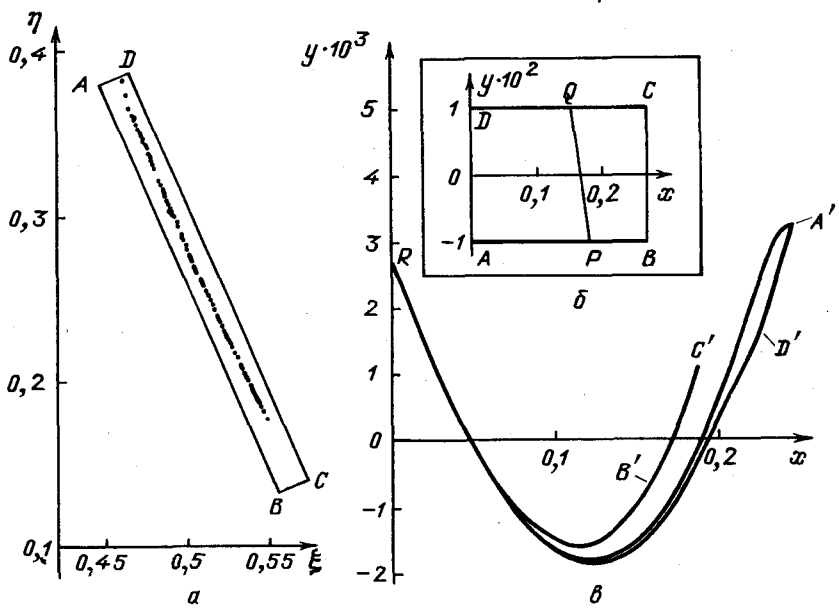


Рис. 7.14, а) Сечение Пуанкаре плоскостью $\theta = 0$ и область, переходящая в себя; б) Область, переходящая в себя; в) ее образ в новых координатах

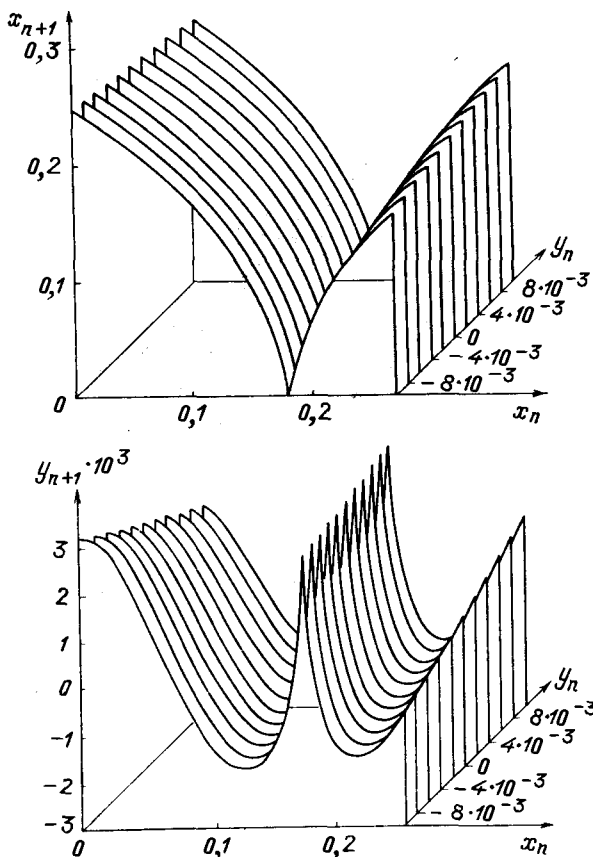


Рис. 7.15. Двумерные функции, осуществляющие отображение Пуанкаре

В дальнейшем основное внимание мы уделим аттрактору системы уравнений (3.15) при $c_1 = 7$, $c_2 = -6$, $k = 1$. Его проекция на плоскость $\{\xi, \eta\}$ показана на рис. 7.13, она целиком лежит в области, где система диссипативна. Видно, что траектория может попадать в окрестность седла $\xi = 1$, $\eta = 0$, и следовательно, проводить вблизи них длительное время. Среднее время T одного оборота вокруг центральной области примерно равно 1.63, а среднее значение Ω составляет 4.189. Поэтому за один оборот фазовый объем уменьшается почти в 900 раз.

Рассмотрим последовательные пересечения траектории с плоскостью $\theta = \text{const}$. Поскольку ξ , η , θ зависят только от $\cos \theta$ и $\sin \theta$ (θ является циклической координатой), то необходимо учитывать пересечения со всеми плоскостями $\theta = \text{const} + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Наиболее простым оказывается сечение аттрактора плоскостью $\theta = 0$. Обсудим некоторые его свойства.

Система уравнений (3.15) однозначно определяет отображение этой плоскости в себя (отображение Пуанкаре):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= f(\xi_0, \eta_0), \\ \eta_1 &= g(\xi_0, \eta_0).\end{aligned}\tag{7.10}$$

Здесь ξ_1 , η_1 — координаты точки первого пересечения траектории с начальными данными $\{\xi_0, \eta_0, 0\}$ с плоскостью $\theta = 0$. Будем рассматривать только такие пересечения, при которых $\theta > 0$.

Можно выделить область в плоскости $\{\xi, \eta\}$, которая при отображении (7.10) переходит в себя, она и содержит аттрактор.

Для исследования отображения Пуанкаре естественно перейти к новым координатам, одна из которых x близка к растягивающему направлению, другая y — ортогональна к ней

$$\begin{aligned}x &= [3(\xi - 0,45) - 7(\eta - 0,38)]/\sqrt{58}, \\ y &= [7(\xi - 0,46) + 3(\eta - 0,38)]/\sqrt{58}.\end{aligned}$$

Вид области $ABCD$, переходящей в себя, и ее образа $A'B'C'D'$ в старых и новых координатах показан на рис. 7.14, а и б. (Обратим внимание на то, что рис. 7.14, б и в сильно растянуты в направлении y). В этих координатах образом прямоугольника является сложная криволинейная фигура, состоящая из двух частей (рис. 7.14, в). Область $APQD$ отображается в ее нижнюю часть. Соответствующие траектории

получают за один оборот приращение фазы $\Delta\theta = +2\pi$. Верхняя часть криволинейной фигуры является образом множества $BPQC$. Приращение фазы для начинающих здесь траекторий равно нулю. Отрезок PQ весь переходит в точку R . Обратим внимание на аналогию между этим отображением и подковой Смейла.

Вид функций f и g , определяющих отображение Пуанкаре в новых координатах x , y

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0, y_0), \\y_1 &= g(x_0, y_0),\end{aligned}\tag{7.11}$$

показан на рис. 7.15. Эти функции непрерывны, но имеют разрыв производных на линии PQ . Значение функции f на этом отрезке равно x — координате точки R (см. рис. 7.14,б); y — координата этой точки, определяет значение g на отрезке PQ . Частные производные f и g неограниченно растут в окрестности линии PQ .

Сечение аттрактора, соответствующего хаотическому режиму, должно обладать сложной внутренней структурой. Для нескольких моделей расчёты позволили обнаружить такую структуру. Это удается сделать и для изучаемой системы.

Обратимся к рис. 7.16. Здесь в разных масштабах показано расположение точек пересечения одной из траекторий с плоскостью $\theta = 0$. На рис. 7.16,б в увеличенном виде изображен прямоугольник, обозначенный на рис. 7.16,а. В свою очередь, прямоугольник, помеченный на рис. 7.16,б, в еще более крупном масштабе представлен на рис. 7.16,в. Сечение аттрактора на верхнем рисунке состоит из двух линий. Увеличение разрешения в 500 раз приводит к тому, что каждая из них расщепляется еще на две. (Отметим, что расстояние между линиями очень мало, оно не превышает $4 \cdot 10^{-7}$). Можно ожидать, что этот процесс происходит и на меньших характерных расстояниях. То есть аттрактор по одному из направлений обладает канторовой структурой.

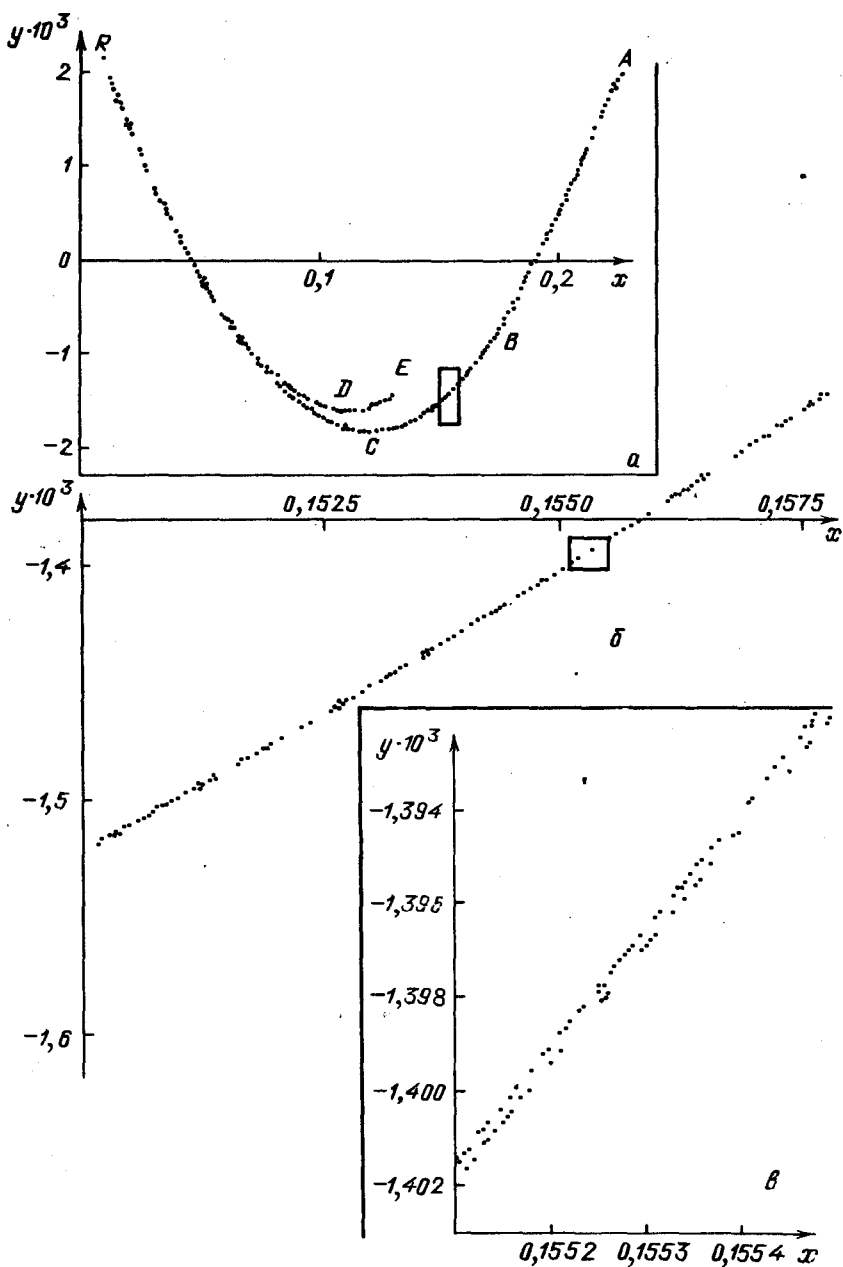


Рис. 7.16. Сечение аттрактора в разных масштабах

На рис. 7.17,а изображена зависимость x_{n+1} от x_n . В масштабе рисунка точки ложатся на непрерывную однозначную кривую F . Отметим, что $|dF/dx| > 1$ везде, кроме одного участка на левом конце отрезка.

Одномерное отображение $x_{n+1} = F(x_n)$ можно рассматривать как некоторую упрощенную модель для задачи (3.15). При ее анализе можно использовать многие результаты теории отображений отрезка в себя.

Посмотрим теперь, как связаны y_{n+1} и y_n . Результаты соответствующего расчета приведены на рис. 7.17,б. Полученная картина является более сложной, чем для координаты x . Поскольку одному значению y соответствует одна, две, три или четыре точки, лежащие на аттракторе (см. рис. 7.16), то зависимость y_{n+1} от y_n также будет неоднозначной. Одному y_n могут соответствовать от одного до четырех y_{n+1} (Разумеется, все сказанное справедливо на тех масштабах, где не проявляется тонкая структура аттрактора.)

Сопоставим рис. 7.16,а и 7.17,б. Образы точек, лежащих на ветви ABC на первом рисунке, определяются с помощью кривой $A'B'C$, показанной на втором. Ветвь $C'R'$ позволяет найти, куда переходят точки с участка CR , точно так же ветвь $R'D'E'$ соответствует линии RDE . Точка B на рис. 7.16,а лежит на пересечении дуги AC аттрактора с отрезком PQ (см. рис. 7.14,б).

Таким образом, результат действия двумерного отображения (7.11) для точек аттрактора можно достаточно точно предсказать с помощью нескольких одномерных отображений.

Рис. 7.13 показывает, что проекции различных витков траектории на плоскость $\{\xi, \eta\}$ качественно не отличаются друг от друга. Однако, проследив за их изменением в пространстве $\{\xi, \eta, \theta\}$, можно выделить витки двух различных типов. В одних при возвращении на плоскость $\theta = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, фаза изменяется на 2π , в других она не меняется. В одномерном отображении (см. рис. 7.17) виткам первого типа соответствует левая часть кривой, виткам второго типа — ее правая часть.

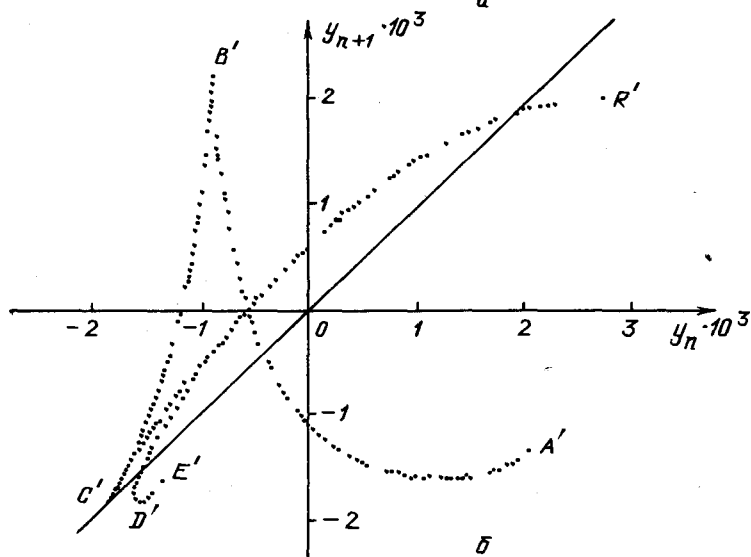
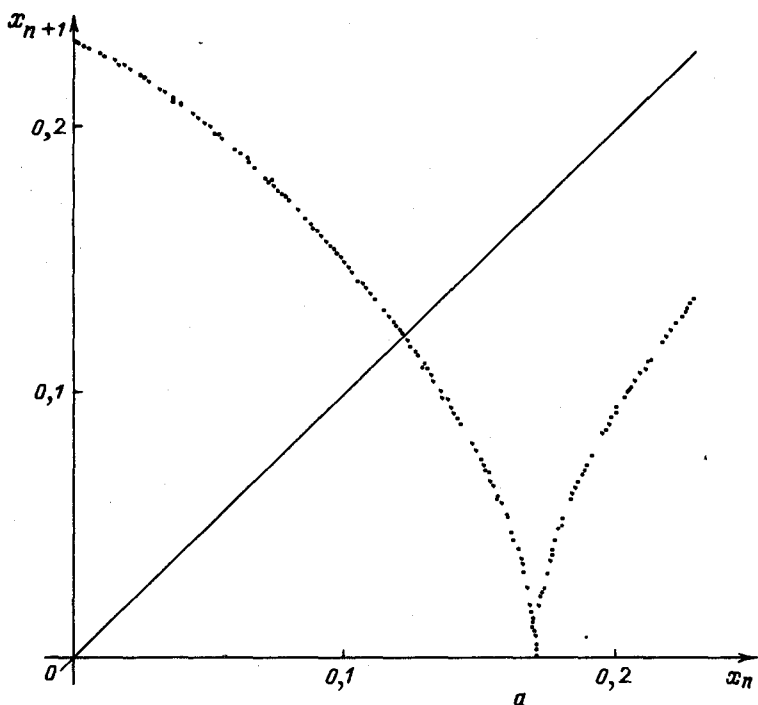


Рис. 7.17

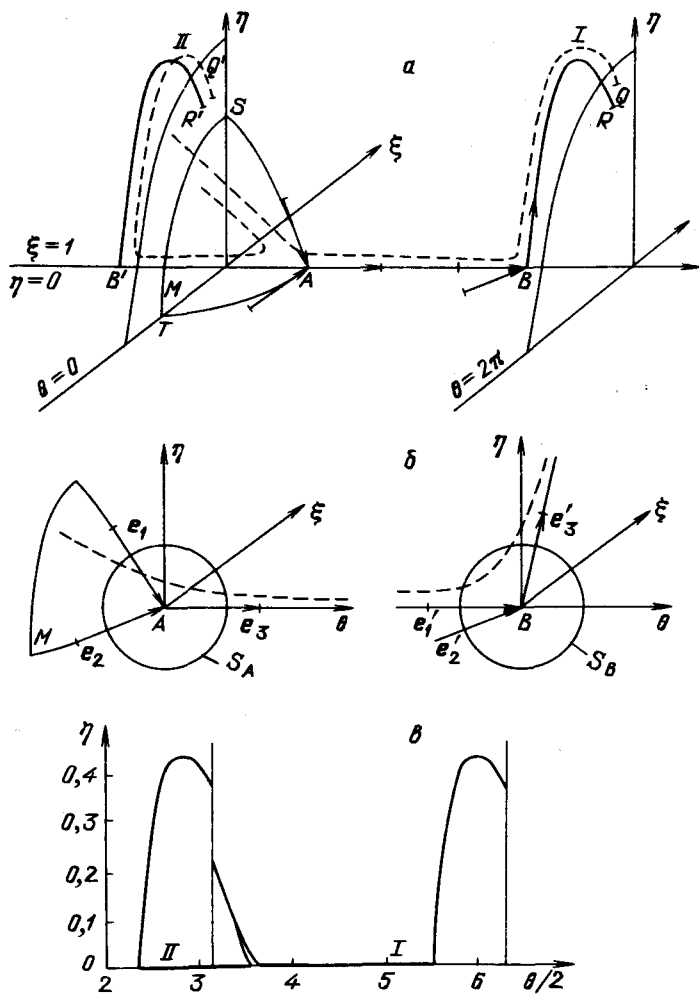


Рис. 7.18, а), б). Качественная картина поведения траекторий в окрестности особых точек; а) проекции двух траекторий, начинающихся вблизи особенности отображения Пуанкаре

Правые части системы (3.15) представляют собой дифференцируемые функции, гладко зависящие от параметра. Если время возвращения на плоскость Пуанкаре для всех витков конечно, то оно будет непрерывно зависеть от координат начальной точки. Тогда функции f и g в отображении (7.11) будут непрерывны, а приращение $\Delta\theta$ не будет претерпевать скачка. В нашем случае это не так. Можно предположить, что причиной является влияние одной из особых точек динамической системы (3.15), в окрестности которой время витка может неограниченно возрастать.

Исследование поведения траекторий в окрестности особых точек позволяет также выяснить, какого типа особенности будут иметь возникающие двумерные и одномерные отображения. Важное свойство системы (3.15) состоит в том, что плоскость $\eta = 0$ является инвариантным многообразием: если $\eta(0) = 0$, то и $\eta(t) = 0$. В этой плоскости есть две особые точки A и B с $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$. Рассматривая линеаризованную в их окрестности динамическую систему, можно найти собственные значения и собственные векторы возникающей матрицы. Из такого анализа следует, что точки A и B — седла, имеющие по одному неустойчивому направлению. При этом линия $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\theta = \theta(\xi)$, соединяющая точки A и B , является интегральной кривой системы уравнений (3.15) при всех значениях параметров. На рис. 7.18, а, б показано примерное расположение особых точек A и B , а также собственных векторов соответствующей им матрицы. Собственные векторы пронумерованы таким образом, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, $\lambda'_1 < \lambda'_2 < \lambda'_3$. Поверхность M — это двумерное устойчивое многообразие точки A . Неустойчивым многообразием является прямая $\xi = 1$, $\eta = 0$. Устойчивым многообразием точки B является плоскость $\eta = 0$. Ее неустойчивое многообразие пересекается с плоскостью $\theta = 2\pi$ в точке R .

Исходя из рис. 7.18, а, можно представить интегральную кривую, начинающуюся около поверхности M (выше нее), следующим образом. Вначале точка на траектории вблизи M движется к точке A и далее по отрезку $\xi = 1$, $\eta = 0$ к седлу B .

Затем она проходит по дуге BR и пересекает плоскость $\theta = 2\pi$ в точке Q , лежащей в окрестности точки R (кривая I , см. рис. 7.18, a). Заметим, что траектория не может выйти из точки B вниз, в область $\eta < 0$, так как для этого ей пришлось бы пересечь плоскость $\eta = 0$, целиком состоящую из интегральных кривых.

Пусть теперь траектория начинается ниже поверхности M (кривая II , см. рис. 7.18, a). В этом случае точка движется вдоль M , но вблизи точки A поворачивает влево. Она подходит к седлу B' и затем попадает на плоскость $\theta = 0$ по кривой $B'R'$. В первом случае фаза изменилась на 2π , во втором — не изменилась. Приращение фазы на следующем витке зависит от взаимного расположения многообразия M и точек Q, Q' .

Дуга $B'R'$ получается из BR сдвигом по θ на 2π , поэтому точки R и R' имеют одинаковые координаты ξ и η . Точки Q и Q' , лежащие в их окрестности, оказываются также близки по ξ и η . Этим фактом и обусловлена непрерывность функций f и g в отображении (7.11).

Поверхность M пересекается с плоскостью $\theta = 0$ по некоторой линии TS . Образом всей этой линии является точка R (или R'). Формально отображение Пуанкаре не определено на TS , поскольку траектории проходят через две особые точки, что требует бесконечного времени. Однако его можно определить по непрерывности. Отрезок PQ на рис. 7.14 является частью дуги TS .

Все сказанное полностью подтверждают расчеты. Соответствующий пример представлен на рис. 7.18, b . На нем показаны две траектории, начинающиеся вблизи особенности отображения Пуанкаре. Несмотря на совершенно различный путь траекторий к плоскости $\theta = 2\pi l$, точки их пересечения с плоскостью оказываются близки.

Из описанной качественной картины ясно, что, по мере приближения начальной точки на плоскости $\theta = 2\pi l$ к линии TS время витка будет неограниченно возрастать. Исследование траекторий, близких к особым точкам, дает возможность

определить зависимость $T(\varepsilon)$, где T – время возвращения на плоскость Пуанкаре, ε – расстояние от начальной точки до поверхности M (устойчивого многообразия седла A). Такой анализ позволяет также вычислить показатель α , характеризующий особенность возникающих двумерных и одномерных отображений.

Для получения этих результатов нужно рассмотреть поведение траекторий в малой окрестности точек A и B (внутри сфер S_A и S_B малого радиуса r , см. рис. 7.18, б). Задача упрощается тем, что при малых r (хотя и намного превышающих ε) вместо исходной задачи можно рассматривать ли-неаризованную систему. В работах [20, 26], где проведено такое исследование, показано, что

$$T(\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_3} \left(1 + \frac{|\lambda_1|}{\lambda_3} \right) \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, функция $T(\varepsilon)$ имеет логарифмическую особенность, что подтверждают и проведенные расчеты. Функции \bar{f} и \bar{g} в окрестности линии PQ (см. рис. 7.14) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \bar{f}(x_n, y_n) = f_0 + A(x_n, y_n)[x_n - \bar{x}_0(y_n)]^\alpha, \\ y_{n+1} &= \bar{g}(x_n, y_n) = g_0 + B(x_n, y_n)[x_n - \bar{x}_0(y_n)]^\alpha, \end{aligned} \quad (7.12)$$

где

$$\alpha = \min \{ |\lambda_1 \lambda'_1| / \lambda_3 \lambda'_3, |\lambda_2| / \lambda_3 + |\lambda_1 \lambda'_2| / \lambda_3 \lambda'_3 \}.$$

При $c_1 = 7$, $c_2 = -6$, $k = 1$, $\alpha = 1/2$. В расчете значение показателя α вблизи особенности для функции $f(x, y)$ при $y = 0$ получилось примерно равным 0,51, что говорит о хорошем соответствии численных результатов и аналитических оценок. Из формулы (7.12) следует важный качественный вывод. При $c_2 > \bar{c}_2$, где $\bar{c}_2 = \frac{(c_1^2 + 1)k^4 + 6k^2 + 8}{2c_1 k^2}$, вершина возникающего одномерного отображения должна быть гладкой, $\alpha > 1$, при $c_2 < \bar{c}_2$ – острой. Изменение характера вершины, как мы

видели, обсуждая одномерные отображения, может приводить к совершенно различным сценариям перехода к хаосу. Это также согласуется с результатами расчетов.

Как мы уже упоминали, проекция траектории на плоскость $\{\xi, \eta\}$ не дает полного представления о геометрии аттрактора в трехмерном пространстве. На рис. 7.19 изображена часть интегральной кривой системы уравнений (3.15) в координатах $x = \xi \cos\theta$, $y = \xi \sin\theta$, $z = \eta$. Она ложится на некоторую поверхность, так как в масштабе рисунка тонкая структура аттрактора не видна. Поверхность состоит из двух частей, которые «склеиваются» в верхней области. Из этой области точка начинает двигаться в направлении седла A , затем вправо или влево, в зависимости от начальных данных. Потом, пройдя мимо седла B , она вновь попадает в верхнюю часть аттрактора. За один такой оборот правая лента растягивается и меняет свою ориентацию. Левая часть поверхности также растягивается, но ориентации не меняет.

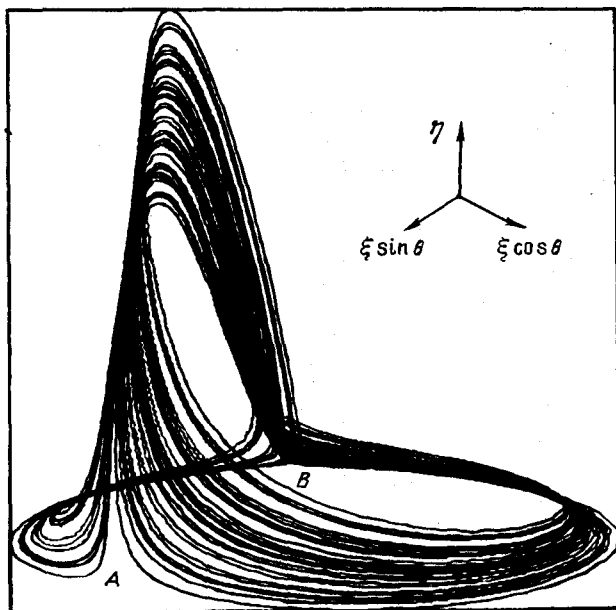


Рис. 7.19

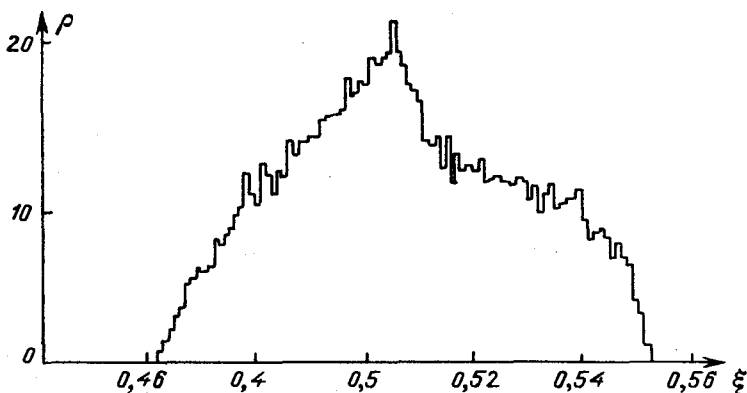


Рис. 7.20. Гистограмма, построенная для странного аттрактора

Отсюда ясно, что аттрактор в этом пространстве можно представить как склеенные друг с другом лист Мебиуса (правая часть) и обычное кольцо (левая часть). Совершая оборот по правой части аттрактора, траектория увеличивает фазу на 2π , по левой — оставляет неизменной.

Такое поведение позволяет дать символическое описание траектории, сопоставляя ей бесконечную последовательность символов R и L . При этом на n -м месте будет стоять R , если траектория на n -м витке двигалась по правой части поверхности, и L , если по левой. По-видимому, здесь также могут быть использованы топологические методы, развитые при исследовании аттрактора Лоренца [373].

Обратимся к количественным характеристикам обсуждаемого аттрактора.

Будем следить за значениями координаты ξ последовательных точек пересечения траектории с плоскостью $\theta = 2\pi m$. Построим гистограмму по последовательности $\{\xi_n\}$ и отнормируем ее так, чтобы площадь под кривой была равна единице. Расчеты показывают, что при увеличении длины выборки N эта кривая становится все более гладкой и перестает меняться. На рис. 7.20 приведена гистограмма, построенная по $N = 20480$ точкам. Число N зависит от выбранного интервала ε

вдоль оси ξ . Чем мельче шаг мы выбираем, тем больше становится значение N , при котором гистограмма практически перестает меняться. При других начальных данных была получена та же самая функция $\rho(\xi)$. Этот факт дает основание полагать, что и в трехмерном фазовом пространстве существует инвариантная мера, которая определяет статистические свойства всех траекторий, притягивающихся к странному аттрактору.

Типичным свойством странных аттракторов является чувствительность к начальным данным. Об этом свойстве говорит существование положительных ляпуновских показателей у изучаемого решения.

Изучаемый аттрактор системы уравнений (3.15) ($c_1 = 7$, $c_2 = -6$, $k = 1$) характеризуется следующими показателями: $\lambda_1 = +0,234$, $\lambda_3 = -4,423$, λ_2 близок к нулю в пределах точности вычислений. Эти значения λ_i были получены в расчетах при различных начальных данных. Сумма показателей дает среднее значение величины Ω : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \langle \partial\xi/\partial\xi + \partial\eta/\partial\eta + \partial\theta/\partial\theta \rangle$, которая определяет скорость изменения фазового объема системы.

Важной характеристикой аттрактора является его размерность. Зная показатели Ляпунова, пользуясь формулой Каплана – Йорке, можно оценить вероятностную размерность аттрактора (размерность естественной меры) [259]. В нашем случае эта формула дает

$$d_L = 2 + (\lambda_1 + \lambda_2)/|\lambda_3| \approx 2,05. \quad (7.13)$$

Поскольку величина d_L имеет малую дробную часть, естественно ожидать, что поведение траекторий на аттракторе с высокой точностью характеризуется некоторым одномерным отображением. Такое отображение, полученное при численном решении уравнения (3.15), показано на рис. 7.17.

Зная траекторию системы, можно оценить вероятностную размерность аттрактора, вычисляя корреляционный показатель. Результаты соответствующего расчета представлены на

рис. 7.21,а. При расчете использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка с шагом $\tau = 0,01$. В качестве координаты в ζ – пространстве брались значения координаты ξ с шагом $\Delta t = 0,25$. Рассматривалась выборка длины $N = 10000$, наилучшие результаты удавалось получить, вкладывая аттрактор в 10–мерное пространство. Скобками на графике отмечен участок, наиболее близкий к линейному. Вычисленное значение $\nu = 2,035 \pm 0,019$ согласуется с оценкой размерности, полученной по формуле Каплана – Йорке (7.13). Для сравнения на рис. 7.21 приведены результаты расчета корреляционного показателя для аттрактора Лоренца.

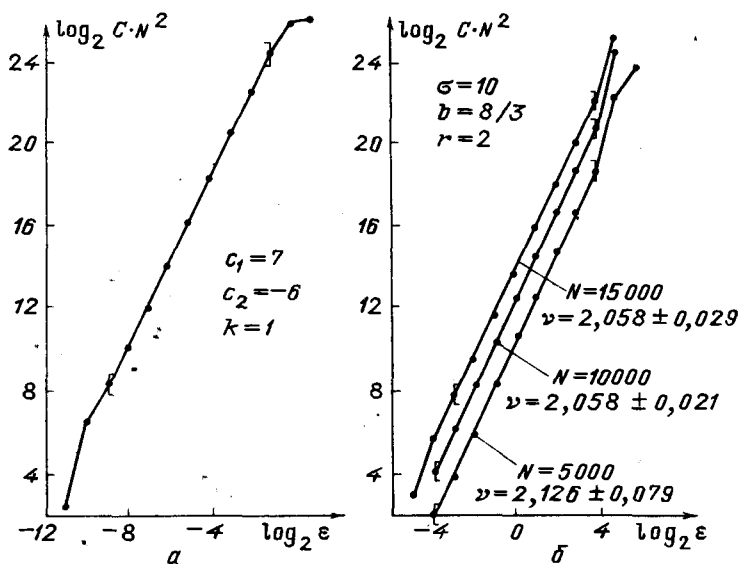


Рис. 7.21. Зависимость, позволяющая найти корреляционный показатель:

а) для аттрактора системы (3.15). Длина выборки $N = 15 \cdot 10^3$; б) для аттрактора Лоренца. Для расчета также использовался метод Рунге – Кутты четвертого порядка с шагом $\tau = 0,01$. Рассматривалась выборка $\xi = x(n\Delta t)$, $\Delta t = 0,25$ в ζ – пространстве $P = 3$

Обратим внимание на то, что здесь диапазон масштабов, в котором можно проследить подобие, гораздо меньше, чем в случае одномерных и двумерных отображений. Это типично и для других систем дифференциальных уравнений.

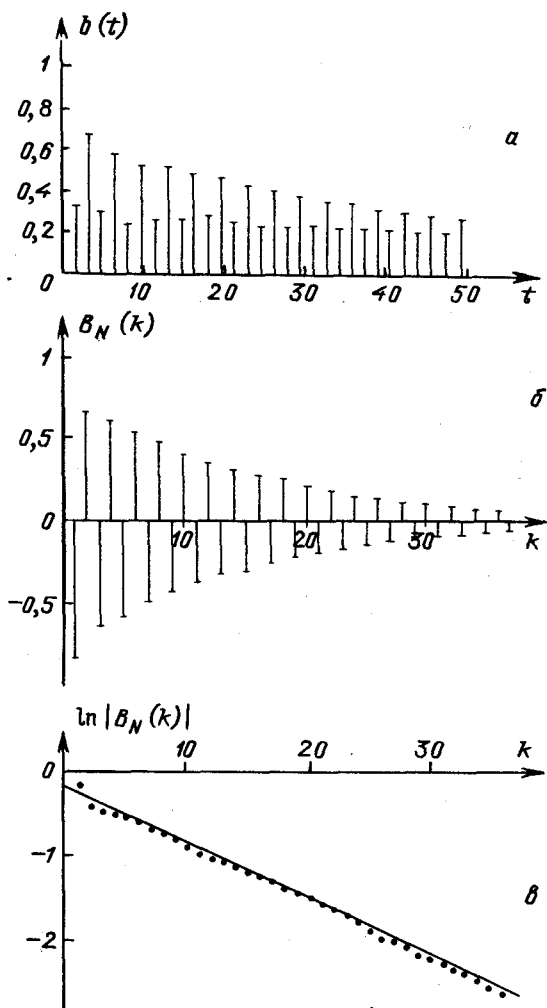


Рис. 7.22,а) Локальные максимумы автокорреляционной функции $b(t)$; б) автокорреляционная функция, построенная для отображения Пуанкаре; в) логарифм ее абсолютной величины

Другой количественной характеристикой странного аттрактора может служить автокорреляционная функция

$$b(t) = \frac{\langle \xi(\tau)\xi(\tau+t) \rangle - \langle \xi(\tau) \rangle^2}{\langle \xi^2(\tau) \rangle - \langle \xi(\tau) \rangle^2}, \quad \langle a(\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x) dx.$$

Когда $b(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, в системе есть перемешивание, свидетельствующее о случайности рассматриваемого процесса. Экспоненциальное убывание корреляций оказывается одним из наиболее сильных стохастических свойств.

Вычисление $b(t)$ требует расчета средних значений по большому участку траектории. В работе [26] дана оценка длины такого участка и приведена функция $b(t)$ для этого аттрактора.

Автокорреляционная функция в этом случае имеет осциллирующий характер. Период колебаний близок к среднему времени витка. Чтобы проследить убывание корреляций, отложим по оси ординат локальные максимумы функции $b(t)$, по оси абсцисс — времена, на которых они достигаются. Полученная картина показана на рис. 7.22,а. Видно медленное убывание автокорреляционной функции. При анализе этого и ряда других аттракторов удобно перейти к дискретному аналогу функции распределения — $B_N(k)$ (N —длина выборки). Рассмотрим снова последовательность $\{\xi_n\}$, где ξ_n — координата n -го пересечения траектории с плоскостью $\theta = 0$ и соответствующую автокорреляционную функцию $B_N(k)$. На рис. 7.22,б и в показана зависимость $B_N(k)$ и ее логарифм. Видно, что при $0 < k < 30$ $|B_N(k)|$ ($N = 19456$) убывает быстрее, чем $\text{const } e^{-\lambda k}$, где $\lambda \approx 0,0675$.

Важным вопросом является соотношение между длиной выборки N и количеством членов $B_N(k)$, которые мы можем вычислить достаточно точно. Можно показать, что суммы

$$I_1 = N^{-1} \sum_{n=1}^N \xi_n \xi_{n+k} \quad \text{и} \quad I_2 = N^{-1} \sum_{n=1}^N \xi_n f^k(\xi_n)$$

оказываются связаны между собой; здесь f — некоторая непрерывная функция, имеющая один экстремум. Сумма I_2 ап-

проксимирует интеграл $I = \int_{\min}^{\max} \xi f^k(\xi) \rho(\xi) d\xi$, в котором под-интегральная функция быстро осциллирует. Функция $f^k(\xi) = f(f(\dots f(\xi)))$ имеет 2^{pk} экстремумов, где $0 < p < 1$, $p = \text{const}$. Это следует из вида функции f . Для численного интегрирования естественно требовать, чтобы на каждый экстремум приходилось не менее s точек, тогда $N = s \cdot 2^{pk}$. Таким образом, число правильных значений зависит от длины выборки по логарифмическому закону:

$$k_{\max} = \frac{1}{p} \log_2(N/s), \quad s = 4 \div 6.$$

Для $N = 19 \cdot 2^{10}$ максимальный номер k имеет порядок 30.

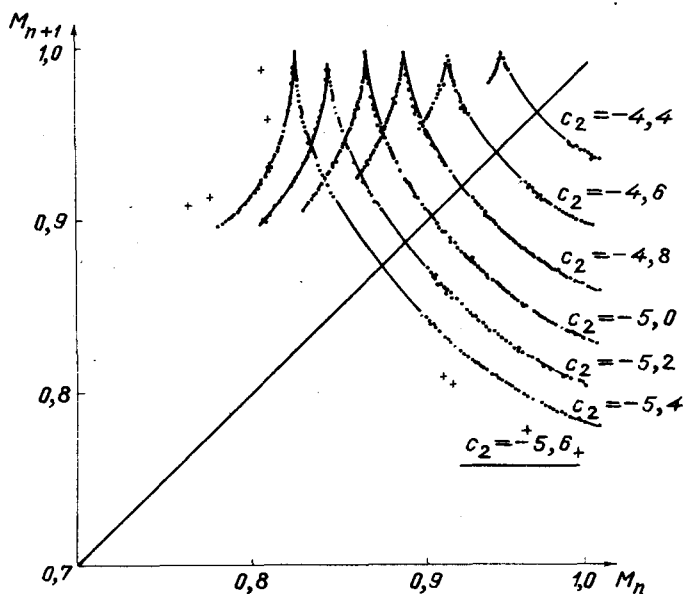


Рис. 7.23

Рассмотренный аттрактор соответствует одной точке в трехмерном пространстве параметров c_1 , c_2 , k . Встает вопрос, является ли он типичным, будут ли при близких значениях параметра наблюдаться хаотические режимы. Чтобы отве-

титель на него, удобно рассматривать семейство отображений $M_{n+1} = f(M_n)$ вдоль какой-нибудь линии. В качестве M_n возьмем n -й локальный максимум величины $\rho_0(t) = \xi^{1/2}(t)$. Отображения, возникающие на линии $c_1 = 5$, показаны на рис. 7.23. Видно, что они близки к одномерным, имеют острую вершину, что в них существуют шумящие циклы типа χ^2 . Можно ожидать, что из-за острой вершины в целом интервале изменения c_1 будут существовать хаотические аттракторы, имеющие положительный ляпуновский показатель. Расчеты подтверждают это предположение. На рис. 7.24 показано, как меняются ляпуновские показатели вдоль линии $c_1 = 7$; при $-6.4 \leq c_2 \leq -5.2$ $\lambda_1 \approx 0.2$.

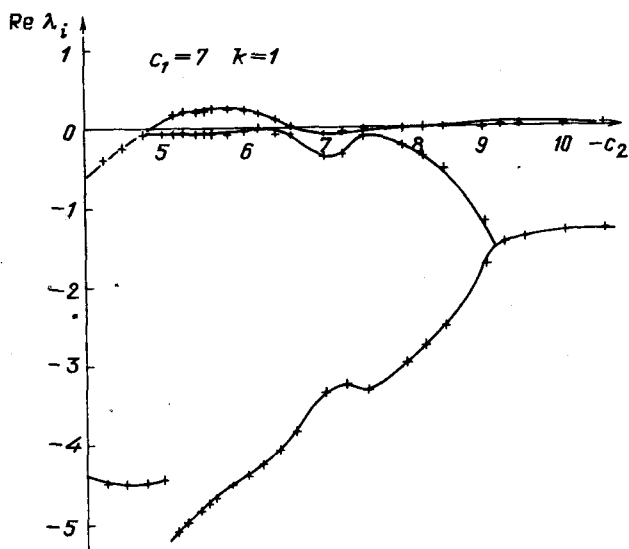


Рис. 7.24

Более того, удастся проверить, что двумерные отображения, порождаемые системой (3.15) при $c_1 = 7$, $c_2 = -5.25$, $k = 1$, удовлетворяют условиям гиперболичности. Будем снова рассматривать сечение Пуанкаре плоскостью $\theta = 2\pi$. Удобно ввести новые координаты, направив одну из них вдоль особенности (аналога линии PQ , см. рис. 7.14):

$$x = \frac{1}{\sin \alpha} [\xi \cos(\beta - \gamma) + \eta \sin(\beta - \gamma)] - 11,241/\sqrt{389},$$

$$y = \frac{1}{\sin \gamma} [\xi \cos \beta + \eta \sin \beta - 11,89/\sqrt{389}],$$

$$\operatorname{tg} \gamma = 1,3; \quad \operatorname{tg} \beta = 10/17; \quad \gamma, \beta \in [0, \pi/2].$$

Вблизи особенности двумерного отображения, зная показатель (см. формулу (7.12)), неравенства (5.13) можно проверить аналитически. Вне ее ($x \leq 0,054$, $x \geq 0,056$) расчеты позволяют оценить нормы функций, входящие в соотношения (5.13):

$$\|(\partial f/\partial x)^{-1}\|_c \approx 0,902 < 1,$$

$$\|\partial g/\partial y\|_c \approx 1,15088 \cdot 10^{-2} < 1.$$

$$\|(\partial f/\partial x)^{-1}(\partial g/\partial x)\|_c \approx 7,43121 \cdot 10^{-2} < 0,0744.$$

$$\|\partial f/\partial y\|_c \approx 2,41656 \cdot 10^{-1} < 0,242.$$

Подставляя полученные значения в неравенства (5.13), можно проверить, что все они оказываются выполнены. Таким образом, для анализа стохастических свойств обсуждаемого аттрактора могут быть использованы многие результаты гиперболической теории.

§ 7.4. Странные аттракторы в системах более высокой размерности

Исследование систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений показало, что они представляют собой сложные математические объекты. В них реализуется несколько сценариев перехода к хаосу, гистерезис, перемежаемость, кризисы аттракторов, метастабильный хаос, большинство явлений, изученных с помощью одномерных и двумерных отображений. Однако при исследовании некоторых явлений в качестве упрощенных моделей приходится рассматривать еще более сложные системы.

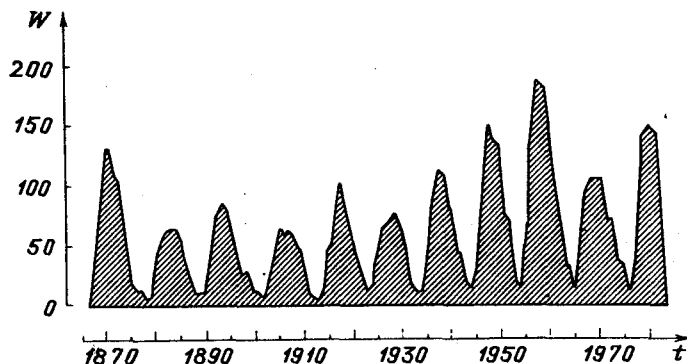
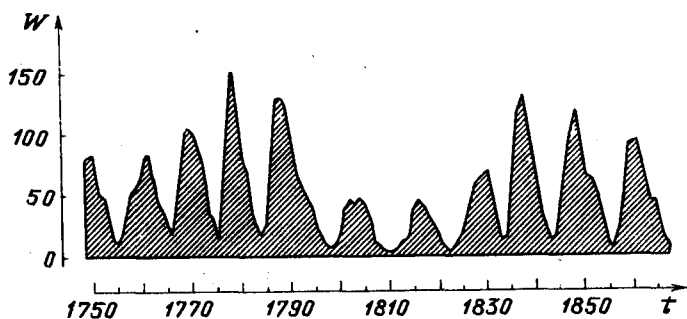


Рис. 7.25. Вариация числа пятен по Вольфу $W(t)$, характеризующая солнечную активность, построенная по результатам наблюдений [400]. Характерными являются одиннадцатилетний или двадцатидвухлетний цикл, а также колебания с периодом около 57 лет

Приведем два типичных примера.

К крупномасштабным долговременным характеристикам солнечной активности относится усредненное магнитное поле. С ним, в частности, связано изменение числа солнечных пятен, наблюдение за которыми регулярно осуществлялось с 1750 года. Известно, что усредненное магнитное поле меняется с основным периодом в 22 года. Специальный анализ показал, что поле промодулировано колебаниями с характерным периодом в 57 лет [400]. На рис. 7.25 показана вариация числа пятен по Вольфу $W(t)$ или по суммарной площади. Видно, что здесь наблюдается по крайней мере двухчастотный режим. Есть основания полагать, что существуют колебания с

еще одним периодом, порядка 360 лет [389]. Кроме того, наблюдалось глобальное ослабление солнечной активности (минимум Маундера).

Такое сложное временное поведение позволило предположить, что наблюдаемые колебания имеют стохастический характер, и высказать гипотезу о наличии странного аттрактора в динамической системе, определяющей солнечную активность [362].

Следуя работам [113, 117], будем приближенно рассматривать конвективную оболочку Солнца как плоский слой толщины h . Пусть координата z направлена перпендикулярно слою, а координаты x, y лежат в его плоскости. Бездивергентное магнитное поле можно описать двумя скалярными функциями: y – компонентами вектор–потенциала и магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \text{rot}(A(x, z, t)\mathbf{e}_y) + B(x, z, t)\mathbf{e}_y$$

Уравнения динамо представляют собой систему параболического типа для A и B с источниками, пропорциональными этим компонентам и определяемыми градиентом угловой скорости вращения плазмы и средней спиральностью – величиной, связанной с нарушением отражательной симметрии турбулентных движений из–за действия кориолисовых сил и неоднородности. При учете влияния магнитного поля на спиральность уравнения в безразмерной форме можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= (\alpha + C)B + \Delta A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= D\frac{\partial A}{\partial x} + \Delta B, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= -vC + pAB - q(\alpha + C)B^2, \end{aligned} \tag{7.14}$$

C – изменение спиральности, вызванное магнитным полем.

Параметр D пропорционален произведению источников, т. е. характерных значений угловой скорости и средней спиральности, и обратно пропорционален квадрату коэффициента

турбулентной диффузии; D служит основным параметром, определяющим бифуркации решений системы (7.14). Остальные параметры можно фиксировать, полагаясь на теоретические и феноменологические оценки.

Усредняя систему (7.14) по z и учитывая только одну гармонику по x , можно получить систему семи дифференциальных уравнений, связывающих три комплексные (a , b , c) и одну действительную (c_0) функции [141]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\sigma a + (\alpha + c_0)b + \frac{1}{2} b^* c, \\ \dot{b} &= -b + iDa, \\ \dot{c}_0 &= -\nu_0 c_0 + p \operatorname{Re}(ab^*) - q[(\alpha + c_0)bb^* + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(b^2 c^*)], \\ \dot{c} &= -\nu c + rab - q[(\alpha + c_0)b^2 + bb^* c]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

При $\nu_0 \gg \nu$ можно рассматривать систему трех комплексных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\sigma a + \alpha b + cb^*/2, \\ \dot{b} &= -b + iDa, \\ \dot{c} &= -\nu c + rab - q(\alpha b^2 + cbb^*). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Подчеркнем, что даже для качественного описания наблюдений нужно рассматривать системы более чем трех действительных уравнений. Наличие двух частот в наблюдаемой картине солнечной активности дает основание полагать, что решение находится в окрестности тора. А инвариантный тор обычно наблюдается в системах с четырьмя и большим количеством степеней свободы.

В работе [141] рассмотрено усложнение аттракторов при увеличении параметра D в системе, содержащей только квадратичные члены ($q = 0$) при $p = -1$. Модели динамо, приводящие к таким уравнениям, обсуждаются в книге [51].

Было показано, что при увеличении D точка $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ теряет устойчивость, происходит бифуркация Хопфа.

еще одним периодом, порядка 360 лет [389]. Кроме того, наблюдалось глобальное ослабление солнечной активности (минимум Маундера).

Такое сложное временное поведение позволило предположить, что наблюдаемые колебания имеют стохастический характер, и высказать гипотезу о наличии странного аттрактора в динамической системе, определяющей солнечную активность [362].

Следуя работам [113, 117], будем приближенно рассматривать конвективную оболочку Солнца как плоский слой толщины h . Пусть координата z направлена перпендикулярно слою, а координаты x, y лежат в его плоскости. Бездивергентное магнитное поле можно описать двумя скалярными функциями: y – компонентами вектор-потенциала и магнитной индукции

$$\mathbf{B} = \text{rot}(A(x, z, t)\mathbf{e}_y) + B(x, z, t)\mathbf{e}_y.$$

Уравнения динамо представляют собой систему параболического типа для A и B с источниками, пропорциональными этим компонентам и определяемыми градиентом угловой скорости вращения плазмы и средней спиральностью – величиной, связанной с нарушением отражательной симметрии турбулентных движений из-за действия кориолисовых сил и неоднородности. При учете влияния магнитного поля на спиральность уравнения в безразмерной форме можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= (\alpha + C)B + \Delta A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= D\frac{\partial A}{\partial x} + \Delta B, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= -vC + pAB - q(\alpha + C)B^2, \end{aligned} \quad (7.14)$$

C – изменение спиральности, вызванное магнитным полем.

Параметр D пропорционален произведению источников, т. е. характерных значений угловой скорости и средней спиральности, и обратно пропорционален квадрату коэффициента

турбулентной диффузии; D служит основным параметром, определяющим бифуркации решений системы (7.14). Остальные параметры можно фиксировать, полагаясь на теоретические и феноменологические оценки.

Усредняя систему (7.14) по z и учитывая только одну гармонику по x , можно получить систему семи дифференциальных уравнений, связывающих три комплексные (a , b , c) и одну действительную (c_0) функции [141]:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\sigma a + (\alpha + c_0)b + \frac{1}{2} b^* c, \\ \dot{b} &= -b + iDa, \\ \dot{c}_0 &= -v_0 c_0 + p \operatorname{Re}(ab^*) - q[(\alpha + c_0)bb^* + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(b^2 c^*)], \\ \dot{c} &= -vc + pab - q[(\alpha + c_0)b^2 + bb^* c]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

При $v_0 \gg v$ можно рассматривать систему трех комплексных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\sigma a + ab + cb^*/2, \\ \dot{b} &= -b + iDa, \\ \dot{c} &= -vc + pab - q(ab^2 + cbb^*). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Подчеркнем, что даже для качественного описания наблюдений нужно рассматривать системы более чем трех действительных уравнений. Наличие двух частот в наблюдаемой картине солнечной активности дает основание полагать, что решение находится в окрестности тора. А инвариантный тор обычно наблюдается в системах с четырьмя и большим количеством степеней свободы.

В работе [141] рассмотрено усложнение аттракторов при увеличении параметра D в системе, содержащей только квадратичные члены. ($q = 0$) при $p = -1$. Модели динамо, приводящие к таким уравнениям, обсуждаются в книге [51].

Было показано, что при увеличении D точка $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ теряет устойчивость, происходит бифуркация Хопфа.

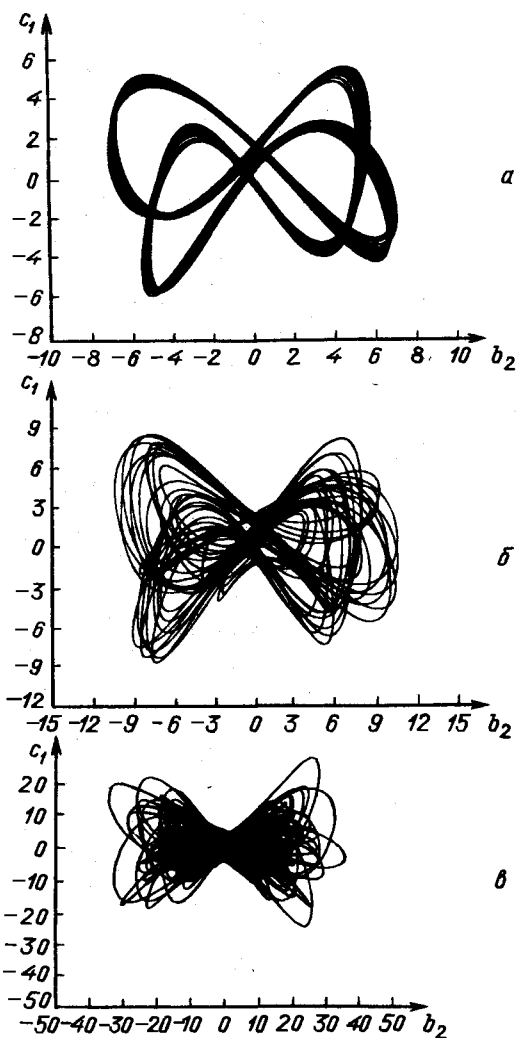


Рис. 7.26. Характерные изменения аттрактора системы (7.16) $\sigma = 1$, $\alpha = 1$, $\rho = -1$, $q = 0$, $\nu = 0,5$: а) $D = 5$. Двухчастотный режим; б) $D = 7$. Трехчастотный режим; в) $D = 25$. Хаотический аттрактор

При дальнейшем увеличении D амплитуда предельного цикла растет, и затем в системе (7.16) происходит вторая бифуркация Хопфа ($D = D_2 \leq 5,0$). Появляется вторая частота ω_2 , рождается инвариантный тор.

Затем при увеличении D в расчетах наблюдается трехчастотный режим. Отличие от традиционного сценария Рюэля – Такенса связано с симметрией системы.

В самом деле, уравнения (7.16) можно упростить, переходя к переменным

$$a = \rho e^{i\theta}, \quad b = \rho x e^{i\theta}, \quad c = y e^{2i\theta}, \quad \xi = \rho^2, \quad (7.17)$$

где ρ и θ – действительные функции, а x и y – комплексные. Можно показать, что уравнения для ξ , x и y не зависят от θ , что позволяет перейти от (7.16) к системе пяти действительных уравнений. Особым точкам в этой системе соответствуют точки или циклы в (7.16), циклам – торы 2, торам 2 – торы 3.

Затем возникают хаотические режимы. Типичный вид траекторий системы (7.16) показан на рис. 7.26.

Проведенный анализ систем уравнений (7.15), (7.16) показал, что они могут описывать трехчастотные и двухчастотные, а также стохастические режимы. При этом в обоих случаях возникает характерная картина, в которой легко можно выделить две основные частоты. Многие стохастические решения обладают следующим свойством: в течение длительного времени траектория может находиться вблизи начала координат. Следовательно, система (7.15) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к качественному объяснению явлений глубоких минимумов солнечной активности.

Если допустить, что модель (7.16) верно передает основные качественные свойства модуляции активности, то можно заключить, что такие явления, как минимумы Маундера, должны наблюдаться и в дальнейшем.

Исходя из уравнений (7.14) и считая, что основным источником генерации магнитного поля служит неоднородное вращение, можно получить другие конечномерные модели солнечного динамо [302]. В простейшем случае они сводятся к комплексным обобщениям уравнений Лоренца

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} &= Rx - x^*z - y \\ \dot{z} &= xy - \nu z .\end{aligned}$$

Величина R здесь пропорциональна D . В работе [302] подробно рассматривались сложные упорядоченные и хаотические режимы в такой системе. В некоторых случаях при увеличении R здесь также реализуется сценарий Рюэля – Такенса. Комплексные уравнения Лоренца возникают и во многих других физических задачах [268].

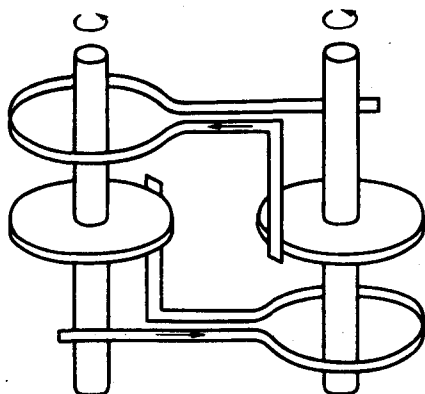


Рис. 7.27. Схема двухдискового динамо

Представления о динамическом хаосе сейчас широко используются в теории не только солнечного, но и земного динамо. Палеомагнитные исследования показали, что дипольная составляющая магнитного поля Земли в течение последних сотен миллионов лет изменяет знак нерегулярным образом. Имеющихся результатов наблюдений и данных о внутренней структуре Земли недостаточно для построения подробной магнито-гидродинамической модели. Поэтому строят более простые модели, представляющие собой динамические системы и опирающиеся на наглядные физические образы.

Базовой моделью в теории земного динамо является модель Рикитаки, предложенная в 1955 году [Д14]. Она описы-

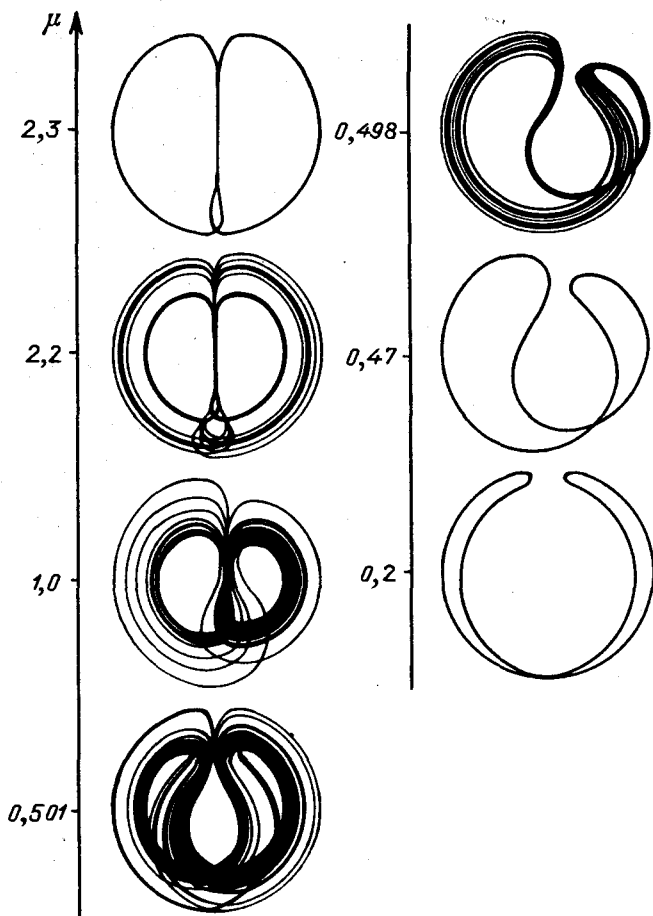


Рис. 7.29. Эволюция аттрактора в обобщенной модели Рикитаки при изменении параметра μ : $\nu_1 = 0,004$, $\nu_2 = 0,002$

Здесь x_1 и x_2 — безразмерные токи, x_3, x_4 — безразмерные угловые скорости дисков, μ — коэффициент омического диссипации, ν_1 и ν_2 — коэффициенты трения. При $\nu_1 = \nu_2 = 0$ эта модель называется системой Рикитаки. Она обладает интегралом $A = x_3 - x_4$. Для нее было обнаружено семейство странных аттракторов и выявлено, в каких областях параметров какие режимы могут наблюдаться [Д14].

Система Рикитаки обладает интегралом движения (сохраняется разность угловых скоростей дисков). Это приводит к тому, что различным значениям интеграла движения соответствуют различные установившиеся режимы, что не кажется естественным с физической точки зрения. Кроме того, она имеет неограниченные решения $x_1 = x_2 = 0, x_3 = x_4 + A = t$. Обобщенная модель (7.18), учитывающая трение и несимметрию системы, не имеет этих недостатков. Ее свойства существенно отличаются от характеристик стандартной модели. Представление о типичном хаотическом аттракторе в системе (7.18) дает рис. 7.28. Видно, что в проекции на плоскость $\{x_3, x_4\}$ он представляет собой узкую полосу шириной $\sim 0,02$ вокруг линии $x_4 = x_3 + 0,83$, т. е. величина $A = x_3 - x_4$ почти не меняется. В этом случае эффективными упрощенными моделями являются одномерные отображения.

Типичная эволюция аттрактора при изменении параметра μ показана на рис. 7.29. На нем представлены проекции на плоскость $\{x_3, x_4\}$. Расчеты показывают, что при движении вдоль этой линии в пространстве параметров происходят бифуркации, связанные с возникновением и потерей симметрии, а также бифуркации удвоения периода.

Проведенный анализ показал, что при уменьшении омического сопротивления μ переход к хаосу происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода, так же как при увеличении трения ν . Размерность хаотического аттрактора в обобщенной модели Рикитаки $3 + \varepsilon$, в то время как в стандартной модели $2 + \varepsilon$. Кроме того, наряду со странными аттракторами или предельными циклами, при тех же значениях параметров существуют устойчивые особые точки. Было бы по-

лезно проанализировать имеющиеся данные, чтобы выяснить, в какой мере они согласуются с решениями системы (7.18) [257].

Относительная простота моделей солнечного и земного динамо связана с тем, что в основном ясны механизмы процессов, приводящих к стохастическим колебаниям, а также с тем, что характерные времена различных процессов, приводящих к колебаниям, существенно отличаются. Иначе обстоит дело в другой, активно развивающейся в последние годы области – в *вычислительной геофизике*. Одной из центральных проблем в этой области является прогноз землетрясений. Известно много возможных механизмов этого явления, однако роль каждого из них обычно неясна. Возникает задача выяснить, описывается ли изучаемое явление некоторой динамической системой, определить параметры порядка и восстановить эту систему. Второй круг проблем – теоретический анализ отдельных механизмов, ответственных за наблюдаемую картину, и построение процедур, позволяющих давать прогноз. Оба класса задач тесно связаны между собой.

Развитие вычислительной геофизики показывает, что представления о самоорганизации, фракталах и странных аттракторах играют все более важную роль в этой области.

Большой областью исследований, в рамках которой изучаются модели динамического хаоса, стали хаотические колебания в радиофизике. Многие проблемы здесь связаны с разработкой генераторов шума – устройств, предназначенных для получения хаотических сигналов с заданными спектральными и статистическими свойствами. То есть в радиофизике возникает не только проблема анализа стохастических режимов, сценариев перехода к хаосу и т. д., но и задача синтеза систем с заданными свойствами.

Оригинальный подход к решению этой проблемы был развит в книге [Д7]. При конструировании систем с заданными характеристиками естественно опираться на классические результаты теории колебаний и включать в схемы проектируемых устройств минимум нелинейных элементов. Этот подход и реа-

лизуют так называемые кольцевые радиофизические системы. В них существует единственная петля обратной связи, и сигнал распространяется только в одном направлении. Они описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} T_1 \dot{X}_1 + X_1 &= F(Y_k), \\ T_2 \dot{X}_2 + X_2 &= X_1, \dots, \quad T_N \dot{X}_N + X_N = X_{N-1}, \\ \ddots \\ \dot{Y}_1 + \alpha_1 \dot{Y}_1 + \omega_1^2 Y_1 &= \omega_1^2 X_N, \dots, \\ \ddots \\ \dot{Y}_k + \alpha_k \dot{Y}_k + \omega_k^2 Y_k &= \omega_k^2 Y_{k-1} \end{aligned}$$

где T_i – постоянные времени апериодических звеньев, α_j и ω_j – коэффициенты диссипации и резонансные частоты колебательных звеньев, $F(Y)$ – характеристика нелинейного элемента. Например, $F(Z) = MZ \exp(-Z^2)$.

Анализ уравнений такого типа не только помог построить эффективные радиофизические системы, обеспечивающие хаотические колебания с заданными свойствами, но и позволил наблюдать ряд интересных явлений.

Их анализ помог прояснить качественную картину при движении в пространстве параметров в глубь области хаоса и проследить изменение количественных характеристик аттрактора. В проведенных расчетах наблюдалось, в частности, «разбухание» исходного стохастического множества в направлениях, ранее являвшихся сжимающими, и появление «выбросов» в отображении Пуанкаре.

Простейшей моделью такого вида, которая подробно изучалась, является система

$$\begin{aligned} \dot{TX} + X &= F(Z), \\ \dot{Y} &= X - Z, \\ \dot{Z} &= Y - Z/Q, \end{aligned}$$

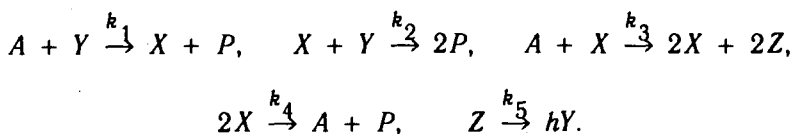
где $F(Z) = MZ \exp(-Z^2)$, описывающая автогенератор с инерционным запаздыванием [Д7]. В качестве другой базовой модели в радиофизике, ряд свойств которой подробно исследован, используют динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= mX + Y - XZ + dX^3, \\ \dot{Y} &= -X, \\ \dot{Z} &= -gZ + gI(X)X^2, \end{aligned}$$

где $I(X) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, которая описывает генератор с инерционной нелинейностью [6].

В радиофизике обыкновенные дифференциальные уравнения возникают как идеализация распределенных систем. Поэтому можно ожидать, что представления о хаотических процессах в нелинейных средах и методы анализа таких режимов будут иметь большое значение и для этой области.

Другой областью, в которой активно изучаются хаотические колебания и анализируются базовые модели, представляющие собой динамические системы со странными аттракторами, является теория колебательных химических реакций. Классическим объектом этой теории является реакция Белоузова – Жаботинского. Проведенные исследования показали, что механизм этой реакции очень сложен. Она идет во много стадий, в которых участвуют около тридцати реагентов. Отдельную проблему представляет измерение скоростей элементарных реакций. В этой связи был предложен большой класс различных упрощенных моделей. Одна из наиболее известных моделей такого типа, получившая название *орегонатор*, была предложена Р.Филдом и Р.Нойесом, работавшим в университете штата Орегон. Схема реакции, которую она описывает, имеет вид [66, 151]



Соответствующие дифференциальные уравнения могут быть записаны в виде

$$\dot{X} = \alpha(Y - XY + X - gX^2),$$

$$\dot{Y} = \alpha^{-1}(-Y - XY + fZ),$$

$$\dot{Z} = \mu(X - Z).$$

Для моделей колебательных реакций характерно наличие ведущих процессов со значительно различающимися характерными временами, что приводит к появлению малых параметров в изучаемых уравнениях. Это типично и для модели орегонатора — наибольший интерес представляет диапазон параметров $\alpha \sim 10^2$, $\mu \sim 10^{-1} \div 10^{-3}$, $g \sim 10^{-5} \div 10^{-3}$, $f \sim 1$. Релаксационные периодические колебания в модели орегонатора хорошо согласуются с наблюдаемыми в эксперименте колебаниями [151].

Однако в восьмидесятые годы активно изучались не только модели, непосредственно связанные с экспериментами, но и модели для некоторых гипотетических реакций, обладающих хаотическим поведением. Около десятка таких моделей было предложено О.Ресслером [65]. Их численный анализ продемонстрировал большое разнообразие наблюдаемых странных аттракторов. Исходя из характерных особенностей видовых проекций таких аттракторов, были введены понятия о «спиральном» и «витковом» хаосе, о гиперхаосе. Однако детальный анализ этих моделей методами современной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений по существу не проводился. Во многом остается неясным, чем обусловлены те или иные особенности наблюдаемых решений. Среди моделей, предложенных О.Рёсслером, наибольшую популярность приобрели две, часто используемые в качестве тестов для различных численных методов хаотической динамики [65].

Это система трех уравнений

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -(Y + Z), \\ \dot{Y} &= X + aY, \\ \dot{Z} &= b + Z(X - c),\end{aligned}$$

имеющая при $a = 0,15$, $b = 0,20$, $c = 10,0$ странный аттрактор (ляпуновские показатели $\lambda_1 = 0,13$; $\lambda_2 = 0,00$; $\lambda_3 = -14,1$), и система четырех уравнений,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -(Y + Z), \\ \dot{Y} &= X + aY + W, \\ \dot{Z} &= b + XZ, \\ \dot{W} &= cW - dZ,\end{aligned}$$

описывающая при $a = 0,25$; $b = 3,0$; $c = 0,05$; $d = 0,5$ гиперхаос ($\lambda_1 = 0,16$; $\lambda_2 = 0,03$; $\lambda_3 = 0,00$; $\lambda_4 = -39,0$).

Сейчас существует обширная литература, касающаяся моделей колебательных реакций в системах с идеальным перемешиванием. Вместе с тем, огромный теоретический и прикладной интерес представляет анализ хаотических колебаний в распределенных химических системах. В настоящее время анализ этого важного класса задач только начат. Можно ожидать, что изучение распределенных химических систем вдали от точки бифуркации приведет к более глубокому пониманию диффузионного хаоса и обнаружению ряда новых качественных особенностей стохастических режимов в распределенных системах.

Дальнейший прогресс в анализе колебательных химических реакций с хаотическим поведением во многом связан с совершенствованием экспериментальной техники. В настоящее время обычно удается проследить изменение сравнительно немногих степеней свободы, характеризующих систему [358].

В последние годы было обнаружено, что изменение концентраций реагентов может быть детально изучено экспериментально для ряда сравнительно медленных биохимических

реакций [66]. Это позволило выделить из большой совокупности реакций наиболее важные для моделирования колебаний, определить коэффициенты в соответствующих уравнениях. В отличие от моделей колебательных реакций, для которых характерны степенные нелинейности, в биохимических моделях возникают источники вида $f(x) = ax/(1 + bx)$.

Хотя размерность возникающих моделей сравнительно велика (обычно больше 10), с их помощью удается хорошо описывать наблюдаемую в экспериментах картину. Оказалось, что для полученных моделей характерен большой класс стохастических режимов [66].

Г Л А В А 8

ОТ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ К НЕЛИНЕЙНЫМ СРЕДАМ

Выше обсуждался ряд конечномерных динамических систем. В них существуют различные типы притягивающих множеств — циклы, неподвижные точки, инвариантные торы, странные аттракторы. Встает вопрос, есть ли у этих аттракторов аналоги в уравнениях в частных производных, описывающих нелинейные среды. Какова область применимости маломодовых систем, которые часто служат упрощенными моделями для задач в частных производных? Имеет ли место количественное соответствие между решениями таких систем и решениями исходной задачи или можно надеяться только на близкое качественное поведение?

Строгие результаты, имеющиеся в этой области, касаются двух предельных случаев. В первом случае с помощью теории бифуркаций показывается, что существование и устойчивость решений определенного типа уравнения в частных производных могут быть установлены в результате анализа конечномерной системы. Малым параметром здесь является отклонение от точки бифуркации. Поиск коэффициентов возникающей системы представляется достаточно сложной задачей [107, 143]. При использовании другого подхода удастся показать, что при $N \geq \bar{N}$ решения исходных уравнений в частных производных и N обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в результате применения метода Галеркина, в некоторой норме близки. Обычно значение \bar{N} в таких оценках оказывается достаточно велико [130].

Физический интерес зачастую представляет совершенно иная ситуация – рассматривается упрощенная модель малой размерности (p обыкновенных дифференциальных уравнений, $p \ll N$), с помощью которой хотелось бы предсказывать поведение решений различных типов исходной задачи в некоторой области параметров. (Типичным примером здесь является система Лоренца.) Применение таких моделей обычно опирается на различные физические соображения и результаты вычислительного эксперимента. При этом важно, чтобы увеличение числа гармоник в конечномерной системе не приводило к качественному изменению ее поведения.

К сожалению, система Лоренца и многие другие упрощенные модели, возникающие в задачах гидродинамики, этим свойством не обладают [244]. (Хотя сама система Лоренца может оказаться полезной моделью при анализе самых разных явлений [193, 373].) Однако при анализе систем типа реакция – диффузия картина может быть совершенно иной: между решениями исходной задачи и простейшей маломодовой системы может существовать не только качественное, но и количественное соответствие. Примером такой задачи, который далее мы рассмотрим более подробно, является поведение решений уравнения Курамото – Сузуки в случае небольших пространственных областей. Этот пример позволит выяснить, какие режимы в нелинейных средах могут соответствовать различным типам аттракторов упрощенной модели и какова область ее применимости, а также обратить внимание на ряд общих вопросов.

§ 8.1. Простейшие автомодельные решения и простые циклы

Следуя работам [17, 18, 24, 25], сравним поведение решений системы уравнений (3.15) и задачи (3.12) при $t \rightarrow \infty$. На рис. 8.1 показаны результаты расчетов для задачи в частных производных при $l = \pi$ ($k = 1$). В качестве

начальных данных использовались функции, не обладающие пространственной симметрией

$$W_0(x) = \sum_{m=0}^3 \cos(2\pi mx/l) + i \sum_{m=0}^3 \cos((2m+1)\pi x/l).$$

На плоскости параметров $\{c_1, c_2\}$ удобно выделить несколько областей, где асимптотика решений имеет один и тот же тип. Выше линии ABC (ее уравнение определяется формулой (3.10)) обе системы обладают одинаковыми свойствами. В линейном приближении здесь устойчиво пространственно однородное решение (3.9). В системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.15) ему соответствует решение $\xi = 1, \eta = 0$. При переходе через линию ABC оно также теряет устойчивость, и возникает новая устойчивая особая точка с $\xi \neq 1, \eta \neq 0$. Поэтому при $t \rightarrow \infty \quad \xi \rightarrow \text{const}, \quad \eta \rightarrow \text{const}, \quad \theta \rightarrow \text{const}$. Функции x_0, x_1, y_0, y_1 в системе (3.14) меняются по гармоническому закону.

В том же диапазоне параметров в задаче в частных производных происходит выход на решения, у которых величины $\rho_m, m = 0, 1, \dots$, и величины $\Psi_m, m = 1, 2, \dots$, постоянны.

Здесь

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} [a_m \cos(\pi mx/l) + ib_m \sin(\pi mx/l)], \quad (8.1)$$

$$a_m = \rho_m \cos \varphi_m, \quad b_m = \rho_m \sin \varphi_m, \quad \Psi_m = \varphi_m - \varphi_0.$$

Это означает, что происходит выход на автомодельное решение изучаемой задачи. Справедлива следующая лемма [19, 24].

Л е м м а 8.1. Пусть $W(x, t)$ — решение задачи (3.12). Необходимым и достаточным условием того, чтобы оно было автомодельным решением вида

$$W = R(x) \exp[i\omega t + ia(x)], \quad (8.2)$$

является выполнение равенств $\rho_n(t) = \text{const}, \quad \Psi_n(t) = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

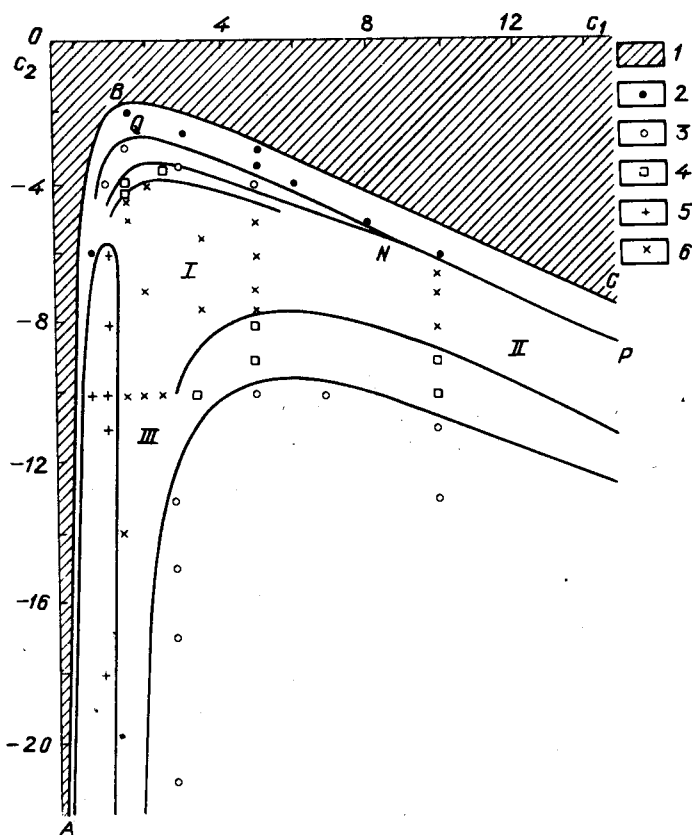


Рис. 8.1. Типы аттракторов уравнения Курамото - Сузуки в области $l = \pi$: 1 - устойчиво пространственно однородное решение, 2 - решение, у которого величины $\rho_n(t)$ не зависят от времени, 3 - решение, у которого $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют простой цикл, 4 - $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ определяют двойной цикл, 5 - четное решение, 6 - более сложные режимы. Сплошные линии приближенно указывают положение границ, на которых аттрактор меняет свой тип

Таким образом, особым точкам упрощенной системы в исходной задаче соответствуют автомодельные решения. Типичный вид функции $u(x, t)$ ($u = \text{Re}W$) в таком решении показан на рис. 8.2. Видно, что оно может описывать достаточно сложный колебательный процесс, в ходе которого локальные

экстремумы функций u , v периодически появляются и исчезают, тем не менее величина $R = (u^2 + v^2)^{1/2}$ не зависит от времени и $u(x, t) = v(x, t + \pi/(2\omega))$.

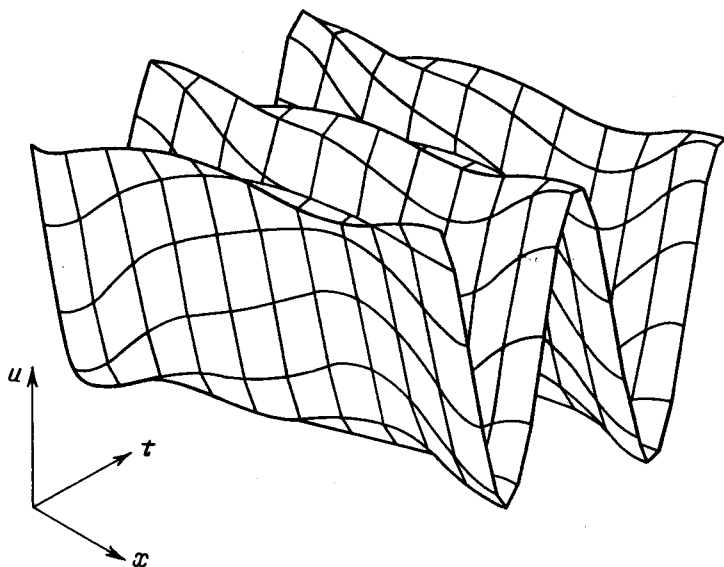


Рис. 8.2

Естественно сравнивать величины $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$, характеризующие решение задачи (3.12), со значениями $\xi^{1/2}(t)$ и $\eta^{1/2}(t)$ в системе (3.15). Замечательной особенностью модели является хорошее количественное соответствие этих функций. Примеры сравнения параметров автомодельных решений и особых точек, приведенные в работах [22, 24], показывают, что в обсуждаемой области параметров они обычно согласуются с точностью в несколько процентов. Нижняя граница области параметров, в которой асимптотику определяет автомодельное решение (участок QNP на рис. 8.1), также близка к границе устойчивости особых точек в упрощенной системе (участок QNP на рис. 7.12). На этой границе происходит бифуркация Хопфа. В приближенной системе рождается предельный цикл. В исходной задаче появляются решения, у которых функции $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ меняются периодически.

Если с различных начальных данных происходит выход на одно и то же решение задачи в частных производных, в котором $|W|$ периодически зависит от времени, то мы будем называть такое решение циклом. Выделим в нем функции $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$. Здесь снова удобно использовать обозначение S^n , где n — число оборотов, которое делает проекция решения на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$ за один период.

Можно убедиться в справедливости следующего утверждения [25].

Пусть решение задачи (3.12) таково, что

$$\rho_n(t + T) = \rho_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Psi_n(t + T) = \Psi_n(t) + 2\pi m_n, \quad m_n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

$\rho_0 \neq 0$ при $t \in [0, \infty)$. Тогда его можно представить в виде

$$W(x, t) = R(x, t) \exp[i(\omega_0 t + \omega_1(t) + a(x, t))], \quad (8.3)$$

где $R(x, t + T) = R(x, t)$, $\omega_1(t + T) = \omega_1(t)$,

$$a(x, t + T) = a(x, t) + 2\pi p, \quad p \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad \omega_0 = \text{const.}$$

Таким образом, бифуркация Хопфа в задаче (3.12) будет связана с переходом от автомодельных решений вида (8.2) к более сложным решениям вида (8.3), в которых есть две в общем случае независимые частоты.

Сравнение рис. 7.12 и рис. 8.1 показывает, что решения двухмодовой системы (3.15) и уравнения в частных производных качественно ведут себя одинаково при изменении параметров c_1 и c_2 . В обоих случаях плоскость параметров разбивается на похожие области, в которых решения не меняют свой тип. Однако границы областей несколько смещены. Это естественно: поскольку на границах происходит ветвление решений, то на их положение оказывают влияние высшие гармоники.

Выше границы перехода к сложным решениям (см. рис. 8.1) амплитуды и периоды простых циклов в системе

(3.15) и в задаче в частных производных отличаются не более чем на 10 – 15%. Ниже области сложных решений периоды циклов близки, хотя их размеры могут отличаться в несколько раз. Причиной того, что размеры не совпадают, является влияние второй гармоники [20, 25].

В упрощенной модели (3.15) в широком диапазоне изменения параметра c_2 период простых циклов от этого параметра не зависел. Оказывается, что в исходном уравнении наблюдается та же закономерность, причем значения периода в обоих случаях близки. Можно ожидать, что эффект постоянства периода характерен для многих двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации.

Во многих работах, где исследуются диссипативные структуры, отмечается независимость возникающих структур от многих параметров, их соответствие внутренним свойствам нелинейной системы. Не раз подчеркивалась независимость от начальных данных («забывание» деталей начальных данных [151, 193]), от краевых условий (эффекты локализации процессов [121]). Здесь мы видим новый тип независимости процессов от параметра. Величина c_2 определяет частоту колебаний пространственно однородного решения (3.9). Диссипативные процессы приводят к тому, что частота модуляции колебаний всей системы (которую и определяет период цикла) от c_2 не зависит.

§ 8.2. Другие автомодельные и пространственно-симметричные решения

Мы рассмотрели несколько областей параметров, где простым циклам и особым точкам двухмодовой системы удается сопоставить решения задачи в частных производных. Уменьшение значения l приводит к улучшению количественного соответствия этих решений. Однако уже при $l = \pi$ существуют области параметров, которые не могут быть предсказаны с помощью двухмодовой системы, учитывающей только нулевую и

первую гармоники. Они показывают, какие типы пространственно-временной упорядоченности могут быть характерны для больших значений l в моделях типа реакция – диффузия и других распределенных системах. Обратим внимание на одну из таких областей параметров.

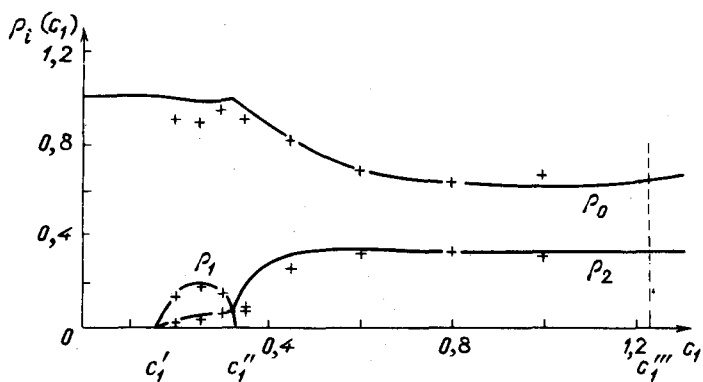


Рис. 8.3

В системе (3.12) может наблюдаться интересное явление. С начальных данных общего вида, не обладающих какой-либо пространственной симметрией, происходит выход на четные автомодельные решения вида (8.2) ($W(x, t) = W(l - x, t)$, $\rho_{2m+1} = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$). Область, где это происходит, лежит в интервале $0 < c_1 \leq 1,2$ и обозначена на рис. 8.1 как область четных автомодельных решений. В отличие от большинства открытых нелинейных систем, где происходит спонтанная потеря симметрии [151,193], здесь наблюдается ее спонтанное возникновение. При $t \rightarrow \infty$ решение обладает симметрией, которой нет у начальных данных. Четное решение удовлетворяет условию отсутствия потоков в точке $x = l/2$. Поэтому его можно получить, рассматривая асимптотику решений задачи (3.12) в области вдвое меньшей длины. Нелинейная система распадается при $t \rightarrow \infty$ на две одинаковые невзаимодействующие подсистемы. Более сложные симметричные решения, соответствующие распаду на большее число невзаимодействующих частей, могут оказаться устойчивыми в областях большей длины.

Объяснение этого явления, опирающееся на более сложную трехмодовую систему (учитывающую изменение нулевой, первой и второй гармоники), было предложено в работах [20, 22, 24]. Типичная картина изменения параметров автомодельного решения с ростом c_1 показана на рис. 8.3. Шаг по параметру c_1 здесь равен 0,01; $c_2 = -10$, $l = \pi$. Сплошные линии соответствуют решениям трехмодовой системы, маркеры — расчетам в частных производных. Видно, что они близки. При $c_1 = c'_1$ пространственно однородное решение теряет устойчивость и возникает автомодельное решение, которое в интервале $c''_1 < c_1 < c'''_1$ оказывается четным. Анализ устойчивости особых точек трехмодовой системы позволяет определить c''_1 , c'''_1 , а их координаты с высокой точностью определяют $\rho_0(c_1)$ и $\rho_2(c_1)$ в обсуждаемом диапазоне параметров. Эти результаты хорошо согласуются со значениями, найденными для задачи в частных производных.

В уравнении Курамото — Цузуки существуют аналоги аттракторов упрощенной конечномерной модели. Встает вопрос, есть ли бесконечномерные аналоги у неустойчивых точек и циклов. Ответ оказывается положительным. Приведем несколько примеров.

Оказывается, независимо от длины области l существует бесконечно много типов решений, обладающих пространственной симметрией. В работах [19, 22] были сформулированы условия, при которых часть коэффициентов Фурье решений задачи (3.12) будет равна нулю в течение всего процесса $0 < t < \infty$. Поставим в соответствие начальному распределению $W_0(x)$ последовательность целых чисел $\{L\}$ следующим образом: если $n \in \{L\}$, то $\rho_n(0) = 0$. Другими словами, $\{L\}$ содержит в себе все номера гармоник с ненулевой амплитудой (но может быть, не только их).

Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 8.2. *Если последовательность $\{L\}$ такова, что для любых чисел $m \in \{L\}$, $n \in \{L\}$ выполнено условие $m \pm n \in \{L\}$, то все коэффициенты Фурье решений задачи (3.12) с номерами $n \in \{L\}$ равны нулю при $0 < t < \infty$.*

Л е м м а 8.3. Если последовательность $\{L\}$ такова, что

1) для всех $m, n \in \{L\}$ выполнено $m \pm n \in \{L\}$,

2) для всех $m, n \in \{L\}$ выполнено $m \pm n \notin \{L\}$,

то все коэффициенты Фурье решений задачи (3.12) с номерами $n \in \{L\}$ равны нулю при $0 < t < \infty$.

Последовательность вида $\{0, m, 2m, \dots\}$, где m — любое натуральное число, удовлетворяет условиям леммы 1. Из нее, в частности, следует, что при эволюции четных начальных данных могут возникнуть только четные решения. Лемме 8.2 удовлетворяет последовательность $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.

Что же произойдет, если в области заданной длины поставить начальные данные, соответствующие различным последовательностям $\{L\}$? Из линейного анализа устойчивости пространственно однородного решения (3.9) следует, что если

$$(\pi m/l)^2 < -2(1 + c_1 c_2)/(1 + c_1^2), \quad (8.4)$$

то может возникнуть пространственно неоднородное решение, соответствующее разбиению области на m одинаковых взаимодействующих частей. Если m достаточно велико, то при $t \rightarrow \infty$ решение, сохраняя свою пространственную симметрию, будет стремиться к пространственно однородному решению (3.9). Чем больше значение l , тем больше разных m удовлетворяют неравенству (8.4), и, следовательно, тем выше должна быть размерность упрощенной системы, передающей свойства исходной задачи.

В работе [22] численно построены примеры решений, обладающих различной пространственной симметрией. Как правило, они неустойчивы. Однако решения, соответствующие одной последовательности $\{L\}$, выходят на одно и то же предельное симметричное решение, независимо от конкретного вида начальных данных (важен только тип их симметрии).

Конечномерный аналог нечетных решений с $\{L\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ есть и в простейшей двухмодовой системе (3.14) — это решение

$$\bar{\rho}_1 = \sqrt{4(1 - k^2)/3}, \quad \dot{\psi} = \omega = -3c_2\bar{\rho}_1^2/4 - c_1k^2,$$

$$\rho_0 = 0 \quad (k \leq 1),$$

которое неустойчиво относительно возмущений с $\rho_0 \neq 0$. При $l < 4\pi \div 5\pi$ значения $\bar{\rho}_1$ и ω хорошо согласуются с нечетными решениями задачи в частных производных [21].

§ 8.3. Пространственно-временная упорядоченность, не имеющая аналога в двухмодовой системе.

Задача построения полного набора автомодельных решений

Сравнение рис. 7.12 и рис. 8.1 показывает, что вторая область параметров, где решения исходной задачи и упрощенной двухмодовой системы качественно отличаются друг от друга, лежит при $c_2 \rightarrow -\infty$. В упрощенной системе существует устойчивая особая точка, в распределенной системе устойчив простейший цикл (т. е. решение типа (8.3), проекция которого на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$ совершает один оборот за период). Его период медленно уменьшается с уменьшением параметра c_2 и при $c_2 < -400$ становится постоянным. Размеры цикла меняются по закону $\sim |c_2|^{-1/2}$. Семейство циклов в этой области параметров показано на рис. 8.4. Здесь решения исходной задачи и уравнения

$$W_t = W + (1 + ic_1) W_{xx} - ic_2 |W|^2 W \quad (8.5)$$

оказываются близки. Несмотря на то, что пространственно однородные решения последнего уравнения неограниченно возрастают при $t \rightarrow \infty$, его анализ может оказаться очень полезным.

Поскольку $|W| \sim |c_2|^{-1/2}$ при $c_2 \rightarrow -\infty$, то $\rho_0(t)$ и $\rho_1(t)$ близки к нулю. Аналог такого решения в двухмодовой системе должен лежать вблизи начала координат, там, где

величина Ω (см. формулу (7.6)) строго положительна и, следовательно, устойчивых циклов нет. Этим обусловлено различие в поведении решений исходной задачи и упрощенной модели.

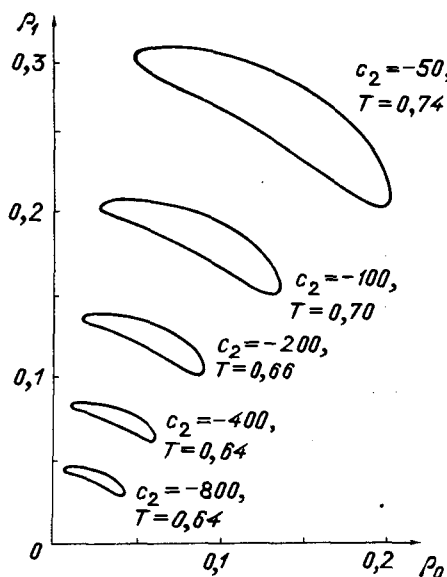


Рис. 8.4

Расчеты показывают [19], что при $c_1 = 3$ и $c_2 \rightarrow -\infty$, $l = \pi$ три-четыре первых коэффициента Фурье функции W сравнимы между собой. Для описания таких решений в уравнении (3.12) нужно учитывать по крайней мере четыре гармоники.

В работе [361] была подробно исследована упрощенная двухмодовая система для уравнения (8.5). В ней были численно найдены стохастические режимы и упорядоченные решения различных типов. Возможно, их аналоги существуют и в уравнении (8.5). Этот вопрос было бы интересно исследовать.

Обычно анализ количества и устойчивости стационарных или автомодельных решений модельных уравнений, возникающих в теории систем реакция - диффузия, удается провести только с помощью численных методов. По-видимому,

исключением является модельное уравнение для систем с малой диффузией, обсуждавшееся в гл.3:

$$W_t = W_{xx} - 2\pi\theta iW_x + (a - \pi^2\theta^2)W + bW|W|^2,$$

$$\operatorname{Re} [W_x(0, t)] = \operatorname{Re} [W_x(1, t)] = \operatorname{Im} [W(0, t)] = \operatorname{Im} [W(1, t)] = 0.$$

При $b > 0$ и целых k оно имеет семейство решений

$$W = A \exp(ik\pi x), \quad A^2 = (a - \pi^2(\theta - k)^2)/|b|.$$

Замена переменных $W = A \exp(ik\pi x) \psi(x, t)$ сводит задачу анализа их устойчивости к изучению устойчивости решения $\psi = 1$ уравнения

$$\psi_t = \psi_{xx} - 2\pi(\theta - k)i\psi_x + [a - \pi^2(\theta - k)^2]\psi - |b|A^2\psi|\psi|^2,$$

$$\operatorname{Re}[\psi_x(0, t)] = \operatorname{Re}[\psi_x(1, t)] = \operatorname{Im}[\psi(0, t)] = \operatorname{Im}[\psi(1, t)] = 0.$$

Можно проверить, что решение $\psi = 1$ будет устойчиво при условии

$$a/3 + \pi^2/6 > \pi^2(\theta - k)^2.$$

Последнее неравенство позволяет найти область устойчивости решений $A \exp(ik\pi x)$ для различных значений k (см. рис. 8.5). Поскольку линейной заменой переменных коэффициент b можно сделать единичным, от этого параметра устойчивость не зависит. Из рисунка видно, что при больших a устойчивы несколько решений. Однако проведенные численные расчеты [ДЗ] показывают, что с ростом $|k|$ область притяжения решений быстро уменьшается.

Если в уравнении Курамото - Цузуки данной системе типа реакция - диффузия соответствовал один набор параметров c_1, c_2, l , то здесь каждой системе отвечает целый отрезок $a = \operatorname{const}$ и $-1 < \theta \leq 0$. Асимптотический анализ не позволяет указать, какое из устойчивых решений будет реализовываться. Так как при $a = \operatorname{const}$ их существует несколько (см. рис. 8.5), то обсуждаемое уравнение обладает чувствительностью по отношению к малому параметру: при $\epsilon \rightarrow 0$ вид решения многократно меняется.

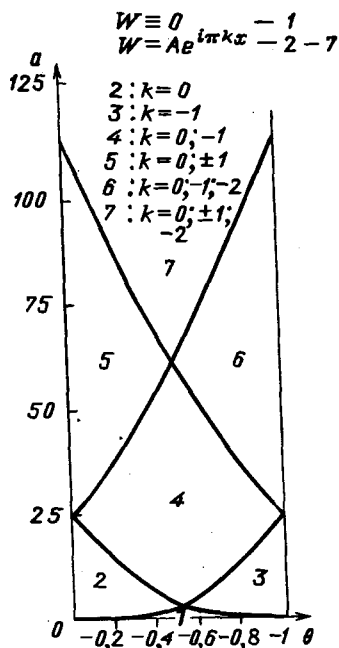


Рис. 8.5

Выше обсуждалось изменение решений задачи (3.12) при различных значениях c_1 , c_2 , когда длина области была фиксирована. Вместе с тем, во многих случаях важно представлять, как меняется решение при изменении l . Анализ стационарных диссипативных структур для систем реакция – диффузия в такой постановке привел к обнаружению зоной структуры: при увеличении длины области структуры могут многократно появляться и исчезать (в последнем случае пространственно однородное решение вновь становится устойчивым) [104]. Зонная структура была обнаружена при исследовании модели гетерогенной каталитической реакции на проволочке

$$\theta_t = D_1 \theta_{xx} - q\theta + f(1-\eta) \exp(\theta/(1 + \beta\theta)),$$

$$\eta_t = D_2 \eta_{xx} - v\eta + k(1 - \eta) \exp(\theta/(1 + \beta\theta))$$

(θ здесь характеризует температуру, η – глубину превращения).

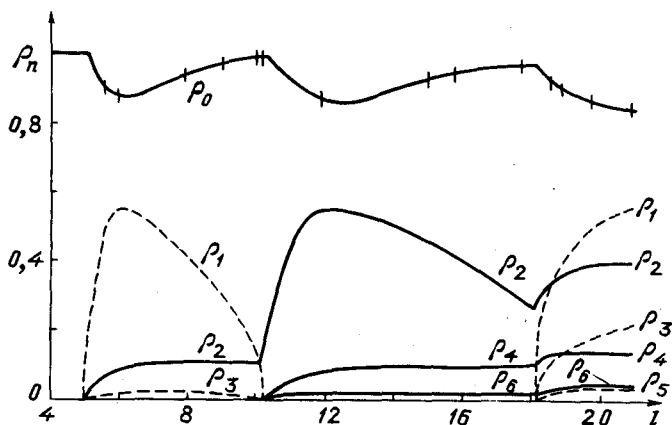


Рис. 8.6

Примеры изменения решений задачи (3.12) при росте l были приведены в работах [19, 338]. О границах применимости двухмодовой системы позволяют судить результаты расчетов, представленные на рис. 8.6. На нем показано, как ведут себя параметры автомодельных решений ($\rho_n(t)$ при $t \rightarrow \infty$) при различных l . Здесь $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, значения l , при которых проводились расчеты, помечены на рисунке вертикальными отрезками. При $l = \pi(5/2)^{1/2} \approx 5$ пространственно однородное решение теряет устойчивость, и далее асимптотику определяет автомодельное решение вида (8.2). Вначале наибольшие амплитуды имеют нулевая и первая гармоники. Поведение системы хорошо описывает упрощенная модель (3.15). Затем первая гармоника убывает, но модель (3.15) можно использовать, положив $k = 2\pi/l$. Начиная с $l \approx 18$, число гармоник с близкими амплитудами быстро возрастает. При $l \approx 22$ в системе наблюдается сложный колебательный режим. Вопрос о простых и эффективных упрощенных моделях в этой области параметров пока остается открытым.

Выше обсуждались аналоги простейших аттракторов динамических систем в задаче (3.12). Но в динамических систе-

мак различные аттракторы могут сосуществовать при одних и тех же значениях параметров. Естественно полагать, что в нелинейных средах также могут одновременно существовать несколько типов упорядоченности. В зависимости от начальных данных будет наблюдаться тот или иной из них.

Эксперименты с течением Куэтта – Тейлора показали, что при некоторых значениях параметров могут наблюдаться более ста различных устойчивых режимов. Среди них периодические и многочастотные режимы и несколько типов хаоса [376]. Поэтому возникает вопрос о том, каков полный набор диссипативных структур, возможных в данной распределенной системе. Ответ на него требует построения полного набора решений определенного типа в изучаемых уравнениях и выяснения «правил отбора» – решения вопроса об устойчивости каждого из них. Важной и трудной задачей является определение областей притяжения различных решений.

Примером нелинейных диссипативных систем, для которых эти вопросы решены, являются среды, описываемые уравнением (2.1). В этом случае при $t \rightarrow \infty$ могут существовать только неограниченные решения или стационарные структуры. Последние определяются решениями уравнения

$$T_{xx} + Q(T) = 0, \quad (8.6)$$

которое представляет собой простую консервативную динамическую систему (описывающую движение материальной точки в заданном потенциале). Как мы уже упоминали, вопрос об устойчивости различных решений также решается аналитически – все решения, имеющие несколько экстремумов во внутренних точках отрезка, неустойчивы [90].

Полный набор автомодельных решений вида (8.2) может быть построен для уравнения Курамото – Цузуки при $c_1 = c_2$. В работе [36] было показано, что уравнение для функции $R(x)$ может быть приведено к виду (8.6), и с помощью эллиптических интегралов получены аналитические решения. Однако поиск всех решений краевой задачи требует специальных

алгоритмов. Графический метод решения этой задачи был предложен в работе [21]. Численные расчеты показали, что здесь (так же как в системе (2.1)) устойчивым оказывается самое простое решение, у которого функция $R(x)$ имеет минимальное количество экстремумов [21].

Важной задачей было бы построение численных алгоритмов или приближенных аналитических методов, позволяющих строить полный набор стационарных структур в системах реакция – диффузия и все автомодельные решения уравнения Курамото – Сузуки в областях заданной длины. По-видимому, в настоящее время эта задача не решена.

Уравнения, определяющие автомодельные решения уравнений в частных производных, могут оказаться достаточно сложными. Динамические системы, описывающие автомодельные решения, могут иметь странные аттракторы. В этом случае говорят о пространственном хаосе в нелинейных системах.

Пример такого хаоса дают решения уравнения Курамото – Сивашинского, имеющие вид

$$u(x, t) = -c^2 t + v(x).$$

Их конфигурация определяется уравнением

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = c^2 - \frac{y^2}{2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (y = \frac{dv}{dx}). \quad (8.7)$$

В работе [333] было показано, что при малых значениях c^2 существует одно периодическое и бесконечное множество квазипериодических решений, при больших c^2 решение единственно и имеет коническую форму. С помощью численного анализа было установлено, что при промежуточных значениях c^2 (ниже $c^2 \approx 1,6$) для каждого значения c^2 существует континуум нечетных квазипериодических функций $u(x)$ или канторово множество хаотических решений, чередующихся с бесконечной последовательностью профилей $u(x)$ конической формы.

Пространственный хаос может возникать в диссипативных нелинейных средах, в которых источники и стоки периоди-

ески зависят от пространственной координаты, например в системах, которые описываются уравнением

$$A_t = \mu A + A_{xx} - A^3 + v \sin kx. \quad (8.8)$$

При $v = 0$ такие среды обладают триггерными свойствами, и элементарные структуры здесь описываются формулой

$$D(x) = \pm \sqrt{\mu} \tanh\left[\left(\frac{1}{2} \mu\right)^{1/2} x\right].$$

Можно предложить упрощенную конечномерную модель, считая, что при $v \neq 0$ решение будет представлять собой набор N элементарных структур, взаимодействующих между собой по определенному закону. При этом эволюция системы будет описываться N обыкновенными дифференциальными уравнениями, связывающими координаты x_1, \dots, x_N элементарных структур [240].

Наличие членов с четвертой и более высокими производными также может приводить к появлению стационарных хаотических решений. Такие решения, в частности, были обнаружены [240] в уравнении

$$A_t = \mu A + A_{xx} - A^3 - A_{xxxx}. \quad (8.9)$$

Создание хаотической пространственной структуры во многих физических задачах представляет большой интерес. Классической задачей физики твердого тела является задача о прохождении электрона через кристаллическую решетку с периодическим потенциалом. Как правило, электрон движется как волна, параметры которой зависят от характеристик кристалла. А теперь допустим, что нам удалось создать хаотическую, нерегулярную решетку. Удивительный результат состоит в том, что движение электрона в таком потенциале качественно меняется. Он оказывается локализованным на определенном участке пространства. Причем сами нерегулярности могут иметь очень малую амплитуду. Важно, чтобы они

были хаотичны. Это явление, называемое локализацией Андерсона, имеет большое теоретическое и прикладное значение [3].

Другая физическая задача связана с поиском и изучением так называемых «турбулентных кристаллов» [360] или квазикристаллов. Простейший пример такого кристалла дает решетка, в узлах которой атомы нескольких веществ чередуются хаотическим образом. Примеры фигур, которые могут заполнять плоскость только непериодическим образом, известны в современной геометрии [35], однако кристаллы такого типа были обнаружены только в последние годы [367].

Представления о хаотической пространственной структуре все шире используются в астрофизике, теории элементарных частиц, теории магнетизма. Поэтому можно ожидать, что исследование нелинейных диссипативных сред, в которых могут существовать хаотические пространственные структуры, также будет быстро развиваться.

Отметим, что при изучении пространственного хаоса в уравнениях (8.7), (8.8), (8.9) возникают консервативные динамические системы (в уравнении (8.8) с периодическим внешним воздействием). Это позволяет использовать многие результаты, полученные при исследовании временного хаоса в гамильтоновых системах [87].

По-видимому, дальнейшие исследования позволят выделить несколько основных универсальных сценариев возникновения пространственного хаоса.

Обратим внимание на один класс задач, связанных с анализом пространственно-временной упорядоченности, изучение которого в настоящее время только начато. Исследование автомодельных решений приводит к необходимости изучать краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений либо для эллиптических уравнений в многомерном случае. Вместе с тем некоторые нелинейные уравнения имеют частные решения, построение которых оказывается более сложным. Их примером могут служить решения уравнения Курамото – Сузуки вида (8.3). Близкие задачи возникают при

поиске бризеров в системах, близких к интегрируемым, т. е. решений, по форме близких к одному или нескольким солитонам, у которых амплитуда периодически меняется со временем [180].

В этой главе мы обсудили пример перехода от простой маломодовой системы к уравнению в частных производных. Этот переход оказался очень эффективным, поскольку влияние гармоник, не учтенных в упрощенной модели, было невелико (в нашем случае это было связано с небольшой длиной области). Базис, взятый при построении конечномерной модели, получался в результате решения линейаризованной задачи.

Однако в последнее время появились интересные задачи, где переход к конечномерной системе происходит иначе. Нелинейные среды в этих случаях описываются уравнениями в частных производных, близкими к вполне интегрируемым системам [208]. Уравнения такого типа возникают, например, в нелинейной оптике. При этом в качестве базиса берется набор солитонов – решений нелинейного уравнения. Конечномерные системы небольшой размерности здесь также оказываются очень полезными. К таким задачам мы вернемся, рассматривая стохастические режимы.

Г Л А В А 9

ДИФФУЗИОННЫЙ ХАОС И ДРУГИЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

В последние годы было показано, что для многих диссипативных систем характерны не только временная или пространственная стохастичность, обсуждавшиеся выше, но и более сложный пространственно-временной хаос. Оказалось, что в системах реакция – диффузия, обладающих колебательной кинетикой, могут существовать стохастические режимы. Поскольку в этом случае сосредоточенная система ведет себя простым регулярным образом, и сложное поведение связано с влиянием диффузионных членов, это явление получило название диффузионного хаоса. Диффузионный хаос вызывает большой интерес по нескольким причинам.

Модели типа реакция – диффузия, в которых сосредоточенная система обладает автоколебательной кинетикой (например, имеет один или несколько предельных циклов), широко распространены. Они возникают при анализе колебательных реакций, в ряде задач экологии, в некоторых физических моделях. В каждом из этих случаев эксперименты по исследованию диффузионного хаоса были бы очень важны. Они могли бы привести к обнаружению нового класса турбулентных режимов.

Теоретическое (а возможно, и экспериментальное) изучение диффузионного хаоса оказывается более простым и доступным, чем анализ маломодового хаоса во многих гидродина-

мических системах. При исследовании большинства проблем гидродинамики необходимо рассматривать многомерные задачи. Это обстоятельство и другие трудности численного моделирования турбулентных течений приводят к тому, что оценка результатов, полученных в этой области, данная пятнадцать лет назад, в большой степени остается справедливой и сейчас: «... Для полных уравнений Навье – Стокса мы не только не знаем ни одного турбулентного решения, но даже не известно, существует ли такое. Как должен выглядеть стохастический аттрактор у турбулентного течения, тоже неясно» [142]. Даже в тех случаях, когда удается выяснить, что в данном эксперименте турбулентное течение определяется аттрактором небольшой размерности, построить простые конечномерные модели, описывающие это явление, обычно не удается.

В случае диффузионного хаоса ситуация оказывается иной. Было показано, что существует ряд простых и эффективных динамических систем, описывающих пространственно-временной хаос в системах типа реакция – диффузия. Вместе с тем уравнение (3.12), которое может описывать диффузионный хаос, является упрощенной моделью некоторых гидродинамических систем [5, 375], и, возможно, анализ этого явления позволит продвинуться в понимании гидродинамической турбулентности.

Анализ диффузионного хаоса оказывается очень полезным с точки зрения математической физики. Решения большинства изученных к настоящему времени эволюционных уравнений в частных производных ведут себя достаточно просто – при $t \rightarrow \infty$ в них происходит выход на стационарные, периодические по времени или другие автомодельные решения. Однако при анализе нелинейных математических моделей, число которых быстро возрастает, по-видимому, часто будут возникать установившиеся стохастические режимы. Одним из прообразов таких режимов и является диффузионный хаос.

§ 9.1. Диффузионный хаос в малых областях

В первых численных расчетах задач (3.8) и (3.21) (или их аналогов с периодическими краевыми условиями) было обнаружено сложное непериодическое поведение [317, 396]. Такие режимы были получены также при изучении модели брюсселятора. Это и позволило ввести представление о диффузионном хаосе (или о диффузионной химической турбулентности) как о новом типе стохастичности в химических реакциях, идущих в распределенных системах.

Было выделено два типа таких режимов — фазовая и амплитудная турбулентность. В первом случае, если следить за движением точки $u(\bar{x}, t)$ и $v(\bar{x}, t)$ на плоскости (u, v) , то окажется, что при разных значениях \bar{x} траектории близки к одному и тому же предельному циклу (который характеризует сосредоточенную систему). Однако их фазы (положение точки на цикле) могут хаотически меняться при изменении пространственной координаты \bar{x} . Для описания такой ситуации можно использовать уравнение Курамото — Сивашинского (3.21).

При амплитудной турбулентности траектории каждой точки $u(\bar{x}, t)$, $v(\bar{x}, t)$ на плоскости (u, v) для разных точек \bar{x} могут существенно отличаться друг от друга и вести себя хаотическим образом. В определенном диапазоне параметров этот тип диффузионного хаоса может описываться уравнением (3.8).

Дальнейший анализ стохастических режимов в распределенных системах привел к постановке нескольких вопросов.

Как связано явление диффузионного хаоса со странными аттракторами динамических систем небольшой размерности? «Важная и не решенная пока проблема состоит в том, чтобы найти связь диффузионного хаоса с каким-либо известным типом хаоса в системах с несколькими степенями свободы» [311].

Каков сценарий перехода от простых упорядоченных режимов к хаосу при изменении параметров системы?

Какие численные алгоритмы эффективны при исследовании таких режимов?

Обсуждение этих вопросов естественно начать с наиболее простого случая небольших областей.

Ранее сравнивались простейшие аттракторы двухмодовой системы с одночастотными и двухчастотными режимами в уравнении (3.12) для $l = \pi$ ($k = 1$) (см. рис. 7.12, 8.1). Естественно продолжить это сопоставление и рассмотреть более сложные решения.

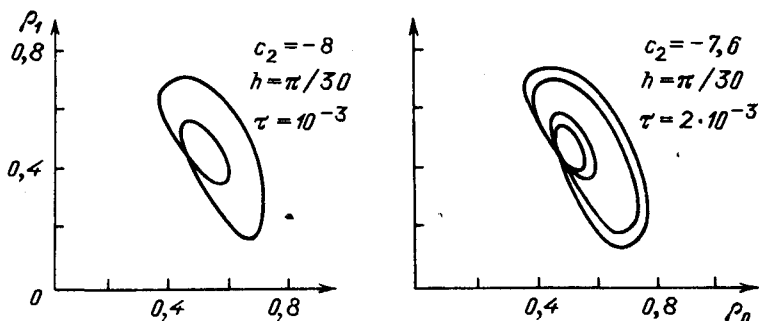


Рис. 9.1

Следуя работам [19, 20, 23], рассмотрим изменение решений задачи (3.12) при $c_1 = 5$. Будем увеличивать значение c_2 , двигаясь к области диффузионного хаоса снизу. По аналогии с двухмодовой системой можно ожидать, что здесь происходят бифуркации удвоения периода.

Для выяснения сценария перехода к хаосу идеально было бы найти все точки бифуркации и построить бифуркационную диаграмму. Однако при изучении уравнений в частных производных обычно это не удается сделать. Поэтому ищутся различные типы упорядоченности, характерные для одного из известных сценариев перехода к хаосу, и простейшие конечномерные модели, описывающие наблюдаемую картину.

При $c_1 = 5$, $c_2 = -10,0$ асимптотику решений задачи в частных производных определяет простой цикл S^1 . При увеличении параметра c_2 появляется устойчивый цикл S^2 и далее S^4 (рис. 9.1). (Напомним, что цикл в задаче (3.12) пред-

ставляет собой решение вида (8.3.) При $c_2 = -7,4$ существует устойчивый цикл S^8 , а при $c_2 = -7,35$ — S^{16} .

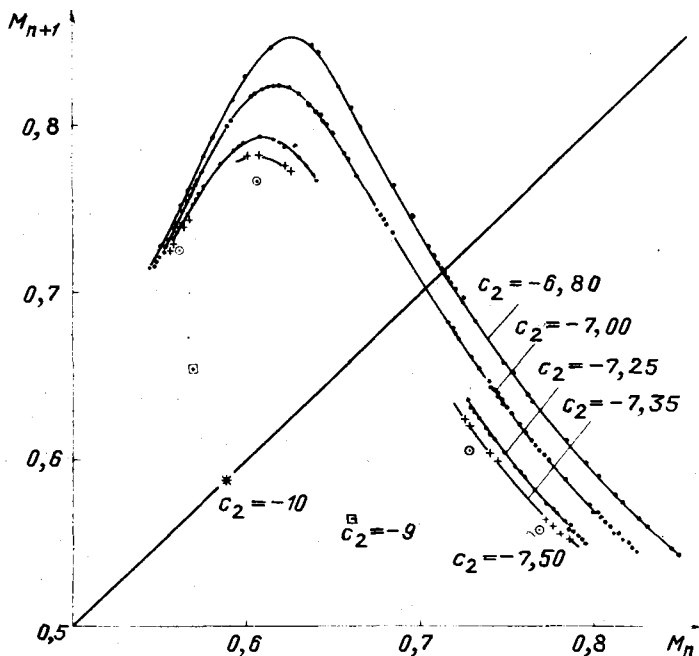


Рис. 9.2

Вновь будем следить за значениями локальных максимумов функции $\rho_0(t)$. По оси абсцисс отложим значения n -го максимума, по оси ординат $n+1$ -го: M_{n+1} , где $n = 1, 2, 3, \dots$. Точки (M_n, M_{n+1}) с высокой точностью ложатся на непрерывные однозначные кривые, показанные на рис. 9.2. Поэтому в качестве упрощенной модели, описывающей наблюдаемую картину, можно использовать семейство одномерных отображений

$$M_{n+1} = f(M_n, c_2). \quad (9.1)$$

Из рис. 9.2 видно, что эти одномерные отображения имеют гладкую вершину, и при увеличении параметра c_2 амплитуда функции f растет. Теми же свойствами обладает семейство отображений (4.3). Переход к хаосу в (4.3) происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

Далее наблюдается обратный каскад удвоений периода, что приводит к последовательности переходов $\chi^{2^n} \rightarrow \chi^n$. Наличие гладкой вершины приводит к существованию «оконной структуры» – в любой окрестности хаотического режима существуют устойчивые циклы. При этом после первого каскада бифуркаций удвоения периода возникают устойчивые циклы, не относящиеся к типу S^{2^n} . Можно ожидать, что свойства этого семейства отображений будут близки к свойствам семейства (9.1).

Проведенные расчеты [18, 20, 23] показали, что при увеличении параметра c_2 в задаче в частных производных последовательно возникают шумящие циклы χ^4, χ^2, χ^1 . В силу ограниченной точности расчетов решения, имеющие $\sim 3 \times 10^2$ различных максимумов, считались непериодическими. Отображение $M_{n+1} = f(M_n)$ для одного из решений типа χ^2 показано на рис. 9.2 ($c_2 = -7,25$). В промежутке между непериодическими решениями действительно существуют устойчивые сложные циклы, один из которых показан на рис. 9.3.

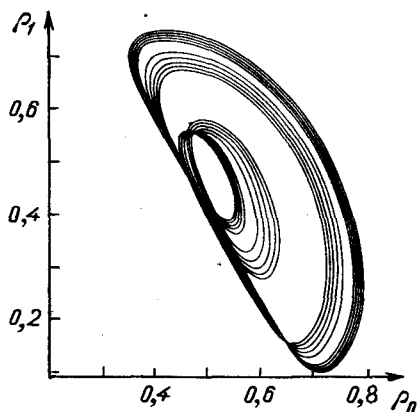


Рис. 9.3

Возможность выделить отображение, близкое к одномерному, говорит о небольшой размерности (порядка $3 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$) аттрактора в исходной задаче и намного упрощает ее исследование. Чтобы построить функцию f , достаточно 100 –

300 элементов последовательности $\{M_n\}$. Для получения простейших статистических характеристик с такой же точностью нужны гораздо большие выборки. Например, чтобы построить гистограмму, на 5 – 10% отличающуюся от инвариантной меры, с шагом $\sim 10^{-3}$, потребовалось бы $\sim 10^5$ локальных максимумов функции $\rho_0(t)$.

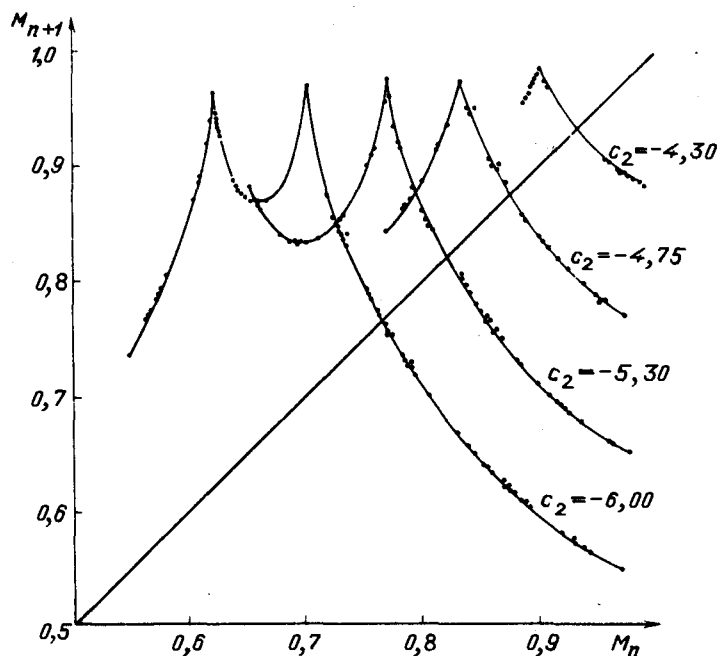


Рис. 9.4

Пользуясь результатами теории одномерных отображений, можно предсказать различные типы упорядоченности и стохастические режимы в семействе отображений (9.1). Естественно искать их в исходной задаче при близких значениях параметра. (Напомним, что в действительности точки $\{M_n, M_{n+1}\}$ не лежат строго на какой-либо кривой, а находятся в некоторой ее окрестности. Кроме того, зависимость (9.1) известна только приближенно в силу конечности выборки.)

До сих пор мы увеличивали параметр c_2 , двигаясь к области сложных решений снизу. Теперь поступим иначе,

уменьшая параметр c_2 и двигаясь к ней сверху от упорядоченных режимов. Семейство одномерных отображений, возникающих при этом, показано на рис. 9.4. Мы видели, что в семействах с острой вершиной сценарий перехода к хаосу может быть очень сложным. В проведенных расчетах при $c_2 = -4,1$ и $c_2 = -4,16$ наблюдались соответственно устойчивые циклы S^1 и S^2 , однако переход к стохастическим режимам в этом случае подробно не исследовался. Появляющиеся далее стохастические режимы порождают одномерные отображения. Вначале функция f имеет один острый максимум, как и в случае двухмодовой системы (см. рис. 7.23).

В упрощенной модели (3.15) при уменьшении параметра c_2 отображения оставались непрерывными, однозначными и имеющими один острый максимум. В уравнении в частных производных функция f ведет себя более сложным образом. Если уменьшать параметр c_2 , то решение изменяется так, что у функции f появляется минимум (см. рис. 9.4) ($c_2 \approx -5,3$), а затем еще один острый максимум ($c_2 \approx -6,0$). (Такое же явление наблюдалось и в некоторых системах обыкновенных дифференциальных уравнений и, в частности, в системе Лоренца при определенных значениях параметров [373].) При $c_2 \approx -6,0$ однозначность отображения (9.1) теряется, решение задачи в частных производных по-прежнему непериодично. Потом происходит еще одна перестройка, после которой функция f становится гладкой и однозначной (см. рис. 9.2).

Рассмотрим теперь область параметров III (см. рис. 7.12). В двухмодовой системе здесь наблюдаются непериодические решения, в которых зависимость $M_{n+1}(M_n)$ не определяет одномерных отображений. Оказывается, такое изменение не связано с увеличением размерности аттрактора. Поясним это обстоятельство.

При исследовании систем N обыкновенных дифференциальных уравнений часто рассматривают расположение точек пересечения траекторий с некоторой секущей поверхностью и соответствующие $(N-1)$ -мерные отображения (в системе (3.15)

локальные максимумы $\rho_0 = 0$). Если поверхность выбрана неудачно, то некоторые витки не будут пересекать ее, другие же могут пересекать несколько раз. В этом случае свойства отображения и исходных уравнений существенно отличаются.

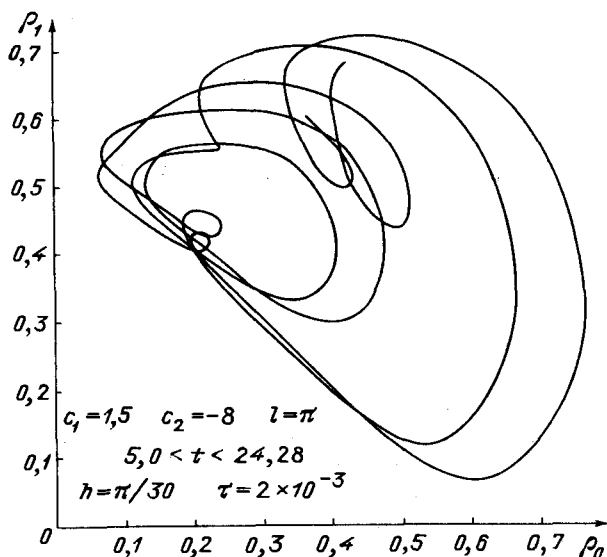


Рис. 9.5

Решения системы (3.15) в указанной области параметров действительно устроены так, что на некоторых витках функция $\rho_0(t)$ несколько раз достигает локального максимума. (Причиной является появление устойчивой особой точки на линии EF [20].) Если учесть этот факт и выбросить из последовательности $\{M_n\}$ «лишние» элементы, то оставшиеся точки будут определять одномерное отображение.

Близкая картина наблюдается и в уравнении в частных производных.

На рис. 9.5 показана проекция типичного неперiodического решения на плоскость $\{\rho_0, \rho_1\}$ в этой области параметров. Видно, что на различных витках $\rho_0(t)$ имеет различное количество максимумов. При некоторых значениях параметра

точки $\{M_n, M_{n+1}\}$ заполняют целые участки плоскости, например так, как показано на рис. 9.6.

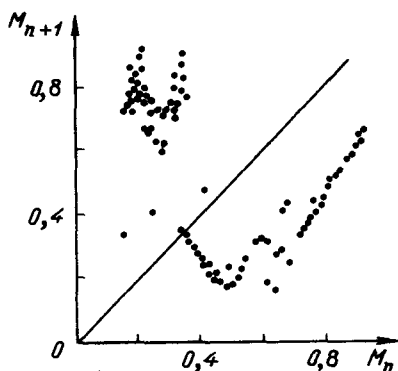


Рис. 9.6

В уравнении (3.8) могут реализоваться и другие сценарии возникновения хаоса. В работе [338] подробно рассмотрена задача Коши ($-\infty < x < \infty$) для уравнения (3.8) с начальными данными вида

$$W(x,0) = 1 + 0,2 \cos(qx), \quad (9.2)$$

(что эквивалентно второй краевой задаче с условиями отсутствия потоков на границах отрезка $[0, \pi/q]$).

Исследовалось поведение решений при $t \rightarrow \infty$ в зависимости от двух параметров c_0 и q ($c_1 = -c_2 = 1/c_0$). Положив $c_0 = 0,25$ и уменьшая q (что эквивалентно увеличению длины области), авторы наблюдали рождение предельного цикла в результате бифуркации Хопфа (в переменных ρ_n ; в исходных переменных это рождение 2-тора из предельного цикла), затем появление 2-тора (3-тора в исходных переменных) и хаотические режимы.

В этой работе использовались различные методы обработки решений, однако очень эффективным оказался следующий подход. Величина $|W(x,t)|^2$ разлагалась в ряд Фурье $|W(x,t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(nqx)$, и рассматривалось поведение точек на траектории таких, что $\alpha_0 = 0,01$ и $\frac{d\alpha_0}{dt} > 0$ (неко-

торый аналог сечения Пуанкаре в бесконечномерной системе). На плоскости (α_1, α_2) выбиралась точка H и вводилась система отсчета, что позволяло проекциям точек A_1, A_2, \dots на плоскость (α_1, α_2) $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots$ сопоставлять последовательность углов $\theta_1, \theta_2, \dots$. Далее строились отображения

$$\theta_{n+1} = F(\theta_n). \quad (9.3)$$

Оказалось, что функция F с высокой точностью определяет отображение окружности в себя.

Такие отображения возникают и во второй краевой задаче (3.12), если выделить локальные максимумы функции $\rho_0(t)$ и построить график $M_{n+1} = f(M_n)$ в случае достаточно больших областей [18, 20]. Типичная картина в этом случае показана на рис. 9.7 ($c_1 = 4, c_2 = -4, l = \pi/0,51$). Точку H естественно выбрать внутри сечения тора.

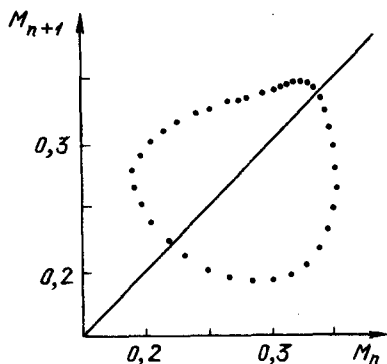


Рис. 9.7

В работе [338] было показано, что переход к хаосу в уравнении в частных производных, так же как в обсуждавшемся отображении окружности в себя (5.24), обусловлен тем, что при некотором значении q отображение (9.3) становится необратимым [368].

Подробное исследование диффузионного хаоса в уравнении (3.12) было предпринято в работе [306]. Здесь также рассматривались начальные данные вида (9.2), фиксировалось значение $1/c_0 = c_1 = -c_2 = 4$ и уменьшалось значение q . Бы-

до показано, что в этой задаче важную роль играют бифуркации, связанные с потерей симметрии или с взаимодействием симметричных решений.

Такой механизм усложнения решений играет важную роль и в двумерном аналоге уравнения (3.8) [19, 20]. Далее мы рассмотрим его более подробно.

В работе [306] была использована известная методика вычисления ляпуновских показателей [219]. Уравнение в частных производных заменялось некоторой конечномерной системой, поэтому можно было пользоваться методами, развитыми для обыкновенных дифференциальных уравнений. Было показано, что диффузионный хаос в уравнении в частных производных в рассматриваемой области параметров характеризуется положительными ляпуновскими показателями. (Отметим, что эти расчеты требуют высокой точности, поскольку ни один из вычисленных положительных ляпуновских показателей не превышает 0.05.) Например, при $q = 0,95$ наибольшие ляпуновские показатели равны $\lambda_1 = 0,0431$, $\lambda_2 = 0,00112$, $\lambda_3 = 0,00048$, $\lambda_4 = -0,909$, а ляпуновская размерность $d_L = 3,0474$.

З а м е ч а н и е: Вопросы методики расчетов при исследовании диффузионного хаоса имеют важное значение, и основным источником информации о нем является вычислительный эксперимент. В работах [20, 24] использовалась чисто неявная разностная схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий [168]. (Аппроксимация краевых условий в этих задачах оказалась очень существенной [22].) При учете нелинейности применялся метод простой итерации, для решения линейной системы – матричная прогонка.

Для изучаемой задачи обычно нужны большие времена расчета (сильно зависящие от c_1 и c_2 и быстро растущие с увеличением длины области), за которые система успевает выйти на установившийся режим. Выбор шагов по времени и пространству обычно требует проведения тестовых расчетов. Эффективным оказывается использование метода Галеркина – хорошая аппроксимация уравнения требует небольшого числа

гармоник. Вместе с тем, ошибки, вносимые в решения при разностной и спектральной аппроксимации, оказываются различными. (В первом случае симметрия решений исходного уравнения не сохраняется, что особенно существенно при анализе неустойчивых пространственно-симметричных решений).

В работах [338] и [306] использовался псевдоспектральный метод, основанный на алгоритме быстрого преобразования Фурье. В первом случае брались 64 гармоники, во втором – 32. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений применялся метод предиктор – корректор [169].

Возникает вопрос, насколько общими являются закономерности, выясненные при анализе диффузионного хаоса, и применявшиеся подходы.

В этой связи интересно обсудить хаотические режимы в более сложном модельном уравнении (3.27), возникающем при анализе систем с малой диффузией.

Отметим, что уравнения (3.27) инвариантны относительно преобразования $V \rightarrow Ve^{i\mu}$, $W \rightarrow We^{i\mu}$ ($W = \xi(x, t) + i\eta(x, t)$; $V = v(x, t)$).

Простейшими решениями уравнений (3.27), являются нулевые и пространственно – однородные: $W \equiv p$, $V = q + ir$ (p, q, r – вещественные постоянные).

Легко видеть, что при $c = \delta = 0$ система (3.27) распадается на две независимые задачи относительно W и V (уравнение Курамото – Цузуки). По отдельности каждая из них изучена [20, Д3]. Поэтому интересно выяснить, как влияют на поведение решений «параметры связи» c и δ .

Рассмотрим задачу (3.27). Будем исследовать различные типы решений указанной задачи при $t \rightarrow \infty$. Все расчеты проводились при следующих значениях параметров: $a = 10$, $b = -5$, $\theta = -0,75$, $\alpha = 1 + 5i$, $\beta = \pi^2$, $\gamma = -(1 - 5,3i)$. При этих значениях задача для ξ и η имеет простейшее пространственно-неоднородное стационарное решение [Д3], а уравнение Курамото – Цузуки описывает хаотический режим, изучавшийся ранее [20]. «Параметры связи» c и δ менялись. Были

обнаружены стационарные и периодические решения. В изучаемой системе возможны и двухчастотные режимы.

Обратим внимание на тесную связь таких решений с периодическими и двухчастотными решениями уравнения Курamoto – Цузуки. Периодические решения последнего описываются автомодельными решениями, а двухчастотные режимы – более сложными функциями [20]. Вероятно, здесь имеет место близкая ситуация. Существование большого класса двухчастотных режимов в обоих случаях связано с наличием симметрии относительно сдвига фазы функции $V(x, t)$.

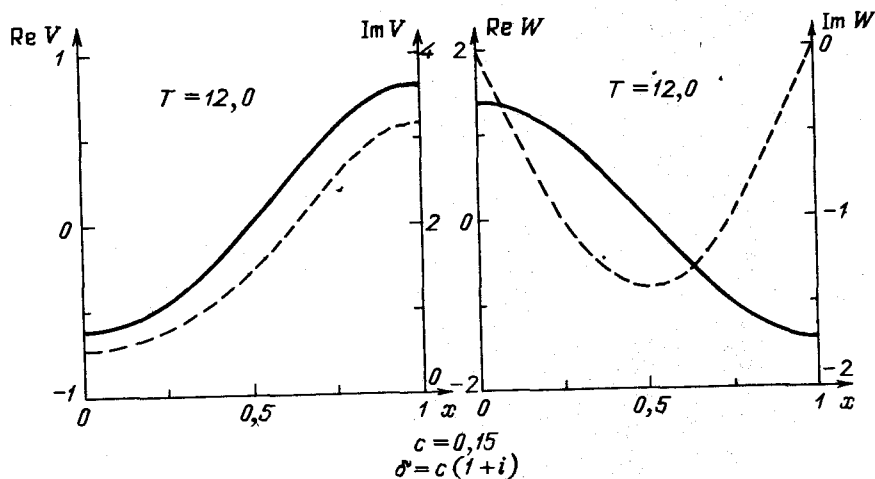


Рис. 9.8

Наиболее простыми и наглядными оказываются проекции аттрактора системы (3.27) на плоскости $\{\rho_0, \rho_1\}$ и $\{\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1\}$. Здесь $\rho_i = (a_i^2 + b_i^2)^{1/2}$, $\bar{\rho}_i = (\bar{a}_i^2 + \bar{b}_i^2)^{1/2}$, $a_i, b_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i$ – коэффициенты i -х Фурье-гармоник для $\text{Re } V$, $\text{Im } V$, $\text{Re } W$ и $\text{Im } W$ соответственно. В таких координатах периодические режимы выглядят как особые точки, а двухчастотные – как предельные циклы. Проектируя на эти плоскости, мы избавляемся от одной «лишней» частоты. При $c = 0,15$ и $\delta = (1 + i)c$ возникает хаотический режим. Причем пространственное распределение в любой момент времени остается дос-

таточно простым (см. рис. 9.8). На рис. 9.9 изображены зависимости $\text{Re } V(\text{Im } V)$ и $\text{Re } W(\text{Im } W)$.

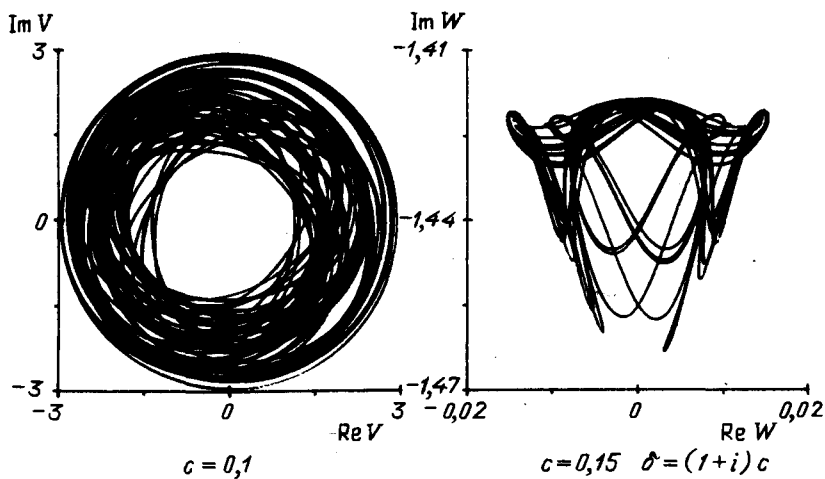


Рис. 9.9

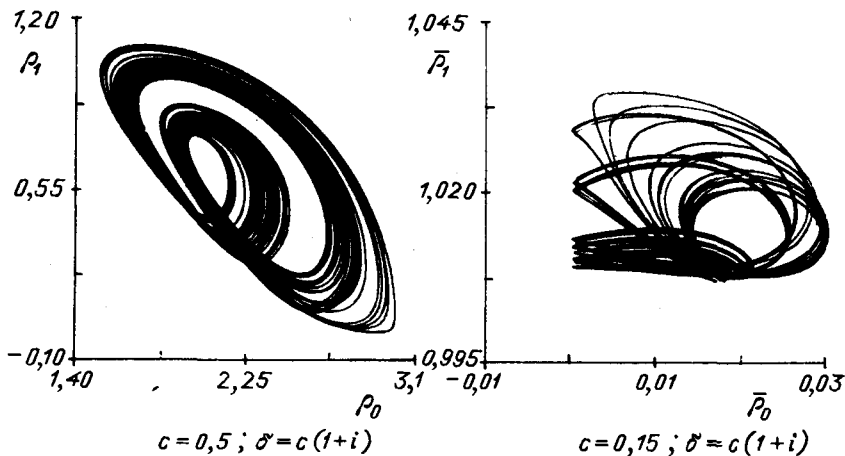


Рис. 9.10

На рис. 9.10 показаны проекции хаотического аттрактора на плоскости $\{\rho_0, \rho_1\}$ и $\{\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_1\}$. Для анализа качественной картины удобно воспользоваться приемом, предложенным Э.Лоренцем [136]. Выделим локальные максимумы функций

$|V(x_0, t)|$, $x_0 = 0,5$, n -й максимум обозначим через VM_n и построим зависимость VM_{n+1} от VM_n . Из рис. 9.11 видно, что эта зависимость хорошо аппроксимируется одномерным отображением с острой вершиной и гладким минимумом. Семейство отображений, возникающих при различных значениях параметров модельных уравнений, можно рассматривать как упрощенную модель. Их анализ полезен при исследовании сценария перехода к хаосу в исходной системе, а также при поиске решений определенного типа в исходной задаче.

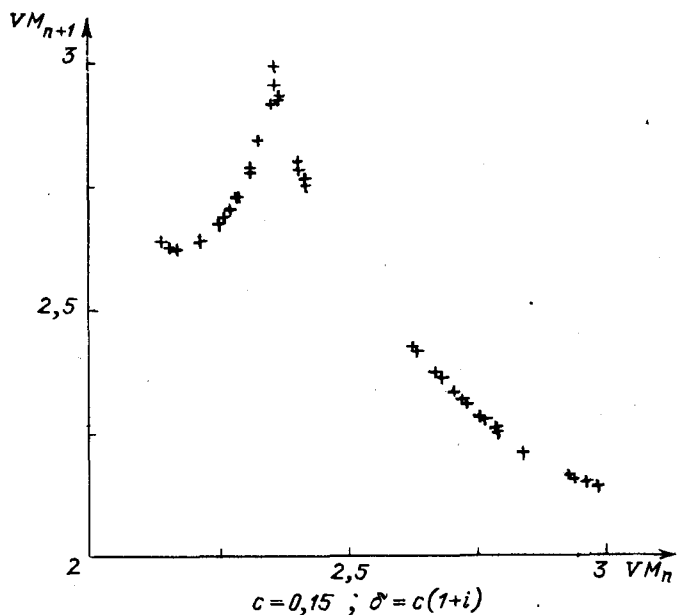


Рис. 9.11

В качестве примера рассмотрим эволюцию аттракторов системы уравнений (3.27) на линии $\delta = \sqrt{2}c$ в пространстве параметров. Результаты расчетов показаны на рис. 9.12, 9.13. Из рисунков видно, что при $c=1,0$ аттрактором решения задачи (3.27) является цикл S^1 . При уменьшении c наблюдаются бифуркации удвоения периода: $S^1 \rightarrow S^2 \rightarrow S^4$ (см. рис. 9.12). Можно предположить наличие бесконечного каскада таких бифуркаций. Затем происходит переход к шумящим циклам

(см. рис. 9.12). Затем вновь поведение системы определяется предельными циклами (рис. 9.13). Происходит каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаотическим режимам (см. рис. 9.13).

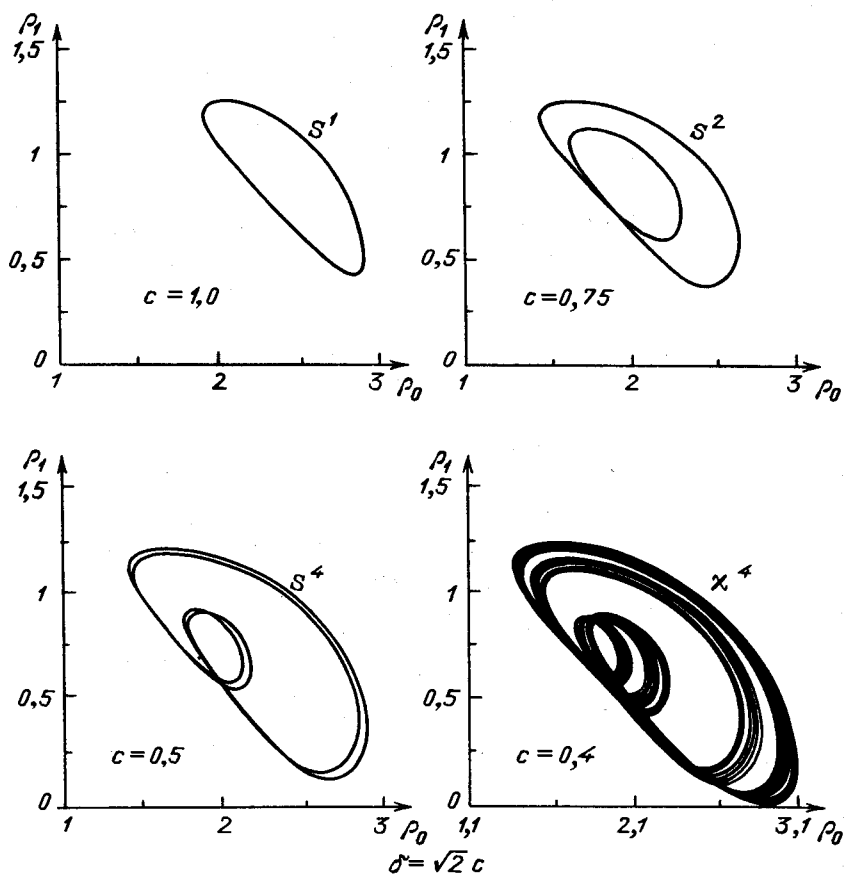


Рис. 9.12

Обратим внимание на то, что показанному хаотическому режиму соответствует одномерное отображение с острой вершиной (см. рис. 9.13). Характер решений показывает, что такие упрощенные модели, как двухмодовая система, одномерные и двумерные отображения будут эффективно работать и в этом случае.

Таким образом, в системе (3.27) возможны периодические и двухчастотные режимы, а также диффузионный хаос. Изменение аттракторов при других значениях параметров обсуждается в работе [Д4].

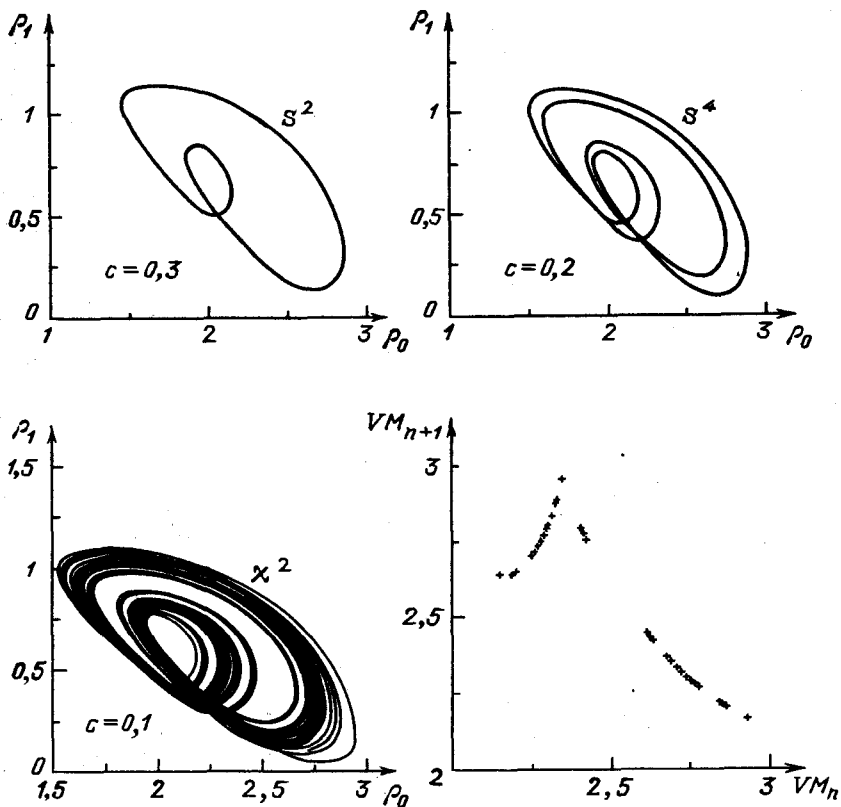


Рис. 9.13

Как и в случае системы уравнений (3.26), параметр θ здесь тоже играет важную роль — его изменение приводит к качественному изменению аттрактора системы (3.27). Здесь вновь одной исходной системе типа реакция — диффузия соответствует целое семейство модельных уравнений с различными значениями θ .

§ 9.2. Хаотические режимы в нелинейных средах и уравнение Курамото – Сивашинского

Применение многомасштабных разложений позволяет перейти от уравнения Курамото – Цузуки к уравнению Курамото – Сивашинского, если предположить, что модуль функции W практически не меняется, и рассматривать только градиент фазы функции W . Такое поведение может наблюдаться в пространстве параметров вблизи линии потери устойчивости пространственно однородного решения [312].

Аналогичное уравнение возникает, если рассматривать диффузионную неустойчивость ламинарного фронта пламени в направлении распространения [371]. Это уравнение было получено и при анализе течения слоя жидкости на наклонной поверхности [319], а также в других гидродинамических задачах. Обширная библиография работ, посвященных его решениям, содержится в обзорах [296, 297]. Обратим внимание на несколько важных моментов, связанных с хаотическими режимами в таких системах.

Уравнение Курамото – Сивашинского обычно записывают в одном из двух видов:

$$u_t + \nu u_{xxxx} + u_{xx} + \frac{1}{2} (u_x)^2 = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x + L, t) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq L \quad (9.4)$$

или

$$u_t + 4u_{xxxx} + \alpha [u_{xx} + \frac{1}{2} (u_x)^2] = 0, \\ 0 \leq x \leq 2\pi, \quad u(x + 2\pi, t) = u(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (9.5)$$

В первом случае бифуркационным параметром является $\tilde{L} = L/(2\pi\sqrt{\nu})$, во втором $\alpha = 4\tilde{L}^2$. Среднее значение функции $u(x, t)$

$$m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) dx$$

В уравнении (9.5) определяется формулой

$$\dot{m}(t) = -\frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{2\pi} (u_x)^2 dx.$$

Решая уравнение (9.5) численно, можно перейти к функциям без дрейфа среднего значения $v(x, t) = u(x, t) - m(t)$:

$$v_t + 4v_{xxxx} + \alpha [v_{xx} + \frac{1}{2} (v_x)^2] + m(t) = 0. \quad (9.6)$$

При этом функция v будет изменяться в некотором фиксированном интервале.

Обсуждая уравнения Курамото – Цузуки, мы обращали внимание на глубокую аналогию между решениями этого уравнения в частных производных и поведением некоторой динамической системы. В частности, особым точкам упрощенных конечномерных моделей, у которых часть координат обращалась в нуль, соответствовали симметричные решения исходной задачи.

Аналогичные решения были найдены и для уравнения Курамото – Сивашинского

$$\ddot{y}_j(x) = a_{1j} \cos jx + \varepsilon a_{2j} \cos 2jx + \varepsilon^2 a_{3j} \cos 3jx + \dots \quad (9.7)$$

В работе [297] они были названы q -модальными клеточными состояниями. Существуют интервалы параметров, где именно они являются аттракторами системы. Обычно $\varepsilon \sim 0,1$, $a_{1j} \sim 0(1)$.

Результаты Л.П.Шильникова для системы обыкновенных дифференциальных уравнений показывают [6, 202, 289], что в окрестности гомоклинических траекторий при определенных условиях диссипативные системы могут вести себя хаотическим образом. При этом хаотические режимы обладают следующей особенностью: в течение длительного времени траектория имеет простой регулярный вид (что соответствует длительному движению вблизи седла), затем происходит «турбулентный всплеск» (движение вдали от седла) и далее вновь начинает-

ся движение к седлу. Такое же поведение характерно и для многих хаотических решений уравнения Курамото – Сивашинского. Его можно проследить, если наблюдать за изменением во времени квадратов амплитуд различных гармоник. Для них характерны редкие «всплески» малой ширины и большой амплитуды. Анализ таких режимов предъявляет жесткие требования к методике расчетов. В работах [296, 297] использовались псевдоспектральные методы, обеспечивающие хорошую аппроксимацию пространственных производных, и специальные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменным временным шагом, позволяющие уменьшить ошибки интегрирования до $10^{-8} \div 10^{-10}$ за единицу времени. Использование более грубых методов может привести к появлению ложных решений.

Типы аттракторов, обнаруженные для уравнения Курамото–Сивашинского в различных областях параметров и подробно описанные в работах [296, 297], показаны в табл. 9.1.

Для системы типично наличие нескольких аттракторов, среди которых есть бегущие волны и инвариантные торы. Интересным оказалось поведение бегущих волн. Обычно они имеют несколько «горбов». При изменении параметров, как показали расчеты, амплитуда одного из «горбов» может начать периодически меняться, в то время как амплитуда остальных остается практически постоянной. Для системы характерны длительные переходные процессы, предшествующие выходу на аттрактор.

Уравнение Курамото – Сивашинского представляет большой интерес еще и потому, что с его помощью удастся исследовать поведение системы в больших областях ($\alpha > 400$), где необходим переход к статистическому описанию системы. При больших значениях L спектр мощности $S(k)$ определяется формулой

$$\langle \hat{u}(k, t) \hat{u}(k', t) \rangle = S(k') \delta(k - k'),$$

где скобки $\langle \rangle$ означают усреднение, а $\hat{u}(k, t)$ – Фурье – образ решения.

Т а б л и ц а 9.1

Аттракторы уравнений Курамото – Сивашинского [296]

Область параметров	Тип аттрактора
$0 \leq \alpha \leq 4$ $0 \leq \tilde{L} \leq 1$	0 – глобальный аттрактор
$4 < \alpha \leq 17,30$ $0 \leq \tilde{L} \leq 2,08$	глобальный аттрактор, соответствующий особой точке $a_1 \cos x + \epsilon a_2 \cos 2x + \epsilon^2 a_3 \cos 3x + \dots$
$17,30 \leq \alpha \leq 22,50$ $2,08 \leq \tilde{L} \leq 2,37$	периодическое решение
$22,50 \leq \alpha \leq 43$ $2,37 \leq \tilde{L} \leq 3,28$	Четное решение, соответствующее особой точке $a_2 \cos 2x + \epsilon a_4 \cos 4x + \epsilon^2 a_6 \cos 6x + \dots$
$43 \leq \alpha \leq 54$ $3,28 \leq \tilde{L} \leq 3,67$	колебательные и / или хаотические решения
$54 \leq \alpha \leq 68$ $3,63 \leq \tilde{L} \leq 4,12$	симметричное решение, соответствующее особой точке $a_3 \cos 3x + \epsilon a_6 \cos 6x + \epsilon^2 a_9 \cos 9x + \dots$
$68 \leq \alpha \leq 94$ $4,12 \leq \tilde{L} \leq 4,85$	периодические и / или хаотические решения
$94 \leq \alpha \leq 117,3$ $4,85 \leq \tilde{L} \leq 5,415$	симметричные решения, соответствующие особой точке $a_4 \cos 4x + \epsilon a_8 \cos 8x + \epsilon^2 a_{12} \cos 12x + \dots +$
$117,3 \leq \alpha \leq ?$ $5,415 \leq \tilde{L} \leq ?$	хаотические решения

Расчеты позволили обнаружить интересную особенность этого спектра: существование области больших масштабов ($k < 0,4$), где $S(k)$ практически не меняется с ростом k . Это сближает поведение решений уравнения (9.4) с поведением систем, находящихся в термодинамическом равновесии, где энергия равномерно распределена по степеням свободы.

Такое поведение позволяет надеяться на построение упрощенных моделей, определяющих статистические свойства решений уравнения Курамото – Сивашинского в больших областях. Одна из таких моделей обсуждается в работе [297].

§ 9.3. Хаос в системах с переносом

Обратим внимание на одно обобщение уравнений Курамото – Сузуки. В работах [248 – 250] была предложена феноменологическая модель так называемых «открытых течений» (их примером могут служить течения в трубах, каналах и т. д.). Она представляет собой уравнение

$$\begin{aligned} \psi_t &= a\psi - v\psi_x + b\psi_{xx} - c|\psi|^2 \psi, \\ 0 < x < \infty, \quad \psi(0, t) &= \varepsilon(t), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \end{aligned} \quad (9.8)$$

где $\varepsilon(t)$ – малый случайный шум, $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ – комплексные, а v – действительный коэффициент, которые предполагаются кусочно-постоянными, но могут быть различными в различных областях.

При $c = 0$, $\varepsilon(t) = 0$ в задаче Коши $-\infty < x < \infty$ решение определяется явной формулой

$$\psi(x, t) = \frac{e^{at}}{(2\pi bt)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi_0(x') \times \exp[-(x - vt - x')/4bt].$$

Из этой формулы следует, что существуют три типа поведения решений линейной задачи при $t \rightarrow \infty$.

1. При $a_1 < 0$ решение абсолютно устойчиво: $|\psi(x, t)| \rightarrow 0$ равномерно по x .
2. Когда $a_1 - v^2 b_1 / (4|b|^2) > 0$, решение абсолютно неустойчиво: $\psi(x, t) \rightarrow \infty$ в каждой точке x .
3. Если $a_1 - v^2 b_1 / (4|b|^2) < 0$, решение пространственно или конвективно неустойчиво.

При этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(x, t)| \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(X + vt, t)| \rightarrow \infty$$

для некоторого значения v и фиксированных произвольных значениях x и X .

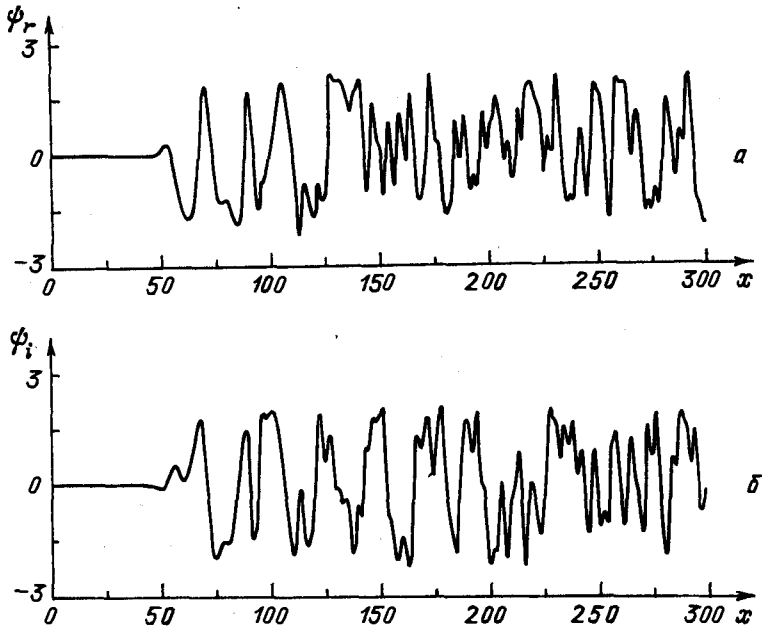


Рис. 9.14. Типичная зависимость а) действительной и б) мнимой части функции $\psi(x, t)$ на один из моментов времени ($t = 200$, $a = 2$, $v = 5,2$, $b = 1,8 - i$, $c = 0,05 + i$; амплитуда шума $\varepsilon(t)$ не превышает 10^{-7} [248])

Если в задаче (9.8) вблизи точки $x = 0$ есть область, где решение пространственно неустойчиво, то малый шум играет принципиальную роль. В его отсутствие $\psi(x, t) \rightarrow 0$ в каждой точке. При наличии шума возникают волны, бегущие вправо, амплитуда которых растет со временем. Нелинейность становится существенной, и возникает хаотический режим (см. рис. 9.14). Численные расчеты показывают, что, несмотря на сложный вид и непериодичность решения, все ляпуновские показатели могут быть неположительными [249, 250].

Описание таких режимов потребовало введения новых количественных характеристик хаоса, и в частности *ляпуновских показателей, зависящих от скорости* $\lambda(v', x_1, x_2)$:

$$\lambda(v', x_1, x_2) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\xi(v', x_1, x_2, t)}{\xi(v', x_1, x_2, 0)} \right|, \quad (9.9)$$

$$\xi(v', x_1, x_2, t) \equiv \left[\int_{x_1+v'}^{x_2+v'} |\delta\psi(x, t)|^2 dx \right]^{1/2},$$

где $\delta\psi(x, t)$ – решение уравнения, которое описывает эволюцию малого возмущения $\delta\psi(x, 0)$, заданного в области (x_1, x_2) (аналога уравнения в вариациях).

Расчеты, проведенные в работах [248 – 250], показывают, что возможны пространственно временные хаотические режимы различных типов в нелинейных диссипативных средах с переносом ($v \neq 0$). Представляло бы интерес экспериментальное исследование такого поведения в открытых системах.

§ 9.4. Маломодовый хаос в двух гидродинамических задачах

Выше мы обсуждали диффузионный хаос, который описывается уравнением Курамото – Сузуки. По-видимому, такие режимы будут характерны для многих систем типа реакция-диффузия и некоторых задач гидродинамики. Важную роль играют стохастические режимы и в других диссипативных средах. При их исследовании очень полезными оказываются представления, развитые при изучении динамических систем небольшой размерности. Многие из них связаны с анализом гидродинамических задач. Рассмотрим две такие системы.

В настоящее время детально исследована модель Лоренца, поэтому полезно выяснить, как соотносятся упорядоченные и хаотические режимы, описываемые этими уравнениями, и установившиеся режимы в подогреваемом снизу слое жидкости.

Ведь именно для этой задачи в качестве упрощенной модели была предложена система Лоренца. Такой вопрос детально рассматривался в работах [27, 244, 245].

Подогреваемый снизу слой жидкости может быть описан с помощью уравнений гидродинамики в приближении Буссинеска

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla(p + \frac{1}{2} v^2) + \alpha T \mathbf{z} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \beta \omega + k \nabla^2 T, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{aligned} \quad (9.10)$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — поле скоростей в точке $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ — завихренность, T — отклонение температуры от термодинамической ветви (которая определяется формулой $T = T_0 - \beta_0 z$), ν — кинематическая вязкость, k — коэффициент теплопроводности, α — коэффициент теплового расширения. Течение рассматривается в области

$$0 \leq x \leq \lambda H, \quad 0 \leq y \leq \mu H, \quad 0 \leq z \leq H.$$

Предполагается, что течение периодически по координатам x и y

$$v(x + m\lambda H, y + n\mu H, z, t) = v(x, y, z, t) \quad (9.11)$$

для всех целых m и n .

Граничные условия по z определяются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = 0, \quad T = 0 \quad (9.12)$$

при $z = 0$ и $z = H$.

Линейный анализ показывает, что решение, в котором $v = 0$ и $T = 0$, становится неустойчивым при значении числа Рейля

$$Ra_c = \frac{27}{4} \pi^4 \approx 657 \quad (9.13)$$

(в этих обозначениях $Ra = \alpha |\beta| H^4 / (\nu k)$), которое реализуется при $\lambda^2 + \mu^2 = 2\pi$, независимо от числа Прандтля $\sigma = \nu/k$ при $\beta > 0$.

Модель Лоренца представляет собой галеркинскую систему для двумерного случая $0 \leq x \leq \pi/\sqrt{2}$, $0 \leq z \leq \pi$, в которой

$$\begin{aligned}\psi &= X(t)\sin\frac{x}{\sqrt{2}} \sin z, \\ T &= Y(t)\cos\frac{x}{\sqrt{2}} \sin z + Z(t)\sin 2z.\end{aligned}\tag{9.14}$$

Для того чтобы модель могла быть использована при исследовании неустойчивости в исходной нелинейной среде, естественно требовать, чтобы при увеличении числа гармоник не менялась качественная зависимость решений от параметров задачи.

В работе Дж.Карри [244] рассматривалась галеркинская система для уравнений Буссинеска в двумерном случае, в которой учитываются 14 гармоник. Анализировался сценарий возникновения хаоса при изменении параметра $r = Ra/Ra_c$ при фиксированном значении $\sigma = 10,0$.

Так же как в системе Лоренца, при $r < 1$ устойчиво нулевое решение. При $r > 1$ происходит бифуркация и возникает стационарное решение, которое остается устойчивым до $r = 43,50$. При этом значении параметра происходит бифуркация Хопфа. Возникающий предельный цикл остается устойчивым вплоть до $r = 44,40$. Здесь происходит одна бифуркация удвоения периода, а при $r = 44,85$ вблизи двойного цикла появляется тор-2, описывающий двухчастотный режим. При дальнейшем изменении r удается найти области, в которых происходит захват частоты; наблюдаются также квазипериодические режимы с двумя несоизмеримыми частотами. При $r = 45,18$ имеет место хаотический режим.

Переход к хаосу в этой модели согласуется со сценарием Рюэля – Такенса, следовательно, увеличение числа гармоник в галеркинской модели принципиально меняет наблюдаемую картину.

Работа [245], в которой предпринято подробное исследование системы (9.10) – (9.12) и соответствующих упрощен-

ных моделей, показывает, что такое поведение является не исключением, а правилом.

В этой работе решения (9.10) представлялись в виде конечного отрезка ряда Фурье

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ T \end{Bmatrix} (x, y, z, t) = \sum_{|m| < 1/2M} \sum_{|n| < 1/2N} \sum_{p=0}^P \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{T} \end{Bmatrix} (m, n, p, t) \times e^{2\pi i \left(\frac{mx}{\lambda} + \frac{ny}{\mu} \right)} \begin{Bmatrix} \cos \pi r z \\ \cos \pi r z \\ \sin \pi r z \\ \sin \pi r z \end{Bmatrix}. \quad (9.15)$$

Если учесть симметрию, то в двумерном случае формулу можно упростить:

$$\begin{aligned} \psi(x, z, t) &= \sum_{\substack{m+p \text{ - четные} \\ 1 \leq m \leq \bar{M} \\ 1 \leq p \leq P}} a_{mp}(t) \sin \frac{2\pi mx}{\lambda} \sin \pi r z, \\ T(x, z, t) &= \sum_{\substack{m+p \text{ - четные} \\ 1 \leq m \leq \bar{M} \\ 1 \leq p \leq P}} b_{mp}(t) \cos \frac{2\pi mx}{\lambda} \sin \pi r z, \end{aligned} \quad (9.16)$$

где скорости определяются по функции тока формулами

$$u = \partial \psi / \partial z, \quad w = -\partial \psi / \partial x, \quad \bar{M} = \frac{1}{2} M.$$

Для того чтобы выяснить влияние числа гармоник на тип установившегося режима, рассматривались аттракторы в галеркинских системах, соответствующих различным значениям \bar{M} и P при $\sigma = 20.0$; $Ra = 120 Ra_c$ в двумерной области.

Решения уравнения Лоренца ($\bar{M} = 1$, $P = 2$) ведут себя в этом случае хаотическим образом. Система с $\bar{M} = 2$, $P = 3$ описывает двухчастотный режим. Решение вновь становится хаотическим при $\bar{M} = 3$, $P = 4$.

В обсуждаемой работе авторы судили о типе режима по временной зависимости одной из функций, входящих в галеркинскую систему, и по частотному спектру этой функции. В этом случае частотный спектр достаточно хорошо характеризовал тип режима.

При $\bar{M} = P = 19$; $\bar{M} = P = 41$; $\bar{M} = 41, P = 84$ и $\bar{M} = 84, P = 41$ в системе наблюдается предельный цикл, параметры которого практически не зависят от дальнейшего увеличения числа гармоник в упрощенной модели. Описанное поведение оказалось типичным для уравнений Буссинеска. Вначале при увеличении \bar{M} и P в формулах (9.16) поведение системы усложняется, решения становятся все более хаотичными, затем происходит резкий переход к периодическому или квазипериодическому решению, которое далее не меняется при увеличении \bar{M} и P .

Исследование отображений, порождаемых применением методов Эйлера, Рунге – Кутта, Адамса – Башфорта для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [355, 386] показало, что при сравнительно больших шагах по времени (т. е. при плохом разрешении временной производной) даже в простейших нелинейных уравнениях возможен «ложный хаос». «Ложный хаос» может наблюдаться в целой области параметров при $t \rightarrow \infty$. Тем не менее он не имеет отношения к установившимся режимам в исходных уравнениях, а является следствием их неудачной дискретизации.

В обсуждаемой ситуации мы также имеем дело с «ложным хаосом», который обусловлен плохим разрешением пространственных производных функций, входящих в уравнение. Полученные результаты на первый взгляд представляются парадоксальными. Казалось бы, если наблюдается хаотический режим в системе с $\bar{M} = \bar{M}_1, P = P_1$, то естественно ожидать, что в системе с большим числом степеней свободы $\bar{M} = \bar{M}_2, P = P_2, \bar{M}_2 > \bar{M}_1, P_2 > P_1$ тем более будет наблюдаться хаотический режим. Расчеты дают иную картину.

Однако на это явление можно посмотреть и иначе. Увеличение числа гармоник позволяет лучше передавать особенности течения (например, мелкие вихри, области больших градиентов) на малых масштабах, где основной вклад могут давать диссипативные члены. Поэтому высшие гармоники могут сыграть роль «демпфера» для динамической системы, в которой учитывается взаимодействие только первых мод.

Наряду с исследованием зависимости упрощенных галеркинских систем, в обсуждаемой работе Дж.Карри, Дж.Херинга, Дж.Лонкарика и С.Орзага исследовалось изменение типа решения при увеличении числа Рэлея для $\sigma = 6, 8$.

Использование быстрого преобразования Фурье позволило сократить время расчета. При таком подходе потребовалось $\sim MP \log_2 MP$ действий на один шаг по времени в двумерном случае, а в трехмерном $\sim MNP \log_2 MNP$ (M, N, P определяются формулой (9.15)). Это дало возможность учесть большое число гармоник по пространственным переменным: $M = 128, P = 128$ (в типичных вариантах $M = 64, P = 32$), в трехмерных расчетах $M = N = P = 32$ (в типичных вариантах $M = N = 32, P = 16$). Для анализа установившихся режимов обычно делалось порядка $8 \cdot 10^4$ шагов по времени.

Расчеты показали, что при $Ra \geq 60 Ra_c$ возникает периодический, а при $Ra \geq 290 Ra_c$ — двухчастотный режим. Эти значения критических чисел Рэлея оказались существенно выше, чем те, которые характеризуют трехмерный случай. Дальнейшего усложнения решений при увеличении числа Рэлея не наблюдалось, а при $Ra \geq 800 Ra_c$ вновь реализовался периодический режим.

Анализ трехмерной конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости при $\sigma = 10$ и отношении $\lambda/\mu = 1/\sqrt{2}$ показал, что периодический режим начинается при $Ra \approx 40 Ra_c$, а двухчастотный при $Ra \approx 50 Ra_c$. Возникновение хаотического режима оказывается связано с появлением в спектре третьей независимой частоты при $Ra \geq 65 Ra_c$. Таким образом, в трехмерном случае переход от упорядоченного к хаотическому режиму согласуется со сценарием Рюэля — Такенса.

Анализ линий тока и поля температур показывает, что они слабо зависят от y -координаты. Тем не менее эта зависимость меняет поведение системы.

Еще более наглядными оказываются результаты при умеренных числах Прандтля и, в частности, при $\sigma = 1$. В двумерном случае здесь не удается найти даже периодического режима, в то время как в трехмерном при $Ra \geq Ra_c$ наблюдается сложный хаотический режим.

Анализ конвективной неустойчивости показывает, что сценарий перехода к хаосу и наблюдаемые режимы оказываются такими же, как в случае динамических систем небольшой размерности. Поэтому естественно ожидать, что здесь могут быть построены упрощенные маломодовые системы, связывающие параметры порядка, которые эффективно описывают это явление.

«Ложный хаос» и многократное изменение поведения при увеличении числа гармоник показывают, что Фурье-моды в этом случае не являются наилучшими параметрами порядка. Поиск параметров порядка, описывающих различные явления в нелинейных средах, вывод уравнений, связывающих эти величины, в настоящее время является важной нерешенной проблемой.

Большой интерес представляет изучение количественных характеристик турбулентных режимов в гидродинамических системах. Примером такого исследования может служить работа [247], в которой изучалось уравнение Навье – Стокса с периодическими краевыми условиями и не зависящей от времени, периодической по пространству внешней силой в трехмерном случае. Расчеты проводились на сетке $32 \times 32 \times 32$. Было показано, что близкие вначале решения изучаемых уравнений экспоненциально расходятся, т. е. система обладает чувствительностью к начальным данным. По результатам расчетов был оценен старший ляпуновский показатель.

Этот результат, а также анализ конвективной неустойчивости согласуется с представлениями о турбулентных режи-

мах, появившимися при анализе странных аттракторов^{ОВ} в конечномерных системах.

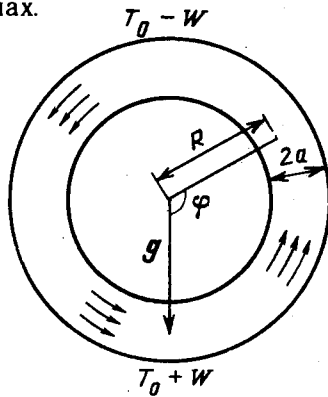


Рис. 9.15

Хотя система Лоренца неприменима к той физической ситуации, для описания которой она была предложена, те же дифференциальные уравнения могут служить эффективной моделью в других задачах, в частности в физике лазеров [193]. Интерес представляет исследование нелинейных сред и физических систем, где свойства хаотических режимов оказываются такими же, как в подробно изученной модели Лоренца.

Одна из таких систем, называемая термосифоном, была предложена в работе [399]. Термосифон представляет собой тор, заполненный жидкостью. Сила тяжести действует в вертикальном направлении (см. рис. 9.15). Движение жидкости, различные режимы конвекции в таком торе представляют интерес в ряде технических задач, возникающих в энергетике.

Жидкость в термосифоне подогревается снизу и охлаждается сверху (температура стенок меняется по закону $T = T_0 + W \cos \varphi$). Плотность жидкости линейно зависит от температуры, ее скорость определяется уравнением Навье - Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + [1 + \delta(T_0 - T)] \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v},$$

а распределение температур - уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T.$$

Эти уравнения исследуются с помощью метода Галеркина (в простейшем приближении он дает систему Лоренца). Доказывается ряд утверждений о свойствах возникающих систем уравнений.

Расчеты показывают, что в этом случае увеличение числа мод не меняет сценарий перехода к хаосу. Он остается таким же, как в модели Лоренца. Роль управляющего параметра может играть величина W .

Независимо от числа гармоник, хаотические режимы хорошо описываются с помощью таких же одномерных отображений, как и в системе Лоренца.

§ 9.5. Пространственно-временной хаос в системах, близких к интегрируемым

Стохастические пространственно-временные режимы характерны и для ряда задач нелинейной оптики. Большой класс таких нелинейных сред рассмотрен в обзоре [208]. Их особенностью является близость к вполне интегрируемой системе — кубическому уравнению Шредингера. Само это уравнение с помощью метода обратной задачи теории рассеяния может быть сведено к некоторому линейному уравнению, а его решение в неограниченной области при $t \rightarrow \infty$ представляет набор солитонов. Появление источников и диссипативных членов в таких уравнениях может приводить к очень сложному пространственно-временному поведению решений.

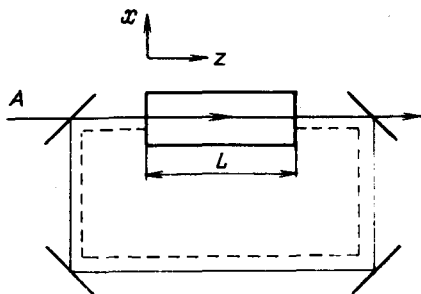


Рис. 9.16

Следуя работе [208], обсудим одну из физических систем такого типа. Рассмотрим прохождение лазерного луча через кольцевой резонатор, заполненный веществом, имеющим нелинейный коэффициент преломления (см. рис. 9.16).

Электрическое поле падающей волны может быть представлено в виде

$$E_{\text{пад}} = A(x) \exp(ikz - i\omega t) + \text{к.с.},$$

а поле внутри резонатора

$$E = F(x, z, t) \exp(ikz - i\omega t) + B(x, z, t) \exp(-ikz - i\omega t) + \text{к.с.}$$

Пользуясь адиабатическим исключением быстрых переменных [193, 208] и асимптотическими методами, можно получить уравнение для амплитуды волны B

$$2i \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{2i}{c} \frac{\partial B}{\partial t} + \gamma L_1 \left[\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \right] + \beta L_1 N(BB^*)B = 0, \quad (9.17)$$

$N(I)$ — функция, которая определяется свойствами нелинейной среды. Обычно $N(I) = -1/(1 + 2I)$ (насыщающая нелинейность), при малых значениях I она переходит в «керровскую нелинейность» $M(I) = -1 + 2I$. В этом случае уравнение (9.17) переходит в кубическое уравнение Шредингера.

Если амплитуда падающей волны от времени не зависит, величина $t - z/c$ может быть заменена целочисленным индексом n , показывающим, в который раз волна проходит через кольцевой резонатор. При этом возникает следующая задача:

$$B_n(x, 0) = (T)^{1/2} A(x) + \text{Re}^{ikL} B_{n-1} \quad (x, \xi = z/L = 1),$$

$$B_0 = 0. \quad (9.18)$$

Коэффициенты R и T , не превышающие единицу, определяются свойствами резонатора, а величина $B_n(x, \xi)$ меняется при изменении переменной ξ от 0 до 1 в соответствии с уравнением

$$2iB_{n\xi} + \gamma(B_{nxx} + B_{nyy}) + \beta N(B_n B_n^*)B_n = 0. \quad (9.19)$$

Эта задача эквивалентна бесконечномерному отображению $B_n(x, 0) \rightarrow B_{n+1}(x, 0)$, показывающему, как меняется амплитуда поля B после каждого прохождения резонатора.

В случае плоской волны, когда в уравнении (9.19) нет лапласиана, оно решается явно, и задача сводится к исследованию двумерного отображения комплексной плоскости в себя

$$B_{n+1} = \alpha + R \exp[ikL + i\beta N(B_n B_n^*)/2] B_n, \quad B_n \equiv B_n(\xi = 0).$$

В этом отображении коэффициент $R^2 < 1$ обеспечивает сжатие фазового объема, α – перенос, показатель экспоненты – ξ поворот. Понятно, что в таком отображении могут быть неподвижные точки, циклы, хаотические аттракторы. Учет различных неустойчивостей приводит к увеличению размерности отображения.

Двумерные отображения возникают и в случае, когда пространственный профиль близок к солитонному решению

$$B = G_s(y, \xi, \lambda, \gamma) = S(\lambda y, \lambda) \exp[i(\lambda^2 - 1)\xi/2 + i\gamma],$$

где $S(\theta, \lambda)$ – действительное четное решение уравнения

$$S_{\theta\theta} - S + \frac{1}{\lambda^2} [1 + N(S^2)]S = 0,$$

стремящееся к нулю при $\theta \rightarrow \infty$; λ определяет амплитуду и ширину солитона, а γ – фазу. Можно ожидать, что после каждого прохождения через резонатор форма решения будет оставаться такой же, а параметры γ и λ меняться. Тогда вместо бесконечномерного отображения можно перейти к двумерному $(\lambda_n, \gamma_n) \rightarrow (\lambda_{n+1}, \gamma_{n+1})$. (Его конкретный вид приводится в работе [208].) Интерес представляет и усложнение пространственной упорядоченности, наблюдаемое при изменении характеристик падающей волны или параметров системы. Наличие решений, близких к солитонным, оказывается очень полезным и в этих случаях. Оно помогает описывать сложные процессы в нелинейных средах с помощью динамических систем небольшой размерности.

Вычислительный эксперимент показал, что в кольцевых резонаторах, в которых интенсивность падающей волны A постоянна, переход к хаосу может быть связан с каскадом бифуркаций удвоения периода, с перемежаемостью или со сценарием Рюэля – Такенса [336].

Сложные циклы и стохастические режимы были найдены и в кольцевом резонаторе с поглощением (в уравнении (9.19) при этом появляются диссипативные члены), в случае, когда амплитуда падающей волны была промодулирована по времени $A(t) = A_0 \sum_n \operatorname{sech}(t - nt_p)$ [222]. При изучении кольцевых резонаторов потери энергии и накачка определялись краевыми условиями, а сама нелинейная среда могла быть описана интегрируемыми уравнениями. Однако представляют интерес и нелинейные среды, близкие к вполне интегрируемым системам, в которых есть диссипативные процессы и источники, явно зависящие от времени. Таково, например, уравнение синус-Гордона с вынуждающей силой

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi &= \varepsilon[-\alpha \varphi_t + \Gamma \sin \omega t], \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \varphi(x + L, t) &= \varphi(x, t), \quad \varphi(x, t = 0) = \varphi_{in}(x), \\ \varphi_t(x, t = 0) &= v_{in}(x). \end{aligned} \quad (9.20)$$

В работе [221] рассмотрено, как происходит возникновение стохастического временного режима и как меняется пространственная упорядоченность в системе при увеличении амплитуды вынуждающей силы Γ . При $L = 24$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon\alpha = 0,04$, $\omega = 0,87$ при увеличении параметра $\varepsilon\Gamma$ в интервале $0 < \varepsilon\Gamma < 0,116$ усложнение решений происходило следующим образом.

При малых значениях $\varepsilon\Gamma$ функция $\varphi(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ оказывается пространственно однородной и периодически меняется по времени с частотой вынуждающей силы. Далее она теряет однородность, и возникает профиль, типичная форма и расположение которого показаны на рис. 9.17а. Однако это решение по-прежнему меняется с частотой ω .

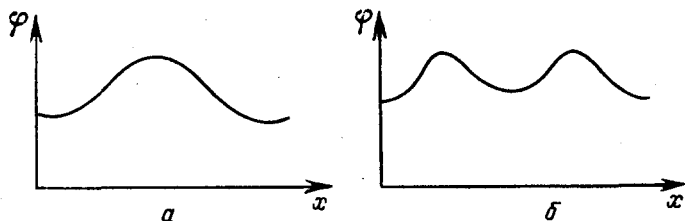


Рис. 9.17

Затем при увеличении параметра Γ появляются квазипериодические режимы, и начинает расти амплитуда четвертой пространственной гармоники. При дальнейшем увеличении параметра Γ возникает временной хаос, в котором турбулентные всплески перемежаются с ламинарными участками. Амплитуды второй и четвертой гармоник становятся близки (функция $\varphi(x, t)$ на некоторый момент времени показана на рис. 9.17б).

В работе [221] вычислялись ляпуновские показатели, строились аналоги сечения Пуанкаре, временной спектр решения, другие характеристики стохастических решений.

Корреляционный показатель изученных хаотических режимов меняется в пределах $3,5 < \nu < 4,5$.

При анализе задачи (9.20) использовалось то обстоятельство, что система близка к вполне интегрируемой. В методе обратной задачи теории рассеяния строится линейное уравнение, «потенциал» в котором меняется, а «энергетические уровни» λ остаются постоянными.

Здесь в каждый момент времени делается такое же преобразование, строится «потенциал» и определяются собственные значения λ . Они уже меняются со временем. По зависимости $\lambda(t)$ можно судить о том, насколько близко решение к набору солитонов. Это позволяет строить эффективные упрощенные модели.

Стохастические режимы были обнаружены и в средах, которые описываются уравнением

$$q_t + iq_{xx} - 2i|q|^2q = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2|q|^2)q + \varepsilon_3 q_{xx} - \frac{\varepsilon_0}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i n t / T).$$

Здесь также удается построить динамические системы небольшой размерности, позволяющие описывать хаотические режимы [347].

§ 9.6. Априорные оценки размерности аттракторов

Обычно при исследовании процессов в нелинейных средах, в которых наблюдаются стохастические режимы, размерность странного аттрактора оценивается в ходе вычислительного или натурального эксперимента. Однако в последние годы появились математические теории, позволяющие получить априорные оценки размерности аттракторов уравнений в частных производных.

Идеально было бы по данному уравнению в частных производных (или бесконечномерному отображению) строить некоторую конечномерную систему, аттрактор которой был бы в определенном смысле близок к аттрактору исходной задачи. По-видимому, таких результатов в настоящее время нет. Однако на этом пути были получены принципиальные результаты, развиты новые представления, которые позволяют глубже понять особенности хаотических режимов в нелинейных задачах. Обратим внимание на некоторые из них.

1. Первоначально большинство результатов в этой области касались гидродинамической турбулентности и уравнения Навье – Стокса. Однако развитые подходы оказались в достаточной мере универсальны и применимы к большому классу систем реакция – диффузия [28], уравнению Курамото – Цузуки [232, 253] и ряду других уравнений в частных производных.

Будем рассматривать движение вязкой несжимаемой жидкости в двумерной ограниченной области Ω , которое описывается уравнением Навье – Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (9.21)$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ характеризует скорость жидкости, p – давление, ν – вязкость, \mathbf{f} – объемная сила, которая считается не зависящей от времени. Обычно рассматривают двумерную область Ω , на границе ∂S которой $\mathbf{v} = 0$, либо прямоугольник Ω с периодическими граничными условиями. Нас будут интересовать установившиеся режимы течения жидкости.

Из-за наличия вязкости система является диссипативной, поэтому естественно ожидать, что характеристики течения будут определяться ее аттрактором. По-видимому, впервые внимание на тесную связь между теорией турбулентности и исследованием аттракторов динамических систем было обращено в работе О.М.Ладыженской [130]. Ряд замечаний, касающихся истории этого направления, и обширная библиография содержатся в обзорах [29, 131].

Рассматривая другие нелинейные среды, мы обращали внимание на существование конечного числа параметров порядка, эффективно описывающих динамику изучаемого процесса. Этот вопрос подробно исследовался для уравнения Навье – Стокса.

При традиционном гидродинамическом подходе число степеней свободы, эффективно описывающих турбулентное течение, определяется как

$$N \sim (l_0/l_c)^d, \quad (9.22)$$

где $d = 2$ или $d = 3$, в зависимости от размерности пространства, в котором рассматривается задача, l_0 – характерный линейный размер области, занятой жидкостью; l_c – малый масштаб, начиная с которого эффекты, связанные с вяз-

костью, полностью определяют движение. Было показано, что в трехмерном случае

$$l_c = \nu^{3/4} / \varepsilon^{1/4}, \quad \text{где } \varepsilon = \nu \langle \nabla u \cdot \nabla u \rangle, \quad (9.23)$$

в двумерном

$$l_c = (\nu^3 / \chi)^{1/6}, \quad \chi = \nu \langle \Delta u \rangle^2, \quad (9.24)$$

где прямые скобки $\langle \rangle$ соответствуют усреднению по ансамблю [133, 238]. В двумерном случае в настоящее время удалось получить строгие результаты, близкие к оценке (9.22).

При получении таких оценок уравнение Навье – Стокса записывают в следующем функциональном виде:

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u, u) = P_f, \quad (9.25)$$

где ν – безразмерный коэффициент кинематической вязкости. При этом рассматривают функциональные пространства векторов H и V , H – замыкание множества

$$V = \{ \omega \in \mathbb{R}^2, \quad \omega \in C_0^\infty | \Omega, \quad \operatorname{div} \omega = 0 \}$$

в пространстве L^2 функций, интегрируемых с квадратом, со скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_i v_j \, dx; \quad u \equiv (u_1, u_2); \quad v \equiv (v_1, v_2),$$

V – замыкание множества V в пространстве Соболева со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx,$$

P в формуле (9.25) – оператор ортогонального проектирования из L^2 на H ; $A = -P\Delta$, а $B(u, u) = P(u\nabla)u$.

Наряду с уравнением Навье – Стокса, обычно рассматривают задачу на собственные значения, называемую *задачей Стокса*:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{w} + \nabla g &= -\lambda \mathbf{w} \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0, \end{aligned} \tag{9.26}$$

где на функцию \mathbf{w} накладываются те же граничные условия, что и на функцию \mathbf{v} в уравнении Навье – Стокса. Так же как градиент давления определяется уравнением (9.21), градиент величины g определяется задачей (9.26).

Домножим уравнение (9.21) на функцию $\tilde{\mathbf{w}}$ с $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} = 0$ (это может быть одна из собственных функций задачи (9.26)). Тогда

$$(\nabla p \cdot \tilde{\mathbf{w}}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(p \tilde{\mathbf{w}}) dx = \int_{\partial \Omega} p \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{n} ds,$$

что в силу краевых условий равно нулю. Поэтому скалярное умножение на такую функцию (проектирование с помощью оператора Π) позволяет исключить давление (см. (9.25)).

Задача Стокса также может быть представлена в виде

$$A\omega = \lambda\omega.$$

Она имеет набор собственных значений

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$$

и собственных векторов

$$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots$$

Будем разлагать решение уравнения Навье – Стокса по этим собственным векторам $\mathbf{w}_i(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \mathbf{w}_i(\mathbf{r}).$$

В работе [266] приведен следующий результат. Пусть n достаточно велико — настолько, что выполнено любое из неравенств

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &> 2\nu^{-2} \limsup_{t \rightarrow \infty} \|v\|^2, \\ \lambda_{n+1} &> \nu^{-2} \limsup_{t \rightarrow \infty} M_1^2, \\ \lambda_{n+1} &> \nu^{-1} \limsup_{t \rightarrow \infty} M_2, \end{aligned} \tag{9.26}$$

где M_1 и M_2 — максимальные амплитуды v и $\operatorname{rot} v$ во всей области Ω в данный момент времени. Тогда

$$v \sim v^{(n)} = \sum_{i=1}^n c_i(t) w_i(r)$$

в том смысле, что если при $t \rightarrow \infty$ v является постоянной, периодической или квазипериодической функцией, то такой же функцией является и $v^{(n)}$. Можно ожидать, что такое соотношение будет иметь место и для хаотических режимов. Однако этот результат, вероятно, пока не получен.

Утверждения такого типа оказываются очень важными. Они являются теоретической основой для экспериментального исследования вязкой жидкости. Из них следует, что измерение конечного набора величин, зависящего от числа Рейнольдса, позволяет получить информацию о типе течения.

2. Следующий вопрос связан с оценкой сложности наблюдаемых хаотических режимов или с оценкой размерности аттракторов уравнений в частных производных. При его исследовании вводится важное понятие *максимального аттрактора* [29].

Полугруппой $\{S_t, t \geq 0\}$, отвечающей уравнению (9.21), называется семейство операторов S_t , действующих в банаховом пространстве E , $S_t: E \rightarrow E$, причем $S_t u_0 = u(t)$, где $u(t)$ — решение задачи (9.21). При этом предполагается, что задача (9.21) однозначно разрешима. Максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$ или уравнения (9.21) называется такое замкнутое ограниченное множество $\mathcal{U} \subset E$, которое обладает

1) свойством инвариантности: $S_t u = u$ для $t \geq 0$;

2) свойством притяжения: для любого ограниченного множества $B \subset E$ расстояние $\text{dist}_E(S_t(B), U) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, где

$$\text{dist}(X, Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_E.$$

Максимальный аттрактор существует для большого класса дифференциальных уравнений и отображений. Достаточные условия его существования определяются следующей теоремой [29].

Т е о р е м а 9.1. Пусть полугруппа $\{S_t\}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) полугруппа $\{S_t\}$ равномерно ограничена, то есть для любого $R > 0$ существует $C(R)$ такое, что $\|S_t u\| < C(R)$, если $\|u\| \leq R$ $0 \leq t \leq \infty$;

2) существует компактное в E поглощающее множество B_0 , т. е. для любого ограниченного множества $B \subset E$ существует такое число T , что при $t \geq T$ $S_t B \subset B_0$;

3) операторы $S_t E \rightarrow E$ непрерывны при $t \geq 0$. Тогда у полугруппы $\{S_t\}$ имеется компактный максимальный аттрактор.

Максимальный аттрактор определяет асимптотическое поведение решений изучаемых уравнений при всех возможных начальных данных. Поэтому он может описывать множество предельных режимов более широкое, чем множество режимов, наблюдаемых в натурном или вычислительном эксперименте.

Это можно проиллюстрировать на примере так называемых градиентных систем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha(u) \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \alpha(u) > 0, \quad (9.28)$$

где $\partial \Phi / \partial u$ — вариационная производная. Уравнение (9.28) обладает глобальной функцией Ляпунова, значения которой убывают вдоль траекторий уравнения всюду, кроме стационарных точек. При выполнении естественных условий максимальные аттракторы таких уравнений имеют вид

$$U = \bigcup_{j=1}^s M(z_j),$$

где $\{z_j\}$ – множество стационарных решений уравнения (9.28), s – число таких решений, $M(z_j)$ – максимальное неустойчивое инвариантное многообразие, проходящее через точку z_j . Многообразие $M(z_j)$ состоит из всех траекторий $u(\tau)$, выходящих при возрастании τ из точки z_j .

Таким образом, наряду со стационарными точками максимальный аттрактор содержит и их неустойчивые многообразия. Это делает его даже в простейших случаях достаточно сложным объектом. Например, в уравнении (3.8) при любых значениях параметров существует бесконечное количество симметричных решений, которые могут определять неустойчивые многообразия. Они также должны входить в максимальный аттрактор, как и те множества, которые характеризуют поведение решений при $t \rightarrow \infty$ в случае типичных начальных данных.

Условия теоремы 9.1 могут быть проверены для уравнения Навье – Стокса [27,29]. Например, для функции $u(x,t)$ выполнено неравенство

$$\|u(r,t)\|_{L^2} \leq \|u_0(r)\|_{L^2} \exp(-\lambda_1 \nu t) + \frac{\|f\|_{L^2}}{\nu \lambda_1}, \quad (9.29)$$

где λ_1 – первое собственное значение задачи (9.26). Следовательно, при $t \rightarrow \infty$ траектории будут лежать внутри шара

$$S_f : \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} / \lambda_1 \nu. \quad (9.30)$$

Рассматривая конечномерные динамические системы, мы обращали внимание на связь между динамическими характеристиками системы, которые определяются ее ляпуновскими показателями, и геометрией аттрактора, его фрактальной размерностью. Эта связь определялась формулой Каплана–Йорке [259]. Оказывается, эта связь существует и для уравнений в частных производных. Именно она и дает ключ к оценке хаусдорфовой размерности максимальных аттракторов.

3. В конечномерной системе сумма первых k показателей Ляпунова определяла скорость уменьшения k -мерных фазовых

объемов. Обобщая это свойство, Ю.С.Ильяшенко ввел понятие k -сжимающих систем.

О п р е д е л е н и е. Отображение области евклидова или гильбертова пространства в себя называется k -сжимающим с константой $q < 1$, если оно уменьшает k -мерные объемы, умножая их на коэффициент, не превосходящий q .

Оценку хаусдорфовой размерности максимального аттрактора в конечномерном случае дает следующая теорема [105].

Т е о р е м а 9.2. Пусть g – дважды гладкое k -сжимающее отображение замыкания B ограниченной области евклидова пространства в себя. Тогда отображение g имеет притягивающее множество (аттрактор) $A = \bigcap_{n>0} g^n B$, хаусдорфова размерность которого не превосходит k .

Оказалось, что утверждение теоремы естественно обобщается и на бесконечномерные системы. При этом могут быть получены результаты, применимые к широкому классу различных уравнений [27, 29].

Например, в работе [27] приведен следующий результат.

Пусть полупоток S_t таков, что

$$\|S_t(u) - S_t(v)\|_{L^2} \leq \|u-v\|_{L^2} \exp(Bt) \quad (9.31)$$

(в случае уравнения Навье – Стокса $B = A_0^2/4\nu$, где $A_0 = \max_{u \in U} \max_{x \in \Omega} |u(x)|$), и выполнено неравенство

$$\|(E - P_n)(S_t u - S_t v)\|_{L^2} \leq \omega \|u - v\|_{L^2}, \quad \omega < 1, \quad (9.32)$$

где P_n – оператор ортогонального проектирования на конечномерное подпространство, натянутое на векторы w_1, \dots, w_n . (В случае уравнения Навье – Стокса w_n – собственные векторы задачи (9.26), а неравенство (9.32) было установлено О.А.Ладыженской). Тогда хаусдорфова размерность максимального аттрактора полугруппы S_t конечна.

Более того, П.Константином и И.Фояшем было показано, что предельную емкость и хаусдорфову размерность макси-

мального аттрактора можно оценить сверху с помощью формулы Каплана – Йорке, куда вместо обычных ляпуновских показателей должны входить так называемые *глобальные ляпуновские показатели* [237].

Обозначим через $P_N(t_0)$ произведение

$$P_N(t, u_0) = m_1(t, u_0) \dots m_N(t, u_0),$$

где $m_j(t, u_0)$ связан с ляпуновскими показателями $\lambda_j(u_0)$ соотношением

$$\lambda_j(u_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \log m_j(t, u_0).$$

Пусть аттрактор лежит внутри шара радиуса ρ $B_\rho^v(0)$. Введем величины

$$P_N(t) = \sup_{u_0 \in B_\rho^v(0)} P_N(t, u_0), \quad N \geq 1,$$

$$m_j(t) = \sup_{u_0 \in B_\rho^v(0)} m_j(t, u_0).$$

Глобальные ляпуновские показатели $\bar{\mu}_j$ и μ_j определяются следующими формулами. Для $j \geq 1$ и $N \geq 1$

$$\bar{\mu}_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \log \bar{m}_j(t),$$

$$\pi_N = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P_N(t),$$

$$\mu_1 = \pi_1, \quad \mu_N = \pi_N - \pi_{N-1}.$$

В работе [237] были доказаны следующие утверждения.

Т е о р е м а 9.3. Пусть X – инвариантное множество, которое является ограниченным в V , например, X – максимальный аттрактор. Тогда хаусдорфова размерность определяется формулой

$$d_H(X) \leq j_0 + \frac{\mu_1 + \dots + \mu_{j_0}}{|\mu_{j_0+1}|}, \quad (9.33)$$

Подчеркнем, что из большой размерности максимального аттрактора не следует, что будут наблюдаться хаотические режимы. При типичных начальных данных может происходить выход на простейшее периодическое или стационарное решение. Вместе с тем оценки хаусдорфовой размерности гарантируют, что фрактальная размерность странного аттрактора, если он наблюдается, не превышает данной величины.

Было бы интересно выяснить, как в натуральных или вычислительных экспериментах меняется размерность странных аттракторов, которые описываются уравнениями Навье – Стокса при изменении обобщенного числа Грасгофа, когда оно достаточно велико. Однако, по-видимому, имеющаяся экспериментальная техника и возможности компьютеров не позволяют проводить такие исследования.

5. Методы и представления, связанные с оценками максимального аттрактора уравнения Навье – Стокса, оказались в полной мере применимы к уравнению Курамото – Цузуки [232, 253].

Рассмотрим эти результаты более подробно, следуя работе [232]. Перепишем уравнение Курамото – Цузуки в виде

$$\begin{aligned} A_t &= RA + (1 + i\nu)A_{xx} - (1+i\mu)A|A|^2, \quad x \in [0,1], \\ A(x,0) &= A_0(x), \quad A(0,t) = A(1,t), \end{aligned} \quad (9.41)$$

считая, что оно задано в области единичной длины с периодическими краевыми условиями.

В обсуждаемой работе приводится априорная оценка функции $A(t)$ в норме L_∞ (то есть во множестве ограниченных функций). Аттрактор X уравнения (9.41) лежит в шаре радиуса R в пространстве L_2 .

Норма функции $\|A(x,t)\|_{L_\infty}$ на аттракторе X удовлетворяет неравенству

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_X \|A\|_{L_\infty}^2 \leq R + 2\delta R^2 \{1 + [1 + (1 + \delta)/\delta^2 R]^{1/2}\}, \quad (9.42)$$

где $\delta = \max \{0, -2 + |1 + i\mu|\}$.

Для оценки глобальных ляпуновских показателей будем рассматривать решение системы в вариациях $\xi(t) \in L^2$. Тракторию с начальными значениями A_0 , в окрестности которой рассматривается линеаризованное уравнение, будем обозначать через $A(t)$. (Зависимость от x функции A и ξ для краткости будем опускать)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = R\xi + (1 + i\nu)\xi_{xx} - 2(1 + i\mu)|A|^2\xi - (1 + i\mu)A^2\xi^* \equiv F(t, A_0)\xi. \quad (9.43)$$

Обозначим через $L(t, A_0)\xi$ решение уравнения (9.43) с начальным условием $\xi(0) = \xi$. Тогда сумма глобальных ляпуновских показателей будет определяться формулой

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \left\{ \sup_{A_0 \in X} \sup_{\|\xi_i\| \leq 1} \|L(t, A_0)\xi_1 \wedge \dots \wedge L(t, A_0)\xi_n\| \right\}, \quad (9.44)$$

где использовано следующее обозначение:

$$\|\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n\|^2 = \langle \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n, \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \rangle,$$

где

$$\langle \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n, \zeta_1 \wedge \dots \wedge \zeta_n \rangle \equiv \det M; \quad M_{ij} = \langle \xi_i, \zeta_j \rangle.$$

В нашем случае

$$\langle \xi, \zeta \rangle = \int_0^1 \xi^*(x) \zeta(x) dx.$$

Чтобы воспользоваться теоремой 9.3, оценим изменение объема n -мерного параллелепипеда $V \equiv \|L(t, A_0)\xi_1 \wedge \dots \wedge L(t, A_0)\xi_n\|$, построенного на векторах $L(t, A_0)\xi_1, \dots, L(t, A_0)\xi_n$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|L(t, A_0)\xi_1 \wedge \dots \wedge L(t, A_0)\xi_n\|^2 &= \\ &= 2 \|L(t, A_0)\xi_1 \wedge \dots \wedge L(t, A_0)\xi_n\|^2 \operatorname{Re}\{Tr[F(t, A_0) \circ P_n(t)]\}, \end{aligned} \quad (9.45)$$

где через $P_n(t)$ обозначена зависящая от времени проекция пространства L^2 на подпространство, содержащее векторы $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$, а через $\text{Tr}[F(t, A_0) \circ P_n(t)]$ — след конечномерного оператора $F(t, A_0) \circ P_n(t)$. $F(t, A_0)$ определяется формулой (9.43), \circ соответствует композиции операторов. Формула (9.45) эквивалентна теореме об изменении фазового объема при движении вдоль траектории динамической системы, которой мы пользовались ранее, рассматривая системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. формулы (7.4), (7.6)).

Уравнение (9.45) можно представить в виде

$$\frac{dV^2}{dt} = 2V^2 S(t); \quad V(0) = V_0. \quad (9.46)$$

Следовательно,

$$V = V_0 \exp \int_0^t S(t) dt. \quad (9.47)$$

Поэтому сумму первых n ляпуновских показателей, пользуясь формулами (9.44) и (9.47), можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup t^{-1} \ln \{ \sup_{A_0 \in X} \sup_{\|\xi_i\| \leq 1} \times \\ \times \exp [\text{Re} \int_0^t dz \text{Tr}[F(z, A_0) \circ P_n(z)]] \}. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Векторы $\xi_i(t)$ явно не входят в равенство (9.48), однако от них зависит проекция $P_n(z)$.

Поскольку при любых значениях параметров функция $A(t) = 0$ является стационарным решением задачи (9.41), с помощью формулы (9.48) можно получить оценку хаусдорфовой размерности максимального аттрактора снизу

$$\begin{aligned} \sup_{A \in X} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \exp [\text{Re} \int_0^t ds \text{Tr}[F(s, A_0) \circ P_n(s)]] \geq \\ \geq \exp [\text{Re} \int_0^t ds \text{Tr}[F(s, 0) \circ P'_n(s)]], \end{aligned} \quad (9.49)$$

где P'_n - проекция на собственные функции линеаризованной задачи $\varphi_j(x) = \exp(ik_j x)$, где $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$, $k_4 = 2$, $k_5 = -2$ и т. д. В этом случае

$$\text{Tr}[F(t, 0) \circ P'_n] = \sum_{j=1}^n [R - (1 + i\nu)k_j^2]. \quad (9.50)$$

Следовательно, нижняя оценка суммы глобальных ляпуновских показателей не зависит от параметров μ и ν и определяется формулой

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n \geq \sum_{j=1}^n \{R - k_j^2\}. \quad (9.51)$$

Для оценки этой суммы сверху нужна априорная оценка (9.42). Пусть ψ_j - ортонормированные векторы в множестве $P_n(t)L^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\text{Tr}[F(t, A_0) \circ P_n(t)]\} &= \sum_{j=1}^n \{ \langle \psi_j, (R + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \psi_j \rangle - \\ &- 2 \langle \psi_j, |A|^2 \psi_j \rangle - \text{Re}[(1 + i\mu) \langle \psi_j, A^2 \psi_j^* \rangle] \}. \end{aligned} \quad (9.52)$$

Для любого вектора $\psi \in L^2$ и $A_0 \in X$

$$\begin{aligned} 2 \langle \psi, |A|^2 \psi \rangle - \text{Re}\{(1 + i\mu) \langle \psi, A^2 \psi^* \rangle\} &= \\ &= -2 \int dx |A|^2 |\psi|^2 - \text{Re}\{(1 + i\mu) \int dx A^2 \psi^{*2}\} \leq \\ &\leq \delta \|A\|_{\infty}^2 \|\psi\|_2^2, \end{aligned} \quad (9.53)$$

где

$$\delta = \max\{0, -2 + |1 + i\mu|\}.$$

Используя соотношение (9.53) и равенство (9.48), получим

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n \leq \sum_{j=1}^n \{ R + \delta \|A\|_{\infty}^2 - k_j^2 \}. \quad (9.54)$$

При $|\mu| \leq \sqrt{3}$ $\delta = 0$, поэтому верхняя (9.54) и нижняя (9.51) оценки совпадают. При $\mu < \sqrt{3}$ «самым неустойчивым» здесь является нулевое решение.

Оценка размерности максимального аттрактора, которая дается формулой Каплана – Йорке (см. теорему 9.3), показана на рис. 9.18 сплошной непрерывной кривой. Последовательность горизонтальных отрезков соответствует нижней оценке размерности, учитывающей только число неустойчивых мод в пространственно однородном нулевом решении. Простая оценка хаусдорфовой размерности сверху может быть получена с помощью аналитической формулы

$$d_H \leq 2(3R/4\pi^2 + 1/4)^{1/2} \quad (9.55)$$

(пунктирная кривая на рис. 9.18).

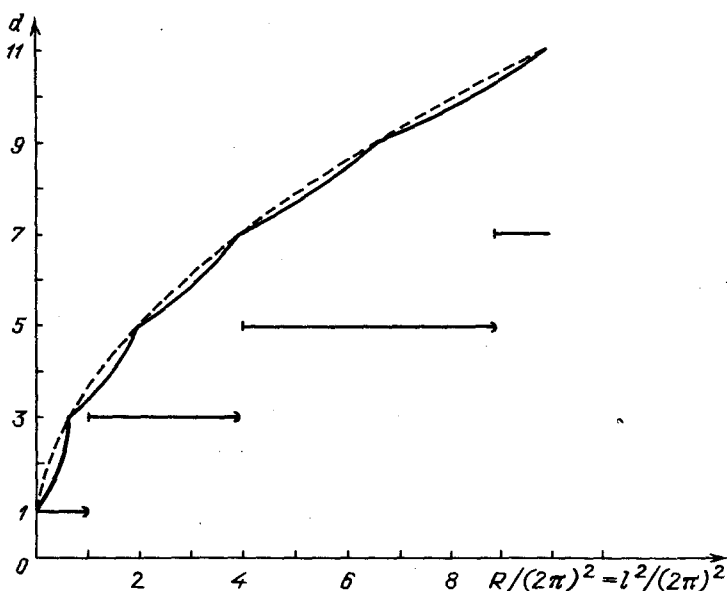


Рис. 9.18. Зависимость ляпуновской размерности R для уравнения Курамото–Цузуки при $|\mu| \leq \sqrt{3}$ (непрерывная ломаная кривая), верхняя оценка (9.55) (гладкая кривая) и нижняя оценка (набор горизонтальных отрезков) [253].

Поясним суть этих оценок. По существу, они аналогичны оценкам при анализе турбулентных режимов течения жидкости. Размерность максимального аттрактора пропорциональна числу длин волн l_c , которые укладываются в изучаемой

области, где на масштабе с характерным размером l_0 преобладающими являются диссипативные процессы

$$R^{1/2}/2\pi = l_0/l_c, \quad (9.56)$$

l_0 – характерная длина области. Если бы мы не переходили к безразмерному виду, то оказалось бы, что $l_c = 2\pi(D/\alpha)^{1/2}$, где D – действительный коэффициент диффузии, α – коэффициент при линейном члене.

Если вернуться к обозначениям задачи (3.12), то окажется, что эквивалентом параметра $l/(2\pi)$ будет параметр $R^2/(2\pi)^2$ и размерность максимального аттрактора будет пропорциональна l .

При $|\mu| > \sqrt{3}$ нулевое решение уже не будет самым неустойчивым. В этом случае для размерности максимального аттрактора справедлива оценка

$$d_H < (\sqrt{3}/\pi)|\mu|R + 3|\mu|^{1/2}R^{1/2}/2\pi + 2. \quad (9.57)$$

Еще раз обратим внимание на то, что в обозначениях (3.12)

$$W = A\sqrt{R}, \quad t = t/R, \quad x = x/\sqrt{R}, \quad c_1 = v, \quad c_2 = \mu. \quad (9.58)$$

В работе [232] получены близкие результаты. В ней более подробно обсуждается вывод априорных оценок, а также рассматриваются первая

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

и вторая

$$\partial u/\partial n = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

краевые задачи для уравнения Курамото – Цузуки в ограниченной области Ω пространства \mathbb{R}^n , $n = 1$ или 2 .

Сравнение оценок (9.55), (9.57) с картой аттракторов еще раз показывает, что из достаточно большой фрактальной размерности максимального аттрактора не следует, что в системе будет наблюдаться хаотический режим. Несмотря на аналогию в методе получения оценок максимальных аттракто-

ров и близость самих оценок ((9.22) и (9.56)), исследование турбулентных режимов течения жидкостей, движение которых описывается уравнением Навье – Стокса, и анализ диффузионного хаоса существенно отличаются. Обычно при анализе турбулентных течений число Рейнольдса (или параметр G) уже в момент возникновения турбулентного режима оказывается достаточно велико. Кроме того, приходится рассматривать по крайней мере двумерную задачу. Все это намного усложняет анализ хаотических режимов. В то же время диффузионный хаос во многих интересных случаях описывается странными аттракторами небольшой размерности. Это согласуется как с обсуждавшимися выше оценками фрактальной размерности максимальных аттракторов, так и с приведенными в настоящей главе расчетами.

Обратим внимание на еще один важный результат, связанный с оценкой размерности аттракторов в системах параболического типа, возникающих в задачах химической кинетики. Он подробно обсуждается в статье [29]. Для нелинейного уравнения

$$u_t = \nu \Delta u - f(x, u) + \lambda u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

в котором

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad f = (f_1, \dots, f_n),$$

α – матрица порядка n с постоянными коэффициентами, такая, что матрица $(\alpha + \alpha)^*/2$ положительно определена и ее минимальное собственное значение превышает μ_0 , т. е.

$$\mu_0 |u|^{P_0} - C \leq f(x, u)u \leq \mu_1 |u|^{P_0} + C, \quad P_0 > 2,$$

и

$$\sum_{i, k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial u_i} \xi_i \xi_k \geq 0,$$

показано, что

$$d_H \mathcal{U} \leq C \lambda^{n/2} \nu^{-n/2}, \quad \lambda > 1, \quad \nu > 0. \quad (9.59)$$

В тех случаях, когда коэффициент диффузии постоянен, оценка (9.59) показывает, как меняется размерность аттрактора при увеличении длины области. При $n = 1$ эта зависимость также линейна.

В последние годы интенсивно изучается вопрос об оценке размерности аттрактора уравнения Курамото – Сивашинского и эквивалентности последнего некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот подход связан с построением конечномерного многообразия Σ в фазовом пространстве уравнения в частных производных, называемого *инерциальным многообразием*. Оно обладает следующими свойствами.

1. Σ инвариантно и имеет компактный носитель. Пусть $S(t)$ – полугруппа, связанная с решением изучаемого уравнения при данных начальных условиях. Тогда $S(t, \Sigma)$ содержится в Σ для всех начальных условий.

2. Все решения исходной задачи экспоненциально стремятся к Σ . В частности, максимальный аттрактор X содержится в Σ . Диссипативные системы на множестве Σ сводятся к некоторым конечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Σ обладает асимптотической полнотой: для любых начальных данных в исходном уравнении существует точка на инерциальном многообразии такая, что расстояние между траекторией исходной задачи и траекторией на Σ экспоненциально стремится к нулю.

Последнее условие, по существу, означает эквивалентность уравнения в частных производных и некоторой конечномерной динамической системы.

В работе [297] приведен результат относительно существования инерциального многообразия для уравнения Курамото – Сивашинского⁷ в случае второй краевой задачи и дана оценка размерности этого многообразия.

$$\dim(\Sigma) \leq C \alpha^{1,75}. \quad (9.60)$$

Она достаточно велика по сравнению с оценкой фрактальной размерности максимального аттрактора уравнения Курамото – Сивашинского

$$d_c(X) \leq C\alpha^{0.75}. \quad (9.61)$$

Принципиальные результаты были получены при анализе инерциальных многообразий для уравнения Курамото – Цузуки с периодическими краевыми условиями в одномерном случае [Д28].

Пусть функция $A(x, t)$ при каждом значении t принадлежит гильбертову пространству $H = L^2(0, 1)$. (Зависимость от пространственной координаты x для краткости далее будем опускать.) Обозначим через P_N оператор проектирования на первые N – фурье–мод, а через $Q_N = 1 - P_N$ – оператор проектирования на бесконечное число оставшихся. Допустим, что $A(t)$ и $A'(t)$ – два решения уравнения Курамото – Цузуки, разность между которыми $a(t) = A(t) - A'(t)$ удовлетворяет так называемому условию конуса

$$\|Q_N a(t)\|_{L^2} \leq \|P_N a(t)\|_{L^2} \quad (9.62)$$

Это неравенство означает, что высшие фурье – гармоники решений $A(t)$ и $A'(t)$ (с номерами большими N) могут отличаться только когда отличаются низшие. Т. е. высшие моды определяются низшими, что позволяет для функции $A(t)$ на аттракторе X ввести отображение Φ :

$$\Phi(P_N A) = Q_N A.$$

В этом случае функцию $A(t)$ можно представить в виде

$$A(t) = \hat{a}(t) + \Phi[\hat{a}(t)],$$

где $\hat{a}(t) \in P_N(X)$. Если исходная задача записана в виде (9.41), уравнение на инерциальном многообразии, или как его называют *инерциальная форма*, будет иметь вид

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial t} = R\hat{a} + (1+i\nu)\hat{a}_{xx} - P_N\{(1+i\mu)|\hat{a} + \Phi[\hat{a}]|^2(\hat{a} + \Phi[\hat{a}])\}. \quad (9.63)$$

Оказалось, что для решений задачи (9.41) условие конуса (9.62) выполнено при $t \rightarrow \infty$. Это позволило получить следующие оценки размерности инерциального многообразия D [Д28]:

$$D \leq (2\pi^2)^{-1} \left[1 + \left[1 + \mu^2 \right]^{1/2} + 2|\mu| \right] (R + 2R^{3/2}) + 1$$

при $|\mu| \leq \sqrt{3}$,

$$D \leq (2\pi^2)^{-1} \left[1 + \left[1 + \mu^2 \right]^{1/2} + 2|\mu| \right] \times$$

(9.64)

$$\times \left[R + 2\delta R^2 \left\{ 1 + \left[(1 + \delta)/\delta^2 R \right]^{1/2} \right\} \right] + 1$$

при $\mu \geq \sqrt{3}$,

где $\delta = \max \left\{ 0, -2 + (1 + \mu)^{1/2} \right\}$.

Можно сказать, что величина D характеризует число «существенных» низших мод или число параметров порядка. Сравнение оценок (9.55), (9.57) и (9.64) показывает, что величина D растет с увеличением R (или с увеличением длины области в исходных обозначениях (9.58)) гораздо быстрее, чем хаусдорфова размерность максимального аттрактора. Пока неясно, связано ли это обстоятельство с особенностями применявшейся техники или оно отражает важное внутреннее свойство изучаемой задачи.

Дальнейший анализ инерциальных многообразий в системах, которые описываются диссипативными уравнениями в частных производных, представляет большой интерес. Возможно, с анализом свойств многообразий Σ и дифференциальных уравнений на этих многообразиях и будет связано более глубокое понимание диффузионного хаоса и других хаотических режимов в нелинейных средах.

§ 9.7. Хаотические режимы в нелинейных средах.

Альтернативные подходы.

Представление о хаосе в нелинейных средах как об установившемся режиме в некоторой динамической системе со странным аттрактором получило в последнее время ряд экспериментальных подтверждений [376]. Однако, развиты и другие представления о природе хаотических режимов в нелинейных средах, которые носят общий характер, и могут оказаться полезными при анализе систем реакция – диффузия. Обратим внимание на некоторые из них.

Неединственность и асимптотическая неединственность.

При анализе гидродинамической турбулентности возник ряд математических проблем. Одна из них связана с тем, что до настоящего времени не удалось доказать существование и единственность сильного необобщенного решения уравнения Навье – Стокса. Это привело Ж. Лере и других исследователей к мысли, что отсутствие таких результатов связано не с недостатками математического аппарата, а с природой явления.

В самом деле, в математике известен большой класс решений нелинейных уравнений, не существующих в целом (таковы, например, режимы с обострением, обсуждавшиеся в гл. 2 в связи с моделью тепловых структур), и большой класс уравнений, в которых начальные условия не определяют единственное решение. (Например, задача $\dot{x} = x^\alpha$; $x(0) = 0$, $\alpha < 1$ имеет два решения: $x(t) = 0$ и $x(t) = (1-\alpha)^{1/(1-\alpha)} t^{1/(1-\alpha)}$.) Нельзя исключать, что таким образом устроены и решения уравнения Навье – Стокса и некоторых других уравнений, описывающих нелинейные среды. Если эта гипотеза верна, то модель, обладающая такими свойствами, некорректна, и требуется либо другое описание, либо учет факторов, которые устраняют неединственность или несуществование решение. Вопрос о том, имеет ли отношение эта гипотеза к уравнению Навье – Стокса и некоторым другим уравнениям, описывающим хаотические режимы, остается открытым.

В метеорологии, астрофизике, ряде других областей характерные числа Рейнольдса, при которых турбулентные решения представляют наибольший интерес, превышают $10^5 \div 10^6$. Поэтому здесь естественно использовать асимптотические методы. Их применение также оказалось связанным с большими трудностями. И это позволило предложить новую гипотезу возникновения турбулентных режимов, связанную с так называемой асимптотической неединственностью [145]. Остановимся на ней подробнее.

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} = c^2(x)\Delta u,$$

$$u(0) = \varphi_0(x) \exp(i\lambda S_0(x)), \quad \lambda \gg 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

Начальные данные здесь представляют собой быстро осциллирующую функцию (множитель $\exp(i\lambda S_0(x))$) с медленно меняющейся амплитудой осцилляций (множитель $\varphi_0(x)$). Тогда, применяя асимптотические методы, можно убедиться, что решение такой задачи имеет следующий вид:

$$u = \varphi(x, t) \exp(i\lambda S(x, t)) + O(1/\lambda),$$

где функция S определяется уравнением Гамильтона – Якоби

$$S_t^2 = c^2(\nabla S)^2.$$

То есть решение принадлежит тому же классу быстро осциллирующих функций, что и начальные данные. Естественно ожидать, что это свойство будет характерно и для уравнения Навье – Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u + \nabla P &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta u, \\ (\nabla, u) &= 0 \end{aligned} \tag{9.65}$$

$$u = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)), \quad x \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad \text{Re} \gg 1$$

для некоторых классов начальных данных.

В качестве одного из таких классов можно рассмотреть течение со сложным профилем скорости – так называемую «сильно когерентную структуру». Начальные данные при этом имеют вид

$$u|_{t=0} = V_0(x) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\{imv(x)/h\} a_0(m, x), \quad (9.65)$$

где $h = (\text{Re})^{-1/3}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $V_0, a \in C^\infty$, \mathbb{Z} – множество целых чисел, $\sum_{m \in \mathbb{Z}} m^N |a_0(m, x)| < \text{const}$ для всех $N \geq 0$,

$$\bar{a}_0(-m, x) = a_0(m, x), \quad a_0(0, x) = 0, \quad a_0 = (a_{01}, a_{02}, a_{03}).$$

Функция $V_0(x)$ определяет гладкое течение, члены в скобках описывают быстро осциллирующую компоненту.

Было показано, что в этом случае асимптотическое решение задачи (9.63) имеет вид

$$u = V^0 + hV^1 + \dots + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp\{imv(x)/h\} (a^0(m, x, t) + ha^1(m, x, t) + \dots). \quad (9.67)$$

Возникающие при построении такого ряда трудности характеризуются в работе [145] следующим образом: «Мы получили цепочку зацепляющихся соотношений, в которой N -й член влияет на первый, поскольку уравнение для a^0 зависит от V^1 , в свою очередь V^1 зависит от a^1 , которое зависит от V^2 и т. д. Получается, что изменение члена при h^1 влияет на член h^0 . При подстановке же в систему Навье – Стокса мы получим невязку z_h : $\|z_h\|_{N-1} = O(h)$. Значит, гладкой порядка h невязке отвечают величины, различие между которыми порядка единицы. А это и есть асимптотическая неединственность. Чтобы аккуратно в этом убедиться, возьмем разложение в ряд Тейлора по степеням t нашего асимптотического решения. Мы можем из наших соотношений последовательно найти все члены этого ряда и решить задачу, подставив полученный ряд в систему Навье – Стокса. Тогда невязка будет иметь вид $z_h + O(t^M)$. Выбрав $M = [N/\varepsilon]$, где ε сколь угодно мало, мы получим, что для $t \sim h^\varepsilon$ невязка имеет вид

z_h , т. е. ее $N-1$ производная по x , t будет иметь порядок $O(h)$. В то же время решения будут отличаться на $o(t)$.

Исходя из этих результатов, можно предположить, что при определенных начальных данных и больших числах Рейнольдса решения уравнения Навье – Стокса также неединственны. Аналогичная ситуация, по-видимому, возникает в системах типа реакция – диффузия в случае, когда в качестве большого параметра выступает длина области, и могут быть использованы асимптотические разложения.

Поскольку при построении асимптотического решения получается цепочка зацепляющихся уравнений, важно было бы указать эффективный способ нахождения членов ряда, исследовать вопросы разрешимости этой цепочки уравнений, выяснить число ее решений. Открытым остается и вопрос о том, существует ли в окрестности асимптотического решения, построенного как некоторый формальный ряд, решение исходной задачи. Новый подход, связанный с представлениями об асимптотической неединственности, требует дальнейшего исследования.

Переходная турбулентность. Рассматривая хаотические режимы в нелинейных средах, описываемых детерминированными уравнениями, обычно считают, что хаотическое поведение связано с наличием странного аттрактора в некоторой динамической системе. При этом неявно предполагается, что время наблюдения достаточно велико, переходный процесс уже закончился, и поведение системы определяется ее аттрактором.

Поэтому особый интерес представляет работа [243], в которой это предположение ставится под сомнение для большого класса нелинейных сред. Чтобы представить ситуацию, в которой основной интерес представляют не установившиеся, а переходные режимы, рассмотрим, следуя этой работе, отображение такого вида:

$$x_{n+1}^i = \frac{1}{2r+1} \sum_{j=-r}^r f(x_n^{i+j}), \quad (9.68)$$

где

$$\hat{f}(x) = sx + \omega(\text{mod}1), \quad x_n^i \in [0,1), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Здесь n характеризует временную координату, i – пространственную. Отображение $x_{n+1} = f(x_n)$ устроено таким образом, что в течение определенного числа итераций x возрастает, и достигая порогового значения $\bar{x} = s^{-1}(1 - \omega)$, резко уменьшается (рис. 9.19).

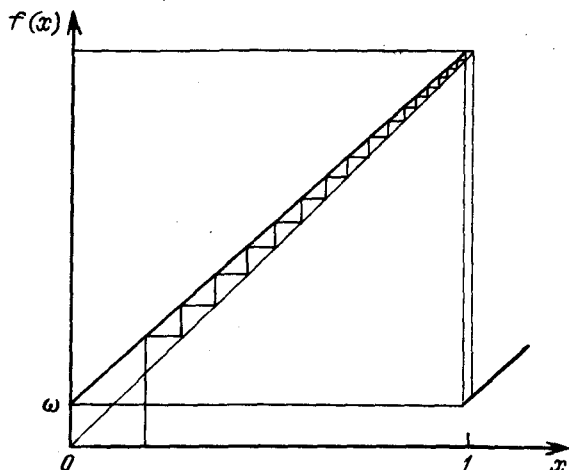


Рис. 9.19

Такие отображения ранее использовались в модели нейронов и в теории колебательных химических реакций. Пусть $s < 1$. В этом случае система не имеет хаотических режимов и ведет себя регулярным упорядоченным образом. В частности, при $s = 0,91$ и $\omega = 0,1$ в ней существует устойчивый цикл S^{25} .

Сумма в правой части формулы (9.68) просто определяет усреднение по ближайшим соседям. Пусть $r = 1$. Чтобы оценить, насколько быстро происходит выход на аттрактор, задавались 10^3 случайных начальных конфигураций, рассчитанных с помощью метода Монте-Карло. Результат усреднения времен выхода на пространственно однородный или более

Сложный цикл и давал оценку времени выхода на аттрактор

n

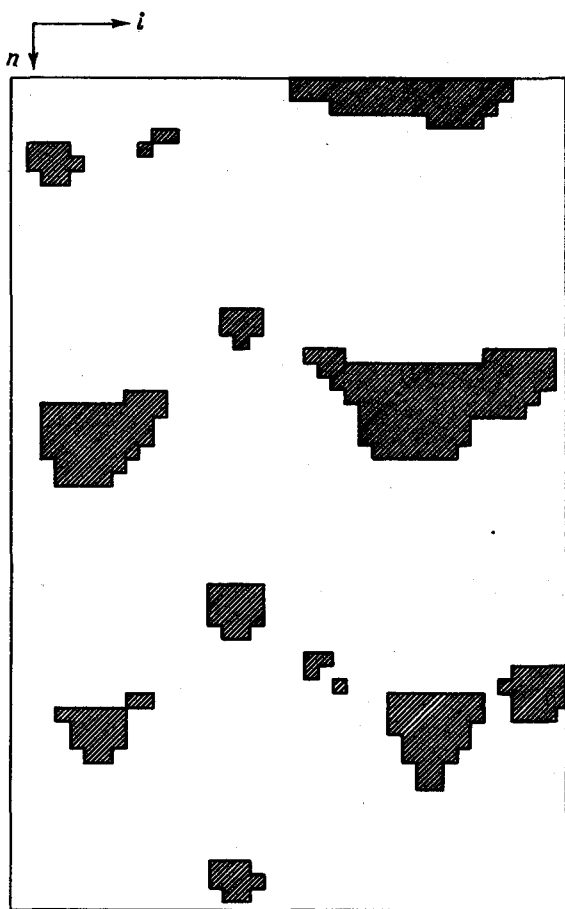


Рис. 9.20. Типичная картина переходного пространственного хаоса. Заштрихованным квадратам соответствуют значения $x(i, n) \geq 0,5$

Расчеты показали, что переходный режим часто оказывается длительным и сложным. В ходе его возникают разнообразные пространственные конфигурации, которые меняются хаотическим образом (см. рис. 9.20). Поскольку в сосредоточенной системе реализуется цикл, и сложность связана с

пространственной неоднородностью, такое поведение было названо *переходным пространственным хаосом*. При указанных значениях параметров зависимость T_N от длины области N с хорошей точностью определяется формулой (см. рис. 9.21)

$$T_N = T_1 \cdot 2^{[(N-1)/N_c]^\alpha}, \quad (9.69)$$

где

$$N_c = 21,5 \pm 0,5, \quad T_1 = 149,5 \pm 0,5 \quad \text{и} \quad \alpha = 3,0 \pm 0,2.$$

Значение T_1 хорошо согласуется со средним временем выхода на аттрактор отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, равным $T_{f(x)} = 149,8$. Для других значений параметров также наблюдается сверхэкспоненциальный рост. При этом показатель α меняется в интервале $1 < \alpha < 3,2$ [243].

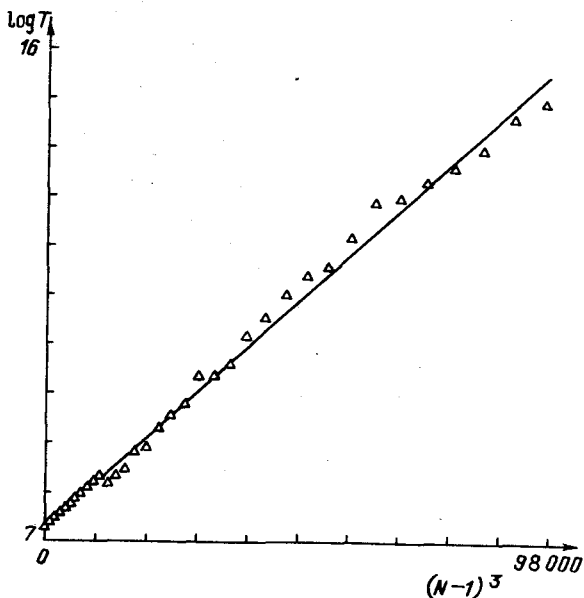


Рис. 9.21. Зависимость среднего времени переходного процесса T от числа элементов N [243]

Оказалось, что в этом и ряде других случаев традиционный анализ количественных характеристик хаотических режимов не позволяет отличать переходный пространственный хаос от хаотических режимов, существующих при $t \rightarrow \infty$. На временах $t < T_N$ будет происходить с высокой точностью установление пространственно-временного спектра мощности, функции взаимной информации, распределения вероятностей в разных точках фазового пространства.

Если переходный хаос имеет отношение к гидродинамической турбулентности и к системам реакция – диффузия, то даже самые мощные компьютеры не позволяют выяснить, каковы аттракторы таких систем, даже если числа Рейнольдса и соответственно длина области невелики. Авторы работы [243] оценили по формуле (9.69) время выхода на аттрактор в модели (9.68), состоящей из 128 ячеек, при параметрах, указанных выше. Если считать, что изучаемый физический процесс таков, что каждая итерация занимает 10^{-15} сек., то чтобы дождаться выхода на аттрактор, потребуется 10^{40} лет.

Если переходная турбулентность характерна для гидродинамических задач, нелинейных нейронных сетей, эволюционных моделей, то нужно принципиально изменить подход ко многим задачам, к вычислительному эксперименту в этих областях. Возникнет необходимость детального исследования метастабильно устойчивых структур и метастабильных хаотических режимов, которые до настоящего времени практически не исследовались.

Однако сейчас неясно, насколько велик класс моделей, для которых характерна переходная турбулентность, и время выхода на аттрактор растет сверхэкспоненциально. В самом деле, и изучаемое отображение, и тип связи с ближайшими соседями имеют специальный вид. Возможно, их небольшое изменение намного ускорит переходные процессы. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Пространственно – временной хаос в неограниченных областях. До сих пор мы рассматривали в качестве прообразов хаотических режимов в системах реакция – диффузия диффе-

ренциальные уравнения или отображения, заданные в ограниченных областях. Мы считали также, что в сосредоточенной системе аттрактор определяется циклом. Однако недавно в работе Л.А.Бунимовича и Я.Г.Синяя был предложен другой прообраз хаотических режимов – так называемый пространственно – временной хаос [229]. В ней рассматривается поведение бесконечной цепочки связанных осцилляторов. Динамика каждого из них определяется некоторым одномерным отображением, итерации которого ведут себя хаотическим образом.

Этот подход представляет особый интерес для систем реакция – диффузия по двум причинам. В настоящее время активно изучается большой класс хаотических реакций при условиях, когда можно не рассматривать пространственные распределения концентраций. И важно было бы выяснить, что будет происходить в тех случаях, когда существенны диффузионные эффекты. Во многих системах основной интерес представляют ситуации, в которых переменные хаотическим образом меняются не только во времени в данной точке, но и в пространстве в фиксированный момент времени. Такое поведение трудно исследовать, если двигаться от простейших режимов к более сложным, например увеличивая длину области. Поэтому особенно важным оказывается предельный случай, когда длина области бесконечна.

В работе [229] была рассмотрена следующая модель. Пусть каждой точке одномерной цепочки $i \in \mathbb{Z}^1$ (\mathbb{Z}^1 – множество целых чисел) сопоставляется переменная $x_i \in [0,1]$. Фазовое пространство изучаемой динамической системы M состоит из бесконечных в оба конца последовательностей $\{x_i\}$, $-\infty < i < \infty$. M имеет естественную топологию прямого произведения отрезков и соответствующую σ – алгебру \mathcal{U} . Рассмотрим функцию $f: [0,1] \rightarrow R^1$ такую, что

- 1) $f(0) = 0$; $f(1) = d$, где $d \geq 2$ – целое число;
- 2) $f \in C^{1+\gamma}([0,1])$ для некоторого $\gamma > 0$ и $f' \geq \lambda = \text{const} > 1$.

Будем обозначать через f также одномерное растягивающее отображение $f: x \rightarrow \{f(x)\}$, где $\{ \}$ обозначает дробную часть действительного числа.

В этом случае f имеет единственную инвариантную меру, которая абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры, ее плотность непрерывна и строго положительна. Обозначим через F отображение M на себя, такое, что $(Fx)_i = f(x_i)$, $-\infty < i < \infty$.

Пусть функция α , заданная на отрезке $I = [0, 1]$, определяется формулами

- 1) $\alpha(y) = \varepsilon$ для $\delta \leq y \leq 1 - \delta$;
- 2) $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$;
- 3) $\alpha'(y) \geq 0$ для $0 \leq y \leq \delta$; $\alpha'(y) \leq 0$ для $1 - \delta \leq y \leq 1$;
- 4) $\alpha \in C^2([0, 1])$.

Обозначим через $\alpha^{(1)}$ величину $\max_{y \in [0, 1]} |\alpha'(y)|$. Рассмотрим оператор усреднения A

$$(Ax)_i = (1 - \alpha(x_i))x_i + \frac{\alpha(x_i)}{2} (x_{i-1} + x_{i+1}).$$

Изучаются только такие операторы A , что $AM = M$. (В частности, этому условию не удовлетворяет функция $\alpha(x) = \varepsilon$.)

Поведение цепочки осцилляторов определяется отображением $\Phi = A \circ F$.

$$(\Phi x)_i = (1 - \alpha(f(x_i)))f(x_i) + \frac{\alpha(f(x_i))}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})). \quad (9.70)$$

Была доказана следующая

Т е о р е м а 9.5. Для достаточно малых ε и $\alpha^{(1)}$ существует мера μ , определенная на измеримом пространстве (M, \mathcal{U}) такая, что

- 1) μ инвариантна относительно отображения Φ ;
- 2) для любых целых N_1 и N_2 индуцированная мера на пространстве конечных последовательностей $\{x_i\}$, $-N_1 \leq i \leq N_2$, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега;

3) динамическая система $(M, \mathcal{U}, \mu, \Phi)$ является перемешивающей;

4) динамическая система (M, \mathcal{U}, μ, S) также является перемешивающей, где S – оператор сдвига в M .

Из этой теоремы следует, что отображение (9.70) обладает сильными эргодическими свойствами: в нем существует и временной, и пространственный хаос.

В нескольких работах численно исследовались цепочки осцилляторов, динамика которых определяется одномерными отображениями [64]. Однако, чтобы использовать представления о пространственно-временном хаосе при решении многих конкретных задач, нужен дальнейший анализ этого класса математических моделей. Важно было бы оценить, насколько велика должна быть длина области, чтобы наблюдалось поведение, близкое к пространственно – временному хаосу. Интересно было бы выяснить, какие качественные эффекты будут наблюдаться при изменении функции f и вида связи α . По-видимому, эти вопросы будут активно изучаться в ближайшие годы.

Г Л А В А 10

ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ УПОРЯДОЧЕННОСТИ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ

При изучении многих открытых систем существенными оказываются многомерные эффекты, и системы типа «реакция – диффузия» приходится рассматривать в двумерных и трехмерных областях. Представления о возможных типах упорядоченности в таких нелинейных средах дает двумерный аналог уравнения Курамото – Цузуки

$$W_t = W + (1 + ic_1) (W_{xx} + W_{yy}) - (1 + ic_2) |W|^2 W. \quad (10.1)$$

Это уравнение используется в теории ветровых волн на воде [5], при исследовании диссипативных структур в активных средах и в колебательных химических реакциях [290], в некоторых моделях морфогенеза [32]. Отметим, что уравнение (10.1) описывает более узкий класс двухкомпонентных систем, чем уравнение Курамото – Цузуки в одномерных задачах. Поскольку в двумерном случае существенна не только длина, но и направление волнового вектора, то неустойчивых мод становится больше, и возникают более сложные модели, чем уравнение (10.1) [346].

В ряде исследований основное внимание было уделено задаче Коши для этого уравнения. Большая библиография таких работ приводится в [290]. В них обычно рассматриваются автомодельные решения (как правило, спиральные волны), определенные в бесконечных областях и имеющие особен-

ности фазы (т. е. такие точки, где $|W| \rightarrow 0$ и фаза $\varphi(W = \rho e^{i\varphi})$ не определена [390]). При сопоставлении результатов анализа таких решений с данными вычислительного или натурального эксперимента возникает ряд проблем. Во-первых, необходимо выяснить, насколько быстро происходит выход на автомодельные решения. Во-вторых, всегда приходится иметь дело с ограниченными областями, в то время как решение не обладает свойством локализации.

Поэтому представляет интерес альтернативный подход — анализ решений (10.1) для случая небольших двумерных областей. При этом можно было бы использовать результаты изучения упрощенных моделей и представления, полученные при исследовании одномерного уравнения. В рамках такого подхода можно провести более полное исследование, можно не ограничиваться одним выделенным классом решений и выяснить основные типы упорядоченности, которые бы представляли интерес в более сложных задачах.

Следуя работам [19, 20], рассмотрим следующую краевую задачу:

$$W_t = W + (1 + ic_1)(W_{xx} + W_{yy}) - (1 + ic_2)|W|^2 W,$$

$$0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l, W(x, y, 0) = W_0(x, y), \quad (10.2)$$

$$W_x(0, y, t) = W_x(l, y, t) = W_y(x, 0, t) = W_y(x, l, t) = 0.$$

Нас будет интересовать поведение ее решений при разных значениях c_1 и c_2 в случае небольших областей. В приводимых ниже численных расчетах $l = \pi$, а начальные данные несимметричны и имеют вид

$$W_0 = u_0 + iv_0 = 0,1 \sum_{m, n=0}^4 \cos \frac{\pi m x}{l} \cos \frac{\pi n y}{l} [1 + i/(m + 1)].$$

В такой постановке существенны только простейшие симметричные решения. А именно

а) пространственно однородное решение

$$W(x, y, t) = \exp(-ic_2 t); \quad (10.3)$$

б) одномерные решения $W(x, y, t) = W(x, t)$ или $W(x, y, t) = W(y, t)$;

в) решения, симметричные относительно диагоналей квадрата

$$W(x, y, t) = W(y, x, t) \quad \text{или} \quad W(x, y, t) = W(l - y, l - x, t).$$

Остановимся на следующих вопросах. Будут ли устойчивы одномерные решения задачи (10.2) относительно двумерных возмущений? Имеет ли эта задача решения, у которых нет одномерного аналога? Как происходит усложнение двумерных структур при изменении параметров c_1 и c_2 ?

§ 10.1. Упрощенная конечномерная система

При исследовании одномерной задачи важную роль играет анализ различных упрощенных моделей. Для построения таких моделей в двумерной задаче удобно представить ее решение в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn}(t) \cos \frac{\pi m x}{l} \cos \frac{\pi n y}{l},$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m, n=0}^{\infty} b_{mn}(t) \cos \frac{\pi m x}{l} \cos \frac{\pi n y}{l}$$

и записать систему уравнений, связывающую коэффициенты Фурье $a_{mn}(t)$ и $b_{mn}(t)$:

$$\dot{a}_{mn} = a_{mn} - (a_{mn} - c_1 b_{mn}) k^2 (m^2 + n^2) - (u_{mn} - c_2 v_{mn}), \quad (10.4)$$

$$\dot{b}_{mn} = b_{mn} - (c_1 a_{mn} + b_{mn}) k^2 (m^2 + n^2) - (c_2 u_{mn} + v_{mn}),$$

$$k = \pi/l,$$

где u_{mn} и v_{mn} — известные функции $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$. В дальнейшем будет использоваться обозначение $\rho_{mn}^2 = a_{mn}^2 + b_{mn}^2$. Упрощенные модели можно получить из этой бесконечной системы, оставляя в ней конечное число уравнений. Это можно сделать разными способами, например, отбрасывая гармоники a_{mn} , b_{mn} с номерами, у которых $m \geq p$ или $n \geq p$. По-

лученную таким способом упрощенную систему мы будем называть системой с $N = p$, она содержит $2p^2$ уравнений.

Далее мы будем рассматривать упрощенную модель с $N = 2$, представляющую собой систему восьми обыкновенных дифференциальных уравнений.

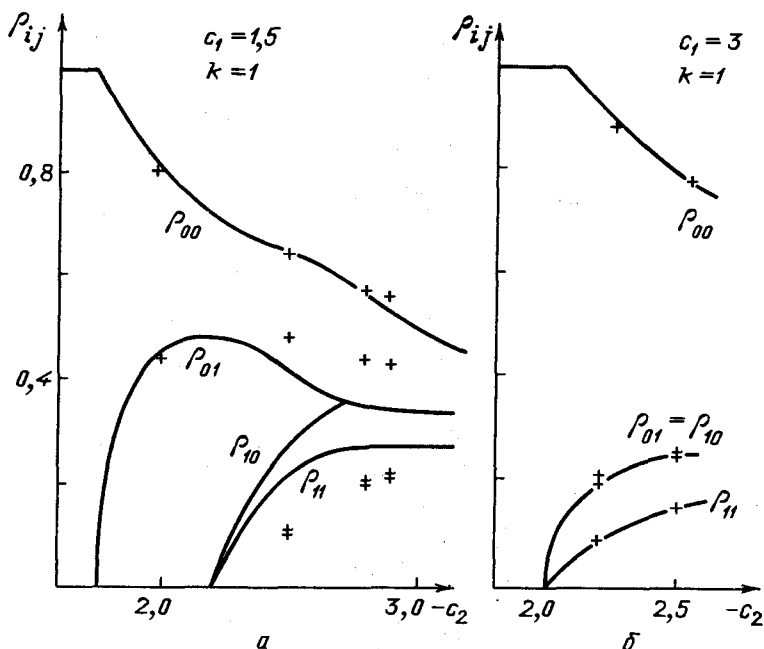


Рис. 10.1. Устойчивые особые точки в упрощенной модели с $N = 2$

Число входящих в нее уравнений можно на единицу уменьшить, если перейти к переменным ρ_{mn} , θ_{mn} по формулам $a_{mn} = \rho_{mn} \cos \varphi_{mn}$, $b_{mn} = \rho_{mn} \sin \varphi_{mn}$, $\theta_{mn} = \varphi_{mn} - \varphi_{00}$. Уравнение для φ_{00} можно решить отдельно. Это означает, что функции $a_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$ изменяются более сложно, чем $\rho_{mn}(t)$ и $\theta_{mn}(t)$. В частности, особым точкам $\rho_{mn} = \text{const}$, $\theta_{mn} = \text{const}$ соответствуют периодические решения $a_{mn}(t)$, $b_{mn}(t)$; предельным циклам — двухчастотные режимы. Поэтому далее будем называть решения упрощенной системы, у которых $\rho_{mn} = \text{const}$, особыми точками, решения, у которых $\rho_{mn}(t)$ периодичны, — предельными циклами.

В упрощенной модели с $N = 2$ есть аналог простейших симметричных решений. Однородному решению (10.3) соответствует особая точка $\rho_{00} = 1$, $\rho_{mn} = 0$, $m + n \neq 0$. Однородным по оси y решениям задачи (10.2) — такие решения упрощенной системы, у которых $a_{mn} = 0$, $b_{mn} = 0$ при $n \neq 0$.

Решениям задачи (10.2), симметричным относительно диагонали квадрата $x = y$, можно сопоставить интегральные кривые, на которых $a_{mn} = a_{nm}$, $b_{mn} = b_{nm}$. Такие решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений мы будем также называть симметричными.

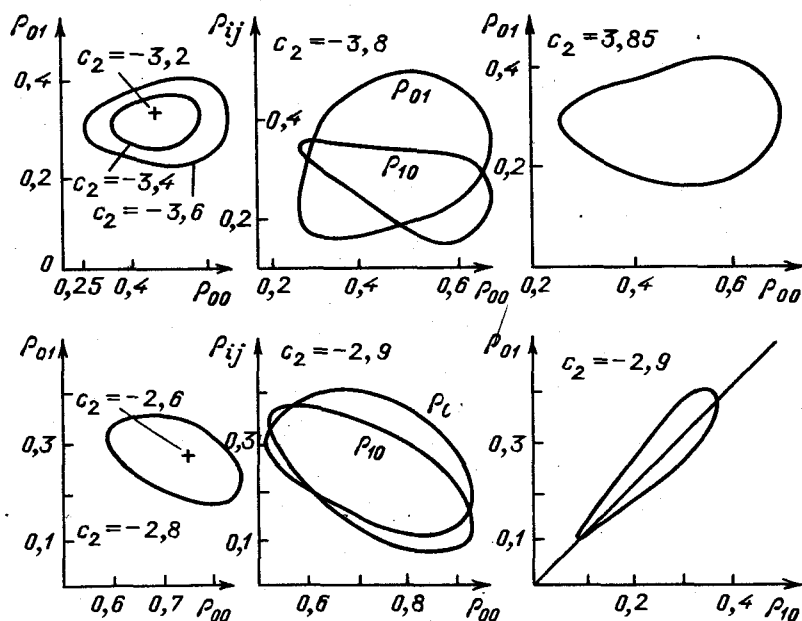


Рис. 10.2. Устойчивые предельные циклы в упрощенной системе. Сверху — на линии $c_1 = 1,5$, снизу — на линии $c_1 = 3,0$

Проследим, как меняется тип решений упрощенной системы при уменьшении параметра c_2 . Рассмотрим линию $c_1 = 1,5$. В системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений однородное решение теряет устойчивость, при этом появляется устойчивая особая точка с $\rho_{00} \neq 1$. Значение c_2 , при

котором происходит эта бифуркация, совпадает с критическим значением параметра для задачи в частных производных. В появившейся особой точке $\rho_{mn} = 0$ при $m \neq 0$. Заметим, что одновременно в системе появляется и другая особая точка, у которой $\rho_{mn} = 0$, если $n \neq 0$. В этом случае система с $N = 2$ упрощается и переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.15), которая рассматривалась в гл. 7 ($\xi = a_{00}^2 + b_{00}^2$, $\eta = a_{01}^2 + b_{01}^2$, $\theta = 2(\varphi_{00} - \varphi_{01})$).

При дальнейшем уменьшении c_2 точка, у которой $\rho_{mn} = 0$ при $m \neq 0$, также теряет устойчивость, и асимптотику определяет особая точка с $\rho_{mn} \neq 0$ (рис. 10.1, сплошные линии). Затем при некотором значении c_2 ρ_{01} становится в точности равным ρ_{10} , и далее в расчетах наблюдается выход на симметричное решение $a_{01} = a_{10}$, $b_{01} = b_{10}$.

При $c_2 \approx -3,3$ происходит бифуркация Хопфа, и рождается симметричный предельный цикл ($\rho_{01}(t) = \rho_{10}(t)$). Положение особой точки, потерявшей устойчивость, и примеры симметричных циклов показаны на рис. 10.2,а. При $c_2 \approx -3,7$ цикл теряет симметрию. Две проекции решения такого типа показаны на рис. 10.2,б. Наблюдаемую последовательность бифуркаций можно условно представить следующей схемой.



Схема 10.1

В этой последовательности большинство бифуркаций связано с потерей или возникновением симметрии, что существенно отличает двумерную задачу от одномерной.

Первый переход в этой последовательности связан с возникновением особой точки с $\rho_{00} \neq 1$. Критическое значение параметра, при котором этот переход происходит, как и в одномерном случае, определяется равенством (7.8). Однако ситуация может быть более сложной. В этом можно убедиться, проследив за изменением решений на линии $c_1 = 3,0$ (см. рис. 10.1). Схема усложнения решений, определяющих асимптотику упрощений системы с $N = 2$, будет следующей.

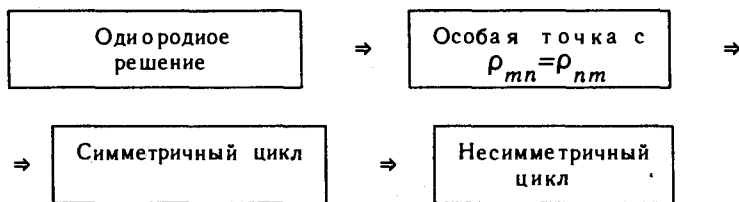


Схема 10.2

Проекция устойчивых предельных циклов на линии $c_1 = 3,0$ представлены на рис. 10.2.

Важно отметить, что особая точка с $\rho_{01} = \rho_{10}$ появляется при том же значении параметра c_2 , при котором могут появиться точки с $\rho_{mn} = 0$, $m \neq 0$. Выход на симметричное решение происходит с начальных данных общего вида (спонтанное возникновение симметрии). Попробуем разобраться в причинах этого явления.

§ 10.2. Потеря устойчивости пространственно – однородного решения

Рассмотрим задачу (10.2) вблизи критических значений параметров, при которых однородное решение (10.3) потеряло устойчивость. Результаты соответствующих расчетов показаны маркерами на рис. 10.1. При $t \rightarrow \infty$ асимптотику определяют решения с $\rho_{mn} = \text{const}$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$. На линии $c_1 = 1,5$, как и в упрощенной модели с $N = 2$, возникающее решение одномерно, на линии $c_1 = 3$ оно оказывается симмет-

ричным. Совпадает не только тип решений этих двух задач, близки оказываются и их количественные характеристики.

Аналогом особых точек упрощенной модели являются периодические решения задачи в частных производных. Справедлива следующая

Л е м м а 10.1. *Если автомодельное решение вида*

$$W(x, y, t) = R(x, y) \exp [i\omega t + ia(x, y)] \quad (10.5)$$

удовлетворяет задаче (10.2), то у него $\rho_{mn} = \text{const}$, $\theta_{mn} = \text{const}$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$ (ρ_{mn} и θ_{mn} определяются по коэффициентам Фурье a_{mn} , b_{mn} так же, как в упрощенной системе). Верно и обратное утверждение: если амплитуды гармоник и сдвиги фаз между ними в решении задачи (10.2) постоянны, то его можно представить в виде (10.5).

Автомодельные решения, возникающие после потери устойчивости однородного решения, близки к нему. Поэтому для их анализа естественно воспользоваться асимптотическими методами.

1. Запишем уравнения (10.2) в переменных ρ, φ : $u = \rho \cos \varphi, v = \rho \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho - \rho^3 + (\rho_{xx} - \rho\varphi_x^2 + \rho_{yy} - \rho\varphi_y^2) - \\ &\quad - c_1(2\rho_x\varphi_x + \rho\varphi_{xx} + 2\rho_y\varphi_y + \rho\varphi_{yy}), \\ \rho\varphi_t &= -c_2\rho^3 + (2\rho_x\varphi_x + \rho\varphi_{xx} + 2\rho_y\varphi_y + \rho\varphi_{yy}) + \\ &\quad + c_1(\rho_{xx} - \rho\varphi_x^2 + \rho_{yy} - \rho\varphi_y^2). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Решение будем искать в виде ряда по малому параметру ε , характеризующему отклонение c_2 от критического значения \bar{c}_2 , при котором решение (10.3) теряет устойчивость:

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \varepsilon r_1(x, y) + \varepsilon^2 r_2(x, y) + \varepsilon^3 r_3(x, y) + \dots, \\ \varphi &= (-\bar{c}_2 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2 + \varphi_3\varepsilon^3 + \dots)t + \\ &\quad + \varepsilon a_1(x, y) + \varepsilon^2 a_2(x, y) + \dots, \\ c_2 &= \bar{c}_2 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \omega_3\varepsilon^3 + \dots, \quad \varphi_r \omega_r = \text{const}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Подставим формулы (10.7) в уравнения (10.6) и приравняем члены при одинаковых степенях ε . Это даст системы уравнений для последовательного определения $r_n(x, y)$, $a_n(x, y)$. В нулевом порядке по ε уравнения удовлетворяются тождественно. В первом порядке их можно привести к виду

$$\begin{aligned}\Delta r_1 + k^2 r_1 &= c_1(\varphi_1 + \omega_1)/(1 + c_1^2), \\ \Delta a_1 &= 2Lr_1 + (\varphi_1 + \omega_1)/(1 + c_1^2),\end{aligned}\tag{10.8}$$

где $k^2 = -2(1 + c_1\bar{c}_2)/(1 + c_1^2)$, $L = (\bar{c}_2 - c_1)/(1 + c_1^2)$.

Структура уравнений n -го порядка аналогична: r_n и a_n входят в них так же, как и r_1 , a_1 в формулы (10.8), но правые части гораздо сложнее.

Из граничных условий задачи (10.2) следуют равенства

$$\begin{aligned}\partial r_n / \partial x|_{x=0,l} &= 0, & \partial r_n / \partial y|_{y=0,l} &= 0, \\ \partial a_n / \partial x|_{x=0,l} &= 0, & \partial a_n / \partial y|_{y=0,l} &= 0.\end{aligned}\tag{10.9}$$

Можно проверить, что задача (10.8), (10.9) разрешима только при условии $\varphi_1 + \omega_1 = 0$. Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned}r_1 &= \sum_{m,n} A_{mn} \cos\left[\frac{\pi m x}{l}\right] \cos\left[\frac{\pi n y}{l}\right], \\ a_1 &= -2Lr_1/k^2 + \text{const}, \quad \pi^2(m^2+n^2)/l^2 = k^2,\end{aligned}\tag{10.10}$$

где m, n — целые числа. Из формулы для k^2 следует, что в точке первой бифуркации $m = 0, n = 1$ либо $m = 1, n = 0$. В дальнейшем будем считать, что $k = \pi/l$, r_1 и a_1 имеют вид

$$\begin{aligned}r_1 &= A \cos kx + B \cos ky, \\ a_1 &= -2Lr_1/k^2 + \text{const}.\end{aligned}\tag{10.11}$$

Уравнения высших порядков будут разрешимы, если их правые части ортогональны ко всем нетривиальным решениям соответствующих однородных уравнений (альтернатива Фредгольма).

Рассматривая условия разрешимости для уравнений второго порядка, получим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \\ \varphi_2 + \omega_2 &= L(A^2 + B^2)(1 + c_1^2)[2L^2/k^2 + k^2/2]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Решения этих уравнений будут таковы

$$\begin{aligned} r_2 &= C \cos kx + D \cos ky + Q_1 \cos 2kx + Q_2 \cos 2ky + \\ &+ Q_3 \cos kx \cos ky + Q_4, \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{2L}{k^2} [C \cos kx + D \cos ky] + \\ &+ B_1 \cos 2kx + B_2 \cos 2ky + B_3 \cos kx \cos ky, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= A^2[0,25 + 2L^2/(3k^4)], \\ Q_2 &= B^2[0,25 + 2L^2/(3k^4)], \\ Q_3 &= 3 AB, \quad Q_4 = -(A^2 + B^2)(L^2/k^2 + k^2/4 + 5/4), \\ B_1 &= A^2[L/(4k^2) - L^3/(3k^6)], \quad B_3 = -4 ABL/k^2, \\ B_2 &= B^2[L/(4k^2) - L^3/(3k^6)], \end{aligned}$$

C и D — новые неизвестные константы.

Условия разрешимости для уравнений третьего порядка позволяют определить значения A и B . Малый параметр ε ранее был определен с точностью до множителя. Далее мы будем считать, что

$$\varepsilon = |c_2 - \bar{c}_2|^{1/2} + \dots \quad (10.14)$$

Это упростит соотношения для A и B :

$$\begin{aligned} A(XA^2 + YB^2 - \alpha Z) &= 0, \\ B(YA^2 + XB^2 - \alpha Z) &= 0, \end{aligned} \quad (10.15)$$

где

$$X = 2L^4/(3k^6) - 3L^2/(2k^2) + L^2 + 5k^2/4 + k^4/4,$$

$$Y = 4L^2/k^2 + L^2 - k^2 + k^4/4, \quad Z = |c_1|/(1 + c_1^2),$$

$$\alpha = \text{sign } c_1 \cdot \text{sign } (\bar{c}_2 - c_2).$$

Из формул (10.15) ясно, что $X + Y > 0$, $Z > 0$. Можно убедиться также, что $X > 0$.

Легко проверить, что при $\alpha = -1$ система уравнений (10.15) имеет только тривиальные решения. Это соответствует той области параметров, где устойчиво однородное решение (10.3). Поэтому бифуркация в изучаемой системе всегда надкритична [107]. При $\alpha = +1$ система уравнений (10.15) имеет девять решений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & A = B = 0; \\ \text{б) } & A = 0, \quad B = \pm (Z/X)^{1/2}; \\ \text{в) } & B = 0, \quad A = \pm (Z/X)^{1/2}; \\ \text{г) } & \text{при } X \neq Y \quad A^2 = B^2 = Z/(X + Y). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Случай $X = Y$ является вырожденным (система (10.15) имеет бесконечно много решений, у которых $A^2 + B^2 = Z/X$), далее он рассматриваться не будет.

Соотношения (10.16) показывают, что в общем случае ($X \neq Y$) решения, возникшие после ветвления, будут либо одномерны, либо симметричны. Этот вывод подтверждается в расчетах.

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости возникших автомодельных решений. Пусть $\bar{r}(x, y, t)$ и $\bar{\psi}(x, y, t)$ — малые возмущения

$$\begin{aligned} \rho &= R(x, y) + \bar{r}(x, y, t), \\ \varphi &= \omega t + a(x, y) + \bar{\psi}(x, y, t). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Устойчивость решения определяется из линеаризованной относительно \bar{r} и $\bar{\psi}$ задачи в частных производных. Решения ее будем искать в виде $\bar{r} = e^{\lambda t} r(x, y)$, $\bar{\psi} = e^{\lambda t} \psi(x, y)$. В ре-

зультате получится задача на собственные значения, которую можно привести к виду

$$\Delta r + r \left[\frac{1 - c_1 \omega}{1 + c_1^2} - 3 \frac{1 + c_1 c_2}{1 + c_1^2} R^2 - (a_x^2 + a_y^2) \right] -$$

$$- 2R(a_x \psi_x + a_y \psi_y) = \lambda(1 + c_1 R \psi) / (1 + c_1^2),$$

$$R \Delta \psi + r \left[\frac{\omega - c_1}{1 + c_1^2} + 3 \frac{c_1 - c_2}{1 + c_1^2} R^2 + \Delta a \right] + 2a_x r_x +$$

$$+ 2a_y r_y + 2R_x \psi_x + 2R_y \psi_y = \lambda(R \psi - c_1 r) / (1 + c_1^2). \quad (10.18)$$

Краевые условия для $r(x, y)$ и $\psi(x, y)$ будут такими же, как в формуле (10.9).

Поскольку нас интересуют решения в окрестности критического значения \bar{c}_2 , будем полагать

$$R = 1 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^3 r_3 + \dots,$$

$$\varphi = \omega t + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^3 a_3 + \dots,$$

$$\omega = -\bar{c}_2 + \varphi_2 \varepsilon^2 + \varphi_3 \varepsilon^3 + \dots,$$

$$c_2 = \bar{c}_2 + \omega_2 \varepsilon^2 + \omega_3 \varepsilon^3 + \dots \quad (10.19)$$

Пусть сначала $\varepsilon = 0$, т. е. $R = 1$, $\varphi = -c_2 t$. Будем искать решение задачи (10.18) в виде $\begin{bmatrix} r \\ \psi \end{bmatrix} = \sum_{m, n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} r_{mn} \\ \psi_{mn} \end{bmatrix} \cos \frac{\pi m x}{l} \times \cos \frac{\pi n y}{l}$, чтобы выполнялись граничные условия. В результате для каждой пары r_{mn} , ψ_{mn} получим систему уравнений, которая будет разрешима при условии

$$\lambda^2 + 2\lambda \left[\pi^2 m^2 / l^2 + \pi^2 n^2 / l^2 + 1 \right] + \pi^2 (m^2 + n^2) / l^2 \times$$

$$\times \left[(1 + c_1^2) \pi^2 (m^2 + n^2) / l^2 + 2(1 + c_1 c_2) \right] = 0. \quad (10.20)$$

Задача (10.18) имеет собственное значение, равное нулю, при условии

$$(1 + c_1^2) \pi^2 (m^2 + n^2) / l^2 + 2(1 + c_1 c_2) = 0. \quad (10.21)$$

Именно оно определяет \bar{c}_2 , если положить $m^2 + n^2 = 1$.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$, выполнены соотношения (10.19) и при этом

$$\begin{aligned} \lambda/(1 + c_1^2) &= \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots, \quad r = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \dots, \\ \psi &= \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots \end{aligned} \quad (10.22)$$

Подставим разложения (10.19), (10.22) в уравнения (10.18) и приравняем члены при одинаковых степенях ε . Уравнения нулевого порядка дают

$$\rho_0 = E\cos kx + F\cos ky, \quad \psi_0 = -2L\rho_0/k^2 + \text{const}. \quad (10.23)$$

Условия разрешимости уравнений первого порядка приводят к равенствам

$$\lambda_1 = 0, \quad AE + BF = 0, \quad (10.24)$$

где A и B определяются формулами (10.16). Их решения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \xi_1 \cos 2kx + \xi_2 \cos 2ky + \xi_3 \cos kx \cos ky + \\ &\quad + \xi_4 \cos kx + \xi_5 \cos ky, \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \eta_1 \cos 2kx + \eta_2 \cos 2ky + \eta_3 \cos kx \cos ky + \\ &\quad + \eta_4 \cos kx + \eta_5 \cos ky, \end{aligned}$$

где

$$\xi_1 = AE [0,5 + 4L^2/(3k^4)], \quad \xi_2 = BF [0,5 + 4L^2/(3k^4)],$$

$$\xi_3 = 3(AF + BE),$$

$$\eta_1 = LAE [1/(2k^2) - 2L^2/(3k^6)],$$

$$\eta_2 = LBF [1/(2k^2) - 2L^2/(3k^6)],$$

$$\eta_3 = -4L(AF + BE)/k^2,$$

$$\eta_4 = -2L\xi_4/k^2, \quad \eta_5 = -2L\xi_5/k^2,$$

ξ_4 и ξ_5 — неизвестные константы. Условия разрешимости для уравнений второго порядка по параметру ε приводят к следующим соотношениям:

$$E\left[\lambda_2 \frac{1+k^2}{k^2}\right] = E\left[PA^2 + QB^2 + \alpha \frac{|c_1|}{1+c_1^2}\right], \quad (10.26)$$

$$F\left[\lambda_2 \frac{1+k^2}{k^2}\right] = F\left[QA^2 + PB^2 + \alpha \frac{|c_1|}{1+c_1^2}\right], \quad (10.27)$$

где

$$P = \frac{25L^2}{2k^2} - \frac{2L^4}{k^6} - L^2 - \frac{k^4}{4} - \frac{23k^2}{4},$$

$$Q = k^2 - L^2 - 4L^2/k^2 - k^4/4 = -Y.$$

Рассмотрим одномерное решение. Пусть $A = 0$, тогда $B \neq 0$, $F = 0$, $E \neq 0$. Уравнение (10.27) выполнено тождественно, а из уравнения (10.26) с учетом формул (10.15) и (10.16) следует

$$\lambda_2 \frac{1+k^2}{k^2} = (X - Y) B^2. \quad (10.28)$$

Знак λ_2 определяется знаком величины $K = X - Y$. Если $K > 0$, то одномерное решение неустойчиво, если $K < 0$, то устойчиво.

Пусть решение симметрично: $A^2 = B^2 = Z/(X + Y)$. При этом $E \neq 0$, $F \neq 0$ и уравнения (10.26) и (10.27) совпадают. После алгебраических преобразований получаем

$$\lambda_2 \frac{1+k^2}{k^2} = (X + P) A^2 = -2KA^2. \quad (10.29)$$

Симметричное решение неустойчиво при $K < 0$ и устойчиво при $K > 0$. Величина K связана с параметрами задачи следующим образом:

$$K = \frac{2L^4}{3k^6} - \frac{11L^2}{2k^2} + \frac{9k^2}{4}, \quad L = \frac{-2-k^2}{2c_1}, \quad k = \frac{\pi}{l}. \quad (10.30)$$

Можно сделать вывод, что при отрицательном K будет устойчиво одномерное, а при положительном — симметричное автономное решение.

3. Сравним полученные формулы с результатами проведенных двумерных расчетов. Из формул (10.7), (10.11)–(10.16) следует, что в окрестности точки бифуркации \bar{c}_2 выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= 1 - |c_2 - \bar{c}_2| (A^2 + B^2) [L^2/k^4 + L^2/k^2 + k^2/4 + 5/4] + \dots, \\ \rho_{10} &= |c_2 - \bar{c}_2|^{1/2} |A| [1 + 4L^2/k^4]^{1/2} + \dots, \\ \rho_{01} &= |c_2 - \bar{c}_2|^{1/2} |B| [1 + 4L^2/k^4]^{1/2} + \dots, \\ \rho_{11} &= |c_2 - \bar{c}_2| |AB| [9 + 40L^2/k^4 + 16L^4/k^8]^{1/2} + \dots \end{aligned} \quad (10.31)$$

Для $c_1 = 1,5$, $k = 1$, $\bar{c}_2 = -1,75$ и $L = -1$. При $c_2 = -1,85$, то есть $\varepsilon^2 = 0,1$ формулы (10.31) дают $\rho_{00} = 0,903$, $\rho_{01} = 0,372$. Заметим, что в этом случае $K = -31/12$, поэтому устойчивым должно быть одномерное решение. В расчетах для задачи в частных производных получены значения $\rho_{00} = 0,908$, $\rho_{01} = 0,334$, гармоники ρ_{mn} , $m > 0$ быстро убывают и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. В системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений $\rho_{00} = 0,911$, $\rho_{01} = 0,333$, $\rho_{10} = 0$, $\rho_{11} = 0$.

При $c_1 = 3$, $k = 1$, $K = 11/12$, здесь должно быть устойчиво симметричное автомодельное решение. Критическое значение $\bar{c}_2 = -2$, $L = -0,5$. Для $c_2 = -2,1$, $\varepsilon^2 = 0,1$ формулы (10.31) предсказывают значения $\rho_{00} = 0,937$, $\rho_{01} = \rho_{10} = 0,177$, $\rho_{11} = 0,070$. В задаче в частных производных получено $\rho_{00} = 0,942$, $\rho_{01} = 0,162$, $\rho_{10} = 0,156$, $\rho_{11} = 0,057$, в упрощенной системе с $N = 2$: $\rho_{00} = 0,945$, $\rho_{01} = \rho_{10} = 0,157$, $\rho_{11} = 0,055$. Это означает, что формулы (10.31) хорошо описывают решения задачи (10.2) в окрестности точки бифуркации, когда $\varepsilon = \sqrt{0,1} \approx 0,316$.

Из соотношения (10.30) следует, что при малых значениях c_1 в момент потери устойчивости однородного решения также должны появиться симметричные решения. Расчеты подтверждают этот вывод. Такая картина наблюдается, например, при $c_1 = 0,4$, $k = 1$. Можно сказать, что полученные

выше разложения хорошо согласуются с решениями задачи в частных производных и упрощенной системы.

§ 10.3. Усложнение решений задачи в частных производных

Простейшему аттрактору системы обыкновенных дифференциальных уравнений – устойчивой особой точке – в исходной задаче соответствует сложный автоколебательный процесс, который описывается автомодельным решением вида (10.5). Отметим, что частным случаем этого решения является спиральная волна

$$W = R(r) \exp [i\omega t + iS(r) + im\varphi],$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (10.32)$$

Формула (10.32) совпадает с (10.5), если $R(x, y) = R(r)$, $a(x, y) = S(r) + m\varphi$.

На рис.10.3 показана видовая проекция функции $u(x, y, t)$, соответствующей несимметричному автомодельному решению. Она периодична по времени. Из формулы (10.5) следует, что $u(x, y, t) = v(x, y, t+T/4)$, где T – период. Рис. 10.3 дает только качественное представление о поведении решений, поскольку на нем показаны неоднородности относительно меняющегося со временем уровня.

Реальные значения максимумов и минимумов u и v изменяются в широких пределах и могут быть как положительными, так и отрицательными. Несмотря на это, функция $R^2 = u^2 + v^2$ не зависит от времени. На рис. 10.4 показаны ее линии уровня и видовая проекция.

Здесь и далее линия уровня с номером p соответствует значению функции $f_p = -1 + (p - 1)\sqrt{10}$, ось абсцисс направлена горизонтально, ось ординат – по вертикали вверх. Все двумерные расчеты в этой работе проводились с использованием метода переменных направлений [168]. Шаги по времени τ и по пространству h указаны на рисунках.

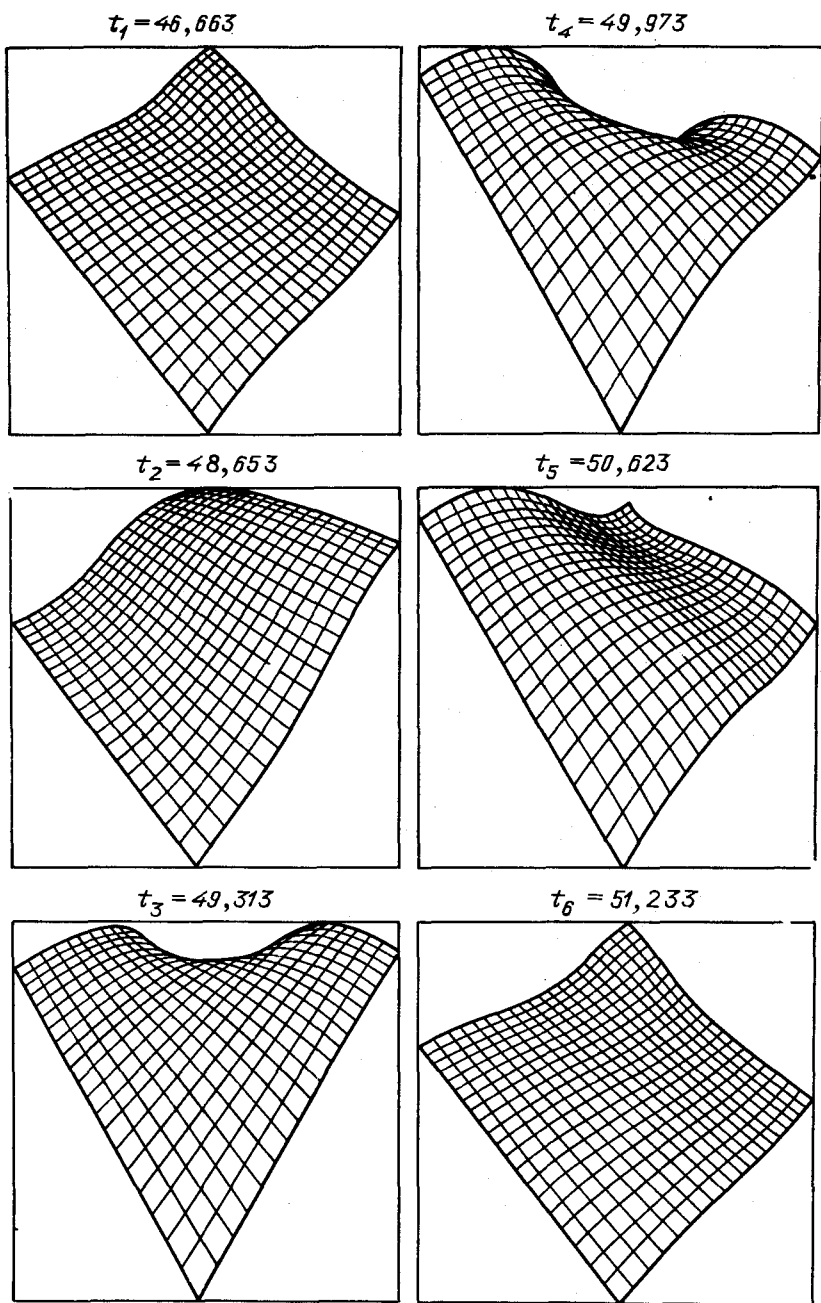


Рис. 10.3. Нессимметричное автомодельное решение задачи в частных производных. Изменение функций $u(x, y, t)$; $c_1 = 1,5$, $c_2 = -2,9$, $l = \pi$, $h = \pi/20$, $\tau = 10^{-2}$

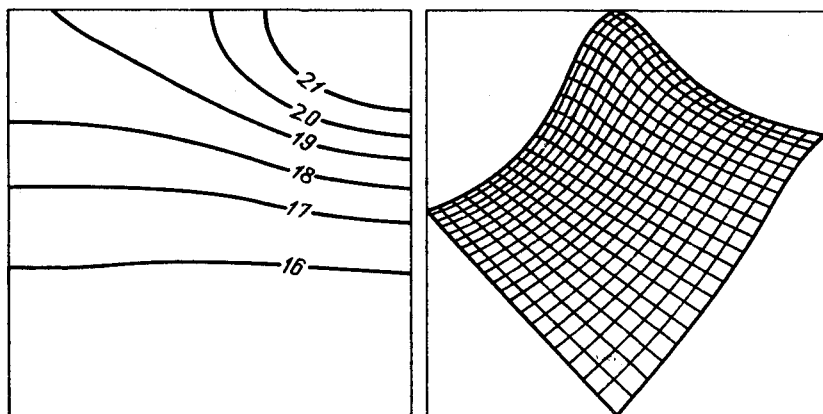


Рис. 10.4. Функция $R(x, y)$, соответствующая несимметричному автомодельно-му решению, показанному на рис. 10.3

Они определялись после проведения тестовых расчетов. В тех случаях, когда в двумерной задаче асимптотика определяется одномерным решением, последнее практически совпадает с решением, построенным для одномерной задачи по другой методике [22].

Процесс выхода на автомодельное решение показан на рис. 10.5. Функции $\rho_{mn}(t)$ стремятся к постоянным значениям при $t \rightarrow \infty$, причем $\rho_{01} \neq \rho_{10}$.

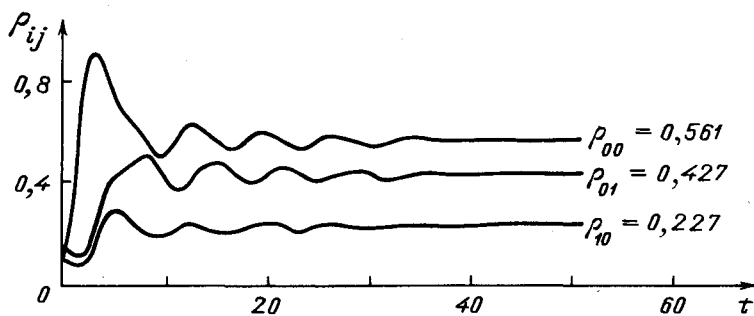


Рис. 10.5. Процесс выхода на автомодельное решение, показанное на рис. 10.3

На линии $c_1 = 3$, как показано выше, после потери устойчивости одномерного решения возникают симметричные решения вида (10.5). На рис. 10.6 приведены результаты соответствующего расчета. Показана функция $R(x, y)$, которая при достаточно больших t не зависит от времени. Функция $u(x, y, t)$ сложно меняется со временем (рис. 10.7), сохраняя симметрию относительно диагонали квадрата.

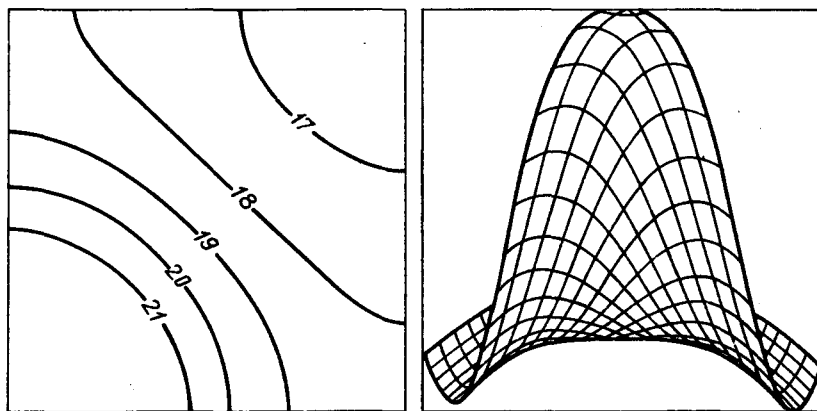


Рис. 10.6. Функция $R(x, y)$, соответствующая симметричному автомодельному решению: $c = 3$, $c = -2,5$, $l = \pi$, $h = \pi/20$, $\tau = 10^{-2}$

Посмотрим, как происходит усложнение решений задачи в частных производных. На линии $c_1 = 1,5$ последовательность такова:

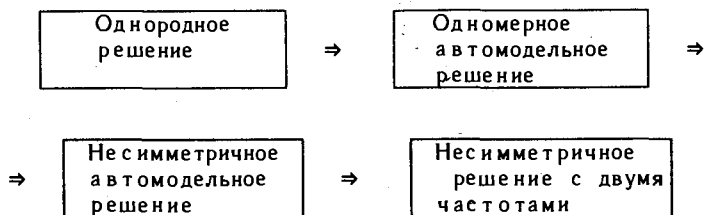
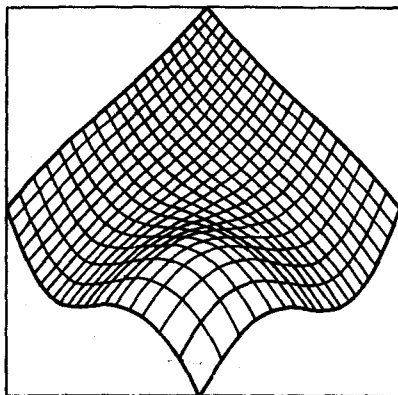
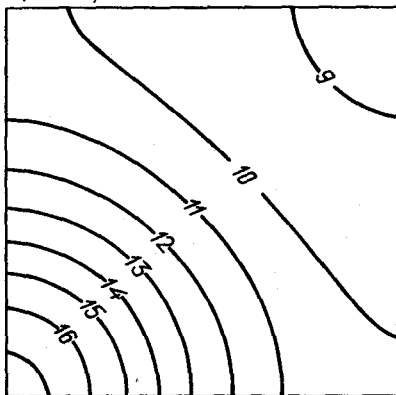
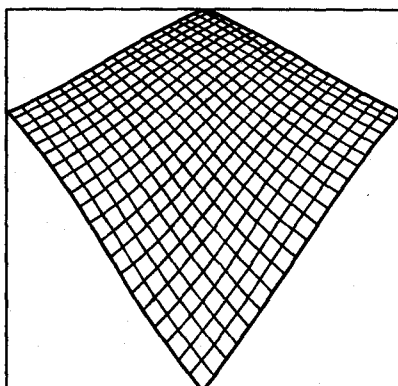
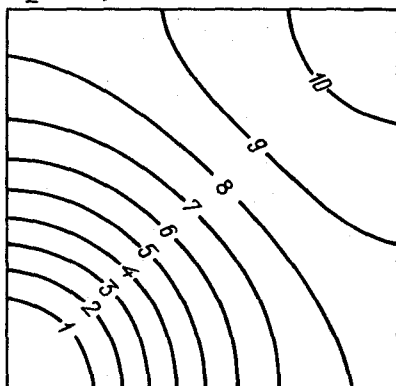


Схема 10.3

$$t_1 = 34,113$$



$$t_2 = 43,113$$



$$t_3 = 45,073$$

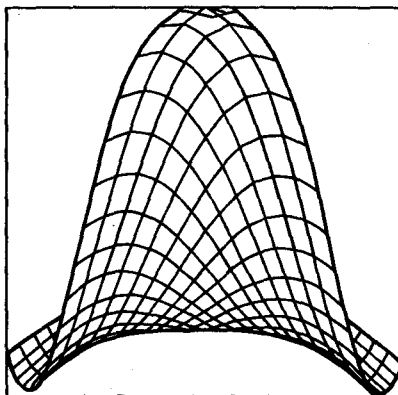
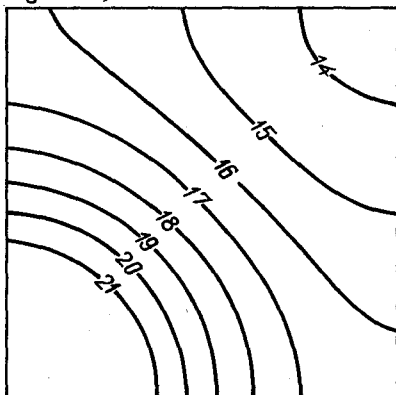


Рис. 10.7. Изменение функции $u(x,y,t)$ в симметричном автомодельном решении, представленном на рис. 10.6

Первые две бифуркации совпадают с бифуркациями в упрощенной системе с $N = 2$. При этом параметры особой точки с $\rho_{mn} = 0$ при $n \neq 0$ с точностью до нескольких процентов совпадают с характеристиками одномерных автомодельных решений. Однако в целом в задаче (10.2) последовательность переходов проще: в ней нет аналогов симметричных особых точек и симметричных предельных циклов.

На линии $c_1 = 3$ последовательность бифуркаций в упрощенной системе и исходной задаче одна и та же — такая, как на схеме 10.2. Параметры автомодельных решений и особых точек здесь также хорошо согласуются между собой (рис. 10.1).

Рассмотрим такие решения задачи в частных производных, у которых функции R и a периодичны по времени. Можно убедиться, что в этом случае $\rho_{mn}(t)$ также периодичны: $\rho_{mn}(t + T) = \rho_{mn}(t)$, $\theta_{mn}(t + T) = \theta_{mn}(t) + 2\pi\rho_{mn}$, $\rho_{mn} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Такие решения являются аналогами предельных циклов в системе с $N = 2$. Отметим, что функции u и v не являются периодическими — в системе будет наблюдаться установившийся двухчастотный режим. Аналогичная ситуация имела место и в упрощенной модели.

Одно из этих решений представлено на рис. 10.8. Разность $t_6 - t_1$ близка к периоду, поэтому $R(x, y, t_1) \approx R(x, y, t_6)$. Другой пример показан на рис. 10.9. Здесь линии уровня меняются гораздо сложнее. В момент t_3 они близки к линиям в моменты t_1 и t_6 , симметрично отраженным относительно диагонали квадрата.

Двумерные решения, наблюдаемые в этом диапазоне параметров, являются достаточно сложными. Для того, чтобы выяснить характер их качественной перестройки, необходимо рассматривать проекции на некоторые конечномерные пространства. В данном случае наиболее показательны проекции на плоскость (ρ_{10}, ρ_{01}) . Они представлены на рис. 10.10, 10.11 вместе с графиками функций $\rho_{mn}(t)$.

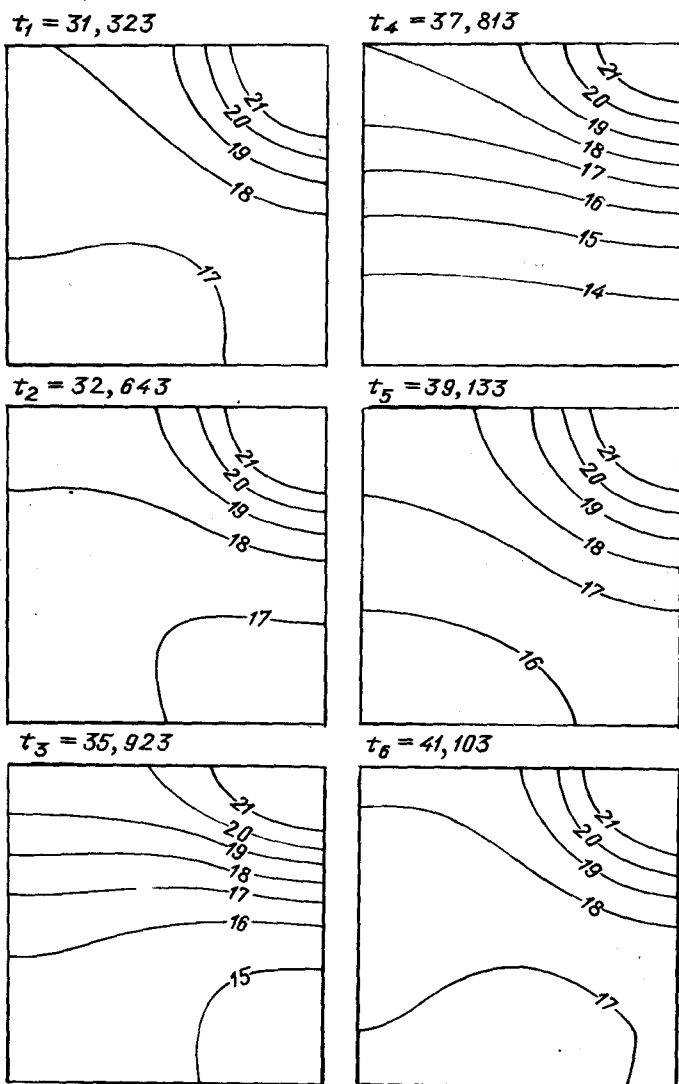


Рис. 10.8. Решение первого типа, у которого функция $R(x, y, t)$ периодична по времени. Показаны линии уровня R . Параметры расчета $c_1 = 1,5$,

$$c_2 = -3,2, \quad l = \pi, \quad h = \pi/20, \quad \tau = 10^{-2}$$

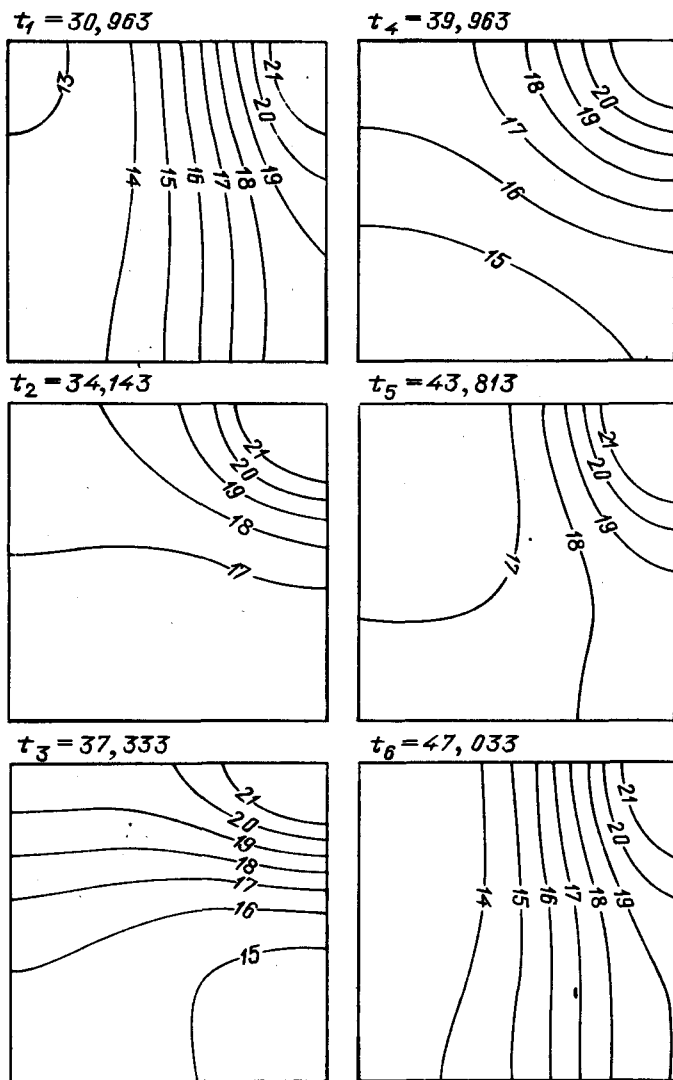


Рис. 10.9. Линии уровня решения типа II, у которого функция $R(x,y,t)$ периодична по времени. Параметры расчета $c_1 = 1,5$, $c_2 = -3,5$, $l = \pi$, $h = \pi/20$, $\tau = 10^{-2}$

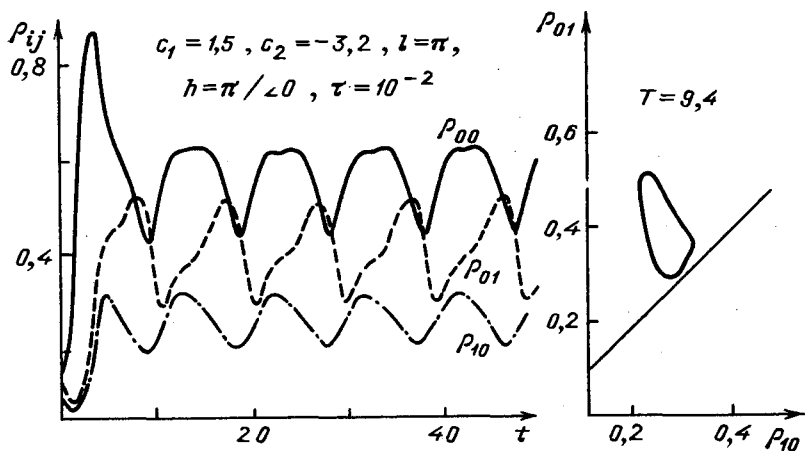


Рис. 10.10. а) Зависимость $\rho_{ij}(t)$; б) проекция на плоскость $\{\rho_{10}, \rho_{01}\}$ решения, показанного на рис. 10.8

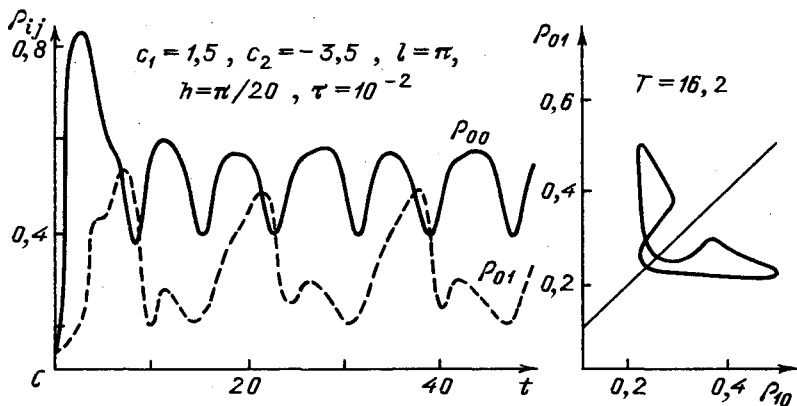


Рис. 10.11. Зависимость $\rho_{ij}(t)$ и проекция на плоскость $\{\rho_{10}, \rho_{01}\}$ решения, представленного на рис. 10.9

Решение, изображенное на рис. 10.8, проектируется на кривую, целиком лежащую выше диагонали $\rho_{10} = \rho_{01}$. В тече-

ние всего периода направления x и y «неравноправны». Назовем его решением типа I. Решению, показанному на рис. 10.9, соответствует замкнутая кривая, которая лежит по обе стороны от диагонали (см. рис. 10.11). Эта линия почти симметрична относительно прямой $\rho_{10} = \rho_{01}$. Направления x и y через время $T/2$ «меняются местами»: $R(x, y, t + T/2) \approx R(y, x, t)$. Это видно и на рис. 10.12, где показаны видо-вые проекции функции $R(x, y, t)$ на моменты времени $t_1 = 30,963$ и $t_2 = 37,333$. Будем называть такой аттрактор решением типа II. Важно подчеркнуть, что решения типа I и типа II качественно отличаются друг от друга. Переход между ними внешне похож на бифуркацию удвоения периода: при малом изменении параметра c_2 период решения увеличился примерно в два раза, функция $\rho_{00}(t)$ близка к $\rho_{00}(t + T/2)$ (см. рис. 10.11, а, б). Однако $\rho_{01}(t)$ и $\rho_{10}(t)$ ведут себя иначе: часть периода функция $\rho_{10}(t)$ на рис. 10.11 (решение типа II) повторяет ход $\rho_{10}(t)$ на рис. 10.10, оставшуюся часть — ход функции $\rho_{01}(t)$. При приближении к точке перехода период циклов резко возрастает.

В упрощенной системе с $N = 2$ такие переходы не наблюдались. Однако причину их появления можно пояснить, исходя из представлений о конечномерной модели.

Пусть при некотором значении параметра c_2 у системы с достаточно большим числом N есть две устойчивые особые точки, расположенные симметрично относительно плоскости $\rho_{mn} = \rho_{nm}$, но не лежащие на ней. При уменьшении c_2 происходит бифуркация Хопфа, появляются два предельных цикла, переходящие друг в друга при отражении относительно той же плоскости. По мере уменьшения c_2 амплитуда колебаний будет возрастать и циклы с разных сторон будут приближаться к плоскости симметрии. В силу единственности решений они могут коснуться друг друга, а значит, и плоскости $\rho_{mn} = \rho_{nm}$, только в особой точке. Период каждого из циклов при приближении к этому значению параметра $c_2 = c_2^*$ должен неограниченно расти. После перехода ($c_2 < c_2^*$) циклы качественно перестраиваются. Если раньше, находясь на предельном цик-

ле, точка вращалась вокруг одного состояния равновесия, то теперь она бывает поочередно в окрестности каждого из них.

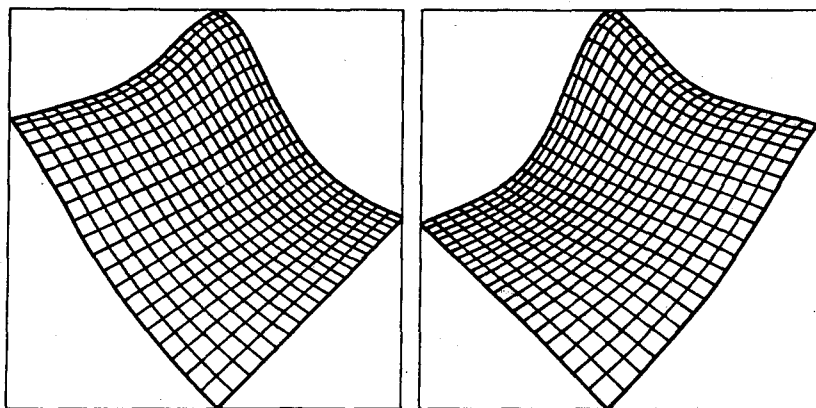


Рис. 10.12

Обратим внимание на то, что при $c_2 = c_2^*$ в конечномерной системе возникает гомоклиническая траектория, а сама система обладает специальной симметрией (если $\{\rho_{mn}(t), \theta_{mn}(t)\}$ – решение, то и $\{\rho_{nm}(t), \theta_{nm}(t)\}$ будет решением, т. е. индексы m и n можно поменять местами). Это позволяет предположить, что здесь могут быть эффективно использованы методы, развитые при анализе системы Лоренца [373].

Напомним, что наряду с решением, показанным на рис. 10.11, существует симметричное ему решение $\tilde{W}(x, y, t) = W(y, x, t)$. Поэтому усложнение решений задачи (10.2) может и дальше идти по тому же пути, существенно связанному с симметрией.

Такой механизм, иногда называемый «аномальными бифуркациями удвоения», является достаточно общим и характерен для многих систем с симметрией [312].

Совершенно другая картина наблюдается при $c_1 = 3$. Это связано с тем, что бифуркацию Хопфа в этом случае претерпевает симметричное автомодельное решение, как это было и в упрощенной системе с $N = 2$. На рис.10.13 и 10.14 показана

но несимметричное решение с периодической функцией R , которое нельзя отнести ни к типу I, ни к типу II.

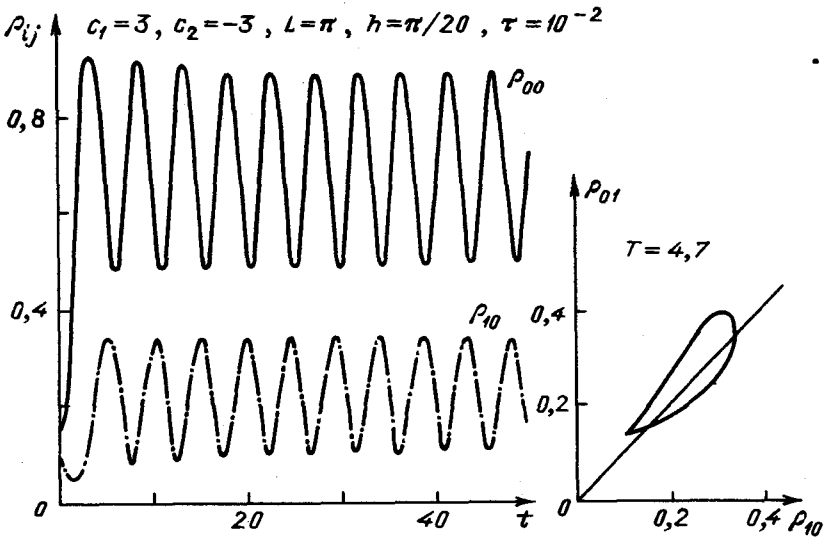


Рис. 10.13. Зависимость $\rho_{ij}(t)$ и проекция на плоскость (ρ_{10}, ρ_{01}) решения, наблюдаемого при $c_1 = 3$, $c_2 = -3$, $l = \pi$, ($h = \pi/20$, $\tau = 10^{-2}$)

То обстоятельство, что асимптотику двумерной задачи (10.2) могут определять аналоги предельных циклов, является очень важным. В самом деле, широко распространено представление о том, что основными формами упорядоченности в активных нелинейных средах являются ведущие центры и спиральные волны. В задаче (10.2) они являются частным случаем двумерного автомодельного решения, в котором еще раз разделились переменные. И действительно, в определенном диапазоне параметров именно автомодельные решения определяют асимптотику процесса. Однако в большой области значений c_1 , c_2 и l они неустойчивы, здесь возникает более сложная упорядоченность. Ее описывают решения с периодически меняющимися функциями R и a . Естественно ожидать, что такие решения будут наблюдаться во многих открытых диссипативных системах вблизи точки бифуркации.

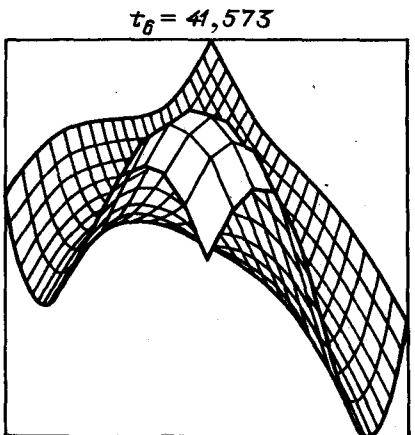
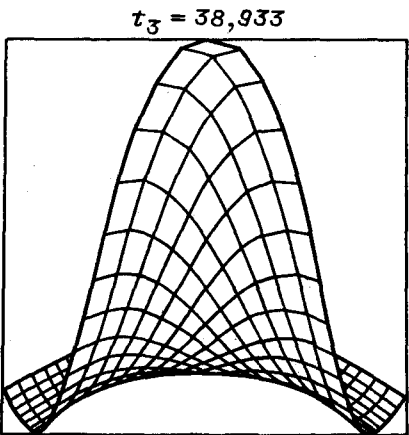
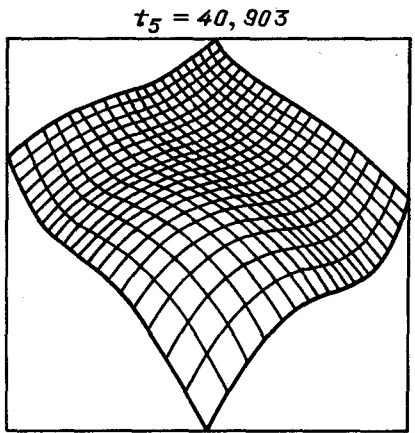
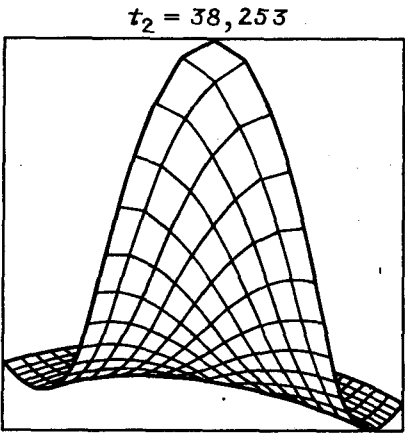
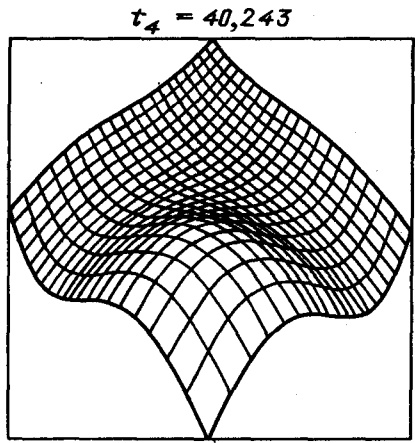
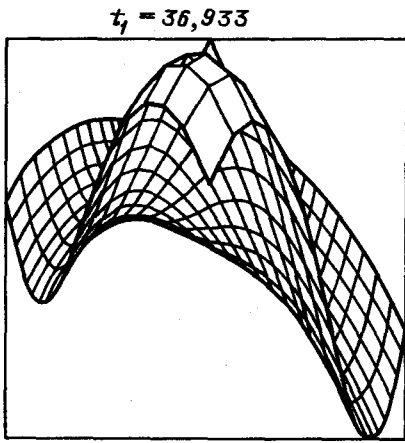


Рис. 10.14. Изменение функции $R(x,y,t)$ в решении, представленном на рис. 10.13

При дальнейшем уменьшении параметра c_2 решения одномерной и двумерной задач становятся непериодическими. В одномерном случае как на линии $c_1 = 1.5$, так и на линии $c_1 = 3$ усложнение было связано с последовательностью бифуркаций удвоения периода. В двумерной задаче также наблюдаются решения, в которых за время расчетов не удается обнаружить никакой упорядоченности. Примеры таких решений обсуждаются в работах [19, 20]. Однако диффузионный хаос в двумерных системах, сценарии его возникновения требуют дальнейшего исследования.

§ 10.4. Спиральные волны в системах реакция – диффузия

Выше мы рассматривали простейшие типы упорядоченности в окрестности точки бифуркации, которые описывались двумерным аналогом уравнения Курамото – Цузуки в небольших областях. Однако представляет интерес и другой предельный случай – задача в неограниченной области.

Для этой задачи с помощью численных и асимптотических методов были исследованы спиральные волны. Существенные результаты, касающиеся спиральных волн в системах реакция–диффузия с автоколебательной кинетикой, были получены во многих работах, но мы обратим внимание только на типичную постановку задачи и на некоторые свойства решений, в основном следуя работам [285, 290, 307, 308, 313].

I. Начнем с простейшего случая $c_1 = 0$. Перейдем в уравнении (10.6) к полярным координатам $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\rho_t = \rho_{rr} + \frac{1}{r} \rho_r + \frac{1}{r^2} \rho_{\theta\theta} + \rho(1 - \rho^2 - \varphi_r^2 - \frac{1}{r^2} \varphi_\theta^2),$$

$$\rho \varphi_t = \rho \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \rho \varphi_r + \frac{1}{r^2} \rho \varphi_{\theta\theta} + 2\rho_r \varphi_r - c_2 \rho^3 + \frac{2}{r^2} \rho_\theta \varphi_\theta.$$
(10.33)

Будем искать решения в виде

$$W = \rho e^{i\varphi}, \quad \rho = \rho(r), \quad \varphi = -c_2(1 - k^2)t + m\theta + S(r), \quad (10.34)$$

где k – действительная постоянная, m – целое положительное число.

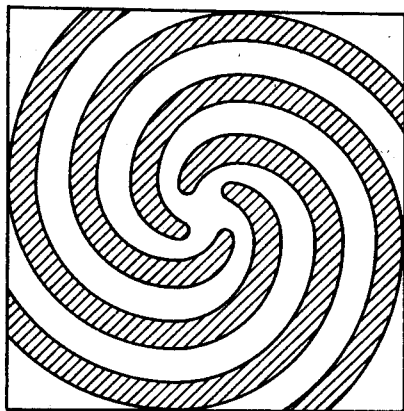


Рис. 10.15. Пример многовитковой спиральной волны [290]

Решения с $m = 1$ соответствуют одновитковым спиральным волнам (рис.3.9), с $m > 1$ – многовитковым. Типичный вид многовитковой спиральной волны показан на рис. 10.15 (здесь $m = 2$, что соответствует двухвитковой спирали).

Подставляя формулу (10.34) в уравнение (10.33), получим

$$\begin{aligned} \rho_{rr} + \frac{1}{r} \rho_r + \rho \left(1 - \frac{m^2}{r^2} - S_r^2 - \rho^2 \right) &= 0, \\ S_{rr} + \frac{1}{r} S_r + 2 \frac{\rho_r}{\rho} S_r &= -c_2(1 - k^2 - \rho^2). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Это уравнение второго порядка для функции ρ и первого для S_r . Будем требовать, чтобы решение было конечно при $r = 0$ и ограничено при $r \rightarrow +\infty$. Рассматривая наибольшие по величине члены при $r \rightarrow 0$ и при $r \rightarrow \infty$, можно убедиться, что это требование приводит к следующим граничным условиям:

$$\rho(r) \sim \alpha r^m \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad S_r(0) = 0, \quad (10.36)$$

$$\rho(r), \quad S_r(r) \quad \text{ограничены при } r \rightarrow +\infty, \quad (10.37)$$

α здесь произвольная постоянная. Таким образом, для данного значения c_2 построение m -витковой спиральной волны сводится к выбору постоянных $\alpha(c_2)$, $k(c_2)$, при которых решения (10.35) будут удовлетворять краевым условиям (10.36), (10.37).

В силу симметрии задачи без ограничения общности можно считать, что

$$c_2 \leq 0, \quad k \geq 0. \quad (10.38)$$

Чтобы представить типичные решения задачи (10.35)–(10.37) и их зависимость от параметров, удобно рассматривать плоский аналог этой задачи [290, 309]. Ее решения имеют вид

$$\rho = \rho(x), \quad \varphi = -c_2(1 - k^2)t + S(x), \quad (10.39)$$

где k – постоянная. Подставляя формулу (10.39) в уравнение (10.6), получим

$$\rho_{xx} + \rho(1 - \rho^2 - S_x^2) = 0, \quad (10.40)$$

$$S_{xx} + 2 \frac{\rho_x}{\rho} S_x = -c_2(1 - k^2 - \rho^2).$$

Аналогом краевых условий (10.36), (10.37) будут условия

$$\rho(x) \sim \alpha x \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad S_x(0) = 0, \quad (10.41)$$

$$\rho(x), \quad S_x(x) \quad \text{ограничены при } x \rightarrow \pm \infty.$$

Задача (10.40), (10.41) имеет аналитическое решение

$$\begin{aligned} \rho(x) &= (1 - k^2)^{1/2} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ S_x(x) &= k \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (10.42)$$

где $k(-c_2)$ определяется соотношением

$$-c_2 = \frac{3k}{\sqrt{2(1-k^2)}}. \quad (10.43)$$

Зависимость $k(-c_2)$ показана на рис. 10.16. Зависимости такого типа являются очень важными в теории спиральных волн. Они показывают, как зависит скорость бегущей волны от частоты, с которой происходят колебания в сосредоточенной системе. Кривая на рис. 10.16 и формулы (10.42), (10.43) показывают, что наибольшую скорость и амплитуду волна будет иметь при уменьшении $|c_2|$. Напротив, при $|c_2| \rightarrow \infty$ скорость волны и ее амплитуда будут стремиться к нулю.

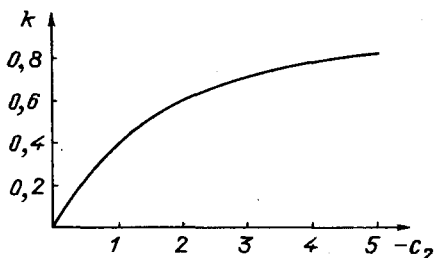


Рис. 10.16

2. Вернемся к задаче (10.35)–(10.37) и еще более упростим ситуацию, положив $c_2 = 0$. Из второго уравнения (10.35) следует, что $S_r = 0$, а функция $\rho(r)$ определяется соотношениями

$$\rho_{rr} + \frac{1}{r} \rho_r + \rho \left(1 - \frac{m^2}{r^2} - \rho^2\right) = 0, \quad (10.44)$$

$$\rho(r) \sim \alpha r^m \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Было показано [285], что эта задача имеет некоторое критическое значение $\alpha = \alpha_m^c$ такое, что

1) при $0 < \alpha < \alpha_m^c$ решения задачи (10.44) $\rho(r, \alpha)$ осциллируют по r ;

2) при $\alpha = \alpha_m^c$ решение монотонно и $\rho(r, \alpha_m^c) \rightarrow \text{const}$ при $r \rightarrow +\infty$;

3) при $\alpha > \alpha_m^c$ $\rho(r, \alpha) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow +\infty$.

Решения первого типа неустойчивы. В этом можно убедиться, если рассматривать нелинейное параболическое уравнение для функции $R(t, r), \varphi = m\theta + \text{const}$, $R(0, r) = \rho(r, \alpha)$

$$R_t = R_{rr} + \frac{1}{r} R_r + R \left(1 - \frac{m^2}{r^2} - R^2 \right). \quad (10.45)$$

Можно показать [285], что, так же как в уравнении (2.1) с источниками, явно не зависящими от пространственной координаты, стационарные решения $\rho(r, \alpha)$, осциллирующие по r , неустойчивы. Напротив, монотонные стационарные решения уравнения (10.44) устойчивы. Отсюда следует, что они могут быть устойчивы и в исходном уравнении (10.40). Поэтому далее мы уделим основное внимание спиральным волнам, у которых функция $\rho(r)$ монотонно возрастает с ростом r .

В работе П. Хагана [290] были численно построены решения, описывающие m -витковые спиральные волны при $c_2 = 0$:

$$\rho(r; \alpha_m^c) = P_m(r), \quad S_r(r) \equiv 0.$$

Вид нескольких таких решений показан на рис. 10.17. Амплитуда решений уменьшается с ростом m .

3. Решения $P_m(r)$, определяющие спиральные волны при $c_2 = 0$, оказываются очень полезными. С их помощью удастся получить асимптотические выражения для решений при малых значениях $|c_2|$.

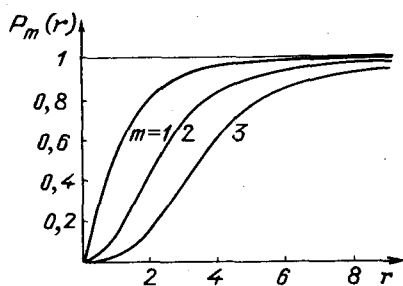


Рис. 10.17

При таком подходе решения ищутся в виде

$$\begin{aligned} \rho(r) &\sim \rho^0(r) + c_2^2 \rho^{(1)}(r) + c_2^4 \rho^{(2)}(r) + \dots, \\ S_r(r) &\sim -c_2 v^0(r) - c_2^3 v^{(1)}(r) + \dots \end{aligned} \quad (10.46)$$

В качестве первого приближения для $\rho(r)$ возьмем $\rho(r) = P_m(r) + \dots$, тогда

$$v^0(r) = \frac{1}{r P_m^2(r)} \int_0^r s P_m^2(s) [1 - P_m^2(s)] ds. \quad (10.47)$$

Эти выражения в свою очередь могут быть использованы для построения асимптотик в различных областях изменения r . Например, при $r \gg 1$

$$\begin{aligned} \rho(r) &\sim 1 - \frac{m^2}{2r^2} + \dots, \\ S_r(r) &\sim -c_2 m^2 \frac{\log r + C_m}{r} + \dots \end{aligned} \quad (10.48)$$

где величины C_m могут быть найдены с помощью численных методов.

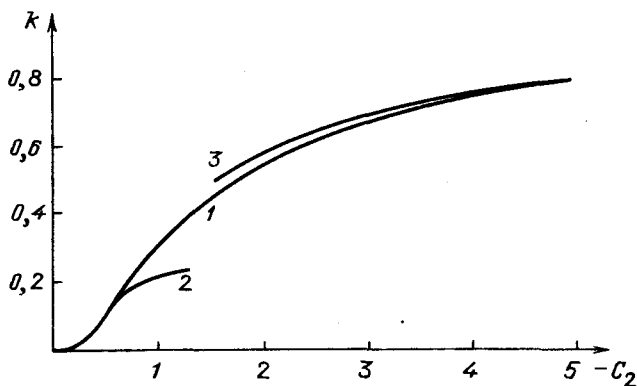


Рис. 10.18. Кривая 1 соответствует зависимости, полученной численно; кривые 2 и 3 — зависимостям, полученным с помощью асимптотических методов

Рассматривая асимптотические выражения для $\rho(r)$ и $S_r(r)$ при малых, больших и промежуточных значениях r , а затем «сшивая» эти асимптотики, можно получить приближен-

ное выражение, определяющее зависимость скорости вращения спиральной волны от параметра c_2 [290]:

$$k = -\frac{2}{c_2} \exp \left\{ \frac{\pi}{2mc_2} - \gamma + C_m \right\}, \quad (10.49)$$

где γ — постоянная Эйлера ($\gamma = 0,5772\dots$).

Соответствие между зависимостью (10.49) и функцией $k(-c_2)$, рассчитанной численно, показывает рис. 10.18. Видно, что при небольших значениях $|c_2|$ они действительно хорошо согласуются.

Асимптотические методы можно применять и в противоположном случае, когда величина $|c_2|$ велика. В этой области параметров естественно рассматривать разложения изучаемых функций по степеням $|c_2|^{-1}$

$$\begin{aligned} \rho(r) &= (1 - k^2)^{1/2} \left[P^0(r) - \frac{1}{c_2} P^{(1)}(r) + \frac{1}{c_2^2} P^{(2)}(r) + \dots \right], \\ S_r(r) &= k \left[V^0(r) - \frac{1}{c_2} V^{(1)}(r) + \frac{1}{c_2^2} V^{(2)}(r) + \dots \right], \\ -\frac{c_2(1-k^2)}{k} &= A^0 - \frac{A^{(1)}}{c_2} + \frac{1}{c_2^2} A^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (10.50)$$

Подстановка этих рядов в формулы (10.35) — (10.37) дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_{rr}^0 + \frac{1}{r} \rho_r^0 + \rho^0 \left(1 - \frac{m^2}{r^2} - V^{0^2} \right) &= 0, \\ V_r^0 + \frac{1}{r} V^0 + 2 \frac{\rho_r^0}{\rho^0} V^0 &= A^0 (1 - \rho^{0^2}), \\ \rho^0(r) \sim \alpha_0 r^m \text{ при } r \rightarrow 0, \quad V^0(0) &= 0, \\ \rho^0(r) \rightarrow 1, \quad V^0(r) \rightarrow 1 \text{ при } r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Нелинейная задача на собственные значения (10.51) может быть решена численно. Роль собственного значения здесь играет величина A^0 . Для одновитковой спиральной волны $m =$

$= 1$, $A^0 = 2,338\dots$, для двухвитковой $m = 2$, $A^0 = 1,355$; Если учесть только первый член в последней из формул (10.50), то окажется, что

$$A^0 = \frac{c_2(k^2-1)}{k}. \quad (10.52)$$

Соответствие между формулой (10.52) и зависимостью $k(-c_2)$, полученной численно, показывает рис. 10.18. Видно, что уже при $|c_2| = 2$ соответствие оказывается достаточно хорошим.

4. Таким образом, для уравнения Курамото – Цузуки в двумерном случае с помощью численных и аналитических методов может быть построен большой класс автомодельных решений, описывающих спиральные волны. Поэтому большое значение приобретает исследование их устойчивости.

Изучение этого вопроса было начато в работе [290]. В частности, было показано, что многовитковые спиральные волны при $0 < -c_2 \ll 1$ неустойчивы, а одновитковая волна при $c_2 = 0$ устойчива. Было высказано предположение, что при $-c_2 \ll 1$ решение с $m = 1$ устойчиво.

При $r \rightarrow \infty$ асимптотику спиральных волн определяют обычные плоские волны

$$\rho(r) \rightarrow (1 - k^2(-c_2))^{1/2}, \quad S_r(r) \rightarrow \pm k(-c_2) \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

Поэтому если плоская волна неустойчива, то неустойчивым будет и все решение. Условие неустойчивости плоской волны будет определяться неравенством

$$k^2 > \frac{1}{3+2c_2^2}.$$

Пользуясь последней формулой и зависимостью $k = k(-c_2)$, показанной на рис. 10.17, можно найти, что этот критерий будет выполнен, если $-c_2 > 1,397$. Аналогичная зависимость для двухвитковой спиральной волны показывает, что она будет неустойчива, когда $-c_2 > 0,925$.

Можно ожидать, что многовитковые спиральные волны неустойчивы и при других значениях параметров. По-видимому, близкие результаты могут быть получены для не-

больших значений c_1 $|c_1| \ll 1$ в области параметров, где устойчиво пространственно однородное решение (10.3) $1 + c_1 c_2 > 0$.

Пример расчета для уравнения (10.2), в котором происходит выход на решение, близкое к одновитковой спиральной волне, приводится в работе [313]. Однако систематические исследования таких решений, анализ некоторых методических вопросов, возникающих в этой связи, расчеты на достаточно подробных сетках пока не проводились.

Рассматривая установившиеся режимы в уравнении Курамото – Сузуки в небольших областях, мы видим, что в определенном диапазоне параметров реализуются двухчастотные и хаотические режимы. Можно ожидать, что такие режимы будут наблюдаться и в больших областях при некоторых значениях c_1 и c_2 . Естественно предположить, что эти решения, так же как и спиральные волны, будут в некоторых случаях иметь особенности фазы (т. е. точки, в которых фаза функции $W = \rho e^{i\varphi}$ не определена). Анализ таких решений представлял бы большой интерес.

Изучение двумерных решений (10.3) позволило сформулировать оригинальную гипотезу, касающуюся возникновения хаотических режимов в двумерных осциллирующих средах [313].

Обратим внимание на рис. 3.8 и 10.15. Они показывают, что вблизи точки особенности фазы ($|W| = 0$) линии уровня функции $W(x, y, t)$ имеют достаточно сложный вид. Пусть в начальных данных задана особенность фазы в точке (x^*, y^*) . Эта точка лежит на пересечении контуров $u(x, y, t) = 0$ и $v(x, y, t) = 0$ (рис. 10.19, а). Естественно ожидать, что в окрестности точки (x^*, y^*) в течение некоторого времени линии уровня будут изгибаться, как если бы формировалась спиральная волна (рис. 10.19, б). (В отдельных расчетах наблюдается именно такая картина [313].)

Пусть спиральная волна при данных c_1 и c_2 неустойчива. В этом случае линии уровня $u(x, y, t) = 0$ и $v(x, y, t) = 0$ будут сложным образом искривляться. Например, так, как

показано на рис. 10.19,в. Это может привести к появлению новых точек с особенностями фазы (на рис. 10.19,в их уже пять).

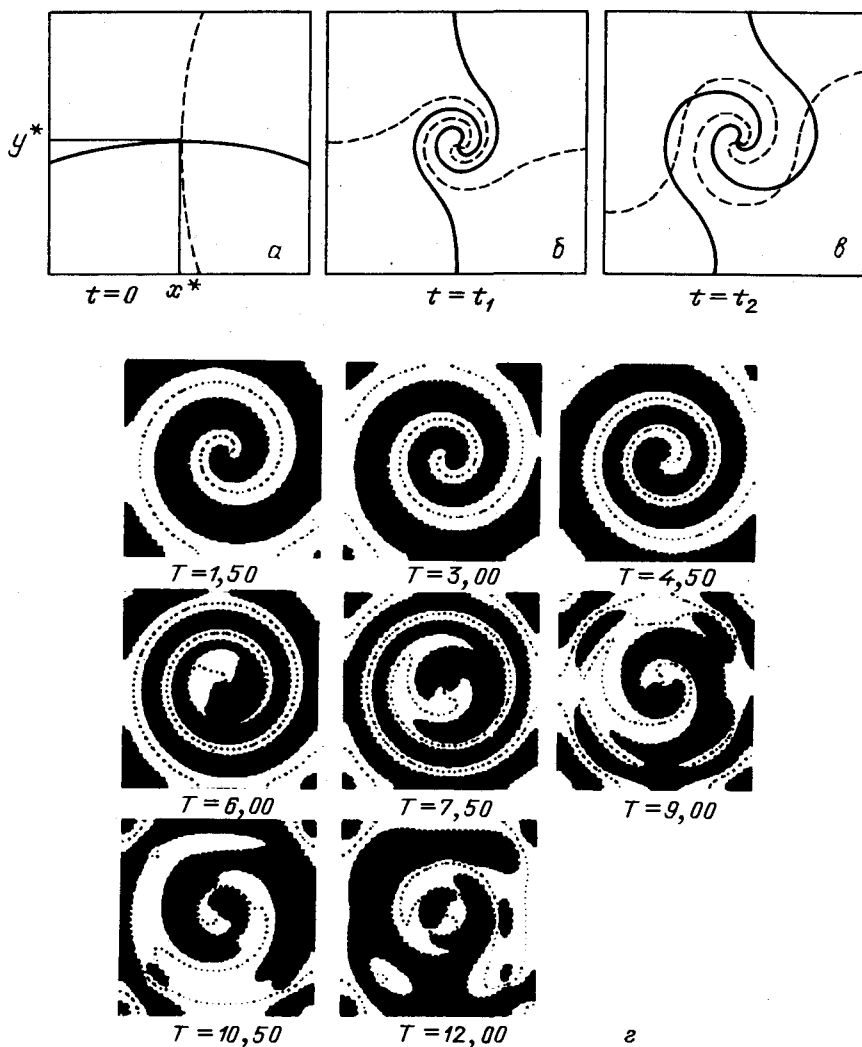


Рис. 10.19, а), б), в) Размножение особенностей фазы. Возможное изменение линий уровня $u = 0$ (сплошная линия) и $v = 0$ (пунктирная линия) на три момента времени; г) пример численного расчета исходной задачи [313]

Такие точки появляются при пересечении контуров и, следовательно, рождаются парами. В окрестности каждой из них контуры опять могут искривляться, у них могут появляться пересечения, где будут возникать особенности фазы и т. д.

«Размножение» особенностей фазы приводит к усложнению решений и, возможно, к появлению хаотических режимов. Близкая картина наблюдается в численном расчете, обсуждаемом в работе [313] (см. рис. 10.19,з). Описанный взгляд на развитие неустойчивостей в двумерных осциллирующих средах привлекает своей наглядностью и ясным геометрическим смыслом. Однако он ставит много вопросов. Неясно, будет ли происходить неограниченный рост числа особенностей фазы в бесконечной области. Каковы будут установившиеся режимы в таких системах? Как характеризовать эти процессы? Точки, где фаза не определена, представляют собой топологические особенности решений нелинейных уравнений в частных производных. Такие особенности до настоящего времени практически не исследовались.

5. Выше мы рассматривали спиральные волны только для уравнения Курамото – Цузуки. Однако спиральные волны характерны и для более широкого класса осциллирующих нелинейных сред.

Самым простым обобщением уравнения (10.2) является класс так называемых λ - ω – систем, в которых нелинейные источники зависят более широким образом от функции $R = |W W^*|^{1/2}$. Уравнения, описывающие их, можно представить в виде

$$R_t = \nabla^2 R - R \nabla \varphi \nabla \varphi + R \lambda(R),$$

$$R \varphi_t = R \nabla^2 \varphi + 2 \nabla R \nabla \varphi - c_2 R \omega(R).$$

При анализе этих уравнений может быть развит тот же подход, который был использован при изучении спиральных волн в уравнении Курамото – Цузуки.

Спиральные волны были обнаружены и в системах, которые описываются уравнением (10.2), куда вместо W входит член, явно зависящий от пространственной координаты [397]:

$$[1 + ic_0 + i\omega_0 \exp(-r^2/r_0^2)] W.$$

Спиральные волны рассматривались также в системах реакция – диффузия [307, 308]. Для них были получены некоторые усредненные уравнения, описывающие амплитуду и фазу волны. Оказалось, что для большого класса нелинейных сред эти уравнения будут одними и теми же. Их анализ показал, что возможны более сложные аналоги спиральных волн, в которых особенности фазы находятся не в центре, а по окружности [307, 308].

§ 10.5. Спиральные волны в некоторых возбудимых средах

Выше мы обсуждали спиральные волны в средах, где в сосредоточенной системе при $t \rightarrow \infty$ происходил выход на предельный цикл. Пользуясь радиотехнической аналогией, можно сказать, что в каждой точке такой среды находится генератор автоколебаний. Однако существует другой важный класс систем, где также обнаружены спиральные волны. Это возбудимые среды. Они устроены таким образом, что если амплитуды воздействия на них превышают некоторое критическое значение, то по среде начинает распространяться импульс возбуждения, а затем система возвращается в исходное состояние. Аналогичные системы широко используют в радиотехнике (это так называемые блокинг-генераторы; их относят к генераторам, работающим в ждущем режиме).

Библиография работ, посвященных спиральным волнам в возбудимых средах, насчитывает сотни названий. На многие важные работы обращается внимание в книгах [97, 103, 390] и обзорах [118, 385]. В течение более чем 40 лет исследований волн в возбудимых средах были построены содержательные модели различных типов, теоретически предсказан и

экспериментально обнаружен целый ряд интересных эффектов. Были получены качественные представления о динамике процессов в таких системах, развиты приближенные методы их анализа, что представляется не менее важным. По-видимому, эти подходы могут быть использованы и для анализа более широкого класса нелинейных сред. Здесь мы обратим внимание на три типа моделей, используемых при изучении волн в возбудимых средах: аксиоматические модели, системы реакция – диффузия, кинематические модели; а также на эффекты нестационарной циркуляции спиральных волн.

1. Анализ процессов в возбудимых средах был начат в 1946 г. в работе Н.Винера и А.Розенблюта [55]. В этой работе рассматривались различные режимы возбуждения ткани сердечной мышцы и нейронных сетей.

Эксперименты показали, что в нормальном состоянии по волокнам сердечной мышцы могут распространяться бегущие импульсы. Возникновение автономных источников волн в сердечной мышце приводит к фибрилляции (режиму несинхронизованной активности мышцы) и различным аритмиям. Такие режимы работы сердца являются патологическими для организма, поэтому большое значение приобретает исследование волн в возбудимых средах и способов воздействия на них. В настоящее время считают, что связь между клетками сердечной мышцы осуществляется ионными токами и с помощью специальных веществ – медиаторов. Близкие механизмы обеспечивают распространение импульсов по нервному волокну. В качестве математической модели этих процессов естественно рассматривать некоторую нелинейную среду.

Н.Винер и А.Розенблют предположили, что каждый из элементов такой среды может находиться в одном из трех состояний: покоя, возбуждения и рефрактерности. Благодаря внешнему воздействию или из-за взаимодействия с ближайшими соседями, элемент, находящийся в состоянии покоя, может перейти в возбужденное состояние, через некоторое время в состояние рефрактерности и, наконец, через определенное время опять в состояние покоя. При этом элемент может быть

переведен в возбужденное состояние только из состояния покоя.

Эти постулаты относительно свойств нелинейной среды позволяют сформулировать так называемые *аксиоматические модели* и предсказать с их помощью много интересных явлений.

В простейшем варианте среда представляется как набор одинаковых дискретных элементов, которые через определенные дискретные промежутки времени могут переходить из одного состояния в другое. Приведем пример такой аксиоматической модели, предложенной в работе [100] и обобщающей модель Винера – Розенблюта.

Рассмотрим элементы, связанные в двумерную решетку. Пространственное расположение элемента будем характеризовать двумя целочисленными индексами i и j , его состояние – двумя функциями ϕ_{ij}^n, u_{ij}^n . Индекс n здесь указывает дискретный момент времени. Переходы между элементами осуществляются по следующим правилам:

$$\phi_{ij}^{n+1} = \begin{cases} \phi_{ij}^n + 1, & \text{если } 0 < \phi_{ij}^n < T, \\ 0, & \text{если } \phi_{ij}^n = T, \\ 0, & \text{если } \phi_{ij}^n = 0 \text{ и } u_{ij}^{n+1} < h, \\ 1, & \text{если } \phi_{ij}^n = 0 \text{ и } u_{ij}^{n+1} \geq h, \end{cases} \quad (10.53)$$

$$u_{ij}^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \phi_{ij}^n \neq 0, \\ \gamma u_{ij}^n + \sum_{k,l} C(k,l) I_{i+k,j+l}^n, & \text{если } \phi_{ij}^n = 0, \end{cases}$$

где

$$I_{ij}^n = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \phi_{ij}^n \leq \tau_e, \\ 0, & \text{если } \tau_e < \phi_{ij}^n \leq T \text{ или } \phi_{ij}^n = 0. \end{cases}$$

Состояние «покоя» элемента соответствует значению фазы $\phi_{ij}^n = 0$. При $0 < \phi_{ij}^n \leq \tau_e$ элемент находится в состоянии

«возбуждения», при $\tau_e < \phi_{ij}^n \leq T$ — в состоянии «рефрактерности». Величина I_{ij}^n отлична от нуля только если элемент с индексом i и j в момент n находится в возбужденном состоянии. Переход от состояния покоя к возбужденному состоянию осуществляется, когда величина u_{ij}^{n+1} сравняется с определенным пороговым значением h или превысит его.

Величину u_{ij}^{n+1} можно условно назвать «концентрацией активатора» в узле в момент $n+1$. На каждом такте по времени концентрация активатора убывает с характерным временем полураспада $(1-\gamma)^{-1}$. Кроме того, активатор может поступать из соседних узлов, находящихся в возбужденном состоянии. Коэффициенты $C(k,l)$ быстро спадают с увеличением расстояния до узла. Чтобы учесть вклад только от ближайших соседей, можно положить

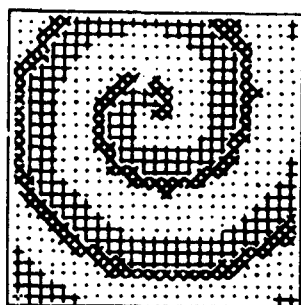
$$C(k,l) = \begin{cases} 1, & \text{если } |k| \leq 1, \quad |l| \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10.54)$$

Модель (10.53), (10.54) переходит в модель Винера — Розенблюта, если считать, что $h = 1$, $\gamma = 1$. В этом случае возбужденный элемент на следующем шаге по времени возбуждает все соседние элементы, которые находились в состоянии покоя. Когда $h > 1$, $0 < \gamma \leq 1$, переход происходит не сразу, а только когда концентрация активатора превысит пороговое значение. А это зависит от числа узлов, находящихся в состоянии возбуждения. Пользуясь моделью Винера — Розенблюта, можно убедиться, что по такой среде может распространяться с постоянной скоростью волна переключения из состояния покоя в возбужденное состояние. Такие волны могут циркулировать вокруг отверстия, с чем авторы работы [55] и связывали причину аритмий. Однако впоследствии было показано, что спиральные волны могут циркулировать и в отсутствие отверстия или других неоднородностей [103, 118, 385].

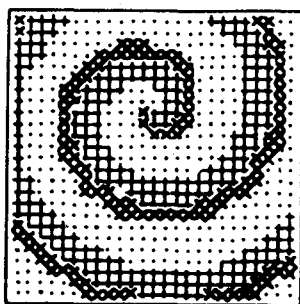
Спиральная волна в однородной среде, которая описывается моделью Винера — Розенблюта, будет циркулировать с

периодом $\bar{\tau}_{min}$, равным суммарной длительности возбужденного и рефрактерного состояний [55].

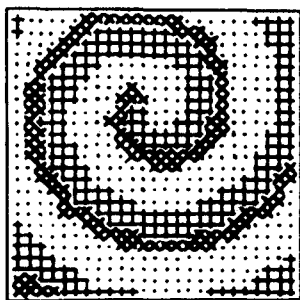
Спиральные волны были найдены в двумерных химических системах, в которых идут колебательные химические реакции и, в частности, реакция Белоусова – Жаботинского [85]. Они были экспериментально обнаружены в ткани сердечной мышцы и в коре головного мозга (волна депрессии) [119, 276]. Во всех этих случаях период вращения оказался гораздо больше, чем минимальный период следования волн возбуждения $\bar{\tau}_{min}$.



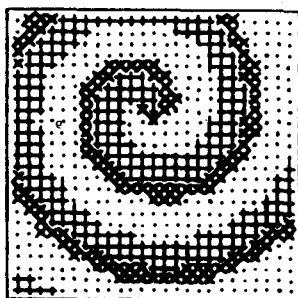
$n = 150$



$n = 160$



$n = 170$



$n = 180$

Рис. 10.20. Спиральная волна в возбудимой среде, моделируемая с помощью клеточного автомата [100]

Основная причина – зависимость скорости распространения волны в двумерной среде от кривизны ее фронта. Эта зависимость обусловлена тем, что в случае выпуклого вперед фронта диффузионный поток активатора из возбужденной зоны рассеивается по большей области перед фронтом. Модель

(10.53) – (10.54) передает зависимость и позволяет получать результаты, согласующиеся как с данными эксперимента, так и с поведением спиральных волн в непрерывных средах, которые моделируются с помощью дифференциальных уравнений.

Пример спиральной волны в дискретной нелинейной среде, приведенный в работе [100], показан на рис. 10.20. Время оборота здесь вдвое превышает $\bar{\tau}_{min}$. Видно, что область покоя находится между витками спиральной волны и в ее центре, что согласуется с картиной, наблюдаемой в непрерывных средах.

2. Обратимся к моделям, которые позволяют моделировать возникновение и циркуляцию спиральных волн в непрерывных средах. Рассмотрим вначале уравнения, которые могли бы описать поведение отдельного элемента возбудимой среды (сосредоточенную систему).

Во многих работах в качестве таких уравнений используются следующие:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y), \quad (10.55)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Наличие малого параметра при временной производной приводит к тому, что x оказывается быстрой, а y – медленной переменной, т. е. характерные времена их изменения сильно отличаются. Обычно F и G имеют одинаковые по порядку величин максимумы своих значений в области изменения переменных. При фиксированном значении y $F(x, y)$ представляет собой N -образную кривую. Характерный вид нуль-изоклин системы (т. е. кривых, на которых $F(x, y) = 0$ или $G(x, y) = 0$) представлен на рис. 10.21.

Точка (\bar{x}, \bar{y}) соответствует устойчивому положению равновесия. Если внешнее воздействие превышает пороговое значение, то в системе генерируется импульс возбуждения, типичный вид которого изображен на рис. 10.22. Траектория точки, характеризующей состояние системы на фазовой плоскости (x, y) , в процессе генерации импульса схематично изображена на рис. 10.21. Участки AB и CD соответствуют

переднему и заднему фронтам импульса. Относительно медленное движение по участку BC соответствует фазе возбуждения, а возврат в исходное состояние описывается участком DA .

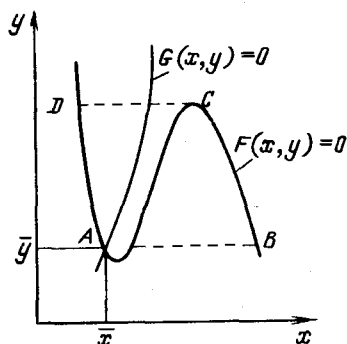


Рис. 10.21

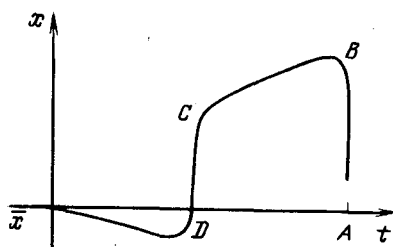


Рис. 10.22

Возбудимые среды часто моделируют с помощью систем реакция – диффузия. Уравнения, которые их описывают, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= D_1 \Delta X + F(X, Y), \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= D_2 \Delta Y + G(X, Y) \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (10.56)$$

где

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \varepsilon, & G(X, Y) \geq 0, \\ k_\varepsilon \varepsilon, & G(X, Y) < 0. \end{cases}$$

При моделировании ряда химических реакций и при анализе миокардиальной ткани диффузией второй компоненты $D_2 \Delta Y$ обычно пренебрегают.

Параметр k_g дает возможность менять в широких пределах скорость восстановления возбудимых свойств среды после выхода из состояния возбуждения (ускорять движение по участку AD , см. рис. 10.21), не меняя других параметров среды.

При численном моделировании спиральных волн часто пользуются кусочно-линейными аппроксимациями для функций F и G [120]

$$F(X, Y) = f(X) - Y,$$

$$G(X, Y) = k_g X - Y,$$

где

$$f(X) = \begin{cases} -k_1 X, & X < \sigma, \\ k_1 (X - a), & \sigma \leq X \leq 1 - \sigma, \\ k_2 (1 - X), & 1 - a < X. \end{cases} \quad (10.57)$$

Другая аппроксимация используется в модели Ринцеля - Келлера [356]

$$F(X, Y) = f(X) - Y, \quad (10.58)$$

$$G(X, Y) = X,$$

где

$$f(X) = \begin{cases} -X, & X < a, \\ 1 - X, & X \geq a. \end{cases}$$

В ряде работ при моделировании спиральных волн пользуются моделью, предложенной Ресслером для математического описания реакции Белоусова - Жаботинского [357]:

$$\begin{aligned} F(X, Y) &= a + bX + XY/(X + 1) - dX^2, \\ G(X, Y) &= -X - eY. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Многочисленные расчеты показали, что непрерывные модели возбудимых сред могут в широком диапазоне параметров описывать циркуляцию спиральных волн. Использование различных упрощенных моделей и качественных соображений позволило выяснить условия возникновения спиральных волн в непрерывных средах и оценить их параметры [103, 97].

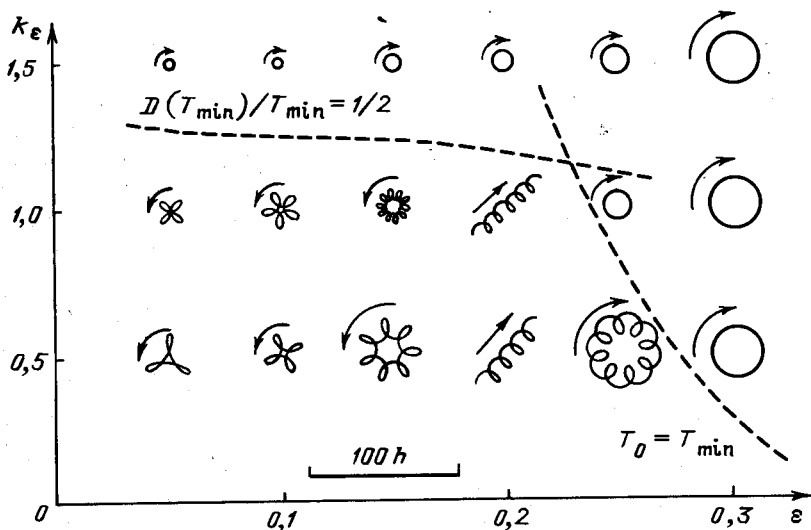


Рис. 10.23. Траектория конца спиральной волны

По аналогии с осциллирующими системами естественно ожидать, что при определенных значениях параметров эти решения становятся неустойчивы, и в системе будут реализовываться более сложные режимы. Вычислительные эксперименты, проводимые в последние годы, позволили обнаружить такие режимы.

Чтобы отличить простейшие режимы от более сложных, удобно следить за траекторией конца спиральной волны. В работах [98, 99, 101] изучалось влияние параметров ε и $k\varepsilon$ на траекторию конца спиральной волны в модели (10.56), (10.58). Полученная картина показана на рис. 10.23.

В случае обычных спиральных волн изучаемая траектория оказывается окружностью. Такие режимы наблюдаются при малой возбудимости среды (величина ϵ достаточно велика, либо мало время рефрактерности, что соответствует большим значениям k_ϵ).

Увеличение возбудимости среды приводит к качественному изменению траектории, при этих значениях параметров она напоминает удлиненную эпициклоиду. Направление обхода эпициклоиды (оно показано стрелкой на рис. 10.23) совпадает с направлением вращения спиральной волны.

Дальнейшее уменьшение параметра ϵ приводит к тому, что траектория превращается в удлиненную циклоиду. Мгновенный центр циркуляции в этом случае смещается вдоль прямой.

При значениях $\epsilon < 0,2$ траектория конца спирали напоминает удлиненную гипоциклоиду. Радиус и число ее лепестков уменьшается с уменьшением ϵ . Направление обхода гипоциклоиды противоположно направлению вращения спиральной волны.

Вычислительный эксперимент показывает, что область, где неустойчива обычная круговая циркуляция спиральных волн, может быть определена из следующих физических соображений [101].

Пусть T_0 — оценка периода циркуляции спиральной волны без учета зависимости скорости распространения спиральных волн от периода их следования, т. е. без учета рефрактерности. Пусть T_{min} — минимальный возможный период следования импульсов в такой среде, а $D(T)$ — длительность импульсов возбуждения, следующих с периодом T . Судя по результатам расчетов, круговая циркуляция спиральных волн неустойчива, если выполнены следующие два условия:

$$T_0 < T_{min} \quad (10.60)$$

$$D(T_{min}) < 0,5 T_{min} \quad (10.61)$$

Первое условие означает, что рефрактерные свойства возбудимой среды существенно влияют на процесс циркуляции. Второе условие связано со структурой области в центре спиральной волны (ядра). Когда длительность импульса возбуждения мала по сравнению с периодом циркуляции, волна неглубоко проникает внутрь ядра, где существует область повышенного значения второй концентрации, т. е. зона пониженной возбудимости. Это стабилизирует круговую циркуляцию. Когда выполняется неравенство (10.61), полоса возбуждения захватывает центр ядра и стабилизирующей области пониженной возбудимости не возникает.

Анализ спиральных волн в непрерывных возбудимых средах требует изучения решений в больших областях, чтобы уменьшить влияние границы на изучаемые процессы. Поэтому расчеты в работе [313] проводились по явной разностной схеме на сетке 100×100 с достаточно крупными шагами по пространству и времени. Было бы полезно провести методические исследования с целью поиска наиболее эффективных численных методов анализа процессов в возбудимых средах. По-видимому, циклоидная циркуляция является аналогом двухчастотных режимов в уравнении Курамото – Сузуки (хотя решений, описывающих двухчастотные режимы, имеющих особенность фазы, в последнем случае найдено не было). Можно ожидать, что по аналогии с осциллирующими системами в некоторой области параметров асимптотику процессов в возбудимых средах будут определять хаотические режимы. Их поиск и изучение в настоящее время требует огромных затрат машинного времени.

Возможно, однако, что применение векторных процессоров и алгоритмов, использующих параллельные вычисления, сделают эту задачу доступной уже в недалеком будущем.

Отметим еще одно интересное направление, связанное с анализом процессов в возбудимых средах, – исследование трехмерных аналогов спиральных волн. Использование топологических представлений и первые численные расчеты показали, что здесь существует ряд важных качественных отличий

от двумерных сред [119, 391]. Развитие этого направления, вероятно, в значительной мере будет определяться возможностями вычислительного эксперимента.

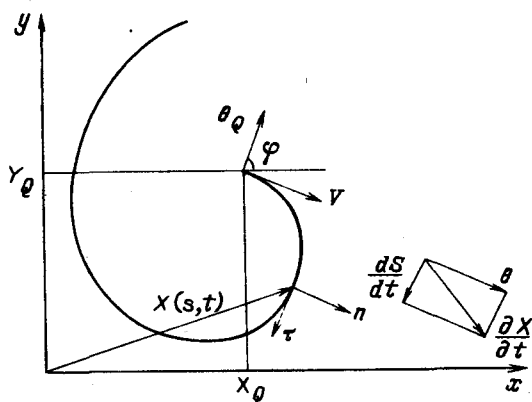


Рис. 10.24

3. При изучении линейных волн, и в частности, распространения света, очень полезным оказывается принцип Гюйгенса. Он позволяет находить положение фронта волны через определенный промежуток времени, если известен фронт волны в начальный момент. Использование этого принципа оказало глубокое влияние на развитие оптики и способствовало созданию ряда математических методов теории волн.

Представляется заманчивым развить подход для исследования спиральных волн в возбудимых средах. Такой подход, получивший название кинематического метода, был предложен и активно используется в настоящее время [99, 101]. Прежде чем приступить к его обсуждению, напомним некоторые элементарные сведения из дифференциальной геометрии [79].

Рассмотрим кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ на евклидовой плоскости $\{x, y\}$ с базисными ортами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 (рис. 10.24)

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_1 + y(t) \mathbf{e}_2. \quad (10.62)$$

Длина кривой определяется интегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b dl, \quad (10.63)$$

где dl – дифференциал длины дуги, $dl = |v|dt$, $\mathbf{v} \equiv \dot{x}\mathbf{e}_1 + \dot{y}\mathbf{e}_2 = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$; \mathbf{v} можно назвать вектором скорости, $\boldsymbol{\omega} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ – ускорением. Во многих случаях удобно считать, что кривая задана с помощью натурального параметра l :

$$x = x(l), \quad y = y(l). \quad (10.64)$$

При таком задании кривой $|v|=1$. Кроме того, вектор \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ортогональны. В самом деле,

$$\frac{d(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{v}\right] + \left[\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] = 2\left[\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] = \frac{d|v|^2}{dt} = 0 \quad (10.65)$$

(круглые скобки в этом выражении обозначают скалярное произведение) $\left[\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] = 0$, а значит, векторы \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ ортогональны.

Будем называть кривизной кривой $\mathbf{r}(t)$ величину вектора ускорения $k = |\boldsymbol{\omega}(l)|$, если l – натуральный параметр

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = k\mathbf{n} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}, \quad (10.66)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dl^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dl^2}\right)^2}} \left[\frac{d^2x}{dl^2} \mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{dl^2} \mathbf{e}_2 \right].$$

Радиусом кривизны R называют число $1/k$. Кривизна прямой равна нулю. Кривизна окружности радиуса R постоянна и равна $1/R$. Можно также убедиться, что

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -k\mathbf{v}. \quad (10.67)$$

В самом деле, \mathbf{n} — единичный вектор, и выписывая соотношения, аналогичные (10.65), можно проверить, что $\left[\mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right] = 0$. Но из соотношений (10.65) и (10.66) следует, что вектор \mathbf{n} ортогонален к \mathbf{v} , и, следовательно

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \alpha \mathbf{v}. \quad (10.68)$$

Поскольку $|\mathbf{v}| = 1$, $|\alpha| = \left| \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right|$. Чтобы определить величину α , воспользуемся соотношением $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0$:

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \mathbf{n} \right] + \left[\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right] = k + \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = k + \alpha,$$

откуда следует, что $\alpha = -k$ и справедливо соотношение (10.67).

Соотношения (10.66) и (10.67) получили название формул Френе [79]. Геометрический смысл этих формул состоит в том, что ортонормированный базис $\{\mathbf{v}, \mathbf{n}\}$, связанный с кривой $x = x(l)$, $y = y(l)$, при переходе из точки l в точку $l + \Delta l$ поворачивается на угол $\Delta\varphi$ и $k(\Delta l) = \Delta\varphi$, или

$$k = \left| \frac{d\varphi}{dl} \right|. \quad (10.69)$$

Рассмотрим теперь, следуя работе [101], приближенные уравнения, описывающие движение фронта волны в возбудимой среде. Длину дуги изучаемой кривой будем отсчитывать от конца спиральной волны (точка Q на рис. 10.24), а ее форму представим в виде натурального уравнения $k = k(l, t)$. Касательный вектор к кривой обозначим через $\boldsymbol{\tau}$, нормальный через \mathbf{n} , а перемещение точек фронта в направлении нормали назовем действительным. Через $\mathbf{X}(l, t)$ обозначим радиус-вектор точки кривой (см. рис. 10.24).

На траектории действительного перемещения

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{n}\theta. \quad (10.70)$$

Рассмотрим полную производную $\frac{dX(l,t)}{dt}$.

$$\frac{dX(l,t)}{dt} = \frac{\partial X(l,t)}{\partial t} + \frac{\partial X(l,t)}{\partial l} \frac{dl}{dt} = \frac{\partial X(l,t)}{\partial t} + \tau \frac{dl}{dt}. \quad (10.71)$$

Подставляя выражение (10.71) в формулу (10.70), получим

$$n\theta = \frac{\partial X(l,t)}{\partial t} + \tau \frac{dl}{dt}. \quad (10.72)$$

После домножения этого уравнения скалярно на единичные векторы \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ получаются два уравнения

$$\left[\frac{\partial X}{\partial t}, \boldsymbol{\tau} \right] + \frac{dl}{dt} = 0, \quad (10.73)$$

$$\left[\frac{\partial X}{\partial t}, \mathbf{n} \right] - \theta = 0. \quad (10.74)$$

Уравнения (10.73), (10.74) показывают, что на траектории действительного перемещения точки фронта ее координата l будет изменяться со скоростью dl/dt . Из-за этого видимое перемещение точки фронта, кроме перемещения по нормали со скоростью θ , будет включать и смещение в направлении касательной со скоростью $v = -\frac{ds}{dt}$. В некотором смысле эти соотношения аналогичны формулам перехода от лагранжевых координат к эйлеровым в газовой динамике.

Чтобы найти соотношение, связывающее форму кривой, задаваемую функцией $k(l,t)$ и скоростью $\theta(l,t)$, будем преобразовывать соотношения (10.73) и (10.74).

Продифференцируем по l уравнение (10.73):

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\partial X}{\partial t}, \boldsymbol{\tau} \right] - \frac{\partial v}{\partial l} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial l}, \boldsymbol{\tau} \right] + \left[\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial l} \right] - \frac{\partial v}{\partial l} = 0.$$

Поскольку $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, то из соотношений, аналогичных (10.65), следует, что $\left[\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl}, \boldsymbol{\tau} \right] = 0$.

Учитывая формулы Френе и формулу (10.74), получим

$$\left[\frac{\partial X}{\partial t}, k\mathbf{n} \right] - \frac{\partial v}{\partial l} = k\theta - \frac{\partial v}{\partial l} = 0. \quad (10.75)$$

Отсюда следует, что

$$v(l, t) = v_0(t) + \int_0^l k\theta \, dl'. \quad (10.76)$$

Это соотношение описывает скорость изменения координаты l фронта, т. е. ее тангенциальную скорость. Изменение может быть вызвано смещением начальной точки отсчета длины дуги со скоростью $v_0(t)$ и изменением длины дуги фронта.

Продифференцируем теперь по l уравнение (10.74):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\partial \chi}{\partial t}, n \right] - \frac{\partial \theta}{\partial l} &= \left[\frac{\partial \tau}{\partial t}, n \right] + \left[\frac{\partial \chi}{\partial t}, \frac{\partial n}{\partial l} \right] - \frac{\partial \theta}{\partial l} = \\ &= \left[\frac{\partial \tau}{\partial t}, n \right] - k \left[\frac{\partial \chi}{\partial t}, \tau \right] - \frac{\partial \theta}{\partial l} = 0. \end{aligned}$$

Используя выражение (10.73), получим соотношение

$$\left[\frac{\partial \tau}{\partial t}, n \right] - kv - \frac{\partial \theta}{\partial l} = 0.$$

Здесь $\left[\frac{\partial \tau}{\partial t}, n \right]$ — угловая скорость поворота касательной

$$\left[\frac{\partial \tau}{\partial t}, n \right] = \omega = \frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

где $\alpha(l, t)$ — угол наклона касательной. Следовательно,

$$\frac{\partial \theta}{\partial l} + kv = \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \quad (10.77)$$

Дифференцируя последнее выражение по l , и учитывая определение кривизны $k = \frac{\partial \alpha}{\partial l}$, получим

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial l^2} + \frac{\partial k}{\partial l} v + k \frac{\partial v}{\partial l} = \frac{\partial k}{\partial t}.$$

Подставив выражения для скорости v (10.76), получим основное уравнение кинематики спиральной волны на плоскости

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial l} \left(v_0(t) + \int_0^l k\theta \, dl' \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial l^2} + k^2 \theta. \quad (10.78)$$

Обсудим теперь дополнительные условия для уравнения (10.78). При исследовании спиральной волны в неограниченной однородной среде естественно требовать, чтобы

$$\lim_{l \rightarrow \infty} k(l, t) = 0. \quad (10.79)$$

Вблизи центральной области линия фронта обрывается в некоторой внутренней точке среды. В этой точке создаются особые, критические условия распространения фронта. Кривизна в ней близка к значению $k_{кр.}$; при $k = k_{кр.}$ точка Q (рис. 10.24) не смещается в тангенциальном направлении. Поэтому естественно считать, что

$$v = \gamma(k_{кр.}^* - k_0), \quad k_0 = k(0), \quad (10.80)$$

где γ — положительная постоянная, зависящая от свойств среды. Чтобы определить ее положение в пространстве, нужно задать закон движения точки Q . Проектируя векторы θ_Q и v на координатные оси x и y (рис. 10.24) и учитывая формулу (10.69) для кривизны, можно показать, что

$$\begin{aligned} \dot{x}_Q &= \theta_Q \cos \varphi + v \sin \varphi, \\ \dot{y}_Q &= \theta_Q \sin \varphi - v \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \partial\theta(0, t)/\partial l + vk. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Для того чтобы воспользоваться соотношениями (10.78)–(10.81), нужно задать функцию $\theta = \theta(k(l, t))$, исходя из свойств среды и особенностей решения. Например, в случае стационарной циркуляции и близких режимов $\theta = \theta(k, T)$, где T — промежуток времени после предыдущего прохождения волны. Если полагать, что рефрактерность среды пренебрежимо мала, то можно представить зависимость $\theta = \theta(k(l, t))$ в виде $\theta = \bar{\theta} + D_1 k$, где $\bar{\theta}$ — постоянная, D_1 — коэффициент диффузии первой компоненты (см. (10.56)). В обоих случаях применение кинематического метода оказывается эффективным [101].

Поскольку кинематический подход опирается на общие геометрические представления и использует простейшие характеристики нелинейной среды, он обладает большой универсальностью. Кроме того, он позволяет моделировать ряд процессов в возбудимых средах с небольшими затратами машинного времени, что при анализе спиральных волн оказывается существенным.

Применение кинематического метода позволило предсказать два интересных эффекта [74]. Пусть параметры среды периодически меняются со временем с частотой ω_1 , близкой к частоте ω , с которой вращается спиральная волна. В этом случае критическая кривизна будет меняться по закону

$$k_{кр.}(t) = \bar{k}_{кр.} + k_1 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad k_1 \ll \bar{k}_{кр.}$$

Оказалось, что в такой среде центр циркуляции будет смещаться по окружности. Это явление получило название *резонанса спиральных волн*.

Если критическая кривизна возбудимой среды меняется вдоль оси x по закону

$$k_{кр.}(x) = \bar{k}_{кр.} + Bx, \quad Bx \ll k_{кр.},$$

то центр циркуляции будет смещаться вдоль оси x . Этот эффект, названный *дрейфом спиральной волны*, был обнаружен не только в вычислительном эксперименте (связанном с решением уравнений вида (10.56)), но и в натурном эксперименте по изучению колебательных химических реакций в нелинейных средах, свойства которых меняются в зависимости от освещенности.

Г Л А В А 11

НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР

При исследовании нелинейных диссипативных процессов большую помощь может оказать построение упрощенных моделей явления, включающих минимально возможное число степеней свободы, и их подробное исследование. Важное место в современных представлениях о процессах в нелинейных системах занимают результаты, полученные при исследовании одномерных и двумерных отображений, систем нескольких дифференциальных уравнений. Они оказались очень полезны при анализе упорядоченности в нелинейных средах.

Встает вопрос, существуют ли сейчас другие простейшие модели, которые могут сыграть важную роль при анализе сложной упорядоченности и хаотических режимов в нелинейных средах. Обратим внимание на некоторые из них.

§ 11.1. Сложные упорядоченные и стохастические режимы в дискретных системах

Дискретные системы широко используются для моделирования процессов в непрерывных средах. При решении уравнения в частных производных часто применяют разностные схемы, в которых производные заменяют конечными разностями (при этом дискретны как временная, так и пространственная координаты). Но могут ли сами дискретные системы описать

такие типы упорядоченности, с которыми мы пока не встречались? Можно ли их непосредственно использовать как модели каких-либо явлений? Для ответа на эти вопросы естественно рассматривать простейший случай, когда дискретны не только пространственная и временная координаты, но и сама функция принимает только дискретные значения. Представление о том, насколько богат и необычен мир таких систем, дает игра «Жизнь», предложенная в 1970 г. математиком из Кембриджского университета Джоном Конвеем [220]. Название связано с тем, что она имитирует рост, распад и различные изменения в популяции живых организмов.

Рассматривается бесконечная плоская решетка квадратных ячеек-клеток. Время в этой игре дискретно ($t = 1, 2, \dots$). Клетка может быть живой или мертвой. Изменение ее состояния в момент $t + 1$ определяется состоянием ее соседей в момент времени t (соседей у каждой клетки восемь, четверо имеют с ней общие ребра, а четверо только вершины). Правила таковы.

Если клетка мертва в момент времени t , она оживает в момент $t + 1$ тогда и только тогда, когда трое из ее восьми соседей были живыми в момент t .

Если клетка жива в момент времени t , она погибает в момент $t + 1$ тогда и только тогда, когда меньше чем две или больше чем три соседние клетки были живы в момент t .

Эти правила очень просты. Имея лист бумаги в клетку, можно проследить эволюцию простейших конфигураций. Компьютер позволяет следить за поведением больших сообществ на больших временах.

Как мы убедимся далее, есть глубокая аналогия между процессами в нелинейных диссипативных средах и этой дискретной системой. Поэтому естественно поставить следующие вопросы. Какие основные типы структур (т. е. конфигураций, определяющих поведение сообществ на больших временах) могут существовать в такой системе? Какие здесь законы организации структур? Могут ли они взаимодействовать и к чему это приводит?

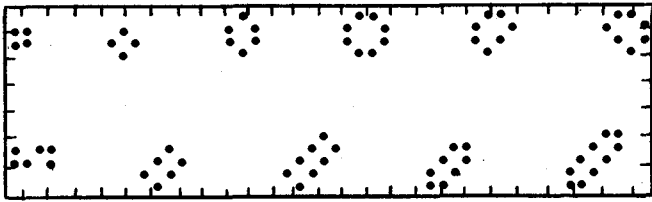


Рис. 11.1. Примеры стационарных структур в игре «Жизнь»

Простейшими являются стационарные, то есть не зависящие от времени, структуры. Их примеры показаны на рис. 11.1 (в центре живой клетки мы ставим кружок. По краям областей нанесены деления с интервалом в две клетки.).

С помощью этих стационарных структур можно получить множество других. В самом деле, если мы имеем такую структуру, то конфигурация, полученная поворотом на 90° , также будет стационарной. Четыре конфигурации справа в нижнем ряду на рисунке показывают, как можно достраивать определенные структуры до любых размеров. Важно подчеркнуть, что эти структуры локализованы. Будучи разделены двумя белыми клетками, они не влияют друг на друга. Можно считать, что стационарные структуры повторяют себя на каждом шаге по времени. Но есть и другие конфигурации, повторяющие себя через N шагов. Для краткости будем называть их N -циклами.

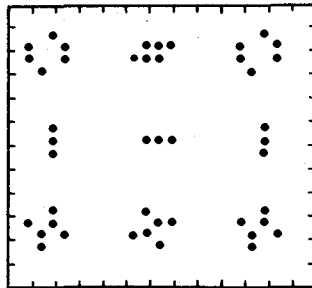


Рис. 11.2. Примеры циклов

Примеры циклов – 2 показаны на рис. 11.2. Поскольку циклы – 2 также локализованы, то все они представлены в

одной области. При эволюции различных сообществ часто встречается цикл - 2, показанный во второй строке и называемый «семафором».

Известно много различных периодических конфигураций [220]. Однако эффективные алгоритмы, позволяющие строить различные конфигурации с данным периодом N , по-видимому, в настоящее время не созданы.

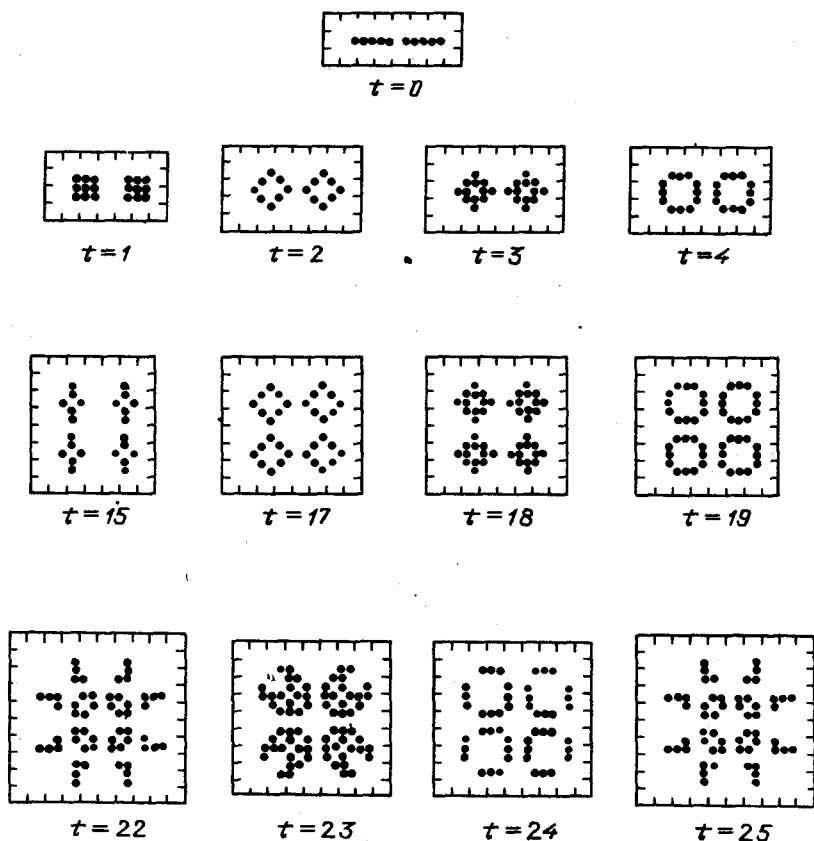


Рис. 11.3. Пример более сложного цикла

В нелинейных диссипативных средах структуры были интересны не только сами по себе. Они определяли поведение системы при $t \rightarrow \infty$ в случае различных начальных данных.

Так ли это в изучаемой дискретной системе? Ответ оказывается положительным.

Система клеток, которую описывает игра «Жизнь», раз-
вивается необратимо.

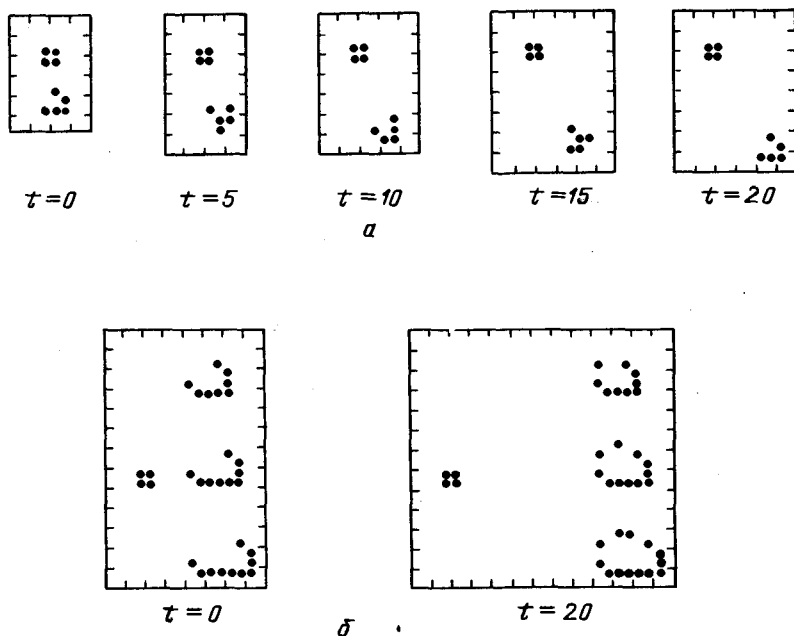


Рис. 11.4. Движущиеся структуры в игре «Жизнь», а) «планер», б) «корабли»

В самом деле, конфигурация в момент t полностью определяет будущее (состояние в моменты $t + 1$, $t + 2$ и т. д.). Но восстановить прошлое системы по ее настоящему не удастся. Картина здесь такая же, как в одномерных отображениях, только прообразов у данной конфигурации может быть бесконечно много. (Воспользуемся свойством локализации и расположим вокруг данной конфигурации множество локализованных одиночных клеток или их пар так, чтобы они не влияли на нее и друг на друга. Понятно, что все они исчезнут на следующем шаге, никоим образом не повлияв на будущее системы.)

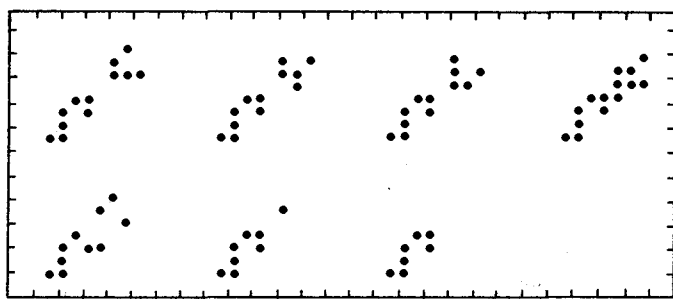
Эволюция взятых наугад начальных данных часто приводит к возникновению простейших локализованных структур и семафоров. Однако возможны и более сложные типы эволюции, например, когда сообщество клеток симметрично «доставляется», и возникают циклы большого периода, имеющие сложную форму (рис. 11.3).

В игре «Жизнь» существуют конфигурации, которые могут передвигаться по плоскости. Одной из них является «планер» (рис. 11.4,а, стационарная структура здесь поставлена в качестве точки отсчета). Через каждые четыре шага он повторяет себя, смещаясь на одну клетку вниз и вправо. (Понятно, что в силу симметрии есть планеры, распространяющиеся вдоль любой диагонали квадрата в обоих направлениях.) На рис. 11.4,а показаны различные «фазы» планера.

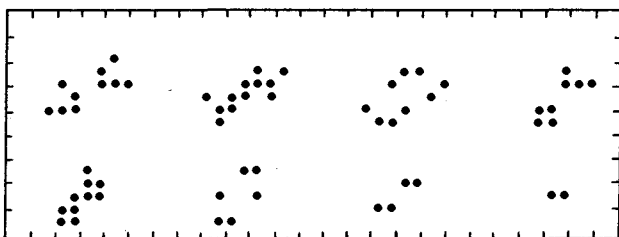
Впрочем, некоторые конфигурации могут передвигаться не вдоль диагоналей, а по прямой. Таковы, например, три «корабля», показанные на рис. 11.4,б. (Обратим внимание на то, что далеко не любая конфигурация такого типа будет «кораблем».) Итак, мы располагаем планерами и различными кораблями. Возникает вопрос, что происходит, когда они сталкиваются между собой или с различными стационарами. Столкновения могут быть очень разнообразны в зависимости от курса планера и его фазы при столкновении.

Столкновение двух планеров или планера со стационаром может приводить к их «аннигиляции» (см. рис. 11.5). В столкновении может родиться целый набор семафоров и стационаров (рис. 11.6). Обратим внимание на две закономерности. Если в конфигурации возникла симметрия (например, относительно вертикальной или горизонтальной оси), то далее в процессе эволюции она сохраняется (см. шаги 7,8,9). Если конфигурация все время локализована в квадрате размером $N \times N$, то она является набором стационаров и циклов, период которых не превышает 2^{N^2} . В самом деле, каждая клетка может находиться в одном из двух состояний, а всего

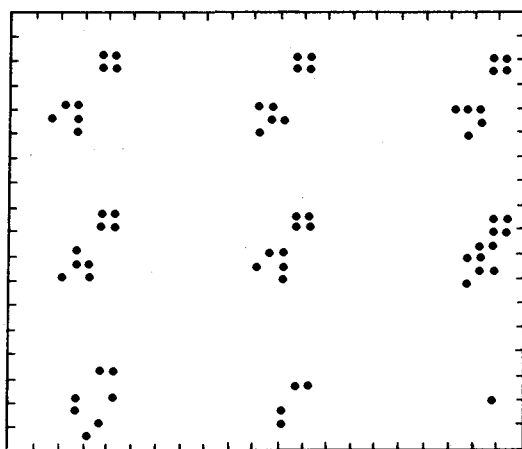
клеток в области N^2 , поэтому при $t > 2^{N^2}$ конфигурации начнут повторяться.



a



б



в

Рис. 11.5. Столкновение «планеров» со стационарными структурами *a*) и *в*) и между собой *б*)

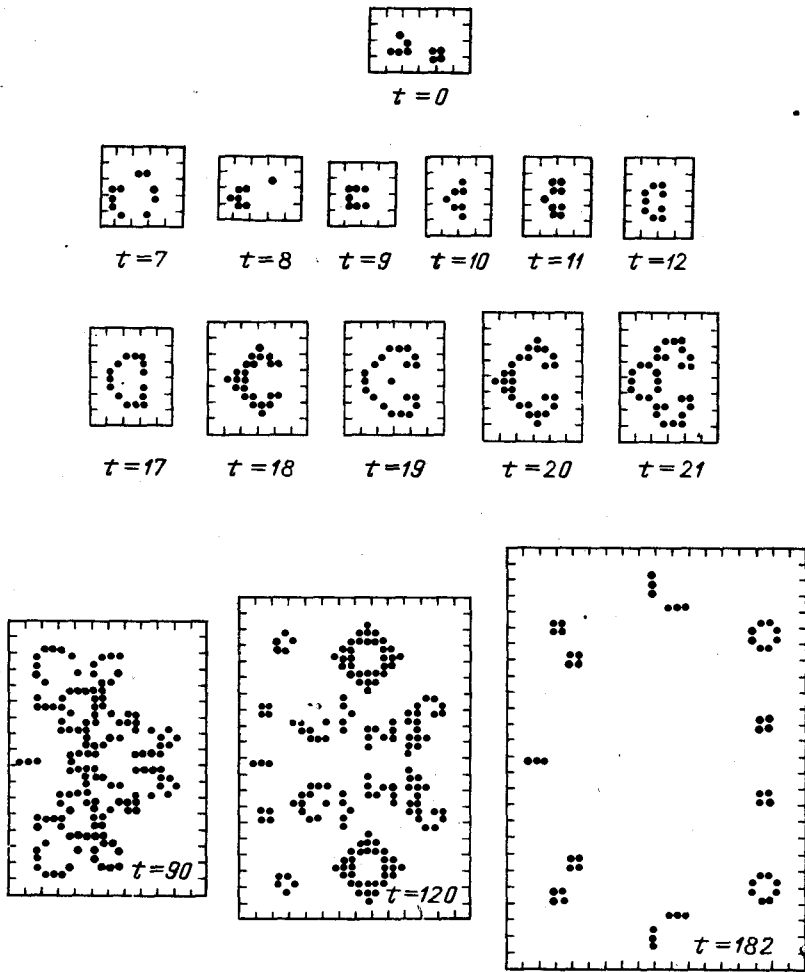


Рис. 11.6. Столкновение «планера» со стационарной конфигурацией

Рассматривая непрерывные среды, мы говорили о резонансном возбуждении — начальных данных, приводящих к более сложной эволюции решений, чем в остальных случаях. В игре «Жизнь» есть аналог такого поведения. Обратим внимание на конфигурацию, показанную на рис. 11.7. Возникающие клетки занимают все большую часть плоскости, рождается несколько планеров (см. шаг 127), причем это сообщество будет разви-

ваться далее (рис. 11.7). Ни одна из других конфигураций, состоящих из пяти клеток, не приводит к такому сложному поведению.

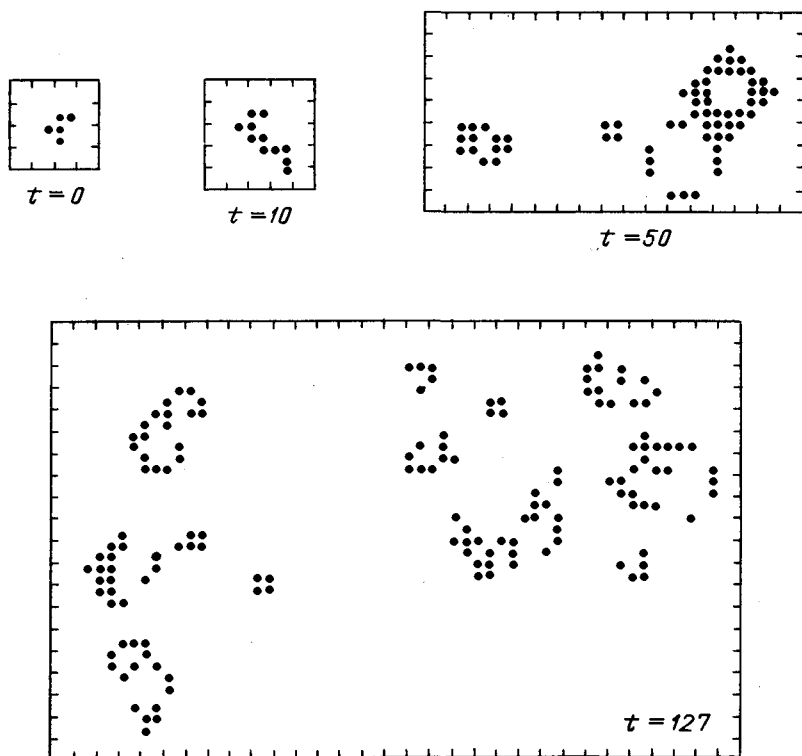


Рис. 11.7. Аналог резонансного возбуждения в игре «Жизнь»

Как правило, эволюция взятых наугад конфигураций приводит к появлению наборов стационаров, семафоров, планеров. При этом общее число клеток при $t \rightarrow \infty$ оказывается ограниченным. Однако при некоторых начальных данных ситуация может качественно меняться. Такое поведение характерно для ряда биологических систем, в частности, эволюционных процессов. Маловероятное событие может качественно изменить поведение системы, привести к появлению новых видов. Именно поэтому «клеточные автоматы» (к этому классу моделей принадлежит игра «Жизнь») находят применение в эколо-

гических моделях, при моделировании морфогенеза, в других биологических задачах [2].

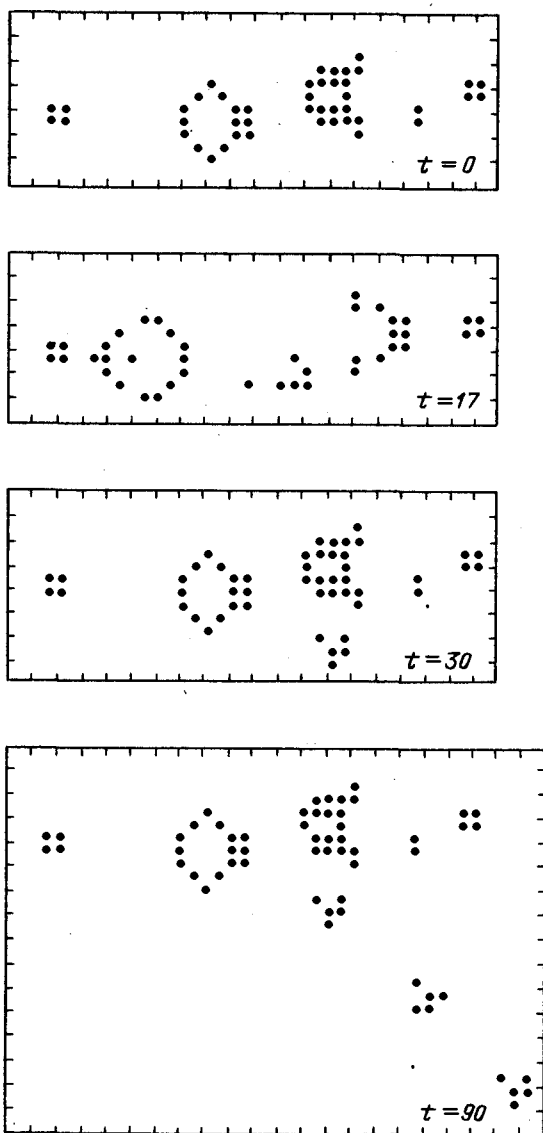


Рис. 11.8. «Планерное ружье»

Чем большую площадь занимает сообщество, тем сложнее оно может себя вести. Поэтому большой интерес вызывают неограниченно растущие в пространстве конфигурации. Одну из них, называемую «катапультай» или «планерным ружьем», предложил в 1970 году Р. Госпер – младший. Видно, что катапульта через каждые 30 шагов повторяет себя и выпускает планер (рис. 11.8). Планерное ружье заполняет пространство потоком планеров. Есть еще более сложные сообщества клеток, которые могут двигаться, оставляя за собой большой набор семафоров и стационаров. Одно из них – «паровоз», показанный на рис. 11.9. Поиск таких конфигураций требует применения специальных алгоритмов [277].

Приведенные примеры показывают, что в обсуждаемой дискретной системе существует большое количество различных типов упорядоченности, которые определяют асимптотическое поведение некоторого множества конфигураций (в этом смысле они оказываются эквивалентны аттракторам динамических систем). Однако можно доказать большее – в игре «Жизнь» существуют сколь угодно сложные типы упорядоченности, эта дискретная система оказывается эквивалентна универсальной вычислительной машине [220].

ЭВМ можно рассматривать как конечный набор простейших логических элементов, осуществляющих операции И, ИЛИ, НЕ, определенным образом соединенных проводами, по которым распространяется набор импульсов, кодирующих последовательность нулей и единиц.

В качестве генератора таких импульсов в игре «Жизнь» выступает планерное ружье. Наличие планера в потоке естественно интерпретировать как единицу, отсутствие как ноль. Столкновение планеров, приводящих к их аннигиляции, позволяет построить элемент НЕ, направив два потока под прямым углом (если планер в определенном месте есть в первом потоке, то после столкновения планер в другом потоке на этом месте исчезнет). Более сложным образом конструируются другие элементы [220].

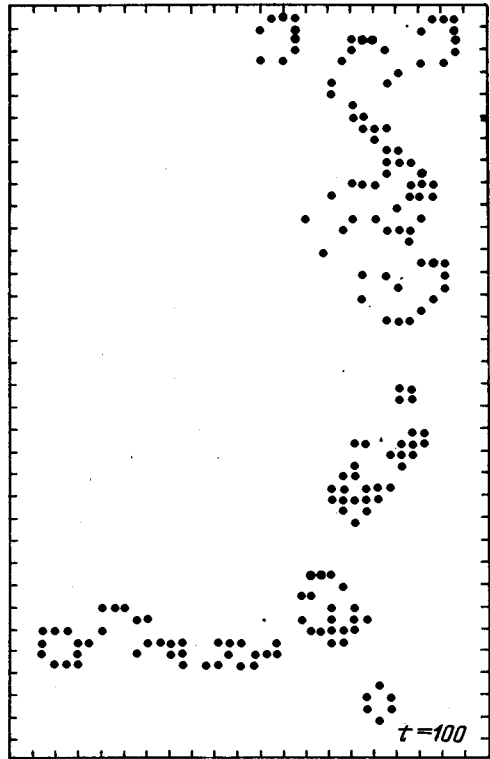
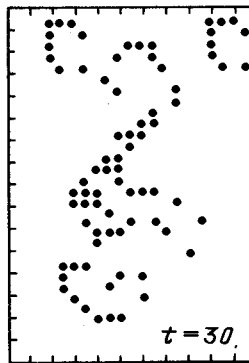
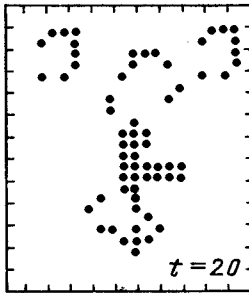
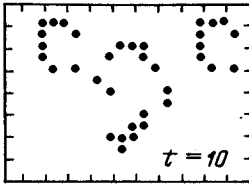
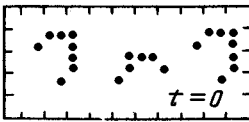


Рис. 11.9. Конфигурация «паровоз»

Эквивалентность игры «Жизнь» универсальной вычислительной машине имеет много интересных следствий. Естественно возникает мысль о сравнении компьютера в этой дискретной системе с существующими вычислительными машинами.

Рассмотренный гипотетический компьютер имеет два важных достоинства — он состоит из простейших одинаковых элементов, и каждый из них связан только с ближайшими соседями. Размеры логических элементов при переходе к каждому следующему поколению ЭВМ уменьшаются. Создавать малые элементы рассмотренного типа, например, на молекулярном уровне, гораздо проще, чем традиционные интегральные схемы. При этом ряд исследований показывает, что молекулы некоторых веществ обладают нужными для построения компьютера свойствами [230].

Здесь возникают два существенных возражения. На молекулярном и тем более на атомном уровне существенны квантовые эффекты. Какие ограничения накладывают они на такие вычислительные системы? Особенно привлекательны системы, для которых характерен минимальный уровень диссипации энергии (или, в идеальном случае, просто бездиссипативные процессы). Напомним, что эволюция конфигураций в игре «Жизнь» необратима. Существуют ли обратимые дискретные системы, обладающие свойствами универсальных вычислительных систем? Исследования, проведенные в последние годы, показали, что оба возражения могут быть сняты. Квантовомеханические системы, обладающие свойством обратимости, в принципе могут быть построены [189].

Игра «Жизнь» и другие системы такого типа, получившие название клеточных автоматов, позволили по-новому взглянуть на многие физические явления. (Клеточный автомат представляет собой набор одинаковых клеток, каждая из которых развивается в соответствии с определенным набором правил.) При описании многих сложных процессов использование дифференциальных уравнений связано с большими трудностями. Таковы, например, некоторые типы турбулентных течений, укладка длинных молекул (в частности, молекул ДНК, при описании которой рассматривается случайное блуждание без самопересечений), процессы самовоспроизведения, роста и развития, характерные для биологических систем.

В 1948г. Джон Нейман высказал предположение, что при моделировании этих явлений наиболее эффективны клеточные автоматы и непосредственная имитация таких процессов с помощью компьютера. Построенная им теория самовоспроизводящихся автоматов показала большие возможности такого подхода [340]. В последние годы этот взгляд получил дальнейшее развитие в работах С.Уолфрэма и других авторов [394, 395]. Они пришли к выводу, что некоторые реальные системы могут быть устроены так же, как игра «Жизнь». В зависимости от начальных данных в них могут реализоваться процессы любой сложности.

Здесь можно воспользоваться понятиями и представлениями теории алгоритмов. Поведение любой системы можно в принципе смоделировать, имитируя шаг за шагом ее эволюцию. Но в большинстве случаев можно найти более простой способ. Например, чтобы умножить число с помощью компьютера на 2^n , нет необходимости 2^n раз складывать его с самим собой, можно просто сдвинуть его представление в памяти ЭВМ на n двоичных разрядов. Системы, для которых такие более простые алгоритмы существуют, называют *вычислительно приводимыми*. Именно это свойство помогает при описании явлений природы выделять небольшой набор параметров порядка или переходить к более простому статистическому описанию.

Гипотеза С.Уолфрэма состоит в том, что многие физические системы и их модели, для которых в настоящее время не известно простого описания, *вычислительно неприводимы* [395]. Единственным способом анализа таких систем является физический или вычислительный эксперимент. В работе [348] было показано, что существует система 10 нелинейных уравнений в частных производных, описывающая некоторую среду, которая эквивалентна игре «Жизнь» или другим автоматам такого типа.

Исследование клеточных автоматов приводит к парадоксальному выводу. В среде из простейших одинаковых элементов может существовать упорядоченность любой сложности. Эволюция некоторых конфигураций может выглядеть как воз-

никновение простейших структур, их взаимодействие, появление в результате этого более сложных структур, их взаимодействие и т. д. Если после какого-то этапа конфигурация оказывается локализованной в ограниченной области, то развитие прекращается, и происходит выход на установившийся режим.

Игра «Жизнь» относится к наиболее сложному классу автоматов. Однако существует и ряд более простых автоматов, у которых клетки, находящиеся в одном из k состояний, расположены вдоль прямой [395]. Правила, определяющие их эволюцию, могут быть записаны в виде

$$a_i^{(t)} = f \left[\sum_{j=-r}^{j=r} \alpha_j a_{i+j}^{(t-1)} \right], \quad (11.1)$$

где $a_i^{(t)}$ — состояние i -й клетки в момент t . Множество возможных правил является очень широким. Однако основные типы автоматов могут быть изучены с помощью более узкого класса так называемых правильных суммирующих автоматов. Автомат называется *правильным*, если

$$f(0) = 0, \quad f(a_{i-r}, \dots, a_{i+r}) = f(a_{i+r}, \dots, a_{i-r}), \quad (11.2)$$

он является *суммирующим*, когда все $\alpha_j = 1$.

По правилу, задающему автомат, можно найти его код по формуле

$$C_f = \sum_{n=0}^{(2r+1)(k-1)} k^n f[n], \quad (11.3)$$

где k — число состояний, в которых может находиться каждая клетка.

При анализе диссипативных динамических систем и асимптотических режимов в нелинейных средах были выделены процессы, развивающиеся в течение конечного времени, периодические и стохастические режимы. Их аналоги существуют и среди автоматов. В работе [395] были выделены четыре типа суммирующих правильных автоматов.

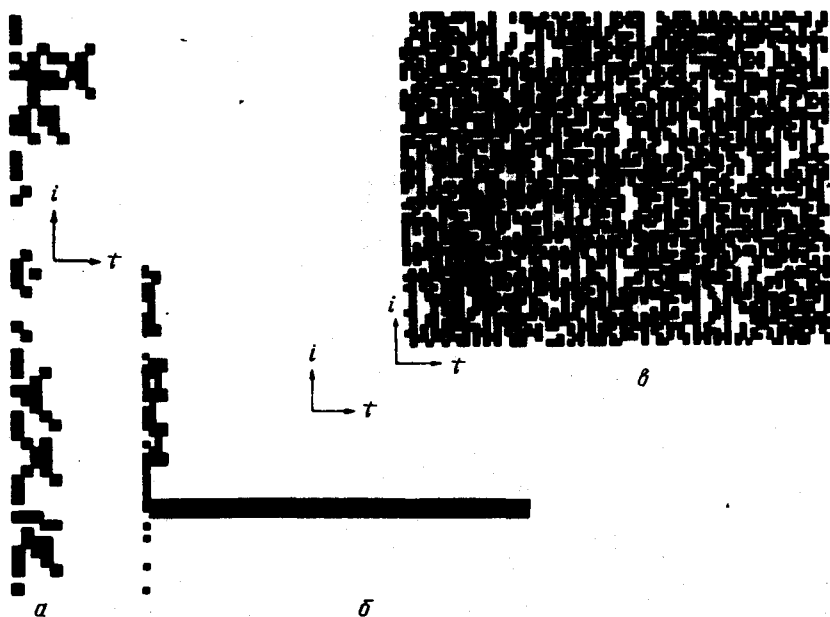


Рис. 11.10. Типичное поведение клеточных автоматов соответственно первого, второго и третьего типов, $r = 2$, $m = 5$, коды (т. е. число C_r):
 а) 36, б) 24, в) 22

1. Независимо от начальных данных за ограниченное количество шагов происходит переход к однородному состоянию (например, как на рис. 11.10, а).

2. Другой класс автоматов приводит к локализованным стационарным конфигурациям или N -циклам. Это аналог особых точек или предельных циклов в динамических системах (рис. 11.10, б).

3. Хаотические начальные конфигурации у автоматов третьего класса приводят к хаотическому временному поведению (рис. 11.10, в).

Если начальные данные локализованы, то обычно эволюция каждой клетки может быть предсказана с помощью достаточно простого алгоритма. Если отложить по одной оси время t , а по другой состояние элементов в момент t , то возника-

ющую картину часто можно рассматривать как фрактальную структуру. Пример такой эволюции показан на рис. 11.11, где также указаны коды соответствующих автоматов.

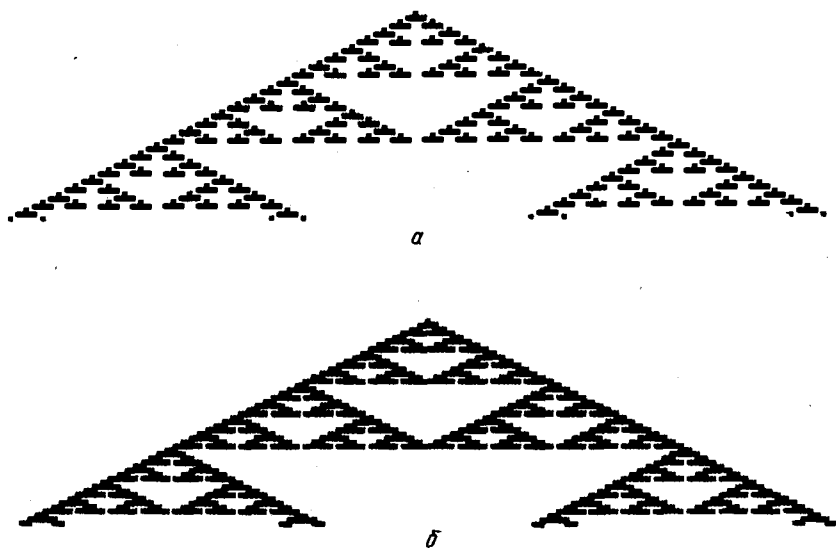


Рис. 11.11. Пример возникновения фрактальной структуры у автоматов третьего типа (коды 16 и 28)

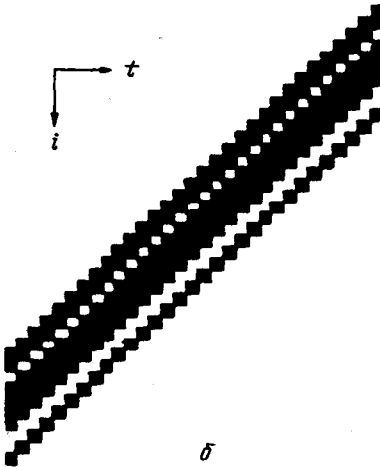
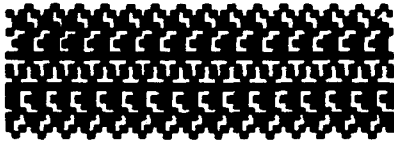
4. Для автоматов четвертого класса (к которым относится и игра «Жизнь») не существует простого алгоритма, позволяющего предсказать эволюцию локализованных начальных конфигураций. Одним из первых признаков автомата такого типа является множество различных типов поведения при различных начальных данных.

Результаты, приведенные в работе [395], показывают, что автоматы четвертого класса встречаются довольно редко. Среди правильных суммирующих автоматов 6% при $k = 2$, $r = 2$; 7% при $k = 3$, $r = 1$. Однако с ростом сложности автоматов (при увеличении k и r) доля таких автоматов растет. Пример такого автомата показан на рис. 11.12.

Так же как при анализе фракталей или странных аттракторов, удобно характеризовать различные автоматы с помощью количественных характеристик. Обсудим некоторые из них,



a



b

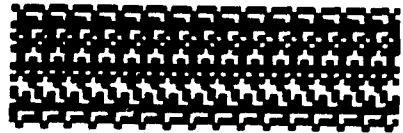


Рис. 11.12. Пример автомата четвертого типа (код 20): *a*) случайные начальные данные; *b*) несколько типов упорядоченности в такой дискретной среде

следуя работе [395]. Рассмотрим последовательность X элементов, полагая, что каждая клетка находится в одном из k состояний, и введем величины

$$s^x(X) = \frac{1}{X} \log_k \left(\sum_{j=1}^k \theta(P_j^{(X)}) \right), \quad (11.4)$$

где $\theta(p) = 1$ для $p > 0$ и $\theta(0) = 0$, $p_i^{(X)}$ — вероятности различных конфигураций из X элементов,

$$s_{\mu}^x(X) = - \frac{1}{X} \sum_{i=1}^k P_i^{(X)} \log_k P_i^{(X)}. \quad (11.5)$$

Будем называть величины $s^{(x)}(X)$ и $s_{\mu}^{(x)}(X)$ *пространственной энтропией множества* и *пространственной энтропией меры*, а пределы

$$d^{(x)} = \lim_{X \rightarrow \infty} s^{(x)}(X) \quad \text{и} \quad d_{\mu}^{(x)} = \lim_{\mu} s_{\mu}^{(x)}(X) \quad (11.6)$$

соответственно *размерностью множества* и *размерностью меры*. Неупорядоченная начальная конфигурация, в которой все возможные множества элементов встречаются с ненулевой вероятностью, дает $d^{(x)} = 1$; для однородной конфигурации $d^{(x)} = 0$.

По аналогии с величинами, характеризующими пространственное поведение конфигураций, можно ввести временные характеристики клеточных автоматов

$$s^{(t)}(T) = \frac{1}{T} \log_k \left(\sum_{j=1}^k \theta(P_j^{(T)}) \right),$$

$$s_{\mu}^{(t)}(T) = - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^k P_i^{(T)} \log_k P_i^{(T)},$$

$$d^{(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} s^{(t)}(T), \quad d_{\mu}^{(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} s_{\mu}^{(t)}(T) \quad (11.7)$$

и пространственно-временные характеристики

$$s^{(t, x)}(T, X) = \frac{1}{T} \log_k \left(\sum_{j=1}^k \theta_j^{XT} (P_j^{(T, X)}) \right),$$

$$s_{\mu}^{(t, x)}(T, X) = - \frac{1}{T} \sum_{j=1}^k P_j^{XT} \log_k P_j^{(T, X)},$$

$$h = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ X \rightarrow \infty \\ T/X \rightarrow \infty}} s^{(t, x)}(T, X), \quad h_{\mu} = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ X \rightarrow \infty \\ T/X \rightarrow \infty}} s_{\mu}^{(t, x)}(T, X). \quad (11.8)$$

В автомате, заданном формулой $a_i^{t+1} = F[a_{i-r}^t, \dots, a_{i+r}^t]$, возбуждение может за время T распространиться на расстояние rT . Однако для многих автоматов на больших временах возбуждения распространяются с меньшей скоростью. Обозначим через $\|F^T\|$ минимальное значение R , для которого состояние клетки i зависит только от значений $i - R, \dots, i + R$. Тогда максимальная скорость распространения возбуждений может быть определена как

$$\lambda_+ = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \|F^T\| / T, \quad (\lambda_+ \leq r). \quad (11.9)$$

Между количественными характеристиками автоматов существует ряд соотношений, обсуждаемых в работе [395].

Значения характеристик (11.4) – (11.9) для больших характерных времен и установившихся режимов оказываются различными для разных классов клеточных автоматов.

Поскольку любые конфигурации в автоматах первого класса стремятся к однородному состоянию, их пространственные и временные размерности стремятся к нулю. Среднее значение скорости распространения возбуждений $\bar{\lambda}$ в автоматах второго класса, так же как временные размерности $\bar{d}_{\mu}^{(t)} = h_{\mu} = 0$, равно нулю на больших временах. Вместе с тем, пространственные размерности в случае нерегулярных начальных данных будут отличны от нуля.

Для автоматов третьего класса средняя скорость пространства возбуждения $\bar{\lambda}$ положительна, и изменение состояния одной клетки с течением времени сказывается на все большем числе соседей. Пространственная и временная энтропия меры $s_{\mu}^{(x)}(X)$ и $s_{\mu}^{(t)}(T)$ также отличны от нуля и на больших временах обычно стремятся к постоянным значениям. Поведение автоматов четвертого класса может быть совершенно различным в случае различных начальных данных. Поэтому количественные характеристики различных конфигураций в таких автоматах могут быть точно такими же, как в любом из первых трех классов.

Поведение клеточных автоматов очень разнообразно, поэтому их теория быстро развивается. Интересен этот класс математических объектов еще и потому, что они представляют собой точно решаемые модели. Их можно изучать, не используя приближенные методы (при исследовании с помощью ЭВМ) и упрощенные модели.

Обратим внимание на два класса физических явлений, при анализе которых используются клеточные автоматы. Экспериментальное исследование реакции Белоусова – Жаботинского показало, что на определенных характерных временах могут возникать несколько типов упорядоченности и хаотические режимы. Их изучение с помощью систем типа реакция – диффузия оказывается достаточно сложным из-за необходимости учитывать большое число компонент, неполноты данных о скоростях различных реакций и наличия нескольких малых параметров в получающихся уравнениях. Это привело авторов работы [349] к мысли использовать в качестве феноменологической модели клеточный автомат.

Так же как при исследовании диффузионного хаоса, они предположили, что сосредоточенная система обладает автоколебательной кинетикой, а причиной сложного пространственно-временного поведения оказываются диффузионные процессы.

Будем считать, что в одномерном случае систему можно разбить на одинаковые клетки. Состояние n -й клетки в мо-

мент t определяется неотрицательной функцией $A(n, t)$. Значение $A(n, t + 1)$ определяется по предшествующему состоянию следующим правилом:

$$A'(n, t) = \alpha [A(n + 1, t) + A(n - 1, t)]/2 + (1 - \alpha)A(n, t),$$

$$A(n, t + 1) = F(A'(n, t)). \quad (11.10)$$

Нелинейная функция $F(x)$ задается соотношением

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1,5 \leq x, \\ 0, & \text{если } 0,5 \leq x < 1,5, \\ M, & \text{если } x < 0,5. \end{cases} \quad (11.11)$$

Коэффициент $0 \leq \alpha \leq 1$ характеризует величину коэффициента диффузии. В отсутствие диффузии ($\alpha = 0$) система (11.10) описывает колебательный режим. (Считая, что $M > 1$, можно убедиться, что автомат (11.10) имеет цикл $0 \rightarrow M \rightarrow 1 \rightarrow 0 \dots$) В работе [349] рассматривались установившиеся режимы при различных значениях M и α . Было показано, что в такой системе могут существовать циклы с периодом 3, волновые процессы и сложные турбулентные режимы. Их дальнейший анализ, изучение количественных характеристик диффузионного хаоса в этой модели представляет большой интерес.

Другое направление исследований, в котором все более важную роль начинают играть клеточные автоматы, связано с новыми методами исследования сплошных сред. Вычислительный эксперимент в настоящее время широко применяется для исследования сложных многомерных задач аэродинамики и физики плазмы. При решении этих задач используются самые совершенные численные методы и наиболее мощные компьютеры. Повышение точности расчета экспериментальных установок, оптимизация аэродинамических аппаратов обычно связаны с резким увеличением объема вычислений.

Одним из методов, позволяющих ускорить расчеты и перейти к анализу более сложных объектов, являются параллельные вычисления. Вместо одного большого процессора при

решении многих задач математической физики выгодно использовать большое количество более простых и дешевых, работающих одновременно. Если число таких процессоров достаточно велико, и они заняты выполнением простейших операций, то вычисления можно рассматривать как эволюцию некоторого клеточного автомата. Встает вопрос, с помощью каких автоматов можно моделировать системы нелинейных уравнений в частных производных (прежде всего уравнения обычной и магнитной гидродинамики). Поскольку в уравнениях фигурируют пространственные производные, то связи клеток — процессоров также будут достаточно простыми — нужно чтобы были соединены только ближайшие соседи. При этом в двумерном случае удобно заполнять плоскость одинаковыми треугольными, квадратными или шестиугольными клетками.

Так же как при построении обычных разностных схем [272], клеточные автоматы такого типа строятся в соответствии с законами сохранения импульса, энергии и момента импульса. Вводится набор частиц, каждая из которых может находиться в одном из узлов квадратной (или шестиугольной) решетки. Обычно считается, что в каждом узле не могут находиться две одинаковые частицы. Далее определяется, по каким законам происходят столкновения таких частиц, и указывается способ, с помощью которого можно находить по поведению такого «решеточного газа» давление, скорость, плотность в изучаемом течении.

В частности, в работе [272] показано, что некоторый автомат, определенный на шестиугольной сетке, позволяет моделировать уравнение Навье — Стокса и может быть использован для создания параллельной вычислительной машины. Там же приведена библиография ряда предшествующих работ. Надевая частицы квантом векторного потенциала, вводя более сложные правила рассеяния частиц и вновь используя шестиугольные ячейки, этот подход можно использовать для моделирования уравнений магнитной гидродинамики [337].

Пример расчета гидродинамической задачи с помощью двумерного клеточного автомата, состоящего из 2^{16} ячеек

(256 x 256) · и 130 тыс. частиц, приведен в работе [326]. Обратим внимание на работу [350], в которой оцениваются параметры системы клеточных автоматов, необходимые для расчета гидродинамических течений при больших числах Рейнольдса. Вывод, который делают авторы, оказывается пессимистичным. Однако реально сравнить эффективность клеточных автоматов с традиционными численными методами можно будет после создания специализированных ЭВМ, ориентированных на такой подход. Одна из таких систем, состоящая из 65536 простых процессорных элементов, обладающих быстрым действием в 2,5 млрд. операций с плавающей запятой, создана к настоящему времени [198]. Отметим интересную особенность такой системы. Для моделирования некоторых уравнений в частных производных достаточно, чтобы каждая клетка в двумерной геометрии была связана с шестью ближайшими соседями. Однако для многих задач нужно гораздо больше соединений. Чтобы реализовать такую систему и сохранить структуру, удобную для реализации различных клеточных автоматов, можно строить такие вычислительные машины как клеточные автоматы в многомерном пространстве. В частности, соединения в вычислительной машине, описанной в работе [198], устроены так же, как в решетке из кубов в 12-мерном пространстве (в таком кубе у каждой вершины есть 12 соседей, а всего этот куб имеет 4096 вершин). Вычислительные машины с такой структурой создавались прежде всего для решения задач искусственного интеллекта. Возможно, для определенных классов задач гидродинамики, которые можно эффективно моделировать с помощью клеточных автоматов, они также будут очень полезны.

§ 11.2. Сложная упорядоченность и хаос в пространственно-неоднородных системах

При исследовании большинства систем типа реакция-диффузия предполагалось, что источники и стоки явно от

пространственной координаты не зависят. Во многих физических системах это условие не выполнено. Пространственная неоднородность приводит к появлению многих интересных эффектов. Мы проиллюстрируем некоторые из них на примере двух нелинейных пространственно-неоднородных систем.

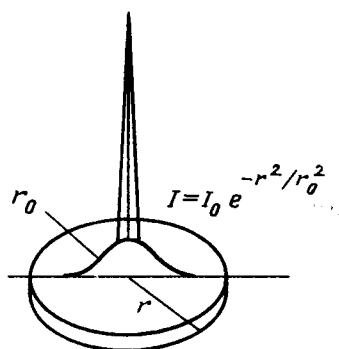


Рис. 11.13

Исследования теплового действия лазерного излучения на химически активные среды привели к появлению нового направления — «лазерной термохимии» [47]. Оказалось, что динамика протекания термохимических процессов может быть чрезвычайно сложной даже при воздействии на среду непрерывного лазерного излучения небольшой мощности. Это обстоятельство обусловлено в основном двумя факторами. Во-первых, неизотермичностью процессов: поскольку скорости химических процессов сильно зависят от температуры, а лазерное излучение непрерывно вводит в систему тепловую энергию, то скорость реакций может меняться. При этом если скорость изменения температуры выше скорости протекания реакций, то характер течения процесса будет резко отличаться и от изотермического («макроскопическая неравновесность»). Во-вторых, существенным является наличие обратной связи между скоростью изменения температуры и темпом протекания реакции. Возникновение этой обратной связи может быть обусловлено либо тепловым эффектом самих реакций, либо изменением оптических свойств среды при изменении хими-

ческого состава в ходе реакции. В последнем случае изменяются поглощательные характеристики среды, регулируя количество вводимой в систему энергии.

Лазерная термохимия может оказаться такой областью, где экспериментальное изучение нестационарных пространственно локализованных процессов, сложной временной упорядоченности, диффузионного хаоса окажется сравнительно простой задачей.

Одной из простейших задач лазерной термохимии является моделирование нагрева термически тонкой пластинки ($h^2 \ll \alpha\tau$, h – толщина пластины, τ – характерное время изменения температуры, α – коэффициент температуропроводности) в воздухе пучком лазерного излучения (см. рис. 11.13). В ряде случаев этот процесс описывается следующей краевой задачей

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + I e^{-r^2/r_0^2} + \frac{\alpha}{X} e^{-1/T} - \beta e^{-\kappa/T} - \delta T$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{d}{X} e^{-1/T} - \gamma e^{-\kappa/T}, \quad 0 < r < R, \quad (11.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad T \Big|_{t=0} = T_0(r), \quad X \Big|_{t=0} = X_0(r).$$

Здесь r – расстояние от центра симметрии, R – радиус образца, t – время, T – температура, X – толщина окисла, I – интенсивность, r_0 – эффективный радиус пучка излучения (см. рис. 11.13). Распределение интенсивности излучения записано в гауссовском виде. Третье и четвертое слагаемые в первом уравнении учитывают выделение энергии при окислении металла и поглощение при испарении окисла. Последнее слагаемое описывает теплообмен с окружающим мишень воздухом. Второе уравнение в (11.12) описывает изменение толщины окисного слоя за счет окисления металла и испарения окисла. Безразмерные постоянные c , α , β , κ , δ , d , γ , характеризующие теплофизические свойства вещества, кинетику изменения толщины окисного слоя, энерговыделение и тепло-

потери, связаны с соответствующими «размерными» параметрами соотношениями, приведенными в [45].

Если $r_0 \gg R$ и характерный пространственный масштаб изменения температуры T и толщины слоя окисла X превышает R , уравнения переходят в динамическую систему

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= I + \frac{\alpha}{X} e^{-1/T} - \beta e^{-K/T} - \delta T, \\ \frac{dX}{dt} &= \frac{d}{X} e^{-1/T} - \gamma e^{-K/T}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Эта система может иметь одну устойчивую точку ($T(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{const}$, $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{const}$) или обладать триггерными свойствами: при одних начальных данных $T \rightarrow T_1$, $X \rightarrow X_1$, при других $T \rightarrow T_2$, $X \rightarrow X_2$. В ней может существовать устойчивый предельный цикл: $T(t) \rightarrow T_c(t)$, $X(t) \rightarrow X_c(t)$, причем $T_c(t) = T_c(t + \bar{t})$, $X_c(t) = X_c(t + \bar{t})$, где \bar{t} — период решения. Все эти режимы наблюдались экспериментально [39].

В то же время эксперименты показали [38], что в неоднородном поле излучения динамика нагрева металлического образца усложняется: при острой фокусировке излучения наблюдаются хаотические колебания температуры вещества. Этим и обусловлен интерес к задаче (11.12).

В работе [15] выбраны такие параметры, что при больших значениях I в системе (11.13) существует устойчивая особая точка, при промежуточных — предельный цикл. При малых интенсивностях температура падает и характерные времена процессов резко возрастают. Наличие теплопроводности приводит к тому, что все эти системы, обладающие столь различными свойствами, взаимодействуют. Это типично для задач с пространственно-неоднородными параметрами.

Допустим, мы меняем интенсивность I и радиус пучка r_0 так, чтобы полная мощность излучения $P = \pi r_0^2 I$ оставалась постоянной. Физически это означает, что мы меняем фокусировку лазерного пучка.

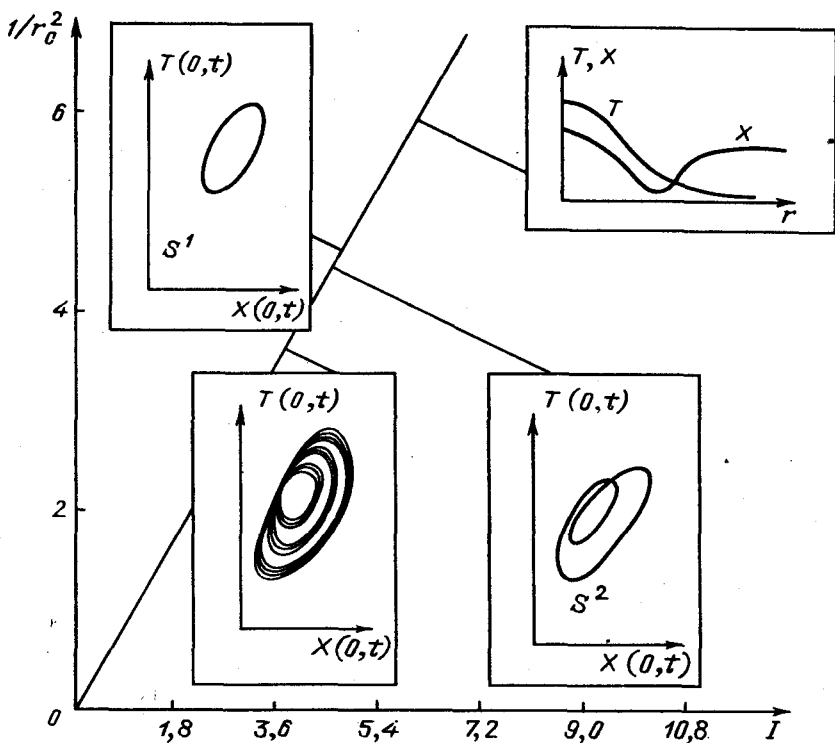


Рис. 11.14

Вначале наблюдается переходный процесс. Стоки тепла при небольших температурах оказываются несущественными, и свойства системы (11.12) и уравнения теплопроводности с нелинейным источником оказываются близки. Из теории таких уравнений следует, что в ряде случаев полуширина профиля температуры может сокращаться. В работе [37] описан эксперимент, в котором полуширина уменьшается в несколько раз. Далее существенными становятся ограничивающие факторы, и от центра образца по радиусу распространяется тепловая волна, за которой толщина окисла возрастает. Затем начинаются процессы, характерные времена которых на несколько порядков больше.

Основные типы установившихся режимов показаны на рис. 11.14. Постоянной величине P на плоскости $\{I, 1/r_0^2\}$ будут соответствовать значения параметров, лежащие на прямой. При достаточно больших значениях I в системе возникают стационарные диссипативные структуры. Типичный вид зависимостей $T(r)$ и $X(r)$ представлен на рисунке. Возникающие структуры эффективно локализованы. Локализация в этом случае связана с действием стоков.

Уменьшение интенсивности I приводит к возникновению периодического колебательного режима. Далее наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода $S^p \rightarrow S^{2p}$. Возникает диффузионный хаос.

Здесь также можно построить семейство одномерных отображений с гладкой вершиной.

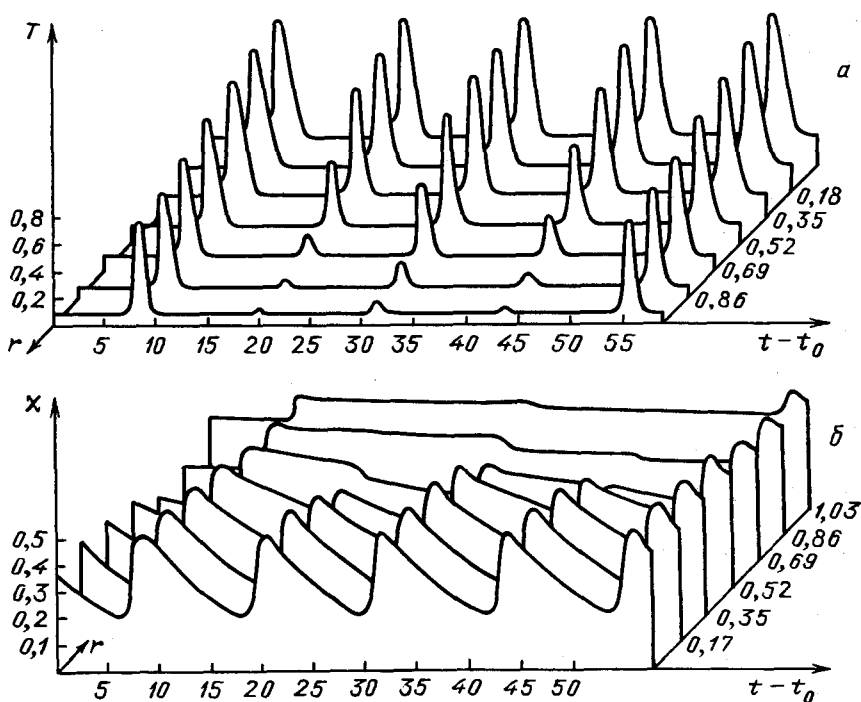


Рис. 11.15

Дальнейшее уменьшение интенсивности лазерного пучка приводит к тому, что колебания температуры становятся все более релаксационными. При этом у решения появляются новые свойства.

Рассмотрим их на примере такого расчета: $I = 1,8$; $r_0 = 1,0$; $c = 0,1$; $\alpha = 9,0$; $\beta = 0$; $\kappa = 0,6$; $\delta = 9,0$; $d = 0,894$; $\gamma = 1,0$. Закон изменения температуры и толщины окисла по времени в различных точках образца показан на рисунке 11.15. Видно, что максимумы температуры с амплитудой $T_{max} > 0,9$ при $r = 0,3$ следуют с периодом $\tau \approx 12,5$. В точке $r = 0,35$ они уже идут с периодом $\approx 2\tau$, а в точке $r = 0,86$ с периодом 4τ . Аналогично меняется и временная зависимость толщины окисла с ростом радиуса. При $r = 0,03$ толщина окисла меняется с периодом τ , на краю образца — с периодом 4τ (см. рис. 11.15). Наблюдаемая картина во многом отличается от автоволновых процессов в системах с однородными по пространству параметрами. Обычно в теории колебаний подчеркивается, что нелинейная диссипативная система может вести себя как генератор [4]. Рассмотренная же здесь открытая распределенная система ведет себя и как делитель частоты: тепловые импульсы большой амплитуды следуют с разной частотой в разных точках системы.

Из модели (11.12) следует, что выключив лазер ($I = 0$ при $t > t^*$), можно создать сложные пространственные распределения толщины окисла. Примеры таких распределений и ряд других свойств этой модели обсуждаются в работе [16].

Пространственная зависимость от координаты в уравнениях (11.12) была обусловлена тем, что рассматривается гауссов пучок и достаточно большой образец. Такие модели представляют интерес и при анализе термодиффузных процессов.

В работе [46] рассматривается смесь двух газов, помещенных в тонкую кювету. Кювета освещается узким пучком излучения, поглощаемого тяжелой компонентой. Простейшая модель таких процессов включает уравнение теплопроводности и уравнение диффузии

$$T_t = T_{xx} + b \left[I_n(x) e^{-T_0/T} - (T - T_n) \right],$$

$$\text{и } n_t = n_{xx} + \alpha \left(\frac{n(1-n)}{T} T_x \right)_x,$$

(11.14)

$$\alpha, b > 0, \quad 0 < x < R, \quad I_n(x) = I \exp \left(-(x - x_c)^2 / r_0^2 \right),$$

$$T|_{t=0} = T_n, \quad n|_{t=0} = n_0, \quad T_x|_{x=0,R} = 0, \quad n_x|_{x=0,R} = 0.$$

Для второго уравнения существует закон сохранения, что нетипично для ранее рассматривавшихся задач теории диссипативных структур. Кроме того, можно показать, что в однородной задаче ($I_n = \text{const}$) однородное решение устойчиво и колебания невозможны.

Применение метода осреднения к уравнениям (11.14) позволяет получить приближенную модель – систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой могут существовать устойчивые предельные циклы [46].

Численные расчеты позволили обнаружить в близкой области параметров колебания в исходной задаче. Была показана локализация колебательных процессов – с увеличением длины области R колебания на границе исчезали, сохраняясь в центре. Несмотря на равенство коэффициентов теплопроводности и диффузии (при $\nu = 1$), размер области локализации по концентрации оказывается в несколько раз больше размера области локализации по температуре. Это связано с отсутствием стока во втором уравнении, поэтому поглощающая компонента, откачанная из освещенной области, концентрируется в ее окрестности.

Таким образом, наличие распределенных параметров качественно меняет свойства системы. Можно ожидать, что в дальнейшем в системах типа реакция – диффузия с пространственно-неоднородными параметрами будут найдены другие интересные явления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адьютов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П.* Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной//Дифференц. уравнения.—1983.—Т.19, №7. —С.1107—1114.
2. *Аладьев В.З.* Кибернетическое моделирование биологии развития// Параллельная обработка информации и параллельные алгоритмы. —Таллин: Изд-во Валгус, 1981.—С.3—104.
3. *Андерсон Ф.* Локальные моменты и локализованные состояния//УФН.—1979.— Т.125, вып.1—С.19—29.
4. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний.—М.: Наука —1981.—568с.
5. *Андронов А.А., Фабрикант А.Л.* Затухание Ландау, ветровые волны и свисток.// Нелинейные волны.—М.: Наука, 1979.—С.68—104.
6. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах.—М: Наука, 1990, —312с.
7. *Аносов Д.В.* Гладкие динамические системы// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985. —Т.1.—С.151—240.
8. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978,—304с.
9. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1985—Т.5.—С.5—220.
10. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики.//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—1985—Т.3.—С.9—309.

11. *Афраймович В.С.* Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов.// Нелинейные волны, структуры и бифуркации.—М.: Наука, 1987.—С.189—213.
12. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П.* О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца.// Труды Моск. общества.— 1982.—Т.44.—С.180—212.
13. *Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.// ДАН СССР.—1977.—Т.234, №2.—С.336—339.
14. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность.// Методы качественной теории дифференциальных уравнений.—Горький: Изд-во ГГУ, 1983.—С.3—26.
15. *Ахромеева Т.С., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* О некоторых свойствах математической модели лазерного нагрева металлов в воздухе.// ДАН СССР.—1985.—Т.281, №1.—С.55—59.
16. *Ахромеева Т.С., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Периодические колебания и диффузионный хаос при нагреве металлов излучением.// Известия АН СССР.—1987.—Т.51, №6.—С.1154—1161.
17. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* О классификации двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации.// ДАН СССР.—1984.—Т.279, №3.—С.591—595.
18. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* О диффузионном хаосе в нелинейных диссипативных системах.// ДАН СССР.—1984.—Т.279, №5.—С.1091—1096.
19. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Двухкомпонентные диссипативные системы в окрестности точки бифуркации.// Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах.—М.: Наука, 1986.—С.7—59.
20. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* О классификации решений системы нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности точки бифуркации.// Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1986.—Т.28—С.207—213.
21. *Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г.* Колебательные процессы в нелинейных диссипативных средах. О некоторых упрощенных моделях.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1982, №53.—30с.

22. *Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г.* О новых свойствах нелинейных диссипативных систем.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1982.—№118.—28с.
23. *Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г.* О диффузионном хаосе.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1983.—№140.—28с.
24. *Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г.* Простейшие типы упорядоченности в открытых диссипативных системах// Диффер.уравнения.—1985.—Т.21, №4.—С.657—668.
25. *Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г.* Периодические режимы в нелинейных диссипативных системах вблизи точки бифуркации //ЖВМ и МФ.—1985.—Т.25, №9.—С.1314—1326.
26. *Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г.* О странном аттракторе в одной задаче синергетики// ЖВМ и МФ.—1987.—Т.27, №2.—С.202—218.
27. *Бабенко К.И., Афендикова А.Л.* Аттракторы системы Навье — Стокса и их связь с турбулентностью.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1987.—№82.—33с.
28. *Бабенко К.И., Петрович В.Ю.* Доказательные вычисления в задаче о существовании решения уравнения удвоения// ДАН СССР.—1984.—Т.277, №2.—С.265—269.
29. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности//УМН.—1983.—Т.38, вып.4.—С.133—187.
30. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений.—М.:Наука, 1989.—296с.
31. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике.—Л.: Гидрометеоиздат, 1982.—256с.
32. *Белинцев Б.Н.* Диссипативные структуры и проблемы биологического формообразования. Обзор моделей морфогенеза.// УФН.—1983.—Т.111, вып.1.—С.54—101.
33. *Белинцев Б.Н., Белоусов Л.В., Зарайский Л.В., Волькенштейн М.В.* Упругие натяжения в эмбриональном материале как фактор его самоорганизации // ДАН СССР.—1985.—Т.281, №3.—С.708—711.
34. *Белоусов Б.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм//Автоволновые процессы в системах с диффузией.— Горький: Инст. прикл. физ. АН СССР, 1981.—С.176—186.
35. *Берже М.* Геометрия.—М.: Мир, 1984.—559с.

36. Берман В.С., Данилов Ю.А. О групповых свойствах обобщенного уравнения Гинзбурга – Ландау// ДАН СССР.–1981.–Т.258, №1.–С.67–70.
37. Бобырев В.А., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С., Лялин А.А., Убайдуллаев С.А. Эффект обострения и локализации в задачах лазерной термохимии.–Препринт/ИОФАН СССР.–М., 1985.–№298.–20с.
38. Бобырев В.А., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С., Симакин А.В. Стохастический режим протекания термохимических гетерогенных процессов в поле лазерного излучения// Письма в ЖЭТФ.–1980.–Т.32, №10.–С.608–611.
39. Бобырев В.А., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С., Симакин А.В. Автоколебательные режимы лазерного горения металлов//Квантовая электроника–1983.–Т.10, №4.–С.793–797.
40. Боколишвили И.Б., Ким А.В., Малинецкий Г.Г., Петросян А.С., Потапов А.Б. Динамика неравновесного разряда в поле сходящейся цилиндрической волны в режиме интенсивного нагрева газа.–Препринт/ИПМ АН СССР.–М., 1989. –№76.–31с.
41. Боколишвили И.Б., Малинецкий Г.Г. О сценариях перехода к хаосу в одномерных отображениях с острой вершиной.–Препринт/ИПМ АН СССР.–М., 1987.–№112.–28с.
42. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.–М.: Наука, 1979.–255с.
43. Бунимович Л.А. Системы гиперболического типа с особенностями// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.–М.: ВИНТИ, 1985.–Т.2.–С.173–204.
44. Бунимович Л.А., Синай Я.Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца// Нелинейные волны.–М.: Наука, 1979.–С.212–226.
45. Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Автоволиновые процессы в лазерной термохимии. –Препринт/ИПМ АН СССР.–М., 1983.–№81.–22с.
46. Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Курдюмов С.П., Потапов А.Б., Самарский А.А. Термодиффузионные колебания в газовых смесях в поле лазерного излучения.–Препринт/ИПМ АН СССР.–М., 1986.–№40.–26с.
47. Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С. Термохимическое действие лазерного излучения// УФН. 1982.–Т.45, вып.1.–С.45–94.
48. Буссе Ф. Вихри и волны.–М.: Мир, 1984.–199с.

49. *Бугузов Ф.В., Васильева А.Б.* Об асимптотической теории контрастных диссипативных структур // ЖВМ и МФ.—1988.—Т.28, №3.—С.346–361.
50. *Вайнберг М.М., Тремогин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.—М.: Наука, 1969.—527с.
51. *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рухмайкин А.А.* Турбулентное динамо в астрофизике.—Новосибирск: Наука, 1980.—352с.
52. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволевые процессы.—М.: Наука, 1987.—240с.
53. *Васильева А.Б., Бугузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.—М.: Наука, 1973.—272с.
54. *Вилли К., Детье В.* Биология/Биологические процессы и законы.—М.: Мир, 1975.—824с.
55. *Винер Н., Розенблют А.* Проведение импульсов в сердечной мышце. Математическая формулировка проблемы проведения импульсов в сети связанных возбудимых элементов, в частности в сердечной мышце. // Кибернетический сборник.Т.3.—1961.—С.7–56.
56. *Вольперт А.И., Иванова А.Н.* Математические модели в химической кинетике // Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. —М.: Наука, 1987.—С.57–102.
57. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // УМН.—1984.—Т.39, вып.3.—С.3–37.
58. *Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения.—1986.—Т.28.—С.95–206.
59. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А.* О сравнении решений параболических уравнений // ДАН СССР.—1979.—Т.248, №3.—С.586–589.
60. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А.* Локализация тепла в нелинейных средах // Дифференц. уравнения.—1981.—Т.17, №10.—С.1826–1841.
61. *Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* О приближенных автомодельных решениях одного класса квазилинейных уравнений теплопроводности с источником // Мат. сб.—1984.—Т.124(166), вып.2(6).—С.163–188.

62. *Галактионов В. А., Самарский А. А.* Методы построения приближенных автомодельных решений нелинейных уравнений теплопроводности. IV// Мат. сб.—1983.—Т.121, №2.—С.131—155.
63. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей// Нелинейные волны. Структуры и бифуркации.—М.: Наука, 1987.—С.7—44.
64. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. Р.* Рождение многомерного хаоса в активных решетках// ДАН СССР.—1984.—Т.279,—С.596—601.
65. *Гарел Д., Гарел О.* Колебательные химические реакции.—М.: Мир.—1986.—250с.
66. *Гачок В. П.* Странные аттракторы в биосистемах.—Киев: Наукова думка, 1989, 238с.
67. *Гелбаум Б., Олмстед Д.* Контрпримеры в анализе.—М.: Мир, 1967.—229с.
68. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности.—М.: Мир, 1984.—344с.
69. *Гиззатулина С. М., Малинецкий Г. Г., Погапов А. Б., Рузмайкин А. А., Рукавишников В. Д.* Размерность геодинимического аттрактора по данным о вариации длины суток.—Препринт /ИПМ АН СССР.—1988.—№95.—25с.
70. *Гийемин В., Стенберг С.*//Геометрические асимптотики.—М.: Мир, 1981.—500с.
71. *Гилмор Р.* Пункладная теория катастроф. Т.1.—М.: Мир, 1984.—352с.
72. *Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их применение. —М.: Наука, 1981.—368с.
73. *Громов П. Р., Зобин А. Б., Рабинович М. И., Рейман А. М., Суцник М. М.* К динамической природе турбулентности внешних течений// Численные методы механики сплошной среды.—1986,—Т.17, №2.—С.30—41.
74. *Давыдов В. А., Зыков В. С., Михайлов А. С., Бражник П. К.* Дрейф и резонанс спиральных воли в распределенных возбудимых средах// Известия высших учебных заведений. Радиофизика.—1988.—Т.XXXI, №5.—С.574—582.
75. *Данилов Ю. А., Кадомцев Б. Б.* Что такое синергетика//Нелинейные волны. Самоорганизация.—М.: Наука, 1983.—С.5—16.
76. *Дегтярев Л. М., Петухова А. Л.* Численное исследование сингулярных решений уравнения шредингеровского типа.—Препринт /ИПМ АН СССР.—М., 1989. —№23. —28с.
77. *Джозеф Д.* Устойчивость движения жидкости.—М.: Мир, 1981,—638с.

78. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Скейлинговые свойства последовательности резонансных торов при переходе к хаосу в кольцевом автогенераторе // ЖТФ.—1986.—Т.56, вып.9.—С.1864—1867.
79. *Дубровин В.Н., Новиков С.П., Фоменко А.П.* Современная геометрия. —М.: Наука, 1979.—760с.
80. *Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде//ЖВМ и МФ.—1983.—Т.23, №2.—С.380—390.
81. *Еленин Г.Г., Плохотников К.Э.* Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М.,1977.—№91.—28с.
82. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. —Минск: Наука и техника.1972.—663с.
83. *Ершов С.В.* Статистические свойства хаоса в уравнении с запаздыванием: приближение большой размерности.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М.,1989.—№94 —31с.
84. *Ершов С.В., Малинецкий Г.Г.* О решении прямой и обратной задачи для уравнения Перрона — Фробениуса. —Препринт/ ИПМ АН СССР. —М., 1987.—№166.—33с.
85. *Жаботинский А.М.* Концентрационные автоколебания. —М.: Мир, 1978.—178с.
86. *Заморзаев А.М., Галарский Э.И., Палистрат А.Ф.* Цветная симметрия, ее обобщения и приложения. —Кншинев: Штинница, 1978.—276с.
87. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. —М.: Наука,—1984, —271с.
88. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. —М.: Наука, 1988.—368с.
89. *Захаров В.Е.* Коллапс и самофокусировка ленгмюровских волн// Основы физики плазмы. Т.2.—М.: Энергонздат, 1984.—С.79—118.
90. *Зеленяк Т.И.* Качественная теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка параболического типа. —Новосибирск: Изд-во НГУ, 1972.—147с.
91. *Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д.* Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика.// УФН.—1985.—Т.146, вып.3.—С.493—506.
92. *Змитренко Н.В., Курдюмов С.П.* N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением//ПМТФ.—1977.—№1.—С.3—23.

93. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Теория режимов с обострением в нелинейных средах.// Современные проблемы математики. Новейшие достижения.—1986.—Т.28.—С.3—94.
94. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью// Письма в ЖЭТФ.—1977.—Т.26, вып.9.—С.620—624.
95. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Возможность использования локализации тепла в режимах сжатия тета-пинча с обострением.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1980.—№153.—19с.
96. Змитренко Н.В., Михайлов А.П. Инерция тепла/ Сер. Математика, кибернетика.—М.: Знание, 1982.—64с.
97. Зыков В.С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах.—М.: Наука, 1984.—166с.
98. Зыков В.С. Циклоидная циркуляция спиральных волн в возбудимой среде // Биофизика.—1986.—Т.XXXI, вып.5.—С.862—865.
99. Зыков В.С. Кинематика нестационарной циркуляции спиральных волн в возбудимых средах// Биофизика.—1987.—Т.XXXII, вып.2.—С.337—340.
100. Зыков В.С., Михайлов А.С. Вращающиеся спиральные волны в простейшей модели возбудимой среды.// ДАН СССР.—1986.—Т.286, №2.—С.341—344.
101. Зыков В.С., Морозова О.Л. Кинематический метод исследования устойчивости спиральных волн.—Препринт/ИПУ АН СССР.—М., 1988.—39с.
102. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике.—М.: Наука, 1983.—280с.
103. Иваницкий Г.Р., Кринский В.И., Сельков Е.Е. Математическая биофизика клетки.—М.: Наука, 1978.—312с.
104. Иванова А.Н., Маганова Н.Е. О нелокальном характере поведения диссипативных структур// ЖВМ и МФ.—1984.—Т.24, №8.—С.1217—1230.
105. Ильяшенко Ю.С. О размерности аттракторов k -сжимающих систем в бесконечномерном пространстве// Вести. МГУ. Серия Математика, механика.—1983.—№3.—С.52—59.
106. Йорке Дж., Йорке Е. Метастабильный хаос: переход к устойчивому хаотическому поведению в модели Лоренца // Странные аттракторы.—М.: Мир, 1981.—С.193—212.
107. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.—М.: Мир, 1983.—304с.
108. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме.—М.: Наука, 1976.—240с.

109. *Калашников А.С.* О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением//ЖВМ и МФ.–1974.–Т.14, №4. –С.891–905.
110. *Кащенко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией// ДАН СССР.–1988.–Т.299, №5.–С.1049–1052.
111. *Кащенко С.А., Колесов Ю.С.* Диффузионная неустойчивость тора // ДАН СССР. –1985.–Т.281, №6.–С.1307–1309.
112. *Климонтович Ю.Л.* Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессах самоорганизации// УФН.–1989.–Т.158, №1.–С.58–91.
113. *Клиорин Н.И., Рузмайкин А.А.* Динамика средней турбулентной спиральности в магнитном поле//Магнитная гидродинамика.–1982.–№2.–С.17–24.
114. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме//Бюллетень МГУ.–1937.–Т.1, №6.–С.1–26.
115. *Колмогоров Н.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. –М.: Наука, 1972.–496с.
116. *Корнфельд И.П., Синай А.Г.* Первоначальные понятия и основные примеры эргодической теории//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.–1985.–Т.2.–С.7–34.
117. *Краузе Ф., Рэдлер К.Х.* Магнитогидродинамика средних полей и теория динамо.–М.: Мир, 1984.–314с.
118. *Кринский В.И.* Фибрилляция в возбудимых средах// Проблемы кибернетики.–1968.–Т.20.–С.59–86.
119. *Кринский В.И., Медвинский Н.Б., Панфилов А.В.* Эволюция автоволновых вихрей.–М.: Знание, 1986.–48с.
120. *Кринский В.И., Перцов А.М., Решетиллов А.Н.* Исследование одного механизма возникновения эктопического очага возбуждения на модифицированных уравнениях Ходжкина – Хаксли// Биофизика. –1972.–Т.17, –С.271–277.
121. *Курдюмов С.П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации// Современные проблемы математической физики и вычислительной математики.–М.: Наука, 1982. –С.217–243.

122. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде// ДАН СССР.–1980.–Т.251, №3.–С.587–591.
123. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками// ДАН СССР. –1981.–Т.258, №5.–С.1084–1088.
124. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Архитектура многомерных тепловых структур// ДАН СССР.–1984.–Т.274, №5.–С.1071–1075.
125. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды// ЖВМ и МФ.–1986.–Т.26, №8.–С.1189–1205.
126. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Тельковская А.В. Исследование собственных функций автомодельной задачи для двухкомпонентной среды.–Препринт/ИПМ АН СССР.–М., 1986.–№189.–28с.
127. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Самарский А.А. Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах// ДАН СССР.– 1980.–Т.251, №4.–С.836–839.
128. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Самарский А.А. Диссипативные структуры в триггерных средах// Дифференц. уравнения.–1981.–Т.17, №10.–С.1875–1885.
129. Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Плехотников К.Э. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой «кристалл».–Препринт/ИПМ АН СССР.–М., 1977.–№22.–50с.
130. Ладыженская О.А. О динамической системе, порожденной уравнениями Навье – Стокса// Записки научных семинаров ЛОМИ.–1972.–Т.27.–С.91–115.
131. Ладыженская О.А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнения Навье – Стокса и других уравнений с частными производными// УМН.–1987.–Т.42, вып.6(258).–С.25–60.
132. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности// ДАН СССР.–1944.–Т.44, №8.–С.339–342.
133. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.–М.: Наука, 1986.–736с.
134. Ланфорд О.Е. Странные аттракторы и турбулентность// Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности.–М.: Мир, 1984.–С.22–46.

135. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика.— М.: Мир, 1984.—528с.
136. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение// Странные аттракторы.—М.: Мир, 1981.—С.88—116.
137. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений.—М.: Мир, 1980.—298с.
138. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* О вычислении размерности странных аттракторов.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1987.—№101.—28с.
139. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* О вычислении размерности странных аттракторов// ЖВМ и МФ.—1988.—Т.28, №7.—С.1021—1037.
140. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Приймак В.Г.* Геометрические и статистические характеристики аттрактора уравнений Навье — Стокса для турбулентных течений вязкой жидкости в круглой трубе.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1990.—№28.—33с.
141. *Малинецкий Г.Г., Румяйкин А.А., Самарский А.А.* Модель долговременных вариаций солнечной активности.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1986.—№170.—28с.
142. *Марсден Дж.* Попытки установить соотношение между уравнениями Навье — Стокса и турбулентностью // Странные аттракторы.—М.: Мир, 1980.—С.7—20.
143. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения.—М.: Мир, 1980.—368с.
144. *Мартинсон Л.К., Павлов К.Б.* К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности//ЖВМ и МФ.—1972.—Т.12, №4.—С.1048—1054.
145. *Маслов В.П.* Когерентные структуры и асимптотическая неединственность для уравнений Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса// УМН.—1986.— Т.41, вып.6(252)—С.19—35.
146. *Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.Л.* Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса. Эволюция диссипативных структур.—М.: Наука, 1987.—352с.
147. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах.—М.: Мир, 1973.—167с.
148. *Моисеев Н.Н.* Алгоритмы развития.—М.: Наука, 1987.—304с.
149. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа.—М.: Наука, 1981.—488с.
150. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания.— М.: Наука, 1987.—424с.

151. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах.— М.: Мир, 1979.—512с.
152. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику.—М.:Мир,1975.—304с.
153. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. —М.: Наука, 1978.—399с.
154. *Одум Ю.* Экология.—М.: Мир, 1986.—Т.1.—328с.,Т.2.—376с.
155. *Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-линь.* Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации// Изв. АН СССР. Сер. мат.—1958.—Т.22, №5.—С.667—704.
156. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем// Труды Моск. мат. общества.—1968.—Т.19.—С.179—210.
157. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем.—М.: Наука, 1979.—384с.
158. *Песин Я.Б.* Общая теория гладких гиперболических динамических систем//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—1985.—Т.2.—С.123—172.
159. *Песин Я.Б.* Характеристики размерного типа инвариантных множеств динамических систем// УМН.—1988.—Т.43, вып.4(262).—С.95—128.
160. *Полак Л.С., Михайлов А.С.* Процессы самоорганизации в физико-химических системах.—М.: Наука, 1983.—250с.
161. *Потапов А.Б.* Построение двумерных собственных функций нелинейной среды.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1986.—№8.—26с.
162. *Пригожин И.* От существующего к возникающему.—М.: Наука, 1985.—327с.
163. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой.—М.: Природа, 1986.—432с.
164. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.—432с.
165. *Рабинович М.И., Фабрикант А.А.* Стохастическая автомодуляция воли в неравновесных средах// ЖЭТФ.—1979.—Т.77, вып.2(8).—С.617—629.
166. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика.—М.: Наука, 1984.—304с.
167. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности//Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981.—С.117—151.
168. *Самарский А.А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656с.
169. *Самарский А.А.* Введение в численные методы.—М.: Наука, 1982.—271с.

170. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.—М.: Наука, 1987.—480с.
171. Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Горение нелинейной среды в виде сложных структур// ДАН СССР.—1977.—Т.237, №6.—С.1330—1333.
172. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла// ДАН СССР.—1976.—Т.227, №2.—С.321—324.
173. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии.—М.: Наука, 1987.—368с.
174. Свирижев Ю.М., Логофет Д.И. Устойчивость биологических сообществ.—М.: Наука, 1978.—352с.
175. Синай Я.Г. Стохастичность динамических систем// Нелинейные волны.—М.: Наука, 1979.—С.192—212.
176. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике.—М.: Советское радио, 1977.—368с.
177. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы// УМН.—1970.—Т.25, №1.—С.113—185.
178. Соколов И.М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания// УФН.—1986.—Т.150, вып.2.—С.221—255.
179. Солитоны.—М.: Мир, 1983.—408с.
180. Солитоны в действии.—М.: Мир, 1981.—312с.
181. Старр В.П. Физика явлений с отрицательной вязкостью.—М.: Мир, 1971.—260с.
182. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения.—М.: Мир, 1974.—254с.
183. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных// Мат. сб.—1952.—Т.31(73), №3.—С.575—586.
184. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.—М.: Наука, 1980.—231с.
185. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1972.—735с.
186. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.—М.: Мир, 1977.—622с.

187. *Урманцев Ю.А.* Симметрия природы и природа симметрии.—М.: Мысль, 1974.—232с.
188. *Федорюк М.В.* Метод перевала.—М.: Наука, 1977.—368с.
189. *Фейнман Р.* Квантовомеханические ЭВМ// УФН.—1986.—Т.149, вып.4.—С.671—688.
190. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике.Т.7.—М.: Мир, 1966.—90с.
191. *Филлипс О.* Взаимодействие воли — эволюция идеи// Современная гидродинамика. Успехи и проблемы.—М.: Мир, 1984.—С.297—314.
192. Фракталы в физике.—М.: Мир, 1988.—672с.
193. *Хакен Г.* Синергетика.—М.: Мир, 1980.—404с.
194. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах.—М.: Мир, 1985.—419с.
195. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1970.—720с.
196. *Хенон М.* Двумерное отображение со странным аттрактором// Странные аттракторы.—М.: Мир, 1981.—С.152—163.
197. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.—М.: Мир, 1985.—376с.
198. *Хиллис У.Д.* Коммутационная машина//В мире науки.—1987.—№8.—С.60—69.
199. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла.—М.: Мир, 1985.—280с.
200. *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя// Укр. мат. журнал.—1964.—Т.26, №1.—С.61—71.
201. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения.—Киев: Наукова думка, 1986.—280с.
202. *Шильников Л.П.* Об одном случае существования счетного множества периодических движений// ДАН СССР.—1965.—Т.160, №3.—С.558—561.
203. *Шноль С.Э.* Факторы, определяющие направление и скорость биологической эволюции// Математическое моделирование биологических процессов.—М.: Наука, 1979.—С.5—26.
204. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение.—М.: Мир, 1988.—240с.
205. *Яворская И.М., Беляев Ю.К.* Переход к хаосу и характеристики хаотических режимов в сферическом течении Куэтта.—Препринт/Институт проблем механики АН СССР.—М., 1988.—№346.—37с.

206. *Яворская И.М., Беляев Ю.К., Монахов А.А.* Исследование устойчивости и вторичные течения во вращающихся сферических слоях при произвольных числах Россби // ДАН СССР.-1977.-Т.237, №4.-С.804-807.
207. *Якобсон М.В.* Эргодическая теория одномерных отображений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.-1985.-Т.2.-С.204-226.
208. *Aceves A., Adachihara H., Jones C., Lerman J.C., McLaughlin D.W., Moloney J.W., Newell C.* Chaos and coherent structures in partial differential equations // Physica D.-1986.-V.18, №1-3.-P.85-112.
209. *Aizawa Y.* Chaos - chaos phase transition and dimension fluctuation // dimensions and entropies in chaotic systems. -Berlin: Springer, 1986.-P.34-39.
210. *Akhromeyeva T.S., Kurdyumov S.P., Malnetskii G.G., Samarskii A.A.* Nonstationary dissipative structures and diffusion-induced chaos in nonlinear media // Phys. Reports.-1989.-V.176, №5-6.-P.189-370.
211. *Albano A.M., Muench J., Schwartz C., Mees A.I., Rapp P.E.* Singular - value decomposition and the Grassberger - Procaccia algorithm // Phys. Rev. A.-1988.-V.38, №6.-P.3017-3026.
212. *Aronson D.G., Chory M.A., Hall G.R., McGehee R.P.* Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer - assisted study // Comm. Math. Phys.-1982.-V.83, №3.-P.303-354.
213. *Aronson D.G., Weinberger H.F.* Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve pulse propagation // Partial differential equations and related topics. Lecture notes in mathematics.-Berlin: Springer, 1975.-V.446.-P.5-49.
214. *Atmanspacher H., Scheingraber H., Voges H.* Global scaling properties of a chaotic attractor reconstructed from experimental data // Phys. Rev. A.-1988.-V.37, №4.-P.1314-1322.
215. *Aubry S., Le Daeron P.V.* The discrete Frenkel - Kontorova model, its extension // Physica D.-1983.-V.8, №3.-P.381-422.
216. *Auchmuty J.F.* Lyapunov methods and equations of parabolic type // Nonlinear problems in the physical science and biology. Lecture Notes in Mathematics. -Berlin: Springer, 1973.-V.322.-P.1-14.
217. *Baditi R., Broggi G., Derighetti B., Ravani M.* Dimension increase in filtered chaotic signals // Phys.Rev.Lett.-1988.-V.60, №11.-P.979-982.

218. *Badit R., Politi A.* Statistical description of chaotic attractors. The dimension function// Journ. of Stat. Phys. -1985.-V.40, №5/6. -P.725-750.
219. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1,2// Meccanica.-1980.-V.15, №1.-P.9-20, 21-30.
220. *Berlekamp E.R., Conway J.H., Guy R.K.* Winning ways for your mathematical plays. Vol. 2./ Games in particular. -N.Y.: Academic press, 1982.-P.429-869.
221. *Bishop A.R., Forest M.G., McLaughlin D.W., Overman II E.A.* A quasi-periodic route to chaos in a near-integrable PDE// Physica D.-1986.-V.23, №1-3.-P.293-328.
222. *Blow K.J., Doran N.J.* Global and local chaos in the pumped nonlinear Schrodinger equation//Phys.Rev.Lett.-1984.-V.52,№7.-P.526-529.
223. *Bonetti M., Meynart R., Boon J.P., Olthari D.* Chaotic dynamics in a periodically exited air jet// Phys. Rev. Lett.-1985.-V.55, №5. -P.492-495.
224. *Bowen R., Ruelle D.* The ergodic theory of axiom A flows// Inventiones Mathematicae.-1975.-V.29, №3.-P.181-202.
225. *Brandstater A., Swift J., Swinney H.L., Wolf A., Jen E., Crutchfield P.J.* Low - dimensional chaos in a hydrodynamic system// Phys. Rev. Lett.-1983.-V.51, №16.-P.1442-1445.
226. *Brandstater A., Swinney H.L.* Strange attractors in weakly turbulent Couette - Taylor flow// Phys. Rev. A.-1987.-V.35, №5.-P.2207-2220.
227. *Brandstater A., Swinney H.L., Chapman G.T.* Characterizing turbulent channel flow// Dimensions and entropies in chaotic systems.-Berlin: Springer, 1986.-P.150-157.
228. *Broomhead P.S., King G.P.* Extracting qualitative dynamics from experimental data// Physica D.-1986.-V.20, №1-3.-P.217-236.
229. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* Spacetime chaos in coupled map lattices// Nonlinearity.-1988.-V.1, №4.-P.491-516.
230. *Carter F.L.* Molecular level fabrication techniques and molecular electronic devices// J. Vac. Sci. Technol.-1983.-Oct.-Dec.-B.1(4).-P.959-968.

231. Chaos and order in nature// Springer Series in Synergetics.—Berlin: Springer, 1981.—V.11.—275p.
232. *Chidaglia J.M., Heron B.* Dimension of the attractors associated to the Ginzburg - Landau partial differential equation// *Physica D.*—1987.—V.28, №3.—P.282-304.
233. *Chirikov B.V.* Universal instability of many - dimensional oscillator systems// *Phys. Reports.*—1979.—V.52, №5.—P.263-379.
234. *Coffman K., McCormic W.D., Swinney H.L.* Multiplicity in a chemical reaction with one - dimensional dynamics// *Phys. Rev. Lett.* —1986.—V.56, №10.—P.999-1002.
235. *Collet P., Eckmann J.P.* Iterated maps on the interval as dynamical systems. —Basel-Stuttgart: Birkhauser, 1980.—248p.
236. *Collet P., Levy Y.* Ergodic properties of the Lozi mappings// *Commun. Math. Phys.*—1984.—V.93, №4.—P.461-482.
237. *Constantin P., Foias C.* Global Lyapunov exponents, Kaplan - Yorke formulas and the dimension of the attractors for Navier - Stokes Equations// *Communications on Pure and Applied Mathematics* —1985.—V.33, №1.—P.1-27.
238. *Constantin P., Foias C., Temam R.* On the dimension of the attractors in two - dimensional turbulence// *Physica D.*—1988.—V.30, №3.—P.284-296.
239. *Coste J., Peyraud N.* A new type of period-doubling bifurcations in one dimensional transformations with two extrema// *Physica D.*—1982.—V.5, №2-3.—P.415-420.
240. *Couillet P., Elphick C., Repaux D.* Nature of spatial chaos// *Phys. Rev. Lett.* —1987.—V.58, №1.—P.431-434.
241. *Cross M.C., Newell A.C.* Convection pattern in large aspect ratio systems// *Physica D.*—1984.—V.10, №3.—P.299-328.
242. *Crutchfield J.P., Farmer J.P., Huberman B.A.* Fluctuations and simple chaotic dynamics// *Phys. Reports.*—1982.—V.92, №2.—P.45-82.
243. *Crutchfield J.P., Kaneko K.* Are attractors relevant to turbulence? // *Phys. Rev. Lett.*—1988.—V.60, №26.—P.2715-2718.
244. *Curry J.H.* A generalized Lorenz system// *Comm. Math. Phys.* —1978.—V.60, №3.—P.193-204.

245. *Curry J.H., Herring J.R., Loncaric J., Orszag S.A.* Order and disorder in two - and three - dimensional Benard convection// Journ. of Fluid Mech.-1984.-V.147.-P.1-38.
246. *Cvitanovic P., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I.* Renormalization, unstable manifolds and the fractal structure of mode locking// Phys. Rev. Lett.-1985.-V.55, №4.-P.343-346.
247. *Deissler R.G.* Is Navier - Stokes turbulence chaotic?// Phys. Fluids.-1986.-V.29, №5.-P.1453-1457.
248. *Deissler R.J.* Noise strained structure, intermittency and the Ginzburg - Landau equation// J. Stat. Phys.-1985.-V.40, №3/4.-P.371-395.
249. *Deissler R.J.* Spatially growing waves, intermittency, and convective chaos in an open - flow system// Physica D.-1987.-V.25, №1-3.-P.233-260.
250. *Deissler R.J.* Turbulent bursts, spots and slugs in a generalized Ginzburg - Landau equation// Physics Letters A.-1987. -V.120, №7.-P.334-340.
251. *Derrida B., Gervois A., Pomeau Y.* Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms//J. Phys. A.-1979.-V.12, №3.-P.269-296.
252. *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems.*-Berlin: Springer, 1986.-257p.
253. *Doering R.C., Gibbon J.D., Holm D.D., Nicolaenko B.* Exact Lyapunov dimension of the universal attractor for the complex Ginzburg - Landau equation// Phys. Rev. Lett.-1987.-V.59, №26.-P.2911-2914.
254. *Duong-Van M., Felt M.D.* Comments on power spectra of discrete stochastic time series// Physics Letters A.-1987.-V.119, №8.-P.388-390.
255. *Dynamics of synergetic systems.* Springer ser. in synergetics.V.6.-Berlin: Springer, 1980.-271p.
256. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractors// Rev. Mod. Phys.-1985.-V.57, №3.-P.617-656.
257. *Ershov S.V., Malinetskii G.G., Rusmaikin A.A.* A generalized two - disk dynamo model//Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.-1989.-V.47.-P.251-277.
258. *Farmer J.D.* Sensitive dependence on parameters in nonlinear dynamics// Phys. Rev. Lett.-1985.-V.55, №4.-P.351-354.
259. *Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A.* The dimension of chaotic attractors// Physica D.-1983.-V.7, №1-3.-P.153-180.

260. *Farmer J.D., Sidorovich J.J.* Predicting chaotic time series//Phys. Rev. Lett.-1987.-V.59, №8.-P.845-848.
261. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations// J. Stat. Phys.-1978.-V.19, №1.-P.25-52.
262. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations// J. Stat. Phys.-1979.-V.21, №6.-P.669-706.
263. *Feigenbaum M.J.* Universal behaviour in nonlinear systems// Los Alamos Sci.-1980.-V.1, №1.-P.4-27.
264. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis// Physica D.-1982.-V.5, №2-3.-P.370-386.
265. *Fenstermacher R., Swinney H.L., Gollub J.P.* Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow// J.Fluid Mech.-1979.-V.94, Part 1.-P.103-128.
266. *Foias C., Manley O.P., Teman R., Treve Y.M.* Number of modes governing two - dimensional viscous incompressible flows// Phys. Rev. Lett. -1983.-V.50, №14.-P.1031-1034.
267. *Foias C., Sell G.R., Teman R.* Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations// J. Differential Equations.-1988.-V.73, №2.-P.309-353.
268. *Fowler A.C., Gibbon J.D., Mc Guinness M.J.* The real and complex Lorenz equations and their relevance to physical systems// Physica D.-1983.-V.7., №1-3.-P.126-134.
269. *Fraedrich K.* Estimating the dimensions of weather and climate attractors//Journal of Atmospheric Sciences.-1986.-V.43, №5.-P.419-432.
270. *Fraedrich K.* Estimating weather and climate predictability on attractors//Journal of Atmospheric Sciences.-1987.-V.44, №4.-P.722-728.
271. *Fraser A.M., Swinney H.L.* Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys. Rev. A.-1986.-V.33, №2.-P.1131-1140.
272. *Frisch M., Hasslacher B., Pomeau Y.* Lattice-gas automata for Navier - Stokes Equation// Phys. Rev. Lett.-1986.-V.56, №14.-P.1505-1508.
273. *Gierer A.* Generation of biological patterns and form: some physical, mathematical, and logical aspects// Progress in Biophysics and Molecular Biology.-1981.-V.37, №1-3.-P.1-47.

274. *Gierer A., Meinhardt H.* A theory of biological pattern formation// Kybernetic.-1972.-V.12, №30.-P.30-39.
275. *Giglio M., Musazzi S., Perini U.* Low-dimensionality turbulent convection// Phys. Rev. Lett.-1984.-V.53, №25.-P.2402-2404.
276. *Gorelova N.A., Bures J.* Spiral waves of spreading depression in the isolated chicken retina// J. Neurobiology.-1983.-V.14.-P.353.
277. *Gosper R.Wm.* Exploiting regularities in large cellular spaces// Physica D.-1984.-V.10, №1-2.-P.75-80.
278. *Grassberger P.* Letter to Editor//Nature.-1987.-V.326, №6112.-523p.
279. *Grassberger P., Procaccia I.* Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal// Phys. Rev. A.-1983.-V.28, №4.-P.2591-2593.
280. *Grassberger P., Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors// Physica D.-1983.-V.9, №1,2.-P.189-208.
281. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Chaotic attractors in crisis//Phys. Rev. Lett.-1982.-V.48, №22.-P.1507-1510.
282. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos// Physica D.-1983.-V.7, №1-3.-P.181-200.
283. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Metamorphoses of basin boundaries in nonlinear dynamical systems// Phys. Rev. Lett.-1986.-V.56, №10.-P.1011-1014.
284. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems//Phys. Rev. Lett.-1986.-V.57, №11.-P.1284-1287.
285. *Greenberg J.M.* Spiral waves in λ - ω systems// SIAM J. Appl. Math.-1982.-V.42, №4.-P.762-786.
286. *Greenside H.S., Caughran Jr.W.M., Schryer N.L.* Nonlinear pattern formation near the onset of Rayleigh - Benard convection// Phys. Rev. Lett.-1982.-V.49, №10.-P.726-729.
287. *Greenside H.S., Wolf A., Swift J., Pignataro T.* Impracticality of a box - counting algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors// Phys. Rev. A.-1982.-V.25, №6.-P.3453-3456.
288. *Gu Y.M., Tung M., Yuan J., Feng D.H., Narducci L.H.* Crises and hysteresis in coupled logistic maps// Phys. Rev. Lett.-1984.-V.52, №9.-P.701-704.

289. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields.—N.Y.— Berlin — Heidelberg — Tokyo: Springer, 1983.—453p.
290. *Hagan P.S.* Spiral waves in reaction — diffusion equations// *SIAM J. Appl. Math.*—1982.—V.42, №4.—P.762—786.
291. *Halsey C., Jensen M.H., Kadanoff L., Procaccia I., Shralman B.I.* Fractal measures and their singularities. The characterization of strange sets// *Phys. Rev. A.*—1986.—V.33, №2.—P.—1141—1151.
292. *Hata M.* Fractals in mathematics// *Patterns and waves. Qualitative analysis of nonlinear differential equations.*—Tokyo: Kinokuniya, 1988.—P.259—278.
293. *Henon M.* On the numerical computation of Poincare maps// *Physica D.* —1982.—V.5, №2,3.—P.412—414.
294. *Hentschel H.G.E., Procaccia I.P.* The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors// *Physica D.*—1983.—V.8, №3.—P.435—444.
295. *Hüzl D.L., Zele F.* An exploration of the Henon quadratic map// *Physica D.*—1985.—V.14, №3.—P.305—326.
296. *Hyman J.M., Nicolaenko B.* The Kuramoto — Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamical systems// *Physica D.*—1986.—V.18, №1—3.—P.113—126.
297. *Hyman J.M., Nicolaenko B., Zaleski S.* Order and complexity in the Kuramoto — Sivashinsky model of weakly turbulent interfaces// *Physica D.*—1986.—V.23, №1—3.—P.265—292.
298. *Ikeda K., Matsumoto K.* High-dimensional chaotic behaviour in systems with time-delayed feedback// *Physica D.*—1987.—V.29, №1—2.—P.223—235.
299. *Jahke W., Skaggs W.E., Winfree H.T.* Chemical vortex dynamics in the Belousov — Zhabotinsky reaction in the two — variable Oregonator model// *Journ. of Phys. Chem.*—1989.—V.93, №2.—P.74—86.
300. *Jakobson M.V.* Absolutely continuous measures for one parameter families of one-dimensional maps// *Commun. Math. Phys.*—1981.—V.81, №1.—P.39—88.
301. *Jensen M.H., Kadanoff L.P., Libchaber A., Procaccia I., Stavans J.* Global universality at the onset of chaos: result of a forced Ray-

- leigh - Benard Experiment// Phys. Rev. Lett.-1985.-V.55, №25.
-P.2798-2801.
302. Jones C.A., Weiss N.D., Cattaneo F. Nonlinear dynamous: a complex generalization of the Lorenz equations// Physica D.-1985.-V.14,№1.
-P.161-176.
303. Kakutani T. Plasma waves in the long wave approximation // Suppl. Progr. Theor. Phys.-1974.-№55.-P.97-119.
304. Kaneko K. Transition from torus to chaos accompanied by frequency lockings with symmetry breaking in connection with the coupled - logistic map// Progr. Theor. Phys.-1983.-V.69, №5.-P.1427-1442.
305. Kaplan. J., Yorke J. Chaotic behaviour of multidimensional difference equations// Functional differential equations and approximation of fixed points. Lect. notes in math. - Berlin: Springer, 1979.- V.730.-P.204-227.
306. Keefe L.R. Dynamics of perturbed wavetrain solutions to the Ginzburg - Landau Equation// Stud. Appl. Math.-1985.-V.73, №2.-P.91-135.
307. Koga S. Rotating spiral waves in reaction - diffusion systems// Progr. Theor. Phys.-1982.-V.67,№1.-P.164-178.
308. Koga S. Schrodinger equation approach to rotating spiral waves in reaction - diffusion systems// Progr. Theor. Phys. -1982.-V.67, №2.
-P.454-463.
309. Koppel H., Howard L.N. Plane wave solutions to reaction - diffusion equation// Stud. Appl. Math.-1973.-V.52, №4.-P.291-328.
310. Kuramoto Y. Chemical waves and chemical turbulence // Synergetics. A Workshop.-N.-Y., Berlin, Heidelberg, 1977,-P.164-173.
311. Kuramoto Y. Diffusion - induced chaos in reaction systems// Suppl. Progr. Theor. Phys.-1978.-№64.-P.346-367.
312. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence.- Berlin: Springer, 1984.-156p.
313. Kuramoto Y., Koga S. Turbulized rotating chemical waves // Progr. Theor. Phys.-1981.-V.66, №3.-P.1081-1083.
314. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Reductive perturbation approach to chemical instabilities// Progr. Theor. Phys.-1974.-V.52, №4.- P.1399-1401.
315. Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems// Progr. Theor. Phys.-1975.-V.54, №3.
-P.687-699.

316. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium// *Progr. Theor. Phys.*—1976.—V.55, №2.—P.356–369.
317. *Kuramoto Y., Yamada T.* Turbulent state in chemical reactions// *Progr. Theor. Phys.*—1976.—V.56, №2.—P.679–681.
318. *Kwok Yeung Tsang.* Dimensionality of strange attractors determined analytically// *Phys. Rev. Lett.*—1986.—V.57, №12.—P.1390–1393.
319. *Lin S.P.* Finite amplitude side – band stability of a viscous fluid // *J. Fluid Mech.*—1974.—V.63, Part 3.—P.417–429.
320. *Li T.Y., Yorke J.A.* Period three implies chaos// *Amer. Math. Monthly.*—1975.—V.82, №10.—P.982–985.
321. *Maini P.K., Murray J.D., Oster G.F.* A mechanism for biological pattern formation: a nonlinear bifurcation analysis// *Ordinary and partial differential equations. Lect. notes in math.*—Berlin: Springer, 1985.—V.1151.—P.252–269.
322. *Malraison B., Atten P., Berge P., Dubois M.* Dimension of strange attractors: an experimental determination for the chaotic regime of two convective systems// *J. Physique Lettres.*—1983.—V.44, №22.—P.897–902.
323. *Mandelbrot B.B.* *Fractals: form, chance and dimension.*—San Francisco: Freeman Comp, 1977.—365p.
324. *Manneville P.* Toward the understanding of weak turbulence close to the convection threshold in large ratio system// *J. Physique Lettres.* —1983.—V.44, №22.—P.903–916.
325. *Manneville P., Pomeau V.* Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems// *Physica D.*—1980.—V.1, №2.—P.219–226.
326. *Margolus N., Toffoli T., Vichniak G.* Cellular – automata supercomputers for fluid dynamics// *Phys. Rev. Lett.*—1986.—V.56, №16.—P.1694–1696.
327. *May R.M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature.*—1976.—V.261, №5560.—P.459–467.
328. *Mayer-Kress G., Haken H.* The influence of noise on the logistic model// *J. Stat. Phys.*—1981.—V.26, №1.—P.149–171.
329. *Mc Carthy P.P., Babcock A.K.* The length of day since 1654// *Phys. Earth. Plan. Intern.*—1986.—V.44.—P.281–292.

330. *Mc Laughlin J.B., Martin P.C.* Transition to turbulence in a statically stressed fluid system// *Phys. Rev.*—1975.—V.12, №1.—P.186–203.
331. *Meinhardt H.* Models of biological pattern formation.—New York, London: Acad. Press, 1982.—230p.
332. *Metropolis N., Stein M.L., Stein P.R.* On finite limit sets for transformations of unit interval//*J. Combin. Theory A.*—1973.—V.15, №1.—P.25–44.
333. *Michelson D.* Steady solutions of the Kuramoto – Sivashinsky equation// *Physica D.*—1986.—V.19, №1.—P.89–111.
334. *Milnor J.* On the concept of attractor//*Commun. Math. Phys.*—1985.—V.99, №2.—P.177–198.
335. *Misirewich M.* Nonlinear dynamics.—New York: N. Y. Acad.Sci., 1980.—348p.
336. *Moloney J.V.* Self-focusing-induced optical turbulence// *Phys. Rev. Lett.*—1984.—V.53, №6.—P.556–559.
337. *Montgomery D., Doolen C.D.* Magnetohydrodynamic cellular automata// *Phys. Lett. A.*—1987.—V.120, №5.—P.229–231.
338. *Moon H.T., Huerre A., Redekopp L.G.* Transitions to chaos in the Ginzburg – Landau equation// *Physica D.*—1983.—V.7, №1–3.—P.135–150.
339. *Muller S.C., Plessner T., Hess B.* Two-dimensional spectrophotometry of spiral wave propagation in the Belousov – Zhabotinskii reaction // *Physica D.*—1987.—V.24, №1–3.—P.71–109.
340. *Neumann J.* Theory of self – reproducing automata// Univ. Illinois Press, Illinois—1966.—250p.
341. *Newell A.C., Whitehead J.A.* Finite bandwidth, finite amplitude convection// *J. Fluid Mech.*—1969.—V.38, Part 2.—P.279–303.
342. *Newton P.K., Sivovich L.* Instabilities of the Ginzburg – Landau equation periodic solutions// *Quart. Appl. Math.*—1986.—V.43, №4.—P.535–542.
343. *Nicolaenko B., Scheurer B.S.* Remarks on the Kuramoto – Sivashinsky equation// *Physica D.*—1984.—V.12, №1–3.— P.391–395.
344. *Nicolis C., Nicolis G.* Is there climatic attractor?//*Nature.*—1984.—V.311.—P.529–532.
345. *Nicolis C., Nicolis G.* Evidence for climatic attractors// *Nature.*—1987.—V.326, №2.—P.523.

346. *Nitzan A., Ortoleva P.* Scaling and Ginzburg criteria for critical bifurcations in nonequilibrium reacting systems// *Phys. Rev. A.*—1980.—V.21, №5.—P.1735–1755.
347. *Nozaki K., Bekki N.* Chaos in a perturbed nonlinear Schrodinger equation// *Phys. Rev. Lett.*—1983.—V.50, №17.—P.1226–1229.
348. *Omohundro S.* Modeling cellular automata with partial differential equations// *Physica D.*—1984.—V.10, №1–2.—P.128–134.
349. *Oono Y., Kohmoto M.* Discrete model of chemical turbulence// *Phys. Rev. Lett.*—1985.—V.55, №27.—P.2927–2931.
350. *Orszag S.A., Yakhot V.* Reynolds number scaling of cellular — automaton hydrodynamics//*Phys.Rev.Lett.*—1986.—V.56, №16.—P.1691–1693.
351. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems// *Physica D.*—1983.—V.8, №3.—P.303–342.
352. *Ou – Yang Zhong – Can, Yae Gang, Hao Bai – Lin.* From fractal to dendritic: competition between diffusion and field// *Phys. Rev. Lett.*—1986.—V.57, №25.—P.3203–3205.
353. *Pawelzik K., Schuster H.G.* Generalized dimensions and entropies from a measured time series//*Phys. Rev. A.*—1987.—V.35, №1.—P.481–484.
354. *Pertsov A.M., Ermakova E.A., Panfilov A.V.* Rotating spiral waves in a modified Fitz – Hugh Nagumo model// *Physica D.*—1984. —V.14, №1.—P.117–124.
355. *Prufer M.* Turbulence in multistep methods for initial problem//*SIAM J. Appl. Math.*—1985.—V.45, №1.—P.32–39.
356. *Rinzel J., Keller J.B.* Traveling wave solutions of a nerve conduction equation// *Biophys. Journ.*—1973.—V.13.—P.1313–1337.
357. *Rossler O.E., Kahlert C., Winfree A.T.* Meandering in a two – dimensional 2–variable excitable medium// *Z. Naturforsch.*— 1979.—V.34a, №5.—P.565–570.
358. *Roux J.C.* Experimental studies of bifurcations leading to chaos in the Belousof – Zhabotinsky reaction// *Physica D.*—1983.— V.7, №1,2.—P.57–68.
359. *Ruelle D.* A measure associated with axiom-A attractors// *Amer. J. Math.*—1976.—V.98, №3.—P.619–654.
360. *Ruelle D.* Five turbulent problems// *Physica D.*—1983.—V.7, №1–3.—P.40–44.

361. *Russel D.A., Ott E.* Chaotic (strange) and periodic behaviour in instability saturation by the oscillating two stream instability// *The Phys. of Fluids.*—1981.—V.24, №11.—P.1976—1988.
362. *Ruzmaikin A.A.* The solar cycle as a strange attractor// *Comments Astrophys.*—1981.—V.9, №2.—P.85—93.
363. *Sano M., Sato S., Sawada Y.* Global spectral characterization of chaotic dynamics// *Prog. Theor. Phys.*—1986.—V.76, №4.—P.945—948.
364. *Sano M., Sawada Y.* Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series// *Phys. Rev. Lett.*—1985.—V.55, №10.—P.1082—1085.
365. *Sato S., Sano M., Sawada Y.* Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems// *Prog. Theor. Phys.*—1987.—V.77, №1.—P.1—5.
366. *Seung - hwan Kim, Ostlund S.* Renormalization of mappings of the two - torus// *Phys. Rev. Lett.*—1985.—V.55, №11.—P.1165—1168.
367. *Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J.W.* Metallic phase with long - range orientation order and no translational symmetry// *Phys. Rev. Lett.*—1984.—V.53, №20.—P.1951—1953.
368. *Shenker S.J.* Scaling behaviour in a map of a circle onto itself: empirical results// *Physica D.*—1982.—V.5, №2—3.—P.405—411.
369. *Sieber M.* Experiments on the attractor - dimension for turbulent pipe flow// *Phys. Lett. A.*—1987.—V.122, №9.—P.467—470.
370. *Singer D.* Stable orbits and bifurcation of maps of the interval// *SIAM J. Appl. Math.*—1978.—V.35, №2.—P.260—267.
371. *Sivashinsky G.* On flame propagation under conditions of stoichiometry// *SIAM J. Appl. Math.*—1980.—V.39, №1.—P.67—82.
372. *Smith L.A.* Intrinsic limits on dimension calculations// *Phys. Lett. A.*—1988.—V.133, №6.—P.283—288.
373. *Sparrow C.* The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors.—Berlin: Springer, 1982.—269p.
374. *Stavans J., Heslot F., Libchaber A.* Fixed winding number and the quasiperiodic route to chaos in a convective fluid// *Phys. Rev. Lett.*—1985.—V.55, №6.—P.596—599.
375. *Stewartson K., Stuart J.T.* A non - linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow// *J. Fluid Mech.*—1971.—V.48, №3.—P.529—545.

376. *Swinney H.Z.* Observations of order and chaos in nonlinear systems// *Physica D.*—1983.—V.7, №1-3.—P.3-15.
377. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence// *Lect. notes in math.*—Berlin: Springer, 1981.—V.898.—P.336-381.
378. *Takens F.* Distinguishing deterministic and random systems// *Nonlinear dynamics and turbulence.*—Boston: Pitman, 1983.—P.314-333.
379. *Taniuti T.* Reductive perturbation method and far fields of wave equations// *Supp. Progr. Theor. Phys.*—1974.—№55.—P.1-35.
380. *Theiler J.* Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time - series data// *Phys. Rev. A.* —1986. —V.34, №3. —P.2427-2432.
381. *Thom R.* *Stabilite structurelle et morphogenese.*—New York: Benjamin, 1972.—326p.
382. *Tomita K., Tsuda T.* Towards the interpretation of the global bifurcation structure of the Lorenz system// *Suppl. Progr. Theor. Phys.* —1980. —№69.—P.183-199.
383. *Troubnikov B.A., Zhdanov S.K.* Unstable quasigaseous media// *Phys. Reports.*—1987.—V.155, №3.—P.137-230.
384. *Turing A.* The chemical basis of morphogenesis// *Phyl. Trans. Roy. Soc. London B.* —1952.—V.237.—P.37-72.
385. *Tyson J.J., Keener J.P.* Singular perturbation theory of travelling waves in excitable media// *Physica D.*—1988.—V.32, №3.—P.327-361.
386. *Uchiki S.* Chaotic phenomena and fractal objects in numerical analysis// *Patterns and waves. Qualitative analysis of nonlinear differential equations.*—Tokyo: Kinokuniya, 1988.—P.221-258.
387. *Vastano J.A., Kostelich E.J.* Comparison of algorithms for determining Lyapunov exponents from experimental data// *Dimensions and entropies in chaotic systems.*—Berlin, Springer, 1986.—P.100-107.
388. *Weiss N.O., Cattaneo F., Jones C.A.* Periodic and aperiodic dynamo waves// *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*—1984.—V.30.—P.305-341.
389. *Williams G.E.* Solar affinity of sedimentary cycles in the late pre-cambrian Elatina formation// *Australian Jour. Phys.* —1985.—V.38.—P.1027-1043.
390. *Winfree A.T.* The geometry of biological time. *Lecture notes in biomathematics.*—Berlin: Springer, 1980.—530p.

391. *Winfree A.T., Winfree E.M., Seifert H.* Organizing centers in a cellular excitable medium// *Physica D.*—1985.—V.17, №1. —P.109–115.
392. *Witten T.A., Sander L.M.* Diffusion – limited aggregation// *Phys. Rev. B.*—1983.—V.27, №9.—P.5686–5697.
393. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series// *Physica D.*—1985.—V.16, №3. —P.285–317.
394. *Wolfram S.* Statistical mechanics of cellular automata// *Rev. of Modern Physics*—1983.—V.55, №3.—P.601–644.
395. *Wolfram S.* Universality and complexity in cellular automata//*Physica D.* —1984.—V.10, №1–2.—P.1–35.
396. *Yamada T., Kuramoto Y.* A reduced model showing chemical turbulence // *Progr. Theor. Phys.*—1976.—V.56, №2.—P.681–683.
397. *Yamada T., Kuramoto Y.* Breakdown of synchronized state in a self – oscillatory chemical reaction systems// *Prog. Theor. Phys.*—1978.—V.60, №6. —P.1935–1936.
398. *Yamafuji K., Toko K., Nitta J., Urahama K.* Reductive perturbation approach to hard – mode instabilities of inverted – type bifurcations// *Progr. Theor. Phys.*—1981.—V.66, №1.—P.143–153.
399. *Yorke J.A., Yorke E.D., Mallet-Paret J.* Lorenz – like chaos in a partial differential equation for a heated fluid loop// *Physica D.*—1987.—V.24, №1–3.—P.279–291.
400. *Yoshimura H.* The solar – cycle period – amplitude relation as evidence of hysteresis of the solar – cycle nonlinear magnetic oscillation and the long – term (55 year) cyclic modulation// *Astrophys. J.*—1979.—V.227, №3.—pt1. —P.1047–1058.
401. *Young L.S.* Dimension, entropy and Lyapunov exponents//*Ergod. Theory and Dyn. Systems.*—1982.—V.2, №1.—P.109–124.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Д1. Белолипецкий А.А., Стронгина Н.Р., Тер-Крикоров А.М. Некоторые вопросы эволюции диссипативных структур с точки зрения теории бифуркаций// Математическое моделирование. Методы описания и исследования сложных систем.—М.: Наука, 1989.—С.7—36.
- Д2. Бланк М.Л. Малые возмущения хаотических динамических систем// УМН.—1989.—Т.144, вып.6.—С.3—27.
- Д3. Боколишвили И.Б., Кащенко С.А., Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Установившиеся режимы в некоторых классах двухкомпонентных систем с малой диффузией.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1989.—№142.—28с.
- Д4. Боколишвили И.Б., Кащенко С.А., Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Локальная динамика некоторых двухкомпонентных систем с малой диффузией.—Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1990.—№47.—33с.
- Д5. Боколишвили И.Б., Малинецкий Г.Г. Об одном классе упрощенных моделей в теории систем «реакция — диффузия»//Мат. моделирование.—1989.—Т.1, вып.67.—С.67—93.
- Д6. Веденов А.А., Ежов А.А., Левченко Е.Б. Архитектурные модели и функции нейронных ансамблей// Итоги науки и техники. Физические и математические модели нейронных сетей. Т.1—М.: Наука, 1990.—С.44—92.
- Д7. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике.—М.: Наука, 1989.—280с.
- Д8. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Тураев Д.В., Шильников Л.П. О классификации самолокализованных состояний электромагнитного поля в нелинейной среде// ДАН СССР.—1989.—Т.309, №4.—С.848—851.

- Д9. *Еленин Г.Г., Калачинская И.С., Соломатин С.В.* Численное исследование конечномерных моделей конвекции Марангонни // Дифференц. уравнения.—1988. —Т.23, №7.—С.1169–1177.
- Д10. *Ершов С.В., Малинецкий Г.Г.* О решении обратной задачи для уравнения Перрона – Фробеннуса // Журн. вычисл. мат. и мат. физ.—1988.—Т.28, №10.—С.1491–1497.
- Д11. *Ершов С.В., Потапов А.Б.* Бифуркации неэрвальных многообразий в модельной задаче.— Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1991.—№8.—30с.
- Д12. *Кащенко С.А.* Локальная динамика двухкомпонентных контрастных структур в окрестности точки бифуркации // ДАН СССР.—1990.—Т.312, №2.—С.345–350.
- Д13. *Крылов В.Ю., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Психология и энергетика.— Препринт/ИПМ АН СССР.—М., 1990.—№41.—32с.
- Д14. *Кук А., Робертс П.* Система двухдискового динамо Риктакта // Странные аттракторы.—М.: Мир, 1981.—С.164–292.
- Д15. *Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* О приближенном исследовании симметричных локализованных структур // ДАН СССР.—1990.—Т.314, №2.— С.327–331.
- Д16. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Геометрия странных аттракторов и определение ляпуновских показателей по временным рядам.—Препринт/ ИПМ АН СССР.—М.,1991.—№13.—31с.
- Д17. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Приймак В.Г.* О возможности описания турбулентных течений вязкой жидкости аттрактором конечной размерности // ДАН СССР.—1991.—Т.316, №5.—С.1101–1106.
- Д18. *Монин А.С.* О природе турбулентности // УФН.—1978.—Т.125, вып.1 —С.97–122.
- Д19. *Петров А.А., Шананин А.А.* Системный анализ экономики: проблема агрегированного описания экономических отношений // Математическое моделирование. Методы описания и исследования сложных систем.—М.: Наука, 1989. —С.121–156.
- Д20. *Приймак В.Г., Рождественский Б.Л.* Вторичные течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе и их статистические свойства // ДАН СССР.—1987.— Т.297, №6.—С.1326–1330
- Д21. Проблемы лазерного термоядерного синтеза.—М.: Атомиздат, 1976.—296с.
- Д22. *Форрестер Дж.* Мировая динамика.—М.: Наука, 1989.—167с.

- Д23. Шильников А.Л. Бифуркации и хаос в модели Мариока – Шимицу II// Методы качественной теории и теории бифуркаций. –Горький: Изд. Горьковского университета, 1989.–С.130–138.
- Д24. Шильников А.Л., Шильников Л.П. О несимметричной модели Лоренца// Нелинейный мир: труды IV Межд. раб. группы по нелинейным и турбулентным процессам в физике: Киев.–1989.–С.130–138.
- Д25. Эйген М., Шустер П. Гиперциклы. Принципы самоорганизации макромолекул.–М.: Мир, 1982.–270с.
- Д26. Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Kulagin N.E., Lerman L.M., Silin V.P. On existence of nontrivial solution for the equation $\Delta u - u + u^3 = 0$ // Physica D.– 1990.–V.44, №1–3.–P.168–177.
- Д27. Cremers J., Hubler A. Construction of differential equation from experimental data// Z. Naturforsch.–1987.–V.41a.–P.797–802.
- Д28. Doering C.R., Gibbon J.D., Holm D.D., Nicolaenko B. Low – dimensional behaviour in the complex Ginzburg – Landau equation// Nonlinearity.–1988.–V1, №2.–P.279–310.
- Д29. Farmer J.D., Sidorowich J.J. Optimal shadowing and noise reduction // Physica D.–1991.–V.47, №1–3.–P.373–392.
- Д30. Grassberger P. An optimized box – assisted algorithm for fractal dimensions// Phys. Lett.–1990.–V.148 A, №1–2.–P.63–68.
- Д31. Kurdyumov S.P. Evolution and self – organization laws in complex systems// International Journal of Modern Physics C.–1990.–V.1, №4.–P.299–327.
- Д32. Matsumoto T., Chua L.A., Komuro M. Birth and death of the double scroll// Physica D.–V.24, №.–P.97–124.
- Д33. Skarda C.A., Freeman W.J. How brains make chaos in order to make sense of the world// Behavioral and Brain Science.–1987.–V.10.–P.161–195.

Научное издание

АХРОМЕЕВА Татьяна Сергеевна
КУРДЮМОВ Сергей Павлович
МАЛИНЕЦКИЙ Георгий Геннадьевич
САМАРСКИЙ Александр Андреевич

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ И ДИФFUЗИОННЫЙ ХАОС

Заведующий редакцией *Е. Ю. Ходан*
Редактор *А. Б. Поганов*
Художник *В. Я. Батищев*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Корректор *В. П. Сорокина*

ИБ № 32876

Подписано в печать с оригинал-макета 06.12.91

Формат 60 × 90/16. Бумага тип. № 2 Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 34. Усл. кр.-отт. 34
Уч.-изд. л. 30,15. Тираж 1500 экз. Заказ № 1157

Издательско-производственное
и книготорговое объединение «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства «Наука»
630077 г.Новосибирск-77, Стаинславского, 25.

CHAOS AND DISSIPATIVE STRUCTURES
IN 'REACTION-DIFFUSION' SYSTEMS.

Akhromeyeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskii G.G.,
Samarskii A.A.

The book is written by the leading Soviet specialists in the field of mathematical physics and synergetics. One of its authors Acad. Samarskii A.A. is the creator of the Soviet largest scientific school in computational and mathematical physics. Scientific results received by this school have acquired worldwide recognition.

The books by Acad. Samarskii have been repeatedly published in many countries. At the present time Acad. Samarskii is the Chairman of the National Committee on Mathematical Modelling.

Another author, Corresponding Member of the USSR Academy of Sciences, Director of Keldysh Institute of Applied Mathematics Kurdyumov S.P. is a recognised authority in synergetics.

The basis of the book is the survey 'Nonstationary Structures and Diffusion-induced chaos in Nonlinear Media' which was published in the journal 'Physics Reports' in 1989. The book describes a new direction in synergetics - that of the theory of nonstationary localised dissipative structures. This is a new type of ordering that occur in the systems with a positive feedback. Much consideration is given to the main mathematical results, new methods of the analysis of the systems under study, and applications to the tasks of chemical kinetics, plasma physics, quantum field theory.

Another theme of the book is the analysis of time-dependent generalized Ginzburg-Landau (TDGL) equation, which is one of the main models of synergetics. For its investigation, in recent years scientists have used methods of invariant-group analysis, the theory of dynamical systems with continuous time, the theory of

one-dimensional and two-dimensional maps, and theory of inertial manifolds.

The book gives a detailed consideration to the hierarchy of simplified models built when analysing TDGL. The proof of equivalence of this equation to some dynamical system (inertial form) is a key result in applied mathematics in recent years. This direction of investigation is being analysed in the book as well.

The book is well illustrated. The rigorous results being discussed in the book are supported by many examples from various sciences.

The book may be interesting for specialists in applied mathematics, for chemists, physicists, biologists. It may also find wide readership among people taking interest in synergetics. The book contains not only the original results achieved by the authors, but also the analysis of the main concepts of nonlinear dynamics, which makes it useful for many post-graduates.