

Н. Т. КУЗОВКОВ  
О. С. САЛЫЧЕВ

# Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация

---

Издательство «Машиностроение»

**Н. Т. КУЗОВКОВ**  
**О. С. САЛЫЧЕВ**

# Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация



МОСКВА  
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
1982

ББК 39.57  
К89  
УДК 351.814

Рецензент д-р техн. наук проф. **В. И. Тумаркин**

**Кузовков Н. Т.** \, Салычев О. С.

**К89** Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация. — М.: Машиностроение, 1982. — 216 с., ил.

В пер.: 80 к.

В книге исследовано влияние неточностей структуры и коэффициентов инерциальной навигационной системы (ИНС) на вырабатываемые данные об объекте, движущемся по поверхности Земли. Показана возможность демпфирования свободных колебаний ИНС внутренними связями без введения скоростной и баллистической ошибок. Сопоставлены по точности платформенная и бесплатформенная ИНС. Дан анализ применения оптимального фильтра Калмана и субоптимальных фильтров ИНС.

Книга предназначена для инженеров, занимающихся инерциальной навигацией и оптимальной фильтрацией.

**К** 3606040000-247 247-82  
038(01)-82

**ББК 39.57**  
**6Т5.1**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Принципы инерциальной навигации впервые были сформулированы более тридцати лет тому назад выдающимся советским ученым Б. В. Булгаковым [5]. Работы в области инерциальных навигационных систем (ИНС) были связаны с разработкой алгоритмов «идеальной работы» ИНС.

Дальнейшее развитие ИНС, а именно увеличение их точности, выдвинуло на первый план теорию ошибок ИНС [1—4].

Следующий этап совершенствования ИНС, начало которого относится к шестидесятым годам, был обусловлен прежде всего успехами в разработке методов статистической динамики. Задача повышения точности ИНС сводилась теперь к задаче статистической оценки и компенсации ошибок, допускаемых ИНС. Сначала оценка ошибок ИНС производилась путем обработки внешней по отношению к ИНС информации при помощи классического фильтра Калмана. Вследствие недостоверности априорной информации о статистических характеристиках дрейфа гироскопов и измерительных шумов значительное внимание стали уделять методам субоптимальной фильтрации.

Современный этап характеризуется применением в ИНС методов адаптивной субоптимальной фильтрации, реализация которых требует минимальной достоверности и полноты априорной информации.

В книге рассмотрены трактовка взаимодействия цепи идеальной работы и замкнутой системы ошибок ИНС (гл. 1); демпфирование ИНС внутренними связями (гл. 2); ограничение ошибки ИНС от дрейфа гироскопов (гл. 3); исследование наблюдаемости ошибок ИНС (гл. 6); оценивание ошибок ИНС при использовании предложенных здесь адаптивных практически нерасходящихся алгоритмов субоптимальной фильтрации, один из кото-

рых (алгоритм  $k$ -й модификации) вообще не требует каких-либо априорных данных о гауссовых входных и измерительных шумах (гл. 9); включение оптимального или субоптимального фильтра в схему ИНС (гл. 10); алгоритм фильтрации, дающий состоятельную оценку ошибок ИНС при любом сколь угодно большом значении угла ориентации  $\psi$  (приложение 1); сравнительный анализ корректирующих звеньев в цепях разгрузки гироскопов (приложение 2).

Рассматриваются лишь ИНС, предназначенные для объектов, движущихся вблизи поверхности Земли.

При системном анализе и компенсации ошибок ИНС были использованы методы теории инвариантности, получившие наиболее глубокое развитие в работах академика Б. Н. Петрова (принцип двухканальности в теории инвариантных систем управления [16, 17]).

Книга представляет собой последовательное изложение современной теории ИНС, так что наиболее существенные достижения в области инерциальной навигации, отраженные в отечественной и зарубежной литературе, в ней учтены.

Предисловие, гл. 1—6 и приложение 2 написаны Н. Т. Кузовковым (глава 5 — совместно с О. С. Салычевым), главы 7—10 — О. С. Салычевым, приложение 1 — О. С. Салычевым и А. В. Быковским.

## ГЛАВА 1

# ПЛАТФОРМЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Инерциальная навигационная система (ИНС), устанавливаемая на движущемся вблизи поверхности Земли объекте, предназначена для автоматического определения местоположения (широты и долготы), скорости  $V$  относительно Земли и угловой ориентации (курс, тангаж, крен) объекта. В зависимости от того, входит или не входит в состав ИНС гиростабилизированная платформа (ГСП), все системы инерциальной навигации делятся на платформенные (ПИНС) и бесплатформенные (БИНС). Несмотря на существенные схемные различия теория этих двух типов ИНС в общем одинакова. Прежде чем перейти к этой теории, рассмотрим принцип действия ИНС, предназначенной для объекта, движущегося по поверхности Земли.

### 1.1. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Считаем, что все элементы платформенной ИНС работают идеально точно, а Земля является идеальным шаром. В дальнейшем рассматривается только северный канал ИНС. Для простоты будем считать, что ИНС представляет собой несущую линейный акселерометр гироплатформу, ось  $Oy$  которой постоянно направлена на север (рис. 1.1). Кориолисово ускорение, порожденное вращением Земли и движением объекта, исключено, т. е. поступающий от акселерометра сигнал может зависеть только от ускорения объекта  $\dot{V}_0$  относительно Земли и от проекции вектора ускорения силы тяжести  $g$  на ось чувствительности акселерометра. В дальнейшем полагаем, что вектор  $\dot{V}_0$  перпендикулярен вектору  $g$ .

В состав ИНС входит интегратор, производящий интегрирование сигнала акселерометра (первый интегратор). С соответствующим усилением выходной сигнал этого интегратора подается на моментный датчик гироскопа и вызывает прецессию платформы относительно горизонтальной оси  $Ox$ , перпендикулярной скорости  $V_0$  движения объекта.

Идея, положенная в основу ИНС, заключается в следующем. Пусть в начальный момент времени  $t=0$  платформа горизонталь-



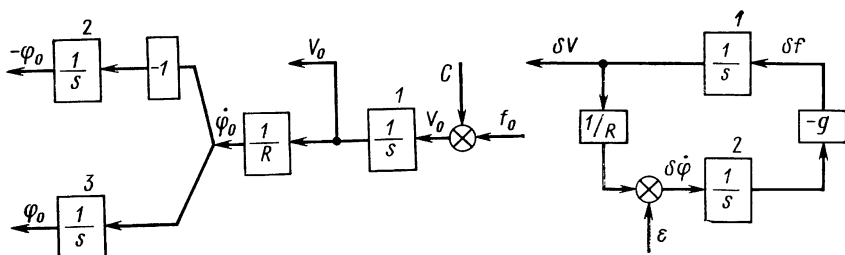


Рис. 1.2. Структурная схема идеального режима работы ИНС:

1—первый интегратор; 2—гироплатформа; 3—второй интегратор;  $f_0$ —выходной сигнал акселерометра;  $C$  — компенсация кориолисова ускорения;  $R$  — радиус Земли;  $\phi_0$  — приращение широты объекта от местоположения, соответствующего моменту  $t=0$

Рис. 1.3. Структурная схема ошибок ИНС:

1—интегратор; 2—гироплатформа;  $\varepsilon$ —скорость дрейфа гироскопов

Нарушение режима идеальной работы ИНС (например, дрейфом гироскопов) приводит к возникновению в структурной схеме обратной связи. Действительно, это нарушение обусловит отклонение угла поворота платформы от идеального значения  $\phi_0$  и, как следствие этого, отклонение  $\delta\phi$  платформы от местной вертикали. При этом возникает проекция  $g\delta\phi$  вектора ускорения силы тяжести  $g$  на ось чувствительности акселерометра, что на структурной схеме отображается появлением связи от  $\phi$  к  $f$ , замыкающей систему (рис. 1.3) <sup>1</sup>.

Следует подчеркнуть, что замкнутая структурная схема получается лишь в отношении ошибок ИНС, т. е. в отношении отклонений переменных  $\delta f$ ,  $\delta V$ ,  $\delta\phi$ ,  $\delta\phi$  от их значений  $f_0$ ,  $V_0$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi_0$  в идеальном режиме работы ИНС.

Идея, лежащая в основе ИНС, и только что изложенное позволяют заключить, что всякий раз, когда на показания ИНС влияет ускорение силы тяжести  $g$ , это влияние обуславливает ошибку ИНС. Однако не следует делать вывода, что вектор ускорения силы тяжести оказывает вредное влияние на функционирование ИНС. Напротив, как это будет показано далее (разд. 1.4), в алгоритме ИНС вектор  $g$  играет чрезвычайно полезную роль, ибо только благодаря этому вектору ошибки ИНС остаются ограниченными.

Рассмотренная ИНС в любой момент времени дает информацию о скорости  $V$  объекта относительно Земли, а положением гироскопов реализует местную вертикаль, что позволяет измерить угол тангажа объекта. Другие каналы ИНС обеспечивают возможность измерения курса и крена объекта. Что касается местоположения объекта на земной поверхности (широта и долгота), то оно может быть определено различными способами по данным о

<sup>1</sup> Обоснование структурной схемы ошибок и объяснение физического смысла величины  $f$  (показание акселерометра) дано в гл. 5.



скорости  $V$  объекта и о геометрической форме Земли. Как уже отмечалось, в рассмотренной здесь ИНС широта определяется с помощью второго интегратора (см. рис. 1.2).

## 1.2. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИОННАЯ СИСТЕМА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛЬЮ ЗЕМЛИ

Схема ИНС существенно зависит от математической модели фигуры Земли (геоида), использованной при разработке этой ИНС. В качестве такой модели часто принимают референц-эллипсоид, дающий весьма хорошую аппроксимацию геоида [3]. Референц-эллипсоид получается вращением эллипса вокруг его малой оси. Точки пересечения этой оси с поверхностью референц-эллипсоида соответствуют северному и южному полюсам. Сжатие референц-эллипсоида характеризуется величиной

$$e = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{297}, \quad (1.1)$$

где  $a$  и  $b$  — соответственно большая и малая полуоси.

Нормаль к геоиду в любой его точке дается направлением отвесной линии и называется астрономической вертикалью. Поскольку при синтезе ИНС геоид заменяется референц-эллипсоидом, в дальнейшем под астрономической вертикалью понимается нормаль к поверхности референц-эллипсоида (рис. 1.4). Угол  $\varphi$ , составленный астрономической вертикалью с экваториальной плоскостью референц-эллипсоида, называется географической широтой  $\varphi$  точки эллипсоида, через которую проведена астрономическая вертикаль. Астрономическая вертикаль в общем случае не проходит через центр  $O$  эллипсоидальной Земли.

Помимо астрономической существует понятие геоцентрической вертикали, под которой понимают прямую, проведенную из центра Земли  $O$  в рассматриваемую точку референц-эллипсоида. Угол  $\varphi_r$ , составленный геоцентрической вертикалью с экваториальной плоскостью, называется геоцентрической широтой. Разность  $\delta = \varphi - \varphi_r$  называется отклонением вертикали.

Направление положительного отсчета  $\delta$  показано на рис. 1.4. Отклонение вертикали с хорошим приближением выражается формулой [3]

$$\delta = e \sin 2\varphi, \quad (1.2)$$

где  $e$  — сжатие референц-эллипсоида, определяемое формулой (1.1).

Линии на поверхности референц-эллипсоида с одинаковым значением географической широты (они представляют собой окружности обра-

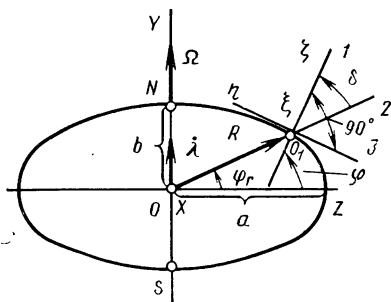


Рис. 1.4. Референц-эллипсоид:

1 — астрономическая вертикаль; 2 — геоцентрическая вертикаль; 3 — плоскость местного горизонта;  $\varphi$  — географическая широта;  $\lambda$  — географическая долгота;  $\varphi_r$  — геоцентрическая широта;  $\delta$  — отклонение вертикали

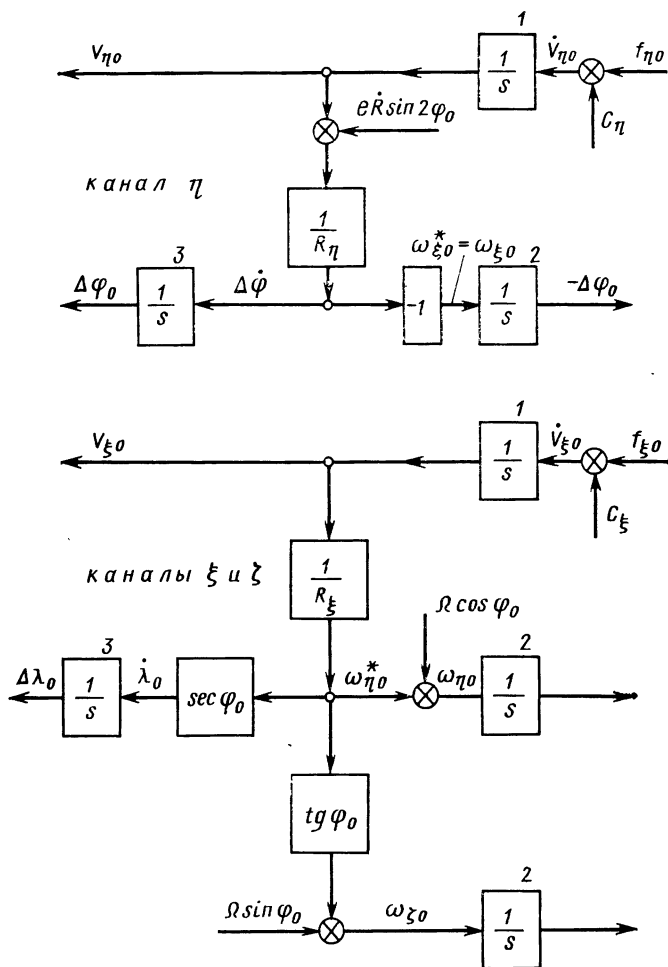


Рис. 1.5. ИНС с математической моделью Земли в виде эллипсоида:

1—первые интеграторы; 2—гироплатформа; 3—вторые интеграторы;  $f_{\xi 0}, f_{\eta 0}$ —выходные сигналы акселерометров;  $C_{\xi}, C_{\eta}$ —сигналы компенсации кориолисова ускорения;  $\Omega$ —угловая скорость вращения Земли;  $\Delta\varphi$ —приращение широты по отношению к точке начала движения объекта;  $\varphi_0$ —данные о широте, вырабатываемые ИНС

зуют параллели, а линии на пересечении его поверхности с плоскостями, проходящими через малую ось, — меридианы.

Введем в рассмотрение так называемый географический трехгранник  $O_1\xi\eta\zeta$ . Он представляет собой правую прямоугольную систему координат с началом на поверхности референц-эллипсоида (в центре тяжести объекта), с осью  $O_1\zeta$ , направленной по астрономической вертикали вверх, и с осями  $O_1\xi$ ,  $O_1\eta$  в плоскости местного горизонта, направленными соответственно на восток и север. Этот

трехгранник может быть реализован на борту объекта с помощью трехосной гиросtabilизированной платформы.

Будем считать, что на ГСП установлены два акселерометра с осями чувствительности соответственно в направлениях  $O_1\xi$  и  $O_1\eta$ . Как и раньше, считаем, что в показаниях акселерометров кориолисовы ускорения компенсированы.

Полная схема идеальной работы ИНС показана на рис. 1.5. Схемы каналов  $\xi$ ,  $\eta$  этой ИНС аналогичны схеме, изображенной на рис. 1.2. Отличие заключается в том, что вместо радиуса  $R$  шарообразной Земли в каналах  $\eta$  и  $\xi$  фигурируют соответственно величины

$$R_\eta = R(1 - 2e \cos 2\varphi); \quad R_\xi = R(1 + 2e \sin^2 \varphi), \quad (1.3)$$

где  $R$  — расстояние от центра референц-эллипсоида до точки, в которой находится объект (см. рис. 1.4).

Кроме того, на вход звена  $1/R_\eta$ , помимо сигнала от интегратора, подается специально формируемый сигнал  $e\dot{R} \sin 2\varphi_0$ .

Обоснование схемы на рис. 1.5 заключается в следующем. Свяжем с Землей прямоугольную систему координат  $OXYZ$ , называемую в дальнейшем навигационной. Начало навигационной системы совпадает с центром  $O$  Земли, ось  $OY$  направлена по оси вращения Земли в сторону северного полюса,  $OX$  и  $OZ$  лежат в плоскости экватора, причем ось  $OZ$  направлена в сторону гринвичского меридиана, а ось  $OX$  имеет направление, при котором образуется правая система координат  $OXYZ$  (см. рис. 1.4). Проекция скорости  $\dot{R}$  конца вектора  $R$  относительно навигационной системы на оси  $O_1\xi$ ,  $O_1\eta$  географического трехгранника представляют восточную  $V_\xi$  и северную  $V_\eta$  составляющие скорости объекта относительно Земли.

Пусть  $\omega_\xi^*$ ,  $\omega_\eta^*$  и  $\omega_z^*$  — проекции угловой скорости географического трехгранника относительно навигационной системы на оси этого трехгранника. Проекция вектора  $R$  на оси  $O_1\xi$ ,  $O_1\eta$ ,  $O_1z$  суть  $O$ ,  $-R\delta$ ,  $R$ . Представляя вектор  $R$  как сумму локальной (относительной системы  $O_1\xi\eta z$ ) и переносной (вместе с системой  $O_1\xi\eta z$ ) скоростей, получим (см. разд. 4.2)

$$\begin{bmatrix} V_\xi \\ V_\eta \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{R}\delta - R\dot{\delta} \\ \dot{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^* & \omega_\eta^* \\ \omega_z^* & 0 & -\omega_\xi^* \\ -\omega_\eta^* & \omega_\xi^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -R\delta \\ R \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание выражение (1.2) и учитывая, что (см. рис. 1.4)

$$\omega_\xi^* = -\dot{\varphi}; \quad \omega_\eta^* = \dot{\lambda} \cos \varphi; \quad \omega_z^* = \dot{\lambda} \sin \varphi, \quad (1.4)$$

находим  $V_\xi = R\dot{\lambda} e \sin \varphi \sin 2\varphi + R\dot{\lambda} \cos \varphi = \omega_\eta^* R(1 + 2e \sin^2 \varphi);$

$$V_\eta = -R\dot{e} \sin 2\varphi - 2R\dot{\varphi} e \cos 2\varphi + R\dot{\varphi} = -\omega_\xi^* R(1 - 2e \cos 2\varphi) -$$

$$-\dot{R}e \sin 2\varphi;$$

$$V_{\zeta} = \dot{R} + eR\dot{\varphi} \sin 2\varphi = \dot{R} - eR\omega_{\xi}^* \sin 2\varphi$$

или по введении обозначений (1.3)

$$V_{\xi} = \omega_{\eta}^* R_{\xi}; \quad (1.5)$$

$$V_{\eta} = -\omega_{\xi}^* R_{\eta} - e\dot{R} \sin 2\varphi; \quad (1.6)$$

$$V_{\zeta} = \dot{R} - eR\omega_{\xi}^* \sin 2\varphi. \quad (1.7)$$

Структурная схема идеальной работы канала  $\eta$  построена согласно уравнению (1.6). Структурная схема каналов  $\xi$  и  $\zeta$  получается из уравнения (1.5) при учете соотношения

$$\dot{\lambda} = \omega_{\eta}^* \sec \varphi \quad (1.8)$$

и того обстоятельства, что для обеспечения горизонтальности и постоянной ориентации вдоль меридиана необходимо создавать следующие скорости прецессии гироскопов относительно осей  $O_1\eta$  и  $O_1\zeta$ :

$$\begin{aligned} \omega_{\eta} &= \omega_{\eta}^* + \Omega \cos \varphi; \\ \omega_{\zeta} &= \omega_{\zeta}^* + \Omega \sin \varphi = \omega_{\eta}^* \operatorname{tg} \varphi + \Omega \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $\Omega \cos \varphi$ ,  $\Omega \sin \varphi$  — соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие угловой скорости вращения Земли.

Кроме описанной возможны другие схемы ИНС, учитывающие эллипсоидальность Земли. Рассмотрим ИНС со свободной в азимуте гироскопом. Схема этой ИНС отличается от предыдущей схемы тем, что ее механическая часть упрощена за счет некоторого усложнения алгоритма, реализуемого на ЦВМ. А именно, цепь управления трехосной гироскопомой вокруг ее вертикальной оси (усилительная цепь и моментный датчик) отсутствует, так что абсолютная угловая скорость  $\omega_{\zeta}^*$  платформы вокруг указанной оси равна нулю. Поскольку цепи, обеспечивающие горизонтальность платформы, сохранены, ось  $O_1\zeta'$  платформы и ось  $O_1\zeta$  географического трехгранника совпадают, а между соответственными горизонтальными осями (например, между  $O_1\xi'$  и  $O_1\xi$ ) возникает угол  $\chi$  (рис. 1.6). Этот угол можно найти из соотношения

$$\omega_{\zeta'} = \omega_{\zeta} + \dot{\chi} = 0. \quad (1.10)$$

С платформой связаны два акселерометра, оси чувствительности которых совпадают с осями  $O_1\xi'$ ,  $O_1\eta'$  платформы.

В принципиальном отношении данная ИНС решает навигационную задачу так же, как и предыдущая. С использованием вычисляемого по уравнению (1.10) угла  $\chi$  показания акселерометров  $f_{\xi'0}$ ,  $f_{\eta'0}$  пересчитываются на оси  $O_1\xi$ ,  $O_1\eta$  географического трехгранника:

$$\begin{aligned} f_{\xi 0} &= f_{\xi'0} \cos \chi_0 - f_{\eta'0} \sin \chi_0; \\ f_{\eta 0} &= f_{\xi'0} \sin \chi_0 + f_{\eta'0} \cos \chi_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

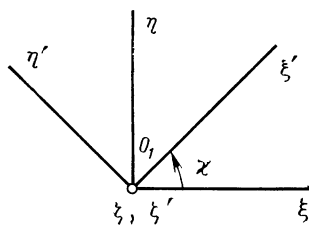


Рис. 1.6. Географический трехгранник  $O_1\xi\eta\zeta$  и трехгранник  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ , связанный с платформой

Цепи, по сигналам (1.11) вычисляющие  $V_{\xi 0}$ ,  $V_{\eta 0}$ ,  $\Delta\varphi_0$ ,  $\Delta\lambda_0$ ,  $\omega_{\xi 0}$ ,  $\omega_{\eta 0}$ ,  $\omega_{\zeta 0}$ , являются повторением соответственных цепей схемы, изображенной на рис. 1.5. Угловые скорости  $\omega_{\xi 0}$ ,  $\omega_{\eta 0}$  географического трехгранника пересчитываются на оси  $O_1\xi'$ ,  $O_1\eta'$  гиросплатформы, и полученные сигналы

$$\omega_{\xi'0} = \omega_{\xi 0} \cos \chi_0 + \omega_{\eta 0} \sin \chi_0;$$

$$\omega_{\eta'0} = -\omega_{\xi 0} \sin \chi_0 + \omega_{\eta 0} \cos \chi_0 \quad (1.12)$$

подаются на моментные датчики гиросплатформы.

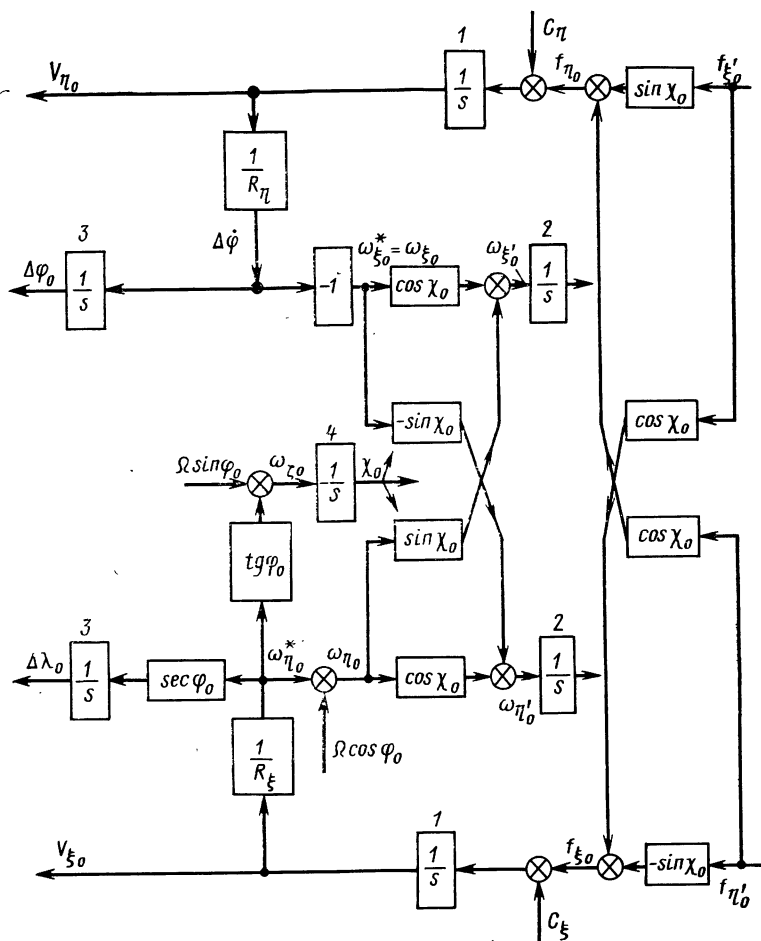


Рис. 1.7. ИНС со свободной в азимуте платформой (эллипсоидная Земля):

1—первые интеграторы; 2—гиросплатформа; 3—вторые интеграторы; 4—азимутальный интегратор;  $f_{\xi'0}$ ,  $f_{\eta'0}$ —выходные сигналы акселерометров

Структурная схема идеальной работы ИНС со свободной в азимуте гироскопической платформой, составленная при учете уравнений (1.11), (1.12) и рис. 1.5, показана на рис. 1.7. Как и схема идеальной работы любой другой ИНС, эта схема является разомкнутой. В схеме на рис. 1.7 сигнал  $e \dot{R} \sin 2\varphi_0$  вследствие малости опущен.

### 1.3. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИОННАЯ СИСТЕМА СО СФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛЮ ЗЕМЛИ

Если при синтезе ИНС Землю принимать как шар, то структурные схемы идеальной работы получаются в том же виде, что и представленные на рис. 1.5 и 1.7. Отличие (и в этом состоит упрощение схемы ИНС) заключается в том, что вместо величин  $R_\xi$ ,  $R_\eta$ , вычисляемых по формулам (1.3) (в этих формулах  $R$  — расстояние от центра эллипсоидальной Земли до точки текущего местоположения объекта), теперь фигурирует константа  $R$ , равная радиусу Земли. Возникает вопрос, появятся ли ошибки ИНС, вызванные переходом в схеме ИНС от эллипсоидальной Земли к сферической Земле.

Рассмотрим сначала схему определения географической широты ИНС со сферической моделью Земли. В качестве схемы идеальной работы этой ИНС примем схему, показанную на рис. 1.5 (при замене  $R_\eta$ ,  $R_\xi$  радиусом Земли  $R$ ). Радиусом Земли  $R$  считаем, например, радиус шара, равновеликого геоиду.

Пусть объект движется по эллипсоидальной Земле вдоль меридиана. Поскольку гироскопическая платформа линейна, можно влияние действующих на нее сил исследовать по отдельности. Если учитывать только действие негравитационных сил (инерционные силы, возникающие при движении объекта), то при идеальной работе ИНС

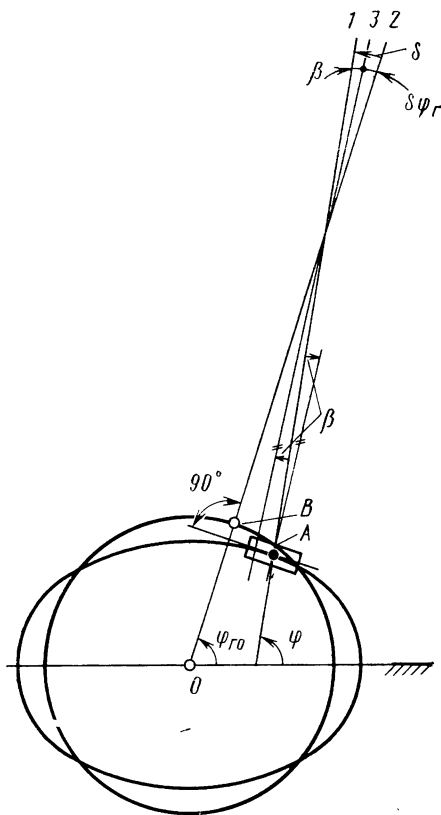


Рис. 1.8. Гироскопическая платформа ИНС со сферической моделью Земли на референц-эллипсоиде:

$A$ —реальное положение объекта и платформы на поверхности референц-эллипсоида;  $B$ —фиктивное положение объекта на поверхности сферы; 1—направление астрономической вертикали в точке  $A$  реального местоположения объекта на референц-эллипсоиде; 2—направление вертикальной оси гироскопической платформы, если учитывается лишь действие негравитационных сил; 3—действительное направление вертикальной оси гироскопической платформы;  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\delta\varphi_r$ —положительные углы отклонения

плоскость гиросплатформы в любой момент времени перпендикулярна радиусу сферической модели Земли, так что в точке  $A$  действительного положения объекта на референц-эллипсоиде гиросплатформа будет отклонена от истинной (астрономической) вертикали на некоторый угол  $\delta$  (рис. 1.8). Угол прецессии (угол поворота платформы по отношению к неподвижному в инерциальном пространстве направлению) будет  $\varphi_0$ .

При возникновении угла отклонения платформы  $\delta$  от астрономической вертикали ускорение силы тяжести  $g$  вызовет сигнал акселерометра и, следовательно, прецессию гиросплатформы. Эта прецессия будет происходить в сторону уменьшения отклонения платформы от вертикали, т. е. будет создавать приращение угла прецессии  $\delta\varphi_r$ , показанное на рис. 1.8. Истинное отклонение  $\beta$  платформы от вертикали, как это видно из рис. 1.8,

$$\beta = \delta - \delta\varphi_r. \quad (1.13)$$

Согласно обоснованной ранее концепции (см. разд. 1.1) ускорение силы тяжести  $g$  проявляет себя лишь в отношении ошибок ИНС. Поэтому отклонение вертикали  $\delta$  [отклонение  $\delta$  не следует путать с отклонением (1.2)], благодаря которому проявляется действие на ИНС вектора  $g$ , следует относить к структурной схеме ошибок ИНС.

С учетом сказанного в качестве структурной схемы ИНС со сферической моделью Земли можно предложить схему, представленную на рис. 1.9. На этой схеме изображены как цепь идеальной работы (переменные идеального режима работы, как и раньше, отмечены индексом нуль), так и замкнутая система ошибок. Характерная особенность данной схемы — это наличие в соответствии с уравнением (1.13) связи разомкнутой цепи идеальной работы с замкнутой системой ошибок. Связь выражается в том, что отклонение вертикали  $\delta$ , возникающее, как это проиллюстрировано на рис. 1.8, при идеальной работе ИНС, выступает в роли входного сигнала замкнутой системы ошибок.

Предлагаемая здесь трактовка взаимодействия цепи идеальной работы с замкнутой системой ошибок (см. рис. 1.9) оказалась для дальнейших исследований чрезвычайно плодотворной. Она, в частности, позволила вскрыть ряд ранее неизвестных свойств ИНС (см. разд. 1.4 и гл. 2) и исследовать влияние на точность ИНС дрейфа гиросплатформы (см. гл. 3).

Фигурирующие на структурной схеме переменные следует рассматривать как изображения по Лапласу. Нижний индекс означает, что в схеме ИНС принята сферическая модель Земли и, следовательно, ИНС вырабатывает геоцентрическую широту  $\varphi_r$ . Однако, как это будет показано далее, выработанное значение  $\varphi_r$  с большой точностью совпадает с географической широтой  $\varphi$  текущего местоположения объекта на эллипсоидальной Земле.

Изображенную на рис. 1.9 схему можно получить не только из концептуальных соображений, как это сделано ранее, но и чисто формальным путем. На рис. 1.10 представлена структурная схема

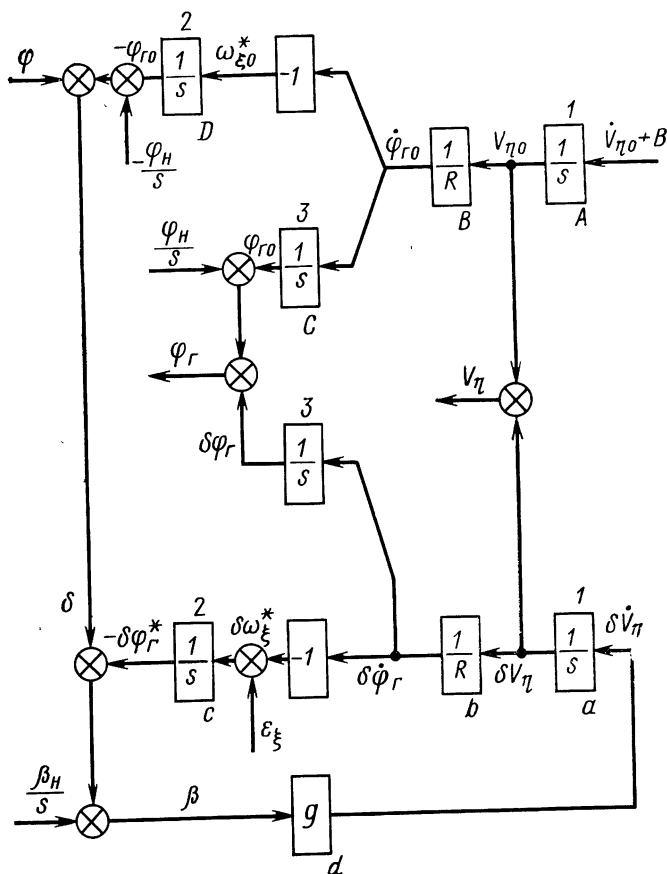


Рис. 1.9. Структурная схема ИНС со сферической моделью Земли для объекта, движущегося по эллипсоидной Земле:

1—первый интегратор; 2—гироплатформа; 3—второй интегратор;  $\varphi$ —географическая широта текущего местоположения объекта;  $\varphi_{Г0}$ —широта на выходе цепи «идеальной работы»;  $\varphi_{Г}$ —широта, реально вырабатываемая ИНС;  $\varphi_{Н}$ —широта начального местоположения объекта;  $\beta$ —отклонение платформы от местного горизонта;  $\varepsilon$ —дрейф гироскопов;  $\beta_{Н}$ —величина начальной «невывасти» гироскопов;  $\delta V_{\eta}$ ,  $\delta \varphi_{Г}$ ,  $\delta \omega_{\xi}$ —ошибки ИНС

гироскопов при разделении ее цепи управления на разомкнутую цепь «идеальной работы» и замкнутую цепь ошибок. Чтобы получить величину  $\varphi_{Г}$  в виде физически измеряемого сигнала, эту величину формируют в ИНС по той же схеме, что и показанная на рис. 1.10, но при замене гироскопов 2 вторым интегратором (на рис. 1.9 — интегратор 3). Принимая это во внимание и учитывая, что дрейф  $\varepsilon_{\xi}$  свойствен только гироскопам, можно показанную на рис. 1.10 схему преобразовать в схему, изображенную на рис. 1.9.

Найдем связь между широтой  $\varphi_{Г}$ , выдаваемой ИНС при реальной работе, и значением  $\varphi$  географической широты действительно местоположения объекта на эллипсоидальной Земле. Передаточ-



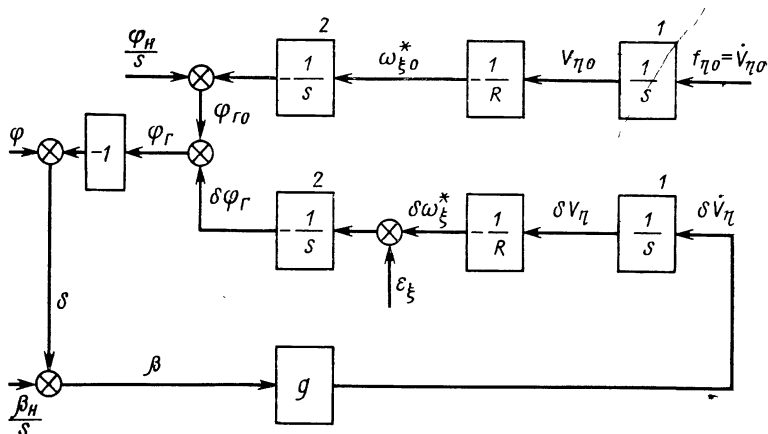


Рис.1.10. Схема управления гиросплатформой:

1—первый интегратор; 2—гиросплатформа;  $\omega_{\xi}^*$ —угловая скорость платформы относительно Земли

ная функция  $\delta\varphi_{\Gamma}/\delta$ , найденная по структурной схеме (см. рис. 1.9). имеет вид

$$\frac{\delta\varphi_{\Gamma}}{\delta} = \frac{g}{g + Rs^2}.$$

Производя деление числителя на знаменатель при записи полиномов по возрастающим степеням  $s$ , представляем эту функцию в виде

$$\frac{\delta\varphi_{\Gamma}}{\delta} = C_0 + C_2s^2 + C_4s^4 + \dots \quad (1.14)$$

$$\text{Здесь} \quad C_0 = 1, \quad C_2 = -\frac{R}{g}, \quad C_4 = \frac{R^2}{g^2} \quad (1.15)$$

— системные коэффициенты.

Вынужденное движение по переменной  $\delta\varphi_{\Gamma}$  выражается через входной сигнал  $\delta$  и системные коэффициенты уравнением

$$\delta\varphi_{\Gamma} = C_0\delta + C_2\ddot{\delta} + C_4\delta^{(IV)} + \dots \quad (1.16)$$

Если предположить, что

$$\ddot{\delta} = \delta^{(IV)} = \dots = 0, \quad (1.17)$$

то при учете уравнений  $\delta = \varphi - \varphi_{\Gamma 0}$  и  $\varphi_{\Gamma} = \varphi_{\Gamma 0} + \delta\varphi_{\Gamma}$  получим

$$\varphi_{\Gamma} = \varphi. \quad (1.18)$$

Следовательно, в предположении (1.17) широта, вырабатываемая ИНС со сферической моделью Земли, с точностью до свободных колебаний совпадает с географической широтой действитель-

ного местоположения объекта на эллипсоидальной Земле. Правильные данные о широте  $\varphi$  получаются в результате добавления к показаниям цепи «идеальной работы»  $A, B, C$  позиционной составляющей  $C_0\delta$  ( $C_0=1$ ) ошибки  $\delta\varphi_T$ , так что эта составляющая ошибки выполняет в ИНС полезную роль.

Однако предположение (1.17) в общем случае не выполняется, что приводит к ошибкам в вырабатываемых ИНС данных. Это предположение, например, не выполняется при замене в схеме ИНС эллипсоида на сферу, потому что при растягивании дуги, проходимой объектом на эллипсоиде, по поверхности сферы отклонение вертикали  $\delta$  будет изменяться во времени. По-видимому, при небольших скоростях объекта производная  $\dot{\delta}$  невелика, так что, отвечая на поставленный вначале вопрос, можно сделать вывод о допустимости замены эллипсоида шаром, если только радиус шара будет выбран из условия минимизации  $\dot{\delta}$ .

#### **1.4. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИОННАЯ СИСТЕМА С НЕТОЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПАРАМЕТРОВ И НАРУШЕНИЯМИ СТРУКТУРЫ**

Уточним понятие цепи «идеальной работы ИНС». Под этой цепью подразумеваем теперь любую цепь с первым интегратором и гиropлатформой (или совпадающую с ней цепь с первым и вторым интеграторами), в которой формирование сигналов на моментные датчики гиropлатформы происходит без участия ускорения силы тяжести  $g$ . В схеме на рис. 1.9 режиму «идеальной работы» соответствует цепь, состоящая из звеньев  $A, B, C, D$ .

Такое определение цепи «идеальной работы» не предполагает получения от этой цепи правильных данных о местоположении объекта. Как уже отмечалось, правильные данные получаются прибавлением к показаниям цепи «идеальной работы» позиционной составляющей  $\delta$  в выходном сигнале  $\delta\varphi_T$  замкнутой системы  $a, b, c, d$ , входным сигналом которой служит отклонение вертикали  $\delta$ .

Отклонение вертикали  $\delta$  возникает всякий раз, когда «цепь идеальной работы» отличается от действительно идеальной структуры, т. е. структуры, при которой в любой момент времени  $\delta=0$ . Примером действительно идеальной структуры может служить система, показанная на рис. 1.2. В этой системе отклонение вертикали  $\delta$  не возникает, и замкнутая система  $a, b, c, d$  в отношении ошибок бездействует.

Отличие цепи идеальной работы от действительно идеальной структуры может порождаться различными причинами. Одна из причин была рассмотрена в предыдущем разделе и состоит в том, что реальная Земля эллипсоидальна, а математическая модель Земли, реализованная в ИНС, сферическая.

В дальнейшем при исследовании причин возникновения отклонения вертикали  $\delta$  Землю считаем шаром. Пусть в схеме ИНС принят радиус  $R+\Delta R$ , на  $\Delta R$  ~~бóльший~~ действительного радиуса Зем-

ли. Тогда при постоянном ускорении объекта  $\dot{V}_{\eta_0} = \text{const}$  широта действительного местоположения объекта

$$\varphi(s) = \frac{\dot{V}_{\eta_0}}{R s^2},$$

а широта на выходе цепи идеальной работы ИНС

$$\varphi_{\text{г0}}(s) = \frac{\dot{V}_{\eta_0}}{(R + \Delta R) s^2}.$$

В первом приближении

$$\delta(t) = \varphi(t) - \varphi_{\text{г0}}(t) \approx \frac{\Delta R \dot{V}_{\eta_0} t^2}{2R^2} \quad (1.19)$$

и согласно уравнению (1.16)

$$\delta\varphi_{\text{г}}(t) = \delta(t) - \frac{\Delta R \dot{V}_{\eta_0}}{Rg}.$$

В этом случае показание ИНС  $\varphi_{\text{г}}$  на  $\frac{\Delta R \dot{V}_{\eta_0}}{Rg}$  меньше, чем географическая широта  $\varphi$  действительного местоположения объекта. Следовательно, неточность задания радиуса Земли приводит к появлению в показаниях ИНС баллистической ошибки:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta R \dot{V}_{\eta_0}}{Rg}. \quad (1.20)$$

То же самое можно сказать и в отношении неточности задания масштабного коэффициента первого интегратора, поскольку этот коэффициент можно объединить с коэффициентом  $1/R$ .

Что касается масштабного коэффициента  $K_2$  второго интегратора и коэффициента усиления  $K_{\text{п}}$  цепи из моментного датчика и гиросплатформы, то эти коэффициенты должны быть одинаковы и равны единице. Если, однако, при сохранении равенства  $K_2 = K_{\text{п}}$ , эти коэффициенты отличаются от единицы на  $\Delta K_{\text{п}}$ , то при  $\dot{V}_{\eta_0} = \text{const}$  в показаниях ИНС возникает баллистическая ошибка

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta K_{\text{п}}}{g} \dot{V}_{\eta_0}.$$

Иначе обстоит дело, если в коэффициентах  $K_2$  и  $K_{\text{п}}$  имеется разказаниях ИНС при  $\dot{V}_{\eta_0} = \text{const}$  будет растущая во времени ошибка

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta K_2 \dot{V}_{\eta_0}}{2R} t^2.$$

Это объясняется тем, что ошибка  $\Delta K_2$  не приводит к отклонению вертикали  $\delta$ , воспринимаемому гиросплатформой.

Рассмотрим влияние на точность ИНС постоянного смещения  $B'$  в показаниях акселерометра. Это смещение вызовет отклонение вертикали

$$\delta = -Bt^2/2R,$$

и, следовательно, баллистическую ошибку в вырабатываемых ИНС данных о географической широте, равную

$$\Delta\varphi = B/g. \quad (1.21)$$

Обратимся теперь к случаю, когда в цепи «идеальной работы» компенсация кориолисова ускорения не производится.

Пусть кориолисово ускорение постоянно. Его можно уподобить тогда постоянному смещению акселерометра. Следовательно, в случае постоянства некомпенсированное кориолисово ускорение вызывает в показаниях ИНС только баллистическую ошибку, аналогичную ошибке (1.21). При переменности кориолисова ускорения помимо баллистической в показаниях ИНС  $\varphi_r$  будут дополнительные ошибки, соответствующие членам  $C_4\delta^{(IV)}$ ,  $C_6\delta^{(VI)}$ ,... уравнения (1.16). Однако, как и баллистическая ошибка, эти дополнительные ошибки ограничены.

Ограниченность ошибок ИНС, вызываемых неточностью параметров ИНС, смещением акселерометров и некомпенсированными кориолисовыми ускорениями, обусловлена исключительно лишь действием на акселерометры ускорения силы тяжести  $g$  при отклонении платформы от местного горизонта. При отсутствии указанного действия (например, в межпланетном пространстве) ошибки ИНС, вызванные аналогичными причинами (неточность масштабных коэффициентов, смещение акселерометров), возрастали бы безгранично. По этой же причине бесконечно возрастали бы ошибки вертикального канала ИНС (канал  $\zeta$ ), если бы его осуществить.<sup>1</sup> На практике, однако, информацию о вертикальных перемещениях объекта обычно получают от высотомера.

Как бы ни изменялось отклонение вертикали  $\delta$ , входящая в ИНС гироскопическая платформа остается около местной вертикали (астрономической вертикали текущего местоположения объекта). Это вытекает из рассмотрения показанной на рис. 1.9 замкнутой системы: в отношении внешнего сигнала  $\delta$  регулирование по углу  $\beta$  отклонения гироскопической платформы от местного горизонта осуществляется с астатизмом второго порядка. Поэтому установившееся отклонение по углу  $\beta$  может появиться лишь при  $\delta = \text{const}$ , т. е. при  $\dot{V}_{\eta_0} = \text{const}$ .

Если обратиться к вырабатываемым ИНС данным о скорости объекта относительно Земли, то нетрудно видеть, что при неточностях цепи «идеальной работы» (отклонение масштабных коэффициентов, некомпенсированное кориолисово ускорение и др.) эти данные будут отклоняться от данных в случае точной цепи идеальной работы (точные масштабные коэффициенты, кориолисово

<sup>1</sup> Беспредельный рост ошибок вертикального канала ИНС часто называют неустойчивостью этого канала.

ускорение полностью компенсировано) на величину, определяемую неточностями масштабных коэффициентов и производными кориолисова ускорения (если в показаниях акселерометров оно не компенсировано). Действительно, как видно из структурной схемы, изображенной на рис. 1.9, вынужденное движение по переменной  $\delta V_\eta$ , обусловленное отклонением вертикали  $\delta$ , определяется выражением

$$\delta V_\eta = R\dot{\delta} - \frac{R^2}{g}\ddot{\delta} + \frac{R^3}{g^2}\delta^{(3)} - \dots \quad (1.22)$$

Если кориолисово ускорение  $Q$  постоянно и в показаниях акселерометра не компенсировано, то

$$\delta = -\frac{Qt^2}{2R} \quad (1.23)$$

и согласно уравнению (1.22)

$$\delta V_\eta = -Qt. \quad (1.24)$$

При реальном режиме работы физически измеряемый сигнал на выходе первого интегратора ИНС есть

$$V_\eta = V_{\eta 0} + \delta V_\eta. \quad (1.25)$$

Составляющая  $\delta V_\eta$  определяется выражением (1.24), а скоро кориолисово ускорение  $Q$  присутствует на входе первого интегратора цепи «идеальной работы», то выходной сигнал этого интегратора

$$V_{\eta 0} = Qt + \int \dot{V}_{\eta 0} d\tau. \quad (1.26)$$

Подставляя выражения (1.24), (1.26) в уравнение (1.25), приходим к выводу, что кориолисово ускорение  $Q = \text{const}$  не влияет на данные о скорости объекта относительно Земли, вырабатываемые ИНС. Такой же вывод можно сделать и в отношении постоянного смещения  $B$  в показаниях акселерометра.

Если кориолисово ускорение представляет собой линейную функцию  $Q = at$ , то  $\delta = -\frac{at^3}{6R}$  и в данных ИНС о скорости  $V_\eta$  будет содержаться ошибка  $aR/g$ . Неточность в параметре  $R$  также приводит к ошибкам ИНС по скорости. Эти ошибки при  $V_{\eta 0} = \text{const}$  возрастают во времени.

Подводя итог выполненному исследованию, можно сказать, что классическая ИНС представляет собой комбинированную следящую систему, входным сигналом которой в случае северного канала ИНС является широта  $\varphi$ , а в случае восточного — долгота  $\lambda$  текущего местоположения объекта, а выходным сигналом — данные  $\varphi_\Gamma$ ,  $\lambda_\Gamma$  о широте и долготе, вырабатываемые соответственными каналами ИНС. Цепь разомкнутого цикла комбинированной следящей системы представляет идеальный режим работы ИНС, а замкнутый контур, образующийся благодаря действию ускорения

силы тяжести, соответствует ошибкам ИНС. 'Замкнутый' контур ошибок не изолирован, а испытывает со стороны цепи «идеального режима работы» воздействие  $\delta$ , выражающее неточность функционирования этой цепи. Это воздействие, проходя через замкнутый контур ошибок, добавляется с противоположным знаком к показаниям «цепи идеальной работы», что делает выходные сигналы комбинированной следящей системы (показания ИНС  $\varphi_r, \lambda_r$ ) при некоторых условиях в точности равными входным сигналам  $\varphi, \lambda$ .

Таким образом, ИНС — не устройство разомкнутого цикла, предназначенное для решения уравнений [30], а сервомеханизм, действующий по замкнутому циклу. Это обуславливает наличие у ИНС адаптивных свойств к неточностям своих параметров (масштабных коэффициентов) и погрешностям структуры (некомпенсированные кориолисовы ускорения). Действительно, согласно алгоритму «идеальной работы» указанные неточности должны бы вызывать беспредельно растущие ошибки, но таковых в действительности не вызывают.

Адаптивные свойства ИНС, ранее в литературе не отмечавшиеся, позволяют по новому решать вопросы, возникающие при конструировании. Неточности параметров и структуры ИНС грубых нарушений ее работы не вызывают. Например, в ИНС для маломаневренных объектов отсутствие компенсации кориолисова ускорения не приведет к большим длительно существующим ошибкам по скорости. Если при этом скорость объекта мала, то баллистические ошибки в показаниях ИНС местной вертикали и географической широты также будут невелики. Что касается высокопрецизионной ИНС, то неточности параметров и структуры должны быть, конечно, устранены.

Выполненное исследование относится к северному каналу (канал  $\eta$ ) ИНС со сферической моделью Земли и гироскопической платформой, автоматически ориентируемой по местному горизонту и по странам света. Однако результаты исследования полностью переносятся и на восточный канал ИНС (канал  $\xi$ ). Структурная схема «идеальной работы» и структурная схема ошибок этого канала показаны на рис. 1.11. Эти результаты справедливы и для ИНС с эллипсоидальной моделью Земли (необходимо только в каналах ИНС заменить  $R$  соответственно на  $R_\eta$  и  $R_\xi$ ). Они остаются в силе и для ИНС со свободной в азимуте гироскопической платформой.

## 1.5. ВЛИЯНИЕ ДРЕЙФА ГИРОПЛАТФОРМЫ

Исследуем влияние дрейфа гироскопической платформы на показания ИНС. Скорость дрейфа можно представить как внешнее возмущение  $\epsilon_\xi, \epsilon_\eta$ , действующее на входе гироскопической платформы 2 (рис. 1.11). Согласно показанной на рис. 1.9 схеме передаточная функция, связывающая  $\epsilon_\xi, \delta\varphi_r$ , имеет вид

$$\frac{\delta\varphi_r}{\epsilon_\xi} = \frac{g}{s(g + Rs^2)}. \quad (1.27)$$

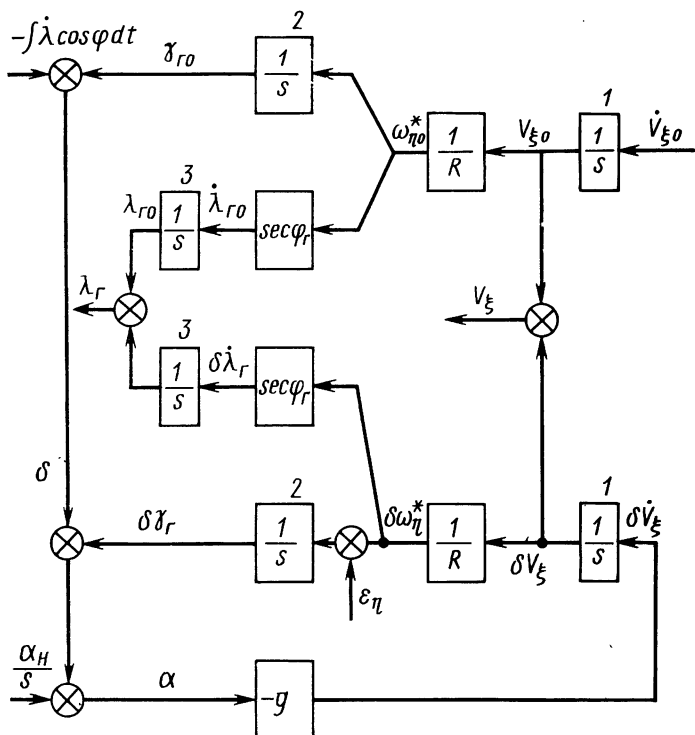


Рис. 1.11. Структурная схема канала  $\xi$  ИНС с ориентируемой по странам света гироскопической платформой:

1—первый интегратор, 2—гироскопическая платформа; 3—второй интегратор;  $\lambda$ ,  $\varphi$ —долгота и широта действительного местоположения объекта;  $\lambda_{r0}$ —долгота на выходе цепи «идеальной работы»;  $\lambda_r$ —долгота, реально вырабатываемая ИНС;  $\varphi_r$ —угол поворота гироскопической платформы относительно Земли

Эта функция содержит множитель  $1/s$ , соответствующий интегрирующему звену. При  $\varepsilon_{\xi} = \text{const}$  величина  $\delta \varphi_r$  (она является теперь ошибкой в данных о географической широте, вырабатываемых ИНС) безгранично возрастает.

Следует отметить, что несмотря на действие  $\varepsilon_{\xi} = \text{const}$  гироскопическая платформа в установившемся режиме остается у местной вертикали, т. е.  $\delta \beta(\infty) = 0$ .

Действительно, согласно структурной схеме

$$\frac{\delta \beta}{\varepsilon_{\xi}} = \frac{Rs}{g + Rs^2}, \quad (1.28)$$

так что при  $\varepsilon_{\xi} = \text{const}$

$$\delta \beta(\infty) = \left[ \frac{Rs}{g + Rs^2} \right]_{s=0} \varepsilon_{\xi} = 0.$$

Что касается данных о скорости объекта  $V_\eta$ , вырабатываемых ИНС, то эти данные при  $\varepsilon_\xi = \text{const}$  содержат постоянную ошибку  $R\varepsilon_\xi$ . Это видно из передаточной функции

$$\frac{\delta V_\eta}{\varepsilon_\xi} = \frac{Rg}{g + Rs^2}, \quad (1.29)$$

сводящейся при  $s=0$  к  $R$ .

Полученные результаты показывают, что по сравнению с погрешностями в параметрах и структуре ИНС (см. предыдущий раздел) вредное влияние дрейфа гиросплатформы на точность вырабатываемых ИНС данных гораздо больше. При постоянстве упомянутых погрешностей нарастающих во времени ошибок в показаниях ИНС не возникает, тогда как постоянный дрейф гиросплатформы обуславливает в данных о местоположении, вырабатываемых ИНС, растущую пропорционально времени ошибку. Такое же положение наблюдается и в том случае, когда дрейф представляет собой стационарный случайный процесс.

Пусть, например,  $\varepsilon_\xi$  — белый шум с нулевым средним значением. Подставляя в формулу

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S d\omega \quad (1.30)$$

вместо  $W$  передаточную функцию (1.27) и имея в виду, что спектральная плотность мощности белого шума  $S = \text{const}$ , видим, что интеграл (1.30) расходящийся. Следовательно, в установившемся состоянии дисперсия  $\sigma^2$  ошибки ИНС  $\delta\varphi_\eta$  в определении широты местоположения объекта бесконечно велика.

Данные обстоятельства указывают на необходимость алгоритмов, которые позволяли бы или отстраиваться от дрейфа гиросплатформы, или идентифицировать дрейф и порожденные им ошибки ИНС и вводить соответствующую коррекцию в показания ИНС. Первый тип алгоритмов разрабатывается в гл. 3, а второй тип анализируется в гл. 8—11.

Обращаясь к более подробному исследованию схем ИНС, заметим, что ИНС со свободной в азимуте гиросплатформой весьма полно (с определением кориолисовых ускорений) рассмотрена в работе [12]. Предположенная в работе [12] схема обладает перед схемой, показанной на рис. 1.7, преимуществом более простого формирования сигналов на моментные датчики гиросплатформы и сигналов компенсации кориолисова ускорения. Сферическая модель Земли, положенная в основу этой схемы, как уже отмечалось, не приводит к возникновению ошибок.

Представленная на рис. 1.5 ИНС относится к классу систем с ориентируемой по странам света гиросплатформой, т. е. платформой, которая не только находится в горизонте, но и сохраняет направление «север — юг». Такая платформа рассматривается в следующем разделе.



## 1.6. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИОННАЯ СИСТЕМА С ОРИЕНТИРУЕМОЙ ПО СТРАНАМ СВЕТА ПЛАТФОРМОЙ

Рассмотрим ИНС, гиropлатформа которой помимо того, что находится в горизонте, постоянно ориентирована по странам света. Как указано в разд. 1.2, для удержания платформы в меридиане на моментный датчик азимутального гироскопа должен подаваться сигнал, пропорциональный абсолютной угловой скорости географического трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$  на его ось  $O_1\xi$ . Управление гиropлатформой по азимуту производится в этом случае по разомкнутому циклу, так что между северной осью  $O_1y$  платформы и плоскостью меридиана может накапливаться ничем не устранимое расхождение. При горизонтировании платформы подобного недостатка не существует, так как вследствие действия ускорения силы тяжести  $g$  в отношении ошибок ИНС образуется замкнутая система (см. рис. 1.3). Такое действие на ИНС вектора  $g$  можно назвать дисциплинирующим.

Было бы целесообразно дисциплинирующее действие вектора  $g$  распространить и на азимутальный канал гиropлатформы. Это можно сделать введением между элементами гиropлатформы дополнительной связи, придающей платформе свойства гироскопа (гироскопируемая платформа).

В гироскопируемой платформе акселерометры соединены с моментными датчиками гироскопов таким образом, что платформа наряду с обычными функциями (сохранение горизонтального положения) выполняет также функции гироскопа, т. е. автоматически устанавливается по географическому меридиану [26]. В отличие от обычной схемы сигнал северного акселерометра подается теперь не только на восточный гироскоп (для горизонтирования платформы относительно восточной оси  $O_1x$ ), но и на азимутальный гироскоп (рис. 1.12).

Предположим, что платформа постоянно находится в горизонте и отклонена от плоскости меридиана на угол  $\alpha$  (рис. 1.13). Тогда при неподвижном объекте вектор кинетического момента восточного гироскопа вращается (прецессирует) в инерциальном пространстве со скоростью

$$\Omega \cos \varphi \sin \alpha,$$

что возможно лишь при подаче на моментный датчик этого гироскопа сигнала от северного акселерометра<sup>1</sup>. Но этот сигнал может возникнуть только при наклоне платформы вокруг восточной оси  $O_1x$ . Следовательно, первоначальное предположение о горизонтальности платформы неверно: отклонение  $\alpha$  платформы от плоскости меридиана обязательно сопровождается отклонением платформы от плоскости горизонта вокруг восточной оси  $O_1x$ , возникновением сигнала от северного акселерометра и прецессированием платфор-

<sup>1</sup> Вертикальная составляющая скорости вращения Земли  $\Omega \sin \varphi$  не передается на платформу и связанные с ней гироскопы.

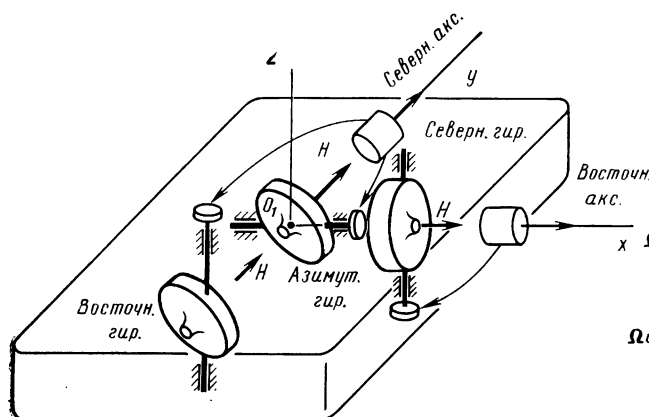


Рис. 1.12. Гирокомпасируемая платформа

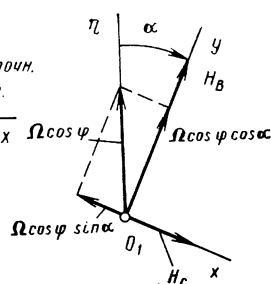


Рис. 1.13. Векторы при отклоненной платформе

мы по азимуту (вследствие поступления этого сигнала на азимутальный гироскоп), в сторону уменьшения  $\alpha$ . Отклонение платформы от плоскости горизонта устраняется системой горизонтирования. Вследствие жесткой связи с этим отклонением одновременно устраняется и отклонение  $\alpha$  платформы от плоскости меридиана.

В дальнейших рассуждениях на некоторое время примем предположение, что вертикальная составляющая угловой скорости вращения Земли  $\Omega \sin \varphi$  отсутствует. Тогда можно сделать вывод, что равновесным положением платформы может быть только положение, когда платформа горизонтальна и находится в плоскости меридиана. Конечно, благодаря горизонтальной составляющей скорости вращения Земли в инерциальном пространстве вращается и вектор кинетического момента северного гироскопа, что указывает на приложение к этому гироскопу момента со стороны моментного датчика. Момент  $H_c \Omega \cos \varphi$  создается сигналом, поступающим на моментный датчик со стороны ИНС. Необходимое дополнение момента  $H_c \Omega \cos \varphi$ , вырабатываемого ИНС, до требуемого значения  $H_c \Omega \cos \varphi \cos \alpha$ , т. е. момент

$$- H_c \cos \varphi (1 - \cos \alpha), \quad (1.31)$$

создается за счет поступления на моментный датчик сигнала от восточного акселерометра. Но это предполагает наклон платформы относительно северной оси  $O_1 y$  на угол, пропорциональный моменту (1.31). В равновесном состоянии указанный наклон отсутствует, так как равновесное значение угла  $\alpha$  равно нулю.

Учтем теперь влияние вертикальной составляющей угловой скорости вращения Земли  $\Omega \sin \varphi$ . Из-за этой составляющей в установившемся режиме платформа отклонена от горизонта относительно восточной оси  $O_1 x$  на угол  $\beta^*$ , необходимый для того, чтобы поступающий с северного акселерометра на азимутальный гирос-

скоп сигнал вызывал скорость прецессии по азимуту, равную  $\Omega \sin \varphi$ . Следовательно, равновесным положением является положение, когда платформа находится в плоскости меридиана и отклонена от горизонта вокруг оси  $O_1x$  на угол  $\beta^*$ , пропорциональный  $\Omega \sin \varphi$ .

Пусть теперь объект движется по поверхности Земли, например, вдоль меридиана. Тогда наряду с углом  $\beta^*$  возникает скоростная девиация платформы  $\alpha^*$ , обусловленная тем, что горизонтальная составляющая угловой скорости географического трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$ , по которой платформа устанавливается в азимуте, отклонена от плоскости меридиана. В ИНС, изображенной на рис. 1.5, угол  $\beta^*$  сводится к нулю за счет подачи на моментный датчик азимутального гироскопа сигнала (1.9). Этот сигнал вызывает такую же прецессию, какая в его отсутствии возникала бы от угла  $\beta^*$ . Труднее обстоит дело с ликвидацией ошибок, вызванных скоростной девиацией  $\alpha^*$ .

При эксплуатации гироскопических приборов на скоростную ошибку вносят коррекцию по специальным таблицам или графикам в соответствии со скоростью и курсом корабля. В ИНС учет влияния ошибки  $\alpha^*$  становится более сложным, и точное его осуществление возможно лишь при использовании внешней информации о скорости. По этой причине для высокоскоростных объектов, когда девиацией  $\alpha^*$  пренебрегать нельзя, гироскопирование платформы в процессе нормальной эксплуатации ИНС неприемлемо.

С другой стороны, управление платформой в азимуте по разомкнутому циклу также не обеспечивает требуемой точности: наряду с неконтролируемой ошибкой в азимуте возникают порожденные ею ошибки в горизонтировании платформы. Эти трудности показывают, что от ИНС со свободной в азимуте гиropлатформой можно ожидать большей точности, чем от ИНС с ориентируемой по странам света платформой.

Рассмотренное здесь гироскопирование обычно используется лишь для первоначальной выставки платформы по странам света и производится при неподвижном относительно Земли объекте.

## ГЛАВА 2

### ДЕМПФИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВНЕШНЕЙ ИНФОРМАЦИИ

Структурная схема ИНС в отношении ошибок представляет собой замкнутую систему  $abcd$  (см. рис. 1.9), содержащую наряду с усилительными два интегрирующих звена. Такая система находится на колебательной границе устойчивости и после начального возмущения совершает по всем координатам (ошибкам ИНС) незатухающие синусоидальные колебания с частотой Шулера

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (2.1)$$

Если Землю принимать в виде шара, то показанное на рис. 1.9 как внешний сигнал приращение  $\varphi$  широты действительного местоположения объекта определяется формулой

$$\varphi(s) = \frac{1}{R s^2} \dot{V}_{\eta_0}(s), \quad (2.2)$$

где  $\dot{V}_{\eta_0}$  — ускорение объекта относительно Земли, направленное по касательной к меридиану.

Вместе с тем из структурной схемы видно (см. рис. 1.9), что создаваемый цепью идеальной работы  $ABD$  поворот гиросплатформы

$$\varphi_{r0}(s) = \frac{1}{R s^2} \dot{V}_{\eta_0}(s) \quad (2.3)$$

определяется тем же выражением, что и  $\varphi$ . Поэтому отклонение гиросплатформы от местной вертикали

$$\delta(s) = \varphi(s) - \varphi_{r0}(s),$$

являющееся для замкнутой системы ошибок  $abcd$  входным сигналом, равно нулю. Равенство нулю в любой момент времени сигнала  $\delta$  и обуславливает известное свойство невозмущаемости ИНС с шулеровской частотой (2.1), состоящее в том, что любое движение объекта по земной поверхности не возбуждает свободных или вынужденных колебаний ошибок ИНС.

Однако различные отклонения от идеальных условий, например, рассмотренные в гл. 1 неточности масштабных коэффициентов, недокомпенсация кориолисова ускорения, смещение акселерометра, создают отличный от нуля сигнал  $\delta$  и, следовательно, производят возмущение ИНС. Из всех факторов, обуславливающих возмущаемость, т. е. ошибки ИНС, в дальнейшем рассматриваются только неточности начальной выставки гиросплатформы в горизонт, дрейф гиросплатформы  $e_\xi$  и входной сигнал  $\delta$ , возникающий, например, при реализации того или иного способа демпфирования свободных колебаний ошибок ИНС.

Принято считать, что незатухающие свободные колебания ошибок ИНС, вызванные какой-либо из указанных выше причин, нежелательны. Установилось также представление, что без использования внешней информации демпфирование свободных колебаний ИНС может быть куплено только ценой введения статических ошибок в вырабатываемые ИНС данные [3, 21].

В настоящей главе показывается, что демпфирование свободных колебаний ИНС можно осуществить внутренними связями, т. е. без использования внешней информации, не вводя при этом каких-либо статических (скоростных, баллистических) ошибок. Показывается также, что введение демпфирования ошибок без использования или с использованием внешней информации, вообще говоря, не повышает точности ИНС в определении текущего местоположения объекта.

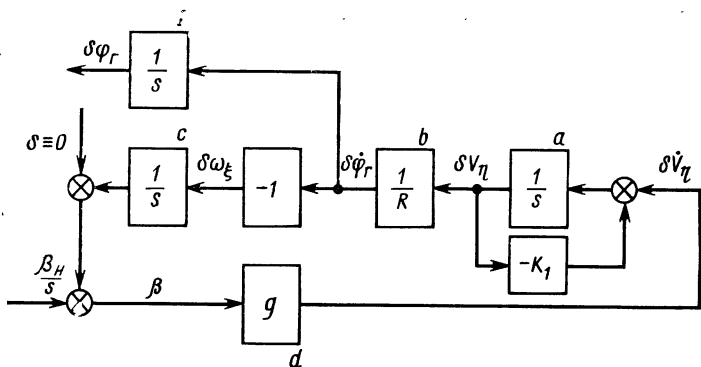


Рис. 2.1. Схема ИНС с демпфированием собственных колебаний путем использования внешней информации о скорости

Традиционный способ демпфирования ошибок ИНС заключается в охвате интегрирующего звена  $a$ , входящего в замкнутую систему ошибок (см. рис. 1.9), жесткой отрицательной обратной связью [2]. Такую обратную связь создают, выделяя ошибку ИНС по скорости  $\delta V_\eta$  как разность вырабатываемой ИНС величины  $V_\eta$  и этой же величины, поступающей от внешнего по отношению к ИНС источника, например, от лага или доплеровского измерителя скорости объекта (рис. 2.1).

Далее показывается, что демпфирование ошибок ИНС можно осуществить за счет дополнительных внутренних связей без привлечения какой-либо внешней информации.

## 2.1. ДЕМПФИРОВАНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДАЧЕЙ НА ВХОД ГИРОПЛАТФОРМЫ И ВТОРОГО ИНТЕГРАТОРА ВЫРАБАТЫВАЕМОЙ ШИРОТЫ (ДОЛГОТЫ)

Если широту  $\varphi_r$ , вырабатываемую ИНС (входной сигнал второго интегратора), с соответствующим коэффициентом усиления  $K$  подать при изменении знака на вход второго интегратора, а без изменения знака — на вход (на моментный датчик) гироскопа, то ошибки ИНС будут демпфированы, а работа ИНС в принципиальном отношении не нарушена. Схема ИНС при указанных дополнительных связях представлена на рис. 2.2<sup>1</sup>.

В отношении переменных, соответствующих «идеальному режиму» работы, второй интегратор 3 и гироскоп 2 могут быть представлены схемой, показанной на рис. 2.3 (сигнал  $\varphi_{r0}$  подается на гироскоп для ее горизонтирования при изменении широты, производимой северной составляющей скорости объекта). С по-

<sup>1</sup> Для упрощения структурной схемы ветвь  $D$  цепи идеальной работы, соответствующая гироскопу (см. рис. 1.9), на рис. 2.2 не показана. Для образования сигнала  $\delta$  использована эквивалентная цепь  $C$  со вторым интегратором.

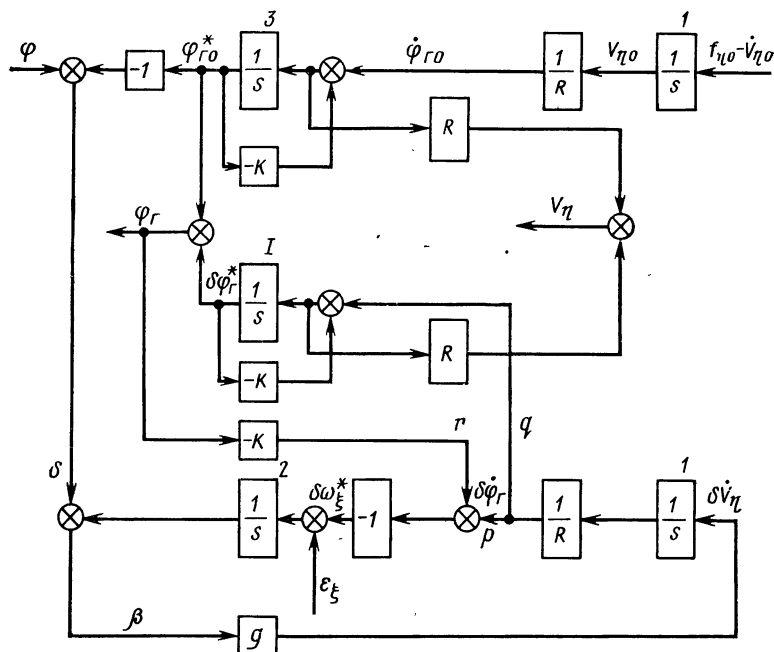


Рис. 2.2. Схема ИНС с демпфированием собственных колебаний подачей выработанной широты на второй интегратор и гиросплатформу

Мощью эквивалентных преобразований эту схему можно преобразовать в схему, изображенную на рис. 2.4. Как это и требуется, выходные сигналы канала второго интегратора и канала гиросплатформы в «идеальном режиме» работы получились одинаковыми.

Рассмотрим теперь структурную схему ошибок. Эта схема (она вытекает из показанной на рис. 2.2 схемы) изображена на рис. 2.5. Характеристическое уравнение замкнутой системы ошибок

$$s^2 + Ks + v^2 = 0 \quad (2.1')$$

показывает, что свободные колебания ИНС являются затухающими.

Докажем теперь, что при указанных на рис. 2.2 дополнительных связях  $K$  вся система ИНС в целом функционирует правильно. Отличие предложенного здесь способа деимпфирования от способа, предусматривающего

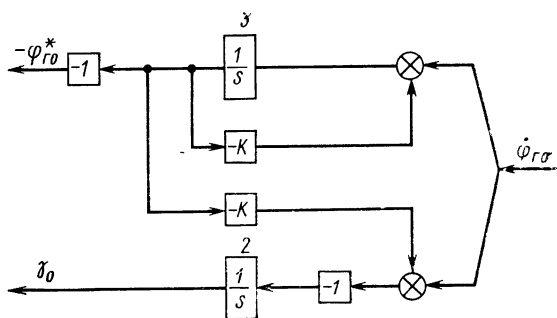


Рис. 2.3. Схема управления вторым интегратором и гироскопом в режиме «идеальной работы»

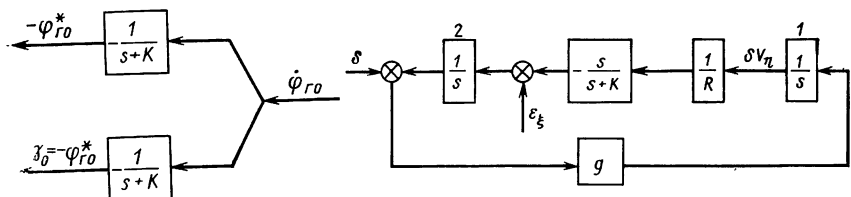


Рис. 2.4. Схема, эквивалентная схеме, показанной на рис. 2.3.

Рис. 2.5. Структурная схема ошибок демпфированной ИНС

использование внешней информации о скорости, заключается в том, что вследствие искажения цепи «идеальной работы» обратной связью  $K$  обязательно возникает сигнал  $\delta$ , действующий на замкнутую систему ошибок (см. рис. 2.2). Однако благодаря равенству для передаточной функции  $\delta\varphi_r^*/\delta$  этой системы позиционного коэффициента  $C_0$  единице ( $C_0=1$ ) входной сигнал  $\delta$  целиком переходит в сигнал  $\delta\varphi_r^*$  и тем самым компенсирует в вырабатываемом ИНС показании  $\varphi_r$  ошибку  $\delta$ , допускаемую цепью «идеальной работы».

Таким образом, введение в ИНС дополнительных внутренних связей  $K$  в принципиальном отношении не нарушает работу ИНС. Однако в вырабатываемых ИНС данных появляются ошибки, обусловленные производными сигнала  $\delta$ . Исследуем эти ошибки более подробно.

Упомянутая выше передаточная функция замкнутой системы ошибок имеет вид (см. рис. 2.2)

$$\frac{\delta\varphi_r^*}{\delta} = \frac{v^2}{v^2 + Ks + s^2}. \quad (2.2')$$

Производя деление числителя на знаменатель, получим [10]

$$\frac{\delta\varphi_r^*}{\delta} = 1 - \frac{K}{v^2} s^2 + \frac{K^2 - v^2}{v^4} s^2 + \dots \quad (2.3')$$

Это выражение показывает, что помимо желаемого позиционного системного коэффициента  $C_0=1$  имеются нежелательные системные коэффициенты  $C_1 = -\frac{K}{v^2}$ ,  $C_2 = \frac{K^2 - v^2}{v^4}$  и др.

Коэффициенты  $C_1, C_2, \dots$  порождают ошибки в показаниях ИНС, зависящие от скорости, ускорения и т. д., с которыми изменяется входной сигнал  $\delta$ . Выбирая  $K=v$ , можно свести к нулю коэффициент  $C_1$  ошибки от ускорения. Как показывает уравнение (2.1'), относительный коэффициент демпфирования  $\zeta$  свободных колебаний при этом будет  $\zeta=0,5$ . Это значение близко к оптимальному  $\zeta_{\text{опт}}=0,707$ , так что в дальнейшем принимаем  $K=v$ .

Представим теперь функцию (2.2') в виде

$$\delta\varphi_r^* = \delta - \frac{vs + s^2}{v^2 + vs + s^2} \delta. \quad (2.4)$$

Первый член в выражении  $\delta\varphi_r^*$  представляет собой полезный сигнал, компенсирующий, как указывалось выше, ошибку в показаниях ИНС  $\varphi_r$ , обусловленную искажением цепи «идеальной работы» обратной связью  $K$ . Второй член

$$\delta\varphi_r^{**} = - \frac{vs + s^2}{v^2 + vs + s^2} \delta \quad (2.5)$$

соответствует ошибке, проявляющейся в показаниях ИНС.

Компенсация этой ошибки осуществима, если величина  $\delta$  известна в виде физически измеряемого сигнала. Такой сигнал можно сформировать согласно уравнению

$$\delta = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+v} \right) \frac{1}{R_s} f_{\eta_0}, \quad (2.6)$$

где  $f_{\eta_0}$  — показание акселерометра, соответствующее «идеальному режиму» работы.

Таким образом, ошибка в показаниях ИНС  $\varphi_r$  будет полностью скомпенсирована, если к выходному сигналу второго интегратора добавить сигнал

$$\delta\varphi_k = \frac{v}{Rs(s^2 + vs + v^2)} f_{\eta_0}. \quad (2.7)$$

Учитывая, что  $f_{\eta_0}/s$  есть скорость  $V_{\eta_0}$  в цепи идеальной работы, можно сигнал компенсации  $\delta\varphi_k$  получить из сигнала  $V_{\eta_0}$  при помощи передаточной функции

$$\frac{\delta\varphi_k}{V_{\eta_0}} = \frac{v}{R(s^2 + vs + v^2)}. \quad (2.8)$$

Эту передаточную функцию можно реализовать активным четырехполюсником. Прототипом структурной схемы такого четырехполюсника может например, служить замкнутая система ошибок ИНС (рис. 2.6).

Если имеется внешняя информация о скорости объекта (данные от лага или ДИСС), то эту информацию следует использовать при формировании сигнала компенсации  $\delta\varphi_k$  согласно выражению (2.8). При отсутствии внешней информации компенсировать ошибку ИНС не представляется возможным.

Действительно, используя вместо  $V_{\eta_0}$  вырабатываемую ИНС скорость

$$V_\eta = V_{\eta_0} + \delta V_\eta, \quad (2.9)$$

получаем 
$$\delta\varphi_k = \frac{v}{R(s^2 + vs + v^2)} V_{\eta_0} + \frac{v}{R(s^2 + vs + v^2)} \delta V_\eta, \quad (2.10)$$

где второй член соответствует погрешности компенсации. Произведем оценку погрешности компенсации для случая  $V_{\eta_0} = \text{const.}$  Согласно структурной схеме, показанной на рис. 2.5,

$$\delta V_\eta = \frac{g(s+v)}{s^2 + vs + v^2} \delta. \quad (2.11)$$



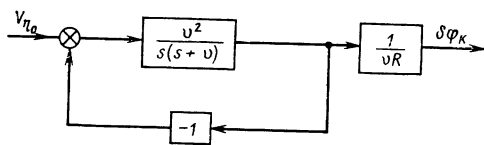


Рис. 2.6. Возможная структурная схема цепи компенсации

Подставляя это выражение в уравнение (2.10), получим

$$\delta\varphi_k = \frac{v}{R(s^2 + vs + v^2)} \times \\ \times V_{\eta_0} + \frac{v^3(s+v)}{(s^2 + vs + v^2)^2} \delta.$$

Второй член правой части, представляющий собой погрешность компенсации и, следовательно, обуславливающий ошибку в вырабатываемых ИНС данных  $\varphi_r$ , целиком восстанавливает в сигнале  $\varphi_r$  нежелательную составляющую  $\delta$ . Таким образом, в системе компенсации использовать вырабатываемую ИНС скорость  $V_{\eta}$  недопустимо.

Оценим ошибку, свойственную показанной на рис. 2.2 ИНС, при отсутствии компенсации (2.8). Если  $V_{\eta_0} = \text{const}$ , то, как это видно из (2.5) — (2.8), установившееся значение ошибки

$$\delta\varphi_r^{**}(\infty) = -\frac{1}{V_{gR}} V_{\eta_0} \cong \frac{1}{8 \cdot 10^3} V_{\eta_0}, \quad (2.12)$$

где  $V_{\eta_0}$  — измеряется в м/с.

При уменьшении скорости  $V_{\eta_0}$  ошибка ИНС также уменьшается, а при неподвижном относительно Земли объекте исчезает совсем.

Предложенный здесь способ демпфирования ИНС наряду с отмеченным недостатком (невозможность снижения скоростной ошибки ИНС без использования внешней информации о  $V_{\eta_0}$ ) обладает перед традиционным способом демпфирования (см. рис. 2.1) и некоторыми преимуществами. К ним относятся: 1) отсутствие необходимости внешней информации о скорости объекта; 2) возможность демпфирования собственных колебаний ИНС при неподвижном объекте.

Можно предложить другой способ демпфирования ИНС, отличающийся от рассмотренного видом дополнительных внутренних связей ИНС. Этот способ сводится к подаче выходного сигнала первого интегратора на его вход (рис. 2.7). Легко показать, что этот способ демпфирования полностью эквивалентен рассмотренному.

## 2.2. ДЕМПФИРОВАНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ ВОКРУГ ПЕРВОГО ИНТЕГРАТОРА

Возможен способ демпфирования свободных колебаний ИНС внутренними связями, свободный от недостатка (скоростная ошибка) рассмотренных в разд. 2.1 способов. Он заключается в охвате первого интегратора ИНС жесткой прямой связью. Структурная схема ИНС с демпфированием собственных колебаний данным спо-

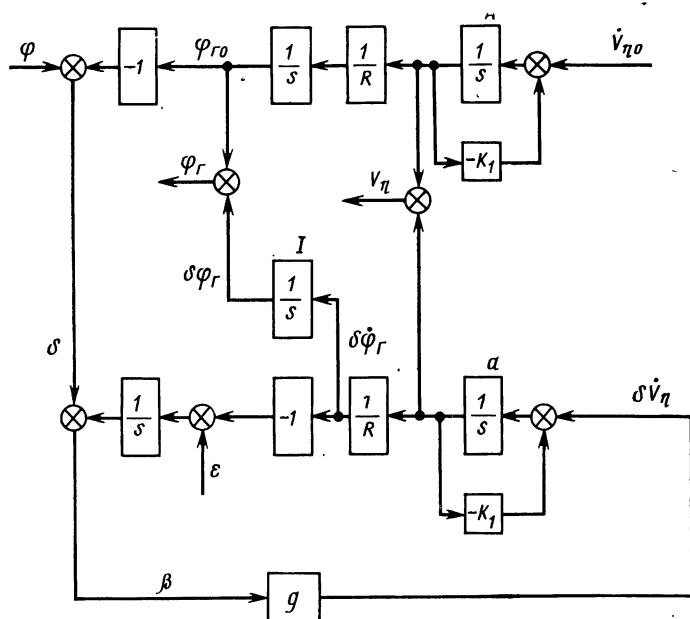


Рис. 2.7. ИНС с демпфированием собственных колебаний охватом первого интегратора жесткой обратной связью

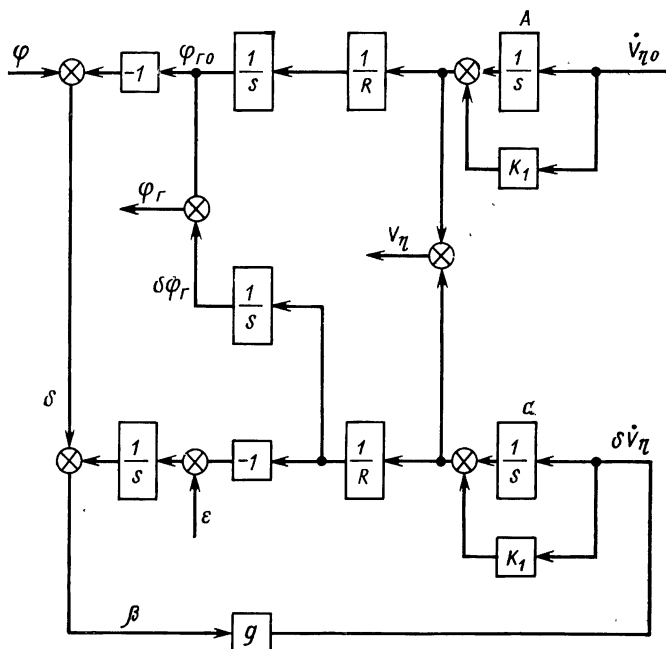


Рис. 2.8. ИНС с демпфированием собственных колебаний охватом первого интегратора жесткой прямой связью

собом изображена на рис. 2.8. Как показывает эта схема, передаточная функция  $\delta\varphi_r/\delta$  имеет вид

$$\frac{\delta\varphi_r}{\delta} = \frac{v^2 + K_1 v^2 s}{v^2 + K_1 v^2 s + s^2}. \quad (2.13)$$

Выбирая  $K=1/v$ , обеспечим относительный коэффициент демпфирования ИНС  $\zeta=0,5$ , близкий к оптимальному значению  $\zeta_{\text{опт}}=0,707$ . В этом случае передаточная функция (2.13)

$$\frac{\delta\varphi_r}{\delta} = \frac{v^2 + v s}{v^2 + v s + s^2} \quad (2.14)$$

или при разложении по системным коэффициентам [10]

$$\frac{\delta\varphi_r}{\delta} = C_0 + C_2 s^2 + C_3 s^3 + C_5 s^5 + \dots = 1 - \frac{1}{v^2} s^2 + \frac{1}{v^3} s^3 - \frac{1}{v^5} s^5 + \dots \quad (2.15)$$

Равенство позиционного коэффициента единице ( $C_0=1$ ), как и в предыдущих способах, обеспечивает переход входного сигнала  $\delta$  в сигнал  $\delta\varphi_r$  и тем самым компенсацию в вырабатываемых данных  $\varphi_r$  ошибки  $\delta$ , допускаемой цепью «идеальной работы». Остальные системные коэффициенты приводят к возникновению ошибки в показаниях  $\varphi_r$  ИНС. Однако вследствие того, что  $C_1=0$ , главная составляющая этой ошибки, а именно  $C_1\delta$ , равна нулю. Произведем более подробное исследование ошибок ИНС.

Входной сигнал замкнутой системы ошибок (см. рис. 2.8)

$$\delta_s = \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1 + \frac{1}{v} s}{s^2} \right) \frac{\dot{V}_{\eta_0}(s)}{R} = -\frac{1}{vR} V_{\eta_0}(s). \quad (2.16)$$

Как видно из (2.15) и (2.16), ошибка  $\delta\varphi_r^{**}$  в показаниях ИНС определяется выражением

$$\delta\varphi_r^{**} = \frac{1}{v^3 R} \dot{V}_{\eta_0} - \frac{1}{v^4 R} \ddot{V}_{\eta_0} + \frac{1}{v^6 R} V_{\eta_0}^{(V)} - \dots \quad (2.17)$$

Таким образом, скорость  $V_{\eta_0}$  и ускорение  $\dot{V}_{\eta_0}$  объекта не вызывает какой-либо установившейся ошибки в показаниях ИНС. Что касается высших производных  $V_{\eta_0}$ , то вследствие кратковременности их существования по сравнению с периодом собственных колебаний ИНС они также не могут создать установившейся ошибки ИНС.

Выходной сигнал  $\delta$  замкнутой системы ошибок в данном случае обуславливает лишь свободные колебания ИНС. Свободные колебания возникают всякий раз, когда входной сигнал  $\delta$  или какая-либо его производная претерпевают скачкообразное изменение, причем амплитуда свободных колебаний пропорциональна величине скачка [10].

Поскольку движение объекта не может начаться без наступления скачка по какой-либо производной  $V_{\eta_0}$ , свободные колебания

ИНС должны возникать в начале движения объекта. Свободные колебания появляются также при изменении режима движения объекта. Однако благодаря демпфированию за счет прямой связи вокруг первого интегратора свободные колебания затухают.

Как уже отмечалось, при  $K_1=1/\nu$  относительный коэффициент демпфирования свободных колебаний  $\zeta=0,5$  и переходный процесс практически затухает в течение одного периода. Период колебаний в переходном процессе

$$T = \frac{2\pi}{\nu \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (2.18)$$

и если  $\nu = \sqrt{\frac{g}{R}}$ , а  $\zeta=0,5$ , то  $T=97$  мин.

### 2.3. ДЕМПФИРОВАНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ С ИЗМЕНЕНИЕМ ЧАСТОТЫ

С целью сокращения длительности переходного процесса период собственных колебаний ИНС необходимо уменьшить. При использовании предложенного в предыдущем разделе способа демпфирования свободных колебаний ИНС возможность уменьшения периода  $T$  существует. Необходимо просто вместо шулеровской константы  $\nu$  использовать  $\omega_n > \nu$ . Если, например, в схему ИНС вместо радиуса Земли  $R$  ввести  $0,01R$ , то в выражениях (2.14), (2.15) и (2.18) вместо  $\nu$  будет фигурировать

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{0,01R}}, \quad (2.19)$$

а выражения (2.16) и (2.17) примут соответственно вид

$$\delta_s = \left( \frac{1}{Rs^2} - \frac{1 + \frac{1}{\omega_n} s}{0,01Rs^2} \right) \dot{V}_{\eta_0}(s) = -\frac{99}{R} \frac{V_{\eta_0}(s)}{s} - \frac{10}{\nu R} V_{\eta_0}(s); \quad (2.20)$$

$$\delta\varphi_{уст}^{**} = \frac{0,99}{g} \dot{V}_{\eta_0} + \frac{9,9}{g\nu} \ddot{V}_{\eta_0} - \frac{0,01R}{g^2} \ddot{\ddot{V}}_{\eta_0} + \dots \quad (2.21)$$

Новым здесь является появление ошибки ИНС, зависящей от ускорения объекта (баллистическая ошибка). Таким образом, изменение частоты собственных колебаний покупается ценой возникновения баллистической ошибки ИНС.

Относительный коэффициент демпфирования  $\zeta=0,5$  сохраняется, а период свободных колебаний в данном случае уменьшается до  $T=9,7$  мин.

## 2.4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ, ДЕМПФИРОВАННОЙ ПРЯМОЙ СВЯЗЬЮ

Для ИНС с демпфированием свободных колебаний без изменения частоты (см. рис. 2.8) оценим переходный процесс по ошибке ИНС  $\delta\varphi^{**}$ , возникающий при движении объекта некоторое время с постоянным ускорением. Пусть это движение начинается от состояния покоя и длится 10 с, причем ускорение объекта равно 0,1 g. Как показывает выражение (2.16), входной сигнал  $\delta$  замкнутой системы ошибок

$$\delta = -\frac{1}{vR} 0,1gt + \frac{1}{vR} 0,1g(t-10).$$

В момент начала движения ( $t_1=0$ ) сигнал  $\delta$  не имеет скачка ( $\Delta_{01}=0$ ), а первая производная  $\delta$  претерпевает скачкообразное изменение, причем величина скачка  $\Delta_{11} = -\frac{0,1g}{vR}$ . В момент  $t_2=10$  с сам сигнал  $\delta$  не имеет скачка ( $\Delta_{02}=0$ ), а его производная  $\dot{\delta}$  скачкообразно изменяется на  $\Delta_{12} = \frac{0,1g}{vR}$ .

Реакция ИНС по переменной  $\delta\varphi_r$  описывается уравнением

$$\delta\varphi_r(t) = C_0\delta + C_1\dot{\delta} + C_2\ddot{\delta} + \dots + \tilde{\delta\varphi}_r(t),$$

где  $\tilde{\delta\varphi}_r(t)$  — переходная составляющая.

Поскольку  $C_1=0$ ,  $\ddot{\delta}=0$ , а  $C_0\delta$  ( $C_0=1$ ) — полезная составляющая установившегося движения, искомая ошибка ИНС  $\delta\varphi_r^{**}$  равна переходной составляющей  $\tilde{\delta\varphi}_r$  и определяется формулой [10]

$$\tilde{\delta\varphi}_r(t) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^{M_i} \Delta_{ik} \theta_{i+1}(t-t_{ik}). \quad (2.22)$$

Здесь

$$\theta_{i+1}(t) \div \Phi_{i+1}(s),$$

причем

$$\Phi_i(s) = C_i + s\Phi_{i+1}(s), \quad i=0, 1, \dots$$

где  $\Phi_0(s)$  — передаточная функция исследуемой системы;  $N$  — число отличных от нуля производных входного сигнала;  $M_i$  — число скачков  $i$ -й производной входного сигнала.

В данном случае

$$\delta\varphi_r(t) = \sum_{i=0}^1 \sum_{k=1}^2 \Delta_{ik} \theta_{i+1}(t-t_{ik}) = -\frac{0,1g}{vR} \theta_2(t) + \frac{0,1g}{vR} \theta_2(t-10),$$

где

$$\theta_2(t) \div \Phi_2(s).$$

Функция  $\Phi_2(s)$  определяется из разложения

$$\Phi_0(s) = C_0 + C_1 s + s^2 \Phi_2(s),$$

где

$$\Phi_0(s) = \frac{v^2 + vs}{v^2 + vs + s^2}.$$

Отсюда находим

$$\Phi_2(s) = -\frac{1}{v^2 + vs + s^2}$$

и

$$\theta_2(t) = -\frac{2}{\sqrt{3}v} e^{-\frac{v}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} vt. \quad (2.23)$$

Таким образом, искомая ошибка ИНС

$$\delta\varphi_r^{**} = \frac{0,2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{v}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} vt - \frac{0,2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{v}{2}(t-10)} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} v(t-10). \quad (2.24)$$

Второй член этого выражения в интервале от  $t=0$  до  $t=10$  с тождественно равен нулю, так что максимальное значение  $\delta\varphi_r^{**}$  соответствует моменту  $t=10$  с. Расчет по выражению (2.24) для этого момента дает

$$\delta\varphi_r^{**}(10) = 0,057^\circ. \quad (2.25)$$

Рассчитаем теперь ошибку ИНС, демпфированной с изменением частоты охватом прямой связью первого интегратора. Как и раньше, принимая вместо  $R$  значение  $0,01R$ , получим для сигнала  $\delta$  выражение [см. (2.20)]

$$\delta = -\frac{99}{R} \int 0,1gt dt - \frac{10}{vR} 0,1gt.$$

Производные этого сигнала

$$\dot{\delta} = -9,9v^2t - v, \quad \ddot{\delta} = -9,9v^2$$

показывают, что в момент  $t_1=0$  скачки имеют следующие значения:

$$\Delta_{01}=0, \quad \Delta_{11}=-v, \quad \Delta_{21}=-9,9v^2. \quad (2.26)$$

Принимая во внимание выражение (2.21) установившейся составляющей, а также формулу (2.22), получим следующее выражение переходного процесса по ошибке ИНС на интервале от  $t=0$  до  $t=10$  с:

$$\delta\varphi^{**} = \frac{0,99}{g} 0,1g + \sum_{i=0}^2 \Delta_{1i} \theta_{i+1}(t) = 0,099 + \Delta_{11} \theta_2(t) + \Delta_{21} \theta_3(t). \quad (2.27)$$

Функция  $\theta_2(t)$  определяется выражением, получаемым из (2.23) заменой  $v$  на  $\omega_n = 10v$ , а

$$\theta_3(t) \div \Phi_3(s),$$

где  $\Phi_3(s)$  — находится из разложения

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2 + \omega_n s}{\omega_n^2 + \omega_n s + s^2} = 1 - \frac{1}{\omega_n^2} s^2 + s^3 \frac{\frac{1}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2} s}{\omega_n^2 + \omega_n s + s^2}$$

как множитель при  $s^3$ . По таблице соответствия оригиналов и изображений находим

$$\theta_3(t) = \frac{1}{\omega_n^2} e^{-\frac{\omega_n}{2} t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n t + \frac{1}{\omega_n^2 \sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_n}{2} t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_n t. \quad (2.28)$$

При учете уравнений (2.26) — (2.28) получим следующее окончательное выражение ошибки ИНС:

$$\delta\varphi^{**}(t) = 0,099 - 0,099 e^{-5\sqrt{3}t} \cos 5\sqrt{3}t + \frac{0,101}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}t} \sin 5\sqrt{3}t. \quad (2.29)$$

При  $t=10$  с ошибка ИНС составит

$$\delta\varphi^{**}(10) = 0,58^\circ. \quad (2.30)$$

Сравнивая значения (2.25) и (2.30), видим, что увеличение частоты свободных колебаний ИНС в некоторое число раз (в данном случае в 10 раз) влечет за собой увеличение ошибки ИНС примерно в это же число раз.

Вследствие большой динамической ошибки ИНС с измененной частотой колебаний для применения на практике не пригодна.

## 2.5. ДЕМПФИРОВАНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДАЧЕЙ СИГНАЛА АКСЕЛЕРОМЕТРА НА ГИРОПЛАТФОРМУ

Свободные колебания ИНС можно демпфировать, подавая на моментный датчик гироскопа выходной сигнал акселерометра. Возникающие при этом дополнительные связи  $K_3$  показаны на рис. 2.9. Как и в классической схеме ИНС (см. рис. 1.9), в данной схеме входной сигнал  $\delta$  замкнутой системы ошибок равен нулю. Однако на замкнутую систему ошибок в качестве внешнего возмущения действует теперь сигнал  $(-K_3 \dot{V}_{\eta 0})$ .

Структурная схема ошибок при замене разветвления  $abc \rightarrow d$  одним звеном показана на рис. 2.10. Из этой схемы находим

$$\frac{\delta\varphi_r}{V_{\eta 0}} = - \frac{v^2 K_3}{s^2 + v^2 K_3 R s + v^2}. \quad (2.31)$$

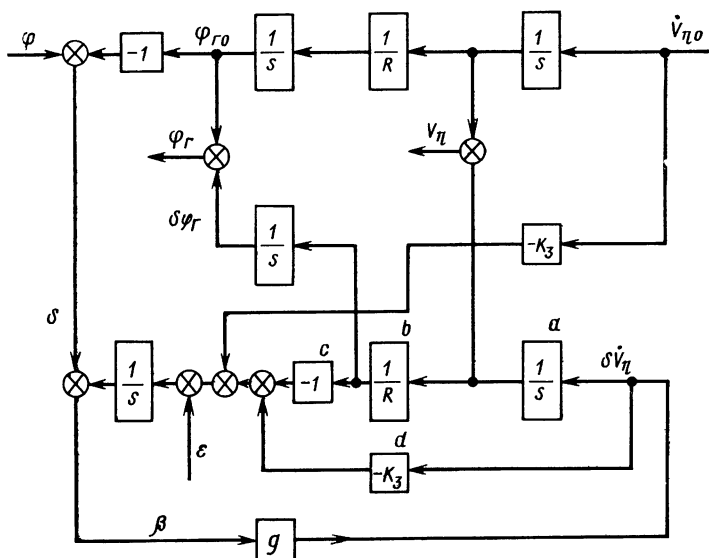


Рис. 2.9. Схема ИНС с демпфированием собственных колебаний подачи сигнала акселерометра на моментный датчик гиросплатформы

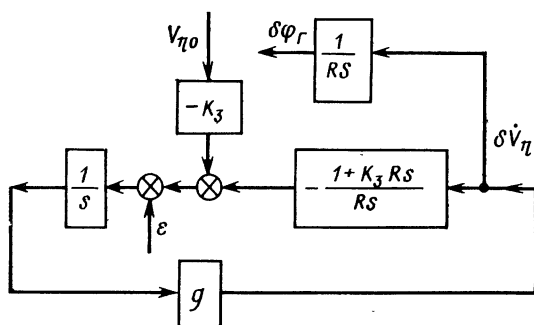


Рис. 2.10. Структурная схема ошибок ИНС при демпфировании выходным сигналом акселерометра

Несмотря на то, что выбором

$$K_3 = \frac{1}{\sqrt{gR}}$$

обеспечивается относительный коэффициент демпфирования свободных колебаний  $\xi=0,5$ , представленная на рис. 2.9 схема ИНС не пригодна для практического использования. Дело в том, что при



$V_{\eta 0} = \text{const}$  по истечении достаточного для затухания колебаний времени в показаниях ИНС устанавливается ошибка

$$\delta\varphi_{\tau}(\infty) = -\frac{1}{gR} V_{\eta 0},$$

принимаяющая слишком большие значения.

Например, при скорости объекта  $V_{\eta 0} = 0,079 \frac{\text{км}}{\text{с}}$  (284,4 км/ч) эта ошибка составит  $0,57^\circ$ .

## 2.6. О ВЛИЯНИИ ДЕМПФИРОВАНИЯ НА ТОЧНОСТЬ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Демпфирование свободных колебаний ИНС введением внутренних связей привносит в ИНС статические (см. разд. 2.1, 2.5) или динамические (см. разд. 2.2, 2.4) ошибки. Этих дополнительных ошибок не возникает, если демпфирование производить, используя какую-либо внешнюю по отношению к ИНС информацию о навигационных параметрах объекта, например, информацию о скорости объекта. Однако, как будет показано далее, демпфирование свободных колебаний даже за счет использования внешней информации не повышает точности вырабатываемых ИНС данных о местоположении объекта.

Рассмотрим ИНС, демпфированную использованием внешней информации о скорости (см. рис. 2.1). В этом случае внешний сигнал  $\delta$  для замкнутой системы ошибок тождественно равен нулю, так что ИНС движением несущего ее объекта не возмущается. Однако свободные колебания ИНС могут существовать, например, за счет неточности начальной выставки гироскопов в горизонт.

Как уже отмечалось, на структурной схеме фигурируют не сами переменные, а их изображения по Лапласу. Поэтому неточность  $\beta_n$  начальной выставки гироскопов представляется на структурной схеме внешним сигналом  $\beta_n/s$ . Действительно, в области оригиналов звено  $S$  описывается уравнением

$$\dot{\beta} = \delta\omega_{\xi},$$

а в области изображений по Лапласу — уравнением

$$s\beta(s) - \beta_n = \delta\omega_{\xi}(s). \quad (2.32)$$

Представляя уравнение (2.32) в виде схемы, получаем соответствующий участок показанной на рис. 2.1 структурной схемы.

Используя эту структурную схему (она относится к случаю привлечения для целей демпфирования внешней информации о скорости объекта), получаем следующую связь между допускаемой ИНС ошибкой  $\delta\varphi_{\tau}$  и сигналом  $\beta_n/s$ :

$$\delta\varphi_{\tau}(s) = \frac{v^2}{s^2 + K_1 s + v^2} \frac{\beta_n}{s}. \quad (2.33)$$

По затухании свободных колебаний ошибка в определении текущего местоположения объекта

$$\delta\varphi_r(\infty) = [s\delta\varphi_r(s)]_{s=0} = \beta_n \quad (2.34)$$

в точности равна ошибке начальной выставки гиросплатформы.

Если бы ИНС была недемпфированной, т. е.  $K_1=0$ , то согласно (2.33)

$$\delta\varphi_r(t) = \beta_n(1 - \cos \nu t). \quad (2.35)$$

В этом случае ошибка ИНС в определении местоположения колеблется в пределах от 0 до  $2\beta_n$ . Таким образом, введение демпфирования ( $K_1 \neq 0$ ) не устраняет, а лишь стабилизирует ошибку  $\delta\varphi_r$  на уровне  $\beta_n$ .

Иначе обстоит дело в отношении ошибок ИНС по скорости  $\delta V_\eta$  и по положению гиросплатформы  $\beta$  относительно местного горизонта. Зависимость этих ошибок от  $\beta_n$  определяется выражениями

$$\delta V_\eta(s) = \frac{gs}{s^2 + K_1s + \nu^2} \frac{\beta_n}{s}; \quad (2.36)$$

$$\beta(s) = \frac{s(s + K_1)}{s^2 + K_1s + \nu^2} \frac{\beta_n}{s}, \quad (2.37)$$

которые показывают, что свободные колебания ошибок  $\delta V_\eta(t)$ ,  $\beta(t)$  затухают, причем их установившиеся значения равны нулю:

$$\delta V_\eta(\infty) = [s\delta V_\eta(s)]_{s=0} = 0;$$

$$\beta(\infty) = [s\beta(s)]_{s=0} = 0.$$

Для недемпфированной ИНС ( $K_1=0$ ), как это видно из выражений (2.36), (2.37),

$$\delta V_\eta(t) = \frac{g\beta_n}{\nu} \sin \nu t; \quad (2.38)$$

$$\beta(t) = \beta_n \cos \nu t + \frac{K_1\beta_n}{\nu} \sin \nu t, \quad (2.39)$$

т. е. ошибки изменяются по гармоническому закону с амплитудой, пропорциональной ошибке  $\beta_n$  начальной выставки гиросплатформы. Следовательно, введение демпфирования повышает точность данных о скорости объекта, вырабатываемых ИНС, и точность следования гиросплатформы за местным горизонтом. Такие же результаты (с привнесением рассмотренных выше дополнительных ошибок) получаются и при демпфировании ИНС внутренними связями.

Демпфировать свободные колебания особенно выгодно, когда ИНС корректируется по местным ориентирам. Эта коррекция позволяет снять ошибку ИНС  $\delta\varphi_r$  в определении местоположения. Поскольку в демпфированной ИНС со временем устанавливается  $\beta=0$ , после указанного корректирования повторное накопление ошибки  $\delta\varphi_r$  (оно обуславливается составляющей  $g\beta$  ускорения си-

лы тяжести) будет происходить гораздо медленнее, чем в случае отсутствия демпфирования [см. (2.39)].

При корректировании ИНС по местным ориентирам могут представить интерес способы демпфирования ИНС внутренними связями, в особенности способ, заключающийся в охвате первого интегратора прямой связью. Свойственная этому способу дополнительная ошибка  $\delta\varphi_T(t)$  возникает лишь при начальном разгоне объекта и со временем затухает (см. разд. 2.4). Длительность переходного процесса можно сократить, увеличивая частоту свободных колебаний ИНС (см. разд. 2.3).

В заключение заметим, что демпфирование влияет и на ошибки ИНС, порожденные дрейфом гиросплатформы. Это влияние рассматривается в следующей главе.

## ГЛАВА 3

# ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ НАВИГАЦИИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОШИБКОЙ ОТ ДРЕЙФА ГИРОСКОПОВ

Гироскопы, используемые в системе стабилизации платформы, не идеальны. Это выражается в случайном уходе (дрейфе) гиросплатформы от заданного начального положения. На структурной схеме ошибок ИНС дрейф гиросплатформы обычно представляют скоростью дрейфа  $\varepsilon$ , приложенной на входе интегрирующего звена, соответствующего гиросплатформе (см. рис. 2.2—2.10).

Составляя передаточную функцию  $\delta\varphi_T/\varepsilon_\varepsilon$ , связывающую скорость дрейфа  $\varepsilon_\varepsilon$  с ошибкой ИНС  $\delta\varphi_T$  в определении местоположения, видим, что передаточная функция любой из рассмотренных ранее схем ИНС содержит множитель  $1/s$ . Следовательно, выражение ошибки  $\delta\varphi_T$  содержит в качестве слагаемого интеграл от скорости дрейфа  $\varepsilon_\varepsilon$  и если, например,  $\varepsilon_\varepsilon = \text{const}$ , то ошибка ИНС  $\delta\varphi_T$  со временем беспредельно возрастает. Как показано в разд. 1.5, дрейф  $\varepsilon_\varepsilon$  в виде случайного процесса «белый шум» вызывает случайную ошибку ИНС  $\delta\varphi_T$ , среднее квадратичное значение которой также беспредельно возрастает.

## 3.1. ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОШИБКИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ОТ ДРЕЙФА ГИРОПЛАТФОРМЫ

Пусть автономная ИНС работает без использования внешней информации о координатах цепи «идеальной работы» (внешней по отношению к ИНС является, например, информация о скорости судна, получаемая от лага. Причина, по которой  $1/s$  фигурирует множителем в передаточной функции  $\delta\varphi_T/\varepsilon_\varepsilon$  заключается в том, что в случае обычной ИНС передаточная функция замкнутой системы ошибок  $\delta\varphi_T/\varepsilon_\varepsilon$  не содержит в числителе множителя  $s$  и, следовательно, интегратор, с помощью которого из  $\delta\varphi_T$  получается  $\delta\varphi_T$ , обуславливает в передаточной функции  $\delta\varphi_T/\varepsilon_\varepsilon$  множитель  $1/s$ .

Исследуем, возможно ли синтезировать ИНС с ограниченной ошибкой  $\delta\varphi_r$  от дрейфа гироскопов без использования внешней информации. Прежде всего необходимо заменить упомянутый интегратор [звено  $I$  на структурных схемах (см. рис. 2.1, 2.2, 2.7)], например, инерционным звеном  $\frac{1}{s+K}$ . Однако для ликвидации растущей ошибки ИНС от дрейфа гироскопов этой замены недостаточно, о чем свидетельствует схема ИНС, представленная на рис. 2.2. В этой схеме передаточная функция  $\delta\varphi_r/\varepsilon$  по-прежнему имеет множитель  $1/s$ , хотя интегратор  $I$  заменен инерционным звеном  $\frac{1}{s+K}$ . Множитель  $1/s$  возникает из-за передаточной функции разветвления  $p \rightarrow qr$ , имеющей в числителе множитель  $s$ .

Задача состоит в том, чтобы, сохраняя обратную связь  $K_2$  вокруг интегратора  $I$  и одинаковость передаточных функций по каналу второго интегратора и каналу гироплатформы для режима «идеальной работы», сделать передаточную функцию упомянутого разветвления без множителя  $s$  в числителе. Но прежде необходимо рассмотреть вопрос о формировании каналов ИНС.

### 3.2. ФОРМИРОВАНИЕ КАНАЛОВ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ РЕЖИМА «ИДЕАЛЬНОЙ РАБОТЫ»

«Идеальный режим работы» любой платформенной ИНС может быть представлен структурной схемой, аналогичной схеме, изображенной на рис. 3.1. Скорость изменения широты  $\dot{\varphi}_0$ , вырабатываемая первым интегратором  $A$  и звеном  $B$  по показаниям акселерометра, из которых предварительно исключено кориолисово ускорение, разветвляется на два канала. Один канал (звенья  $D$ ,  $E$ ) соответствует гироплатформе, выходной сигнал которой —  $\varphi_0$  равен углу поворота гироплатформы относительно ее начального положения. Другой канал, состоящий из второго интегратора  $C$ , воспроизводит с точностью до знака передаточную функцию первого канала. Этот канал имеет чисто информационное назначение, т. е. вводится лишь с целью обеспечения приборного измерения величины  $\varphi_0$ . Его выходом служит приращение широты  $\varphi_0$  по отношению к начальному местоположению объекта.

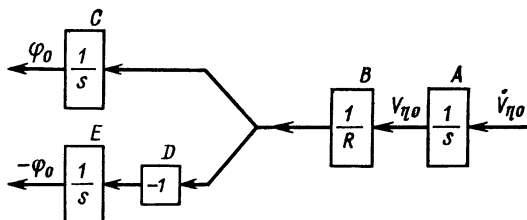


Рис. 3.1. Структурная схема ИНС в режиме идеальной работы

В схемах ИНС, представленных на рис. 2.2, 2.7, 2.8, 2.9, канал  $DE$  не показан, хотя его наличие предполагается. В этих схемах передаточные функции каналов  $ABDE$  и  $ABC$ , соответствующих «идеальному режиму работы», будучи идентичными, отличаются от идеального их выражения  $\frac{1}{Rs^2}$ , вследствие чего образуется отличный от нуля сигнал  $\delta$ , действующий на замкнутую систему ошибок ИНС. В классической схеме ИНС с демпфированием собственных колебаний путем использования внешней информации о скорости (см. рис. 2.1) передаточные функции каналов  $ABDE$  и  $ABC$  есть  $\frac{1}{Rs^2}$  и сигнал  $\delta$  равен нулю.

В общем случае главным условием при формировании каналов «идеального режима работы» любой ИНС является обеспечение идентичности передаточных функций каналов, аналогичных каналам  $ABDE$  и  $ABC$ .

### 3.3. СХЕМА ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОШИБКОЙ ОТ ДРЕЙФА ГИРОПЛАТФОРМЫ

В разд. 3.1 обоснованы условия, выполнение которых приводит к ликвидации растущей ошибки ИНС от дрейфа  $\epsilon$  гироскопов. Эти условия заключаются в следующем (см. рис. 2.2):

1) интегратор  $I$  должен быть охвачен жесткой отрицательной обратной связью, благодаря чему интегрирующее звено  $I$  переходит в другое, например, колебательное звено;

2) передаточная функция разветвления  $p$ — $qr$  не должна содержать множителя  $s$  в числителе;

3) передаточные функции каналов  $ABDE$  и  $ABC$ , соответствующих «идеальному режиму работы», должны быть идентичными. Желательно, чтобы каждая из них была  $-\frac{1}{Rs^2}$ .

Все эти условия выполнены в схеме ИНС, показанной на рис. 3.2. Действительно, выполнение первого условия ясно из рис. 3.2. Вычисляя передаточную функцию разветвления  $p$ — $qr$ , находим

$$1 + \frac{s}{K_3 s^2 + K_2 s + K_1} = \frac{K_3 s^2 + (K_2 + 1)s + K_1}{K_3 s^2 + K_2 s + K_1}.$$

Следовательно, второе условие также удовлетворено.

Перейдем к проверке удовлетворения третьего условия. Роль канала  $ABDE$  в данной схеме выполняют звенья  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ . Передаточные функции звеньев  $B_1, C_1, E_1, F_1$  даны на структурной схеме, а передаточные функции звеньев  $A_1$  и  $D_1$  определяются соответственно выражениями

$$\frac{K_3 s^2 + K_2 s + K_1}{s} \text{ и } \frac{s}{K_3 s^2 + K_2 s + K_1}.$$





Более простая схема ИНС, в которой ошибка  $\delta\varphi_r$  от дрейфа гироскопов  $\varepsilon$  также ограничена, показана на рис. 3.3. От классической схемы невозмущаемой ИНС (см. рис. 1.9) эта схема отличается только звеном  $Q$ . Звено  $Q$  имеет передаточную функцию (3.1), так что с его помощью в цепь обратной связи системы, связывающей  $\delta V_\eta$  с  $\varepsilon$ , вводится интегрирующее звено  $1/s$ . Благодаря этому по  $\delta V_\eta$  в отношении  $\varepsilon$  осуществляется астатическое регулирование, а по  $\delta\varphi_r$  — статическое регулирование. Другими словами, при постоянной скорости дрейфа  $\varepsilon = \text{const}$  ошибка ИНС в определении местоположения также будет постоянной  $\delta\varphi_r = \text{const}$ .

Представленная на рис. 3.3 схема ИНС предполагает дифференцирование медленно изменяющихся сигналов. Однако при использовании ЦВМ эта операция не вызывает трудностей.

### 3.4. ТОЧНОСТЬ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ОШИБКОЙ ОТ ДРЕЙФА ГИРОСКОПОВ

Характеристическое уравнение замкнутой системы ошибок как для первой (рис. 3.2), так и второй (рис. 3.3) схем ИНС имеет следующий вид:

$$s^3 + \nu^2 K_3 s^2 + \nu^2 (K_2 + 1) s + \nu^2 K_1 = 0. \quad (3.2)$$

Каждый из коэффициентов этого уравнения зависит от подлежащих выбору коэффициентов  $K_1, K_2, K_3$ . Следовательно, корням характеристического уравнения можно придать любые желаемые значения.

Используя метод стандартных коэффициентов, примем для характеристического полинома биномиальную стандартную форму [11]. Для системы третьего порядка эта форма

$$(s + \omega_0)^3 = s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3. \quad (3.3)$$

Поскольку числитель передаточной функции  $\delta\varphi_r/\varepsilon$  — постоянная величина [см. (3.5)], стандартная форма характеристического полинома обеспечивает оптимальное протекание реакции  $\delta\varphi_r(t)$  на сигнал  $\varepsilon = \text{const}$ .

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  уравнений (3.2) и (3.3), находим

$$K_1 = \frac{\omega_0^3}{\nu^2}; \quad K_2 = \frac{3\omega_0^2 - \nu^2}{\nu^2}; \quad K_3 = \frac{3\omega_0}{\nu^2}. \quad (3.4)$$

Исследуем ошибку  $\delta\varphi_r$ , допускаемую ИНС в определении местоположения объекта. Как видно из рис. 3.2, причиной возникновения этой ошибки могут явиться неточность  $\beta_n$  начальной выставки гиropлатформы в горизонт и скорость дрейфа  $\varepsilon$  гиropлатформы. Оба эти воздействия можно считать приложенными к замкнутой системе ошибок в одной и той же точке, а именно, на входе гиropлатформы  $f_1$  (см. рис. 3.3). В случае ИНС со свободной в азиму-



те гироскопической в этой же точке приложено воздействие  $-\Omega \cos \varphi \sin \chi$ , выражающее вращение Земли (если нет специально сформированного сигнала, компенсирующего это воздействие). Все указанные воздействия связаны с ошибкой  $\delta\varphi_r$  одной и той же передаточной функцией.

Оценим сначала ошибку от дрейфа  $\varepsilon$ . Передаточная функция, связывающая дрейф с ошибкой определения местоположения, имеет вид

$$\frac{\delta\varphi_r}{\varepsilon} = \frac{\nu^2}{(s + \omega_0)^3}. \quad (3.5)$$

При постоянной скорости дрейфа  $\varepsilon = \text{const}$  ошибка  $\delta\varphi_r$  не возрастает во времени, как это имеет место в обычных ИНС, а устанавливается на постоянном уровне

$$\delta\varphi_r(\infty) = \frac{\nu^2}{\omega_0^3} \varepsilon. \quad (3.6)$$

То же самое можно сказать и о воздействии  $-\Omega \sin \varphi \cos \chi$  для ИНС со свободной в азимуте гироскопической платформой. Поскольку это воздействие практически постоянно и невелико, то и вызываемая им ошибка ИНС  $\delta\varphi_r$ , будучи постоянной, весьма мала. Следовательно, для ИНС со свободной в азимуте платформой, работающей согласно представленному на рис. 3.3 алгоритму, можно не производить специальную компенсацию влияния вращения Земли.

Легко показать, что при дрейфе  $\varepsilon$  в виде стационарного случайного процесса средняя квадратичная ошибка  $\delta\varphi_r$  ограничена, и выбором  $\omega_0$  ее, как и ошибку (3.6), можно сделать сколь угодно малой.

Рассмотрим ошибку  $\delta\varphi_r$ , обусловленную неточностью начальной выставки  $\beta_n$  гироскопической платформы. Как видно из рис. 3.3, эта ошибка в области изображений по Лапласу

$$\delta\varphi_r(s) = \frac{\nu^2 \beta_n}{(s + \omega_0)^3}, \quad (3.7)$$

а в области оригиналов

$$\delta\varphi_r(t) = \frac{1}{2} \nu^2 \beta_n t^2 e^{-\omega_0 t}. \quad (3.8)$$

Максимальное значение этой ошибки будет в момент  $t = \frac{2}{\omega_0}$  и равно

$$\delta\varphi_{r\max} = \frac{2\nu^2 \beta_n}{e^2 \omega_0^2}. \quad (3.9)$$

Поскольку в системе (3.7) резонансные пики отсутствуют, параметру  $\omega_0$  можно придать любое значение. Если, например, принять  $\omega_0 = \frac{1}{30}$  с, то

$$\delta\varphi_{r\max} = 3,338 \cdot 10^{-4} \beta_n. \quad (3.10)$$

Обратимся к оценке ошибки ИНС по скорости. Как видно из рис. 3.3, передаточная функция, связывающая  $\varepsilon$  с  $\delta V_\eta$ , имеет вид

$$\frac{\delta V_\eta}{\varepsilon} = \frac{gs}{(s + \omega_0)^3}. \quad (3.11)$$

При постоянной скорости дрейфа  $\varepsilon = \text{const}$  установившаяся ошибка ИНС по скорости равна нулю.

Рассмотрим противоположный случай, когда скорость изменения велика, а именно, предположим, что  $\varepsilon$  — белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью мощности  $S$ . Дисперсия ошибки ИНС по скорости будет

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{gj\omega}{(j\omega)^3 + 3\omega_0(j\omega)^2 + 3\omega_0^2j\omega + \omega_0^3} \right|^2 S d\omega = \frac{g^2S}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j\omega(-j\omega)}{[(j\omega)^3 + 3\omega_0(j\omega)^2 + 3\omega_0^2j\omega + \omega_0^3][-(j\omega)^3 + 3\omega_0(j\omega)^2 - 3\omega_0^2j\omega + \omega_0^3]} d\omega. \quad (3.12)$$

Значение фигурирующего здесь определенного интеграла можно найти, используя известную таблицу интегралов [8]. Согласно этой таблице

$$\sigma_V^2 = g^2S \frac{c_2^2 d_0 d_1 + (c_1^2 - 2c_0 c_2) d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3 (-d_0 d_3 + d_1 d_2)}, \quad (3.13)$$

где в данном случае

$$c_1 = 1; c_2 = c_0 = 0; d_3 = 1; d_2 = 3\omega_0; d_1 = 3\omega_0^2; d_0 = \omega_0^3.$$

Подставляя эти данные в выражение (3.13), в качестве среднего квадратичного значения  $\delta V_\eta$  получим

$$\sigma_V = \frac{g \sqrt{S}}{4\omega_0 \sqrt{\omega_0}}. \quad (3.14)$$

В действительности дрейф  $\varepsilon$  не белый, а цветной шум — со смещением основной части мощности в область низких частот. Поэтому ошибка  $\delta V_\eta$  ближе к нулю, чем к значению, определяемому формулой (3.14).

Рассмотрим составляющую ошибки  $\delta V_\eta$ , обусловленную неточностью  $\beta_n$  начальной выставки гиросплатформы. Сопоставляя передаточные функции (3.5) и (3.11), видим, что выражение этой составляющей можно получить дифференцированием уравнения (3.8) по времени при замене постоянной  $v^2 \beta_n$  постоянной  $g \beta_n$ . Имеем

$$\delta V_\eta = g \beta_n t \left( 1 - \frac{\omega_0}{2} t \right) e^{-\omega_0 t}. \quad (3.15)$$

Эта ошибка принимает экстремальные значения при

$$t_1, t_2 = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{\omega_0}, \quad (3.16)$$

причем эти значения

$$\delta V_{\eta \text{экстр}} = \pm \frac{\sqrt{2 \mp 1}}{e^{2 \mp \sqrt{2}}} \frac{g \beta_{\text{н}}}{\omega_0}. \quad (3.17)$$

При обычных точностях выставки гиросплатформы и достаточно большой величине  $\omega_0$  ошибка  $\delta V_{\eta}$  не достигает больших значений, так что можно сделать вывод, что ИНС, реализующая представленный на рис. 3.3 алгоритм, может вырабатывать весьма точные данные о скорости объекта. Эти данные пригодны в ИНС для проведения компенсации кориолисова ускорения.

В отличие от ранее исследованных схем для рассматриваемой здесь ИНС (см. рис. 3.3) компенсация кориолисова ускорения обязательна. Необходимость компенсации кориолисова ускорения вытекает из того, что изображенная на рис. 3.2 схема уже не обладает адаптивными свойствами к неточностям структуры, в частности, к кориолисову ускорению. Например, в показанной на рис. 2.8 схеме адаптивные свойства возникают благодаря равенству позиционного системного коэффициента  $C_0$  передаточной функции  $\delta \varphi_{\text{г}}/\delta$  единице.

При  $C_0=1$  происходит самокомпенсация ошибки ИНС, вызываемой кориолисовым ускорением (см. разд. 1.4). Для ИНС, схема которой показана на рис. 3.3, системный коэффициент  $C_0$  функции  $\delta \varphi_{\text{г}}/\delta$  равен нулю, так что никакой самокомпенсации ошибки от кориолисова ускорения не происходит.

Как уже отмечалось, компенсацию кориолисова ускорения в показанной на рис. 3.3 ИНС можно осуществлять, используя скорость  $V_{\eta}$ , вырабатываемую этой же ИНС.

Исследуем теперь точность горизонтирования гиросплатформы. Сигналы  $\epsilon$  и  $\beta_{\text{н}}$  связаны с углом  $\beta$  отклонения платформы от местного горизонта передаточной функцией (см. рис. 3.3)

$$\frac{\beta}{\epsilon} = \frac{s^2}{(s + \omega_0)^3}. \quad (3.18)$$

Сравнивая эту функцию с передаточной функцией (3.11), видим, что переходный процесс  $\beta(t)$ , возбужденный начальным отклонением платформы  $\beta_{\text{н}}$ , можно получить, дифференцируя уравнение (3.15) по времени и опуская в полученном выражении множитель  $g$ :

$$\beta(t) = \beta_{\text{н}} \left( 1 - 2\omega_0 t + \frac{\omega_0^2 t^2}{2} \right) e^{-\omega_0 t}. \quad (3.19)$$

Функция  $\beta(t)$  принимает экстремальные значения при

$$t_1, t_2 = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{\omega_0}. \quad (3.20)$$

Величина экстремальных значений

$$\beta_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{3}}{e^{3 \mp \sqrt{3}}} \beta_{\text{н}} \quad (3.21)$$

меньше начального значения  $\beta_n$ . Поскольку с течением времени  $\beta(t)$  затухает достаточно быстро, приходим к выводу, что в любой момент времени гиropлатформа практически находится в местном горизонте. Этот вывод не изменяется и при учете влияния на  $\beta(t)$  скорости дрейфа гиropлатформы  $\epsilon$ .

### 3.5. СХЕМА ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ АКСЕЛЕРОМЕТРОМ

Для объектов, движущихся по поверхности Земли, в принципиальном отношении возможно синтезировать ИНС с ограниченной ошибкой от дрейфа гироскопов, вводя в схему ИНС третий акселерометр с осью чувствительности, направленной по вертикальной оси гиropлатформы (рис. 3.4).

Рассмотрим канал ИНС, соответствующий оси  $O_1x$  гиropлатформы (рис. 3.5). Пусть  $a_{10}$  — ускорение объекта в направлении оси  $O_1x$ , перпендикулярное вектору ускорения силы тяжести  $g$ . Полагая аналогичное ускорение  $a_{20}$  в направлении оси  $O_1y$  и вертикальное ускорение  $a_{30}$  (совпадает с направлением вектора  $-g$ ) равными нулю и учитывая уравнение акселерометра (1.33), получим для показаний  $f_1, f_3$  горизонтального и вертикального акселерометров следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{10} \cos \alpha - g \sin \alpha; \\ f_3 &= a_{10} \sin \alpha + g \cos \alpha. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Эти выражения представляют систему двух уравнений с двумя неизвестными  $a_{10}$  и  $\alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона платформы к местному горизонту. Разрешим уравнения относительно угла  $\alpha$ . Исключая

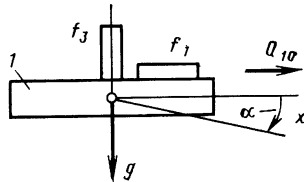
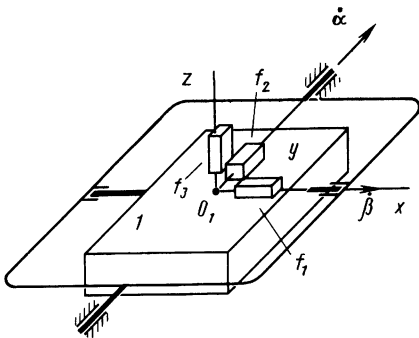


Рис. 3.4. ИНС с вертикальным акселерометром:

1—гиropлатформа;  $f_1, f_2$ —горизонтальные акселерометры;  $f_3$ —вертикальный акселерометр

Рис. 3.5. Канал ИНС, соответствующий оси  $x$ :

1—гиropлатформа;  $f_1, f_3$ —горизонтальный и вертикальный акселерометры

$a_{10}$ , приходим к квадратному уравнению относительно  $\sin \alpha$ . Корни этого квадратного уравнения

$$\sin \alpha_{1,2} = \frac{1}{f_1^2 + f_3^2} \left[ -f_1 g \pm f_3 \sqrt{f_3^2 + f_1^2 - g^2} \right]. \quad (3.23)$$

В правую часть данного выражения входят известные величины, так что для любого момента времени значения  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  могут быть вычислены. Возникает вопрос, какое из двух значений представляет угол отклонения гиросплатформы от местного горизонта. Чтобы решить этот вопрос, зададимся каким-либо значением перегрузки  $a_{10}/g$ , т. е. выражениями  $f_1$ ,  $f_2$  через ускорение силы тяжести  $g$ , и вычислим согласно формуле (3.23)  $\sin \alpha_{1,2}$ .

Пусть  $a_{10} = 0$ . Тогда согласно (3.22)

$$f_1 = -g \sin \alpha, \quad f_3 = g \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — действительное значение угла отклонения платформы от местного горизонта.

Подставляя эти выражения в формулу (3.22), находим

$$\sin \alpha_{1,2} = \sin \alpha.$$

В данном случае вычисленное значение  $\alpha_1$  совпадает с действительным значением угла  $\alpha$ .

Пусть теперь  $a_{12} = g$ . Согласно (3.22)

$$f_1 = g(\cos \alpha - \sin \alpha); \quad f_3 = g(\sin \alpha + \cos \alpha). \quad (3.24)$$

При подстановке выражений (3.24) в формулу (3.23) получим

$$\sin \alpha_{1,2} = \frac{1}{2g^2} \left[ -g^2(-\sin \alpha + \cos \alpha) \pm g^2(\sin \alpha + \cos \alpha) \right]. \quad (3.25)$$

Соответствие членов этого выражения членам выражения (3.23) здесь сохранено. Чтобы вычисленное значение  $\alpha_1$  совпадало с действительным значением угла наклона платформы  $\alpha$ , необходимо, как это видно из (3.25), при пользовании формулой (3.23) брать перед корнем квадратным знак плюс. Заметим, что при таком выборе знака модуль правой части выражения (3.25) получает наименьшее значение.

Рассмотрим случай  $a_{10} = -g$ . Согласно (3.22)

$$f_1 = -g(\cos \alpha + \sin \alpha); \quad f_2 = g(\cos \alpha - \sin \alpha).$$

При подстановке этих выражений в формулу (3.23) находим

$$\sin \alpha_{1,2} = \frac{1}{2g^2} \left[ g^2(\sin \alpha + \cos \alpha) \pm (\cos \alpha - \sin \alpha) \right]. \quad (3.26)$$

Как показывает выражение (3.26), вычисленное значение  $\alpha_1$  совпадает с действительным значением угла  $\alpha$ , если при вычислениях по формуле (3.23) перед корнем квадратным взять знак минус. При таком выборе знака модуль правой части уравнения (3.23) по-прежнему принимает наименьшее значение. Проведенный ана-

лиз показывает, что в общем случае вычисления по формуле (3.23) угла наклона платформы к горизонту из двух значений  $\sin \alpha_{1,2}$ , вытекающих из этой формулы, необходимо принимать в качестве  $\alpha$  наименьшее по модулю.

Определение угла  $\alpha$  по формуле (3.23) решало бы задачу построения местной вертикали и задачу инерциальной навигации в целом, если бы не было мешающих факторов. Мешающими факторами здесь являются: 1) влияние на показания  $f_3$  вертикального акселерометра другого канала ИНС (в данном случае канала  $y$ ); 2) влияние на показания  $f_3$  вертикальных ускорений объекта.

Вертикальные ускорения  $a_{03}$  объекта, например, при гармоническом законе их изменения вызовут систематическую ошибку в вычисленном значении  $\alpha_1$ , что объясняется детектирующим действием нелинейности, выражаемой вторым членом правой части уравнения (3.23). Поэтому в показания  $f_3$  вертикального акселерометра составляющую, соответствующую вертикальным ускорениям объекта, необходимо компенсировать.

Исследуем влияние на вычисленное значение  $\alpha_1$  другого по отношению к рассматриваемому канала ИНС. Считая углы  $\alpha$ ,  $\beta$  отклонения платформы от горизонта малыми (см. рис. 3.4), для показаний акселерометров находим следующие выражения:

$$f_1 = a_{10} - g\alpha; f_2 = a_{20} + g\beta; f_3 = g + a_{10}\alpha - a_{20}\beta. \quad (3.27)$$

Исключая из выражений  $f_1$  и  $f_3$  ускорение  $a_{10}$ , получим квадратное уравнение относительно  $\alpha$ . Корни этого уравнения

$$\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2g} \left( -f_1 \pm \sqrt{f_1^2 + 4gf_3 - 4g^2 + 4ga_{20}\beta} \right). \quad (3.28)$$

Другой канал ИНС влияет на вычисленное значение  $\alpha_1$  через член  $4ga_{20}\beta$ , который, однако, при отсутствии ускорения объекта в другом канале ( $a_{20} = 0$ ) исчезает.

Аналогичным образом, исключая из выражений  $f_2$  и  $f_3$  ускорение  $a_{20}$ , получаем квадратное уравнение относительно угла наклона  $\beta$ , и его корни

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2g} \left( f_2 \pm \sqrt{f_2^2 + 4gf_3 - 4g^2 - 4ga_{10}\alpha} \right). \quad (3.29)$$

Если выражения (3.28), (3.29) линеаризовать соответственно в отношении  $\beta$  и в отношении  $\alpha$  для окрестности равновесных значений  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  и полученные коэффициенты линеаризации

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} &= \pm \frac{a_{20}}{\sqrt{f_1^2 + 4gf_3 - 4g^2}}; \\ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} &= \mp \frac{a_{10}}{\sqrt{f_2^2 + 4gf_3 - 4g^2}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

использовать в структурной схеме, представляющей взаимное влияние каналов ИНС, то придем к замкнутой системе, изображенной

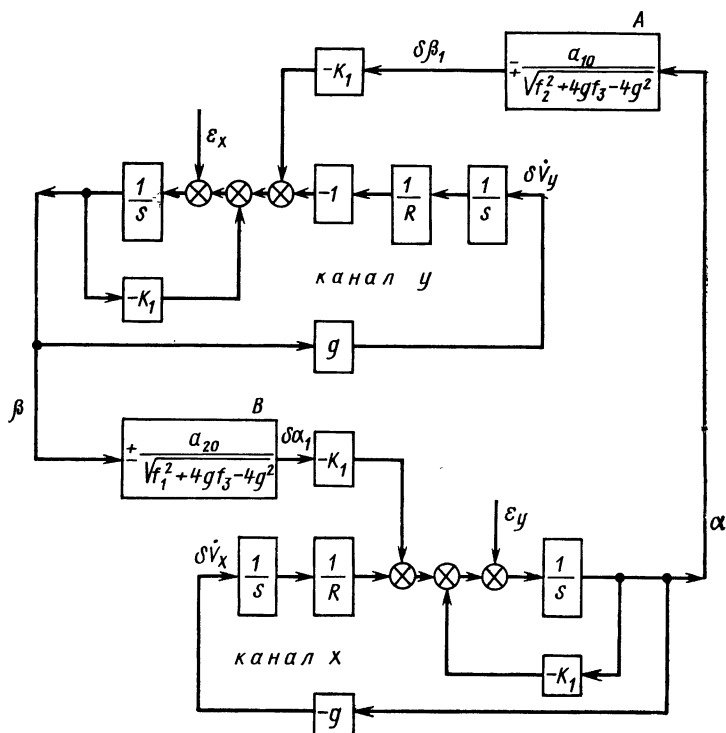


Рис. 3.6. Схема взаимного влияния каналов ИНС, имеющей вертикальный акселерометр:

$\alpha$ ,  $\beta$ —действительные углы отклонения гиросплатформы от горизонта;  $\delta\alpha_1$ ,  $\delta\beta_1$ —ошибки вычисления углов  $\alpha$ ,  $\beta$  по формуле (3.23)

на рис. 3.6. Эту замкнутую систему можно реализовать, подавая вычисленное по формуле (3.23) значение  $\alpha_1$  через звено  $-K_1$  на моментный датчик канала  $x$ , а значение  $\beta_1$ , вычисленное по аналогичной формуле,— через такое же звено на моментный датчик канала  $y$ . Тогда вокруг интеграторов, представляющих в структурной схеме ошибок гиросплатформу, возникнут отрицательные обратные связи  $-K_1$ , что обеспечит демпфирование ошибок ИНС, а замкнутые системы ошибок, соответствующие каналам  $x$  и  $y$ , станут связанными, как показано на рис. 3.6.

Внешний контур регулирования, образующийся за счет перекрестных связей между каналами, замкнут лишь тогда, когда объект движется с ускорением как в направлении оси  $O_1x$ , так и оси  $O_1y$  ( $a_{10} \neq 0$ ,  $a_{20} \neq 0$ ), причем обратная связь в этом контуре может быть и отрицательной, и положительной. В случае положительной обратной связи заметная расходимость процессов наступить не может, так как ускорения  $a_{10}$ ,  $a_{20}$ , приводящие к положительной обратной связи, долго существовать не могут.

Рис. 3.7. Корневой годограф системы с передаточной функцией по контуру

$$G(s) = \frac{Ks^2}{(s^2 + K_1s + v^2)^2},$$

где

$$K = K_1^2 \left| \frac{a_{10}a_{20}}{V(f_1^2 + 4gf_3 + 4g^2)(f_2^2 + 4gf_3 - 4g^2)} \right|.$$

Можно с помощью логического устройства вообще устранить эту расходимость. Логическое устройство, получая информацию о знаках  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  и выбравших знаках перед передаточными функциями звеньев  $A$ ,  $B$ , замыкает внешний контур (разрешает поступление сигнала на моментный датчик через звено  $-K_1$ ) только на интервалах времени, на которых обратная связь во внешнем контуре отрицательная или этот контур разомкнут ( $a_{10}=0$  или  $a_{20}=20$ ).

Если обратная связь во внешнем контуре отрицательная, то этот контур устойчив, о чем свидетельствует его корневой годограф (рис. 3.7).

Интеграторы, представляющие собой гиросплатформу, все время охвачены отрицательной обратной связью  $-K_1$ , за исключением упомянутых интервалов времени, на которых во внешнем контуре могла бы возникать положительная обратная связь (на этих интервалах обратной связи вокруг интеграторов нет). Поскольку интеграторы почти все время охвачены отрицательной обратной связью, свободные колебания ошибок отдельных каналов затухают, так что  $\alpha(t) \rightarrow 0$ ,  $\beta(t) \rightarrow 0$ . Следовательно, влияние угла  $\beta$  на расчетное значение  $\alpha_1$ , представляемое на структурной схеме сигналом  $\delta\alpha_1$  (см. рис. 3.6), со временем ослабевает и расчетное значение  $\alpha_1$ , получаемое по формуле (3.23), становится все ближе к действительному значению угла  $\alpha$  отклонения платформы от горизонта. То же самое можно сказать и о расчетном значении  $\beta_1$ .

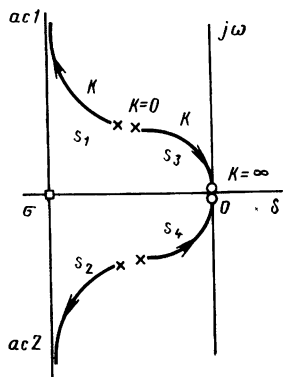
Таким образом, расчетные значения  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  можно использовать для вычисления ускорений объекта  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  согласно вытекающим из (3.27) формулам

$$a_{10} = f_1 + g\alpha_1; \quad a_{20} = f_2 - g\beta_1. \quad (3.31)$$

Производя интегрирование, находим составляющие скорости объекта

$$V_{x0} = \int (f_1 + g\alpha_1) dt; \quad V_{y0} = \int (f_2 - g\beta_1) dt.$$

Пересчет этих скоростей на северную  $V_{N0}$  и восточную  $V_{E0}$  составляющие и последующее интегрирование этих составляющих позволит определить широту и долготу текущего местоположения объекта.





Достоинство предлагаемой схемы ИНС заключается в том, что дрейф в гироскопической платформе в рассматриваемом канале ИНС (например, в канале  $x$ ) не вызывает ошибок в определении скорости и местоположения объекта по этому каналу. Такие ошибки могут возникать лишь из-за влияния другого канала (канала  $y$ ) через член  $4ga_{20\beta}$  в формуле (3.28). Однако, как уже было объяснено, это влияние невелико.

ИНС, представленная на рис. 3.6, не испытывает возмущений при любом движении объекта по поверхности Земли и, если объект не имеет вертикальных ускорений, ее можно считать автономной. Как уже отмечалось, вертикальные ускорения в показаниях акселерометра  $f_z$  должны быть компенсированы, что возможно лишь при использовании информации от внешнего по отношению к рассматриваемой ИНС источника.

Недостаток этой схемы по сравнению с классической автономной ИНС заключается в том, что она уже не обладает адаптирующими свойствами в отношении смещений в показаниях акселерометров. Смещения вызывают ошибку в вычисленных значениях  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и, следовательно, растущие ошибки в определении скорости и местоположения объекта.

#### ГЛАВА 4

### БЕСПЛАТФОРМЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Платформенные ИНС обладают некоторыми недостатками, главным из которых является высокая стоимость прецизионной гиросtabilизированной платформы. При маневрировании летательного аппарата (ЛА) рамки карданова подвеса гироскопической платформы складываются, что при больших углах поворота ЛА может сделать гироскопическую платформу неработоспособной. Прецизионная гироскопическая платформа имеет относительно большие массу и габариты. Все эти обстоятельства, а также успехи в развитии цифровой вычислительной техники породили стремление создать бесплатформенную ИНС (БИНС), в которой на бортовую цифровую вычислительную машину (БЦВМ), помимо определения местоположения и скорости, перекладывается и задача определения угловой ориентации объекта.

В схеме БИНС источники первичной информации (гироскопы, акселерометры) непосредственно связаны с корпусом объекта, навигационные параметры которого необходимо определять. Показания этих источников перерабатываются бортовой БЦВМ, которая выдает данные о местоположении, скорости и угловой ориентации объекта. Существует много алгоритмов, реализующих БИНС. В настоящей главе рассматривается алгоритм, особенность которого — максимальное снижение объема расчетов, возлагаемых на БЦВМ.

Рассмотрим БИНС, назначение которой — определять навигационные параметры объекта, движущегося вблизи поверхности Земли. Следуя Б. В. Булгакову, будем в дальнейшем объект называть машиной, а географический трехгранник  $O_1\xi\eta\zeta$  (см. рис. 1.4) — трехгранником Дарбу [5]. В соответствии с этим систему координат, связанную с машиной, отмечаем индексом  $m$ , а географический трехгранник — индексом  $d$ . Этими же индексами отмечаем матрицы и производные векторов, относящиеся к соответственным системам координат. Более подробно система принятых обозначений поясняется в следующем разделе.

#### 4.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Помимо систем координат, использованных в разд. 1.2, введем еще правую систему координат, связанную с машиной. В дальнейшем будут использоваться следующие правые системы координат:

$i$  — инерциальная система координат с началом  $O$  в центре Земли. Ее ось  $Oy$  совпадает с осью Земли и направлена на север, оси  $Ox$  и  $Oz$  лежат в плоскости экватора, причем в начальный момент времени ось  $z$  находится в плоскости гринвичского меридиана;

$n$  — навигационная (земная) система, связанная с Землей. Ее начало  $O$  находится в центре Земли, ось  $Oy$  направлена к северному полюсу, ось  $Oz$  лежит на пересечении плоскости экватора с плоскостью меридиана;

$d$  — географический трехгранник с началом  $O_1$  в точке местоположения объекта, ранее (см. гл. 1) обозначавшийся  $O_1\xi\eta\zeta$ . Его оси теперь будут  $O_1x$ ,  $O_1y$ ,  $O_1z$ , причем ось  $O_1z$  касательна к поверхности Земли и направлена на север, а ось  $O_1x$  направлена в зенит;

$m$  — система, жестко связанная с машиной (объектом).

Дифференцирование по времени вектора относительно какой-либо системы координат будем обозначать постановкой над буквой, обозначающей этот вектор, индекса этой системы координат.

Например,  $\overset{i}{\bar{B}}$ ,  $\overset{n}{\bar{B}}$  обозначают производные по времени вектора  $\bar{B}$  соответственно относительно инерциальной  $i$  и навигационной  $n$  систем координат;

$\bar{R}$  — радиус-вектор точки текущего местоположения машины с началом в центре Земли;

$\bar{V} = \overset{n}{\bar{R}}$  — скорость машины относительно Земли (земная скорость);

$\bar{U} = \overset{i}{\bar{R}}$  — скорость машины относительно инерциальной системы координат (инерциальная скорость);

$\bar{\Omega}$  — вектор угловой скорости, с которой система  $n$  вращается относительно системы  $i$  (угловая скорость вращения Земли);

$\bar{\omega}$  — вектор угловой скорости, с которой система  $m$  вращается относительно системы  $i$ ;

$\bar{p}$  — вектор угловой скорости, с которой система  $m$  вращается относительно системы  $n$ ;

$C_{fq}$  — матрица-столбец (вектор с размерностью  $n=3$ ), элементы которой — проекции вектора  $C_f$  на оси системы  $q$  (роль системы  $q$  выполняют системы  $i, m, n, d$ ). Если использован только один нижний индекс, то он указывает координатную систему, по осям которой разложен вектор;

$D_{pq}$  — матрица перехода от системы  $q$  к системе  $p$ ;

$\bar{f}$  — вектор ускорения, доступного измерению акселерометрами (вектор кажущегося ускорения);

$\bar{g}^*$  — вектор ускорения земного тяготения (гравитационной силы);

$\bar{g}$  — вектор ускорения силы тяжести.

Примем следующие предположения:

а) угловая ориентация системы  $m$  (объекта) в системе  $i$  определяется решением дифференциального уравнения Пуассона относительно матрицы направляющих косинусов  $D_i^m$  в быстром масштабе времени (см. разд. 4.5);

б) связанные с машиной гироскопы определяют приращение  $\Delta\bar{\theta}$  угла поворота системы  $m$  относительно системы  $i$  в течение периода дискретизации  $T$ :

$$\Delta\bar{\theta} = \int_t^{t+T} \bar{\omega} d\tau, \quad (4.1)$$

а связанные с машиной акселерометры — приращение абсолютной скорости  $\Delta\bar{\beta}$ , определяемое формулой

$$\Delta\bar{\beta} = \int_t^{t+T} f d\tau; \quad (4.2)$$

в) внутри наибольшего расчетного интервала (периода дискретизации при расчетах на ЦВМ) векторы  $g_m$  и  $g_d$  не зависят от  $\bar{R}$ ,  $\bar{V}$  и  $\bar{U}$ . Как функции  $\bar{R}$ , они изменяют свои значения лишь на конце расчетного интервала.

При разработке алгоритма БИНС будем придерживаться следующих положений [22]:

1) расчеты в быстро вращающейся координатной системе должны выполняться в быстром масштабе времени, даже если норма рассчитываемого вектора изменяется медленно;

2) будем стремиться большую часть расчетов выполнять в медленно вращающихся координатных системах, т. е. по возможности сокращать объем расчетов в быстро вращающихся системах.

## 4.2. ВЕКТОРНЫЕ И МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Скорость  $\bar{V}$  машины относительно навигационной системы  $n$  представляется решением векторного дифференциального уравнения. При помощи ЦВМ можно, однако, решать скалярное дифференциальное уравнение или систему скалярных уравнений. Поэтому подлежащее решению векторное уравнение необходимо предварительно представить в проекциях на оси какой-либо системы координат и получившуюся систему скалярных уравнений решать при помощи ЦВМ.

В принципе переход от векторного уравнения к скалярным уравнениям относительно проекций векторов на оси какой-либо системы координат не представляет трудности. Однако иногда бывает удобнее с самого начала оперировать не с векторным, а с матричным дифференциальным уравнением, соответствующим системе скалярных уравнений относительно упомянутых проекций. Далее рассматривается запись основных соотношений векторной алгебры в матричной форме.

Пусть вектор  $\bar{R}$  представляется, например, в системах  $i, m, d$  матрицами-столбцами  $R_i, R_m, R_d$ . Используя матрицу перехода от системы  $m$  к системе  $i$ , можно записать

$$R_i = D_i^m R_m. \quad (4.3)$$

Продифференцируем это матричное уравнение по времени:

$$\dot{R}_i = D_i^m \dot{R}_m + \dot{D}_i^m R_m. \quad (4.4)$$

Для матриц перехода известно тождество

$$D_i^m D_m^i = I, \quad (4.5)$$

где  $I$  — единичная матрица [3].

Вводя перед вторым членом правой части уравнения (4.4) множитель (4.5), можно уравнение (1.4) преобразовать к виду

$$\dot{R}_i = D_i^m (\dot{R}_m + D_m^i \dot{D}_i^m R_m) \quad (4.6)$$

или по введении обозначения

$$[\omega]_m = D_m^i \dot{D}_i^m, \quad (4.7)$$

где элементы матрицы  $[\omega]_m$  имеют размерность угловой скорости, — к виду

$$\dot{R}_i = D_i^m (\dot{R}_m + [\omega]_m R_m). \quad (4.8)$$

Преобразуя аналогичным образом соотношение

$$R_i = D_i^d R_d,$$

придем к уравнению

$$\dot{R}_i = D_i^d (\dot{R}_d + [\omega]_d R_d). \quad (4.9)$$

Вследствие одинаковости левых частей уравнений (4.8) и (4.9) можно записать

$$\dot{R}_i = D_i^m (\dot{R}_m + [\omega]_m R_m) = D_i^d (\dot{R}_d + [\omega]_d R_d). \quad (4.10)$$

Система  $i$  инерциальная. Поэтому матрица-столбец  $\dot{R}_i$  является представлением вектора абсолютной (инерциальной) скорости  $\vec{R}$  в системе  $i$ . Принимая во внимание, что  $D_i^m, D_i^d$  — матрицы перехода от систем  $m, d$  к системе  $i$ , на основании уравнения (4.10) приходим к выводу, что матрицы-столбцы

$$\dot{R}_m + [\omega]_m R_m, \dot{R}_d + [\omega]_d R_d \quad (4.11)$$

являются представлением этого же вектора абсолютной скорости  $\vec{R}$  соответственно в системах  $m$  и  $d$ . Таким образом, можно записать

$$U_m = \dot{R}_m + [\omega]_m R_m, U_d = \dot{R}_d + [\omega]_d R_d, \quad (4.12)$$

где  $\vec{U} = \vec{R}$  — вектор абсолютной скорости.

Уравнения (4.12) дают матричное выражение в системах  $m$  и  $d$  векторных уравнений

$$\frac{i}{R} = \frac{m}{R} + \bar{\omega}_m \times \bar{R}, \quad \frac{i}{R} = \frac{d}{R} + \bar{\omega}_d \times \bar{R}, \quad (4.13)$$

связывающих абсолютную производную  $\frac{i}{R}$  с локальными производными  $\frac{m}{R}$  и  $\frac{d}{R}$ . Матрицы-столбцы  $U_m, U_d, \dot{R}_m, \dot{R}_d$  представляют абсолютную  $\frac{i}{R}$  и локальные  $\frac{m}{R}, \frac{d}{R}$  производные, а матричные произведения [вторые члены в правых частях (4.12)], — векторные произведения, фигурирующие в уравнениях (4.13).

В уравнениях (4.13)  $\bar{\omega}_m$  и  $\bar{\omega}_d$  — векторы угловой скорости систем  $m$  и  $d$  относительно системы  $i$ . Пользуясь известной формулой, можно векторные произведения представить в виде разложений по

$$\bar{\omega}_m \times \bar{R} = \begin{vmatrix} \bar{i}_m & \bar{j}_m & \bar{k}_m \\ \omega_{xm} & \omega_{ym} & \omega_{zm} \\ R_{xm} & R_{ym} & R_{zm} \end{vmatrix} = \bar{i}_m (\omega_{ym} R_{zm} - \omega_{zm} R_{ym}) + \\ + \bar{j}_m (\omega_{zm} R_{xm} - \omega_{xm} R_{zm}) + \bar{k}_m (\omega_{xm} R_{ym} - \omega_{ym} R_{xm}); \quad (4.14)$$

$$\bar{\omega}_d \times \bar{R} = \bar{i}_d (\omega_{yd} R_{zd} - \omega_{zd} R_{yd}) + \bar{j}_d (\omega_{zd} R_{xd} - \omega_{xd} R_{zd}) + \\ + \bar{k}_d (\omega_{xd} R_{yd} - \omega_{yd} R_{xd}). \quad (4.15)$$

Таким образом, эти разложения позволяют найти входящие в (4.12) матричные произведения. Например,

$$[\omega]_m R_m = \begin{bmatrix} \omega_{ym} R_{zm} - \omega_{zm} R_{ym} \\ \omega_{zm} R_{xm} - \omega_{xm} R_{zm} \\ \omega_{xm} R_{ym} - \omega_{ym} R_{xm} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Можно видеть, что при непосредственном перемножении матриц  $[\omega]_m$  и  $R_m$  выражение (4.16) получается только тогда, когда

$$[\omega]_m = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zm} & \omega_{ym} \\ \omega_{zm} & 0 & -\omega_{xm} \\ -\omega_{ym} & \omega_{xm} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Аналогичный вид (индекс  $m$  заменяется индексом  $d$ ) имеет и матрица  $[\omega]_d$ .

Кососимметричная матрица  $[\omega]_q$  вида (4.17) называется матрицей вращения. Умножая эту матрицу справа на матрицу-столбец  $R_q$ , можно сразу получить представление векторного произведения  $\bar{\omega} \times \bar{R}$  в системе  $q$ .

Если уравнение (4.7) умножить слева на матрицу  $D_i^m$ , то при учете тождества (4.5) приходим к уравнению

$$\dot{D}_i^m = D_i^m [\omega]_m, \quad (4.18)$$

называемому уравнением Пуассона.

Уравнение Пуассона позволяет по результатам измерения составляющих  $\omega_x m$ ,  $\omega_y m$ ,  $\omega_z m$  угловой скорости  $\bar{\omega}_m$  системы  $m$  относительно системы  $i$  определять направляющие косинусы осей системы  $m$  в системе  $i$ .

Обратимся теперь к представлению в матричной форме абсолютного ускорения  $\ddot{\bar{R}}$ . Дифференцируя уравнение (4.8) и учитывая при последующих преобразованиях соотношение (4.18), получим

$$\begin{aligned} \frac{ii}{\bar{R}} &= D_i^m (\ddot{R}_m + [\omega]_m \dot{R}_m + [\dot{\omega}]_m R_m) + \dot{D}_i^m (\dot{R}_m + [\omega]_m R_m) = \\ &= D_i^m (\ddot{R}_m + 2[\omega]_m \dot{R}_m + [\dot{\omega}]_m R_m + [\omega]_m^2 R_m). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Поскольку  $\ddot{R}_i$  — представление абсолютного ускорения  $\ddot{\bar{R}}$  в системе  $i$ , а  $D_i^m$  — матрица перехода от системы  $m$  к системе  $i$ , приходим к выводу, что выражение в круглых скобках является представлением абсолютного ускорения  $\ddot{\bar{R}}$  в системе  $m$ . Но абсолютное ускорение  $\ddot{\bar{R}}$  можно выразить через локальные производные относительно системы  $m$  и угловую скорость  $\bar{\omega}_m$ . Дифференцируя в системе  $i$  уравнение (4.13) и выражая производные векторов через локальные производные, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{R}} &= \frac{mm}{\bar{R}} + \bar{\omega}_m \times \bar{R} + (\bar{\omega}_m + \bar{\omega}_m \times \bar{\omega}_m) \times \bar{R} + \bar{\omega}_m \times (\bar{R} + \bar{\omega}_m \times \bar{R}) = \\ &= \frac{mm}{\bar{R}} + 2\bar{\omega}_m \times \bar{R} + \frac{m}{\bar{\omega}_m} \times \bar{R} + \bar{\omega}_m \times (\bar{\omega}_m \times \bar{R}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Сопоставление соответственных членов уравнения (4.20) и выражения в круглых скобках (4.19), помимо уже известного матрич-

ного представления векторного произведения, дает матричное представление вектора  $\overset{mm}{R}$  и двойного векторного произведения. Вектор  $\overset{mm}{R}$  представляется в системе  $m$  как  $\dot{R}_m$ , а двойное векторное произведение  $\overline{\omega}_m \times (\overline{\omega}_m \times R)$  — как матричное произведение  $[\omega]_m {}^2 R_m$ .

#### 4.3. АЛГОРИТМЫ ИДЕАЛЬНОЙ РАБОТЫ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Как уже отмечалось, здесь рассматривается БИНС, предназначенная для определения местоположения объекта (машины) на земной поверхности, т. е. для определения долготы и широты объекта. Поэтому расчеты должны быть направлены на определение проекций  $V_E$ ,  $V_N$ , земной скорости  $\bar{V}$  машины на оси  $O_1x$ ,  $O_1y$ , географического трехгранника  $d$ . Эти расчеты производятся по данным в виде проекций на оси системы машины  $m$ , получаемым от связанных с машиной чувствительных элементов (акселерометров, гироскопов). Таким образом, дело сводится к пересчету представления векторов в системе  $m$  к представлению этих векторов в системе  $d$ . Рассмотрим возможные варианты расчетных схем [22].

Расчет в системе  $d$ . Вектор  $\Delta\beta_m$  выходных сигналов акселерометров пересчитывается в вектор  $\Delta\beta_d$  согласно формуле

$$\Delta\beta_d = D_d^m \Delta\beta_m, \quad (4.21)$$

причем  $\Delta\beta_d$  трактуется как

$$\Delta\beta_d = \int_t^{t+T} f_d d\tau, \quad (4.22)$$

где  $f_d$  — представление в системе  $d$  вектора ускорения, доступного измерению акселерометрами. Но

$$f_d = D_d^m f_m, \quad \Delta\beta_m = \int_t^{t+T} f_m d\tau,$$

так что соотношения (4.21), (4.22) справедливы только при выполнении условия

$$\int_t^{t+T} D_d^m f_m d\tau = D_d^m \int_t^{t+T} f_m d\tau. \quad (4.23)$$

Условие (4.23) предполагает постоянство матрицы перехода  $D_d^m$ . Поскольку машина может совершать быстрые угловые движения относительно системы  $d$ , период дискретизации, на котором  $D_d^m$  принимается постоянной, должен быть очень мал. По этой причине данная расчетная схема мало пригодна.

Расчет в системе  $m$ . Принимая в качестве подвижной системы координат  $m$ , перепишем основное уравнение ИНС [12] в виде

$$\overset{m}{V} = \bar{f} - (\bar{\Omega} + \bar{\omega}_m) \times \bar{V} + \bar{g}(\bar{R}). \quad (4.24)$$

Это уравнение в проекциях на оси системы  $m$

$$\dot{V}_m = f_m - [\Omega]_m V_m - [\omega]_m V_m + g_m. \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) должно решаться относительно  $V_m$  в быстром масштабе времени. Однако это не является главной трудностью. Более серьезные трудности представит предполагаемый уравнением пересчет в быстром масштабе времени векторов  $\Omega_n$ ,  $g_d$  в векторы  $\Omega_m$ ,  $g_m$ . Кроме того, найденный вектор  $V_m$  должен пересчитываться в вектор  $V_d$ . Все эти обстоятельства делают данную расчетную схему мало пригодной.

Расчет в нескольких координатных системах. С точки зрения простоты учета влияния вектора  $\bar{g}$  расчет целесообразно производить в географической системе  $d$ , а с точки зрения учета влияния вектора  $\bar{\Omega}$  угловой скорости вращения Земли, — в навигационной системе  $n$ . Эти системы являются медленно вращающимися, что позволяет производить расчеты в более медленном масштабе времени. Однако по причинам, которые станут ясны из дальнейшего, в методическом отношении более правильно расчеты производить в системах  $m$  и  $n$ . В следующем разделе рассматривается именно эта расщепленная расчетная схема.

#### 4.4. РАСЩЕПЛЕННАЯ РАСЧЕТНАЯ СХЕМА $m-n$

Акселерометры измеряют ускорение  $\bar{f}$ , определяемое формулой

$$\bar{f} = \overset{ii}{\bar{R}} - \bar{g}^*, \quad (4.26)$$

где  $\overset{ii}{\bar{R}}$  — абсолютное ускорение объекта (машины);  $\bar{g}^*$  — ускорение силы земного тяготения (гравитационной силы). Поскольку  $\overset{i}{\bar{R}} = \bar{U}$ , где  $\bar{U}$  — абсолютная (инерциальная) скорость машины, можно при использовании локальной производной записать

$$\overset{ii}{\bar{R}} = \overset{i}{\bar{U}} = \overset{m}{\bar{U}} + \bar{\omega} \times \bar{U}. \quad (4.27)$$

Здесь  $\bar{\omega}$  — угловая скорость системы  $m$  относительно системы  $i$ . Из выражений (4.26), (4.27) следует

$$\overset{m}{\bar{U}} = -\bar{\omega} \times \bar{U} + \bar{f} + \bar{g}^*. \quad (4.28)$$

Расчет инерциальной скорости в системе  $m$ . Проектирование



векторного уравнения (4.28) на оси системы  $m$  приводит к уравнению

$$\dot{U}_m = -[\omega]_m U_m + f_m + g_m^* \quad (4.29)$$

Согласно сделанному в разд. 4.1 предположению «в», на интервале дискретизации вектор  $g_m^*$  не зависит от  $U_m$ . Поэтому на интервале дискретизации уравнение (4.29) является линейным и, следовательно, подчиняется принципу суперпозиций. Учитывая это, представим вектор  $U_m$  в виде суммы

$$U_m = U_{fm} + U_{gm}, \quad (4.30)$$

где  $U_{fm}$ ,  $U_{gm}$  — решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\dot{U}_{fm} = -[\omega]_m U_{fm} + f_m; \quad (4.31a)$$

$$U_{fm}(0) = 0 \quad (4.31b)$$

и 
$$\dot{U}_{gm} = -[\omega]_m U_{gm} + g_m^*; \quad (4.32a)$$

$$U_{gm}(0) = U_m(0). \quad (4.32b)$$

Начальное условие  $U_m(0)$  для исходного дифференциального уравнения (4.29) можно распределять между уравнениями (4.31a), (4.32a) произвольным образом. В дальнейшем начальное значение  $U_m(0)$  будем целиком относить к  $U_{gm}(0)$ . Такое распределение, как будет показано далее, исключает необходимость при реальных расчетах пересчитывать начальное значение земной скорости в координатную систему  $m$ .

Вектор  $U_{fm}$  интерпретируется как инерциальная (абсолютная) скорость машины, обусловленная действующими на нее негравитационными силами, а вектор  $U_{gm}$  — как инерциальная скорость, вызываемая гравитационной силой.

При численном решении уравнения (4.31) вместо  $\omega_m$  и  $f_m$  будут фигурировать показания чувствительных элементов  $\Delta\theta_m$  и  $\Delta\beta_m$ . Следовательно, присущая импульсным чувствительным элементам операция интегрирования [см. (4.1), (4.2)] будет эффективно использована.

**Расчет вектора земной скорости в системе  $n$ .** В [12] приведено уравнение, выражающее абсолютное ускорение машины через производную земной скорости в системе платформы и угловую скорость системы платформы. Используя принятые здесь обозначения и применяя вместо системы платформы навигационную (земную) систему  $n$ , можно это уравнение переписать в виде

$$\overset{ii}{\bar{R}} = \overset{n}{\bar{V}} + 2\bar{\Omega} \times \bar{V} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{R}).$$

Отсюда при учете формулы (4.26) получаем

$$\overset{n}{\bar{V}} = \bar{f} - 2\bar{\Omega} \times \bar{V} - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{R}) + \bar{g}^*. \quad (4.33)$$

Проектируя это уравнение на оси системы  $n$ , находим

$$\dot{V}_n = -2[\Omega]_n V_n - [\Omega]_n^2 R_n + f_n + g_n^*. \quad (4.34)$$

Матрица вращения  $[\Omega]_n$  по структуре, совпадает с матрицей (4.17) и, поскольку  $\Omega_{xn} = \Omega_{zn} = 0$ ,  $\Omega_{yn} = \Omega$ , имеет вид

$$[\Omega]_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Опять используя принятое в разд. 4.1 предположение о независимости в пределах периода дискретизации вектора  $g_n^*$  от  $V_n$ , приходим к выводу, что дифференциальное уравнение (4.34) линейное и, следовательно, подчиняется принципу суперпозиции.

Следует заметить, что влияние вектора  $g^*$  учитывалось бы проще, если вместо проектирования на оси  $n$  векторное уравнение было бы спроектировано на оси географической системы  $d$ . Тогда отпала бы и необходимость пересчета результатов в систему  $d$ . Однако при использовании системы  $d$  векторное уравнение (4.33) принимает вид

$$\overset{d}{V} = \bar{f} - 2\bar{\Omega} \times \bar{V} - \bar{\rho} \times \bar{V} - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{R}) + \bar{g}^*, \quad (4.36)$$

а в проекциях на оси системы  $d$

$$\dot{V}_d = f_d - 2[\Omega]_d V_d - [\rho]_d V_d - [\Omega]_d^2 R_d + g_d^*. \quad (4.37)$$

Здесь  $\bar{\rho}$  — угловая скорость системы  $d$  относительно земной системы  $n$ . Поскольку  $\bar{\rho}$  возникает благодаря движению машины со скоростью  $\bar{V}$  относительно земной системы, уравнение (4.36) содержит нелинейный член  $[\rho]_d V_d$  и, следовательно, к этому уравнению принцип суперпозиции неприменим. Но расщепление расчетной схемы основывается именно на использовании принципа суперпозиции, так что проектирование векторного уравнения следует производить на оси системы  $n$  [см. (4.34)].

Применяя к уравнению (4.34) принцип суперпозиции, можно решение этого уравнения представить как

$$V_n = V_{fn} + V_{gn}, \quad (4.38)$$

где  $V_{fn}$  и  $V_{gn}$  — соответственно решения дифференциальных уравнений

$$\dot{V}_{fn} = -2[\Omega]_n V_{fn} - [\Omega]_n^2 R_{fn} + f_n; \quad (4.39a)$$

$$V_{fn}(0) = 0 \quad (4.39b)$$

$$\text{и} \quad \dot{V}_{gn} = -2[\Omega]_n V_{gn} - [\Omega]_n^2 R_{gn} + g_n^*; \quad (4.40a)$$

$$V_{gn}(0) = V_n(0) = D_n^d(0) V_d(0). \quad (4.40b)$$

Входящие в эти уравнения векторы  $R_{fn}$ ,  $R_{gn}$  рассчитываются по формулам

$$R_{fn} = \int_0^t V_{fn} dt + 0; \quad (4.41)$$

$$R_{fg} = \int_0^t V_{gn} dt + R_n(0). \quad (4.42)$$

Причины выбора начальных условий в виде (4.39б), (4.40б), (4.41), (4.42) будут объяснены далее. Вектор  $V_{fn}$  интерпретируется как земная скорость машины, обусловленная действием на нее гравитационных сил.

Ключевым положением рассматриваемой здесь расчетной схемы является то, что преобразование вектора инерциальной скорости  $U_{fm}$  в соответствующий вектор земной скорости в системе  $n$  дает вектор  $V_{fn}$ . Используя это положение, можно решать уравнение (4.31) относительно  $U_{fm}$  в быстром масштабе времени, уравнение (4.40) относительно  $V_{gn}$  — в более медленном масштабе времени, а затем в еще более медленном масштабе преобразовывать  $U_{fm}$  в  $V_{fn}$  и, складывая согласно (4.38)  $V_{fn}$  с  $V_{gn}$ , получать искомый вектор  $V_n$ .

**Преобразование  $U_{fm}$  в  $V_{fn}$ .** Инерциальная скорость машины  $\overset{i}{R} = \bar{U}$  выражается через земную скорость  $\overset{n}{R} = \bar{V}$  уравнением

$$\overset{i}{R} = \overset{n}{R} + \bar{\Omega} \times \bar{R}$$

или при использовании указанных обозначений — уравнением

$$\bar{U} = \bar{V} + \bar{\Omega} \times \bar{R}. \quad (4.43)$$

Представляя это уравнение в проекциях на оси системы  $n$ , получим

$$U_n = V_n + [\Omega]_n R_n. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.44) выражает правило преобразования земной скорости, записанной в системе  $n$ , в инерциальную скорость в этой же системе и наоборот. На основании этого уравнения при использовании упомянутого выше ключевого положения имеем

$$V_{fn} = U_{fn} - [\Omega]_n R_{fn}, \quad (4.45)$$

где  $U_{fn}$  получается из  $U_{fm}$  координатным преобразованием согласно формуле

$$U_{fn} = D_n^m U_{fm}. \quad (4.46)$$

Матрицу перехода  $D_n^m$  можно получить, используя формулу

$$D_n^m = D_n^i D_i^m. \quad (4.47)$$

В этой формуле

$$D_n^i = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & 0 & -\sin \Omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Omega t & 0 & \cos \Omega t \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Что касается матрицы  $D_i^m$ , то ее можно получить решением уравнения Пуассона (4.18), см. разд. 4.5.

Таким образом, из уравнений (4.45), (4.46) и (4.47) находим окончательное выражение для вычисления  $V_{fn}$ :

$$V_{fn} = D_n^i D_i^m U_{fm} - [\Omega]_n R_{fn}. \quad (4.49)$$

Прибавляя к  $V_{fn}$  вектор  $V_{gn}$ , получаем вектор  $V_n$ . Как уже отмечалось, вектор  $V_{gn}$  находится в результате решения уравнения (4.40). Но для решения этого уравнения требуется предварительно вычислить вектор  $g_n^*$ .

**Расчет вектора  $g_n^*$ .** Связь вектора ускорения силы тяжести  $\bar{g}$ , с вектором ускорения земного тяготения (гравитационной силы)  $\bar{g}^*$  определяется векторным уравнением, имеющим в проекциях на оси системы  $n$  вид

$$g_n = g_n^* - [\Omega]^2 R_n.$$

$$\text{Отсюда} \quad g_n^* = g_n(\bar{R}) + [\Omega]^2 R_n. \quad (4.50)$$

В уравнении (4.50) специально отмечено, что  $g_n$  зависит от радиус-вектора  $\bar{R}$  действительного местоположения объекта, а не от  $\bar{R}_f$  или  $\bar{R}_g$ . В проекциях на оси географической системы  $d$  вектор  $g$  дается при малых значениях  $h$  ( $h \leq 100$  км) выражением [22]

$$g_d(\bar{R}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(1 + 5,2884 \cdot 10^{-3} \sin^2 \varphi) \left[ 1 - \frac{2h}{R_0} (1 - e \sin^2 \varphi) \right] \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

где  $\varphi$  — широта;  $h$  — высота объекта над уровнем моря;  $e$  — эксцентриситет референц-эллипсоида;  $R_0$  — радиус шара, равновеликого геоиду;  $g = 9,78$  м/с<sup>2</sup> — ускорение силы тяжести на экваторе.

Вектор  $g_d(\bar{R})$  можно пересчитать в вектор  $g_n(\bar{R})$  при помощи матрицы перехода  $D_n^d$ , выражение которой согласно рис. 4.1

$$D_n^d = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \varphi & \cos \lambda \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Вектор  $R_n$  определяется уравнением

$$R_n = \int_0^t V_n dt + R_n(0),$$

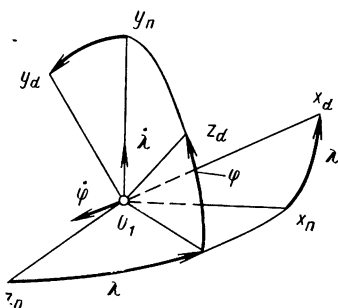


Рис. 4.1. Навигационная  $n$  и географическая  $d$  системы координат:

$\lambda$ —долгота;  $\varphi$ —широта

а для  $t=0$

$$R_n(0) = R_{fn}(0) + R_{gn}(0). \quad (4.54)$$

Каких-либо ограничений на распределение  $R_n(0)$  между  $R_{fn}(0)$  и  $R_{gn}(0)$  не существует.

Примем

$$R_{fn}(0) = 0; \quad (4.55a)$$

$$R_{gn}(0) = R_n. \quad (4.55b)$$

При решении уравнений (4.31a), (4.32a) начальное значение  $U_m(0)$  также можно распределять произвольно между  $U_{fm}(0)$  и  $U_{gm}(0)$ . Поскольку инерциальная скорость  $U_{gm}$  по уравнению (4.32a) все равно не рассчитывается (этот расчет заменяется расчетом по уравнению (4.40a) земной скорости  $V_{gn}$ , соответствующей указанной инерциальной скорости), целесообразно  $U_n(0)$  целиком относить к  $U_{gm}(0)$ , т. е. выбирать  $U_{fm}(0) = 0$ . Тогда при решении уравнения (4.45) не будет возникать необходимости пересчета земной скорости  $V_d(0)$  в скорость  $U_m(0)$ .

Выбор  $U_{fm}(0) = 0$  дает согласно (4.49)

$$V_{fn}(0) = -[\Omega]_n R_{fn}(0),$$

а поскольку было принято  $R_{fn}(0) = 0$ , то  $V_{fn}(0) = 0$ . Таким образом, начальное условие (4.39б) обосновано.

Согласно уравнению (4.38)

$$V_n(0) = V_{fn}(0) + V_{gn}(0). \quad (4.56)$$

Вектор  $V_n(0)$  может быть выражен через известную начальную скорость  $V_d(0)$ , заданную в географической системе  $d$ :

$$V_n(0) = D_n^d V_d(0). \quad (4.57)$$

Из уравнений (4.56), (4.57) получаем

$$V_{gn}(0) = D_n^d V_d(0) - V_{fn}(0),$$

которое при учете уравнений (4.38), (4.41), (4.42) принимает вид

$$R_n = R_{fn} + R_{gn}. \quad (4.53)$$

Таким образом, все данные, необходимые для расчета  $g_n^*$  по уравнению (4.50), имеются. Как уже отмечалось, вектор  $g_n^*$  рассчитывается каждый раз лишь для конца наибольшего периода дискретизации.

**Начальные условия.** Решение уравнения (4.34) получается как сумма решений уравнения (4.39a) и уравнения (4.40a). Поэтому при учете (4.41), (4.42) имеем

$$R_n(t) = R_{fn}(t) + R_{gn}(t),$$

и поскольку  $V_{fn}(0) = 0$ , то

$$V_{gn}(0) = D_n^d V_d(0), \quad (4.58)$$

что и служит обоснованием начального условия (4.40б).

#### 4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА $D_i^m$

Матрицу перехода  $D_i^m$  можно найти, решая уравнение Пуассона (4.18). Это уравнение имеет вид

$$\dot{D}_i^m = D_i^m [\omega]_m. \quad (4.59)$$

Элементами матрицы вращения

$$[\omega]_m = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zm} & \omega_{ym} \\ \omega_{zm} & 0 & -\omega_{xm} \\ -\omega_{gm} & \omega_{xm} & 0 \end{bmatrix}$$

служат проекции вектора  $\bar{\omega}$  угловой скорости вращения машины  $m$  относительно системы  $i$  на оси системы  $m$ . Поскольку система  $i$  инерциальная, эти проекции могут быть измерены тремя связанными с машиной  $m$  двухстепенными гироскопами. Оси чувствительности гироскопов должны быть направлены соответственно по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  системы  $m$ .

Все вычисления в БИНС производятся бортовой ЦВМ. ЦВМ — машина дискретного действия. Вследствие малости периода дискретизации  $T$  полагают, что за этот период вектор  $\bar{\omega}$  угловой скорости системы  $m$  не изменяется по отношению к этой системе, т. е. считают, что проекции  $\omega_{xm}$ ,  $\omega_{ym}$ ,  $\omega_{zm}$  в течение периода дискретизации  $T$  постоянны. Тогда уравнение (4.59) будет линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Как и в случае скалярного однородного уравнения первого порядка, решение этого матричного уравнения имеет вид (см. разд. 6.3)

$$D_i^m(t) = D_i^m(0) e^{[\omega]_m t}. \quad (4.60)$$

Здесь  $D_i^m(0)$  — значение матрицы направляющих косинусов в начале периода дискретизации;  $e^{[\omega]_m t}$  — матричный экспоненциал или матрицант системы.

Формула (4.60) определяет изменение матрицы  $D_i^m(t)$  в течение периода дискретизации. Однако ЦВМ использует в расчетах только значение этой матрицы в начале периода дискретизации и выдает в качестве результата расчета значение матрицы для конца периода дискретизации.

Вследствие малости периода дискретизации  $T$  можно считать, что за этот период объект  $m$  поворачивается вокруг своих осей  $x_m$ ,

$y_m, z_m$  на малые углы  $\theta_1 = \omega_{xm}T$ ,  $\theta_2 = \omega_{ym}T$ ,  $\theta_3 = \omega_{zm}T$ . Тогда решение (4.60) для конца периода дискретизации  $T$  можно записать как

$$D_i^m(T) = D_i^m(0) e^{\Theta}, \quad (4.61)$$

где

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Вместо обычных двухстепенных гироскопов целесообразно с обратком  $m$  связывать специальные гироскопы с импульсной обратной связью, выходными сигналами которых являются фигурирующие в (4.62) углы  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  [см. (4.1)]. Тогда по поступающим от гироскопов данным  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  можно для конца периода дискретизации  $T$  рассчитать матричный экспоненциал  $e^{\Theta}$  и, располагая матрицей  $D_i^m$  для начала этого периода, рассчитать по формуле (4.61) матрицу  $D_i^m$  для конца периода дискретизации  $T$ . Этот расчетный цикл повторяется и для следующих периодов дискретизации.

Матричный экспоненциал трактуется как бесконечный степенной ряд

$$e^{\Theta} = I + \Theta + \Theta^2/2! + \Theta^3/3! + \dots \quad (4.63)$$

ЦВМ выполняет только арифметические операции и в качестве матричного экспоненциала использует при расчетах сумму нескольких первых членов разложения (4.63).

Таким образом, для момента включения БИНС матрица  $D_i^m$  должна быть известна. По этой информации и информации об углах  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , поступающей от гироскопов, ЦВМ последовательно вычисляет по формулам (4.61), (4.62) и (4.63) матрицу  $D_i^m$  для конца каждого периода дискретизации.

#### 4.6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И БЫСТРОТА ПРОВЕДЕНИЯ РАСЧЕТОВ

Уравнения, предоставляющие алгоритм идеальной работы рассмотренной БИНС, сведены в приводимую здесь таблицу. Порядок расположения уравнений примерно соответствует порядку проведения расчетов. По требуемой скорости расчета (по длительности периода дискретизации) уравнения разделены на три уровня, характеризующиеся соответственно быстрой (малый период дискретизации), средней (более длинный период дискретизации) и медленной (самый длинный период дискретизации) скоростью расчета. Входящие в алгоритм дифференциальные и конечные (алгебраические и тригонометрические) уравнения записаны в разных столбцах. Приводимые в таблице цифры в круглых скобках означают, что в данной части расчета должно использоваться уравнение, отмеченное в тексте тем же номером. Выражения  $R_N, R_E$  совпадают с выражениями  $R_\eta, R_\xi$  [см. (1.3)].

**Уравнения в расщепленной схеме  $m-n$ , формирующие алгоритм идеальной работы БИНС**

Скорость рас- чета	Подлежащие решению диффе- ренциальные уравнения	Начальные условия	Алгебраические и тригономет- рические уравнения
Быстрая	$\dot{U}_{fm} = -[\omega]_m U_{fm} + f_m$	$V_{fm}(0) = 0$ $D_i^m(0)$	$D_i^m$ [см. (4.61), (4.62), (4.63)]
Средняя	$\dot{V}_{gn} = -2[\Omega]_n V_{gn} -$ $[\Omega]_n^2 R_{gn} + g_n^*$	$V_{gn}(0) =$ $= D_n^d(0) V_d(0)$	
Медленная	$\dot{R}_{fn} = V_{fn}$ $\dot{R}_{gn} = V_{gn}$ $\dot{\varphi} = \frac{V_{yd}}{R_N + h}$ $\dot{\lambda} = \frac{V_{xd}}{(R_E + h) \cos \varphi}$ $\dot{h} = V_{zd}$	$R_{fn}(0) = 0$ $R_{gn}(0) = R_n(0)$ $\varphi_0$ $\lambda_0$ $h_0$	$D_n^i$ [см. (4.48)] $V_{fn} = D_n^i D_i^m U_{fm} -$ $[\Omega]_n R_{fn}$ $V_n = V_{fn} + V_{gn}$ $D_d^n$ [см. (4.52)] $V_d = D_d^n V_n$ $R_N = R(1 - 2e \cos 2\varphi)$ $R_E = R(1 + 2e \sin^2 \varphi)$ $R_n = R_{fn} + R_{gn}$ $g_d(\bar{R})$ [см. (4.51)] $g_n^* = D_n^d g_d(\bar{R}) + [\Omega]_n^2 R_n$

## ГЛАВА 5

### УРАВНЕНИЯ ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Настоящая глава посвящена выводу уравнений ошибок, допускаемых ИНС в определении навигационных параметров объекта, движущегося вблизи поверхности Земли. Рассматриваются как платформенные, так и бесплатформенные ИНС. Вывод уравнений ошибок ИНС основывается на введенном в работе [12] понятии «фиктивная платформа». Это понятие оказалось очень плодотворным как при трактовке причин возникновения ошибок ИНС, так и при выводе уравнений ошибок.



## 5.1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ОШИБОК ПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ (ПИНС)

Местоположение объекта, характеризуемое долготой  $\lambda$  и широтой  $\varphi$  (или, что то же самое, положение радиус-вектора  $\bar{R}$  в земной системе), любая ИНС определяет по существу интегрированием векторного уравнения

$$\overset{ii}{\bar{R}} = \bar{f} + \bar{g}^*(\bar{R}). \quad (5.1)$$

Это уравнение называется основным уравнением инерциальной навигации. По составляющим ускорения  $\bar{f}$ , измеряемым акселерометрами, путем решения уравнения (5.1) ЦВМ должна определить радиус-вектор  $\bar{R}$  объекта. В дальнейшем принимаем, что все расчетные операции ЦВМ проводит совершенно точно.

Приборная реализация решения может быть самой разнообразной. Возможны как чисто аналитические (БИНС), так и полуаналитические (ИНС с гиropлатформой) варианты. Как показывается далее, уравнения ошибок для этих вариантов по существу одинаковы. В настоящем разделе выводятся уравнения ошибок платформенной ИНС [12, 24, 30].

Введем в уравнение (5.1) согласно соотношению (4.50) вектор ускорения силы тяжести:

$$\overset{ii}{\bar{R}} - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{R}) = \bar{f} + \bar{g}(R). \quad (5.2)$$

Имея в виду исследование устойчивости идеального (равновесного) режима работы ИНС, перейдем, как это принято в теории регулирования, к уравнению относительно малых отклонений (вариаций) координат от их значений в равновесном режиме. Варьируя уравнение (5.2), получим

$$\delta \overset{ii}{\bar{R}} - \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \delta \bar{R}) = \delta \bar{f} + \delta \bar{g}(\bar{R}). \quad (5.3)$$

Для идеального режима работы ИНС представляет собой счетно-решающий механизм, назначение которого — решение дифференциального уравнения (5.2) и выдача в результате решения данных о радиусе-векторе  $\bar{R}$ . Поэтому вариацию  $\delta \bar{R}$  следует рассматривать не как перемещение объекта относительно земной системы, а как ошибку ИНС в вычислении  $\bar{R}$ . Эта ошибка порождается, например, отклонением системы платформы  $O_1xyz$  от правильной системы координат  $O_1\xi\eta\zeta$  (или  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ ), приводящим к изменению показаний акселерометров и, следовательно, расчетных значений  $\lambda, \varphi$ .

Анализ ошибок существенно облегчается при использовании вычислительной системы координат  $O_1x_{вy_{в}z_{в}}$ , т. е. системы, в расчете на которую составлен алгоритм работы ЦВМ. Для идеального (невозмущенного) режима работы такой системой является правильная система координат, которую в идеальном режиме воспроизводит система платформы. Для общего случая, включающего и

возмущенный режим работы, вычислительная система координат строится по данным, вырабатываемым и используемым ЦВМ.

Для ИНС, рассмотренной в разд. 1.7, начало вычислительной системы находится в точке  $O_1$  земной поверхности, определяемой выработанными ИНС значениями  $\lambda, \varphi$ ; оси  $O_1x_B, O_1y_B$  располагаются в плоскости местного (для точки  $\lambda, \varphi$ ) горизонта и повернуты относительно осей географического трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$  на угол  $\chi$ , выработанный ИНС; ось  $O_1z_B$  направлена по вертикали в точке  $(\lambda, \varphi)$ . Расположение осей  $O_1x_B, O_1y_B$  в плоскости горизонта для точки  $(\lambda, \varphi)$  продиктовано тем, что такое расположение осей предполагает алгоритм работы ЦВМ (при расчетах для идеального режима ЦВМ использует проекции скорости вращения Земли на оси  $O_1\xi', O_1\eta'$  правильной системы, которые всегда горизонтальны).

Для идеального режима работы начала и соответственные оси систем координат  $O_1xyz, O_1\xi\eta\zeta$  (или  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ ) и  $O_1x_By_Bz_B$  совпадают. При возмущенном режиме (при наличии отклонений от идеального режима) начало  $O_1$  систем координат  $O_1xyz$  и  $O_1\xi\eta\zeta$  ( $O_1\xi'\eta'\zeta'$ ) отклонено от начала  $O_1'$  системы  $O_1'x_By_Bz_B$ , а угловые положения этих систем рассогласованы.

В возмущенном режиме ЦВМ, по-прежнему выполняя алгоритм идеального режима работы, трактует сигналы с реальных акселерометров как сигналы, будто бы приходящие с акселерометров фиктивной платформы, начало и оси которой совпадают с началом и соответственными осями вычислительной системы  $O_1'x_By_Bz_B$ . Но акселерометры, с которых на самом деле поступают в ЦВМ сигналы, находятся под действием вектора ускорения силы тяжести другого направления, чем направление этого вектора для вычислительной системы координат.

Местоположение объекта, соответствующее вычисленным данным, ИНС трактует как истинное, а действительное местоположение объекта — как ошибочное. Принимая эту трактовку, при дальнейших выкладках будем тем не менее учитывать, что «истинное» местоположение характеризуется вектором  $\bar{R} + \delta\bar{R}$ , а «ошибочное» — вектором  $\bar{R}$ . Таким образом, с точки зрения модели «фиктивная платформа», по которой реальная ЦВМ работает, ЦВМ допускает ошибку в учете действия ускорения силы тяжести

$$\delta\bar{g}(\bar{R}) = \bar{g}(\bar{R} + \delta\bar{R}) - \bar{g}(\bar{R}). \quad (5.4)$$

Выразим эту ошибку через вариацию  $\delta\bar{R}$ . Поскольку в первом приближении можно считать, что вектор  $\bar{g}(\bar{R})$  направлен противоположно вектору  $\bar{R}$ , имеем

$$\bar{g}(\bar{R}) = -\frac{g}{R} \bar{R} = -v^2 \bar{R}, \quad (5.5)$$

где  $\sqrt{g/R} = v$  — частота Шулера.

Варьируя уравнение (5.5), находим

$$\delta\bar{g}(\bar{R}) = -v^2 \delta\bar{R} - 2v\delta v \bar{R}. \quad (5.6)$$

Для сферической Земли ускорение силы тяжести над поверхностью Земли определяется формулой

$$g(R) \approx g_0 \frac{R_0^2}{R^2},$$

где  $g_0$  — ускорение силы тяжести на уровне моря;  $R_0$  — радиус Земли.

Подставляем это значение  $g(R)$  в выражение частоты Шулера:

$$\nu = \sqrt{g_0 \frac{R_0^2}{R^3}} = \sqrt{g_0 R_0^2} R^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Отсюда} \quad \delta\nu = -\frac{3}{2} \sqrt{g_0 R_0^2} R^{-\frac{5}{2}} \delta R = -\frac{3}{2} \sqrt{g_0 R_0^2} R^{-\frac{5}{2}} \delta h$$

или, полагая  $R \approx R_0$ ,

$$\delta\nu = -\frac{3}{2R_0} \sqrt{\frac{g_0}{R_0}} \delta h,$$

где  $h$  — высота объекта над уровнем моря.

По подстановке этого выражения в уравнение (5.6)

$$\delta\bar{g}(\bar{R}) = -\nu^2 \delta\bar{R} + \frac{3\nu^2}{R_0} \bar{R} \delta h. \quad (5.7)$$

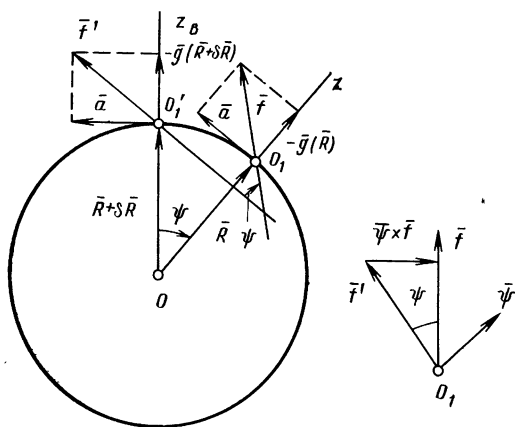
С точки зрения упомянутой выше модели (ИНС с фиктивной платформой) правильными сигналами для ЦВМ являются сигналы, которые могли бы быть измерены акселерометрами фиктивной платформы. После кажущихся ускорений  $\bar{f}'$ , которые могли бы быть измерены акселерометрами фиктивной платформы  $O_1 x_B y_B z_B$ , отличается от поля кажущихся ускорений  $\bar{f}$ , доступных измерению акселерометрами реальной платформы  $O_1 xyz$ . Это отличие обуславливается углом перекоса  $\psi$  между системами  $O_1 x_B y_B z_B$  и  $O_1 xyz$ . Рассматривая  $\psi$  как вектор-угол конечного вращения, переводящий вычислительную систему  $O_1 x_B y_B z_B$  в систему платформы  $O_1 xyz$ , можно для малых значений  $\psi$  записать (рис. 5.1)

$$\bar{f} = \bar{f}' + \bar{\psi} \times \bar{f}. \quad (5.8)$$

Вместо составляющих правильного вектора  $\bar{f}'$  ЦВМ в действительности получает составляющие вектора  $\bar{f}$  как показания реальных акселерометров. В возмущенном режиме доступный измерению вектор  $\bar{f}$  отличается от правильного вектора  $\bar{f}'$  на величину вариации  $\delta\bar{f}$ , фигурирующей в уравнении (5.3). Согласно уравнению (5.8), эта вариация определяется выражением

$$\delta\bar{f} = \bar{f}' - \bar{f} = -\bar{\psi} \times \bar{f}. \quad (5.9)$$

Если учесть, что показания реальных акселерометров, помимо истинного значения  $\bar{f}$  измеряемой величины, содержат инструмен-

$$\begin{aligned} \delta \bar{R} - \bar{\mathcal{Q}} \times (\bar{\mathcal{Q}} \times \delta \bar{R}) = & -\bar{\psi} \times \\ & \times \bar{f} + \bar{B} - v^2 \delta \bar{R} + \\ & + \frac{3v^2}{R_0} \bar{R} \delta h, \quad (5.10) \end{aligned}$$


где  $\bar{B}$  — упомянутые выше  
ошибки акселерометров.

Запишем это уравнение в правильной системе  $O_1\xi\eta\zeta$  ( $O_1\xi'\eta'\zeta'$ ), вращающейся относительно инерциальной системы со скоростью  $\vec{\omega} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}$ . При этом точками отмечаем дифференцирование в правильной системе:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega} \times \delta \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{p}} \times \delta \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \delta \vec{R}) - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \delta \vec{R}) = \\ = -\psi \times \vec{f} + \vec{B} - v^2 \delta \vec{R} + \frac{3v^2}{R_0} \vec{R} \delta h. \end{aligned}$$

$$\bar{p} \times (\bar{\Omega} \times \delta \bar{R}) + \bar{\omega} \times (\bar{p} \times \delta \bar{R}) = \bar{\Omega} (\bar{p} \delta \bar{R}) + \bar{p} (\bar{\omega} \delta \bar{R}) - \delta \bar{R} [(\bar{p} \bar{\Omega}) + (\bar{p} \bar{\omega})].$$
$$\begin{aligned} \delta \ddot{\bar{R}} + 2\bar{\omega} \times \delta \dot{\bar{R}} + \dot{\bar{\rho}} \times \delta \bar{R} + \bar{\Omega} (\bar{\rho} \delta \bar{R}) + \bar{\rho} (\bar{\omega} \delta \bar{R}) - \delta \bar{R} [(\bar{\rho} \bar{\Omega}) + (\bar{\rho} \bar{\omega})] = \\ = -\bar{\psi} \times \bar{f} + \bar{B} - \nu^2 \delta \bar{R} + \frac{3\nu^2}{R_0} R \delta h. \end{aligned} \quad (5.11)$$

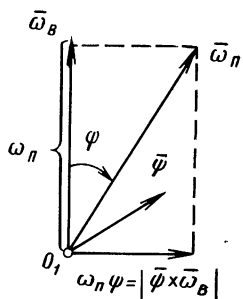


Рис. 5.2. Составляющие вектора  $\bar{\omega}_n$

ном режиме перекошена относительно вычислительной системы  $O_1x_By_Bz_B$  на угол  $\Psi$ .

При идеальных гироскопах и цепях усиления реальная гироскопическая платформа прецессирует со скоростью  $\bar{\omega}_n$ , по модулю равной  $\bar{\omega}_B$ . Однако вследствие перекоса вектор  $\bar{\omega}_n$  отклонен от вектора  $\bar{\omega}_B$  на угол  $\Psi$  (рис. 5.2). Раскладывая вектор  $\bar{\omega}_n$  на параллельную и перпендикулярную  $\bar{\omega}_B$  составляющие и вводя вектор  $\bar{\psi}$  угла перекоса, находим, что вызываемая сигналом  $\bar{\omega}_B$  прецессия  $\bar{\omega}_n$  реальной гироскопической платформы

$$\bar{\omega}_n = \bar{\omega}_B + \bar{\psi} \times \bar{\omega}_B. \quad (5.12)$$

Кроме угловой скорости  $\bar{\omega}_n$ , создаваемой поступающим с ЦВМ управляющим сигналом, реальная гироскопическая платформа имеет еще скорость  $\bar{\epsilon}$ , обусловливаемую ее неидеальностью, например, дрейфом гироскопов. Учитывая эту скорость, получим

$$\bar{\omega}_n = \bar{\omega}_B + \bar{\psi} \times \bar{\omega}_B + \bar{\epsilon}. \quad (5.13)$$

Поскольку  $\bar{\psi}$  — угол отклонения системы  $O_1x_By_Bz_B$  от системы  $O_1x_0y_0z_0$ , справедливо также равенство

$$\bar{\omega}_n = \bar{\omega}_B + \bar{\psi}^B, \quad (5.14)$$

где  $\bar{\psi}^B = \frac{d\bar{\psi}}{dt} \Big|_B$  — производная относительно вычислительной системы  $O_1x_By_Bz_B$  (локальная производная).

Подставляя выражение (5.14) в уравнение (5.13), получим

$$\bar{\psi}^B + \bar{\omega}_B \times \bar{\psi} = \bar{\epsilon},$$

откуда непосредственно следует

$$\bar{\psi}^i = \bar{\epsilon}, \quad (5.15)$$

где  $\bar{\psi}^i$  — производная вектора  $\bar{\psi}$  в инерциальной системе.

Выражая производную  $\dot{\bar{\psi}}$  в правильной системе  $O_1\xi\eta\zeta$  (или  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ ), получим окончательное векторное уравнение ошибки ориентации платформы

$$\dot{\bar{\psi}} + \bar{\omega} \times \bar{\psi} = \bar{\varepsilon}. \quad (5.16)$$

В этом уравнении  $\dot{\bar{\psi}}$  — производная вектора  $\bar{\psi}$  относительно правильной системы;  $\bar{\omega}$  — абсолютная угловая скорость правильной системы.

Уравнения (5.11) и (5.16) образуют систему векторных уравнений, описывающих ошибки платформенной ИНС. Запишем эти уравнения в скалярной форме, а именно, в отношении проекций на оси правильной системы. Отмечая индексами 1, 2, 3 проекции векторов на оси  $O_1\xi(O_1\xi')$ ,  $O_1\eta(O_1\eta')$ ,  $O_1\zeta(O_1\zeta')$  правильной системы, а проекции  $\delta\bar{R}$  на эти оси обозначая через  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , согласно векторным уравнениям (5.11), (5.16) получим следующие уравнения ошибок платформенной ИНС в проекциях на оси правильной системы:

$$\delta\ddot{x} + (v^2 - 2\rho_2\Omega_2 - 2\rho_3\Omega_3 - \rho_2^2 - \rho_3^2)\delta x + (\rho_2\Omega_1 + \rho_1\omega_2 - \dot{\rho}_3)\delta y + (\rho_3\Omega_1 + \rho_1\Omega_3 + \dot{\rho}_2)\delta z - 2\omega_3\delta\dot{y} + 2\omega_2\delta\dot{z} = -f_3\psi_2 + f_2\psi_3 + B_1; \quad (5.17)$$

$$\delta\ddot{y} + (v^2 - 2\rho_1\Omega_1 - 2\rho_3\Omega_3 - \rho_1^2 - \rho_3^2)\delta y + (\rho_1\Omega_2 + \rho_2\omega_1 + \dot{\rho}_3)\delta x + (\rho_3\Omega_2 + \rho_2\omega_3 - \dot{\rho}_1)\delta z + 2\omega_3\delta\dot{x} - 2\omega_1\delta\dot{z} = f_3\psi_1 - f_1\psi_3 + B_2; \quad (5.18)$$

$$\delta\ddot{z} + (v^2 - 2\rho_1\Omega_1 - 2\rho_2\Omega_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2)\delta z + (\rho_1\Omega_3 + \rho_3\omega_1 - \dot{\rho}_2)\delta x + (\rho_2\Omega_3 + \rho_3\Omega_2 + \dot{\rho}_1)\delta y - 2\omega_2\delta\dot{x} + 2\omega_1\delta\dot{y} = f_1\psi_2 - f_2\psi_1 + B_3 + \frac{3v^2}{R_0}R\delta z; \quad (5.19)$$

$$\dot{\psi}_1 + \omega_2\psi_3 - \omega_3\psi_2 = \varepsilon_1; \quad (5.20)$$

$$\dot{\psi}_2 + \omega_3\psi_1 - \omega_1\psi_3 = \varepsilon_2; \quad (5.21)$$

$$\dot{\psi}_3 + \omega_1\psi_2 - \omega_2\psi_1 = \varepsilon_3. \quad (5.22)$$

Если бы следовать принятой в гл. 1 точке зрения, то в правых частях уравнений (5.17), (5.18) вместо сумм  $-f_3\psi_2 + f_2\psi_3$  и  $f_3\psi_1 - f_1\psi_3$  надо оставлять лишь члены  $-f_3\psi_2$  и  $f_3\psi_1$ , учитывающие действие вертикальной составляющей кажущегося ускорения  $f_3$ , которая играет ту же роль, что и вектор ускорения силы тяжести. Что касается негравитационных ускорений  $f_2\psi_3$ ,  $-f_1\psi_3$  и смещений акселерометров  $B_1$ ,  $B_2$ , то они трансформировались бы цепью «идеальной работы» в отклонения платформы  $\delta_2$ ,  $\delta_1$  от местной вертикали и эти отклонения образовывали бы возмущающие члены  $-f_3\delta_2$ ,  $f_3\delta_1$  в правых частях уравнений (5.17), (5.18). Например, для ИНС



и поскольку  $B = \text{const}$ , установившееся значение  $\delta\varphi_T(\infty)$  (статистическая ошибка)

$$\delta\varphi_T(\infty) = B/g.$$

Эта ошибка такая же, как и упоминавшаяся ранее баллистическая ошибка  $\Delta\varphi = B/g$ , полученная при использовании предложенного в гл. 1 подхода. Одинаковость результатов будет и при другом виде негравитационных сил и объясняется тем, что показанная на рис. 1.9 структурная схема может быть получена структурными преобразованиями схемы, изображенной на рис. 5.3.

Таким образом, ошибки платформенной ИНС можно описывать уравнениями (5.17) — (5.22). Как уже отмечалось, в этих уравнениях  $\rho$ ,  $\omega$  — угловая скорость правильной системы соответственно относительно земной и инерциальной систем;  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  — проекции вектора угла отклонения системы платформы от вычислительной системы на оси правильной системы;  $\dot{\psi}_1$ ,  $\dot{\psi}_2$ ,  $\dot{\psi}_3$  — скорости изменения этих проекций;  $R$  — длина радиус-вектора, определяющего положение объекта.

Уравнения (5.17) — (5.22) являются общими уравнениями ошибок, т. е. относятся к любой ИНС, содержащей горизонтируемую по местной вертикали гиropлатформу. Положив в уравнении (5.19)  $R \cong R_0$ , можно видеть, что вертикальный канал ИНС, к которому это уравнение относится, неустойчив. Горизонтальные каналы (5.17), (5.18) находятся на колебательной границе устойчивости, т. е. нейтральны.

## 5.2. УРАВНЕНИЯ ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ СО СВОБОДНОЙ В АЗИМУТЕ ПЛАТФОРМОЙ

Исследуем ошибки ИНС со свободной в азимуте гиropлатформой. Считаем, что ИНС установлена на объекте, движущемся по поверхности Земли (подводный корабль). В этом случае необходимость в канале ИНС для вертикальной оси отсутствует, так что полагаем, что вместо трех ИНС содержат лишь два акселерометра, а именно, акселерометры  $f_x$  и  $f_y$ . Однако это не сказывается на величинах  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  в правых частях уравнений (5.17), (5.18), так как вектор  $\vec{f}$ , проектированием которого эти величины получены, характеризует поле кажущихся ускорений (ускорений, доступных измерению акселерометрами), а не отдельные составляющие кажущегося ускорения, измеряемые акселерометрами в действительности.

ИНС вырабатывает координаты объекта на земной поверхности и ее ошибками могут быть только  $\delta x$  и  $\delta y$  ( $\delta z = 0$ ). Для ИНС со свободной в азимуте платформой правильной является система  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ , для которой  $\omega_3 = 0$ . Учитывая это, для ИНС со свободной в азимуте платформой получаем следующие уравнения ошибок:

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x} + (v^2 - 2\rho_2\Omega_2 - 2\rho_3\Omega_3 - \rho_2^2 - \rho_3^2)\delta x + (\rho_2\Omega_1 + \rho_1\omega_2 - \dot{\rho}_3)\delta y = \\ = -f_3\psi_2 + f_2\psi_3 + B_1; \end{aligned} \quad (5.24)$$



$$\delta\ddot{y} + (v^2 - 2\rho_1\Omega_1 - 2\rho_3\Omega_3 - \rho_1^2 - \rho_3^2)\delta y + (\rho_1\Omega_2 + \rho_2\omega_1 + \rho_3)\delta x = f_3\psi_1 - f_1\psi_3 + B_2; \quad (5.25)$$

$$\dot{\psi}_1 + \omega_2\psi_3 = \varepsilon_1; \quad (5.26)$$

$$\dot{\psi}_2 - \omega_1\psi_3 = \varepsilon_2; \quad (5.27)$$

$$\dot{\psi}_3 + \omega_1\psi_2 - \omega_2\psi_1 = \varepsilon_3. \quad (5.28)$$

Это — линейные дифференциальные уравнения с изменяющимися во времени коэффициентами, определяемыми характером движения объекта по земной поверхности. Переменными в уравнениях являются  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ , а внешними воздействиями —  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ .

Исследуем коэффициенты уравнений в отношении веса отдельных членов. Пусть объект движется относительно Земли на восток со скоростью  $V=1000$  км/ч (что в несколько раз превышает скорость любого морского судна).

$$\text{Тогда} \quad \omega = \Omega + \frac{V}{R},$$

$$\text{где} \quad \rho = \frac{V}{R} = \frac{1000}{6371 \cdot 3600} = 4,4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}}, \quad \Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{с}}.$$

Квадрат частоты Шулера

$$v^2 = \frac{g}{R} = 1,54 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{с}^2},$$

так что в коэффициенте при втором члене уравнений (5.24) и (5.25) по сравнению с  $v^2$  все другие слагаемые на несколько порядков меньше. Учитывая это, можно с хорошим приближением заменить уравнения ошибок (5.24) — (5.28) упрощенными уравнениями:

$$\delta\ddot{x} + v^2\delta x + (\rho_2\Omega_1 + \rho_1\omega_2 - \rho_3)\delta y = -f_3\psi_2 + f_2\psi_3 + B_1; \quad (5.29)$$

$$\delta\ddot{y} + v^2\delta y + (\rho_1\Omega_2 + \rho_2\omega_1 + \rho_3)\delta x = f_3\psi_1 - f_1\psi_3 + B_2; \quad (5.30)$$

$$\dot{\psi}_1 + \omega_2\psi_3 = \varepsilon_1; \quad (5.31)$$

$$\dot{\psi}_2 - \omega_1\psi_3 = \varepsilon_2; \quad (5.32)$$

$$\dot{\psi}_3 + \omega_1\psi_2 - \omega_2\psi_1 = \varepsilon_3. \quad (5.33)$$

Коэффициенты  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  этих уравнений представляют проекции кажущегося ускорения  $\ddot{f}$  на оси правильной системы  $O_1\xi'\eta'\zeta'$  и согласно уравнениям (1.39), (1.47) имеют вид

$$f_1 = \dot{V}_{\xi'} - V_{\eta'}\Omega \sin \varphi; \quad (5.34)$$

$$f_2 = \dot{V}_{\eta'} + V_{\xi'}\Omega \sin \varphi; \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \omega_{\xi'}V_{\eta'} - \omega_{\eta'}V_{\xi'} + \Omega_{\xi'}V_{\eta'} - \Omega_{\eta'}V_{\xi'} + g = \\ &= (2\Omega_{\xi'} + \rho_{\xi'})V_{\eta'} - (2\Omega_{\eta'} + \rho_{\eta'})V_{\xi'} + g. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Коэффициенты  $\omega_1, \omega_2$  определяются формулами

$$\omega_2 = \Omega_{\xi'} + \rho_{\xi'}; \quad (5.37)$$

$$\omega_2 = \Omega_{\eta'} + \rho_{\eta'},$$

$$\text{где} \quad \rho_{\xi'} = -\frac{V_{\eta'}}{R_0}; \quad \rho_{\eta'} = \frac{V_{\xi'}}{R_0}; \quad (5.38)$$

$$\Omega_{\xi'} = \Omega \cos \varphi \sin \chi; \quad \Omega_{\eta'} = \Omega \cos \varphi \cos \chi, \quad (5.39)$$

а угол  $\chi$  находится из уравнения

$$\dot{\chi} = -\Omega \sin \varphi - \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi.$$

При определенных предположениях о движении объекта все коэффициенты уравнений (5.29) — (5.33) можно получить как явные функции времени, что удобно в случае аналитического исследования ошибок. Однако при использовании методов оптимальной фильтрации в каких-либо предположениях о движении объекта нет необходимости, так как при любом движении объекта коэффициенты уравнений в вычислительной системе координат вырабатываются самой ЦВМ.

### 5.3. СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Иногда уравнения ошибок ИНС получают другим более простым способом. Рассмотрим замкнутый контур, соответствующий каналу  $x$  ИНС со свободной в азимуте платформой. Считаем, что объект неподвижен относительно Земли. Тогда в равновесном (невозмущенном) режиме координаты этого контура  $f_x, V_x, \omega_y^*$  равны нулю, а координата  $\omega_y^*$  имеет постоянное значение  $\Omega \cos \varphi \cos \chi$ , благодаря которому платформа остается в плоскости местного горизонта. Вычислительная система  $O_1 x_B y_B z_B$  совпадает с правильной системой  $O_1 \xi' \eta' \zeta'$  и с системой платформы  $O_1 x y z$ , так что углы  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  являются углами отклонения платформы от правильной системы (в дальнейшем эти углы обозначаются как  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ ).

Представим, что равновесный режим нарушен отклонением платформы относительно ее осей на малые углы  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  и возникновением дрейфов  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, B_x, B_y$ . Вследствие линейности звеньев контура и, следовательно, справедливости принципа суперпозиции можно составить структурную схему ошибок (рис. 5.4).

На структурной схеме гиropлатформа представлена в виде интегрирующего звена. Это обусловлено тем, что за входной сигнал платформы принят угол отклонения  $\varphi_y$ , а за входной — угловая скорость. Инвертирование в звене  $A$  (знак минус) объясняется следующими причинами. При положительном наклоне платформы  $\varphi_y$  возникает составляющая ускорения силы тяжести, направленная в положительном направлении оси  $x$  платформы. Поскольку эта ось принята за ось чувствительности акселерометра, то, как было от-



#### 5.4. УРАВНЕНИЯ ОШИБОК БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ (БИНС)

При выводе уравнений ошибок БИНС требуется уравнение, являющееся обобщением уравнения Пуассона (4.18). Уравнение (4.18) позволяет вычислить матрицу направляющих косинусов осей подвижной системы в неподвижной (инерциальной) системе по известной абсолютной угловой скорости подвижной системы, в то время как обобщенное уравнение Пуассона дает возможность вычислить матрицу направляющих косинусов одной подвижной системы по отношению к другой.

Обобщенное уравнение можно вывести из уравнения (4.18). Пусть  $m, n$  — подвижные координатные системы, а  $i$  — неподвижная (инерциальная) система. Согласно уравнению (4.18) можно записать

$$[\omega]_m = D_m^i \dot{D}_i^m; [\omega]_n = D_n^i \dot{D}_i^n, \quad (5.44)$$

где  $[\omega]_m, [\omega]_n$  — кососимметричные матрицы вращения вида (4.17), элементами которых служат проекции вектора абсолютной угловой скорости (угловой скорости относительно системы  $i$ ) подвижной системы координат на оси этой системы координат.

Как показывает уравнение (4.6), матрица вращения системы  $m$  относительно системы  $n$  имеет вид

$$[\omega]_{mn} = D_m^n \dot{D}_n^m R_m. \quad (5.45)$$

При использовании примененного здесь двойного индекса фигурирующие в (5.44) матрицы записываются как  $[\omega]_{mi}, [\omega]_{ni}$ . Поскольку, однако, система  $i$  инерциальная, второй индекс становится излишним, если трактовать матрицу с одним индексом как матрицу вращения отмеченной этим же индексом системы по отношению к инерциальной системе координат.

Представим матрицу перехода  $D_n^m$  в виде

$$D_n^m = D_n^i D_i^m.$$

Продифференцировав это выражение по времени, находим

$$\dot{D}_i^m = \dot{D}_n^i \dot{D}_i^m + \dot{D}_n^i D_i^m. \quad (5.46)$$

По введении между сомножителями единичных матриц  $D_i^m D_m^i$  и  $D_i^n D_n^i$  это уравнение сводится к виду

$$\dot{D}_n^m = D_n^i D_i^m \dot{D}_m^i + \dot{D}_n^i D_i^n D_n^m \dot{D}_i^m = D_n^m (D_m^i \dot{D}_i^m) + (\dot{D}_n^i D_i^n) D_n^m \quad (5.47)$$

или при учете выражений (5.44)

$$\dot{D}_n^m = D_n^m [\omega]_m + [\omega]_n^T D_n^m.$$

Поскольку матрица вращения кососимметричная  $[\omega]_n^T = -[\omega]_n$ , так что уравнение (5.47) окончательно принимает вид

$$\dot{D}_n^m = D_n^m [\omega]_m - [\omega]_n D_n^m. \quad (5.48)$$

Это обобщенное уравнение Пуассона позволяет определять матрицу перехода  $D_n^m$  от подвижной системы  $m$  к подвижной системе  $n$  по абсолютным угловым скоростям этих подвижных систем и по начальным условиям  $D_n^m(0)$ .

Как и в случае платформенной ИНС, начнем с вывода уравнений ошибок БИНС по положению. Рассуждения, приведенные в разд. 5.1 в связи с выводом этих уравнений для платформенной ИНС, с небольшими добавлениями применимы и к БИНС. Вместо понятия *фиктивная платформа* следует использовать понятие *фиктивный объект*, трактуя его как объект, находящийся в точке земной поверхности, координаты которой вычислены ЦВМ. Тогда при сферической модели Земли вариации  $\delta \bar{g}(\bar{R})$  и  $\delta \bar{f}$  определяются соответственно выражениями (5.7) и (5.9), а векторное уравнение ошибок БИНС по положению совпадает с уравнением (5.11).

Обратимся теперь к выводу векторного уравнения ошибок ориентации вычислительной системы координат БИНС [32]. Помимо использованных в гл. 4 инерциальной  $i$ , навигационной (земной)  $n$ , географической  $d$  и связанной с машиной (объектом)  $m$  систем координат введем в рассмотрение вычислительную  $B$  и «платформенную»  $P$  системы координат. Хотя реальной гиropлатформы в БИНС нет, можно представить «аналитическую платформу», которая может отклоняться от правильной системы  $p$ . Для БИНС в качестве правильной системы принимается географический трехгранник  $d$ . Под вычислительной, как и раньше, будем понимать систему с началом в точке земной поверхности, долгота и широта которой соответствует данным, вырабатываемым БИНС, а направления осей совпадают с направлениями осей правильной системы  $p$  для этой же точки.

В основе алгоритма БИНС лежит пересчет данных, измеренных в системе объекта  $m$ , в правильную систему  $p$ . Этот пересчет возможен, когда матрица перехода  $D_p^m$  известна. Матрицу  $D_p^m$  можно найти по обобщенному уравнению Пуассона (5.48), принимающему в данном случае вид

$$\dot{D}_p^m = D_p^m [\omega]_m - [\omega]_p D_p^m. \quad (5.59)$$

При решении уравнения (5.59) ЦВМ использует угловые скорости (элементы матрицы  $[\omega]_m$ ), содержащие ошибки. Вместо точных значений  $\omega_{xm}$ ,  $\omega_{ym}$ ,  $\omega_{zm}$  в ЦВМ поступают данные  $\omega_{xm}^*$ ,  $\omega_{ym}^*$ ,  $\omega_{zm}^*$ , представляющие собой выходные сигналы связанных с объектом гироскопов. В этих данных содержатся дрейфы гироскопов  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ , так что, вводя кососимметричную матрицу

$$[\varepsilon]_m = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

аналогичную по структуре матрице (4.17), получим следующее выражение матрицы вращения, действительно используемой в ЦВМ,

$$[\omega]_m^* = [\omega]_m + [\varepsilon]_m. \quad (5.61)$$

Что касается фигурирующей в уравнении (5.59) матрицы  $[\omega]_p$ , то вместо нее ЦВМ использует матрицу  $[\omega]_B$ , соответствующую угловой скорости вычислительной системы. Таким образом, по уравнению (5.59) ЦВМ в действительности вычисляет матрицу перехода  $D_{\Pi}^m$ , от системы объекта  $m$  к системе «аналитической платформы»  $\Pi$ , отличающуюся от требуемой матрицы  $D_p^m$ :

$$D_{\Pi}^m = D_{\Pi}^m [\omega]_m^* - [\omega]_B D_{\Pi}^m. \quad (5.62)$$

Таким образом, реализация алгоритма БИНС предусматривает определение навигационных параметров по проекциям векторов на оси системы  $\Pi$ , да и то вместо этих проекций реально используются проекции векторов на оси вычислительной системы  $B$ . Переход при реальных расчетах от системы  $\Pi$  к системе  $B$  обуславливает матрицу ошибок

$$\Delta D = D_{\Pi}^m - D_B^m, \quad (5.63)$$

зависящую от перекоса системы  $\Pi$  относительно системы  $B$ .

Представим входящую в уравнение (5.63) матрицу  $D_B^m$  в виде

$$D_B^m = D_{\Pi}^m D_{\Pi}^m. \quad (5.64)$$

При малых значениях ошибок можно систему  $\Pi$  считать близкой к системе  $B$ , что позволяет выразить матрицу  $D_{\Pi}^m$  следующим образом. Пусть система  $\Pi$  перекошена относительно системы  $B$  на малый угол  $\psi$  (рис. 5.5). Тогда положение системы  $Ox_{\Pi}y_{\Pi}z_{\Pi}$  в системе  $Ox_By_Bz_B$  можно задать углами Эйлера  $\psi_z, \psi_x, \psi_y$ , величина которых мала. Как видно из рис. 5.5, матрица

$$D_{\Pi}^m = \begin{bmatrix} 1 & \psi_z & -\psi_y \\ -\psi_z & 1 & \psi_x \\ \psi_y & -\psi_x & 1 \end{bmatrix},$$

а искомая матрица перехода

$$D_B^m = \begin{bmatrix} 1 & -\psi_z & \psi_y \\ \psi_z & 1 & -\psi_x \\ -\psi_y & \psi_x & 1 \end{bmatrix} = I + [\psi]_B, \quad (5.65)$$

где  $I$  — единичная матрица, а  $[\psi]_B$  — матрица вида (4.17), соответствующая вектору-углу

$$\psi_B = [\psi_x, \psi_y, \psi_z].$$

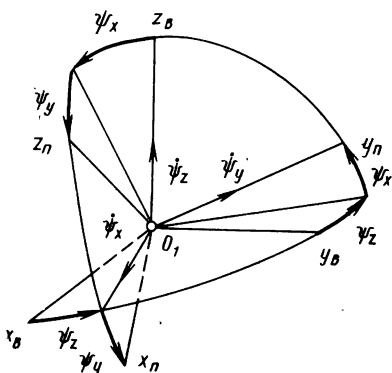


Рис. 5.5. Вычислительная и платформенная системы координат

Подставляя выражения (5.64), (5.65) в уравнение (5.63), получим

$$\Delta D = -[\psi]_B \dot{D}_B^m. \quad (5.66)$$

Матрица перехода  $D_B^m$  удовлетворяет обобщенному уравнению Пуассона

$$\dot{D}_B^m = D_B^m [\omega]_m - [\omega]_B D_B^m. \quad (5.67)$$

Подставляя в это уравнение выражения (5.61) и (5.63), находим

$$\dot{D}_\Pi^m - \Delta \dot{D} = (D_\Pi^m - \Delta D)([\omega]_m^* - [\varepsilon]_m) - [\omega]_B (D_\Pi^m - \Delta D). \quad (5.68)$$

Если в уравнении (5.68) учесть уравнение (5.62), то после пренебрежения членами второго порядка малости приходим к уравнению

$$\Delta \dot{D} = D_\Pi^m [\varepsilon]_m + \Delta D [\omega]_m^* - [\omega]_B \Delta D. \quad (5.69)$$

Но дифференцированием по времени уравнения (5.66) можно получить другое выражение  $\Delta \dot{D}$ :

$$\Delta \dot{D} = -[\dot{\psi}]_B D_\Pi^m - [\psi]_B \dot{D}_\Pi^m. \quad (5.70)$$

По подстановке  $\dot{D}_\Pi^m$  из уравнения (5.62) это выражение примет вид

$$\Delta \dot{D} = -[\dot{\psi}]_B D_\Pi^m - [\psi]_B (D_\Pi^m [\omega]_m^* - [\omega]_B D_\Pi^m). \quad (5.71)$$

Подставим теперь в левую часть уравнения (5.69) вместо  $\Delta \dot{D}$  выражение (5.71), а в правую — вместо  $\Delta D$  выражение (5.66):

$$-[\dot{\psi}]_B D_\Pi^m - [\psi]_B [\omega]_B D_\Pi^m = D_\Pi^m [\varepsilon]_m + [\omega]_B [\psi]_B D_\Pi^m.$$

По умножении этого уравнения слева на  $D_m^\Pi$  получим

$$[\psi]_B = -D_\Pi^m [\varepsilon]_m D_m^\Pi - [\omega]_B [\psi]_B + [\psi]_B [\omega]_B. \quad (5.72)$$

При помощи непосредственных вычислений можно убедиться в справедливости равенства

$$[\omega]_B [\psi]_B - ([\omega]_B [\psi]_B)^T = [[\omega]_B \psi]_B, \quad (5.73)$$

где правая часть — кососимметричная матрица вида (4.17), соответствующая матрице-столбцу  $[\omega]_B \psi_B$ . Матрицы  $[\omega]_B$  и  $[\psi]_B$  кососимметричные, вследствие чего

$$[\psi]_B [\omega]_B = ([\omega]_B [\psi]_B)^T. \quad (5.74)$$

Подставляя выражение (5.74) в уравнение (5.73), получим в левой части сумму двух последних членов уравнения (5.72), взятую с обратным знаком. Поэтому уравнение (5.72) можно записать в виде

$$[\dot{\psi}]_B = -D_\Pi^m [\varepsilon]_m D_m^\Pi - [[\omega]_B \psi]_B. \quad (5.75)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что  $D_{\Pi}^m [\varepsilon]_m D_m^n$  — кососимметричная матрица, соответствующая вектору (матрице-столбцу)  $D_{\Pi}^m \varepsilon_m$ . Таким образом, все члены уравнения (5.75) — кососимметричные матрицы. Переходя от этих матриц к соответствующим им матрицам-столбцам, получим

$$\dot{\psi}_B = -D_{\Pi}^m \varepsilon_m - [\omega]_B \psi_B. \quad (5.76)$$

Если матрицу  $D_B^n$  [см. (5.65)] транспортировать и затем представить как сумму единичной и кососимметричной матриц, то получим

$$D_B^n = I - [\psi]_B. \quad (5.77)$$

Умножая уравнение (5.64) слева на  $D_B^n$  и учитывая выражение (5.77), будем иметь

$$D_{\Pi}^m = (I - [\psi]_B) D_B^m. \quad (5.78)$$

Подставив это выражение в уравнение (5.76), найдем

$$\dot{\psi}_B = -D_B^m \varepsilon_m - [\omega]_B \psi_B + [\psi]_B D_B^m \varepsilon_m. \quad (5.79)$$

Последний член правой части

$$[\psi]_B D_B^m \varepsilon_m = [\psi]_B \varepsilon_B = (\bar{\psi} \times \bar{\varepsilon})_B \quad (5.80)$$

— бесконечно малая второго порядка малости и им можно пренебречь. Тогда уравнение (5.79) примет вид

$$\dot{\psi}_B = -\varepsilon_B - [\omega]_B \psi_B. \quad (5.81)$$

Поскольку  $\dot{\psi}_B$  — производная вектора  $\psi_B$  относительно системы В, а  $[\omega]_B \psi_B$  — векторное произведение в проекциях на оси системы В, можно уравнение (5.81) записать в следующей форме:

$$\frac{i}{\psi} = -\bar{\varepsilon}. \quad (5.82)$$

Здесь  $\frac{i}{\psi}$  — производная по времени вектора-угла  $\bar{\psi}$  относительно инерциальной системы  $i$ , а  $\bar{\varepsilon}$  — вектор дрейфа гироскопов БИНС.

В качестве окончательного векторного уравнения ошибок ориентации примем запись уравнения (5.82) в правильной системе  $p$ :

$$\frac{p}{\psi} + \bar{\omega}_p \times \bar{\psi} = -\bar{\varepsilon}. \quad (5.83)$$

Здесь  $\bar{\psi}$  — вектор-угол отклонения системы «аналитической платформы» П от вычислительной системы В;  $\bar{\omega}_p$  — вектор угловой скорости правильной системы  $p$  относительно инерциальной системы  $i$ ;  $\bar{\varepsilon}$  — вектор, проекциями которого на оси системы объекта  $m$  служат скорости дрейфа  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  гироскопов БИНС.



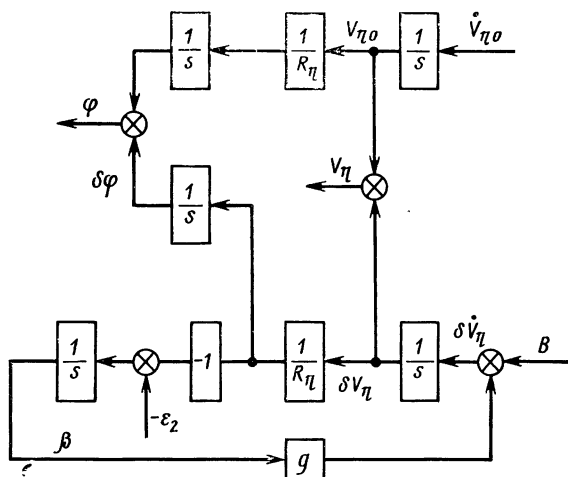


Рис. 5.6. Структурная схема северного канала БИНС

## 5.5. СРАВНЕНИЕ МЕТОДИЧЕСКИХ ОШИБОК ПЛАТФОРМЕННОЙ И БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Векторные уравнения (5.11), (5.83) ошибок БИНС отличаются от векторных уравнений (5.11), (5.16) платформенной ИНС только знаком перед членом  $\bar{\epsilon}$ , выражающим дрейф гироскопов. Следовательно, уравнения ошибок БИНС в проекциях на оси правильной системы  $p$  с точностью до членов, учитывающих дрейф, совпадают с уравнениями ошибок (5.17) — (5.22) платформенной ИНС.

В случае БИНС в уравнениях (5.20), (5.21), (5.22) вместо  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  должны фигурировать элементы матрицы-столбца  $D_p^m \epsilon_m$ , взятые с обратным знаком. В БИНС действительные скорости дрейфа гироскопов формируют матрицу-столбец  $\epsilon_m$ . При пересчете этих дрейфов в правильную систему  $p$  получаем  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , а учитывая разницу в знаках перед  $\epsilon$  [см. (5.16) и (5.83)] приходим к необходимости указанной замены.

Следует отметить, что дрейфы  $B_1, B_2, B_3$  в уравнениях (5.17) — (5.19) ошибок БИНС получаются аналогичным пересчетом (при использовании матрицы  $D_p^m$ ) реальных дрейфов  $B_x, B_y, B_z$ , связанных с объектом акселерометров.

Структурная схема БИНС показана на рис. 5.6. Эта схема отличается от структурной схемы платформенной ИНС отсутствием в цепи «идеальной работы» ветви  $D$  (см. рис. 5.3), соответствующей реальной гиropлатформе, и, следовательно, отсутствием воздействия  $\delta$  на замкнутую систему ошибок. Если в алгоритме БИНС принять сферическую модель Земли, то в отличие от платформенной ИНС в БИНС автоматической компенсации ошибки местоположения, вызываемой эллиптичностью реальной Земли, не происходит. По этой причине в алгоритме БИНС необходимо применять эллип-

тическую модель Земли, что усложняет алгоритм и, следовательно, является недостатком БИНС по сравнению с ПИНС.

Другой недостаток БИНС, также связанный с отсутствием упомянутого воздействия  $\delta$ , состоит в том, что рассмотренные в гл. 2 способы демпфирования ПИНС внутренними связями для БИНС не пригодны, потому что обуславливают слишком большие ошибки в показаниях. Демпфирование ошибок БИНС возможно только при использовании внешней информации о параметрах цепи «идеальной работы», например, информации о скорости  $V_{r,0}$  объекта.

К недостаткам БИНС относится и то, что фигурирующие на структурной схеме (см. рис. 5.6) и в уравнениях (5.17) — (5.22) дрейфы гироскопов и акселерометров вследствие нестационарности матрицы перехода  $D_p^m$  будут нестационарными случайными процессами даже при стационарности случайных процессов, представляющих дрейф реальных гироскопов и акселерометров. Это создает трудности при идентификации ошибок БИНС методами оптимальной фильтрации. Заметим, что для платформенной ИНС этой трудности не возникает, так как оси реальной гироплатформы мало отклоняются от соответственных осей правильной системы.

Таким образом, при одинаковости уровней соответственных дрейфов алгоритмы платформенных ИНС позволяют достигнуть более высокой точности определения навигационных параметров, чем алгоритмы БИНС.

## ГЛАВА 6

### НАБЛЮДАЕМОСТЬ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Ошибки, допускаемые ИНС в определении местоположения и скорости объекта, а также местной вертикали, могут быть оценены лишь при использовании информации о некоторых из этих ошибок, получаемой от сторонних по отношению к ИНС источников. В дальнейшем в качестве источника внешней информации примем какой-либо измеритель скорости объекта относительно Земли (лаг судна, доплеровский измеритель скорости).

Вычитая из данных о скорости, вырабатываемых ИНС, данные от лага, получаем ошибку ИНС по скорости с наложенной на нее ошибкой лага. Принимаем лаг идеальным. В этом случае результат вычитания представляет собой только ошибку ИНС по скорости. Возникает вопрос, можно ли, располагая ошибками ИНС по скорости  $\delta\dot{x}$ ,  $\delta\dot{y}$ , оценить все другие ошибки ИНС, а именно, ошибки в определении местоположения  $\delta\dot{x}$ ,  $\delta\dot{y}$ , ошибки в угловом положении платформы<sup>1</sup>  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ , дрейфы гироскопов  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , смеще-

<sup>1</sup> Углы  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  характеризуют отклонение системы платформы от вычислительной системы координат, вертикальная ось  $O_1z_B$ , которой в общем случае отклонена от вертикали действительного местоположения объекта. Однако при известных  $\delta\dot{x}$ ,  $\delta\dot{y}$  можно рассчитать отклонение оси  $O_1z_B$  вычислительной системы от вертикали действительного местоположения и, зная  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ , рассчитать затем отклонения платформы от вертикали действительного местоположения объекта.

ния в показаниях акселерометров  $B_1, B_2$ . Этот вопрос можно решить, исследуя наблюдаемость всех ошибок ИНС по данным об ее ошибках по скорости  $\delta\dot{x}, \delta\dot{y}$  [12].

Уравнения ошибок ИНС были выведены в гл. 5 [(5.24) — (5.28)]. В этих уравнениях фигурируют дрейфы гироскопов  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  и смещения в показаниях акселерометров  $B_1, B_2$ . Если  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, B_1, B_2$  рассматривать как ошибки, подлежащие идентификации, то число переменных превысит число уравнений. Чтобы систему уравнений ошибок сделать замкнутой, необходимо принять математическую модель процессов, генерирующих дрейфы  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  и смещения акселерометров  $B_1, B_2$ , т. е. принять для этих ошибок некоторые уравнения. Если для целей идентификации ошибок ИНС применять калмановскую теорию оптимальной фильтрации, то указанную математическую модель следует строить таким образом, чтобы ее выходным сигналом был «белый шум» (калмановская теория фильтрации предполагает шум, действующий на объект, и измерительный шум белыми). Такое построение выполнено в работе [12]. В этой же работе показано, что с точностью до влияния со стороны другого канала (переменная  $x_5 = \psi_1$ ) канал ИНС со свободной в азимуте платформой полностью наблюдаем по измерениям ошибки  $x_1 = \delta\dot{x}$ , относящейся к этому каналу. Другими словами, измеряя ошибку  $\delta\dot{x}$ , например, с помощью лага, можно найти (идентифицировать) ошибку ИНС  $\delta x$  в определении местоположения и ошибки  $\psi_2, \psi_3$  в определении местной вертикали и азимута. Отказываясь от идентификации  $\delta x$ , можно также по результатам измерения  $\delta\dot{x}$  определить (с точностью до влияния со стороны переменной  $\dot{x}_2 = \delta\dot{x}$ ) все три ошибки  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , допускаемые ИНС в определении местной вертикали и азимута.

## 6.1. ОДИН КАНАЛ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Изложим в краткой форме, как можно по результатам измерений  $x_1 = \delta\dot{x}$  идентифицировать  $x_2 = \delta x, x_3 = \psi_2, x_4 = \psi_3$ . Для указанной идентификации необходимо решить систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -v^2 & -g & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} x_5, \quad (6.1)$$

получаемую отнесением  $x_5 = \psi_1$  к внешним воздействиям [12].

Решение уравнения (6.1) легко найти в общем виде, если воспользоваться способом получения матрицанта сложной системы из матрицантов ее подсистем [9].

В данном случае разделение матрицы **A** на субматрицы целесообразно произвести следующим образом:

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} \overbrace{0 \quad -v^2}^{\mathbf{a}} & & \overbrace{-g \quad 0}^{\boldsymbol{\eta}} & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \omega_1 \\ \underbrace{0 \quad 0}_{\boldsymbol{\xi}} & & \underbrace{-\omega_1 \quad 0}_{\mathbf{b}} & \end{array} \right]. \quad (6.2)$$

Чтобы вычислить матрицант подсистемы  $\mathbf{a}$ , воспользуемся формулой Сильвестра.

Формула Сильвестра, выражающая некоторую функцию  $F(\mathbf{A}, t)$  от матрицы  $\mathbf{A}$   $t$  через характеристический полином и собственные значения входящей в аргумент ( $n \times n$ ) матрицы  $\mathbf{A}$ , имеет вид

$$F(\mathbf{A}t) = \sum_{k=1}^n \frac{F(\lambda_k t)}{\Delta_1(\lambda_k)} M(\lambda_k), \quad (6.3)$$

где собственные значения  $\lambda_k$  суть корни характеристического полинома

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}). \quad (6.4)$$

Другие входящие в (6.3) величины определяются формулами:

$$\Delta^{(1)}(\lambda_k) = \left. \frac{d\Delta(s)}{ds} \right|_{s=\lambda_k}; \quad (6.5)$$

$$\mathbf{M}(\lambda_k) = (-1)^{n-1} \prod_{r \neq k} \mathbf{f}(\lambda_r), \quad (6.6)$$

$$\text{где } \mathbf{f}(\lambda_r) = \lambda_r \mathbf{I} - \mathbf{A}. \quad (6.7)$$

Применительно к матричному экспоненциалу  $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$  формула (6.3) при замене  $\mathbf{M}(\lambda_k)$  выражениями (6.6), (6.7) принимает вид

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=1}^n \frac{e^{\lambda_k t}}{\Delta^{(1)}(\lambda_k)} (-1)^{n-1} \prod_{r \neq k} (\lambda_r \mathbf{I} - \mathbf{A}). \quad (6.8)$$

Здесь произведение  $\prod$  состоит из  $n-1$  сомножителей  $\lambda_r \mathbf{I} - \mathbf{A}$ , так что в выражении (6.8) наивысшая степень  $\mathbf{A}$  равна  $n-1$ . Согласно этой формуле искомый матрицант подсистемы  $\mathbf{a}$

$$\Omega_0^t(\mathbf{a}) = \mathbf{e}^{\mathbf{a}t} = \sum_{k=1}^2 \frac{e^{\lambda_k t}}{\Delta^{(1)}(\lambda_k)} (-1) \prod_{r \neq k} (\lambda_r \mathbf{I} - \mathbf{a}), \quad (6.9)$$

где собственные значения  $\lambda_1 = jv$ ;  $\lambda_2 = -jv$ .

Подставляя собственные значения в формулу (6.9) и производя преобразования, находим

$$\Omega_0^t(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \cos vt & -v \sin vt \\ \frac{1}{v} \sin vt & \cos vt \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Для подсистемы **b** аналогичным образом получаем

$$\Omega_0^t(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Матрицант всей системы (6.1)

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \Omega_0^t(\mathbf{a}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{r}_{2n}, & \Omega_0^t(\mathbf{a}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{s}_{2n+1} \\ \Omega_0^t(\mathbf{b}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_{2n+1}, & \Omega_0^t(\mathbf{b}) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}_{2n} \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

где матрицы  $\mathbf{r}_{2n}$ ,  $\mathbf{s}_{2n+1}$ ,  $\mathbf{u}_{2n+1}$ ,  $\mathbf{v}_{2n}$  зависят от матриц  $\xi$ ,  $\eta$ , определяющих перекрестные связи согласно формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{2n} &= \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} \sigma d\tau_{2n}; \\ \mathbf{s}_{2n+1} &= \int_0^t \kappa d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \sigma d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n}} \kappa d\tau_{2n+1}; \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{2n} &= \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n-1}} \kappa d\tau_{2n}; \\ \mathbf{u}_{2n+1} &= \int_0^t \sigma d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \kappa d\tau_2 \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{2n}} \sigma d\tau_{2n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \kappa = [\Omega_0^t(\mathbf{a})]^{-1} \eta \Omega_0^t(\mathbf{b}); \quad \sigma = [\Omega_0^t(\mathbf{b})]^{-1} \xi \Omega_0^t(\mathbf{a}). \quad (6.14)$$

При  $n=0$  необходимо принимать  $\mathbf{r}_{2n} = \mathbf{r}_0 = 1$ ;  $\mathbf{v}_{2n} = \mathbf{v}_0 = 1$ .

Поскольку все элементы матрицы  $\xi$  равны нулю, матрица  $\sigma$ , а следовательно, и матрицы  $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_6, \dots$ ;  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_5, \dots$ ;  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_6, \dots$ ;  $\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_5, \mathbf{s}_7, \dots$  также равны нулю. Матрицы  $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0$  всегда единичные, а матрица  $\mathbf{s}_1$  в данном случае определяется формулой

$$\mathbf{s}_1 = \int_0^t \kappa d\tau_1, \quad (6.15)$$

$$\text{где } \kappa = [\Omega_0^t(\mathbf{a})]^{-1} \eta \Omega_0^t(\mathbf{b}).$$

Таким образом, матрицант сложной системы (6.1)

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \Omega_0^t(\mathbf{a}) & \Omega_0^t(\mathbf{a}) \mathbf{s}_1 \\ 0 & \Omega_0^t(\mathbf{b}) \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Подставляя в это уравнение выражения (6.2), (6.10), (6.11), находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \cos vt & v \sin vt \\ -\frac{1}{v} \sin vt & \cos vt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -g \cos vt \cos \omega_1 t & -g \cos vt \sin \omega_1 t \\ \frac{g}{v} \sin vt \cos \omega_1 t & \frac{g}{v} \sin vt \sin \omega_1 t \end{bmatrix} \\
 \text{и } \mathbf{S}_1 &= g \int_0^t \begin{bmatrix} -\cos v\tau \cos \omega_1 \tau & -\cos v\tau \sin \omega_1 \tau \\ \frac{1}{v} \sin v\tau \cos \omega_1 \tau & \frac{1}{v} \sin v\tau \sin \omega_1 \tau \end{bmatrix} d\tau = \\
 &= \frac{g}{2} \begin{bmatrix} -\frac{\sin(v-\omega_1)t}{v-\omega_1} - \frac{\sin(v+\omega_1)t}{v+\omega_1}, \\ \frac{2}{v^2-\omega_1^2} - \frac{1}{v} \left( \frac{\cos(v+\omega_1)t}{v+\omega_1} + \frac{\cos(v-\omega_1)t}{v-\omega_1} \right), \\ \frac{2\omega_1}{v^2-\omega_1^2} + \frac{\cos(\omega_1+v)t}{\omega_1+v} + \frac{\cos(\omega_1-v)t}{\omega_1-v} \\ \frac{1}{v} \left( -\frac{\sin(v+\omega_1)t}{v+\omega_1} + \frac{\sin(v-\omega_1)t}{v-\omega_1} \right) \end{bmatrix}. \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

Вычисляя при использовании уравнений (6.11), (6.17) произведение  $\Omega_0^t(\mathbf{a})\mathbf{S}_1$ , получим согласно формуле (6.16) окончательное выражение матрицанта сложной системы (6.1)

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \cos vt & -v \sin vt & a_{13} & a_{14} \\ \frac{1}{v} \sin vt & \cos vt & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t \\ 0 & 0 & -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } a_{13} &= \frac{g}{2} \left\{ \left[ \frac{2}{\omega_1^2 - v^2} + \frac{1}{v} \left( \frac{\cos(v+\omega_1)t}{v+\omega_1} + \frac{\cos(v-\omega_1)t}{v-\omega_1} \right) \right] \times \right. \\
 &\quad \times v \sin vt - \left[ \frac{\sin(v-\omega_1)t}{v-\omega_1} + \frac{\sin(v+\omega_1)t}{v+\omega_1} \right] \cos vt \Big\}; \\
 a_{14}(t) &= \frac{g}{2} \left\{ \left( \frac{\sin(v+\omega_1)t}{v+\omega_1} - \frac{\sin(v-\omega_1)t}{v-\omega_1} \right) \sin vt + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{2\omega_1}{v^2-\omega_1^2} + \frac{\cos(v+\omega_1)t}{v+\omega_1} - \frac{\cos(v-\omega_1)t}{v-\omega_1} \right) \cos vt \right\}; \\
 a_{23}(t) &= \frac{g}{2} \left\{ - \left( \frac{\sin(v-\omega_1)t}{v-\omega_1} + \frac{\sin(v+\omega_1)t}{v+\omega_1} \right) \frac{1}{v} \sin vt + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{2}{v^2 - \omega_1^2} - \frac{1}{v} \left( \frac{\cos(v + \omega_1)t}{v + \omega_1} + \frac{\cos(v - \omega_1)t}{v - \omega_1} \right) \right] \cos vt \Big\}; \\
a_{24}(t) = & \frac{g}{2} \left\{ \frac{1}{v} \left( \frac{2\omega_1}{v^2 - \omega_1^2} + \frac{\cos(v + \omega_1)t}{v + \omega_1} - \frac{\cos(v - \omega_1)t}{v - \omega_1} \right) \sin vt + \right. \\
& \left. + \frac{1}{v} \left( - \frac{\sin(v + \omega_1)t}{v + \omega_1} + \frac{\sin(v - \omega_1)t}{v - \omega_1} \right) \cos vt \right\}. \quad (6.19)
\end{aligned}$$

Матричное решение системы (6.1)

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \Omega_0^t(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \end{bmatrix} + \Omega_0^t(\mathbf{A}) \int_0^t [\Omega_0^\tau(\mathbf{A})]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} x_5(\tau) d\tau. \quad (6.20)$$

Скалярное решение, соответствующее первой строке, имеет вид

$$x_1(t) = a_{11}(t)x_{10} + a_{12}(t)x_{20} + a_{13}(t)x_{30} + a_{14}(t)x_{40} + F_1[x_5(t)], \quad (6.21)$$

где коэффициенты  $a_{ij}(t)$  определяются выражениями (6.18), (6.19). Полная наблюдаемость системы (6.1) по переменной  $x_1(t)$  — это возможность определения начальных значений всех переменных, т. е.  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$ , по известным значениям  $x_1(t)$ . Такая возможность существует, потому что коэффициенты  $a_{ij}(t)$  линейно независимы.

Производя отсчеты переменной  $x_1(t)$  для каких-либо четырех моментов времени  $t_1, t_2, t_3, t_4$  и вычисляя  $a_{ij}(t)$  для этих моментов, образуем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
a_{11}(t_1)x_{10} + a_{12}(t_1)x_{20} + a_{13}(t_1)x_{30} + a_{14}(t_1)x_{40} &= \overline{x_1(t_1)}; \\
a_{11}(t_2)x_{10} + a_{12}(t_2)x_{20} + a_{13}(t_2)x_{30} + a_{14}(t_2)x_{40} &= \overline{x_1(t_2)}; \\
& \quad \quad \quad (6.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11}(t_3)x_{10} + a_{12}(t_3)x_{20} + a_{13}(t_3)x_{30} + a_{14}(t_3)x_{40} &= \overline{x_1(t_3)}; \\
a_{11}(t_4)x_{10} + a_{12}(t_4)x_{20} + a_{13}(t_4)x_{30} + a_{14}(t_4)x_{40} &= \overline{x_1(t_4)},
\end{aligned}$$

в которой неизвестными являются  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$ . Вследствие линейной независимости  $a_{ij}(t)$  определитель этой системы отличен от нуля, так что система относительно  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$  разрешима.

Конечно, отсчеты  $\overline{x_1(t_i)}$ , фигурирующие в правых частях уравнений (6.22), отличаются от точных значений переменной  $x_1(t_i)$ , что обусловлено влиянием неучтенной переменной  $x_5(t)$ . Фактически отсчеты связаны с точным значением переменной формулой

$$\overline{x_1(t_i)} = x_1(t_i) - F_1[x_5(t_i)], \quad (6.23)$$

где  $F_1[x_5(t)]$  как функция времени не известна. Это обстоятельство оправдывает применение при идентификации  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$  метода наименьших квадратов, так как использование вместо четырех

большого количества отсчетов с последующим осреднением может уменьшить влияние  $x_5(t)$ . Но более радикальный способ повышения точности идентификации — уточнение математической модели ошибок ИНС.

В заключение заметим, что при отвороте правильной системы от географического трехгранника на 0 или  $180^\circ$  ( $\chi=0^\circ$  или  $\chi=180^\circ$ ) наблюдаемость ошибок  $x_2=\delta x$ ,  $x_3=\psi_2$  и  $x_4=\psi_3$  утрачивается. Дело в том, что  $\omega_1=\Omega \cos \psi \sin \chi=0$ , а при  $\omega_1=0$

$$a_{11}(t)=\cos vt; a_{12}(t)=-v \sin vt; a_{13}(t)=-Rv \sin vt; a_{14}(t)=0. \quad (6.24)$$

Равенство нулю коэффициента  $a_{14}$  и пропорциональность коэффициентов  $a_{12}(t)$ ,  $a_{13}(t)$  указывают на невозможность разрешения системы уравнений (6.22) относительно  $x_{20}$ ,  $x_{30}$ ,  $x_{40}$ .

## 6.2. УРАВНЕНИЯ ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ОРИЕНТИРУЕМОЙ ПО СТРАНАМ СВЕТА ПЛАТФОРМОЙ

Найдем уравнения ошибок ИНС, гироскопическая платформа которой не только горизонтирована, но и постоянно направлена своей осью на север (последнее достигается созданием соответствующей прецессии платформы вокруг вертикальной оси см. разд. 1.2). Как и раньше, считаем, что объект имеет возможность перемещаться лишь по поверхности Земли. В приводимом далее анализе предполагается, что объект неподвижен. При этих условиях

$$f_1=0, f_2=0, f_3=g, \omega_1=0, \omega_2=\Omega \cos \varphi, \omega_3=\Omega \sin \varphi. \quad (6.25)$$

Рассмотрим канал ИНС, соответствующий оси платформы  $O_{1y}$ , направленной на север. Принимая предположения (6.25), из общих уравнений ошибок (5.17) — (5.22) находим следующие уравнения ошибок этого канала:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{y} + v^2 \delta y &= g \psi_1 + B_2; \\ \dot{\psi}_1 + \omega_2 \psi_3 - \omega_3 \psi_2 &= \varepsilon_1; \quad \dot{\psi}_2 + \omega_3 \psi_1 = \varepsilon_2; \quad \dot{\psi}_3 - \omega_2 \psi_1 = \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Задача, которая будет рассмотрена в разд. 6.2—6.4, заключается в следующем. В предположении, что смещение нуля акселерометра  $B_2$  и дрейфы гироскопов  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  — неизвестные постоянные величины, создать математическую модель в виде системы линейных алгебраических уравнений (она называется алгебраической моделью ошибок), которая позволила бы по измерениям ошибки  $\delta y$  в нескольких моментах времени получить аналитическое выражение этой ошибки для всех последующих моментов времени. Таким образом, вместо идентификации всех ошибок здесь рассматривается идентификация только измеряемой ошибки. Как будет видно из дальнейшего, благодаря такому сужению задачи удастся учесть влияние на  $\delta y$  постоянных внешних воздействий  $B_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , значения которых неизвестны.



Смещение в показаниях акселерометра  $B_2$  и ранее принималось в виде неизвестной постоянной величины. Что касается дрейфа гироскопов  $\varepsilon_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), характеризуемого автокорреляционной функцией

$$R_{\varepsilon\varepsilon} = A^2 e^{-\beta |\tau|} \quad (6.27)$$

то, как показано в [8], такую же корреляционную функцию имеет случайная прямоугольная волна со средней протяженностью ступенек  $1/\beta$ . Поэтому на интервале, длина которого не превосходит  $1/\beta$ , можно дрейф  $\varepsilon_i$  приближенно считать постоянной величиной. Если, например, постоянная корреляции  $1/\beta = 5$  ч, интервал измерений 1 ч, то дрейф  $\varepsilon_i$  можно рассматривать на интервале измерений как постоянную величину.

### 6.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК

Упомянутую алгебраическую модель ошибок можно получить, решив сначала систему дифференциальных уравнений (6.26) относительно  $\delta y$ . Эта система линейная с постоянными коэффициентами, и в принципиальном отношении ее решение не представляет трудности. Особенно удобен в данном случае способ решения, заключающийся в разделении матрицы системы на клетки с квадратными субматрицами по главной диагонали (см. разд. 6.1). В дальнейшем будем применять именно этот способ.

Вводя для переменных состояния обозначения

$$x_1 = \delta y, \quad x_2 = \delta y, \quad x_3 = \psi_1, \quad x_4 = \psi_2, \quad x_5 = \psi_3, \quad (6.28)$$

записываем систему (6.26) в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad (6.29)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} \hline \overbrace{\begin{matrix} 0 & -v^2 \\ 1 & 0 \end{matrix}}^{\mathbf{a}} & \overbrace{\begin{matrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{\boldsymbol{\eta}} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{\boldsymbol{\xi}} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{b}} \\ \hline \end{array} \end{array}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

После деления матрицы  $\mathbf{A}$  на субматрицы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  переходим к построению матрицантов для субматриц, входящих в главную диагональ. Матрицант  $\Omega_0^t(\mathbf{a})$  ранее уже был найден, см. (6.10):

$$\Omega_0^t(\mathbf{a}) = e^{\mathbf{a}t} = \begin{bmatrix} \cos vt & -v \sin vt \\ \frac{1}{v} \sin vt & \cos vt \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Матрицант  $\Omega_0^t(\mathbf{b}) = \mathbf{e}^{\mathbf{b}t}$ , аналогично матрицанту  $\mathbf{e}^{\mathbf{a}t}$  можно найти по формуле Сильвестра (6.8), принимающей для данного случая вид

$$\Omega_0^t(\mathbf{b}) = \mathbf{e}^{\mathbf{b}t} = \sum_{k=0}^3 \frac{\mathbf{e}^{\lambda_k t}}{\Delta^{(1)}(\lambda_k)} \prod_{r \neq k} (\lambda_r \mathbf{I} - \mathbf{b}). \quad (6.32)$$

Характеристический полином матрицы  $\mathbf{b}$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & -\omega_3 & 0 \\ \omega_3 & s & -\omega_1 \\ 0 & \omega_1 & s \end{vmatrix} = s(s^2 + \omega_1^2 + \omega_3^2) = s(s^2 + \Omega^2), \quad (6.33)$$

а собственные значения

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = j\Omega, \lambda_3 = -j\Omega. \quad (6.34)$$

При учете выражения производной

$$\Delta^{(1)} = \frac{d\Delta}{ds} = 3s^2 + \Omega^2$$

получаем матрицант (6.32) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \Omega_0^t(\mathbf{b}) = & \frac{1}{(3s^2 + \Omega^2)_{s=0}} \left( \begin{bmatrix} j\Omega & 0 & 0 \\ 0 & j\Omega & 0 \\ 0 & 0 & j\Omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \times \\ & \times \left( \begin{bmatrix} -j\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -j\Omega & 0 \\ 0 & 0 & -j\Omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \\ & + \frac{\mathbf{e}^{j\Omega t}}{(3s^2 + \Omega^2)_{s=j\Omega}} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \times \\ & \times \left( \begin{bmatrix} -j\Omega & 0 & 0 \\ 0 & -j\Omega & 0 \\ 0 & 0 & -j\Omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \\ & + \frac{\mathbf{e}^{-j\Omega t}}{(3s^2 + \Omega^2)_{s=-j\Omega}} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \times \\ & \times \left( \begin{bmatrix} j\Omega & 0 & 0 \\ 0 & j\Omega & 0 \\ 0 & 0 & j\Omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Производя сложение и перемножение матриц, после некоторых упрощений находим

$$\Omega_0^t(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \varphi \sin \Omega t \\ -\sin \varphi \sin \Omega t & \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos \Omega t \\ \cos \varphi \sin \Omega t & \sin \varphi \cos \varphi (1 - \cos \Omega t) \\ -\cos \varphi \sin \Omega t & \sin \varphi \cos \varphi (1 - \cos \Omega t) \\ \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos \Omega t \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Матрицант  $\Omega_0^t(\mathbf{A})$  полной системы (6.30) определяется по формуле (6.12), причем, как это было показано при обсуждении системы (6.9), благодаря равенству  $\xi=0$  формула сводится к виду

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \Omega_0^t(\mathbf{a}) & \Omega_0^t(\mathbf{a}) \mathbf{S}_1 \\ 0 & \Omega_0^t(\mathbf{b}) \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

В этой формуле

$$\mathbf{S}_1 = \int_0^t [\Omega_0^\tau(\mathbf{a})]^{-1} \eta \Omega_0^\tau(\mathbf{b}) d\tau. \quad (6.37)$$

Вычисляя матрицу  $\mathbf{S}_1$  и подставляя ее в выражение (6.36), при упрощениях

$$\sin \Omega t = \Omega t, \quad \cos \Omega t = 1 \quad (6.38)$$

находим

$$\Omega_0^t(\mathbf{A}) = e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{1}{v} \sin vt & \cos vt & R(1 - \cos vt) \\ 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & 0 & a_{43} \\ 0 & 0 & a_{53} \\ a_{14} & a_{15} \\ R\omega_3 \left(1 - \frac{1}{v} \sin vt\right) & -R\omega_2 \left(t - \frac{1}{v} \sin vt\right) \\ a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Решение неоднородной системы:

$$\mathbf{x} = \Omega_0^t(\mathbf{A}) \mathbf{x}_0 + \int_0^t \Omega_0^t(\mathbf{A}) [\Omega_0^\tau(\mathbf{A})]^{-1} \mathbf{f} d\tau. \quad (6.40)$$

Поскольку  $\mathbf{f}$  — постоянный вектор, это решение при учете, что

$$[\Omega_0^\tau(\mathbf{A})]^{-1} = \Omega_\tau^0(\mathbf{A}) = e^{-\Lambda \tau},$$

можно представить в виде

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \left[ \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau \right] \mathbf{f} \quad (6.41)$$

или после замены под знаком интеграла переменной  $t_1 = t - \tau$

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \left[ \int_0^t e^{\mathbf{A}t_1} dt_1 \right] \mathbf{f}. \quad (6.42)$$

Как уже отмечалось, для построения алгебраической модели ошибок требуется решение относительно измеряемой переменной  $x_2 = \delta y$ . Это решение найдем, беря скалярное уравнение, соответствующее второй строке матричного решения (6.42). Учитывая выражения (6.30), (6.40) и, как это предусматривает решение (6.42), интегрируя во втором члене элементы второй строки, после перемножения матриц и возвращения к первоначальным обозначениям переменных (6.28) искомое решение получим в виде

$$\begin{aligned} \delta y(t) = & \delta y_0 \cos vt - \frac{1}{v} \dot{\delta y}_0 \sin vt + R \left( \frac{B_2}{g} + \psi_{10} \right) (1 - \cos vt) + R(\varepsilon_1 + \\ & + \omega_3 \psi_{20} - \omega_2 \psi_{30}) \left( t - \frac{1}{v} \sin vt \right) + R(\omega_3 \varepsilon_2 - \omega_2 \varepsilon_3) \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{1}{v^2} (1 - \cos vt) \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Представляет интерес исследование влияния начальных значений  $\delta y_0$ ,  $\dot{\delta y}_0$ , дрейфов гироскопов  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  и смещения  $B_2$  в показаниях акселерометра на ошибку  $\delta y$ , допускаемую ИНС в определении местоположения объекта. Выражение (6.43) информации об этом влиянии пока не дает, потому что в ИНС с начальной выставкой платформы гироскопированием начальные значения ошибок и смещения в показаниях акселерометров взаимосвязаны. Чтобы установить эту связь, необходимо вернуться к процессу гироскопирования платформы (см. разд. 1.6).

#### 6.4. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ВЫСТАВКЕ С ПОМОЩЬЮ ГИРОКОМПАСИРОВАНИЯ

Пусть  $\delta x_0$  — начальное значение проекции ошибки, допускаемой ИНС в определении местоположения, на восточную ось  $O_1\xi$  правильной системы (географического трехгранника);  $\delta y_0$  — начальное значение проекции этой ошибки на северную ось  $O_1\eta$ ;  $\psi_{10}$  — начальное отклонение системы платформы от вычислительной системы вокруг относительной оси  $O_1\xi$  правильной системы (проекция вектора  $\bar{\psi}$  на ось  $O_1\xi$ );  $\psi_{20}$ ,  $\psi_{30}$  — аналогичные отклонения соответственно относительно осей  $O_1\eta$  и  $O_1\xi$  правильной системы.

Выразим  $\psi_{10}$ ,  $\psi_{20}$ ,  $\psi_{30}$  через  $\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ . Пока будем считать, что система платформы совпадает с правильной системой  $O_1\xi\eta\xi$ , и угол отклонения правильной системы от вычислительной обозначать  $\psi^*$ .

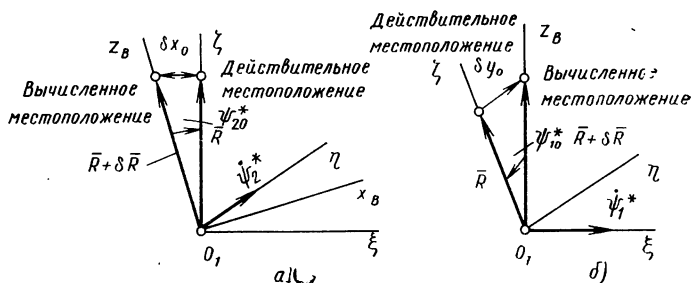


Рис. 6.1. Вычислительная и правильная системы координат при углах рассогласования  $\psi_{20}^*$ ,  $\psi_{10}^*$

На рис. 6.1, а показано относительное положение систем  $O_1x_By_Bz_B$  и  $O_1\xi\eta\zeta$  при положительном угле  $\psi_{20}^*$ . Поскольку положительная величина  $\delta x_0$  откладывается в положительном направлении оси  $O_1\xi$ , положительному углу  $\psi_{20}^*$  соответствует, как это видно из рис. 6.1, а, отрицательная величина  $\delta x_0$ , так что

$$\psi_{20}^* = - \frac{\delta x_0}{R}, \quad (6.44)$$

где  $R$  — радиус Земли.

Используя рис. 6.1, б, аналогичным образом получим

$$\psi_{10}^* = \frac{\delta y_0}{R}. \quad (6.45)$$

Полагая объект движущимся со скоростью  $\delta \dot{x}$  в положительном направлении оси  $O_1\xi$ , т. е. по параллели на восток, видим, что проистекающая от этого движения угловая скорость правильной системы изображается вектором, параллельным вектору угловой скорости вращения Земли. Проектируя этот вектор на вертикаль местоположения объекта и интегрируя проекцию на малом интервале  $dt$ , получим (рис. 6.2)

$$\psi_{30}^* = \frac{\delta x_0}{R} \operatorname{tg} \varphi.$$

Однако в действительности  $\delta \dot{x}$  — ошибка, допускаемая ИНС в вычислении скорости объекта, а не реальная скорость объекта. Чтобы сделать объект неподвижным, обратим движение. Тогда окончательно получим

$$\psi_{30}^* = - \frac{\delta x_0}{R} \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.46)$$

Рис. 6.2. Вычислительная и правильная системы при угле рассогласования  $\psi_{30}^*$

Найдем теперь угловые отклонения системы платформы  $O_1xuyz$  от правильной системы  $O_1\xi\eta\zeta$ . Эти ошибки

обуславливаются несовершенством выставки платформы в горизонт и меридиан.

Сначала примем, что гироскопы и акселерометры идеальны. Процедура выставки заключается в следующем. Вначале осуществляют грубое горизонтирование, а именно, карданные кольца непосредственно поворачивают до тех пор, пока акселерометры не будут показывать приблизительно нуль. Грубую выставку платформы в географический меридиан осуществляют, подключая к платформе магнитный компас и учитывая местную магнитную аномалию.

Точное горизонтирование платформы выполняют путем подачи сигналов от акселерометров на моментные датчики гироскопов. Возникающая прецессия платформы продолжается до тех пор, пока оси чувствительности акселерометров, а следовательно, и платформа, не станут горизонтальными.

Точная выставка платформы в географический меридиан осуществляется с помощью гирокомпасирования платформы, рассмотренного в разд. 1.6. В разд. 1.6 было показано, что при идеальных чувствительных элементах равновесным положением гирокомпасируемой платформы может быть только положение, когда платформа горизонтальна и находится в плоскости меридиана.

Горизонтальное положение платформы относительно восточной оси  $O_1x$  воспринимается ЦВМ как отсутствие сигнала, поступающего от северного акселерометра. Если в показаниях этого акселерометра имеется смещение  $B_2$ , то нулевой сигнал возможен лишь при наклоне платформы относительно оси  $O_1x$ , достаточном, чтобы смещение  $B_2$  было компенсировано составляющей ускорения силы тяжести. Обозначая этот наклон  $\psi_{10}^{**}$  и полагая смещение в показаниях  $B_2$  положительным, из рис. 6.3, а видим, что при положительном  $\psi_{10}^{**}$  возникает составляющая вектора  $g$  в отрицательном направлении оси  $O_1y$ . Но такая составляющая  $g$  вызывает положительное показание акселерометра.

Следовательно, для компенсации положительного смещения  $B_2$  показаний акселерометра платформа должна отклониться в направлении отрицательного отсчета  $\psi_{10}^{**}$ . Учитывая это, из рис. 6.3, а получаем

$$\psi_{10}^{**} = - \frac{B_2}{g} . \quad (6.47)$$

Напротив, как это видно из рис. 6.3, б, для компенсации положительного смещения  $B_1$  в показаниях восточного акселерометра платформа должна наклониться относительно северной оси  $O_1y$  в направлении положительного отсчета угла  $\psi_{20}^{**}$ . Таким образом,

$$\psi_{20}^{**} = \frac{B_1}{g} . \quad (6.48)$$

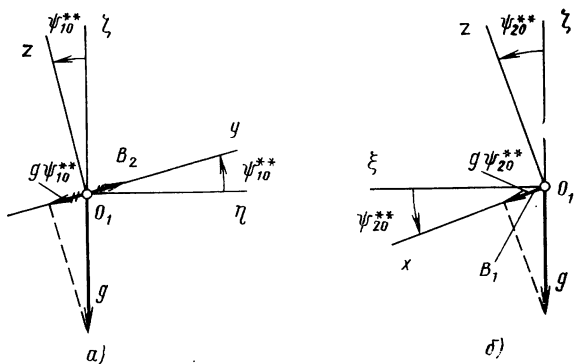


Рис. 6.3 Правильная и платформенная системы при углах рассогласования  $\psi_{10}^{**}$ ,  $\psi_{20}^{**}$

Исследуем теперь ошибку  $\psi_{30}^{**}$  приведения платформы в меридиан. Дрейф  $\varepsilon_1$  восточного гироскопа следует понимать как скорость вращения платформы вместе с этим гироскопом относительно инерциального пространства вокруг восточной оси  $O_1x$ . Возникающий при этом гироскопический момент  $H\varepsilon_1$  вокруг оси прецессии восточного гироскопа может быть уравновешен только гироскопическим моментом от угловой скорости  $\Omega \cos \varphi \sin \psi_{30}^{**}$ , появляющейся благодаря отклонению  $\psi_{30}^{**}$  платформы от плоскости меридиана. Тогда при учете малой величины  $\psi_{30}^{**}$  из рис. 6.4 находим

$$\psi_{30}^{**} = - \frac{\varepsilon_1}{\Omega \cos \varphi}. \quad (6.49)$$

Помимо указанной имеется еще одна составляющая  $\psi_{30}^{***}$ . Эта составляющая возникает по следующим причинам. Согласно формуле (6.48) платформа наклонена относительно северной оси  $O_1y$  на угол  $\psi_{20}^{**} = B_1/g$ . Поэтому в установившемся состоянии вертикальная составляющая угловой скорости вращения Земли  $\Omega \sin \varphi$  имеет в плоскости  $O_1xy$  платформы отличную от нуля составляющую, проекция которой на перпендикуляр к вектору кинетического момента восточного гироскопа

$$\frac{B_1}{g} \Omega \sin \varphi \cos \psi_{30}^{***}. \quad (6.50)$$

Здесь  $\psi_{30}^{***}$  — отклонение платформы от меридиана в установившемся состоянии, необходимое для компенсации скорости (6.50) скоростью

$$\Omega \cos \varphi \sin \psi_{30}^{***}, \quad (6.51)$$

возникающей от горизонтальной составляющей скорости вращения Земли. Приравнявая выражения (6.50), (6.51) и учитывая малую

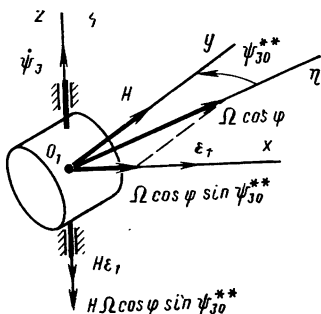


Рис. 6.4. Схема угловых скоростей и гироскопических моментов для восточного гироскопа

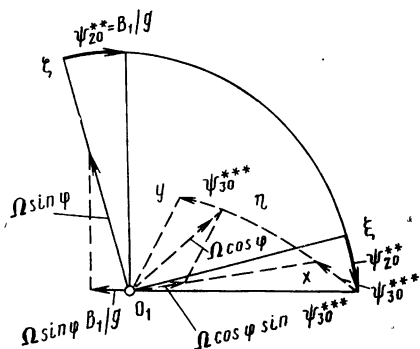


Рис. 6.5. Векторы скоростей прецессии восточного гироскопа

величину угла  $\psi_{30}^{***}$  находим (рис. 6.5)

$$\psi_{30}^{***} = \frac{B_1}{g} \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.52)$$

С учетом принятого направления отсчета углов  $\psi^*$ ,  $\psi^{**}$  и малости этих углов получаем следующие выражения начальных углов отклонения системы гироскопической платформы  $O_1xyz$  от вычислительной системы  $O_1x_By_Bz_B$ :

$$\begin{aligned} \psi_{10} &= \psi_{10}^* + \psi_{10}^{**} = \frac{\delta y_0}{R} - \frac{B_2}{g} + \psi_{10}' ; \\ \psi_{20} &= \psi_{20}^* + \psi_{20}^{**} = -\frac{\delta x_0}{R} + \frac{B_1}{g} + \psi_{20}' ; \\ \psi_{30} &= \psi_{30}^* + \psi_{30}^{**} + \psi_{30}^{***} = \frac{\delta x_0}{R} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\epsilon_1}{\Omega \cos \varphi} + \frac{B_1}{g} \operatorname{tg} \varphi + \psi_{30}' . \end{aligned} \quad (6.53)$$

Здесь  $\psi_{10}'$ ,  $\psi_{20}'$ ,  $\psi_{30}'$  — остаточные ошибки, обусловленные конечностью интервала, в течение которого производится выставка платформы в плоскость горизонта и в меридиан.

## 6.5. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Обратимся к выражению (6.43) ошибки  $\delta y$ . В этом выражении  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  — проекции абсолютной угловой скорости правильной системы на оси  $O_1\eta\zeta$  этой системы. При невысокой скорости объекта можно считать

$$\omega_2 = \Omega \cos \varphi, \quad \omega_3 = \Omega \sin \varphi,$$



Подставляя в решение (6.43) начальные ошибки (6.53) и записывая это решение как сумму членов, каждый из которых — произведение постоянного коэффициента на одну из функций

$$1, \sin vt, \cos vt, t, t^2, \quad (6.54)$$

получаем

$$\begin{aligned} \delta y(t) = & \left[ \delta y_0 + R \left( \frac{\omega_2}{v^2} \varepsilon_3 - \frac{\omega_3}{v^2} \varepsilon_2 + \psi'_{10} \right) \right] + R \left( \frac{\omega_3}{v^2} \varepsilon_2 - \right. \\ & \left. - \frac{\omega_2}{v^2} \varepsilon_3 - \psi'_{10} \right) \cos vt + \left( \frac{1}{v} \delta y_0 - 2 \frac{R}{v} \varepsilon_1 - \frac{R}{v} \omega_3 \psi'_{20} + \right. \\ & \left. + \frac{R}{v} \omega_2 \psi'_{30} \right) \sin vt + R (2\varepsilon_1 + \omega_3 \psi'_{20} - \omega_2 \psi'_{30}) t + \frac{R}{2} (\omega_3 \varepsilon_2 - \omega_2 \varepsilon_3) t^2. \quad (6.55) \end{aligned}$$

Интересно отметить, что ошибка ИНС  $\delta y(t)$  не зависит от смещений  $B_1, B_2$  в показаниях акселерометров.

Полученное решение показывает также, что различные по своему характеру первичные ошибки приводят к одинаковым переходным процессам  $\delta y(t)$  (колебания с частотой Шулера  $\nu$  могут вызываться различными первичными ошибками). Поэтому по протеканию переходного процесса  $\delta y(t)$  нельзя сделать заключение, какие именно первичные ошибки вызвали этот переходный процесс.

Следует, однако, заметить, что все сказанное справедливо лишь, когда время работы ИНС невелико, т. е. когда еще можно принимать предположения (6.38). Например, эти предположения справедливы для ИНС, устанавливаемой на самолете с относительно небольшим временем беспосадочного полета.

Переходим теперь к одному из возможных методов идентификации ошибок  $\delta x$ ,  $\delta y$ . Метод пригоден при любой зависимости  $\delta x$ ,  $\delta y$  от первичных ошибок, однако он применим только при выполнении предположений (6.38). Метод заключается в следующем. Определяя ошибки ИНС  $\delta x(t)$ ,  $\delta y(t)$  для нескольких моментов времени (это можно сделать до старта, вычитая из показаний местоположения, вырабатываемых ИНС, известные координаты точки старта), по уравнению (6.43) формируем переопределенную систему линейных алгебраических уравнений, которая (что было отмечено ранее) рассматривается как алгебраическая модель ошибок ИНС. Например, для северного канала ИНС алгебраическая модель ошибок

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \sin vt_1 + a_3 \cos vt_1 + a_4 t_1 + a_5 t_1^2 &= \delta y(t_1); \\ a_1 + a_2 \sin vt_2 + a_3 \cos vt_2 - a_4 t_2 + a_5 t_2^2 &= \delta y(t_2); \\ &\vdots \\ a_1 + a_2 \sin vt_n + a_3 \cos vt_n + a_4 t_n + a_5 t_n^2 &= \delta y(t_n). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Аналогичный вид имеет и алгебраическая модель ошибок точного канала ИНС ( $n \geq 5$ ). Вследствие линейной независимости функций (6.54) определитель системы (6.56) при  $n=5$  отличен от нуля, так что эту систему можно разрешить относительно  $a_1, \dots, a_5$ .

Более точно коэффициенты  $a_i$  можно определить по методу наименьших квадратов, переходя к переопределенной системе уравнений ( $n > 5$ ). Согласно этому методу [6, 24] оценка вектора искомых коэффициентов

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \delta \mathbf{y}, \quad (6.57)$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \sin vt_1 & \cos vt_1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & \sin vt_2 & \cos vt_2 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin vt_n & \cos vt_n & t_n & t_n^2 \end{bmatrix}; \quad (6.58)$$

$$\delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \delta x_1(t_1) \\ \delta x(t_2) \\ \vdots \\ \delta x(t_5) \end{bmatrix}.$$

После оценки коэффициентов  $a_i$  ошибка  $\delta x(t)$  становится известной функцией времени:

$$\delta x(t) = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \sin vt + \hat{a}_3 \cos vt + \hat{a}_4 t + \hat{a}_5 t^2. \quad (6.59)$$

Коррекция ИНС для всех последующих моментов времени в процессе полета заключается в добавлении к показаниям ИНС о местоположении ошибки (6.59), взятой с обратным знаком.

Через первичные ошибки  $\delta x_0, \delta \dot{x}_0, \delta y_0, B_2, \epsilon_1, \epsilon_2$  и другие коэффициенты  $a_i$  выражаются достаточно сложно, что видно из сравнения выражений (6.55) и (6.59). Однако это обстоятельство несколько не затрудняет идентификацию ошибки  $\delta x(t)$  по измерениям этой ошибки в отдельные моменты. Более того, для указанной идентификации не требуется наблюдаемости первичных ошибок ИНС по измерениям  $\delta x$ , что также относится к преимуществам использования алгебраической модели ошибок (6.56).

## ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ, КОРРЕКТИРУЕМЫЕ ПО ВНЕШНЕЙ ИНФОРМАЦИИ

В предыдущих главах было показано, что введением в классическую схему ИНС каких-либо внутренних связей нельзя устранить или хотя бы уменьшить ошибки ИНС, вызываемые дрейфом гиро-платформы. Неустранимы также и ошибки ИНС, обусловленные неточностью начальной выставки гиро-платформы.

Настоящая и последующие главы посвящены методам ликвидации или снижения указанных ошибок, основанным на использовании внешней по отношению к ИНС информации и обработке этой информации оптимальными (калмановскими) или субоптимальными фильтрами.

### 7.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК АВТОНОМНОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Уравнения ошибок автономной ИНС полуаналитического типа со свободной в азимуте платформой были выведены в разд. 5.2 [см. (5.29) — (5.33)]. Рассмотрим более подробно эти уравнения. Перекрестными связями  $\rho_2\Omega_1 + \rho_1\omega_2 - \rho_3$ ,  $\rho_1\Omega_1 + \rho_2\omega_1 + \rho_3$  в уравнениях (5.29), (5.30) можно пренебречь. Действительно, даже при скорости объекта  $V = 10\,000$  км/ч эти слагаемые несоизмеримо малы по сравнению с  $v^2$ . Из уравнения (5.36) также видно, что  $f_3 \approx g$  (остальные слагаемые в выражении для  $f_3$  несоизмеримо малы по сравнению с  $g$ ).

Таким образом, уравнения (5.29), (5.30) можно свести к более простому виду:

$$\delta\ddot{x} + v^2\delta x = -g\psi_2 + f_2\psi_3 + B_1; \quad (7.1)$$

$$\delta\ddot{y} + v^2\delta y = g\psi_1 - f_1\psi_3 + B_2. \quad (7.2)$$

Рассмотрим свободные колебания ошибок ИНС по каналу  $x$ :

$$\delta\ddot{x} + v^2\delta x = 0. \quad (7.3)$$

Решение этого уравнения при известных начальных условиях имеет вид

$$\delta x = \delta x(0) \cos vt + \frac{\delta \dot{x}(0)}{v} \sin vt. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) показывает, что собственные колебания по ошибкам в каналах  $x$  и  $y$  (характеристические уравнения этих каналов совпадают) представляют собой незатухающие колебания.

Найдем ошибки ИНС по положению. Для этого рассмотрим сначала уравнения (5.31) — (5.33) ошибок ориентации:

$$\dot{\psi}_1 + \omega_2\psi_3 = \varepsilon_1; \quad (7.5)$$

$$\dot{\psi}_2 - \omega_1 \psi_3 = \varepsilon_2; \quad (7.6)$$

$$\dot{\psi}_3 + \omega_1 \psi_2 - \omega_2 \psi_1 = \varepsilon_3. \quad (7.7)$$

Предполагая, что  $\psi_1(0) = \psi_2(0) = \psi_3(0) = 0$ ,  $\varepsilon_1 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_2 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_3 = \text{const}$ , а также считая, что объект движется с постоянной скоростью по параллели, т. е.  $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\omega_2 = \text{const}$ ,  $\omega_3 = \text{const}$ , от уравнений (7.5) — (7.7) перейдем к уравнениям в области изображений по Лапласу:

$$\psi_1(s)s + \omega_2 \psi_3(s) = \frac{\varepsilon_1}{s}; \quad (7.8)$$

$$\psi_2(s)s - \omega_1 \psi_3(s) = \frac{\varepsilon_2}{s}; \quad (7.9)$$

$$\psi_3(s)s + \omega_1 \psi_2(s) - \omega_2 \psi_1(s) = \frac{\varepsilon_3}{s}. \quad (7.10)$$

При умножении уравнения (7.9) на  $\omega_1$ , а уравнения (7.8) — на  $-\omega_2$  и сложении этих уравнений получим

$$[\omega_1 \psi_2(s) - \omega_2 \psi_1(s)]s = (\omega_1^2 + \omega_2^2) \psi_3(s) + \frac{\varepsilon_2 \omega_1 - \varepsilon_1 \omega_2}{s}.$$

Отсюда находим

$$\omega_1 \psi_2(s) - \omega_2 \psi_1(s) = \left( \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{s} \right) \psi_3(s) + \frac{\varepsilon_2 \omega_1 - \varepsilon_1 \omega_2}{s^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (7.10), будем иметь

$$\psi_3(s)s + \left( \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{s} \right) \psi_3(s) = \frac{\varepsilon_1 \omega_2 - \varepsilon_2 \omega_1}{s^2} + \frac{\varepsilon_3}{s}$$

или после разрешения относительно  $\psi_3(s)$  получим

$$\psi_3(s) = \frac{\varepsilon_1 \omega_2 - \varepsilon_2 \omega_1 + \varepsilon_3 s}{s(s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}. \quad (7.11)$$

Представим правую часть уравнения (7.11) в виде суммы простых дробей:

$$\psi_3(s) = \left( \frac{\varepsilon_1 \omega_2 - \varepsilon_2 \omega_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) \frac{1}{s} - \left( \frac{\varepsilon_1 \omega_2 - \varepsilon_2 \omega_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \right) \frac{s}{s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2} + \frac{\varepsilon_3}{s^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Переходя теперь в область времени, получим

$$\begin{aligned} \psi_3(t) = & \frac{\varepsilon_1 \omega_2 - \varepsilon_2 \omega_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} - \frac{\varepsilon_1 \omega_2 - \varepsilon_2 \omega_1}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t + \\ & + \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \sin \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Подставим найденное выражение  $\psi_3(s)$  в уравнение (7.8) и, переходя в область времени, определим значение  $\psi_1(t)$ :

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = & -\frac{\omega_2(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1)}{\omega_1^2 + \omega_2^2} t + \varepsilon_1 t + \frac{\omega_2(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \sin \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t - \\ & - \frac{\omega_2\varepsilon_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \frac{\omega_2\varepsilon_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Аналогичным образом находим выражение для  $\psi_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \psi_2(t) = & \frac{\omega_1(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1)}{\omega_1^2 + \omega_2^2} t + \varepsilon_2 t - \frac{\omega_1(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \sin \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t - \\ & - \frac{\omega_1\varepsilon_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t + \frac{\omega_1\varepsilon_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Выражения (7.12)–(7.14) представляют собой решение системы (7.5)–(7.7) при указанном выше движении объекта, постоянных дрейфах и нулевых начальных условиях.

Эти решения показывают, что углы  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  неограниченно возрастают с течением времени, в то время как угол  $\psi_3(t)$  ограничен и изменяется по гармоническому закону.

Заменяя в выражениях (7.12)–(7.14)  $\sin \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t$  и  $\cos \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} t$  разложениями в ряд Тейлора и учитывая лишь первый член этих разложений (что возможно на временном интервале не более 4 ч при скорости объекта, не превышающей 1000 км/ч), получаем

$$\psi_1(t) = \varepsilon_1 t; \quad \psi_2(t) = \varepsilon_2 t; \quad \psi_3(t) = \varepsilon_3 t. \quad (7.15)$$

Решения (7.15) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\dot{\psi}_1(t) = \varepsilon_1; \quad \dot{\psi}_2(t) = \varepsilon_2; \quad \dot{\psi}_3(t) = \varepsilon_3.$$

Таким образом, на интервалах работы ИНС, не превышающих 4 ч, при скорости объекта, не превышающей 1000 км/ч, в системе уравнений ориентации (7.5)–(7.7) перекрестными связями можно пренебречь [30].

Обратимся теперь к уравнениям (7.1), (7.2). В дополнение к прежним предположениям примем  $B_1 = \text{const}$ ,  $B_2 = \text{const}$  и будем пренебрегать членами  $\ddot{f}_2\psi_3$ ,  $-\ddot{f}_1\psi_3$  по сравнению с членами  $-g\psi_2$ ,  $g\psi_1$ , (что оправдано ограниченностью угла  $\psi_3$ , в то время как углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  неограниченно возрастают). Тогда эти уравнения примут вид:

$$\delta\ddot{x} + v^2\delta x = -g\psi_2 + B_1; \quad (7.16)$$

$$\delta\ddot{y} + v^2\delta y = g\psi_1 + B_2, \quad (7.17)$$

Подставляя в правую часть вместо  $\psi_2(t)$ ,  $\psi_1(t)$  выражения (7.14), (7.13), получим

$$\delta\ddot{x} + v^2\delta x = -\frac{g\omega_1(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1)}{\omega_1^2 + \omega_2^2} t - g\varepsilon_2 t + \frac{g\omega_1(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \times \\ \times \sin\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}t + \frac{g\omega_1\varepsilon_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}t - \frac{g\omega_1\varepsilon_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + B_1; \quad (7.18)$$

$$\delta\ddot{y} + v^2\delta y = -\frac{g\omega_2(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)} t + g\varepsilon_1 t + \frac{g\omega_2(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \times \\ \times \sin\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}t + \frac{g\omega_2\varepsilon_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}t - \frac{g\omega_2\varepsilon_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + B_2. \quad (7.19)$$

Предполагая начальные условия  $\delta x(0)$ ,  $\delta \dot{x}(0)$  известными, получим

$$\delta x(t) = -\frac{g(\varepsilon_1\omega_1\omega_2 + \varepsilon_2\omega_2^2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)v^2} t + \frac{g\omega_1\varepsilon_3}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)v^2} \cos t + \\ + \frac{g(\varepsilon_1\omega_1\omega_2 + \varepsilon_2\omega_2^2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)v^3} \sin vt + \frac{g\omega_1(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1) \sin\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}t}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(v^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} - \\ - \frac{g\omega_1(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1) \sin vt}{v(\omega_1^2 + \omega_2^2)(v^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{g\omega_1\varepsilon_3 \cos\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}t}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(v^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)} - \\ - \frac{g\varepsilon_3\omega_1 \cos vt}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(v^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{B_1}{v^2} - \frac{B_1}{v^2} \cos vt + \delta x(0) \cos vt + \\ + \frac{\delta \dot{x}(0)}{v} \sin vt - \frac{g\omega_1\varepsilon_3}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)v^2}; \quad (7.20)$$

$$\delta y(t) = \frac{g(\varepsilon_2\omega_1\omega_2 + \varepsilon_1\omega_1^2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)v^2} t - \frac{g(\varepsilon_2\omega_1\omega_2 + \varepsilon_1\omega_1^2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)v^3} \sin vt + \\ + \frac{g\omega_2\varepsilon_3}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)v^2} \cos vt + \frac{g\omega_2(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1) \sin\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}t}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(v^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} - \\ - \frac{g\omega_2(\varepsilon_1\omega_2 - \varepsilon_2\omega_1) \sin vt}{v(\omega_1^2 + \omega_2^2)(v^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{g\omega_2\varepsilon_3 \cos\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}t}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(v^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)} - \\ - \frac{g\omega_2\varepsilon_3 \cos vt}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(v^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2)} + \frac{B_2}{v^2} - \frac{B_2}{v^2} \cos vt + \delta y(0) \cos vt + \\ + \frac{\delta \dot{y}(0)}{v} \sin vt - \frac{g\omega_2\varepsilon_3}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)v^2}. \quad (7.21)$$

Эти решения показывают, что ошибки ИНС по положению возрастают с течением времени. При этом гармонические составляющие

щие ошибок по положению изменяются с частотой Шулера  $\nu$  и частотой  $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ , зависящей от скорости вращения Земли и скорости движения объекта. Растущие во времени части ошибок по положению определяются дрейфом гироскопов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и имеют вид

$$\delta x_{\text{раст}}(t) = - \frac{g(\varepsilon_1 \omega_1 \omega_2 + \varepsilon_2 \omega_2^2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \nu^2} t; \quad (7.22)$$

$$\delta y_{\text{раст}}(t) = \frac{g(\varepsilon_2 \omega_1 \omega_2 + \varepsilon_1 \omega_1^2)}{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \nu^2} t. \quad (7.23)$$

Ранее было показано, что для случая движения несущего ИНС объекта со скоростью, не превышающей 1000 км/ч, на временном интервале не более 4 ч перекрестными связями в уравнениях ошибок ориентации (7.5) — (7.7) можно пренебречь. В этом случае характер изменения  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  следующий:

$$\psi_1(t) = \varepsilon_1 t; \quad \psi_2(t) = \varepsilon_2 t. \quad (7.24)$$

Подставляя выражения (7.24) в уравнения (7.1) — (7.2) (членами  $f_2 \psi_3$ ,  $-f_1 \psi_3$ , как и ранее, можно пренебречь), получим

$$\delta \ddot{x} + \nu^2 \delta x = -g \varepsilon_2 t + B_1; \quad (7.25)$$

$$\delta \ddot{y} + \nu^2 \delta y = g \varepsilon_1 t + B_2. \quad (7.26)$$

Решая уравнения (7.25), (7.26) при известных начальных условиях  $\delta x(0)$ ,  $\delta \dot{x}(0)$ , имеем

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & -\varepsilon_2 R t + \frac{\varepsilon_2 R}{\nu} \sin \nu t + \frac{B_1}{\nu^2} - \frac{B_1}{\nu^2} \cos \nu t + \delta x(0) \cos \nu t + \\ & + \frac{\delta \dot{x}(0)}{\nu} \sin \nu t; \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} \delta y(t) = & \varepsilon_1 R t - \frac{\varepsilon_1 R}{\nu} \sin \nu t + \frac{B_2}{\nu^2} - \frac{B_2}{\nu^2} \cos \nu t + \delta y(0) \cos \nu t + \\ & + \frac{\delta \dot{y}(0)}{\nu} \sin \nu t. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Решения показывают, что растущие во времени части ошибки по положению определяются дрейфом гироскопов и имеют вид

$$\delta x_{\text{раст}} = -\varepsilon_2 R t; \quad (7.29)$$

$$\delta y_{\text{раст}} = \varepsilon_1 R t. \quad (7.30)$$

Как уже отмечалось, уравнения (7.29) — (7.30) справедливы для случая, когда скорость объекта ограничена значением 1000 км/ч и время работы ИНС не превышает 4—5 ч. Если объект движется со скоростью, большей, чем 1000 км/ч, выражения (7.29), (7.30) могут считаться правильными, но для интервала времени, меньшего 4 ч.

## 7.2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ

Рассмотрим переходные процессы в отношении углов между системой координат  $Oxyz$ , связанной с гиросплатформой, и правильной системой координат  $O\xi'\eta'\zeta'$ .

При малой величине эти углы можно представлять в виде компонент вектора  $\Phi$ , выражающего поворот системы  $Oxyz$  относительно  $O\xi'\eta'\zeta'$ . При этом компоненты  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  вектора  $\Phi$  отождествляются с величинами  $\Phi_1 dt, \Phi_2 dt, \Phi_3 dt$ .

Углы между правильной системой  $O\xi'\eta'\zeta'$  и вычислительной системой координат  $Ox_{вy_{в}z_{в}}$  будем также считать малыми и представлять вектором  $\theta$  поворота системы  $Ox_{вy_{в}z_{в}}$  относительно  $O\xi'\eta'\zeta'$ . Угол  $\Phi$  можно представить как сумму двух углов

$$\Phi = \theta + \psi, \quad (7.31)$$

где  $\psi$  — угол поворота системы  $Oxyz$  относительно системы  $Ox_{вy_{в}z_{в}}$ .

Рассмотрим систему уравнений для ошибки  $\theta$ , представляющей собой поворот системы координат  $Ox_{вy_{в}z_{в}}$  относительно системы  $O\xi'\eta'\zeta'$ . Это уравнение выводится так же, как и для угла  $\psi$  (см. разд. 5.2). Единственным отличием будет то, что погрешность, вызываемая переходным процессом по  $\theta$ , зависит от ошибок  $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \Delta\omega_3$ , допускаемых ЦВМ при расчете управляющего сигнала, подаваемого на моментные датчики гиросплатформы (в случае угла  $\psi$  эти ошибки определялись скоростью дрейфов гироскопов  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ).

Векторное уравнение для угла  $\theta$ , аналогичное уравнению (5.16) для угла  $\psi$ , имеет вид

$$\dot{\theta} + \omega \times \theta = \Delta\omega. \quad (7.32)$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость правильной системы;  $\Delta\omega$  — вектор, составляющими которого являются упомянутые ранее ошибки ЦВМ.

Для общего случая это уравнение в проекциях на оси правильной системы  $O\xi\eta\zeta$  будет:

$$\dot{\theta}_1 + \omega_2 \theta_3 - \omega_3 \theta_2 = \Delta\omega_1; \quad \dot{\theta}_2 + \omega_3 \theta_1 - \omega_1 \theta_3 = \Delta\omega_2; \quad \dot{\theta}_3 + \omega_1 \theta_2 - \omega_2 \theta_1 = \Delta\omega_3. \quad (7.33)$$

Для ИНС со свободной в азимуте платформой уравнения (7.33)

при учете  $\Delta\omega_1 = -\frac{\delta \dot{y}}{R}$ ,  $\Delta\omega_2 = \frac{\delta \dot{x}}{R}$ ,  $\Delta\omega_3 = 0$  принимают вид

$$\dot{\theta}_1 + \omega_2 \theta_3 = -\frac{\delta \dot{y}}{R}; \quad \dot{\theta}_2 - \omega_1 \theta_3 = \frac{\delta \dot{x}}{R}; \quad \dot{\theta}_3 + \omega_1 \theta_2 - \omega_3 \theta_1 = 0. \quad (7.34)$$

Если в уравнениях (7.34) пренебречь перекрестными связями, что возможно для интервала времени, не превышающего 4—5 ч при ограничении скорости движения объекта значением 1000 км/ч (см. разд. 7.1), то получим

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{\delta \dot{y}}{R}; \quad \dot{\theta}_2 = \frac{\delta \dot{x}}{R}. \quad (7.35)$$



Уравнения (7.35) имеют следующий физический смысл. Поскольку угол  $\theta$  определен как угол поворота системы  $Ox_y z_y$  относительно системы  $O\xi'\eta'\zeta'$ , то он появляется в результате ошибки  $\delta r$ , допускаемой ЦВМ в вычислении текущих координат местоположения. Отсюда

$$\theta_1 = -\frac{\delta y}{R}; \quad \theta_2 = \frac{\delta x}{R}, \quad (7.36)$$

где  $R$  — радиус Земли.

Принимая во внимание уравнения (7.36), (7.31), имеем

$$\Phi_1 = -\frac{\delta y}{R} + \psi_1; \quad \Phi_2 = \frac{\delta x}{R} + \psi_2; \quad \Phi_3 = \psi_3 + \theta_3(0). \quad (7.37)$$

Уравнения для угла  $\Phi$  выводятся таким же образом, как и для углов  $\psi$  и  $\theta$ . Угол  $\Phi$  поворота системы координат  $Ox_y z_y$  относительно  $O\xi'\eta'\zeta'$  ( $O\xi\eta\zeta$ ) вызывается как погрешностями  $\Delta\omega$  ЦВМ в вычислении управляющего сигнала  $\omega$ , подаваемого на гиросплатформу, так и скоростью дрейфа гиросплатформы  $\varepsilon_d$ .

Следовательно, векторное уравнение для угла  $\Phi$  при дифференцировании относительно правильной системы имеет вид

$$\dot{\Phi} + \omega \times \Phi = \Delta\omega + \varepsilon_d; \quad (7.38)$$

где  $\omega$  — угловая скорость правильной системы.

Это уравнение в проекциях на оси правильной системы

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 + \omega_2 \Phi_3 - \omega_3 \Phi_2 &= \Delta\omega_1 + \varepsilon_1; \quad \dot{\Phi}_2 + \omega_3 \Phi_1 - \omega_1 \Phi_3 = \Delta\omega_2 + \varepsilon_2; \\ \dot{\Phi}_3 + \omega_1 \Phi_2 - \omega_2 \Phi_1 &= \Delta\omega_3 + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Для ИНС со свободной в азимуте платформой с учетом выражений для  $\Delta\omega_1$ ,  $\Delta\omega_2$ ,  $\Delta\omega_3$  получим

$$\dot{\Phi}_1 + \omega_2 \Phi_3 = -\frac{\delta \dot{y}}{R} + \varepsilon_1; \quad \dot{\Phi}_2 - \omega_1 \Phi_3 = \frac{\delta \dot{x}}{R} + \varepsilon_2; \quad \dot{\Phi}_3 + \omega_1 \Phi_2 - \omega_2 \Phi_1 = \varepsilon_3. \quad (7.39)$$

Пренебрегая в уравнении (7.39) перекрестными связями (что возможно при указанных ранее ограничениях), получим

$$\dot{\Phi}_1 = -\frac{\delta \dot{y}}{R} + \varepsilon_1; \quad \dot{\Phi}_2 = \frac{\delta \dot{x}}{R} + \varepsilon_2; \quad \dot{\Phi}_3 = \varepsilon_3. \quad (7.40)$$

Уравнения (7.40) полностью согласуются с уравнениями (7.37). Действительно, уравнения (7.37) записаны для случая пренебрежения перекрестными связями в уравнениях (7.34). Пренебрегая перекрестными связями в уравнениях для  $\psi$  (см. разд. 7.1), получим

$$\dot{\psi}_1 = \varepsilon_1, \quad \dot{\psi}_2 = \varepsilon_2, \quad \dot{\psi}_3 = \varepsilon_3.$$

Подставляя последние выражения в уравнения (7.40), находим

$$\dot{\Phi}_1 = -\frac{\delta \dot{y}}{R} + \dot{\psi}_1; \quad \dot{\Phi}_2 = \frac{\delta \dot{x}}{R} + \dot{\psi}_2; \quad \dot{\Phi}_3 = \dot{\psi}_3.$$

Интегрируя эту систему, приходим к уравнениям (7.37).

Переходные процессы по углам  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  определяются делением правых частей уравнений для  $\delta x$ ,  $\delta y$  [уравнения (7.27) — (7.28)] на радиус Земли  $R$ . Отсюда можно сделать вывод, что углы  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  растут с течением времени, причем скорость роста пропорциональна дрейфу гироскопов.

Переходные процессы по углам  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$  можно получить, используя уравнения (7.37):

$$\Phi_1 = -\frac{\delta y}{R} + \psi_1; \quad \Phi_2 = \frac{\delta x}{R} + \psi_2.$$

Подставляя в эти уравнения вместо  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\delta x/R$ ,  $\delta y/R$  соответственно уравнения (7.15) и (7.27) — (7.28), получим

$$\Phi_1 = \frac{\epsilon_1}{v} \sin vt - \frac{B_2}{Rv^2} + \frac{B_2}{Rv^2} \cos vt - \frac{\delta y(0)}{R} \cos vt - \frac{\dot{\delta y}(0)}{vR} \sin vt; \quad (7.41)$$

$$\Phi_2 = \frac{\epsilon_2}{v} \sin vt + \frac{B_1}{Rv^2} - \frac{B_1}{Rv^2} \cos vt + \frac{\delta x(0)}{R} \cos vt + \frac{\dot{\delta x}(0)}{Rv} \sin vt.$$

Из уравнений (8.41) следует, что углы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , отклонения платформы от правильной системы с течением времени не растут, а изменяются по гармоническому закону с частотой Шулера  $v$ .

Запишем уравнения ошибок ИНС через углы  $\Phi$ . Используя в уравнениях (7.1), (7.2) выражения (7.37), получим

$$\delta \ddot{x} + v^2 \delta x = -g \left( \Phi_2 - \frac{\delta x}{R} \right) + f_2 \Phi_3 + f_2 \theta_3(0) + B_1;$$

$$\delta \ddot{y} + v^2 \delta y = g \left( \frac{\delta y}{R} + \Phi_1 \right) - f_1 \Phi_3 + B_2 - f_1 \theta_3(0)$$

или при учете  $v = \sqrt{\frac{g}{R}}$

$$\delta \ddot{x} = -g \Phi_2 + f_2 \Phi_3 + B_1 + f_2 \theta_3(0);$$

$$\delta \ddot{y} = g \Phi_1 - f_1 \Phi_3 + B_2 - f_1 \theta_3(0). \quad (7.42)$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения (7.40), приходим к искомой системе уравнений ошибок ИНС (при записи уравнений через углы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  отклонения платформы).

В уравнениях (7.42) члены  $f_1 \theta_3(0)$ ,  $f_2 \theta_3(0)$  необходимо при этом опустить, так как начальные значения  $\theta_3(0)$  будут учтены при интегрировании уравнений (7.40).

Нетрудно показать, что решая уравнения (7.42) и (7.40), получим переходные процессы  $\delta x$ ,  $\delta y$  в том же виде, что и выражения (7.27), (7.28).

### 7.3. ДЕМПФИРОВАНИЕ АВТОНОМНОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ СИГНАЛАМИ ОТ ДОПЛЕРОВСКОГО ИЗМЕРИТЕЛЯ СКОРОСТИ (БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ)

Как было показано в разд. 7.1, автономная ИНС является недемпфированной, т. е. ее ошибки совершают незатухающие свободные колебания с периодом Шулера 84,4 мин. Колебания ошибок ИНС можно демпфировать, используя внешний по отношению к инерциальной системе источник информации о скорости движения объекта. Такая информация может быть получена, в частности, от доплеровского измерителя скорости (ДИСС).

Рассмотрим уравнения ошибок ИНС, демпфированной с помощью ДИСС. Инерциальная система и доплеровский измеритель скорости выдают значение скорости объекта с ошибками  $\delta \mathbf{V}$  и  $\delta \mathbf{V}_д$  соответственно. При этом вычисляемая ИНС скорость имеет вид

$$\mathbf{V} + \delta \mathbf{V} = \mathbf{V} + \delta \dot{\mathbf{r}}_в + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}, \quad (7.43)$$

где  $\delta \dot{\mathbf{r}}_в$  — производная вектора ошибки местоположения относительно вычислительной системы координат, а  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость вычислительной системы относительно земной системы координат.

Эта скорость вырабатывается в виде проекций на оси вычислительной системы. Выражение доплеровской скорости зависит от того, как она вводится в БЦВМ. Обычно [30, 1] ДИСС определяет скорость объекта в проекциях на координатные оси, жестко связанные с объектом. Пусть  $\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_д$ , измеренная ДИСС скорость, заданная в системе объекта. Поскольку углы, определяющие положение системы платформы *Охуз* в системе объекта, известны, можно найти представление  $\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_д$  в системе платформы. Далее полагаем, что  $\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_д$  задается в системе платформы.

Заданная в системе платформы скорость  $\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_д$  при расчете с помощью БЦВМ разности  $(\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}) - (\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_д)$  воспринимается БЦВМ, как будто она задана в вычислительной системе. Тем самым БЦВМ допускает ошибку, выражающуюся в повороте вектора  $\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_д$  на угол  $-\psi$ , где  $\psi$  — угол отклонения системы платформы от вычислительной системы.

Таким образом, поступающая от ДИСС скорость с точностью до первого порядка малости выражается в проекциях на оси вычислительной системы.

Чтобы демпфировать свободные колебания ошибок ИНС, необходимо ввести в левые части уравнений (7.1) — (7.2) слагаемые, пропорциональные  $\delta \dot{\mathbf{x}}$  и  $\delta \dot{\mathbf{y}}$  соответственно. Это можно осуществить, подавая разность в показаниях скорости от ИНС и от ДИССа на первый интегратор ИНС. Эта разность, как она вычисляется БЦВМ, имеет вид

$$(\mathbf{V} + \delta \dot{\mathbf{r}}_в + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}) - (\mathbf{V} + \delta \mathbf{V}_д - \psi \times \mathbf{V}) = \delta \dot{\mathbf{r}}_в + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + \psi \times \mathbf{V} - \delta \mathbf{V}_д. \quad (7.44)$$

Записывая это уравнение в проекциях на оси правильной системы и учитывая, что на вход первого интегратора упомянутая разность подается с коэффициентом усиления  $-k_1$ , приходим, вводя в правую часть уравнений (7.1)–(7.2) соответствующие проекции, умноженные на  $-k_1$ , к следующей системе уравнений ошибок демпфированной ИНС:

$$\delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + v^2\delta x - k_1\rho_3\delta y = -g\psi_2 + f_2\psi_3 + B_1 + k_1\psi_3V_2 + k_1\delta V_{d1}; \quad (7.45)$$

$$\delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + v^2\delta y + k_1\rho_3\delta x = g\psi_1 - f_1\psi_3 + B_2 - k_1\psi_3V_1 + k_1\delta V_{d2}, \quad (7.46)$$

$$\dot{\psi}_1 + \omega_2\psi_2 = \varepsilon_1; \quad \dot{\psi}_2 - \omega_1\psi_3 = \varepsilon_2; \quad \dot{\psi}_3 + \omega_1\psi_2 - \omega_2\psi_1 = \varepsilon_3. \quad (7.47)$$

Поскольку свободный член правых частей уравнений демпфированной системы такой же, как и в случае недемпфированной системы, введенное с помощью ДИСС демпфирование (члены  $k_1\delta\dot{x}$ ,  $k_1\delta\dot{y}$  в левых частях) не изменило существенно собственной частоты ИНС. Уравнения ориентации остались прежними.

Проанализируем уравнения (7.45)–(7.46) для случая движения объекта со скоростью не более 1000 км/ч в течение 4–5 ч или с большей скоростью, но на интервале времени, меньшем 4 ч (см. разд. 7.1).

Для упрощения анализа в левой части уравнений (7.45)–(7.46) пренебрежем перекрестными связями. Эта возможность вытекает из того, что в уравнениях (7.45) и (7.46) коэффициенты при членах связи  $-k_1\rho_3$ ,  $k_1\rho_3$  по сравнению с другими коэффициентами малы, так что эффекты, обусловленные перекрестными связями, не успевают развиться за время затухания переходных процессов [1]. Окончательно имеем

$$\delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + v^2\delta x = -g\psi_2 + f_2\psi_3 + B_1 + k_1\psi_3V_2 + k_1\delta V_{d1}; \quad (7.48)$$

$$\delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + v^2\delta y = g\psi_1 - f_1\psi_3 + B_2 - k_1\psi_3V_1 + k_1\delta V_{d2}. \quad (7.49)$$

Рассмотрим один канал уравнений ошибок, например, канал  $x$ . Собственные колебания ошибок по этому каналу описываются уравнением

$$\delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + v^2\delta x = 0. \quad (7.50)$$

Решение уравнения (7.50) при заданных начальных условиях имеет вид

$$\delta x(t) = e^{-\frac{k_1 t}{2}} \left[ \delta x(0) \cos \lambda t + \frac{1}{\lambda} \left( \delta \dot{x}(0) + \frac{k_1}{2} \delta x(0) \right) \sin \lambda t \right], \quad (7.51)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{4v^2 - k_1^2}.$$

Это решение показывает, что собственные колебания ошибки по положению являются затухающими. Корни характеристического

уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (7.50), имеют вид

$$s_{1,2} = -\mu \pm j\lambda, \text{ где } \mu = \frac{k_1}{2}; \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{4\nu^2 - k_1^2}.$$

Легко видеть, что критическое демпфирование (когда комплексные сопряженные корни переходят в двукратный действительный корень) достигается при  $k_1 = 2\nu$ . При  $k_1 > 2\nu$  (различные действительные корни) переходной процесс аperiодический, а при  $k_1 < 2\nu$  колебательный с периодом колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\nu^2 - k_1^2}}.$$

Оптимальным обычно считается колебательный переходный процесс с относительным коэффициентом демпфирования  $\xi = 0,707$ .

В данном случае  $\xi = \frac{k_1}{2\nu}$ , и если принять  $\xi = 0,707$ , то  $k_1 = 1,414\nu$ .

При оптимальном переходном процессе период колебаний  $T = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\nu}$ .

Ясно, что время затухания оптимального переходного процесса определяется частотой Шулера  $\nu$ . Ввиду малости  $\nu$  время затухания для некоторых ИНС при больших начальных отклонениях может оказаться недопустимо большим. Сокращение времени затухания может быть достигнуто лишь искусственным увеличением частоты собственных колебаний ошибок инерциальной системы (см. разд. 7.4).

Рассмотрим теперь установившуюся ошибку демпфированной ИНС, обусловленную постоянным дрейфом гироскопов. Как и при анализе автономной ИНС, пренебрежем перекрестными связями в уравнениях ориентации (7.47). Пусть объект движется с постоянной скоростью и  $B_1, B_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  представляют собой постоянные величины. Тогда, пренебрегая членом  $k_1\psi_3 V_2$  по сравнению с  $-g\psi_2$ , получим

$$\delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + \nu^2\delta x = -g\varepsilon_2 t.$$

Как видно из этого уравнения, установившееся значение ошибки ИНС по скорости (обуславливает возрастающую часть ошибки по положению)

$$\delta\dot{x}_{уст} = -\frac{g\varepsilon_2}{\nu^2} = -\varepsilon_2 R \quad (7.52)$$

зависит от величины дрейфа гироскопа.

#### 7.4. ДЕМПФИРОВАНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЕНИЕМ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Как было показано в предыдущем разделе, демпфирование ИНС от ДИСС без существенного изменения собственной частоты

колебаний ошибок может оказаться непригодной из-за слишком большого времени затухания переходного процесса.

Рассмотрим метод демпфирования ИНС с одновременным увеличением собственной частоты колебаний ошибок. В случае автономной, а также демпфированной без изменения собственной частоты ИНС на моментные датчики платформы подавались сигналы, равные абсолютным угловым скоростям  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  платформы, происходящим от вращения Земли и от отгибания объекта земной поверхности. Ошибки ориентации определялись в этом случае системой уравнений (7.5) — (7.7). Считаем, что на моментные датчики платформы дополнительно подаются сигналы согласно уравнению (7.44), так что полные сигналы

$$\omega_1 - \frac{k_2}{R} (\delta \dot{y} + \rho_3 \delta x + \psi_3 V_1 - \delta V_{\alpha 2}); \quad (7.53)$$

$$\omega_2 + \frac{k_2}{R} (\delta \dot{x} - \rho_3 \delta y - \psi_3 V_2 - \delta V_{\alpha 1}), \quad (7.54)$$

где  $k_2$  — безразмерный коэффициент.

В этом случае система уравнений (7.5) — (7.7) ошибок ориентации преобразуется к виду

$$\dot{\psi}_1 + \omega_2 \psi_3 = \varepsilon_1 - \frac{k_2}{R} \delta \dot{y} - \frac{k_2}{R} \psi_3 V_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\alpha 2} - \frac{k_2}{R} \rho_3 \delta x; \quad (7.55)$$

$$\dot{\psi}_2 - \omega_1 \psi_3 = \varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta \dot{x} - \frac{k_2}{R} \psi_3 V_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\alpha 1} - \frac{k_2}{R} \rho_3 \delta y; \quad (7.56)$$

$$\dot{\psi}_3 + \omega_1 \psi_2 - \omega_2 \psi_1 = \varepsilon_3. \quad (7.57)$$

Произведем в системе уравнений (7.55) — (7.56) замену переменных:

$$\psi_1 = \theta_1' - \frac{k_2}{R} \delta y; \quad (7.58)$$

$$\psi_2 = \theta_2' + \frac{k_2}{R} \delta x; \quad (7.59)$$

$$\psi_3 = \theta_3'. \quad (7.60)$$

Тогда 
$$\dot{\theta}_1' + \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right) \theta_3' = \varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\alpha 2} - \frac{k_2}{R} \rho_3 \delta x; \quad (7.61)$$

$$\dot{\theta}_2' - \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) \theta_3' = \varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\alpha 1} - \frac{k_2}{R} \rho_3 \delta y; \quad (7.62)$$

$$\dot{\theta}_3' + \omega_1 \theta_2' - \omega_2 \theta_1' = \varepsilon_3 - \omega_1 \frac{k_2}{R} \delta x - \omega_2 \frac{k_2}{R} \delta y. \quad (7.63)$$

Произведем такую же замену переменных и в уравнениях (7.45), (7.46) для ошибок ИНС по положению и скорости:

$$\delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + (1+k_2)v^2\delta x - k_1\rho_3\delta y = B_1 + f_2\theta'_3 - g\theta'_2 + k_1\theta'_3V_2 + k_1\delta V_{\Delta 1}; \quad (7.64)$$

$$\delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + (1+k_2)v^2\delta y + k_1\rho_3\delta x = g\theta'_1 - f_1\theta'_3 + B_2 - k_1\theta'_3V_1 + k_1\delta V_{\Delta 2}. \quad (7.65)$$

Уравнения (7.61) — (7.65) являются уравнениями ошибок ИНС, демпфированной с изменением частоты.

Как видно из уравнений (7.64), (7.65), недемпфированная частота стала теперь равной  $(1+k_2)v^2$ . Таким образом, выбирая  $k_2 \gg 1$ , можно добиться сколь угодно большего увеличения собственной частоты колебаний ошибок. Однако безгранично увеличивать коэффициент  $k_2$  нецелесообразно, так как с ростом недемпфированной частоты увеличивается полоса пропускания системы, что влечет нежелательные резонансные явления от колебаний основания (объекта).

В каждом конкретном случае вопрос о выборе  $k_2$  необходимо решать с учетом допустимой полосы пропускания системы.

После того как выбор  $k_2$  сделан, коэффициент  $k_1$  следует выбирать в пределах  $(1,4-1,8) \sqrt{(1+k_2)v^2}$ , что обеспечивает относительный коэффициент демпфирования  $\xi = 0,707$ .

Проведем более подробный анализ уравнений ошибок демпфированной ИНС с измененной собственной частотой. Обращаясь к уравнениям ошибок ориентации (7.61) — (7.63), замечаем, что вследствие неравенств

$$\begin{aligned} \frac{k_2}{R} \rho_3 \delta x &\ll \frac{k_2}{R} \delta V_{\Delta 2} + \varepsilon_1; \\ \frac{k_2}{R} \rho_3 \delta y &\ll \frac{k_2}{R} \delta V_{\Delta 1} + \varepsilon_2; \\ -\omega_1 k_2 \frac{1}{R} \delta x - \omega_2 k_2 \frac{1}{R} \delta y &\ll \varepsilon_3, \end{aligned}$$

справедливых для ограниченного интервала работы ИНС при ограниченной скорости движения объекта, членами  $\frac{k_2}{R} \rho_3 \delta x$ ,  $\frac{k_2}{R} \rho_3 \delta y$ , связывающими уравнения ошибок ориентации с уравнениями ошибок по скорости и по положению, можно пренебречь. Чтобы получить решение в аналитической форме, как и прежде, предполагаем, что объект движется с постоянной скоростью по параллели и что

$$\varepsilon_1 = \text{const}, \quad \varepsilon_2 = \text{const}, \quad \varepsilon_3 = \text{const}.$$

Ошибки ДИСС  $\delta V_{\Delta 1}$ ,  $\delta V_{\Delta 2}$  пусть также будут постоянными. Тогда уравнения (7.61) — (7.63) переходят в следующие уравнения с постоянными коэффициентами и постоянными правыми частями:

$$\dot{\theta}_1' + \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right) \theta_3' = \varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 2}; \quad (7.66)$$

$$\dot{\theta}_2' - \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) \theta_3' = \varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 1}; \quad (7.67)$$

$$\ddot{\theta}_3 + \omega_1 \theta_2' - \omega_2 \theta_1' = \varepsilon_3. \quad (7.68)$$

Решения уравнений (7.66)–(7.68) при начальных условиях  $\theta_1'(0) = \theta_2'(0) = \theta_3'(0) = 0$ , можно так же, как в разд. 7.1, получить:

$$\begin{aligned} \theta_1'(t) = & - \frac{\left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right) \left[ \left( \varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 2} \right) \omega_2 - \left( \varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 1} \right) \omega_1 \right]}{\omega_1 \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) + \omega_2 \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right)} t + \\ & + \left( \varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 2} \right) t + \\ & + \frac{\left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right) \varepsilon_3 \cos \sqrt{\omega_1 \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) + \omega_2 \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right)} t}{\omega_1 \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) + \omega_2 \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right)} + \\ & + \frac{\left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right) \left[ \left( \varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 2} \right) \omega_2 - \left( \varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 1} \right) \omega_1 \right]}{\left[ \omega_1 \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) + \omega_2 \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right) \right]} \times \\ & \times \frac{\sin \sqrt{\omega_1 \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) + \omega_2 \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right)} t}{\sqrt{\omega_1 \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) + \omega_2 \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right)}} - \\ & - \frac{\left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right) \varepsilon_3}{\omega_1 \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) + \omega_2 \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right)}; \quad (7.69) \\ \theta_2'(t) = & \frac{\left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) \left[ \left( \varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 2} \right) \omega_2 - \left( \varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 1} \right) \omega_1 \right]}{\omega_1 \left( \omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2 \right) + \omega_2 \left( \omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1 \right)} t + \\ & + \left( \varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\pi 1} \right) t - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) \varepsilon_3 \cos \sqrt{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} t}{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} - \\
& - \frac{\left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) \left[ \left(\varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\lambda 2}\right) \omega_2 - \left(\varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\lambda 1}\right) \omega_1 \right]}{\left[ \omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right) \right]} \times \\
& \times \sin \sqrt{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} t + \\
& \times \sqrt{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} + \\
& + \frac{\left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) \varepsilon_3}{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} ; \quad (7.70) \\
\theta'_3(t) = & \frac{\left(\varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\lambda 2}\right) \omega_2 - \left(\varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\lambda 1}\right) \omega_1}{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} - \\
& - \frac{\left[ \left(\varepsilon_1 + \frac{k_2}{R} \delta V_{\lambda 2}\right) \omega_2 - \left(\varepsilon_2 - \frac{k_2}{R} \delta V_{\lambda 1}\right) \omega_1 \right]}{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) +} \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{\cos \sqrt{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} t}{+ \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} + \\
& + \frac{\varepsilon_3 \sin \sqrt{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)} t}{\sqrt{\omega_1 \left(\omega_1 - \frac{k_2}{R} V_2\right) + \omega_2 \left(\omega_2 + \frac{k_2}{R} V_1\right)}} . \quad (7.71)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения (7.58) — (7.60) из решений (7.69) — (7.71), видим, что углы  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  неограниченно возрастают, в то время как угол  $\psi_3(t)$  остается ограниченным. Таким образом, характер изменения углов  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$ ,  $\psi_3(t)$  остался прежним, т. е. таким же, как и в случае автономной ИНС и ИНС, демпфированной от ДИСС без изменения собственной частоты.

Однако в отличие от решений (7.12) — (7.14), в которых частота колебаний углов  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$ ,  $\psi_3(t)$  была  $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ , теперь частота колебаний стала  $\sqrt{\omega_1\left(\omega_1 - \frac{k_2}{R}V_2\right) + \omega_2\left(\omega_2 + \frac{k_2}{R}V_1\right)}$ .

Заменяя гармонические члены в решениях (7.69) — (7.71) рядом Тейлора и удерживая в этих рядах лишь первые члены, получим

$$\theta'_1(t) = \left(\varepsilon_1 + \frac{k_2}{R}\delta V_{\lambda 2}\right)t; \quad \theta'_2(t) = \left(\varepsilon_2 - \frac{k_2}{R}\delta V_{\lambda 1}\right)t; \quad \theta'_3(t) = \varepsilon_3 t. \quad (7.72)$$

Система частных решений (7.72) соответствует следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{\theta}'_1 = \varepsilon_1 + \frac{k_2}{R}\delta V_{\lambda 2}; \quad (7.73)$$

$$\dot{\theta}'_2 = \varepsilon_2 - \frac{k_2}{R}\delta V_{\lambda 1}; \quad (7.74)$$

$$\dot{\theta}'_3 = \varepsilon_3. \quad (7.75)$$

В отличие от соответствующих уравнений (7.66) — (7.68) в этой системе отсутствуют перекрестные связи.

Обратимся к рассмотрению уравнений (7.64) — (7.65). По тем же соображениям, что и в разд. 7.3, пренебрежем перекрестными членами в левых частях этих уравнений. Тогда, рассматривая собственные колебания по данному из каналов (канал  $x$ ), имеем

$$\delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (1 + k_2)v^2 \delta x = 0.$$

Считая начальные условия заданными, получаем

$$\begin{aligned} \delta x(t) = e^{-\frac{k_1 t}{2}} & \left[ \delta x(0) \cos \frac{1}{2} \sqrt{4v^2(1+k_2) - k_1^2} t + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{4v^2(1+k_2) - k_1^2}} \left( \delta \dot{x}(0) + \frac{k_1}{2} \delta x(0) \right) \sin \frac{1}{2} \sqrt{4v^2(1+k_2) - k_1^2} t \right]. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Из выражения (7.76) следует, что собственные колебания ошибок по положению являются затухающими. Критическое демпфирование, т. е. относительный коэффициент демпфирования  $\xi = 1$ , достигается при  $k_1 = 2\sqrt{1+k_2}v$ .

Выбирая  $k_2 \gg 1$ , можно сократить время затухания до любой желаемой величины. Однако было показано, что выбор  $k_2$  стеснен некоторыми ограничениями. Уравнение ошибок по положению и скорости при учете правой части имеет вид

$$\delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (1 + k_2)v^2 \delta x = -g\theta'_2 + f_2\theta'_3 + B_1 + k_1\theta'_3V_2 + k_1\delta V_{\lambda 1}. \quad (7.77)$$

Принимая  $B_1 = \text{const}$  и среди остальных членов правой части учитывая шиль доминирующий член  $-g\theta_2'$ , получим

$$\delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + (1 + k_2)\nu^2\delta x = -g\left(\varepsilon_2 - \frac{k_2}{R}\delta V_{л1}\right)t. \quad (7.78)$$

Отсюда находим следующую установившуюся ошибку по скорости:

$$\delta\dot{x}_{\text{уст}} = -\frac{R\varepsilon_2}{(1 + k_2)} + \frac{k_2}{(1 + k_2)}\delta V_{л1}. \quad (7.79)$$

Формулу (7.79) можно получить, считая, что основная часть ошибки по положению определяется углом поворота  $\psi$  системы платформы относительно вычислительной системы, т. е.

$$\delta r = -\psi \times R.$$

Следовательно, для демпфированной от ДИСС ИНС с измененной собственной частотой при указанных ранее ограничениях на время работы ИНС и скорость движения объекта основная часть установившейся ошибки по скорости (и растущая часть ошибки по положению) обусловлена инструментальной ошибкой ДИСС. Для автономной ИНС и ИНС, демпфированной от ДИСС без изменения собственной частоты, растущая часть ошибки по положению  $\delta x_{\text{раст}} = -\varepsilon_2 R t$ .

Отсюда видно, что демпфирование с изменением собственной частоты с точки зрения уменьшения установившейся ошибки по скорости имеет преимущество лишь в случае

$$\delta V_{л} < \varepsilon_2 R.$$

## ГЛАВА 8

### УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В настоящей главе выводятся уравнения оптимального фильтра (фильтра Калмана), предназначенного для идентификации (оценивания) переменных состояния системы по данным измерения выходных сигналов этой системы, содержащих случайные ошибки измерения (измерительный шум). Идентификация оптимальна в том смысле, что сумма квадратов ошибок оценивания переменных состояния в любой момент времени имеет наименьшее возможное значение. Ошибка оценивания — это разность между оценкой, вырабатываемой фильтром, и действительным значением переменной состояния системы, соответствующим случаю приложения к системе детерминированных и случайных внешних воздействий. Следовательно, фильтр Калмана предназначен для наилучшего в указанном выше смысле восстановления переменных состояния, т. е. для оптимального подавления измерительного шума.

Оценке с помощью фильтра Калмана доступны лишь переменные состояния, являющиеся наблюдаемыми по результатам измерения выходных сигналов. Если вектор состояния системы наблюдаем не полностью, то можно вместо обычного фильтра, идентифицирующего весь вектор состояния, синтезировать редуцированный фильтр Калмана, т. е. фильтр, оценивающий лишь некоторые переменные состояния.

Технические приложения фильтра Калмана весьма многообразны (в частности, этот фильтр используется для идентификации ошибок инерциальной системы навигации). Но наибольшее практическое применение находит дискретный фильтр Калмана, так как именно он может быть реализован с помощью ЦВМ.

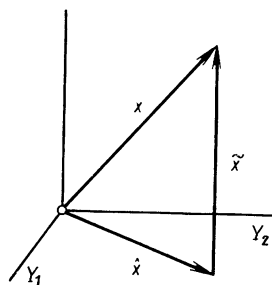


Рис. 8.1. Геометрическая иллюстрация принципа ортогональности

### 8.1. ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим сначала понятие ортогональности, играющее важную роль в теории оценок [12]. Если скалярное произведение двух векторов  $x, y \in \mathbb{H}$  равно нулю  $[(x, y) = 0]$ , то считаем, что вектор  $x$  ортогонален вектору  $y$ , и записываем это в виде  $x \perp y$ .

С помощью геометрической картины можно наглядно проиллюстрировать принцип ортогональности, используемый в теории оценок. Допустим, что в гильбертовом пространстве задана плоскость измерительных векторов  $Y_1 Y_2$  и в этом пространстве определен вектор  $x$ , который необходимо оценить, используя любой из векторов в плоскости  $Y_1 Y_2$  (рис. 8.1). Легко видеть, что наилучшей оценкой вектора  $x$  (т. е. оценкой, при которой ошибки оценивания минимальны) будет проекция вектора  $x$  на плоскость  $Y_1 Y_2$ . Действительно, перпендикуляр из конца вектора  $x$  является наименьшим расстоянием до плоскости измерительных векторов  $Y_1 Y_2$ , а этот перпендикуляр и является ошибкой оценивания  $x = x - \hat{x}$ , где  $\hat{x}$  — оценка вектора  $x$ . Таким образом, принцип ортогональности можно выразить условием

$$(x - \hat{x}) \perp y, \hat{x}, y \in Y_1 Y_2 \text{ или } \|(x - \hat{x}) y\| = 0, y \in Y_1 Y_2. \quad (8.1)$$

Доказательство принципа ортогональности приведено, например, в работе [12].

Если  $x, y$  — случайные векторы в гильбертовом пространстве, то для придания минимума функционалу

$$M[(x - \hat{x})^T (x - \hat{x})] = \min \quad (8.2)$$

необходимо выполнить условие ортогональности

$$M[(x - \hat{x})^T y] = 0, \quad (8.3)$$

переходящее для детерминированных векторов в условие (8.1).

Принцип ортогональности является основным исходным положением в теории линейных оценок и, в частности, при решении задачи оптимальной фильтрации по Калману.

Рассмотрим линейную дискретную систему, уравнения которой [11, 12]

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{x}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k; \quad (8.4)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{V}_{k+1}. \quad (8.5)$$

Здесь  $\mathbf{x}_{k+1}$  —  $n$ -вектор состояния;  $\mathbf{w}_k$  —  $r$ -вектор возмущения;  $\mathbf{z}_{k+1}$  —  $m$ -вектор измерения;  $\mathbf{V}_{k+1}$  —  $m$ -вектор ошибок измерения;  $\Phi_{k+1,k}$  — матрица системы ( $n \times n$ );  $\Gamma_{k+1,k}$  — матрица входа ( $n \times r$ );  $\mathbf{H}_{k+1}$  — матрица измерений ( $m \times n$ ).

Процесс  $\mathbf{w}_k$  предполагается в виде  $r$ -мерной гауссовой «белой» последовательности с нулевым средним значением

$$M[\mathbf{w}_k] = 0 \quad (8.6)$$

и корреляционной матрицей

$$M[\mathbf{w}_j \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{j,k}, \quad (8.7)$$

где  $\mathbf{Q}_k$  — неотрицательно определенная матрица ( $n \times n$ );  $\delta_{j,k}$  — символ Кронекера, означающий

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{если } j=k; \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases} \quad (8.8)$$

Процесс  $\mathbf{w}_k$  предполагается в виде  $r$ -мерной гауссовой «белой» последовательность, для которой

$$M(\mathbf{V}_{k+1}) = 0; \quad (8.9)$$

$$M(\mathbf{V}_j \mathbf{V}_{k+1}^T) = \mathbf{R}_{k+1} \delta_{j,k+1}, \quad (8.10)$$

где  $\mathbf{R}_{k+1}$  — неотрицательно определенная матрица ( $m \times m$ ). Квадратная матрица  $\mathbf{P}$  называется неотрицательно определенной, если производимая с помощью этой матрицы квадратичная форма  $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  неотрицательно определена. Если составляющие вектора  $\mathbf{w}$  или  $\mathbf{V}$  некоррелированы между собой, то матрица  $\mathbf{Q}$  или  $\mathbf{R}$  диагональная, причем диагональные элементы представляют собой дисперсии составляющих.

Ограничимся рассмотрением случая, когда гауссовы случайные процессы  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{w}$  некоррелированы, т. е.

$$M(\mathbf{V}_j \mathbf{w}_k^T) = 0 \quad (8.11)$$

при любых  $j, k$ .

Начальное состояние  $\mathbf{x}_0$  принимаем в виде гауссова случайного  $n$ -вектора с нулевым математическим ожиданием и с неотрицательно определенной корреляционной ( $n \times n$ ) матрицей:

$$M(\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T) = \mathbf{P}_0. \quad (8.12)$$

Предполагается, что  $x_0$  не зависит от  $w_k, V_{k+1}$ , так что

$$M(x_0 w_k^T) = 0; \quad (8.13)$$

$$M(x_0 V_{k+1}^T) = 0 \quad (8.14)$$

для любого  $k$ .

При указанных условиях система (8.4) — (8.5) обладает следующими свойствами.

1. Случайные процессы  $x_k, z_k$  — гауссовы с тождественно равными нулю математическими ожиданиями.

$$2. \quad M[x_j w_k^T] = 0 \text{ для } k \geq j. \quad (8.15)$$

$$3. \quad M[z_j w_k^T] = 0 \text{ для } k \geq j. \quad (8.16)$$

$$4. \quad M[x_j V_k^T] = 0 \text{ для любых } j, k. \quad (8.17)$$

$$5. \quad M[z_j V_k^T] = 0 \text{ для } k > j. \quad (8.18)$$

Доказательство этих свойств приведено в работе [12].

Сформулируем задачу оптимальной фильтрации. Пусть имеется система (8.4) — (8.5), удовлетворяющая указанным допущениям. Необходимо так оценить вектор состояния  $x_k$ , чтобы достигался минимум функционала

$$M[(x_k - \hat{x}_k)^T (x_k - \hat{x}_k)] = \min. \quad (8.19)$$

Оптимальную оценку ищем в виде

$$\hat{x}_k = M(x_k / z_k). \quad (8.20)$$

Здесь  $M(x_k / z_k)$  — математическое ожидание  $x_k$  при условии  $z_k$ , т. е. среднее значение вектора  $x_k$ , вычисленное при использовании измерения  $z$ .

Для доказательства правомерности этого предположения используем следующую известную в теории вероятности теорему для гауссова условного математического ожидания [12, 23]: разность  $x - M(x/z)$  и случайный вектор, полученный любым линейным преобразованием вектора  $z$ , независимы.

Пусть  $z_k$  является вектором измерений случайной величины  $x_k$ . Для оптимальности оценки  $\hat{x}_k$  необходимо, согласно принципу ортогональности, выполнение условия

$$M[(x_k - \hat{x}_k) z_k^T] = 0.$$

Но этому условию, согласно указанной теореме, удовлетворяет  $\hat{x}_k = M(x_k / z_k)$ . Отсюда при учете единственности оценки, оптимальной с точки зрения критерия (8.19), следует

$$\hat{x}_k = M(x_k / z_k). \quad (8.21)$$

Необходимо отметить, что оценка (8.21) справедлива лишь для гауссовых процессов, так как вытекает из упомянутой теоремы о независимости гауссовых векторов  $\mathbf{x} - M(\mathbf{x}/\mathbf{z})$  и  $\mathbf{z}$ .

Прежде чем перейти к выводу рекурсивных соотношений для оптимального фильтра Калмана, необходимо отметить еще одно свойство условного математического ожидания гауссовых процессов, а именно,  $M(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_k)$  — случайный вектор, компоненты которого являются линейной комбинацией компонент  $\mathbf{z}_1 \dots \mathbf{z}_k$ . Согласно этому свойству оптимальная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k = M(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_k)$  гауссова процесса может быть представлена в виде линейной комбинации измерений

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i. \quad (8.22)$$

## 8.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

Для системы (8.4) — (8.5) определим пространство измерений с элементами  $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i$ , что записывается как

$$\mathbf{Y}_k = \left\{ \mathbf{y} : \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i \mathbf{z}_i \right\}. \quad (8.23)$$

Здесь  $\mathbf{z}_i$  — вектор измерений;  $\mathbf{A}_i$  — произвольная матрица.

Пространство  $\mathbf{Y}_k$  содержит все возможные линейные комбинации векторов измерений от  $\mathbf{z}_1$  до  $\mathbf{z}_k$ . Оптимальная оценка вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_k$  представляет собой одну из линейных комбинаций измерений от  $\mathbf{z}_1$  до  $\mathbf{z}_k$ , как это вытекает из (8.22). Следовательно,  $\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbf{Y}_k$ .

В разд. 8.1 было показано, что оптимальная оценка вектора состояния  $\mathbf{x}_k$  является ортогональной проекцией этого вектора на пространство измерений  $\mathbf{Y}_k$ , т. е.

$$\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{x}}_k, \quad (8.24)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}_k$  — оптимальная оценка вектора  $\mathbf{x}_k$  в  $k$ -й момент времени, основанная на  $k$ -измерениях (от  $\mathbf{z}_1$  до  $\mathbf{z}_k$ );  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  — ошибка оценивания.

Докажем, что оптимальная оценка вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$  для  $k+1$ -го момента, основанная на  $k$ -измерениях в предшествующие моменты времени  $k, k-1, \dots, 1$ , выражается через оптимальную оценку для  $k$ -го момента формулой

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k. \quad (8.25)$$

Было показано

$$\hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbf{Y}_k, \quad \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k \in \mathbf{Y}_k.$$

Покажем теперь, что

$$[\mathbf{x}_{k+1} - \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k] \perp \mathbf{Y}_k, \quad (8.26)$$

т. е., что оценка  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ , выражаемая формулой (8.25), удовлетворяет принципу ортогональности. Это равнозначно доказательству справедливости формулы (8.25).

Другими словами, необходимо доказать, что  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$  — ортогональная проекция вектора  $\mathbf{x}_{k+1}$  на пространство  $\mathbf{Y}_k$ .

Разложим вектор  $\mathbf{x}_{k+1}$  на составляющие

$$\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}. \quad (8.27)$$

Пусть  $\mathbf{y}$  — некоторый вектор пространства измерений  $\mathbf{Y}_k$ . Обозначим

$$\mathbf{S} = M[(\mathbf{x}_{k+1} - \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{y}], \quad (8.28)$$

так что

$$\mathbf{S} = 0 \quad (8.29)$$

равносильно условию (8.26).

Используя уравнение системы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{x}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k \quad (8.30)$$

и разложение (8.24) для  $k$ -го момента

$$\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{x}}_k, \quad (8.31)$$

выражение (8.28) приведем к виду

$$\mathbf{S} = M[(\Phi_{k+1,k} \tilde{\mathbf{x}}_k)^T \mathbf{y}] + M(\mathbf{w}_k^T \Gamma_{k+1,k}^T \mathbf{y}). \quad (8.32)$$

Производя транспонирование, получим

$$\mathbf{S} = M(\tilde{\mathbf{x}}_k^T \Phi_{k+1,k}^T \mathbf{y}) + M(\mathbf{w}_k^T \Gamma_{k+1,k}^T \mathbf{y}). \quad (8.33)$$

Так как  $\Phi_{k+1,k}^T \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_k$  и вследствие оптимальности оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$  первое слагаемое в уравнении (8.33) равно нулю. Тогда

$$\mathbf{S} = M(\mathbf{w}_k^T \Gamma_{k+1,k}^T \mathbf{y}). \quad (8.34)$$

Поскольку  $\Gamma_{k+1,k} \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_k$ , а измерение  $\mathbf{z}_k$ , произведенное в текущий момент  $k$ ,

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k = \mathbf{H}_k \Phi_{k,k+1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{H}_k \Gamma_{k,k+1} \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{V}_k \quad (8.35)$$

не зависит от  $\mathbf{w}_k$  (разд. 8.1), то согласно определению (8.34)

$\mathbf{S} = M(\mathbf{w}_k^T \Gamma_{k+1,k}^T \mathbf{y}) = 0$ . Таким образом, оценка (8.25) является оптимальной.

Определим ковариационные матрицы ошибок оценивания:

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = M[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})^T] = M(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T); \quad (8.36)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = M[(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1})(\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1})^T] = M(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T). \quad (8.37)$$



Ковариационная матрица ошибок оценивания, определенная выражением (8.36), называется априорной, поскольку она несет информацию о ковариации ошибок оценивания для  $k+1$ -го момента времени, содержащуюся в измерениях для момента 1, 2 ...,  $k$ . Ковариационная матрица (8.37) называется апостериорной, так как  $\mathbf{P}_{k+1}$  выражает ковариацию ошибок оценивания для  $k+1$  момента времени, основанную на  $k+1$  проделанных измерениях. Другими словами, априорная ковариационная матрица — это ковариационная матрица ошибок оценивания для  $k+1$ -го момента времени, предсказанная по  $k$  предшествующим измерениям, в то время как апостериорная матрица  $\mathbf{P}_{k+1}$  уточняет это предсказанное значение учетом измерения  $\mathbf{z}_{k+1}$  в текущий момент  $k+1$ .

Найдем выражение для  $\mathbf{P}_{k+1/k}$ :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{x}_{k+1} - \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k+1,k} \tilde{\mathbf{x}}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k. \quad (8.38)$$

Подставляя выражение (8.38) в уравнение (8.36), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1/k} = M(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T) &= \Phi_{k+1,k} M(\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T) \Phi_{k+1,k}^T + M(\Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \Gamma_{k+1,k}^T) + \\ &+ M(\Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T \Phi_{k+1,k}^T + M(\Phi_{k+1,k} \tilde{\mathbf{x}}_k \mathbf{w}_k^T \Gamma_{k+1,k}^T). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Покажем, что  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  не зависит от  $\mathbf{w}_k$ . Принимая во внимание выражение (8.22), имеем

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^k \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i, \quad (8.40)$$

$$M\left[\left(\mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^k \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i\right) \mathbf{w}_k^T\right] = M(\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T) + M\left[\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i\right) \mathbf{w}_k^T\right]. \quad (8.41)$$

Учитывая свойства 2 и 3, приведенные в разд. 8.1, приходим к выводу, что выражение (8.41) равно нулю, т. е.  $\tilde{\mathbf{x}}$  и  $\mathbf{w}_k$  независимы. Отсюда следует, что два последних члена в выражении (8.39) равны нулю, так что

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{Q}_k \Gamma_{k+1,k}^T. \quad (8.42)$$

Здесь  $\mathbf{P}_k = M(\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T)$  — апостериорная матрица ошибок оценивания для момента  $k$ ;  $\mathbf{Q}_k = M(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T)$  — ковариационная матрица действующего на объект случайного возмущения. Выражение (8.42) показывает, что знание апостериорной ковариации  $\mathbf{P}_k$  для  $k$ -го момента позволяет найти априорную ковариацию ошибок оценивания для  $k+1$ -го момента.

Согласно уравнению (8.5), оценке  $\hat{\mathbf{x}}_{k/j}$  соответствует

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/j} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/j}, \quad k > j. \quad (8.43)$$

Ошибка априорной оценки выхода

$$\tilde{\mathbf{z}}_{k+1/k} = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}. \quad (8.44)$$

Подставляя в это выражение уравнение измерителя

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{V}_{k+1}, \quad (8.45)$$

находим следующее выражение ошибки априорной оценки выхода:

$$\tilde{\mathbf{z}}_{k+1/k} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{H}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{V}_{k+1}. \quad (8.46)$$

Согласно формуле (8.25),

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k. \quad (8.47)$$

Подставляя это выражение в уравнение (8.44), получаем другое выражение ошибки априорной оценки выхода:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1/k} = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k. \quad (8.48)$$

Введем в рассмотрение пространство  $\mathbf{Z}_{k+1}$  ошибок оценки выхода:

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \mathbf{K}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1/k}\}, \quad (8.49)$$

где  $\mathbf{K}_k$  — произвольная  $n \times m$ -матрица, а  $\tilde{\mathbf{z}}_{k+1/k} = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$  — ошибка априорной оценки выхода.

Ранее было показано, что  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k$  где  $\hat{\mathbf{x}}$  — линейная комбинация всех  $\mathbf{z}_j$  от  $\mathbf{z}_1$  до  $\mathbf{z}_k$ . Следовательно, пространство  $\mathbf{Z}_{k+1}$  является функцией всех  $\mathbf{z}_j$  от  $\mathbf{z}_1$  до  $\mathbf{z}_k$ .

Докажем, что пространство измерений  $\mathbf{Y}_k$  и пространство ошибок оценки выхода  $\mathbf{Z}_{k+1}$  ортогональны,  $\mathbf{Y}_k \perp \mathbf{Z}_{k+1}$ .

Другими словами, необходимо показать, что

$$M\{[\mathbf{K}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1/k}]^T \mathbf{y}\} = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_k. \quad (8.50)$$

Подставляя выражение (8.46) в левую часть уравнения (8.50), получим

$$M(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1}^T \mathbf{y}) + M(\mathbf{V}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1}^T \mathbf{y}) = 0. \quad (8.51)$$

Равенство нулю этого выражения объясняется следующими обстоятельствами. Поскольку оценка вектора  $\mathbf{x}_{k+1}$  оптимальна и, следовательно, выполняется принцип ортогональности, первое слагаемое в уравнении (8.51) равно нулю, так как  $\mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1}^T \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_k$ . Равенство нулю второго слагаемого вытекает из  $[\mathbf{K}_{k+1}^T \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_k$  и из свойства 5 (см. разд. 8.1). Таким образом, формула (8.50) доказана.

Пространство  $\mathbf{Y}_{k+1}$  называется прямой суммой, что записывается как

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{Y}_k \oplus \mathbf{Z}_{k+1}, \quad ! \quad (8.52)$$

если каждый элемент  $\mathbf{y}' \in \mathbf{Y}_{k+1}$  может быть представлен единственным образом как  $\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ .

Для пространства  $\mathbf{Y}_k$ ,  $\mathbf{Z}_{k+1}$  формула (8.52) действительно имеет место, что вытекает из следующих рассуждений.

Рассмотрим пространство

$$Y_{k+1} = \left\{ y' : y' = \sum_{i=0}^{k+1} A_i z_i \right\}.$$

Пространство  $Y_k$  является подпространством пространства  $Y_{k+1}$ . В функциональном анализе доказывается, что если  $Y_k$  — подпространство пространства  $Y_{k+1}$ , то любой элемент  $y' \in Y_{k+1}$  единственным образом представляется как  $y' = y + z$ , где  $y \in Y_k$ , а  $z \in Y_k^\perp$ .

Здесь подпространство  $Y_k^\perp$  является ортогональным дополнением подпространства  $Y_k$  [87]. Под ортогональным дополнением понимается совокупность элементов  $z \in Y_{k+1}$ , ортогональных ко всем элементам  $y \in Y_k$ . Ранее [см. (8.50)] было доказано, что  $Y_k \perp Z_{k+1}$ , т. е. элементы  $y \in Y_k$  ортогональны ко всем элементам  $z \in Z_{k+1}$ . Отсюда следует, что  $Z_{k+1} \equiv Y_k^\perp$  — ортогональное дополнение подпространства  $Y_k$ . Таким образом,  $y' \in Y_{k+1}$  можно представить в виде

$$y' = y + z = \sum_{i=1}^k A_i z_i + K_{k+1} \tilde{z}_{k+1/k},$$

что и доказывает формулу (8.52).

Оценка вектора состояния  $x_{k+1}$ , полученная на основе  $k+1$  измерений, является линейной комбинацией измерений от  $z_1$  до  $z_{k+1}$ . Но  $Y_{k+1}$  включает все линейные комбинации измерений от  $z_1$  до  $z_{k+1}$ . Поэтому  $\hat{x}_{k+1} \in Y_{k+1}$ . Согласно принципу ортогональности,  $\hat{x}_{k+1}$  — ортогональная проекция вектора  $x_{k+1}$  на  $Y_{k+1}$ . Учитывая ранее введенное соотношение

$$Y_{k+1} = Y_k \oplus Z_{k+1},$$

можно записать: ортогональная проекция  $x_{k+1}$  на  $Y_{k+1}$  = ортогональная проекция  $x_{k+1}$  на  $Y_k$  + ортогональная проекция  $x_{k+1}$  на  $Z_{k+1}$ . Это соотношение с использованием обозначений самих проекций

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} \tilde{z}_{k+1/k}, \quad (8.53)$$

где

$$\hat{x}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \hat{x}_k.$$

Здесь теперь  $K_{k+1}$  — не произвольная, а вполне определенная ( $n \times m$ )-матрица, удовлетворяющая условию, что  $K_{k+1} \tilde{z}_{k+1/k}$  — ортогональная проекция вектора  $x_{k+1}$  на подпространство  $Z_{k+1}$ . Это условие записывается в виде

$$(x_{k+1} - K_{k+1} \tilde{z}_{k+1/k}) \perp B \tilde{z}_{k+1/k}, \quad (8.54)$$

( $B$  — произвольная  $n \times m$ -матрица) и может быть использовано для нахождения конкретного выражения матрицы  $K_{k+1}$  [12].

В дальнейшем, однако, при выводе выражения  $K_{k+1}$  будет применен другой подход, основанный на непосредственной минимизации функционала:

$$M(\tilde{x}_k^T \tilde{x}_k) = \text{tr} [M(\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T)] \equiv \min,$$

где  $\text{tr}$  — обозначение следа матрицы.

Ошибка оценивания вектора состояния

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{x}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k - \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k - \\ - \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k).$$

Подставляя в это уравнение вместо  $\mathbf{z}_{k+1}$  выражения (8.4), (8.5), имеем:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) (\Phi_{k+1,k} \tilde{\mathbf{x}}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k) - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{V}_{k+1}. \quad (8.55)$$

При использовании этого выражения перейдем к формированию матрицы  $\mathbf{P}_{k+1}$ :

$$\mathbf{P}_{k+1} = M(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T) = M\{[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) (\Phi_{k+1,k} \tilde{\mathbf{x}}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k) - \\ - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{V}_{k+1}] [(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) (\Phi_{k+1,k} \tilde{\mathbf{x}}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{V}_{k+1})^T]\}, \quad (8.56)$$

Нетрудно видеть, что

$$M(\mathbf{w}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T) = 0; \quad M(\mathbf{V}_{k+1} \tilde{\mathbf{x}}_k^T) = 0. \quad (8.57)$$

Действительно, согласно уравнению (8.15)  $\mathbf{w}_k$  влияет на  $\mathbf{x}_{k+1}$ , а не на  $\mathbf{x}_k$ . Следовательно,  $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$  не зависит от  $\mathbf{w}_k$ . Измерительный шум  $\mathbf{V}_{k+1}$  в момент  $k+1$  не оказывает влияния на  $\tilde{\mathbf{x}}_k$ .

При учете равенства (8.57) раскроем скобки в уравнении (8.56):

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1/k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1})^T + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{K}_{k+1}^T, \quad (8.58)$$

где 
$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{Q}_k \Gamma_{k+1,k}^T, \quad (8.59)$$

а  $\mathbf{P}_k$ ,  $\mathbf{Q}_k$ ,  $\mathbf{R}_{k+1}$  определяются выражениями (8.37), (8.7), (8.10).

Раскрывая скобки в правой части уравнения (8.58), находим

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T \mathbf{K}_{k+1}^T + \\ + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}) \mathbf{K}_{k+1}^T. \quad (8.60)$$

Минимизируем выражение (8.60) для матрицы  $\mathbf{P}_{k+1}$  выбором матрицы усиления  $\mathbf{K}_{k+1}$ , как это сделано, например, в работе [11].

В результате находим следующую оптимальную матрицу усиления фильтра  $\mathbf{K}_{k+1}$ , т. е. матрицу, при которой среднее значение суммы квадратов ошибок оценивания принимает наименьшее значение:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1}. \quad (8.61)$$

Подставляя это выражение в уравнение (8.60) и учитывая симметрию матриц, получим

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1/k}. \quad (8.62)$$

Таким образом, алгоритм фильтра Калмана сводится к уравнениям (8.53), (8.59), (8.61), (8.62).

### 8.3. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Уравнения оптимального фильтра (8.53), (8.59), (8.61), (8.62) весьма удобны с вычислительной точки зрения. Действительно, на основе известной оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k$  в текущий момент времени  $k$  дается прогноз оценки для будущего момента  $k+1$  (априорная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ ), который в дальнейшем корректируется с учетом текущих измерений  $\mathbf{z}_{k+1}$ .

Таким образом, в начале такта вычисления  $k+1$  происходит прогнозирование оценки на этот такт по уравнению

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k.$$

Далее вычисляется оптимальная матрица усиления  $\mathbf{K}_{k+1}$ . При этом в первую очередь определяется значение априорной матрицы ошибок оценивания по формуле

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{Q}_k \Gamma_{k+1,k}^T.$$

Оптимальная матрица усиления вычисляется по уравнению

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1}.$$

На следующем такте вычислений понадобится значение апостериорной матрицы ошибок оценивания  $\mathbf{P}_{k+1}$ . Поэтому после вычисления матрицы  $\mathbf{K}_{k+1}$  определяется

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1/k}.$$

В конце такта  $k+1$  осуществляется корректирование априорной оценки с учетом текущих измерений:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}).$$

В следующем такте (такт  $k+2$ ) процедура вычислений повторяется вновь на основе найденных для такта  $k+1$  значений  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ ,  $\mathbf{P}_{k+1}$ .

Для реализации указанной схемы вычислений необходимы начальные условия  $\hat{\mathbf{x}}(0)$ ,  $\mathbf{P}(0)$ . Роль начальных условий выполняют следующие априорные данные:

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{M}[\mathbf{x}(0)]; \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{M}[\mathbf{x}(0) \mathbf{x}^T(0)].$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда объект описывается уравнением

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{x}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k + \mathbf{G}_{k+1,k} \mathbf{u}_k, \quad (8.63)$$

учитывающим управление  $\mathbf{u}_k$ .

Уравнение измерений

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{V}_{k+1}. \quad (8.64)$$

Здесь  $\mathbf{u}_k$  —  $l$ -вектор детерминированного управления;  $\mathbf{G}_{k+1,k}$  —  $(n \times l)$ -матрица входа по управлению.

Для объекта (8.63) выберем следующую структуру фильтра Калмана:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}); \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} &= \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{G}_{k+1,k} \mathbf{u}_k.\end{aligned}\quad (8.65)$$

Поясним этот выбор. Фильтр представляет собой модель объекта. Поскольку на реальный объект действует детерминированный вектор управления  $\mathbf{u}_k$ , то для обеспечения одинаковости фильтра с объектом необходимо на фильтр также подавать детерминированный сигнал  $\mathbf{u}_k$ .

Покажем, что введение детерминированного сигнала в структуру фильтра не изменит уравнений для  $\mathbf{K}_{k+1}$ ,  $\mathbf{P}_{k+1/k}$ ,  $\mathbf{P}_{k+1}$ . Сформируем ошибку оценивания:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_{k+1,k} \mathbf{u}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k - \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k - \\ &- \mathbf{G}_{k+1,k} \mathbf{u}_k - \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1,k} \mathbf{u}_k).\end{aligned}\quad (8.66)$$

Подставляя в уравнение (8.66) вместо  $\mathbf{z}_{k+1}$  выражения (8.63), (8.64), получим

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) (\Phi_{k+1,k} \tilde{\mathbf{x}}_k + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k) - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{V}_{k+1}. \quad (8.67)$$

Уравнение (8.67) полностью совпадает с уравнением (8.55), соответствующим случаю, когда член  $\mathbf{G}_{k+1,k} \mathbf{u}_k$  отсутствует. Но это означает, что уравнения для  $\mathbf{P}_{k+1/k}$ ,  $\mathbf{K}_{k+1}$ ,  $\mathbf{P}_k$  остаются такими же, как и в случае отсутствия сигнала  $\mathbf{G}_{k+1,k} \mathbf{u}_k$ .

Рассмотрим случай стационарной системы при стационарных входных и измерительных шумах. В этом случае к концу переходного процесса матрицы  $\mathbf{P}_{k+1/k}$ ,  $\mathbf{P}_{k+1}$ ,  $\mathbf{K}_{k+1}$  устанавливаются, т. е. принимают постоянные значения:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{P}_{k/k}; \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k; \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{K}_k. \quad (8.68)$$

В установившемся состоянии уравнение для априорной матрицы ошибок оценивания  $\mathbf{P}_{k+1/k}$  будет

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' &= \Phi \mathbf{P} \Phi^T + \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T = \Phi [\mathbf{P}' - \mathbf{K} \mathbf{N} \mathbf{P}'] \Phi^T + \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T = \\ &= \Phi [\mathbf{P}' - \mathbf{P}' \mathbf{N}^T (\mathbf{N} \mathbf{P}' \mathbf{N}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}'] \Phi^T + \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T.\end{aligned}\quad (8.69)$$

Решая это уравнение, можно получить установившееся значение априорной ковариационной матрицы ошибок оценивания. В общем виде решить уравнение (8.69) трудно, поэтому рассмотрим только границы изменения матрицы  $\mathbf{P}'$ . С этой целью перепишем уравнение (8.69) в виде

$$\mathbf{P}' = \Phi \mathbf{A} \mathbf{P}' \Phi^T + \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T, \quad (8.70)$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{N}.$$

Подставляя в правую часть вместо  $\mathbf{P}'$  выражение (8.69), получим

$$\mathbf{P}' = (\Phi \mathbf{A})^2 \mathbf{P}' (\Phi^T)^2 + \Phi \mathbf{A} \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T \Phi^T + \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T.$$

Осуществляя такую подстановку  $n$  раз, находим

$$\mathbf{P}' = (\Phi \mathbf{A})^{n+1} \mathbf{P}' (\Phi^T)^{n+1} + \sum_{i=0}^n (\Phi \mathbf{A})^i \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T (\Phi^T)^i. \quad (8.71)$$

Известно [23], что для стационарной системы при стационарных шумах оптимальный фильтр асимптотически устойчив. Другими словами, собственные значения матрицы  $(\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \Phi$  (или  $\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})$ ) находятся в круге единичного радиуса [(см. (8.55)]. Поскольку фильтр асимптотически устойчив и матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид  $\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}$ , первым слагаемым в уравнении (8.71) можно пренебречь. Таким образом, установившееся значение априорной ковариационной матрицы ошибок оценивания будет в основном определяться ковариационной матрицей входного шума, т. е.

$$\mathbf{P}' = \sum_{i=0}^n (\Phi \mathbf{A})^i \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T (\Phi^T)^i. \quad (8.72)$$

Рассмотрим случай, когда матрица  $\mathbf{K}$  не является оптимальной. Неоптимальность  $\mathbf{K}$  может быть вызвана, например, неточным заданием ковариационных матриц входных и измерительных шумов  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ .

В разд. 8.2 было рассмотрено уравнение для ковариационной матрицы ошибок оценивания при произвольно выбранной матрице  $\mathbf{K}$  [см. (8.58), (8.60)]. Для установившегося состояния стационарной системы это уравнение имеет вид

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) (\Phi \mathbf{P} \Phi^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T) (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})^T + \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^T. \quad (8.73)$$

Априорная ковариационная матрица в случае субоптимального фильтра

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \Phi \mathbf{P} \Phi^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T = \Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \mathbf{P}' (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})^T \Phi^T + \Phi \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^T \Phi^T + \\ &+ \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T = \Phi [\mathbf{P}' - \mathbf{K} \mathbf{H} \mathbf{P}' - \mathbf{P}' \mathbf{H}^T \mathbf{K}^T + \mathbf{K} (\mathbf{H} \mathbf{P}' \mathbf{H}^T + \mathbf{R}) \mathbf{K}^T] \Phi^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Уравнения (8.73), (8.74) справедливы для случая, когда матрица  $\mathbf{K}$  является произвольно выбранной матрицей. В том случае, когда матрица  $\mathbf{K}$  выбрана оптимально, т. е.

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}' \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}' \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1},$$

уравнения (8.73), (8.74) переходят в уравнения оптимального фильтра Калмана (8.62), (8.59).

#### 8.4. ПРИМЕНЕНИЕ ОБНОВЛЯЕМОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Пусть объект описывается уравнениями (8.4), (8.5). Будем, как и раньше, искать оптимальную оценку вектора состояния, минимизируя функционал

$$M[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)] \equiv \min.$$

Согласно уравнению (8.46) ошибка оценки выхода

$$\tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1} = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k/k-1} = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{V}_k. \quad (8.75)$$

Последовательность ошибок оценки выхода названа в работе [25] обновляемой. Таким образом, обновляемая последовательность

$$\mathbf{v}_k = \tilde{\mathbf{z}}_{k/k-1}. \quad (8.76)$$

Как показывает выражение (8.75), обновляемая последовательность несет обновляемую на каждом шаге информацию об измерениях  $\mathbf{z}_k$  и, кроме того, учитывает все прошлые измерения от  $\mathbf{z}_1$  до  $\mathbf{z}_{k-1}$ , так как  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ , а  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{C}_i \mathbf{z}_i$ .

Далее будет показано, как некоторые свойства обновляемой последовательности можно использовать для построения адаптивных фильтров. Поэтому рассмотрим более подробно эти свойства.

1. Принцип ортогональности можно переписать через обновляемую последовательность в виде

$$(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \perp \mathbf{v}_l \quad (l \leq k)$$

или

$$M[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \mathbf{v}_l^T] = 0 \quad (l \leq k)$$

2.  $M(\mathbf{v}_l) = 0$  для всех  $l$ .

3. Обновляемая последовательность является белым шумом (т. е.  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_l^T) = 0, k \neq l$ ) с ковариационной матрицей

$$M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k. \quad (8.77)$$

Доказательство этих свойств приведено авторами в работе [12].

Рассмотрим теперь свойства обновляемой последовательности для случая субоптимальной фильтрации.

В этом случае  $\mathbf{v}_k$  уже не является белым шумом, т. е.

$$M(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i-k}^T) \neq 0, \quad k > 0.$$

Для простоты дальнейших выкладок считаем, что система стационарна и что к моменту времени  $i-k$  матрицы  $\mathbf{P}_{k/k-1}, \mathbf{P}_k, \mathbf{K}_k$  установились.

Определим значение

$$\begin{aligned} M(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i-k}^T) &= M\{[\mathbf{H} \tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} + \mathbf{V}_i][\mathbf{H} \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1} + \mathbf{V}_{i-k}]^T\} = \\ &= \mathbf{H} M(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1}^T) \mathbf{H}^T + \mathbf{H} M(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} \mathbf{V}_{i-k}^T) + M(\mathbf{V}_i \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1}^T) \mathbf{H}^T + \\ &\quad + M(\mathbf{V}_i \mathbf{V}_{i-k}^T). \end{aligned} \quad (8.78)$$

Нетрудно видеть, что

$$M(\mathbf{V}_i \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1}^T) \mathbf{H}^T = 0; \quad M(\mathbf{V}_i \mathbf{V}_{i-k}^T) = 0. \quad (8.79)$$



Учитывая последние равенства, перепишем уравнение (8.79) в форме

$$M(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i-k}^T) = \mathbf{H} M(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1}^T) \mathbf{H}^T + \mathbf{H} M(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} \mathbf{V}_{i-k}^T). \quad (8.80)$$

Рассмотрим уравнение для априорной ошибки оценивания:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} &= \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Phi \mathbf{x}_{i-1} + \Gamma \mathbf{w}_{i-1} - \Phi [\hat{\mathbf{x}}_{i-1/i-2} + \mathbf{K} (\mathbf{H} \tilde{\mathbf{x}}_{i-1/i-2} + \\ &+ \mathbf{K} \mathbf{V}_k)] = \Phi \tilde{\mathbf{x}}_{i-1/i-2} + \Gamma \mathbf{w}_{i-1} - \Phi \mathbf{K} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{x}}_{i-1/i-2} - \Phi \mathbf{K} \mathbf{V}_{i-1} = \\ &= \Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}) \tilde{\mathbf{x}}_{i-1/i-2} + \Gamma \mathbf{w}_{i-1} - \Phi \mathbf{K} \mathbf{V}_{i-1}. \end{aligned} \quad (8.81)$$

По индукции выразим правую часть уравнения (8.81) через значение для момента времени  $i-k$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} &= [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^k \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1} + \sum_{j=1}^k [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^{j-1} \Gamma \mathbf{w}_{i-j} - \\ &- \sum_{j=1}^k [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^{j-1} \cdot \Phi \mathbf{K} \mathbf{V}_{i-j}. \end{aligned} \quad (8.82)$$

Используя уравнения (8.82), при учете равенств

$$\begin{aligned} M \left\{ \sum_{j=1}^k [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^{j-1} \Gamma \mathbf{w}_{i-j} \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1}^T \right\} &= 0; \\ M \left\{ \sum_{j=1}^k [(\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H}))^{j-1} \Phi \mathbf{K} \mathbf{V}_{i-j}] \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1}^T \right\} &= 0 \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} M(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1}^T) &= [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^k M(\tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1} \times \\ &\times \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1}^T) = [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^k \mathbf{P}'. \end{aligned} \quad (8.83)$$

Умножая правую часть (8.82) на  $\mathbf{V}_{i-k}^T$  и применяя операцию математического ожидания, при учете

$$M\{[\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^k \tilde{\mathbf{x}}_{i-k/i-k-1} \mathbf{V}_{i-k}^T\} = 0$$

и

$$M[\mathbf{w}_i \mathbf{V}_j] = 0 \quad (\text{при любых } i, j)$$

получаем

$$M(\tilde{\mathbf{x}}_{i/i-1} \mathbf{V}_{i-k}^T) = -[\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^{k-1} \Phi \mathbf{K} \mathbf{R}. \quad (8.84)$$

Учитывая уравнения (8.83) и (8.84), запишем уравнение (8.80) в виде

$$\begin{aligned} M(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i-k}^T) &= \mathbf{H} [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^k \mathbf{P}' \mathbf{H}^T - \mathbf{H} [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^{k-1} \times \\ &\times \Phi \mathbf{K} \mathbf{R} = \mathbf{H} [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^{k-1} \Phi [\mathbf{P}' \mathbf{H}^T - \mathbf{K} (\mathbf{H} \mathbf{P}' \mathbf{H}^T + \mathbf{R})]. \end{aligned} \quad (8.85)$$

Ранее было приведено уравнение

$$M(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) = \mathbf{H} \mathbf{P}' \mathbf{H}^T + \mathbf{R}. \quad (8.86)$$

Таким образом, автокорреляционная функция процесса для случая субоптимальной фильтрации описывается уравнениями (8.85) и (8.86).

Необходимо отметить, что в том случае, когда фильтр оптимален, т. е. когда матрица усиления фильтра описывается уравнением  $\mathbf{K} = \mathbf{P}'\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{P}'\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$ , выражение (8.85), как и должно быть, обращается в нуль:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i-k}^T) &= \mathbf{H} [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})]^{k-1} \Phi [\mathbf{P}'\mathbf{H}^T - \\ &- \mathbf{P}'\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{P}'\mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{H}\mathbf{P}'\mathbf{H}^T + \mathbf{R})] = 0. \end{aligned}$$

## ГЛАВА 9

# АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

## 9.1. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ АДАПТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Для реализации фильтра Калмана требуется априорная информация о математической модели объекта, о статистике входных и измерительных шумов. Неточность информации об априорных данных может послужить причиной расходимости [12, 20, 31].

В этой главе будут рассмотрены адаптивные алгоритмы фильтрации.

Под адаптивными фильтрами здесь понимаются фильтры, способные вырабатывать достаточно точную оценку вектора состояния в отсутствии точной априорной информации о статистике входных и измерительных шумов.

Один из возможных путей создания адаптивных алгоритмов фильтрации заключается в использовании корреляционных свойств обновляемой последовательности с целью построения оценок ковариационных матриц входных  $\mathbf{Q}$  и измерительных  $\mathbf{R}$  шумов. Классическим примером таких алгоритмов является адаптивный алгоритм, предложенный Мехра [13].

Этот алгоритм пригоден только для стационарных объектов и стационарных входных и измерительных шумов. Перед использованием адаптивного алгоритма осуществляется оценивание вектора состояния на основе классического алгоритма Калмана, в котором неточно заданы матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ . При этом необходимо определить степень отличия используемых матриц  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$  от реальных ковариационных матриц входных и измерительных шумов  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ . Если  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$  незначительно отличаются от реальных значений  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ , фильтр Калмана фактически работает в оптимальном режиме и можно считать, что  $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}$ . Таким образом, проверяя оптимальные свойства фильтра Калмана при выбранных  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$ , можно решить вопрос о правильности первоначального выбора  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$ . Такая проверка может строиться на основе статистической обработки обновляемой последовательности (см. разд. 8.4). В том случае, когда  $\mathbf{v}_k$  является белым шумом, фильтр при первоначально

выбранных  $Q^*$  и  $R^*$  работает фактически оптимально, и можно считать, что  $Q^*=Q$ ,  $R^*=R$ .

Если  $\nu_k \neq 0$  — не белый шум, то фильтр работает в субоптимальном режиме и необходимо оценивать реальные значения  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ , которые отличны от начальных матриц  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$ .

Для субоптимального фильтра обновляемый процесс представляет собой небелый гауссов процесс со следующими корреляционными свойствами (разд. 8.4):

$$\mathbf{C}_0 = M \left( \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \right) = \mathbf{H} \mathbf{P}' \mathbf{H}^T + \mathbf{R}; \quad (9.1)$$

$$\mathbf{C}_k = M \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_{i-k}^T \end{bmatrix} = \mathbf{H} [\Phi (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{H})]^{k-1} \Phi [\mathbf{P}' \mathbf{H}^T - \mathbf{K} \mathbf{C}_0]. \quad (9.2)$$

Здесь  $\mathbf{P}'$  — априорная ковариационная матрица ошибок оценивания субоптимального фильтра Калмана (см. разд. 8.3).

Оценки величин ковариационных матриц  $S_h$  можно получить, используя эргодические свойства стационарной обновляемой последовательности:

$$\hat{\mathbf{C}}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i-k}^T. \quad (9.3)$$

При этом число  $N$  должно быть достаточно большим. Перепишем уравнение (9.2) для случая  $k=1, 2, \dots, n$ :

$$C_1 = H\Phi P'H^T - H\Phi KC_0;$$

$$C_2 = H\Phi^2 P' H^T - H\Phi K C_1 - H\Phi^2 K C_0;$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{H}\Phi^n \mathbf{P}' \mathbf{H}^r - \mathbf{H}\Phi \mathbf{K} \mathbf{C}_{n-1} - \dots - \mathbf{H}\Phi^n \mathbf{K} \mathbf{C}_0, \quad (9.4)$$

где  $\mathbf{K}$  — субоптимальная матрица усиления фильтра при неоптимальном выборе  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$  (см. разд. 8.4);  $n$  — порядок исходного объекта.

Запишем систему (9.4) в матричной форме:

$$\widehat{\mathbf{P}'}\mathbf{H}^r = \mathbf{B}^\# \mathbf{A}. \quad (9.5)$$

Здесь  $\mathbf{B}^\#$  — псевдообратная матрица по отношению к матрице  $\mathbf{B}$ , имеющей вид

$$B = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Phi.$$

Отметим, что псевдообратная матрица

$$\mathbf{B}^\# = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$$

существует, поскольку матрица  $\mathbf{B}$  представляет собой произведение

матрицы наблюдаемости и невырожденной матрицы перехода  $\Phi$ . Фигурирующая в уравнении (9.5) матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} C_1 + H\Phi KC_0 \\ C_2 + H\Phi KC_1 + H\Phi^2 KC_0 \\ \vdots \\ C_n + H\Phi KC_{n-1} + \dots + H\Phi^n KC_0 \end{bmatrix}.$$

Оценка матрицы измерительного шума строится на основе использования уравнения (9.1), т. е.

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{C}}_0 - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{P}}'\mathbf{H}^T). \quad (9.6)$$

В разд. 8.4 было показано, что для субоптимального фильтра ковариационная матрица ошибок оценивания  $\mathbf{P}'$  имеет вид

$$\mathbf{P}' = \Phi (\mathbf{I} - \mathbf{KH}) \mathbf{P}' (\mathbf{I} - \mathbf{KH})^T \Phi^T + \Phi \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^T \Phi^T + \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T. \quad (9.7)$$

Это уравнение справедливо для любой неоптимальной матрицы усиления  $\mathbf{K}$ .

Ограничимся в дальнейшем случаем, когда число неизвестных элементов матрицы  $\mathbf{Q}$  меньше или равно  $n \times m$ .

Здесь  $n$  — размерность вектора состояния;  $m$  — размерность вектора измерения. Запишем уравнение (9.7) в форме

$$\mathbf{P}' = \Phi \mathbf{P}' \Phi^T + \mathbf{V} + \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T. \quad (9.8)$$

Здесь  $V = \Phi [-KHP' - P'H^rK^r + K(HP'H^r + R)K^r] \Phi^r$ .

Подставим  $\mathbf{P}'$  в правую часть уравнения (9.8):

$$\mathbf{P}' = \Phi^2 \mathbf{P}' (\Phi^2)^T + \Phi \mathbf{V} \Phi^T + \mathbf{V} + \Phi \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T \Phi^T + \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T.$$

Повторяя такую же подстановку  $n$  раз и перенося при этом члены, зависящие от  $Q$ , в левую часть, получим

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j \Gamma Q \Gamma^T (\Phi^j)^T = P' - \Phi^k P' (\Phi^k)^T - \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j V (\Phi^j)^T, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (9.9)$$

Умножим правую и левую части уравнения (9.9) справа на  $(\Phi^{-k})^T \mathbf{H}^T$ , а слева на  $\mathbf{H}$ . Тогда получим

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{H} \Phi^j \Gamma \mathbf{Q} \Gamma^T (\Phi^{j-k})^T \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \mathbf{P}' (\Phi^{-k})^T \mathbf{H}^T - \mathbf{H} \Phi^k \mathbf{P}' \mathbf{H}^T - \\ - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{H} \Phi^j \mathbf{V} (\Phi^{j-k})^T \mathbf{H}^T, \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Подставляя в правую часть вместо  $\mathbf{P}'\mathbf{H}^t$  и  $\mathbf{H}\mathbf{P}'\mathbf{H}^t + \mathbf{R}$  оценки этих матриц, получим

$$\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{H} \Phi^j \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T (\Phi^{j-k})^T \mathbf{H}^T = (\widehat{\mathbf{P}}^T \mathbf{H}^T)^T (\Phi^{-k}) \cdot \mathbf{H}^T - \mathbf{H} \Phi^k (\widehat{\mathbf{P}}^T \mathbf{H}^T) - \\ - \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{H} \Phi^j \widehat{\mathbf{V}} (\Phi^{j-k})^T \mathbf{H}^T, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (9.10)$$

где  $\widehat{\mathbf{V}} = \Phi [-\mathbf{K} (\widehat{\mathbf{P}}^T \mathbf{H}^T)^T - (\widehat{\mathbf{P}}^T \mathbf{H}^T) \mathbf{K}^T + \mathbf{K} \widehat{\mathbf{C}}_0 \mathbf{K}^T] \Phi^T$ .

Путем решения системы уравнений (9.10) определим  $n \times m$  неизвестных элементов матрицы  $\mathbf{Q}$ . Отметим, что уравнения (9.10) не являются линейно независимыми. Поэтому в каждом конкретном случае надлежит из системы уравнений (9.10) выбрать систему из линейно независимых уравнений.

Таким образом, процедура рассматриваемого адаптивного алгоритма состоит из двух этапов. Первый этап заключается в проверке оптимальности фильтра Калмана, использующего первоначальные оценки  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$ . Этот этап требует значительного машинного времени для накопления статистики обновляемого процесса, т. е. для определения  $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_k$  по уравнению (9.3). Обычно проверка осуществляется на интервале времени в 1000 и более тактов проведения измерений [13].

Если проверка обнаруживает, что фильтр субоптимален, то второй этап работы будет состоять в наилучшей оценке  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ . Оценки  $\widehat{\mathbf{Q}}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}$  строятся на основе набранной статистики о ковариационных матрицах  $\mathbf{C}_k$  обновляемой последовательности и определяются по уравнениям (9.6) и (9.10).

После того как оценки  $\widehat{\mathbf{Q}}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}$  получены, они используются в классическом алгоритме фильтра Калмана вместо  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$ .

Рассмотренная процедура получения оценок  $\widehat{\mathbf{Q}}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}$  обладает следующими недостатками.

1. Процедуре оценки  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  предшествует проверка оптимальности фильтра Калмана, которая занимает много машинного времени. При этом точность оценивания вектора состояния фильтра Калмана при первоначально выбранных  $\mathbf{Q}^*$  и  $\mathbf{R}^*$  может быть недостаточной.

2. Аналитическое выражение оценки  $\widehat{\mathbf{Q}}$  из уравнения (9.10) получить невозможно. Это приводит к дополнительным трудностям реализации алгоритма на ЦВМ.

3. Адаптивный алгоритм, предложенный в работе [13], можно использовать только для стационарных систем. Объект и шумы должны быть стационарными на всем этапе оценивания, поскольку оценки  $\widehat{\mathbf{Q}}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}$  вычисляются один раз и далее не корректируются. Фактически этот алгоритм не является адаптивным, так как связь с обновляющим процессом используется всего один раз для получения оценок  $\widehat{\mathbf{Q}}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}$ . После того как оценки  $\widehat{\mathbf{Q}}$  и  $\widehat{\mathbf{R}}$  получены, они используются в классическом фильтре Калмана без всякой адаптивной подстройки в зависимости от текущих значений  $\mathbf{v}_i$ .

Таким образом, данный алгоритм мало пригоден для реализации его на БЦВМ с целью повышения точности ИНС.

## 9.2. АДАПТИВНЫЙ ФИЛЬТР ЯЗВИНСКОГО С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ОБНОВЛЯЕМОМУ ПРОЦЕССУ

В предыдущем разделе был рассмотрен корреляционный подход к созданию алгоритмов адаптивной фильтрации. Было показано, что реализация таких алгоритмов на бортовом вычислителе для повышения точности ИНС затруднительна.

В этом разделе рассмотрен другой подход к разработке адаптивных фильтров. Корреляционные алгоритмы строятся на основе статистического анализа обновляемой последовательности, и оценка ковариационных матриц  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  проводится уже после набора статистического материала.

Использование такого подхода при расчетах в реальном масштабе времени затруднительно.

Рассмотрим другой подход, использованный Язвинским в работе [23]. В отличие от рассмотренного в разд. 9.1 этот подход предполагает оценку ковариационной матрицы  $\mathbf{Q}$  непосредственно после получения случайного значения обновляемого процесса. Таким образом, статистика входного шума на каждом этапе измерений подстраивается к появившемуся значению обновляемого процесса.

Рассмотрим для простоты случай, когда ковариационную матрицу входного шума можно представить в виде  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$ . Предположим что измерения — скаляр. Это предположение не влияет на общность решения задачи, поскольку существует возможность применения метода последовательной фильтрации, когда вектор измерений обрабатывается последовательно компонента за компонентой.

Предположим, что необходимо определить такое значение  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$ , при котором наиболее вероятно появление значения обновляемой последовательности  $\mathbf{v}_k$ . Другими словами, необходимо определить такое значение  $q$ , которое обеспечит максимум плотности вероятности появления обновляемой последовательности  $\mathbf{v}_k$ , т. е.

$$\max_{q \geq 0} p(\mathbf{v}_k).$$

Ограничение  $q \geq 0$  вытекает из определения ковариационной матрицы. В разд. 8.4 было показано, что  $\mathbf{v}_k$  — белый гауссов шум с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей (9.1). Тогда плотность вероятности  $\mathbf{v}_k$  можно записать в виде

$$p(\mathbf{v}_k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{M}(\mathbf{v}_k^2)]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{v}_k^2 [\mathbf{M}(\mathbf{v}_k^2)]^{-1}}$$

или учитывая, что  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{v}_k^2) &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{\Phi}_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{\Phi}_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \\ &+ \mathbf{H}_k \mathbf{\Gamma}_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{\Gamma}_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k, \end{aligned} \quad (9.11)$$

в виде

$$p(v_k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + q \mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + R_k)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} v_k^2 (\mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + q \mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + R_k)^{-1} \right].$$

Продифференцируем  $p(v_k)$  по  $q$  и результаты приравняем нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dp(v_k)}{dq} &= -\frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T [M(v_k^2)]^{-\frac{3}{2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} v_k^2 [M(v_k^2)]^{-1} \right\} + \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} v_k^2 \mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T \times \\ &\times [M(v_k^2)]^{-\frac{5}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} v_k^2 [M(v_k^2)]^{-1} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Производя упрощения, находим

$$- \{M(v_k^2)\}^{-\frac{3}{2}} + v_k^2 \{M(v_k^2)\}^{-\frac{5}{2}} = 0$$

или

$$v_k^2 = M(v_k^2). \quad (9.12)$$

Условие (9.12) названо Язвинским в работе [23] условием состоятельности. Воспользуемся им для оценки  $q$ . Подставив в (9.11) вместо  $M(v_k^2)$  значение  $v_k^2$ , получим

$$v_k^2 = M(v_k^2) = \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \hat{q} \mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + R_k.$$

Отсюда

$$\hat{q} = \frac{v_k^2 - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T - R_k}{\mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T}.$$

Учитывая, что скалярная величина  $\hat{q}$  всегда положительна, окончательно получим

$$\hat{q} = \begin{cases} \frac{v_k^2 - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T - R_k}{\mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T}, & \hat{q} > 0; \\ 0, & \hat{q} \leq 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

Выражение  $\mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + R_k$  представляет собой ковариационную функцию обновляемой последовательности  $v_k$  при отсутствии входного шума. Случай  $v_k^2 \leq \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + R_k$  соответствует как раз тому, что при  $\hat{q} = 0$  существует состоятельность между обновляемой последовательностью и ее статистикой.

Для случая  $v_k^2 > \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + R_k$  условие состоятельности между  $v_k$  и ее статистикой нарушается, что вытекает из

(9.13). Для восстановления условия состоятельности необходимо к ковариационной функции  $\mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + R_k$  добавить ковариационную функцию  $\hat{q}$ . Ковариационная функция обновляемой последовательности в этом случае (при  $\hat{q} > 0$ ) будет

$$v_k^2 = \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \hat{q} \mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + R_k,$$

откуда 
$$\hat{q} = \frac{v_k^2 - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T - R_k}{\mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T}.$$

Линейный фильтр, определяющий не только оценку вектора состояния, но и ковариационную матрицу входного шума  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$  по формуле (9.13), можно назвать адаптивным, причем адаптивность понимается в следующем смысле. Пока значение обновляемой последовательности не превышает величины  $1\sigma$ , где  $\sigma$  — среднее квадратичное отклонение  $v_k$  для случая  $q=0$ , уровень ковариационной матрицы  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$  можно считать нулевым, т. е. принимаем  $q=0$ . Это соответствует случаю, когда значение  $v_k$  невелико и является состоятельным по отношению к своей статистике. Когда величина  $v_k$  становится больше, чем заранее установленное значение  $1\sigma$ , фильтр выдает оценку  $\hat{q}_k > 0$  и увеличивает  $\|\mathbf{P}_{k+1/k}\|$ . Это в свою очередь увеличивает  $\|\mathbf{K}_k\|$  и тем самым увеличивается вес текущих измерений, что способствует сходимости процесса фильтрации.

Этот фильтр является достаточно простым, однако он имеет серьезные недостатки. Дело в том, что оценка  $q$  базируется только на одном значении  $v_k$ . Поэтому в случае малости ковариационной матрицы входного шума по сравнению с ковариационной матрицей измерительного шума  $R_k$  при большом случайном значении  $v_k$  разность  $v_k^2 - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T - R_k$  мала (так как мал уровень входных шумов). Следовательно, неизвестно, вызвана ли малая эта разность наличием малого входного шума, или это случайные «всплески» измерительного шума. Чтобы избежать этого, Язвинский [23] предлагает для оценки по формуле (9.13) брать не одно значение  $v_k$ , а осредненную по  $N$  значениям  $v_{k+1/k}, \dots, v_{k+N/k}$  величину  $m_r$ :

$$m_r = N^{-1} \sum_{l=1}^N v_{k+l/k} R_{k+l}^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.14)$$

Здесь

$$v_{k+l/k} = z_{k+l} - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k+l/k};$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+l/k} = \Phi_{k+l,k} \hat{\mathbf{x}}_k,$$

где

$$\Phi_{k+l,k} = \Phi_{k+l,k+l-1} \dots \Phi_{k+1,k}.$$

Таким образом, чтобы получить оценку  $\hat{q}$  и далее оценивать вектор состояния  $\mathbf{x}_k$ , необходимо провести  $N$  измерений, после чего вычислить  $m_r$  и далее подставить  $m_r^2$  вместо  $v_k^2$  в формулу (9.13). Отсюда следует, что при использовании формулы (9.14) произво-



Обратимся к рассмотрению более общего случая, когда матрица  $\mathbf{Q}$  не может быть представлена в виде  $\mathbf{Q} = q\mathbf{I}$ . Пусть  $\mathbf{Q}$  — диагональная матрица размера  $(n \times n)$  с неизвестными элементами, а матрица  $\Gamma_{k, k-1} = \mathbf{I}$ . Пусть, как и прежде, измерения являются скалярными, т. е. матрица наблюдений  $\mathbf{H}$  — строка. Рассмотрим следующую обновляемую последовательность:

Здесь  $\hat{\mathbf{x}}_{k+l/k} = \Phi_{k+l,k} \hat{\mathbf{x}}_k$ ,

$$\Phi_{k+l,k} = \Phi_{k+l,k+l-1} \Phi_{k+l-1,k+l-2} \cdots \Phi_{k+1,k}.$$
$$M(\mathbf{v}_{k+l/k}^2) = \mathbf{H}_{k+l} \mathbf{\Phi}_{k+l,k} \mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_{k+l,k}^T \mathbf{H}_{k+l}^T + \mathbf{H}_{k+l} \left\{ \sum_{i=1}^l \mathbf{\Phi}_{k+l,k+i} \mathbf{Q}_{k+i} \mathbf{\Phi}_{k+l,k+i}^T \right\} \mathbf{H}_{k+l}^T. \quad (9.16)$$
$$v_{k+l/k}^2 = M(v_{k+l/k}^2), \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (9.17)$$
$$p(\mathbf{y}_{k+1/k}, \mathbf{y}_{k+2/k}, \dots, \mathbf{y}_{k+n/k}).$$
[illegible]
$$a_{1j} = (\mathbf{H}_{k+1})_{jj}^2;$$

144

$$a_{lj} = \sum_{i=1}^l [\mathbf{H}_{k+l} \Phi_{k+l,k+i}]_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Индексом  $j$  обозначается номер элемента матрицы-строки. Например,  $(\mathbf{H}_{k+l})_j^2$  обозначает  $j$ -й элемент матрицы-строки  $\mathbf{H}_{k+l}$ , взятый в квадрате;  $q_j$  — диагональные элементы матрицы  $\mathbf{Q}$ .

Запишем уравнение (9.18) в матричной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (9.19)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \gamma_{k+1/k}^2 - \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1,k}^T \mathbf{H}_{k+1}^T - R_{k+1} \\ \gamma_{k+2/k}^2 - \mathbf{H}_{k+2} \Phi_{k+2,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+2,k}^T \mathbf{H}_{k+2}^T - R_{k+1} \\ \dots \\ \gamma_{k+l/k}^2 - \mathbf{H}_{k+l} \Phi_{k+l,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+l,k}^T \mathbf{H}_{k+l}^T - R_{k+l} \end{bmatrix}$$

Решая уравнение (9.19), получаем

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}^{\#} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (9.20)$$

где

$$\mathbf{A}^{\#} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T.$$

Псевдообратная матрица  $\mathbf{A}^{\#}$  существует, поскольку для полностью наблюдаемого объекта строки матрицы  $\mathbf{A}$  линейно независимы.

Предложенный в работе [23] алгоритм обладает следующими недостатками.

1. Оценка  $\mathbf{Q}$  по уравнению (9.20) связана со значительными вычислительными трудностями, поскольку требует формирования и псевдообращения матрицы  $\mathbf{A}$ .

2. Оценка  $\mathbf{Q}$  согласно этому алгоритму статистически мало обоснована, поскольку базируется фактически на одном значении обновляемого процесса [см. (9.17)]. Этот недостаток имеет особенно существенное значение для случая, когда норма матрицы  $\mathbf{R}$  значительно превышает норму матрицы  $\mathbf{Q}$ .

3. Алгоритм строится только для диагональной матрицы  $\mathbf{Q}$ .

4. Алгоритм не предусматривает оценивание матрицы измерительных шумов  $\mathbf{R}$ .

### 9.3. НОВЫЙ АДАПТИВНЫЙ ФИЛЬТР С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ОБНОВЛЯЕМОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В этой работе предлагается новый алгоритм адаптивного фильтра, отличающийся от фильтра Язвинского тем, что, как и в обычном фильтре Калмана, дает оценку вектора состояния  $\mathbf{x}_k$  в один такт с проведением измерений, а также тем, что в этом алгоритме не содержится операция псевдообращения матриц.

Ковариационная матрица обновляемой последовательности имеет вид

$$M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k.$$

Следовательно, использование  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  в алгоритме для формирования матрицы усиления  $\mathbf{K}$ , как это будет сделано в предлагаемом фильтре, приносит информацию как о ковариационной матрице входного шума  $\mathbf{Q}$ , так и о ковариационной матрице измерительного шума  $\mathbf{R}$ .

Если использовать всю информацию, содержащуюся в  $M(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k^T)$ , а синтезируемый алгоритм не связывать с необходимостью выделения матрицы  $\mathbf{Q}$  из обновляемой последовательности, то упомянутые выше (фильтр Язвинского) трудности не возникнут.

Перейдем к изложению вывода алгоритма предлагаемого здесь адаптивного фильтра.

Уравнения обычного фильтра Калмана имеют вид (см. разд. 8.2)

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}); \quad (9.21)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}; \quad (9.22)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}; \quad (9.23)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T; \quad (9.24)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k/k-1}. \quad (9.25)$$

Дискретная обновляемая последовательность  $\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  имеет ковариационную матрицу

$$M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k. \quad (9.26)$$

Обращаясь к последовательности  $\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k$ , определим ее ковариационную матрицу:

$$M[\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{K}_k^T] = \mathbf{K}_k M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T. \quad (9.27)$$

Подставляя вместо  $\mathbf{K}_k^T$  и  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  соответственно выражения (9.23) и (9.26), получаем

$$\mathbf{K}_k M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T = \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) [(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}]^T \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}^T. \quad (9.28)$$

Так как  $\mathbf{P}_{k/k-1}$ ,  $\mathbf{R}_k$  по определению матрицы симметричны, то

$$[(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}]^T \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}^T = (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}.$$

Следовательно, выражение (9.28) можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k \mathbf{M}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T &= \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \times \\ &\times \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Перепишем теперь уравнение (9.25) в виде

$$\mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{P}_k$$

и подставим полученное выражение в уравнение (9.29):

$$\mathbf{K}_k \mathbf{M}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{P}_k.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{K}_k \mathbf{M}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{P}_k. \quad (9.30)$$

Если объект стационарный и шумы также стационарны, то по завершении переходного процесса матрицы  $\mathbf{P}_{k/k-1}$ ,  $\mathbf{P}_k$ ,  $\mathbf{K}_k$  принимают постоянное значение. Для установившегося режима справедливо выражение

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{P}_{k+1/k}, \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1}, \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{K}_{k-1}.$$

Следовательно, для установившегося режима уравнение (9.30) можно записать в виде

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{K}_k \mathbf{M}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{P}_k \quad (9.31)$$

или в виде

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{K}_{k-1} \mathbf{M}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_{k-1}^T + \mathbf{P}_{k-1}. \quad (9.32)$$

Отличие уравнения (9.31) от уравнения (9.32) состоит в том, что оно предусматривает вычисление по текущим значениям  $\mathbf{M}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  априорной матрицы  $\mathbf{P}_{k+1/k}$  для последующего такта, тогда как с помощью уравнения (9.32) по текущему значению  $\mathbf{M}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  определяется  $\mathbf{P}_{k/k-1}$  для этого же такта вычислений. Более подробное сравнение фильтров, в которых использованы соответственно уравнения (9.31) и (9.32), будет произведено ниже.

Уравнения (9.31) и (9.32) можно использовать и для нестационарного объекта. Действительно, единственное ограничение применимости предлагаемого фильтра для нестационарных систем — это выполнение или равенства  $\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{P}_{k+1/k}$ , или равенств  $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1}$ ,  $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_{k-1}$ . Но эти равенства можно практически обеспечить, выбирая достаточно малый период дискретизации.

Адаптивный алгоритм фильтрации (в двух вариантах) получается из обычного алгоритма фильтра Калмана, заменяя уравнение (9.24) или уравнением (9.31), или уравнением (9.32).

Таким образом, предлагаемый здесь адаптивный субоптимальный фильтр описывается уравнениями (9.21), (9.22), (9.23), (9.25), (9.31) — первый вариант или уравнениями (9.21), (9.22), (9.23), (9.25), (9.32) — второй вариант.

Введение в алгоритм фильтрации уравнения (9.31) или (9.32) обеспечивает «привязку» теоретической ковариационной матрицы  $P_{k/k-1}$  к реальным значениям через член  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$ .

Существенным недостатком обычного фильтра Калмана является как раз оторванность процесса вычисления матрицы усиления  $K_k$  от реальных измерений. Вся процедура вычисления [(9.23) — (9.25)] матрицы  $K_k$  основана на априорных данных о матрицах  $\Phi$ ,  $\Gamma$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ . Поэтому любая неточность в знании этих матриц приводит к искажению оценки  $K_k$ , что может вызвать расходимость процесса фильтрации [12, 19].

Матрица  $K_k$  определяет вес, с которым текущие измерения входят в оценку  $\hat{\mathbf{x}}_k$ . При определении матрицы  $K_k$  согласно предлагаемому алгоритму используется информация о реальной матрице ошибок оценивания, что устраняет жесткую зависимость матрицы  $K_k$  от априорных данных. Таким образом, предлагаемый алгоритм является грубым, т. е. малочувствительным к изменению априорных данных [23, 27]. Заметим также, что применение уравнения (9.31) или (9.32) вместо уравнения (9.24) освобождает от необходимости знания ковариационной матрицы входного шума  $\mathbf{Q}$ .

В уравнениях (9.31) и (9.32) присутствует ковариационная матрица обновляемой последовательности  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$ . Определим такое значение  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$ , при котором плотность вероятности  $\mathbf{v}_k$  максимальна, т. е. найдем

$$\max_{M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)} p(\mathbf{v}_k).$$

Поскольку процесс  $\mathbf{v}_k$  гауссов, плотность вероятности может быть представлена в виде [23]

$$p(\mathbf{v}_k) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} [\det M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}_k^T [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} \mathbf{v}_k \right\}.$$

Продифференцируем  $p(\mathbf{v}_k)$  по  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$ . Но прежде введем определение производной скалярной функции по матрице.

Рассмотрим скаляр  $J$ , являющийся функцией некоторой матрицы  $\mathbf{X}$  размера  $n \times m$ . Градиент  $J$  по  $\mathbf{X}$  определяется следующим образом:

$$\Delta J_x = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial J}{\partial x_{1m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial J}{\partial x_{n1}} & \dots & \frac{\partial J}{\partial x_{nm}} \end{bmatrix}, \quad (9.33)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}.$$

где

Соотношения, выражающие свойства градиента, получаются путем трудоемкого ручного дифференцирования при использова-

нии определения (9.33). Поэтому приведем эти соотношения без вывода [6]:

$$\frac{d(\det \mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = \det \mathbf{X} (\mathbf{X}^{-1}); \quad (9.34)$$

$$\frac{d[\operatorname{sp}(\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B})]}{d\mathbf{X}} = -\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}. \quad (9.35)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{X}$  — симметричные матрицы;  $\operatorname{sp}$  — обозначение следа.

Учитывая выражения (9.34) и (9.35), а также соотношение

$$\mathbf{v}_k^T [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} \mathbf{v}_k = \operatorname{sp} \{ [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \},$$

продифференцируем  $p(\mathbf{v}_k)$  по  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  и приравняем результат нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dp(\mathbf{v}_k)}{d[M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]} = & -\frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{m}{2}} [\det M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-\frac{3}{2}} \det M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}_k^T [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} \mathbf{v}_k \right\} + \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{m}{2}} [\det M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}_k^T [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} \mathbf{v}_k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Отсюда

$$M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T.$$

Подставим в уравнения (9.31) и (9.32) вместо матрицы  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  значение  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$ , максимизирующее плотность вероятности вектора  $\mathbf{v}_k$ . Тогда соответственно получим

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{K}_k (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{P}_k; \quad (9.37)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{K}_{k-1} (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_{k-1}^T + \mathbf{P}_{k-1}. \quad (9.38)$$

Таким образом, предлагаемый алгоритм (его назовем адаптивным фильтром 1-й модификации) выражается уравнениями (9.21), (9.22), (9.23), (9.25), (9.37) (первый вариант) или уравнениями (9.21), (9.22), (9.23), (9.25), (9.38) (второй вариант).

Условие  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$  получено для некоторого фиксированного момента времени  $k$ . Поэтому использование  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$  в вычислении  $\mathbf{P}_{k+1/k}$  для последующего момента  $k+1$  [формула (9.37)] в принципиальном отношении менее правильно, чем вычисление  $\mathbf{P}_{k/k-1}$  по формуле (9.38) для текущего момента  $k$ . Для стационарных систем использование уравнения (9.37) или уравнения (9.38) имеет одинаковый смысл, поскольку

$$M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \text{const.}$$

Для нестационарных систем разница в использовании уравнений (9.37) или (9.38) также незначительна, поскольку уровень  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$  в соседних тактах приблизительно одинаков.

Необходимо отметить, что основным недостатком предложенного алгоритма является отсутствие в уравнении для априорной ковариационной матрицы ошибок оценивания  $P_{k/k-1}$  [см. (9.37), (9.38)] информации о матрице перехода  $\Phi$ . Это приводит к тому, что матрица усиления фильтра  $K$  строится только на основе текущих измерений  $v_k v_k^T$ , при этом не учитываются особенности конкретной системы через матрицу  $\Phi$ .

В том случае, если некоторые компоненты вектора состояния по текущим измерениям наблюдаются слабо, вырабатывание элементов матрицы  $K$ , которые соответствуют этим компонентам, будет осуществляться со значительной погрешностью. Чтобы избежать этого недостатка, необходимо при выборе матрицы  $P_{k+1/k}$  учесть особенности конкретной системы (информацию о матрице  $\Phi$  см. разд. 10.4).

Еще одним недостатком предложенного алгоритма является требование точной априорной информации о ковариационной матрице измерительного шума  $R$ .

#### 9.4. НОВЫЙ АДАПТИВНЫЙ ФИЛЬТР, НЕ ТРЕБУЮЩИЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О МАТРИЦАХ $Q$ И $R$

Рассмотрим еще один новый алгоритм адаптивной фильтрации (его будем называть адаптивным фильтром  $k$ -й модификации), который свободен от недостатков фильтра 1-й модификации. Обновляемый процесс

$$v_{k+l/k} = z_{k+l} - H \hat{x}_{k+l/k}, \quad (9.39)$$

где

$$\hat{x}_{k+l/k} = \Phi_{k+l,k} \hat{x}_k = \Phi^l \hat{x}_k,$$

при учете уравнения измерений (8.17) и уравнения объекта (8.16) (для простоты дальнейших вычислений полагаем  $\Gamma = I$ ) запишем в виде

$$\begin{aligned} v_{k+l/k} &= H x_{k+l} + v_{k+l} - H \Phi^{l-1} \hat{x}_{k+1/k} = H [\Phi^{l-1} x_{k+1} + \Phi^{l-2} w_{k+1} + \\ &+ \Phi^{l-3} w_{k+2} + \dots + w_{k+l-1}] + v_{k+l} - H \Phi^{l-1} \hat{x}_{k+1/k} = \\ &= H \Phi^{l-1} \tilde{x}_{k+1/k} + H \sum_{i=2}^l \Phi^{l-i} w_{k+i-1} + v_{k+l}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Рассмотрим следующую серию взаимоквариационных матриц:

$$\begin{aligned} M(v_{k+2/k} v_{k+1/k}^T), \quad M(v_{k+3/k} v_{k+1/k}^T), \quad M(v_{k+4/k} v_{k+1/k}^T), \dots \\ \dots, \quad M(v_{k+l/k} v_{k+1/k}^T). \end{aligned}$$

Учитывая выражение (9.40), получим

$$M(v_{k+2/k} v_{k+1/k}^T) = H \Phi P_{k+1/k} H^T;$$

$$M(v_{k+3/k} v_{k+1/k}^T) = H \Phi^2 P_{k+1/k} H^T;$$

$$M(\mathbf{y}_{k+4/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) = \mathbf{H} \Phi^3 \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T; \quad (9.41)$$

.....

$$M(\mathbf{y}_{k+l/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) = \mathbf{H} \Phi^{l-1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T,$$

где

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = M(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T).$$

Уравнение (9.41) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{M}_y = \mathbf{S} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T, \quad (9.42)$$

где

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} M(\mathbf{y}_{k+2/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) \\ M(\mathbf{y}_{k+3/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) \\ M(\mathbf{y}_{k+4/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) \\ \vdots \\ M(\mathbf{y}_{k+l/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H} \Phi \\ \mathbf{H} \Phi^2 \\ \vdots \\ \mathbf{H} \Phi^{l-2} \end{bmatrix} \Phi.$$

Решая уравнение (9.42), получим

$$\widehat{\mathbf{P}}_{k+1/k} \mathbf{H}^T = \mathbf{S}^* \mathbf{M}_y, \quad (9.43)$$

где

$$\mathbf{S}^* = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T.$$

Заметим, что матрица  $\mathbf{S}$  — произведение матрицы наблюдаемости и невырожденной матрицы перехода. Поэтому псевдообратная матрица  $\mathbf{S}^*$  существует.

Оценку ковариационной матрицы измерительного шума определим по формуле

$$\widehat{\mathbf{R}}_{k+1} = M(\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) - \mathbf{H}(\widehat{\mathbf{P}}_{k+1/k} \mathbf{H}^T). \quad (9.44)$$

Тогда уравнение для матрицы усиления фильтра  $\mathbf{K}_{k+1}$  примет вид

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\widehat{\mathbf{P}}_{k+1/k} \mathbf{H}^T) [M(\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T)]^{-1}. \quad (9.45)$$

Сформируем из последовательности векторов  $\mathbf{y}_{k+1/k}, \mathbf{y}_{k+2/k} \dots \mathbf{y}_{k+l/k}$  один вектор  $\mathbf{c}_l$ :

$$\mathbf{c}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k+1/k} \\ \mathbf{y}_{k+2/k} \\ \mathbf{y}_{k+3/k} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+l/k} \end{bmatrix}. \quad (9.46)$$

Определим такое значение  $M(\mathbf{c}_l \mathbf{c}_l^T)$ , при котором плотность вероятности  $\mathbf{c}_l$  будет максимальна, т. е.

$$\max_M (\mathbf{c}_l \mathbf{c}_l^T) p(\mathbf{c}_l).$$



Поскольку подвектора  $\mathbf{y}_{k+1/k}$ ,  $\mathbf{y}_{k+2/k}, \dots, \mathbf{y}_{k+l/k}$  гауссовы и связаны линейной зависимостью, вектор  $\mathbf{c}_l$  также гауссов. Поэтому

$$p(\mathbf{c}_l) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \{\det [M(\mathbf{c}_l \mathbf{c}_l^T)]\}^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{c}_l^T [M(\mathbf{c}_l \mathbf{c}_l^T)]^{-1} \mathbf{c}_l \right\}.$$

Продифференцируем  $p(\mathbf{c}_l)$  по  $M(\mathbf{c}_l \mathbf{c}_l^T)$  и приравняем результат нулю (см. разд. 9.3). После преобразования получим

$$M(\mathbf{c}_l \mathbf{c}_l^T) = \mathbf{c}_l \mathbf{c}_l^T. \quad (9.47)$$

Равенство (9.47) позволяет записать

$$\begin{aligned} M(\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) &= \mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T; \\ M(\mathbf{y}_{k+2/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) &= \mathbf{y}_{k+2/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T \\ &\dots \dots \dots \\ M(\mathbf{y}_{k+l/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) &= \mathbf{y}_{k+l/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T. \end{aligned} \quad (9.48)$$

С учетом выражений (9.48) уравнения (9.43), (9.45) можно записать в виде

$$(\widehat{\mathbf{P}_{k+1/k}} \mathbf{H}^T) = \mathbf{S}^\# \mathbf{M}_y, \quad (9.49)$$

где

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k+2/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T \\ \mathbf{y}_{k+3/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T \\ \dots \dots \dots \\ \mathbf{y}_{k+l/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\widehat{\mathbf{P}_{k+1/k}} \mathbf{H}^T) (\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T)^{-1}. \quad (9.50)$$

Окончательная форма предлагаемого алгоритма адаптивной фильтрации выражается уравнениями (9.49), (9.50), (9.21). Предлагаемый алгоритм возможно трансформировать для случая, когда ковариационная матрица измерительного шума  $\mathbf{R}$  известна.

Для этой цели добавим уравнение дисперсии обновляемого процесса  $M(\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T)$  к системе уравнений (9.41):

$$\begin{aligned} M(\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) &= \mathbf{H} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{k+1}; \\ M(\mathbf{y}_{k+2/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) &= \mathbf{H} \Phi \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T; \\ M(\mathbf{y}_{k+3/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) &= \mathbf{H} \Phi^2 \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T; \\ &\dots \dots \dots \\ M(\mathbf{y}_{k+l/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) &= \mathbf{H} \Phi^{l-1} \mathbf{P}_{k+1/k} \mathbf{H}^T. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Записывая уравнение (9.51) в компактной форме, получим

$$(\widehat{\mathbf{P}_{k+1/k}} \mathbf{H}^T) = \mathbf{S}^\# \mathbf{M}_y. \quad (9.52)$$

Здесь

$$S = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \dots \\ H\Phi^{l-2} \end{bmatrix}; \quad S^\# = (S^T S)^{-1} S^T;$$

$$M_v = \begin{bmatrix} v_{k+1/k} v_{k+1/k}^T - R_{k+1} \\ v_{k+2/k} v_{k+1/k}^T \\ \dots \\ v_{k+l/k} v_{k+1/k}^T \end{bmatrix};$$

$$K_{k+1} = (P_{k+1/k} \widehat{H}^T) [H (P_{k+1/k} \widehat{H}^T) + R_{k+1}]^{-1}.$$

Уравнение (9.52) отличается от аналогичного выражения (9.43) формированием матриц  $M_v$ ,  $S$ . В рассматриваемом случае в матрицу  $M_v$  кроме взаимоквариационных матриц обновляемых последовательностей  $v_{k+l/k}$  входит и дисперсия обновляемого процесса  $v_{k+1/k}$ . Что касается матрицы  $S$ , то она представляет собой матрицу наблюдаемости. Остальные уравнения фильтра остаются без изменений.

Оценка взаимоквариационных матриц по выражению (9.48) является статистически мало обоснованной и, кроме того, матрица  $v_{k+1/k} v_{k+1/k}^T$  является особой. Поэтому необходимо в алгоритме производить максимизацию плотности вероятности не одного вектора  $c_l$ , а комбинации векторов  $c_l, c_{l+1}, \dots, c_{l+n}$ .

Сформируем последовательность таких векторов:

$$c_l = \begin{bmatrix} v_{k+1/k} \\ v_{k+2/k} \\ \dots \\ v_{k+l/k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{k+1} - H\Phi \widehat{x}_k \\ z_{k+2} - H\Phi^2 \widehat{x}_k \\ \dots \\ z_{k+l} - H\Phi^l \widehat{x}_k \end{bmatrix};$$

$$c_{l+1} = \begin{bmatrix} v_{k+l+1/k+l} \\ v_{k+l+2/k+l} \\ \dots \\ v_{k+2l/k+l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{k+l+1} - H\Phi \widehat{x}_{k+l} \\ z_{k+l+2} - H\Phi^2 \widehat{x}_{k+l} \\ \dots \\ x_{k+2l} - H\Phi^l \widehat{x}_{k+l} \end{bmatrix};$$

.....

$$c_{l+n} = \begin{bmatrix} v_{k+n+1/k+nl} \\ v_{k+n+2/k+nl} \\ \dots \\ v_{k+n(l+1)/k+nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{k+n+1} - H\Phi \widehat{x}_{k+nl} \\ z_{k+n+2} - H\Phi^2 \widehat{x}_{k+nl} \\ \dots \\ z_{k+n+l} - H\Phi^l \widehat{x}_{k+nl} \end{bmatrix}.$$

Для стационарной системы справедливо

$$M(\mathbf{c}_l \mathbf{c}_l^T) = M(\mathbf{c}_{l+1} \mathbf{c}_{l+1}^T) = \dots = M(\mathbf{c}_{l+n} \mathbf{c}_{l+n}^T) = M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T).$$

Применяя прежний подход, определим такое значение  $M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)$ , которое максимизирует совместную плотность вероятности векторов  $\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_{l+1}, \dots, \mathbf{c}_{l+n}$ , т. е. найдем

$$\max_{M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)} p(\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_{l+1}, \dots, \mathbf{c}_{l+n}).$$

Нетрудно показать, что векторы  $\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_{l+1}, \dots, \mathbf{c}_{l+n}$  попарно независимы. Для независимых векторов справедливо [23] выражение

$$p(\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_{l+1}, \dots, \mathbf{c}_{l+n}) = \prod_{i=0}^n p(\mathbf{c}_{l+i}).$$

Учитывая, что  $\mathbf{c}_l, \mathbf{c}_{l+1}, \dots, \mathbf{c}_{l+n}$  — гауссовы процессы, получим

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n p(\mathbf{c}_{l+i}) &= (2\pi)^{-\frac{m l (n+1)}{2}} \{\det [M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)]\}^{-\frac{(n+1)}{2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{c}_l^T [M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{c}_l - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{l+1}^T [M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)]^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{c}_{l+1} - \dots - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{l+n}^T [M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)]^{-1} \mathbf{c}_{l+n} \right\}. \end{aligned}$$

Продифференцируем это выражение по  $M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)$  и результат приравняем нулю:

$$\frac{d \left[ \prod_{i=0}^n p(\mathbf{c}_{l+i}) \right]}{d [M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)]} = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно  $M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)$ , получим (см. разд. 9.6)

$$M(\widehat{\mathbf{c} \mathbf{c}^T}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_{l+i} \mathbf{c}_{l+i}^T. \quad (9.53)$$

Уравнение (9.53) запишем в рекуррентной форме:

$$M(\widehat{\mathbf{c} \mathbf{c}^T})_{i+1} = \frac{1}{i+1} [i M(\widehat{\mathbf{c} \mathbf{c}^T})_i + \mathbf{c}_{l+i} \mathbf{c}_{l+i}^T], \quad i=0, 1, 2, \dots, n. \quad (9.54)$$

Выражение (9.54) записано для блочной матрицы  $M(\mathbf{c} \mathbf{c}^T)$ , поэтому оно справедливо и для всех элементов этой матрицы, а именно, для элементов матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{v,i} &= \frac{1}{i} \left\{ (i-1) \mathbf{M}_{v,i-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{k+l+2/k+l} \mathbf{v}_{k+l+1/k+l}^T \\ \mathbf{v}_{k+l+2/k+l} \mathbf{v}_{k+l+1/k+l}^T \\ \dots \\ \mathbf{v}_{k+l+1/k+l} \mathbf{v}_{k+l+1/k+l}^T \end{bmatrix} \right\}, \\ i &= 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (9.55)$$

и для элементов матрицы

$$M(\widehat{\mathbf{v}_{k+l+1/k+il} \mathbf{v}_{k+il+1/k+il}^T}) = \frac{1}{i} \{(i-1) \times \\ \times M(\widehat{\mathbf{v}_{k+(i-1)l+1/k+(i-1)l} \mathbf{v}_{k+(i-1)l+1/k+(i-1)l}^T}) + \\ + \mathbf{v}_{k+il+1/k+il} \mathbf{v}_{k+il+1/k+il}^T\}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (9.56)$$

Здесь  $l$  — количество подтактов в каждом  $i$ -м такте, при этом в этих подтактах вектор состояния оценке не подлежит,  $n$  — количество тактов осреднения. В каждый  $i$ -й такт ( $i=1, 2, \dots, n$ ) происходит оценка вектора состояния, причем  $i$ -й такт отличается от  $(i+1)$ -го такта на интервал времени из  $l$  подтактов проведения измерений.

Перепишем уравнения предлагаемого алгоритма с учетом осреднения текущих обновляемых последовательностей:

$$(\widehat{\mathbf{P}_i \mathbf{H}^T}) = \mathbf{S}^* \mathbf{M}_{v,i}; \\ \mathbf{K}_i = (\widehat{\mathbf{P}_i \mathbf{H}^T}) [M(\widehat{\mathbf{v}_{k+il+1/k+il} \mathbf{v}_{k+il+1/k+il}^T})]^{-1}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n \quad (9.57)$$

Здесь  $(\widehat{\mathbf{P}_i \mathbf{H}^T})$ ,  $\mathbf{K}_i$  — соответственно оценки априорной ковариационной матрицы ошибок, умноженной на  $\mathbf{H}^T$ , матрицы усиления фильтра  $\mathbf{K}$  для каждого  $i$ -го такта оценки вектора состояния. Текущие значения матриц  $\mathbf{M}_{v,i}$ ,  $M[\widehat{\mathbf{v}_{k+il+1/k+il} \mathbf{v}_{k+il+1/k+il}^T}]$  определяются соответственно по уравнениям (9.55) и (9.56). Уравнение для оценки вектора состояния имеет вид

$$\widehat{\mathbf{x}_{k+(i+1)l}} = \widehat{\mathbf{x}_{k+(i+1)l/k+il}} + \mathbf{K}_i (\mathbf{z}_{k+(i+1)l} - \mathbf{H} \widehat{\mathbf{x}_{k+(i+1)l/k+il}}); \quad (9.58) \\ \widehat{\mathbf{x}_{k+(i+1)l/k+il}} = \Phi^T \widehat{\mathbf{x}_{k+il}}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

Оценивание вектора состояния  $\mathbf{x}_{k+il}$  осуществляется следующим образом. В каждый  $i$ -й такт адаптивный фильтр дает оценку вектора состояния  $\widehat{\mathbf{x}_{k+il}}$ , затем на протяжении  $l$  подтактов проведения измерений происходит формирование обновляемых последовательностей вида (9.40) и матриц  $\mathbf{M}_{v,i}$ ,  $M(\widehat{\mathbf{v}_{k+il+1/k+il} \mathbf{v}_{k+il+1/k+il}^T})$ .

После того, как матрицы  $\mathbf{M}_{v,i}$ ,  $M(\widehat{\mathbf{v}_{k+il+1/k+il} \mathbf{v}_{k+il+1/k+il}^T})$  сформированы, происходит оценивание вектора состояния  $\widehat{\mathbf{x}_{k+il}}$ . Таким образом, текущие оценки вектора состояния разнесены во времени на  $l$  подтактов проведения измерений, т. е. последовательность оценок вектора состояния во времени есть  $\widehat{\mathbf{x}_k}$ ,  $\widehat{\mathbf{x}_{k+l}}$ ,  $\widehat{\mathbf{x}_{k+2l}}$ ,  $\widehat{\mathbf{x}_{k+3l}}$ , ... . Процедуру вычисления оценок вектора состояния предлагаемым фильтром можно представить следующим образом.

1. Рассмотрим первый такт вычислений  $i=0$ . Заметим, что использованная здесь запись уравнений предполагает начало работы адаптивного фильтра с произвольного момента времени  $k$ . Этот  $i$ -й

такт состоит из  $l$  подтактов проведения измерений. На каждом из этих подтактов формируется обновляемый процесс вида

$$\mathbf{y}_{k+l/k} = \mathbf{z}_{k+l} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k+l/k},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+l/k} = \Phi^l \hat{\mathbf{x}}_k.$$

Затем в  $l$ -м подтакте происходит формирование матрицы

$$\mathbf{M}_{\mathbf{y},0} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k+2/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T \\ \mathbf{y}_{k+3/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+l/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T \end{bmatrix}$$

и матрицы

$$M(\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) = \mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T.$$

Далее в этом же подтакте вычисляются по уравнениям (9.57) матрицы  $(\hat{\mathbf{P}}_0 \mathbf{H}^T)$ ,  $\mathbf{K}_0$  (на первом такте вычислений для возможности обращения матрицы  $(\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T)$  следует пренебречь недиагональными элементами этой матрицы) и производится оценивание вектора состояния:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+l} = \Phi^l \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_0 (\mathbf{z}_{k+l} - \mathbf{H} \Phi^l \hat{\mathbf{x}}_k).$$

2. Второй такт  $i=1$  также состоит из  $l$  подтактов, в которых происходит формирование обновляемого процесса (9.39). В  $l$ -м подтакте формируются матрицы  $\mathbf{M}_{\mathbf{y},1}$ ,  $M(\mathbf{y}_{k+l+1/k+l} \mathbf{y}_{k+l+1/k+l}^T)$ , которые с учетом осреднения по уравнениям (9.55), (9.56) имеют вид

$$\mathbf{M}_{\mathbf{y},1} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{M}_{\mathbf{y},0} + \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{k+l+2/k+l} \mathbf{y}_{k+l+1/k+l}^T \\ \mathbf{y}_{k+l+3/k+l} \mathbf{y}_{k+l+1/k+l}^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+l+2l/k+l} \mathbf{y}_{k+l+1/k+l}^T \end{bmatrix} \right);$$

$$M(\mathbf{y}_{k+l+1/k+l} \mathbf{y}_{k+l+1/k+l}^T) = \frac{1}{2} \{ M(\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T) +$$

$$+ \mathbf{y}_{k+l+1/k+l} \mathbf{y}_{k+l+1/k+l}^T \} = \frac{1}{2} (\mathbf{y}_{k+1/k} \mathbf{y}_{k+1/k}^T + \mathbf{y}_{k+l+1/k+l} \mathbf{y}_{k+l+1/k+l}^T).$$

В этом же подтакте [ $l$ -й подтакт, относящийся к концу 2-го такта вычислений ( $i=1$ )] производится вычисление матриц  $(\hat{\mathbf{P}}_1 \mathbf{H}^T)$ ,  $\mathbf{K}_1$  и оценки

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+2l} = \Phi^l \hat{\mathbf{x}}_{k+l} + \mathbf{K}_1 (\mathbf{z}_{k+2l} - \mathbf{H} \Phi^l \hat{\mathbf{x}}_{k+l}).$$

В третьем такте ( $i=2$ ) все указанные вычисления повторяются вновь на основе полученной во втором такте информации.

Таким образом, осреднение с целью оценивания матриц  $M_{\nu,i}$  и  $M[\nu_{k+il+1/k+il}\nu_{k+il+1/k+il}^T]$  производится параллельно процессу оценивания вектора состояния  $x_{k+il}$ .

В заключение остановимся на выборе количества подтактов  $l$  в каждом такте вычислений, а также количества тактов  $n$ , на которых происходит осреднение обновляемой последовательности в соответствии с уравнениями (9.55), (9.56). Количество подтактов  $l$  диктуется условием псевдообращения матрицы  $S$ . Поскольку матрица  $S$  представляет собой произведение матрицы наблюдаемости и матрицы перехода, целесообразно выбирать величину  $l+1$  равной порядку системы. В том случае, если матрица  $R$  известна, матрица  $S$  является матрицей наблюдаемости, и следует выбирать  $l$  равной порядку системы. Что касается выбора количества тактов  $n$ , то в случае строго стационарных систем осреднение обновляемых последовательностей может осуществляться на всем протяжении процесса оценивания.

Если система стационарна лишь на ограниченном интервале времени, то количество тактов  $n$  определяется этим интервалом времени. Следует отметить, что использование предлагаемого алгоритма не ограничивается случаем стационарных систем, а лишь предполагает наличие некоторого количества тактов  $n$ , на которых допустимо осреднение.

И наконец, необходимо отметить, что на начальном этапе осреднения по формулам (9.55), (9.56) возможно нарушение положительной определенности матриц  $\hat{H}(\hat{P}_i\hat{H}^T)$  и

$$\hat{R}_i = M(\nu_{k+il+1/k+il}\nu_{k+il+1/k+il}^T) - (\hat{H}(\hat{P}_i\hat{H}^T),$$

которые по определению должны быть неотрицательно определенными. Проверка положительной определенности матриц может осуществляться следующим образом. Пусть необходимо проверить, является ли матрица

$$L = \begin{bmatrix} \overbrace{a_{11}} & \overbrace{a_{12}} & \overbrace{a_{13}} & \dots & \overbrace{a_{1n}} \\ \overbrace{a_{21}} & \overbrace{a_{22}} & \overbrace{a_{23}} & \dots & \overbrace{a_{2n}} \\ \overbrace{a_{31}} & \overbrace{a_{32}} & \overbrace{a_{33}} & \dots & \overbrace{a_{3n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overbrace{a_{n1}} & \dots & \dots & \dots & \overbrace{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

положительно определенной. Для этого необходимо вычислить определители (главные миноры) этой матрицы.

Эти миноры (им соответствуют выделенные штриховыми линиями субматрицы)

$$i_1 = a_{11}; \quad i_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$l_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \dots, l_n = \det \mathbf{L} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если  $l_1 > 0, l_2 > 0, \dots, l_n > 0$ , то матрица  $\mathbf{L}$  положительно определена.

Если матрицы  $\mathbf{H}$  ( $\widehat{\mathbf{P}}_i \mathbf{H}^T$ ) и  $\widehat{\mathbf{R}}_i$  не являются положительно определенными, то в предлагаемом алгоритме считаем

$$\mathbf{H}(\widehat{\mathbf{P}}_i \mathbf{H}^T) = 0, \widehat{\mathbf{R}}_i = 0.$$

Проверка положительной определенности матриц при использовании предлагаемого алгоритма не требует большого объема вычислений, поскольку эта проверка осуществляется для матриц размера  $(m \times m)$ , где  $m$  — размерность вектора измерений (см. разд. 10.5).

## 9.5. РЕДУЦИРОВАННЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

Применение дискретного фильтра Калмана к системам большой размерности требует большого объема памяти ЦВМ. Вместе с тем вектор состояния объекта может содержать компоненты, являющиеся наблюдаемыми по используемым измерениям. Отсюда вытекает целесообразность разделения полного вектора состояния  $\mathbf{x}_k^{\Pi}$  на наблюдаемый вектор  $\mathbf{x}_k$  и ненаблюдаемый вектор  $\mathbf{f}_k$ . Вектор  $\mathbf{x}_k$  будем называть вектором состояния, а вектор  $\mathbf{f}_k$  — вектором смещения и далее проводить оценивание только компонент вектора  $\mathbf{f}_k$ . Фильтр, который на основании математической модели для полного вектора состояния  $\mathbf{x}_k^{\Pi}$  оценивает только некоторые компоненты вектора состояния (вектор  $\mathbf{x}_k$ ), называется редуцированным фильтром. Использование редуцированного фильтра, с одной стороны, позволяет осуществить развязку от ненаблюдаемых компонент (вектор  $\mathbf{f}_k$ ) полного вектора состояния  $\mathbf{x}_k^{\Pi}$ , с другой — упрощает вычислительную процедуру оценивания. Задача оценивания только части вектора состояния в известной мере обратна задаче учета неизвестного смещения (см. [12]). Действительно, в работе [12] рассматривался фильтр Шмидта, предназначенный для определения динамического смещения, не учтенного в структуре исходного фильтра. В настоящем разделе решается обратная задача, а именно, из полной структуры фильтра выделяется только часть, соответствующая компонентам вектора состояния, подлежащим оценке.

Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\Pi} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{x}_k^{\Pi} + \Gamma_{k+1,k} \mathbf{w}_k; \quad (9.59)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}^{\Pi} + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (9.60)$$

Разделим вектор  $\mathbf{x}_{k+1}^n$  на оцениваемый вектор состояния  $\mathbf{x}_k$  и не-оцениваемый вектор смещения  $\mathbf{f}_k$ . Тогда, разбивая матрицы  $\Phi_{k+1,k}$ ,  $\Gamma_{k+1,k}$  на соответствующие блоки, получим уравнения системы в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{f}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{k+1,k} & \mathbf{U}_{k+1,k} \\ 0 & \Psi_{k+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{f}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_{k+1,k} \end{bmatrix} \mathbf{w}_k; \quad (9.61)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = [\mathbf{H}_{k+1} \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{f}_{k+1} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (9.62)$$

Уравнение оптимального фильтра также может быть записано в блочной форме:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{f}}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{k+1,k} & \mathbf{U}_{k+1,k} \\ 0 & \Psi_{k+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{\mathbf{f}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k+1}^1 \\ \mathbf{K}_{k+1}^2 \end{bmatrix} (\mathbf{z}_{k+1} - [\mathbf{H}_{k+1} \ 0] \times \\ \times \begin{bmatrix} \Phi_{k+1,k} & \mathbf{U}_{k+1,k} \\ 0 & \Psi_{k+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{\mathbf{f}}_k \end{bmatrix}).$$

«Поэлементные» уравнения фильтра имеют вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{U}_{k+1,k} \hat{\mathbf{f}}_k + \mathbf{K}_{k+1}^1 (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k - \\ - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{U}_{k+1,k} \hat{\mathbf{f}}_k); \quad (9.63)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{k+1} = \Psi_{k+1,k} \hat{\mathbf{f}}_k + \mathbf{K}_{k+1}^2 (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{U}_{k+1,k} \hat{\mathbf{f}}_k). \quad (9.64)$$

Полагаем далее, что оценке не подлежит вектор смещения  $\mathbf{f}_{k+1}$ , т. е.  $\hat{\mathbf{f}}_{k+1} = 0$ .

Тогда  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_{k+1}^1 (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k), \quad (9.65)$

где  $\mathbf{K}_{k+1}^1$  находится из выражений  $\mathbf{K}_{k+1}$ ,  $\mathbf{P}_{k+1/k}$ ,  $\mathbf{P}_k$ , составляемых для полного вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_k^n$ .

Запишем выражение априорной матрицы ошибок оценивания для полного фильтра в блочной форме, учитывая при этом разбиение вектора состояния  $\mathbf{x}_{k+1}^n$  на подвекторы  $\mathbf{x}_{k+1}$ ,  $\mathbf{f}_{k+1}$ . Применяя для блочных элементов этой матрицы обозначения

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = M(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1,k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T); \quad \mathbf{C}_{k+1/k} = M(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1,k} \tilde{\mathbf{f}}_{k+1/k}^T);$$

$$\mathbf{D}_k = M(\tilde{\mathbf{f}}_{k+1/k} \tilde{\mathbf{f}}_{k+1/k}^T),$$

где  $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1/k} = \mathbf{f}_{k+1} - \hat{\mathbf{f}}_{k+1/k} = \mathbf{f}_{k+1}$  (вследствие  $\hat{\mathbf{f}}_{k+1/k} = 0$ ), получим

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1,k}^T + \Phi_{k+1,k} \mathbf{C}_k \mathbf{U}_{k+1,k}^T + \mathbf{U}_{k+1,k} \mathbf{C}_k^T \Phi_{k+1,k}^T + \\ + \mathbf{U}_{k+1,k} \mathbf{D}_k \mathbf{U}_{k+1,k}^T; \quad (9.66)$$



$$C_{k+1/k} = \Phi_{k+1,k} C_k \Psi_{k+1,k}^T + U_{k+1,k} D_k \Psi_{k+1,k}^T; \quad (9.67)$$

$$D_{k+1/k} = \Psi_{k+1,k} D_k \Psi_{k+1,k}^T + \Gamma_{k+1,k} Q_k \Gamma_{k+1,k}^T. \quad (9.68)$$

Блочные элементы оптимальной матрицы усиления имеют вид

$$K_{k+1}^1 = P_{k+1/k} H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}; \quad (9.69)$$

$$K_{k+1}^2 = C_{k+1/k}^T H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}, \quad (9.70)$$

а апостериорные ковариационные матрицы ошибок оценивания, необходимые на следующем шаге вычислений, имеют вид

$$P_{k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1}^1 H_{k+1} P_{k+1/k}; \quad (9.71)$$

$$C_{k+1} = C_{k+1/k} - K_{k+1}^2 H_{k+1} C_{k+1/k}; \quad (9.72)$$

$$D_{k+1} = D_{k+1/k} - K_{k+1}^2 H_{k+1} C_{k+1/k}. \quad (9.73)$$

Таким образом, уравнения (9.65) — (9.73) описывают редуцированный фильтр, оценивающий лишь вектор  $x_{k+1}$  (часть полного вектора состояния  $x_{k+1}^n$ ). Оценка  $\hat{x}_{k+1}$ , даваемая редуцированным фильтром, уже не будет оптимальной, поскольку в структуре уравнения (9.65) оценка  $\hat{f}_{k+1}$  не учитывается. Следует отметить, что полный оптимальный фильтр [см. (9.63)] при оценке вектора  $\hat{x}_{k+1}$  учитывает и оценку  $\hat{f}_{k+1}$ . Следовательно, редуцированный фильтр упрощает вычислительную процедуру, но при этом оценка  $\hat{x}_{k+1}$  становится субоптимальной.

## 9.6. АДАПТИВНЫЕ РЕДУЦИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В разд. 9.5. были выведены уравнения редуцированного фильтра для объекта

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{f}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{k,k-1} & U_{k,k-1} \\ 0 & \Psi_{k,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ f_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_{k,k-1} \end{bmatrix} w_{k-1}$$

и измерителя

$$z_k = [H_k \ 0] \begin{bmatrix} x_k \\ f_k \end{bmatrix} + v_k.$$

Этот фильтр дает оценку только для подвектора  $x_k$  и описывается уравнением

$$\hat{x}_k = \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} + K_k^1 (z_k - H_k \Phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}), \quad (9.74)$$

где

$$\begin{aligned} P_{k,k-1} &= \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Phi_{k,k-1} C_{k-1} U_{k,k-1}^T + \\ &+ U_{k,k-1} C_{k-1}^T \Phi_{k,k-1}^T + U_{k,k-1} D_{k-1} U_{k,k-1}^T; \end{aligned} \quad (9.75)$$

$$\mathbf{C}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{C}_{k-1} \Psi_{k,k-1}^T + \mathbf{U}_{k,k-1} \mathbf{D}_{k-1} \Psi_{k,k-1}^T; \quad (9.76)$$

$$\mathbf{D}_{k/k-1} = \Psi_{k,k-1} \mathbf{D}_{k-1} \Psi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T; \quad (9.77)$$

$$\mathbf{K}_k^1 = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1}; \quad (9.78)$$

$$\mathbf{K}_k^2 = \mathbf{C}_{k/k-1}^T \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1}; \quad (9.79)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k^1 \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}; \quad (9.80)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k^1 \mathbf{H}_k \mathbf{C}_{k/k-1}; \quad (9.81)$$

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k^2 \mathbf{H}_k \mathbf{C}_{k/k-1}. \quad (9.82)$$

Для вычисления оценки  $\mathbf{x}_k$  по формуле (9.74) необходимо знание матрицы усиления  $\mathbf{K}_k^1$ . В свою очередь для получения матрицы  $\mathbf{K}_k^1$  необходимо [см. (9.78)] знание матрицы  $\mathbf{P}_{k/k-1}$ , а эта последняя зависит от матриц  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{D}_k$ ,  $\mathbf{C}_{k/k-1}$ ,  $\mathbf{D}_{k/k-1}$ ,  $\mathbf{K}_k^2$  [см. (9.75), (9.81), (9.82), (9.76), (9.77)].

Рассмотрим теперь последовательность  $\mathbf{K}_k^1 \mathbf{v}_k$ , где  $\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ . Определим ковариационную матрицу этой последовательности аналогично тому, как это было сделано в разд. 9.3.

$$M[\mathbf{K}_k^1 \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T (\mathbf{K}_k^1)^T] = \mathbf{K}_k^1 M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) (\mathbf{K}_k^1)^T.$$

Подставляя вместо  $(\mathbf{K}_k^1)^T$  выражение (9.78), а вместо матрицы  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  ее значение  $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$  и учитывая симметричность последней матрицы, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k^1 M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) (\mathbf{K}_k^1)^T &= \mathbf{K}_k^1 M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} = \\ &= \mathbf{K}_k^1 \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}. \end{aligned} \quad (9.83)$$

Перепишем уравнение (9.80) в виде

$$\mathbf{K}_k^1 \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{P}_k,$$

и подставим полученное выражение в уравнение (9.83):

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{K}_k^1 M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) (\mathbf{K}_k^1)^T + \mathbf{P}_k. \quad (9.84)$$

Таким образом, для редуцированного фильтра получилось уравнение (9.84) такое же, как и для полного адаптивного фильтра.

Принимая те же допущения, что и в разд. 9.3, можно уравнение (9.84) записать или в виде

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{K}_k^1 M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) (\mathbf{K}_k^1)^T + \mathbf{P}_k,$$

или в виде

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{K}_{k-1}^1 M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) (\mathbf{K}_{k-1}^1)^T + \mathbf{P}_{k-1}.$$

При учете значения матрицы  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$ , максимизирующего

плотность вероятности вектора  $\mathbf{v}_k$ , эти уравнения можно переписать в виде

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{K}_k^1 (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) (\mathbf{K}_k^1)^T + \mathbf{P}_k; \quad (9.85)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{K}_{k-1}^1 (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) (\mathbf{K}_{k-1}^1)^T + \mathbf{P}_{k-1}. \quad (9.86)$$

Как видно из уравнений (9.85) и (9.86), для определения  $\mathbf{P}_{k/k-1}$  нет необходимости знать матрицы  $\mathbf{C}_{k-1}$ ,  $\mathbf{D}_{k-1}$ , а следовательно, и матрицы  $\mathbf{K}_k^2$ ,  $\mathbf{C}_{k/k-1}$ ,  $\mathbf{D}_{k/k-1}$ . Информация о них поступает через член  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$  по текущим измерениям  $\mathbf{v}_k$ .

Следовательно, уравнения адаптивного редуцированного фильтра можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (9.87)$$

где первый вариант

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}; \quad (9.88)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}; \quad (9.89)$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{K}_k (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{P}_k, \quad (9.90)$$

второй вариант

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{K}_{k-1} (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_{k-1}^T + \mathbf{P}_{k-1}; \quad (9.91)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}; \quad (9.92)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1}. \quad (9.93)$$

Адаптивный редуцированный фильтр, синтезируемый на основе адаптивного фильтра 1-й модификации, использует для определения  $\mathbf{K}_k$  три рекурсивных соотношения [уравнения (9.88) — (9.90) или (9.91) — (9.93)] вместо восьми, как это имело место в обычном редуцированном фильтре. Наряду со свойствами адаптивности это еще одно важное преимущество предложенного здесь адаптивного редуцированного фильтра.

Рассмотрим еще один новый алгоритм редуцированного адаптивного фильтра. Будем называть его адаптивным редуцированным фильтром 2-й модификации.

Фильтр 2-й модификации можно применять для частного случая, когда измеряются отдельные компоненты вектора состояния, а не их линейные комбинации. Другими словами, в этом случае строки матрицы  $\mathbf{H}_k$  имеют только один отличный от нуля элемент. Предлагаемый здесь алгоритм производит оценку этих измеряемых компонент вектора состояния. Как будет показано далее, для большинства случаев применения в ИНС матрица наблюдения  $\mathbf{H}_k$  удовлетворяет указанным ограничениям. Предложенный алгоритм производит оценивание с меньшей точностью, чем фильтр 1-й модификации. Однако преимущество этого алгоритма в том, что он состоит только из двух рекуррентных соотношений.

Обращаясь к уравнениям (9.74) — (9.82) редуцированного фильтра, перепишем уравнение (9.78) для матрицы усиления этого же фильтра:

$$\mathbf{K}_k^1 = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}.$$

Теперь умножим обе части этого уравнения слева на матрицу  $\mathbf{H}_k$ :

$$\mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1 = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}. \quad (9.94)$$

Учитывая, что

$$M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k,$$

перепишем уравнение (9.94) в виде

$$\mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1 = [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) - \mathbf{R}_k] [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{R}_k [M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)]^{-1}. \quad (9.95)$$

Подставляя вместо  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  значение  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$ , максимизирующее плотности вероятности компонент вектора  $\mathbf{v}_k$  (см. разд. 9.3), окончательно получим уравнение (9.95) в виде

$$\mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1 = \mathbf{I} - \mathbf{R}_k (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)^{-1}. \quad (9.96)$$

Уравнение, по которому редуцированный адаптивный фильтр формирует оценку, имеет вид

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k^1 (z_k - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}).$$

Умножим это уравнение слева на матрицу  $\mathbf{H}_k$ :

$$\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1 (z_k - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}). \quad (9.97)$$

Уравнения (9.96) и (9.97) описывают алгоритм адаптивного редуцированного фильтра 2-й модификации, предлагаемого в этом разделе.

Уравнение (9.97) показывает, что этот фильтр оценивает лишь непосредственно измеряемые компоненты вектора  $\mathbf{x}_k$ , т. е. компоненты  $\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k$ .

Обратимся к более детальному рассмотрению уравнения (9.96). Фигурирующая в этом уравнении матрица  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$  является особой. Однако пренебрегая недиагональными членами, получаем возможность обращения матрицы. Данное упрощение эквивалентно пренебрежению корреляцией между компонентами  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ .

Применение фильтра с диагональной матрицей  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$  для повышения точности ИНС оправдано, так как корреляция обновляемых последовательностей в каналах  $x$  и  $y$  незначительна (см. разд. 10.4).

Считая, что матрица  $\mathbf{R}_k$  диагональная, получим, что матрица  $\mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1$  также диагональная. Обозначая диагональные элементы матрицы  $\mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1$  через  $h_{k1}, h_{k2}, \dots, h_{km}$ , запишем уравнение (9.96) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}
 h_{k1} &= 1 - \frac{r_1}{v_1^2}, \\
 h_{k2} &= 1 - \frac{r_2}{v_2^2}; \\
 &\dots \dots \dots \\
 h_{km} &= 1 - \frac{r_m}{v_m^2}
 \end{aligned} \tag{9.98}$$

Здесь  $r_1, r_2, \dots, r_m$  — диагональные элементы матрицы  $\mathbf{R}_k$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_m$  — компоненты вектора  $\mathbf{v}_k$ .

Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1$  отрицательными быть не могут, поскольку это нарушит положительную определенность матрицы  $\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1}$  [см. 9.80)]. Поэтому для случая  $r_1 > v_1^2, \dots, r_m > v_m^2$  считаем, что  $h_{k1}=0, h_{k2}=0, \dots, h_{km}=0$ .

Этому можно дать следующую физическую интерпретацию. Когда элементы ковариационной матрицы измерительного шума превышают  $v_k^2$ , измерения не учитываются при формировании оценки  $x_k$  ( $h_{k1}=0, h_{k2}=0, \dots, h_{km}=0$ ). Это соответствует тому, что оценка более точна на основе априорных вычислений, т. е. коррекция от измерителя нецелесообразна.

Имея это в виду, получаем следующие окончательные выражения элементов матрицы  $\mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1$ :

$$\begin{aligned}
 h_{k1} &= \begin{cases} 1 - \frac{r_1}{v_1^2} & \text{при } v_1^2 > r_1 \\ 0 & \text{при } v_1^2 \leq r_1 \end{cases}; \\
 h_{k2} &= \begin{cases} 1 - \frac{r_2}{v_2^2} & \text{при } v_2^2 > r_2 \\ 0 & \text{при } v_2^2 \leq r_2 \end{cases}; \\
 &\dots \dots \dots \\
 h_{km} &= \begin{cases} 1 - \frac{r_m}{v_m^2} & \text{при } v_m^2 > r_m \\ 0 & \text{при } v_m^2 \leq r_m \end{cases}.
 \end{aligned} \tag{9.99}$$

Перепишем уравнение (9.97) в виде

$$\mathbf{H}_k \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_k^2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_k \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^2 \end{bmatrix} + \mathbf{H}_k \mathbf{K}_k^1 \left( \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^2 \end{bmatrix} \right), \tag{9.100}$$

$$\text{где } \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^2 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^2 \end{bmatrix} = \Phi_{k, k-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^2 \end{bmatrix},$$

$\hat{\mathbf{x}}_k^1$  — измеряемые компоненты вектора состояния;  $\hat{\mathbf{x}}_k^2$  — неизмеряемые компоненты вектора состояния.

Как было указано ранее, алгоритм предлагается для случая, когда строки матрицы  $\mathbf{H}_k$  имеют только один ненулевой элемент:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & h_m & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}^n_m. \quad (9.101)$$

Сформируем из  $(m \times n)$  матрицы  $\mathbf{H}_k$  матрицу  $\mathbf{H}'_k$  размером  $(m \times m)$ , соответствующую измеряемым компонентам  $\mathbf{x}_k^1$  вектора состояния:

$$\mathbf{H}'_k = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & h_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & h_m \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что матрица  $\mathbf{H}_k$  имеет вид (9.101), получим

$$\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H}'_k \hat{\mathbf{x}}_k^1.$$

Отсюда находим

$$\hat{\mathbf{x}}_k^1 = (\mathbf{H}'_k)^{-1} \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k.$$

Оценка полного вектора состояния

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k^1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{H}'_k)^{-1} \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^2 \end{bmatrix}. \quad (9.102)$$

Обратимся к уравнению оценки (9.100):

$$\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{H}_k \mathbf{K}_k (z_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}).$$

Входящий в это уравнение вектор  $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$  при учете выражения (9.102) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} &= \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^2 \end{bmatrix} = \Phi_{k, k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \dots & \dots \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{H}'_{k-1})^{-1} \mathbf{H}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-2}^2 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \left[ \frac{\Phi_{11} (\mathbf{H}'_{k-1})^{-1} \mathbf{H}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \Phi_{12} \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-2}^2}{\Phi_{21} (\mathbf{H}'_{k-1})^{-1} \mathbf{H}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^1 + \Phi_{22} \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-2}^2} \right]. \quad (9.103)$$

Выражение (9.102) показывает, что оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k^2$ , даваемая фильтром для неизмеряемых компонент вектора состояния, базируется только на априорной оценке и текущими измерениями не корректируется, т. е.

$$\hat{\mathbf{x}}_k^2 = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^2. \quad (9.104)$$

Таким образом, предлагаемый фильтр описывается уравнениями (9.99), (9.100), (9.103).

К достоинствам предложенного алгоритма относится большая простота реализации и малая чувствительность к отклонениям в задании априорных данных. Недостаток заключается в том, что оцениванию доступны только отдельно измеряемые компоненты вектора состояния и что оценка менее точна по сравнению с оценкой, доставляемой фильтром 1-й модификации. Это объясняется наличием у фильтра 2-й модификации зоны нечувствительности, характеризуемой неравенствами

$$v_1^2 \leq r_1, \quad v_2^2 \leq r_2, \dots, \quad v_m^2 \leq r_m.$$

В предлагаемых фильтрах 1-й и 2-й модификаций в качестве оценки дисперсии  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  используется единичная выборка обновляемого процесса, т. е.

$$M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T. \quad (9.105)$$

Однако такая оценка статистически мало обоснована. Поэтому для повышения точности оценивания в фильтрах 1-й и 2-й модификаций следует изменить выражение для оценки дисперсии обновляемого процесса (9.105).

С этой целью определяем значение  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$ , максимизирующее плотность вероятности не одного значения  $\mathbf{v}_k$ , а выборки  $\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_{k+l}$ . Другими словами, необходимо максимизировать функционал

$$\max_{\mathbf{v}_k} M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \{p(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_{k+l})\}. \quad (9.106)$$

При этом считаем, что  $M(\mathbf{v}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^T) = \dots = M(\mathbf{v}_{k+l} \mathbf{v}_{k+l}^T) = M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)$ . Поскольку  $\mathbf{v}$  — белый шум, выражение (9.106) можно записать в виде

$$p(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_{k+l}) = \prod_{i=1}^l p(\mathbf{v}_{k+i}).$$

Учитывая, что  $\mathbf{v}$  — гауссов процесс, имеем

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{v}_{k+i}) &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \{\det [M(\mathbf{v}_{k+i} \mathbf{v}_{k+i}^T)]\}^{-\frac{1}{2}} \times \\
&\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}_{k+i}^T [M(\mathbf{v}_{k+i} \mathbf{v}_{k+i}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+i} \right\} \\
\text{и } \prod_{i=1}^l p(\mathbf{v}_{k+i}) &= (2\pi)^{-\frac{lm}{2}} \{\det [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]\}^{-\frac{l}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}_{k+1}^T \times \right. \\
&\times [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+1} - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{k+2}^T [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+2} - \dots \\
&\left. \dots - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{k+l}^T [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+l} \right\}. \quad (9.107)
\end{aligned}$$

Продифференцируем выражение (9.107) [используя соотношения (9.34), (9.35)] по  $M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)$  и приравняем результат нулю:

$$\begin{aligned}
\frac{d \prod_{i=1}^l p(\mathbf{v}_{k+i})}{dM(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)} &= -\frac{l}{2} (2\pi)^{-\frac{lm}{2}} \{\det [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]\}^{-\frac{l}{2}-1} \times \\
&\times \{\det M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T) [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}_{k+1}^T [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+1} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{k+l}^T [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+l} \right\} + \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{lm}{2}} \{\det M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)\}^{-\frac{l}{2}} \times \\
&\times \{ [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^T [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} + \dots + [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+l} \mathbf{v}_{k+l}^T \} \times \\
&\times [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}_{k+1}^T [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+1} - \dots \right. \\
&\left. \dots - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{k+l}^T [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1} \mathbf{v}_{k+l} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$l [M(\widehat{\mathbf{v} \mathbf{v}^T})]^{-1} = [M(\widehat{\mathbf{v} \mathbf{v}^T})]^{-1} (\mathbf{v}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^T + \dots + \mathbf{v}_{k+l} \mathbf{v}_{k+l}^T) [M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)]^{-1}$$

или

$$M(\widehat{\mathbf{v} \mathbf{v}^T}) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \mathbf{v}_{k+i} \mathbf{v}_{k+i}^T. \quad (9.108)$$

Уравнение (9.108) можно представить в рекурсивном виде:

$$\mathbf{C}_i = \frac{1}{i} [(i-1) \mathbf{C}_{i-1} + \mathbf{v}_{k+i} \mathbf{v}_{k+i}^T], \quad i=1, 2, \dots \quad (9.109)$$

где  $\mathbf{C} = M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)$ .

Выражение (9.109) для оценки  $M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)$  подставляется соответственно в уравнение фильтра 1 и 2-й модификаций. В результате



оценка дисперсии обновляемого процесса базируется не на одном значении  $\mathbf{v}_{k+1}$ , а на выборе  $\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_{k+l}$ .

## 9.7. СВОЙСТВА ФИЛЬТРОВ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ОБНОВЛЯЕМОМУ ПРОЦЕССУ

В разд. 9.3, 9.4, 9.6 были рассмотрены новые алгоритмы адаптивных фильтров 1, 2 и  $k$ -й модификаций. Эти фильтры, а также алгоритм Язвинского можно отнести к классу адаптивных фильтров с обратной связью по обновляемому процессу. Действительно, в алгоритмы этих фильтров вместо дисперсии обновляемого процесса  $M(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T)$  непосредственно входит квадрат этого процесса  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$ . Однако указанная замена приводит к потере адаптивным фильтром оптимальности, поскольку введение в статистическое уравнение Рикатти «детерминированного» сигнала  $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k$  обуславливает ошибки в вычислении оптимальной матрицы усиления фильтра  $\mathbf{K}$ , порожденные различием в значениях матриц  $M(\mathbf{v} \mathbf{v}^T)$  и  $\mathbf{v} \mathbf{v}^T$ . Вместе с тем такая «детерминированная» связь придает фильтру ряд ценных свойств. К ним относится малая чувствительность адаптивного алгоритма к неточностям в априорном описании объекта и действующих на него входных шумов.

Фильтры с обратной связью по обновляемому процессу дают нерасходящуюся оценку вектора состояния и в случае малых вариаций параметров объекта, и в случае неизвестного нестационарного входного детерминированного воздействия, и при отсутствии какой-либо информации о статистике входного, а в случае  $k$ -модификации и измерительного шума. Таким образом, предложенные здесь алгоритмы работоспособны при больших неопределенностях в априорной информации.

Пусть априорная информация об объекте значительно отличается от действительного описания объекта. Тогда ошибка оценивания по каждому из каналов возрастает, что приводит к увеличению нормы матрицы усиления фильтра  $\mathbf{K}$  (9.99). Это увеличивает влияние текущих измерений на текущую оценку. Вследствие большой неточности в априорной информации следует больше «доверять» измерениям, чем априорной оценке.

Пусть теперь отсутствует какая-либо априорная информация об объекте. Известно лишь, что объект описывается линейными уравнениями, на его вход поступают шумы с гауссовым законом распределения и что  $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ .

В алгоритме фильтра используем произвольную математическую модель объекта. В этом случае ошибки оценивания фильтра столь велики, что приводят матрицу усиления фильтра  $\mathbf{K}$  к единичной матрице  $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{I}$  (см. разд. 9.3, 9.6). Это равнозначно тому, что оценка фильтра базируется только на информации от измерителя, т. е.

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{z}_k. \quad (9.110)$$

Другим возможным алгоритмом, позволяющим получить по измерениям  $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k$  оценку вектора состояния  $\mathbf{x}_k$  в отсутствии какой-либо априорной информации об объекте, является алгоритм максимума правдоподобия. В этом алгоритме оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k$  ищется по максимуму плотности вероятности вектора  $\mathbf{z}$  при условии появления вектора  $\mathbf{x}_k$ , т. е.

$$\max p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) \Big|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}}.$$

При гауссовых процессах  $\mathbf{z}_k$  и  $\mathbf{x}_k$  имеем

$$p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} (\det \mathbf{R}_k)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k) \right].$$

Оценка по максимальному правдоподобию определяется как корень уравнения

$$\left. \frac{dp(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k)}{d\mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}} = 0.$$

Из этого уравнения оценку находим в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{z}_k$$

или при  $\mathbf{H} = \mathbf{I}$  в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{z}_k. \quad (9.111)$$

Таким образом, оценка по максимальному правдоподобию (9.111) полностью совпадает в случае  $\mathbf{H} = \mathbf{I}$  с оценкой, вырабатываемой фильтром с обратной связью по обновляемому процессу (9.110). Отсюда следует, что адаптивный фильтр с обратной связью в случае отсутствия априорной информации об объекте автоматически выбирает единственно правильное решение, т. е.  $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{z}_k$ .

Когда некоторая априорная информация об объекте используется, матрица усиления  $\mathbf{K}$  близка, но все же отлична от единичной матрицы. Следовательно, адаптивный фильтр с обратной связью использует всякую правильную априорную информацию об объекте.

Покажем на простом примере преимущества фильтра с обратной связью (фильтр 1-й модификации) по сравнению с адаптивным фильтром, рассмотренным в разд. 9.1.

Пусть уравнение объекта

$$x_k = 0,5 x_{k-1} + w_{k-1},$$

где

$$x(0) = 0, \quad M(w_{k-1}^2) = Q = 4,$$

а уравнение измерителя

$$z_k = x_k + v_k,$$

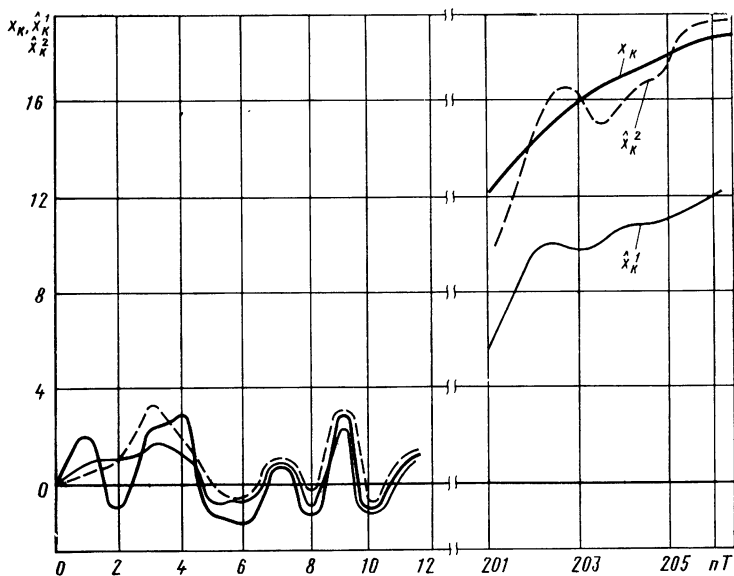


Рис. 9.1. Графики изменения истинного вектора состояния ( $x_k$ ) и его оценок, производимых фильтром Мехра ( $\hat{x}_k^1$ ) и фильтром 1-й модификации ( $\hat{x}_k^2$ )

где

$$M(v_k^2) = 4.$$

Считаем, что по истечении 200 тактов с начала вычислений на входе объекта появляется смещение  $n=10$ , т. е. постоянное внешнее воздействие. Требуется оценить состояние объекта в условиях, когда ковариационная функция  $Q$  и величина упомянутого смещения заранее не известны. Для решения задачи использовались алгоритм адаптивного фильтра Мехра (при использовании этого алгоритма оценка ковариационной матрицы  $Q$  велась параллельно процессу оценивания вектора состояния) и адаптивный фильтр с обратной связью по обновляемому процессу 1-й модификации. На рис. 9.1 представлены графики изменения переходных процессов. На рисунке  $x_k$  — истинный вектор состояния;  $\hat{x}_k$  — оценка, даваемая адаптивным фильтром, рассмотренным в разд. 9.1;  $\hat{x}_k^2$  — оценка, даваемая адаптивным фильтром с обратной связью по обновляемому процессу 1-й модификации.

Сравнение этих переходных процессов показывает, что до 200-го такта (до появления входного смещения  $n=10$ ) оценки  $\hat{x}_k^1$  и  $\hat{x}_k^2$  состояния системы  $x_k$  имеют приблизительно одинаковую точность. Появление входного смещения  $n=10$  начиная с 200-го такта приводит к тому, что оценка  $\hat{x}_k^1$  фактически расходится, в то время как адаптивный фильтр с обратной связью «отрабатывает» неизвестное смещение и его оценка  $\hat{x}_k^2$  является нерасходящейся.

Расходимость оценки  $\hat{x}_k^1$  объясняется следующими причинами.

При достаточно большом значении  $k$  фильтр, рассмотренный в разд. 9.1, в значительной степени теряет свойство адаптивности, т. е. практически не реагирует на изменения в объекте по сравнению с известными априорными данными. Потеря адаптивности при большом  $k$  объясняется тем, что позднейшие изменения объекта, например, появление на  $k=200$ -м такте постоянного смещения  $\eta = 10$ , хотя и увеличивает ошибку оценивания на последующих тактах вычислений, практически не сказывается на  $K$ , так как это увеличение входит в оценку  $Q$  с малым весом  $\frac{1}{200+i}$ , где  $i=1, 2 \dots$

(9.3). Вместе с тем, использование фильтра с обратной связью по обновляемому процессу позволяет за счет обратной связи по  $v_k^2$  адаптироваться к нестационарным неопределенностям в математическом описании объекта.

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует адаптивные свойства фильтров с обратной связью по обновляемому процессу. Понижение точности оценивания фильтром с обратной связью по сравнению со случаем оптимального фильтра Калмана существенно зависит от соотношений уровней входных и измерительных шумов. Это главным образом относится к алгоритму Язвинского.

Когда уровень измерительного шума значительно больше уровня входного шума, точность оценки с помощью фильтра Язвинского по сравнению со случаем оптимального фильтра резко падает, что объясняется следующими обстоятельствами.

При малом уровне входного шума по сравнению с измерительным шумом выделить из обновляемого процесса достаточно точно составляющую, соответствующую входному шуму, довольно трудно.

Эти трудности не возникают в случае использования предложенных в этой главе алгоритмов 1, 2 и  $k$ -й модификаций. Эти алгоритмы строятся таким образом, что процедура вычисления оптимального коэффициента усиления не предусматривает оценку матрицы  $Q$ , а предполагает использование всей информации, имеющейся в обновляемом процессе  $v_k$ . Следовательно, данная процедура исключает необходимость выделения из обновляемой последовательности величины, характеризующей уровень входного шума, так что упомянутые выше трудности не возникают.

В заключение необходимо отметить, что с целью повышения точности оценивания в предлагаемых алгоритмах с обратной связью по обновляемому процессу целесообразно использовать осреднен-

ное значение обновляемого процесса  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i v_i^T$ . При этом количество тактов осреднения  $N$  может быть небольшим ( $N=10 \dots 20$  тактов). Требуемое число тактов осреднения зависит главным образом от протяженности интервалов времени, на которых можно считать систему мало отличающейся от стационарной.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФИЛЬТРАЦИИ В СИСТЕМАХ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

Как известно, фильтр Калмана дает оптимальную оценку вектора состояния объекта по текущим измерениям в присутствии измерительного шума. При использовании метода оптимальной линейной фильтрации в ИНС в качестве уравнений объекта обычно рассматриваются уравнения ошибок ИНС. Фильтр Калмана дает оптимальную оценку ошибок ИНС, подавляя измерительный шум.

Выходом ИНС является информация о положении, скорости и угловой ориентации объекта с соответствующими ошибками. Используемый для коррекции ИНС внешний источник измерений выдает информацию о параметрах движения объекта с присущими этому источнику ошибками.

Разность выходов ИНС и внешнего источника измерений представляет собой разность ошибок ИНС и внешнего источника измерений. Эта разность играет роль измерений для фильтра Калмана, причем ошибки ИНС являются компонентами вектора состояния, а ошибки внешнего источника измерений — измерительным шумом.

По измерениям части вектора состояния фильтр Калмана принципиально позволяет получить оптимальную оценку полного вектора состояния, т. е. оценку всех ошибок ИНС. Однако это возможно лишь при наблюдаемости объекта по всем компонентам его вектора состояния. Практически оцениванию доступны только наблюдаемые компоненты вектора состояния.

### 10.1. ВОЗМОЖНЫЕ СХЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА В ИНЕРЦИАЛЬНУЮ НАВИГАЦИОННУЮ СИСТЕМУ

Считаем, что имеется внешний по отношению к ИНС измеритель параметров движения объекта. Используя, как было указано ранее, сигнал измерений в фильтре Калмана, получим на выходе фильтра оценки наблюдаемых ошибок ИНС.

Пусть эти оценки подаются на выход ИНС и компенсируют ошибки инерциальной системы. Тогда роль ошибок ИНС будут играть лишь ошибки оценивания. Эти ошибки значительно меньше, чем исходные погрешности ИНС. Таким образом, уровень ошибок на выходе ИНС будет существенно понижен.

Рассмотренная схема использования фильтра в ИНС обычно называется разомкнутой.

Существенный недостаток разомкнутой схемы включения фильтра заключается в том, что в данной схеме фильтр не оказывает никакого влияния на динамику ИНС, а только «сбрасывает» ее ошибки на выходе.

Применение оптимального фильтра по разомкнутой схеме целесообразно лишь при относительно коротких интервалах работы системы.

Другая схема применения в ИНС фильтра Калмана, называемая замкнутой, предполагает изменение структуры исходной ИНС.

В этом случае оценки наблюдаемых координат с выхода фильтра поступают не на выход ИНС, а используются для образования дополнительных связей в самой схеме ИНС. Эти корректирующие сигналы могут подаваться на вход первого интегратора, на моментные датчики гиросплатформы и т. д.

Например, при использовании ДИСС корректирующими сигналами являются оценки ошибок ИНС по скорости, вырабатываемые фильтром Калмана. С целью обеспечения демпфирования эти оценки подаются на первый интегратор, а с целью сокращения периода свободных колебаний — на моментные датчики гиросплатформы (см. разд. 7.4).

Если имеются точные оценки ошибок ИНС по положению (астроизмерения, радиолокационные засечки), их целесообразно подавать в качестве корректирующих сигналов на моментные датчики гиросплатформы. Это позволяет ограничить рост ошибок ИНС по положению.

Рассмотрим более подробно ИНС с оптимальным фильтром, включенным по замкнутой схеме. Пусть уравнения ошибок автономной ИНС, представленные в переменных состояния, имеют вид

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k, k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k, k-1} \mathbf{w}_{k-1}; \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k.$$

При использовании замкнутой схемы включения фильтра на ИНС подается корректирующий сигнал  $\mathbf{G}_{k, k-1} \mathbf{x}_{k-1}$ , являющийся выходом оптимального фильтра Калмана.

В этом случае уравнения ИНС

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k, k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k, k-1} \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{G}_{k, k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}; \quad (10.1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k. \quad (10.2)$$

Рассматривая уравнения (10.1) и (10.2) как уравнения объекта наблюдения, получаем уравнения соответствующего фильтра Калмана в виде

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k, k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_{k, k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \Phi_{k, k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{H}_k \mathbf{G}_{k, k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}). \quad (10.3)$$

Здесь корректирующий сигнал  $\mathbf{G}_{k, k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  играет роль известной управляющей функции и поэтому вводится в структуру вычисления оценки как детерминированный сигнал (см. разд. 8.4).

Необходимо отметить, что применять методы фильтрации Калмана к корректируемым системам ИНС при включении фильтра по разомкнутому варианту нецелесообразно. Дело в том, что уровень входных шумов корректируемой от ДИСС ИНС значительно больше уровня этих шумов в автономной ИНС.

Поэтому ошибка оценивания фильтра в случае использования его в корректируемой ИНС выше, чем при применении этого фильтра в автономной навигационной системе (см. разд. 9.4).

Корректировать ИНС целесообразно уже после получения фильтром Калмана оценок ошибок ИНС, как это предлагается в рассмотренной выше замкнутой схеме включения фильтра (10.3).

## 10.2. ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВНЕШНИХ ИЗМЕРЕНИЙ

При повышении точности ИНС методом линейной фильтрации применяются в отношении объекта, описываемого уравнениями ошибок ИНС. При этом вектор измерений формируется как разность между показаниями ИНС и показаниями внешнего датчика измерений (ДИСС, астрокорректор и т. д.).

Однако для режима движения несущего ИНС объекта с постоянной скоростью можно, как это предлагается далее, повысить точность ИНС использованием линейного оптимального фильтра, не привлекая при этом какую-либо информацию от внешних источников измерений.

В этом случае в качестве измерений можно использовать информацию, поступающую от горизонтальных акселерометров. Поясним более подробно такой выбор измерений.

Пусть система гидроплатформы  $Oxyz$  перекошена относительно правильной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  на малый угол. Тогда положение системы  $Oxyz$  в системе  $O\xi\eta\zeta$  можно задать углами Эйлера  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , величина которых мала. Матрица перехода от системы  $O\xi\eta\zeta$  (см. гл. 5) к системе  $Oxyz$

$$D_n^p = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_3 & -\Phi_2 \\ -\Phi_3 & 1 & \Phi_1 \\ \Phi_2 & -\Phi_1 & 1 \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} 0 & \Phi_3 & \Phi_2 \\ -\Phi_3 & 0 & \Phi_1 \\ \Phi_2 & -\Phi_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, вектор ускорений, который мог бы быть измерен акселерометрами в правильной системе координат  $\dot{\mathbf{f}}^p$ , связан с вектором  $\dot{\mathbf{f}}$ , доступным измерению реальными акселерометрами гидроплатформы, уравнением

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{f}}^p + \begin{bmatrix} f_2^p \Phi_3 - f_3^p \Phi_2 \\ -f_1^p \Phi_3 + f_3^p \Phi_1 \\ f_1^p \Phi_2 - f_2^p \Phi_1 \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

Предполагая, что объект движется с постоянной скоростью  $\mathbf{V} = \text{const}$ , а кориолесовы ускорения полностью скомпенсированы, получим

$$f_1^p = f_2^p = 0.$$

$$\text{Тогда } f_1 = -f_3^p \Phi_2; \quad f_2 = f_3^p \Phi_1; \quad f_3 = f_3^p, \quad (10.5)$$

или при учете  $f_3^p \cong g$

$$f_1 = -g\Phi_2; \quad f_2 = g\Phi_1; \quad f_3 = g. \quad (10.6)$$

Уравнение (10.6) справедливо лишь для режима движения объекта с постоянной скоростью. Однако на практике абсолютно точно выдержать этот режим невозможно. При реальном движении объекта будут иметь место флуктуации ускорения, также воспринимаемые акселерометрами. Следовательно,

$$f_1 = -g\Phi_2 + \delta a_1; f_2 = g\Phi_1 + \delta a_2, \quad (10.7)$$

где  $\delta a_1, \delta a_2$  — случайные вариации ускорения объекта, а также погрешности акселерометров.

Предлагаемый здесь подход заключается в том, что в режиме движения объекта с постоянной скоростью поступающие от реальных акселерометров сигналы используются в качестве измерений для оптимального фильтра Калмана, т. е.

$$z_1 = f_1 = -g\Phi_2 + \delta a_1; z_2 = f_2 = g\Phi_1 + \delta a_2. \quad (10.8)$$

Уравнения ошибок автономной ИНС, записанные через углы  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , были выведены в разд. 7.2 [см. (7.42) — (7.49)]. Вводя обозначения

$$x_1 = \delta x, x_2 = \delta y, x_3 = B_1, x_4 = B_2, x_5 = \Phi_1, x_6 = \Phi_2, x_7 = \Phi_3, x_8 = \varepsilon_1, \\ x_9 = \varepsilon_2, x_{10} = \varepsilon_3,$$

запишем систему уравнений (10.8) в матричной форме

$$z_k = Hx_k + V_k. \quad (10.9)$$

Здесь  $z_k^T = [f_1, f_2]$ ;  $V_k^T = [\delta a_1, \delta a_2]$ ;

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, на основе уравнений ошибок автономной ИНС и вектора измерений можно построить оптимальный фильтр Калмана. Однако для реализации оптимального алгоритма необходима точная информация о статистике измерительных шумов. В данном случае на получение такой информации трудно рассчитывать.

Действительно, статистическая информация о случайных вариациях ускорений  $\delta a_1, \delta a_2$  отсутствует. Поэтому целесообразно использовать адаптивный фильтр Калмана, который оценивает дисперсию измерительного шума  $R$ . Эта оценка может быть получена, например, следующим образом (см. разд. 9.1—9.4):

$$R_k = M(vv^T)_k - H_k P_{k/k-1} H_k^T,$$

где  $M(vv^T)_k = \frac{1}{k} [(k-1)M(vv^T)_{k-1} + vv_k^T]$ .

Прежде чем применить указанный алгоритм фильтрации, необходимо определить, какие компоненты вектора состояния объекта (7.42), (7.40) являются наблюдаемыми по измерениям (10.9).



Уравнения ошибок автономной ИНС (7.42), (7.40), выраженные через углы  $\Phi$ , имеют вид

$$\begin{aligned}\delta\ddot{x} &= -g\Phi_2 + f_2\Phi_3 + B_1; \\ \delta\ddot{y} &= g\Phi_1 - f_1\Phi_3 + B_2; \\ \dot{\Phi}_1 &= -\frac{\delta\dot{y}}{R} + \varepsilon_1; \quad \dot{\Phi}_2 = \frac{\delta\dot{x}}{R} + \varepsilon_2; \quad \dot{\Phi}_3 = \varepsilon_3; \\ \dot{\varepsilon}_1 &= -\beta_1\varepsilon_1 + A_1\sqrt{2\beta_1}w_1; \quad \dot{\varepsilon}_2 = -\beta_2\varepsilon_2 + A_2\sqrt{2\beta_2}w_2; \\ \dot{\varepsilon}_3 &= -\beta_3\varepsilon_3 + A_3\sqrt{2\beta_3}w_3.\end{aligned}\quad (10.10)$$

В уравнениях (10.10) горизонтальные каналы  $x$  и  $y$  являются развязанными, так что можно провести анализ наблюдаемости одного из каналов, например, канала  $x$ . В дальнейшем исследуется наблюдаемость переменных  $\delta\dot{x}$ ,  $\Phi_2$ ,  $\varepsilon_2$  по измерениям (10.9). При этом исследовании остальные переменные  $B_1$ ,  $\Phi_3$  отнесем к входным воздействиям. Система наблюдаема, если ранг матрицы наблюдаемости

$$Q_n = [H^T; A^T H^T; (A^T)^2 H^T; \dots; (A^T)^{n-1} H^T] \quad (10.11)$$

равен порядку  $n$  системы. Здесь  $A$ ,  $H$  — соответственно матрицы объекта и измерений.

Введем обозначения  $x_1 = \delta\dot{x}$ ,  $x_2 = \Phi_2$ ,  $x_3 = \varepsilon_2$ . Тогда система (10.10) — канал  $x$  — перепишется в виде

$$\dot{x}_1 = -gx_2 + B_1 + f_2\Phi_3; \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{R}x_1 + x_3; \quad \dot{x}_3 = -\beta_2x_3 + A_2\sqrt{2\beta_2}w_2. \quad (10.12)$$

Матрица системы (10.12)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta_2 \end{bmatrix}.$$

а матрица измерений (10.9)

$$H = [0 \quad -g \quad 0].$$

Сформируем согласно формуле (10.11) матрицу наблюдаемости:

$$Q_n = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{g}{R} & 0 \\ -g & 0 & \frac{g^2}{R} \\ 0 & -g & g\beta_2 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица  $Q_n$  имеет полный ранг. Следовательно, по измерениям  $z$  наблюдаемыми являются ошибка по скорости  $\delta \dot{x}$  и дрейф гироскопа  $\varepsilon_2$  по каналу  $y$ .

Таким образом, используя в качестве измерений сигналы от горизонтальных акселерометров, можно синтезировать фильтр, который будет оценивать ошибки ИНС по скорости и дрейфы гироскопов. Оценки этих ошибок можно использовать для создания обратных связей в ИНС с целью демпфирования и убыстрения переходных процессов (оценки ошибок ИНС по скорости подаются на вход первого интегратора и моментные датчики гироскопов), а также для уменьшения роста ошибок ИНС по положению (оценки дрейфов гироскопов с обратным знаком подаются на моментные датчики гироскопов).

### 10.3. ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Как уже отмечалось, при использовании метода оптимальной фильтрации в ИНС за уравнения объекта наблюдения принимаются уравнения ошибок ИНС. Уравнения ошибок автономной ИНС были выведены в разд. 5.2. Представим эти уравнения в переменных состояния. Для этого введем обозначения

$$x_1 = \delta \dot{x}, \quad x_2 = \delta x, \quad x_3 = \delta \dot{y}, \quad x_4 = \delta y,$$

$$x_5 = B_1, \quad x_6 = B_2, \quad x_7 = \psi_1, \quad x_8 = \psi_2,$$

$$x_9 = \psi_3, \quad x_{10} = \varepsilon_1, \quad x_{11} = \varepsilon_2, \quad x_{12} = \varepsilon_3.$$

Выражения для дрейфов гироскопов и смещений акселерометров имеют вид (см. гл. 6)

$$\dot{B}_1 = 0; \quad \dot{B}_2 = 0;$$

$$\dot{\varepsilon}_1 = -\beta_1 \varepsilon_1 + A_1 \sqrt{2\beta_1} w_1;$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\beta_2 \varepsilon_2 + A_2 \sqrt{2\beta_2} w_2; \quad (10.13)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = -\beta_3 \varepsilon_3 + A_3 \sqrt{2\beta_3} w_3;$$

С учетом введенных обозначений уравнения (5.29), (5.33) можно представить в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{w}. \quad (10.14)$$

Здесь  $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_{12}]$  — вектор состояния,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -v^2 & 0 & -a_1 & 1 & 0 & 0 & -f_3 & f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -v^2 & 0 & 1 & f_3 & 0 & -f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 \end{bmatrix}$$

— матрица объекта (в этой матрице  $a_1 = \rho_2 \Omega_1 + \rho_1 \omega_2 - \dot{\rho}_3$ ,  $a_2 = \rho_1 \Omega_2 + \rho_2 \omega_1 + \dot{\rho}_3$ );

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_1 \sqrt{2\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & A_2 \sqrt{2\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \sqrt{2\beta_3} \end{bmatrix} \text{— матрица входа;}$$

$\mathbf{w}^T = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]$  — вектор входного белого гауссова шума с ковариационной матрицей  $M[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] = \mathbf{Q}'\delta(\tau)$ .

Переходя от дифференциальных уравнений (10.14) к разностным, получим [11, 12]

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k, k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k, k-1} \mathbf{w}_{k-1}, \quad (10.15)$$

где

$$\Phi = \mathbf{I} + \mathbf{A}T; \quad \Gamma_{k, k-1} = \mathbf{L}T;$$

$$M(\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1}^T) = \frac{\mathbf{Q}'}{T} = \mathbf{Q}_{k-1};$$

$T$  — период дискретизации.

Будем считать, что роль внешнего по отношению к ИНС источника измерений играет ДИСС. Разность в показаниях скорости ИНС и ДИСС (см. разд. 7.3) определяется формулами

$$V_1 - V_{\text{д1}} = \delta \dot{x} - \rho_3 \delta y - \psi_3 V_2 - \delta V_{\text{д1}};$$

$$V_2 - V_{\text{д2}} = \delta \dot{y} - \rho_3 \delta x + \psi_3 V_1 - \delta V_{\text{д2}}.$$

Эти уравнения с учетом обозначений (10.12) можно записать в виде

$$z = Hx + V, \quad (10.16)$$

где 
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\rho_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -V_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$V^T = [\delta V_{д1} \delta V_{д2}]$  — белый гауссов шум с  $M(VV^T) = R' \delta(\tau)$ .

Дискретный аналог уравнения (10.16) имеет вид

$$z_k = H_k x_k + V_k,$$

где 
$$M(V_k V_k^T) = \frac{R'}{T} = R_k.$$

Рассмотрим включение фильтра в ИНС по замкнутой схеме.

В этом случае выходные сигналы фильтра  $\hat{\delta x}$ ,  $\hat{\delta y}$  подаются для целей демпфирования на первые интеграторы ИНС и моментные датчики гиросплатформы.

Заметим, что при демпфировании ИНС от ДИСС подаваемые на 1-й интегратор и моментные датчики гиросплатформы сигналы формировались согласно уравнениям (см. разд. 4)

$$V_1 - V_{д1} = \delta \dot{x} - \rho_3 \delta y - \psi_3 V_2 - \delta V_{д1}; \quad (10.17)$$

$$V_2 - V_{д2} = \delta \dot{y} - \rho_3 \delta x + \psi_3 V_1 \delta - \delta V_{д2}.$$

Подаваемые в ИНС от фильтра Калмана корректирующие сигналы могут быть записаны в уравнении объекта как  $G^0 \hat{X}^0$  (см. разд. 10.1). Здесь

$$(\hat{X}^0)^T = [\hat{\delta x} \hat{\delta y}] = [\hat{x}_1, \hat{x}_3];$$

$$G^0 = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -k_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{R} \\ \frac{k_2}{R} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

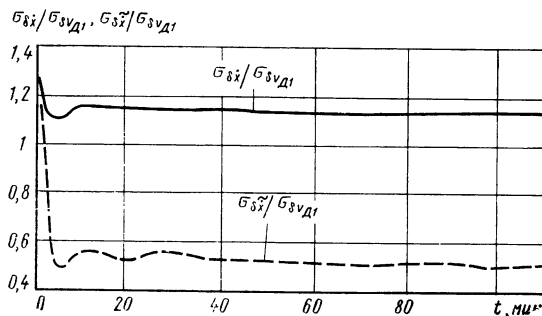


Рис. 10.1. Графики изменения отношения среднего квадратического значения ошибки ИНС по скорости к среднему квадратичному значению

ошибки ДИСС без фильтра  $\frac{\sigma_{\delta \dot{x}}}{\sigma_{\delta V_{\Delta 1}}}$  и с оптимальным фильтром  $\frac{\sigma_{\delta \dot{x}}}{\sigma_{\delta V_{\Delta 1}}}$

Таким образом, уравнение объекта в дискретной форме

$$\mathbf{x}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{G} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0,$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^0 T$ ,  $\mathbf{x}_{k-1}$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0$  — векторы размерности  $12 \times 1$  и  $2 \times 1$ .

Оптимальный фильтр, используемый в ИНС по замкнутой схеме, описывается в этом случае уравнениями

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k,k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k,k-1}^T;$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1};$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k/k-1}; \quad (10.18)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0 + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{H}_k \mathbf{G} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0).$$

Кроме коррекции ИНС от оптимального фильтра по замкнутой схеме, можно одновременно использовать оценки, даваемые фильтром, и для «сброса» ошибок ИНС на выходе, как это осуществляется при разомкнутой схеме включения. Такую схему использования фильтра в ИНС будем называть комбинированной.

На рис. 10.1 показаны кривые, представляющие собой отношения среднего квадратического значения ошибки ИНС по скорости к среднему квадратичному значению ошибки ДИСС.

Здесь представлены результаты как для ИНС без фильтра

$\frac{\sigma_{\delta \dot{x}}}{\sigma_{\delta V_{\Delta 1}}}$ , так и для случая включения в ИНС оптимального филь-

тра по комбинированной схеме (кривая  $\frac{\sigma_{\delta \dot{x}}}{\sigma_{\delta V_{\Delta 1}}}$ ). Кривые показывают,

что использование фильтра позволит снизить уровень ошибок по скорости в 2,7 раза.

#### 10.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АДАПТИВНЫХ РЕДУЦИРОВАННЫХ ФИЛЬТРОВ 1-Й И 2-Й МОДИФИКАЦИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Чтобы применять редуцированные алгоритмы фильтрации, необходимо разделить полный вектор состояния (все ошибки ИНС) на оцениваемый подвектор  $\mathbf{x}_k$  и неоцениваемый подвектор  $\mathbf{f}_k^1$ . Произведем это разделение:

$$x_1 = \delta \dot{x}, \quad x_2 = \delta x, \quad x_3 = \delta \dot{y}, \quad x_4 = \delta y, \quad f_1^1 = B_1, \quad f_2^1 = B_2, \quad f_3^1 = \psi_1, \quad f_4^1 = \psi_2, \\ f_5^1 = \psi_3, \quad f_6^1 = \varepsilon_1, \quad f_7^1 = \varepsilon_2, \quad f_8^1 = \varepsilon_3.$$

С учетом новых обозначений уравнение (10.14) запишем в виде (см. разд. 10.3)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}^1 \mathbf{f}^1, \quad \dot{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\varphi}(t) \mathbf{f}^1 + \mathbf{L}^2 \mathbf{w}. \quad (10.19)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -v^2 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -v^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -f_3 & f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f_3 & 0 & -f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{w}^T = [\omega_1 \omega_2 \omega_3];$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 - \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 \end{bmatrix}.$$

Переходя от дифференциальных уравнений (10.19) к разностным, получим

$$\mathbf{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k,k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{k,k-1}^1 \mathbf{f}_{k-1}^1; \quad (10.20)$$

$$\mathbf{f}_k^1 = \boldsymbol{\Psi}_{k,k-1} \mathbf{f}_{k-1}^1 + \boldsymbol{\Gamma}_{k,k-1}^2 \mathbf{w}_{k-1},$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}_{k,k-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T; \quad \boldsymbol{\Gamma}_{k,k-1}^1 = \mathbf{L}^1 T;$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{k,k-1}^2 = \mathbf{L}^2 T; \quad \boldsymbol{\Psi}_{k,k-1} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}T;$$

$T$  — период дискретизации.

Полагаем, как и в разд. 10.3, что в качестве внешнего источника измерений используется ДИСС, так что уравнения измерений остаются в прежнем виде [см. (10.16)]. В этих уравнениях можно пренебречь членами  $\rho_3 \delta x$ ,  $\rho_3 \delta y$  по сравнению с  $\delta V_{д1}$ ,  $\delta V_{д2}$ . Действительно, на интервале времени 4—5 ч члены  $\delta V_{д1}$ ,  $\delta V_{д2}$  более чем на порядок превышают  $\rho_3 \delta x$ ,  $\rho_3 \delta y$ . В разд. 8.1 было показано, что угол  $\psi_3$  с течением времени не растет. Отсюда следует возможность пренебрежения членами  $\psi_3 V_1$ ,  $\psi_3 V_2$  по сравнению с  $\delta V_{д1}$ ,  $\delta V_{д2}$ . Моделирование показало, что пренебрежение этими членами при различных исходных значениях погрешностей ИНС вызывает погрешность не более 3—4%. Таким образом, уравнения (10.16) в дискретной форме имеют вид

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k, \quad (10.21)$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем уравнения фильтра 1-й модификации при включении его в ИНС по замкнутой схеме.

Корректирующий ИНС сигнал в этом случае разбивается на два сигнала:  $\mathbf{G}_1^0 \hat{\mathbf{x}}^0$ ,  $\mathbf{G}_2^0 \hat{\mathbf{x}}^0$ .

Здесь

$$\mathbf{G}_1^0 = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -k_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{R} \\ \frac{k_2}{R} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

По введении этого сигнала в уравнения фильтра 1-й модификации

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_1 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0 + \Gamma_{k,k-1}^1 \hat{\mathbf{f}}_{k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k; \\ \hat{\mathbf{f}}_k &= \Psi_{k,k-1} \hat{\mathbf{f}}_{k-1} + \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0; \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H} \Phi_{k,k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{H} \mathbf{G}_1 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0 - \mathbf{H} \Gamma_{k,k-1}^1 \hat{\mathbf{f}}_{k-1};$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k]^{-1};$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k/k-1};$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = \mathbf{K}_k (\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) \mathbf{K}_k^T + \mathbf{P}_k.$$

Здесь

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_1^0 T; \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_2^0 T; \quad \hat{\mathbf{x}}_k^0 = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_3].$$

Если нет априорной информации даже о корреляционной матрице дрейфа гироскопов [т. е. неизвестно уравнение формирующего фильтра (10.13)], то следует использовать в уравнении (10.22) неполный вектор  $(f^1)^T = (f_1^1 f_2^1 f_3^1 f_4^1 f_5^1)$  и соответственно усеченные матрицы

$$\Psi'_{k+1,k} = I + \Phi' T; \quad G_2^1 = G_2^{01} T.$$

Эти матрицы имеют вид

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad G_2^{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{R} \\ \frac{k_2}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования ИНС при введении алгоритма 1-й модификации представлены на рис. 10.2. Здесь, как и в рассмотренном ранее алгоритме (разд. 10.3), оценки, даваемые фильтром 1-й модификации, использовались не только для формирования корректирующих сигналов  $G_1 \hat{x}_{k-1}^0$ ,  $G_2 \hat{x}_{i-1}^0$ , но и для «сброса» накопившихся ошибок на выходе ИНС.

На рис. 10.2 применены следующие обозначения:  $\frac{\delta \dot{x}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$  — отношение ошибки ИНС по скорости к среднему квадратичному значению ошибки ДИСС при отсутствии фильтра;  $\frac{\delta \tilde{x}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$  — такое же отношение при наличии в схеме ИНС фильтра 1-й модификации.

Как видно из рис. 10.2, среднее квадратичное значение величины  $\frac{\delta \dot{x}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$  в 2—3 раза больше среднего квадратичного значения величины  $\frac{\delta \tilde{x}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$ .

В разд. 9.3 был указан основной недостаток фильтра 1-й модификации. В случае слабой наблюдаемости какой-либо компоненты вектора состояния по текущим измерениям ошибка оценивания этой компоненты может быть значительной. Это объясняется отсутствием информации о матрице объекта  $\Phi$  в процедуре вычисления матрицы усиления фильтра  $K$ . Чтобы избежать этого, возможно вместо уравнения

$$P_{k+1/k} = K_k (v_k v_k^T) K_k^T + P_k$$

использовать в фильтре 1-й модификации уравнение

$$P_{k+1/k} = K_k (v_k v_k^T) K_k^T + \Phi_{k+1,k} P_k \Phi_{k+1,k}^T.$$



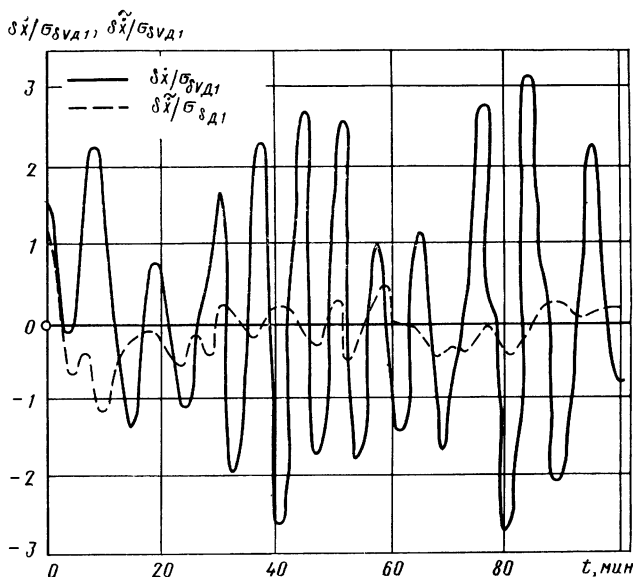


Рис. 10.2. Графики изменения отношения ошибки ИНС по скорости к среднему квадратичному значению ошибки ДИСС без фильтра  $\frac{\delta \tilde{x}}{\sigma_{\delta T_{д1}}}$  и с фильтром 1-й модификации  $\frac{\delta \tilde{x}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$

При этом последнее выражение записано с точностью до величины (см. разд. 9.3)  $\mathbf{P}_k - \Phi_{k,k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T$ .

Использование в ИНС фильтра 1-й модификации позволяет идентифицировать ошибки ИНС без априорной информации о статистических характеристиках дрейфов гироскопов и смещений акселерометров. При этом вычисления фактически проводятся для объекта 4-го порядка, хотя исходный объект (полные уравнения ошибок ИНС) описывается уравнениями 12-го порядка. Потеря в точности оценивания по сравнению со случаем применения оптимального фильтра не превышает 14 %.

Рассмотрим применение в ИНС адаптивного редуцированного фильтра 2-й модификации. При этом, как и раньше, полагаем, что внешняя информация поступает от ДИСС. Этот алгоритм, как было указано в разд. 9.6, предназначен для оценки измеряемых компонент вектора состояния. Такими компонентами в данном случае являются  $\delta \tilde{x}$ ,  $\delta \tilde{y}$ .

Для объекта (10.20), (10.21) алгоритм второй модификации имеет вид

$$h_{k1} = \begin{cases} 1 - \frac{r_1}{v_1^2} & v_1^2 > r_1 \\ 0 & v_1^2 \leq r_1 \end{cases};$$

$$h_{k2} = \begin{cases} 1 - \frac{r_2}{v_2^2} & v_2^2 > r_2 \\ 0 & v_2^2 \leq r_2 \end{cases}.$$
(10.24)

Здесь

$$M(\mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T) = \mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}.$$

С целью упрощения записи уравнений оценок при использовании фильтра 2-й модификации введем новые обозначения составляющих вектора состояния  $\mathbf{x}$ :

$$x_1 = \delta \dot{x}, \quad x_2 = \delta \dot{y}, \quad x_3 = \delta x, \quad x_4 = \delta y.$$

Обозначения для элементов вектора  $\mathbf{f}^1$  оставим прежними. Отсюда элементы матрицы  $\Psi_{k, k-1}$ ,  $\mathbf{G}_2$  останутся без изменений.

Тогда матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$  примут вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v^2 & -a_1 \\ 0 & 0 & -a_2 & -v^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сформируем матрицы  $\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

$$\Phi_{k, k-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T.$$

Уравнение для оценки вектора состояния имеет вид (см. разд. 9.6)

$$\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \begin{bmatrix} h_{k1} & 0 \\ 0 & h_{k2} \end{bmatrix} (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}). \quad (10.25)$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \Phi_{k, k-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{H}')^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^1 \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-2}^2 \end{bmatrix},$$

причем  $(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^1)^T = [x_1 x_2]; \quad (\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^2)^T = [x_3 x_4].$

Для случая включения фильтра по замкнутой схеме уравнение (10.25) принимает вид

$$\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{H} \mathbf{G}_1 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0 + \mathbf{H} \Gamma_{k, k-1}^1 \hat{\mathbf{f}}_{k-1}^1 + \begin{bmatrix} h_{k1} & 0 \\ 0 & h_{k2} \end{bmatrix} \mathbf{v}_k;$$

$$\hat{\mathbf{f}}_k^1 = \Psi_{k, k-1} \hat{\mathbf{f}}_{k-1}^1 + \mathbf{G}_2 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}; \quad (10.26)$$

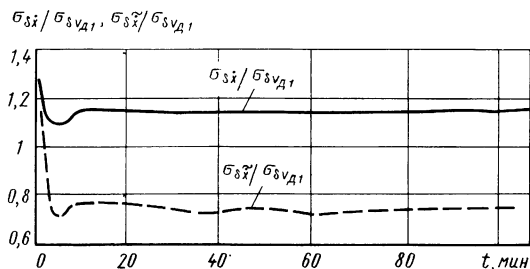


Рис. 10.3. Графики изменения отношения среднего квадратичного значения ошибки ИНС по скорости к среднему квадратичному значению

ошибки ДИСС без фильтра  $\frac{\sigma_{\delta x}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$  и с фильтром 2-й модификации  $\frac{\sigma_{\delta x}^{\sim}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} - \mathbf{H} \mathbf{G}_1 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0 - \mathbf{H} \mathbf{\Gamma}_{k,k-1}^1 \hat{\mathbf{t}}_{k-1}^1,$$

где

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \mathbf{\Phi}_{k,k-1} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1/2}^2 \end{array} \right]; \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0 = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^1 = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}.$$

С учетом новых обозначений для составляющих вектора  $\mathbf{x}$  матрицы  $\mathbf{G}_1, \mathbf{\Gamma}_{k,k-1}^1$  в уравнении (10.26) имеют вид

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T; \quad \mathbf{\Gamma}_{k,k-1}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -f_3 & f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f_3 & 0 & -f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T,$$

где  $T$  — период дискретизации.

Таким образом, фильтр 2-й модификации описывается уравнениями (10.24), (10.26). На рис. 10.3 представлены результаты моделирования ИНС с фильтром 2-й модификации, включенным по комбинированной схеме. Через  $\frac{\sigma_{\delta x}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$  обозначено отношение сред-

них квадратичных значений для ИНС без фильтра, а через  $\frac{\sigma_{\delta x}^{\sim}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$  —

с фильтром 2-й модификаций. Как видно из этого рисунка, применение фильтра 2-й модификации повышает точность ИНС в 1,8 раза.

Чтобы добиться более значительного повышения точности, необходимо коэффициент усиления фильтра 2-й модификации принять в следующем виде (см. разд. 9.6):

$$h_{k1} = \begin{cases} 1 - \frac{r_1}{M(v_1^2)_k} & M(v_1^2)_k > r_1 \\ 0 & M(v_1^2)_k \leq r_1 \end{cases}; \quad (10.27)$$

$$h_{k2} = \begin{cases} 1 - \frac{r_2}{M(v_2^2)_k} & M(v_2^2)_k > r_2 \\ 0 & M(v_2^2)_k \leq r_2 \end{cases}.$$

Здесь

$$M(v_1^2)_k = \frac{1}{k} [(k-1) M(v_1^2)_{k-1} + (v_1^2)_k];$$

$$M(v_2^2)_k = \frac{1}{k} [(k-1) M(v_2^2)_{k-1} + (v_2^2)_k],$$

где

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} - \mathbf{H} \mathbf{G}_1 \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^0 - \mathbf{H} \mathbf{g}_{k,k-1} \hat{\mathbf{f}}_{k-1}^1.$$

Использование осреднения при формировании коэффициента усиления согласно уравнениям (10.27) позволяет значительно снизить ошибку оценивания. Действительно, моделирование показало, что выигрыш в точности при оценке ошибок ИНС по скорости, который достигается включением в ИНС фильтра 2-й модификации с осреднением, составляет 2,6 раза (вместо 1,8 раза при фильтре 2-й модификации без осреднения).

#### 10.5. ПРИМЕНЕНИЕ АДАПТИВНОГО ФИЛЬТРА k-й МОДИФИКАЦИИ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Пренебрегая перекрестными связями в уравнениях ошибок по положению (см. разд. 7.1), получим уравнения объекта в виде

$$\begin{aligned} \delta \ddot{\mathbf{x}} + v_{\text{ш}}^2 \delta \mathbf{x} &= -g \psi_2 + f_2 \psi_3 + B_1; \\ \delta \ddot{\mathbf{y}} + v_{\text{ш}}^2 \delta \mathbf{y} &= g \psi_1 - f_1 \psi_3 + B_2, \\ v_{\text{ш}} &= \sqrt{\frac{g}{R}} - \text{частота Шулера.} \end{aligned}$$

Каналы  $x$  и  $y$  в данном случае развязаны. Поэтому адаптивный фильтр можно вводить независимо по каждому каналу. Все дальнейшие выкладки будут относиться к каналу  $x$ . Вводя обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta \dot{x}, \quad x_2 = \delta x, \quad f_1^1 = B_1, \quad f_2^1 = \psi_1, \\ f_3^1 &= \psi_2, \quad f_4^1 = \psi_3, \quad f_5^1 = \varepsilon_1, \quad f_6^1 = \varepsilon_2, \quad f_7^1 = \varepsilon_3, \end{aligned}$$

запишем уравнения объекта в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{L}_1 \mathbf{f}^1; \\ \dot{\mathbf{f}}^1 &= \mathbf{\Phi} \mathbf{f}^1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -v_m^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -g & f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A_1 \sqrt{2\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & A_2 \sqrt{2\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \sqrt{2\beta_3} \end{bmatrix}.$$

Переходя от дифференциальных уравнений (10.28) к разностным, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_{k,k-1}^1 \mathbf{f}_{k-1}^1; \\ \mathbf{f}_{k,k-1}^1 &= \Psi_{k,k-1} \mathbf{f}_{k-1}^1 + \Gamma_{k,k-1}^2 \mathbf{w}_{k-1}, \end{aligned} \quad (10.29)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbf{I} + \mathbf{A} T; \quad \Gamma_{k,k-1}^1 = \mathbf{L}_1 T; \\ \Psi_{k,k-1} &= \mathbf{I} + \Phi T; \quad \Gamma_{k,k-1}^2 = \mathbf{L}_2 T; \end{aligned}$$

$T$  — период дискретизации.

Уравнение измерений по каналу  $x$  имеет вид

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k + V_k,$$

где

$$V_k = \delta V_{\text{дл}}; \quad \mathbf{H} = [10].$$

Сформируем матрицу  $\mathbf{S}$  для реализации фильтра  $k$ -й модификации (см. разд. 9.4):

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \Phi \\ \mathbf{H} & \Phi^2 \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{H} & \Phi^{l-1} \end{bmatrix}.$$

В данном случае матрица  $\Phi$  имеет размерность  $(2 \times 2)$ , поэтому выбираем  $l=3$ . Тогда, учитывая

$$\Phi = I + A T = \begin{bmatrix} 1 & -v_{\text{ш}}^2 T \\ T & 1 \end{bmatrix},$$

получим

$$S = \begin{bmatrix} H & \Phi \\ H & \Phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -v_{\text{ш}}^2 T \\ 1 - v_{\text{ш}}^2 T^2 & -2v_{\text{ш}}^2 T \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2v_{\text{ш}}^2 T}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} & -\frac{v_{\text{ш}}^2 T}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} \\ \frac{1 - v_{\text{ш}}^2 T^2}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} & -\frac{1}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание, что (см. разд. 9.4)

$$(\widehat{P_i H^T}) = S^{-1} M_{v_i},$$

находим

$$\begin{aligned} (\widehat{P_i H^T}) &= \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2v_{\text{ш}}^2 T}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} & -\frac{v_{\text{ш}}^2 T}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} \\ \frac{1 - v_{\text{ш}}^2 T^2}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} & -\frac{1}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M(v_2 v_1)_i \\ M(v_3 v_1)_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2v_{\text{ш}}^2 T M(v_2 v_1)_i - v_{\text{ш}}^2 T M(v_3 v_1)_i}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} \\ \frac{(1 - v_{\text{ш}}^2 T^2) M(v_2 v_1)_i - M(v_3 v_1)_i}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица усиления фильтра

$$K_i = (\widehat{P_i H^T}) [H(\widehat{P_i H^T}) + R_i]^{-1} = (\widehat{P_i H^T}) [M(v_1^2)_i]^{-1}.$$

Согласно приведенным уравнениям

$$K_i = \begin{bmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \end{bmatrix},$$

где

$$k_i^1 = \frac{2v_{\text{ш}}^2 T M(v_2 v_1)_i - v_{\text{ш}}^2 T M(v_3 v_1)_i}{(v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3) M(v_1^2)_i}; \quad (10.30)$$

$$k_i^2 = \frac{(1 - v_{\text{ш}}^2 T^2) M(v_2 v_1)_i - M(v_3 v_1)_i}{(v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3) M(v_1^2)_i}. \quad (10.31)$$

В этих выражениях

$$M(v_2 v_1)_i = \frac{1}{i} (i-1) M(v_2 v_1)_{i-1} + (v_2 v_1)_i;$$

$$M(v_3 v_1)_i = \frac{1}{i} [(i-1) M(v_3 v_1)_{i-1} + (v_3 v_1)_i];$$

$$M(v_1^2)_i = \frac{1}{i} [(i-1) M(v_1^2)_{i-1} + (v_1^2)_i], \quad i=1, 2... \quad (10.32)$$

где

$$\begin{aligned} (\text{при } \hat{\mathbf{f}}_k^1=0) \\ (v_1)_i &= z_{3(i-1)+1} - \mathbf{H}\Phi\hat{\mathbf{x}}_{i-1}; \\ (v_2)_i &= z_{3(i-1)+2} - \mathbf{H}\Phi^2\hat{\mathbf{x}}_{i-1}; \\ (v_3)_i &= z_{3(i-1)+3} - \mathbf{H}\Phi^3\hat{\mathbf{x}}_{i-1}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Оценка, даваемая адаптивным фильтром  $k$ -й модификации (при  $\hat{\mathbf{f}}_k^1=0$ ), определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_i &= \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} + \mathbf{K}_i (z_{3(i-1)+3} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1}); \\ \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} &= \Phi^3 \hat{\mathbf{x}}_{i-1}, \quad i=1, 2... \end{aligned} \quad (10.34)$$

Необходимо отметить, что на начальном этапе фильтрации, когда статистический материал еще слишком мал, осреднение последовательностей  $v_1^2$ ,  $v_2 v_1$ ,  $v_3 v_1$  может приводить к нарушению условия неотрицательности величин (см. разд. 9.4), т. е. к нарушению условий

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{H}^T) &\geq 0; \\ \hat{\mathbf{R}} &= M(v_1^2) - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{H}^T) \geq 0, \end{aligned} \quad (10.35)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{2v_{\text{ш}}^2 T M(v_2 v_1)_i - v_{\text{ш}}^2 T M(v_3 v_1)_i}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} &\geq 0; \\ M(v_1^2)_i &\geq \frac{2v_{\text{ш}}^2 T M(v_2 v_1)_i - v_{\text{ш}}^2 T M(v_3 v_1)_i}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Если условия (10.35) и (10.36) не выполняются, то следует полагать

$$\begin{aligned} \frac{2v_{\text{ш}}^2 T M(v_2 v_1)_i - v_{\text{ш}}^2 T M(v_3 v_1)_i}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3} &= 0; \\ M(v_1^2)_i &= \frac{2v_{\text{ш}}^2 T M(v_2 v_1)_i - v_{\text{ш}}^2 T M(v_3 v_1)_i}{v_{\text{ш}}^2 T + v_{\text{ш}}^4 T^3}. \end{aligned}$$

Условия (10.35), (10.36) в данном случае эквивалентны требованию изменения  $k_i^1$  в пределах  $0 \leq k_i^1 \leq 1$ . В том случае, когда из уравнения (10.30) следует  $k_i^1 > 1$ , необходимо полагать  $k_i^1 = 1$ , если же  $k_i^1 < 0$ , то необходимо считать  $k_i^1 = 0$ .

Что касается величины  $k_i^2$ , то на начальном этапе осреднения вследствие скудости статистического материала и слабой наблюдаемости ошибки ИНС  $\delta x$  по измерениям  $\delta \dot{x}$  (определитель матрицы наблюдаемости в этом случае  $\det \mathbf{Q}_n = v_{\text{ш}}^2$ ) величина  $k_i^2$  может принимать большие значения (поскольку  $v_{\text{ш}}^2 T$  малая величина). Хотя из теоретических соображений ограничение на величину  $k_i^2$  не вытекает, во избежание большого перерегулирования в переходном процессе оценки  $\delta x$  целесообразно  $k_i^2$  ограничить.

Вычисления по алгоритму  $k$ -й модификации осуществляются в следующем порядке. Каждый  $i$ -й такт вычисления оценки вектора состояния состоит из трех подтактов проведения измерений. В каждом из подтактов вычисляются последовательности  $v_1, v_2, v_3$  по уравнениям (10.33). В конце каждого третьего подтакта вычисляются оценки взаимно-ковариационных матриц обновляемых последовательностей по уравнениям (10.32). Подстановкой этих оценок в уравнения (10.30), (10.31) вычисляется матрица  $\mathbf{K}_i$ . Каждый третий подтакт заканчивается вычислением оценки вектора состояния по уравнению (10.34).

Когда в распоряжении разработчика имеется информация о ковариационной матрице измерительного шума  $\mathbf{R}$ , уравнения фильтра  $k$ -й модификации трансформируются следующим образом (см. разд. 9.4).

Количество подтактов  $l$  в этом случае равно двум. Матрица  $\mathbf{S}$  имеет вид

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -v_{\text{ш}}^2 T \end{bmatrix},$$

так что

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{v_{\text{ш}}^2 T} & -\frac{1}{v_{\text{ш}}^2 T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad (\widehat{\mathbf{P}}_i \mathbf{H}^T = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{M}_{v,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{v_{\text{ш}}^2 T} & -\frac{1}{v_{\text{ш}}^2 T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(v_1^2)_i - R_i \\ M(v_2 v_1)_i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} M(v_1^2)_i - R_i \\ \frac{M(v_1^2)_i - R_i - M(v_2 v_1)_i}{v_{\text{ш}}^2 T} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Определим матрицу усиления фильтра

$$\mathbf{K}_k = (\widehat{\mathbf{P}}_i \mathbf{H}^T) [\mathbf{H} (\widehat{\mathbf{P}}_i \mathbf{H}^T) + \mathbf{R}]^{-1} = \begin{bmatrix} k_i^1 \\ k_i^2 \end{bmatrix},$$

$$\text{где} \quad k_i^1 = 1 - \frac{R}{M(v_1^2)_i}; \quad (10.37)$$



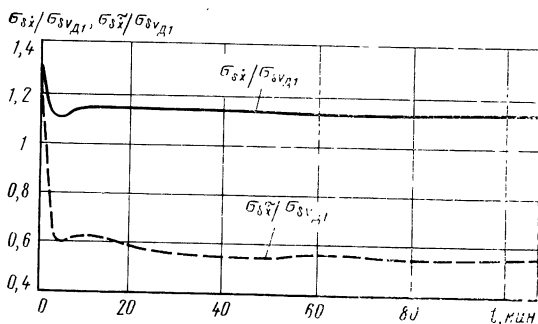


Рис. 10.4. Графики изменения отношения среднего квадратичного значения ошибки ИИС по скорости к среднему квадратичному значению

ошибки ДИСС без фильтра  $\frac{\sigma_{\delta \dot{x}}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$  и с фильтром  $k$ -й модификации  $\frac{\sigma_{\delta \ddot{x}}}{\sigma_{\delta V_{д1}}}$ .

$$k_i^2 = \frac{M(v_1^2)_i - R_i - M(v_2 v_1)_i}{v_{ш}^2 T M(v_1^2)_i}. \quad (10.38)$$

В этих выражениях

$$M(v_1^2)_i = \frac{1}{i} [(i-1) M(v_1^2)_{i-1} + (v_1^2)_i];$$

$$M(v_2 v_1)_i = \frac{1}{i} [(i-1) M(v_2 v_1)_{i-1} + (v_2 v_1)_i], \quad i = 1, 2, \dots \quad (10.39)$$

где

$$(\text{при } \hat{\mathbf{t}}_k^1 = 0)$$

$$(v_1)_i = z_{2(i-1)+1} - \mathbf{H} \Phi \hat{\mathbf{x}}_{i-1};$$

$$(v_2)_i = z_{2(i-1)+2} - \mathbf{H} \Phi^2 \hat{\mathbf{x}}_{i-1}. \quad (10.40)$$

Оценка, даваемая фильтром, определяется уравнением

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} + \mathbf{K}_i (z_{2(i-1)+2} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{i/i-1});$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{i/i-1} = \Phi^2 \hat{\mathbf{x}}_{i-1}. \quad (10.41)$$

Здесь, как в ранее рассмотренном случае, необходимо поставить ограничение на величину  $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{P}}_i \mathbf{H}^T) \geq 0$  или  $M(v_1^2)_i - R_i \geq 0$ , являющуюся по определению неотрицательной. Если  $M(v_1^2)_i - R_i < 0$ , считаем  $M(v_1^2)_i = R_i$ . Здесь, как и раньше, целесообразно ограничить  $k_i^2$ .

Нетрудно видеть, что выражение (10.37) коэффициента усиления  $k_i^1$  по измеряемой компоненте полностью совпадает с выражением (10.27) для фильтра 2-й модификации. Таким образом, фильтр 2-й модификации можно рассматривать как частный случай фильтра  $k$ -й модификации.

На рис. 10.4 представлены отношения среднего квадратичного значения ошибки по скорости ИНС к среднему квадратичному значению ошибки ДИСС для ИНС без фильтра (кривая  $\frac{\sigma_{\delta \dot{x}}}{\sigma_{\delta V_d}} \Big|$ ) и для ИНС с фильтром  $k$ -й модификации при включении его по комбинированной схеме (кривая  $\frac{\sigma_{\delta \dot{x}}}{\sigma_{\delta V_{d1}}} \Big|$ ).

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ И ИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

В гл. 5 уравнения ошибок ИНС получены варьированием уравнений невозмущенной (идеальной) работы. При этом углы ориентации  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  (углы отклонения системы платформы от вычислительной системы) предполагались малыми. Как было показано в гл. 3 и 8, из-за дрейфа гиросплатформы ошибки определения местоположения  $\delta x, \delta y$  растут со временем и, поскольку углы отклонения гиросплатформы от местного горизонта остаются малыми, углы  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  (будем называть их углами ориентации) беспредельно возрастают. Наиболее быстро в корректируемой ИНС возрастает угол  $\psi_3$ . Таким образом, принятое при выводе уравнений ошибок ИНС (5.17) — (5.22) и (5.24) — (5.28) предположение о малости углов ориентации  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  и, следовательно, сами уравнения справедливы лишь на ограниченном от начала работы отрезке времени (величина этого отрезка определяется точностью используемых в ИНС гиросприборов).

Сравнение точных уравнений, полученных в этом разделе, с уравнениями из гл. 3 и 8 позволяет вычислить ошибку линеаризации, определяемую углом  $\psi_3$ . Эта ошибка  $\delta = |\Delta y - \delta y| / \Delta y \cdot 100\%$  для одного из каналов показана на рис. П.1.

Здесь выводятся уравнения ошибок ИНС, справедливые на любом сколько угодно большом интервале работы ИНС. Поскольку уравнения нелинейны, предлагается их кусочная линеаризация, позволяющая идентифицировать ошибки ИНС методами линейной оптимальной фильтрации.

В дальнейшем рассматривается ИНС со свободной в азимуте гиросплатформой [12]. Будем пользоваться системами координат, введенные в разд. 4.1 и 5.4, а именно, инерциальной ( $i$ ), навигационной ( $n$ ), географической ( $d$ ), правильной ( $p$ ), платформенной ( $\Pi$ ) и вычислительной ( $B$ ). В качестве первичных ошибок ИНС, по-прежнему, принимаются смещения акселерометров, дрейф гироскопов и ошибки внешнего измерителя скорости объекта. Обозначения этих ошибок, угловых скоростей различных трехгранников и все другие обозначения также остаются прежними (см. разд. 4.1).

Выведем уравнения, справедливые при любых величинах углов ориентации. Вычислительное устройство определяет координаты объекта, движущегося по земной сфере. Из-за ошибок измерения путевой скорости, смещений акселерометров и дрейфа платформы эти координаты отличаются от правильных, и точка  $M_b$  не совпадает с точкой  $M_p$ . ЦВМ определяет вычислительный трехгранник  $v$ , ось  $M_{vz_v}$  которого направлена по радиусу  $OM_v$ . С увеличением ошибок определения координат растет отклонение точки  $M_v$  от точки  $M$ , а следовательно, растет перекос осей системы ( $B$ ) относительно осей системы ( $p$ ). Дрейф платформы вызывает перекос трехгранника ( $\Pi$ ) относительно трехгранника ( $p$ ). Соотношения

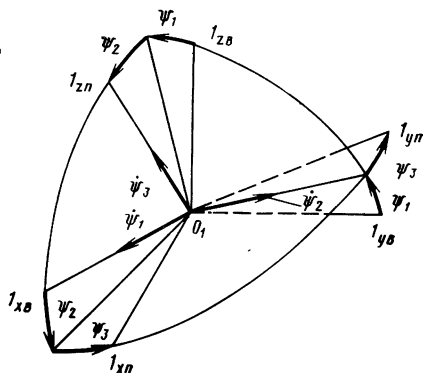
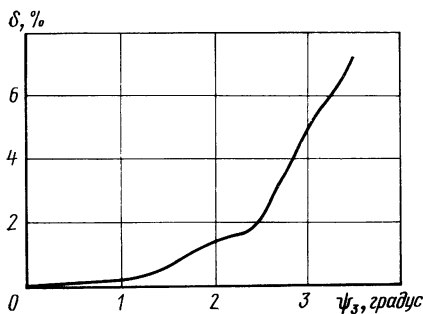


Рис. П.1. График относительной ошибки по положению, возникающей при линеаризации

Рис. П.2. Взаимная ориентация осей вычислителя и осей реальной платформы между ортами рассматриваемых трехгранников определим с помощью матриц преобразований (матриц направляющих косинусов):

$$\mathbf{1}_\Pi = \mathbf{D}_\Pi^B \mathbf{1}_B; \quad \mathbf{1}_B = \mathbf{D}_B^P \mathbf{1}_P; \quad \mathbf{1}_\Pi = \mathbf{D}_\Pi^P \mathbf{1}_P. \quad (\text{П.1})$$

Вид матрицы  $\mathbf{D}_\Pi^B$  определим из рис. П.2.

$$\mathbf{D}_\Pi^B = \begin{bmatrix} \cos \psi_2 \cos \psi_3 & \cos \psi_1 \cos \psi_3 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 & \sin \psi_1 \sin \psi_3 - \cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_3 \\ -\cos \psi_2 \sin \psi_3 & \cos \psi_1 \sin \psi_3 - \sin \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 & \sin \psi_1 \cos \psi_3 + \cos \psi_1 \sin \psi_2 \sin \psi_3 \\ \sin \psi_2 & -\sin \psi_1 \cos \psi_2 & \cos \psi_1 \cos \psi_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2})$$

Элементы матриц  $\mathbf{D}_B^P$ ,  $\mathbf{D}_\Pi^P$  имеют аналогичный вид.

Найдем уравнения, определяющие углы  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ . Если  $\mathbf{D}_\Pi^i$  — некоторая матрица преобразования между осями координат  $\Pi$  и  $i$ , то имеет место соотношение между ортами этих осей

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_{x\Pi} \\ \mathbf{i}_{y\Pi} \\ \mathbf{i}_{z\Pi} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_\Pi^i \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{xi} \\ \mathbf{i}_{yi} \\ \mathbf{i}_{zi} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.3})$$

Производные  $\dot{\mathbf{i}}_{x\Pi}$ ,  $\dot{\mathbf{i}}_{y\Pi}$ ,  $\dot{\mathbf{i}}_{z\Pi}$  в зависимости от  $\mathbf{i}_{xi}$ ,  $\mathbf{i}_{yi}$ ,  $\mathbf{i}_{zi}$  выражаются в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{i}}_{x\Pi} \\ \dot{\mathbf{i}}_{y\Pi} \\ \dot{\mathbf{i}}_{z\Pi} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_\Pi^i \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{xi} \\ \mathbf{i}_{yi} \\ \mathbf{i}_{zi} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{D}}_\Pi^i \mathbf{D}_\Pi^i \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{x\Pi} \\ \mathbf{i}_{y\Pi} \\ \mathbf{i}_{z\Pi} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.4})$$

В векторной форме равенство (П.4) можно записать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{i}}_{x\Pi} = -\bar{\boldsymbol{\omega}}_\Pi \times \bar{\mathbf{i}}_{x\Pi} = \omega_{z\Pi} \bar{\mathbf{i}}_{y\Pi} - \omega_{y\Pi} \bar{\mathbf{i}}_{z\Pi};$$

$$\dot{\bar{\mathbf{i}}}_{y\pi} = -\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\pi} \times \bar{\mathbf{i}}_{y\pi} = -\omega_{z\pi} \bar{\mathbf{i}}_{x\pi} + \omega_{x\pi} \bar{\mathbf{i}}_{z\pi}; \quad (\text{П.5})$$

$$\dot{\bar{\mathbf{i}}}_{z\pi} = -\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\pi} \times \bar{\mathbf{i}}_{z\pi} = \omega_{y\pi} \bar{\mathbf{i}}_{x\pi} - \omega_{x\pi} \bar{\mathbf{i}}_{y\pi},$$

где  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_{\pi} = \omega_{x\pi} \bar{\mathbf{i}}_{x\pi} + \omega_{y\pi} \bar{\mathbf{i}}_{y\pi} + \omega_{z\pi} \bar{\mathbf{i}}_{z\pi}$  — угловая скорость трехгранника  $\pi$  относительно инерциального трехгранника  $i$ , определенная в осях  $\pi$ . Матричное представление выражения (П.5) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{i}}}_{x\pi} \\ \dot{\bar{\mathbf{i}}}_{y\pi} \\ \dot{\bar{\mathbf{i}}}_{z\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z\pi} & -\omega_{y\pi} \\ -\omega_{z\pi} & 0 & \omega_{x\pi} \\ \omega_{y\pi} & -\omega_{x\pi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{i}}_{x\pi} \\ \bar{\mathbf{i}}_{y\pi} \\ \bar{\mathbf{i}}_{z\pi} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.6})$$

Приравнявая (П.4) и (П.6), получаем

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\pi}^T = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{z\pi} & -\omega_{y\pi} \\ -\omega_{z\pi} & 0 & \omega_{x\pi} \\ \omega_{y\pi} & -\omega_{x\pi} & 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{D}}_{\pi}^i \mathbf{D}_{\pi}^{\pi}. \quad (\text{П.7})$$

Из уравнений (П.1), (П.3) определим соотношение между ортами осей  $B$  и  $i$ :

$$\mathbf{i}_B = \mathbf{D}_B^{\pi} \mathbf{D}_{\pi}^i \mathbf{i}_i.$$

По аналогии с (П.7) транспонированная матрица вращения вычислительного трехгранника относительно инерциального трехгранника  $i$ , записанная в осях  $B$ , равна

$$[\boldsymbol{\omega}]_B^T = \dot{\mathbf{D}}_B^{\pi} \mathbf{D}_{\pi}^B + \mathbf{D}_B^{\pi} \dot{\mathbf{D}}_{\pi}^i \mathbf{D}_{\pi}^B.$$

Используя выражение (П.7), можно записать

$$[\boldsymbol{\omega}]_B^T = \dot{\mathbf{D}}_B^{\pi} \mathbf{D}_{\pi}^B + \mathbf{D}_B^{\pi} [\boldsymbol{\omega}]_{\pi}^T \mathbf{D}_{\pi}^B. \quad (\text{П.8})$$

Угловую скорость платформы  $\omega_{\pi}$  по каждой из осей  $\pi$  можно рассматривать как сумму угловой скорости  $\omega_B$ , вычисленной в БЦВМ для соответствующей оси  $B$  и сообщаемой платформе через моментные датчики, и скорости дрейфа  $\varepsilon_{\pi}$  платформы по этой оси. Тогда в матричной форме можно записать, что

$$[\boldsymbol{\omega}]_{\pi} = [\boldsymbol{\omega}]_B + [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\pi}. \quad (\text{П.9})$$

Подставляя (П.9) в (П.8), получаем уравнение

$$\dot{\mathbf{D}}_B^{\pi} \mathbf{D}_{\pi}^B - \mathbf{D}_B^{\pi} ([\boldsymbol{\omega}]_B + [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\pi}) \mathbf{D}_{\pi}^B = -[\boldsymbol{\omega}]_B, \quad (\text{П.10})$$

определяющее углы  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . Знание этих углов позволит вычислить матрицу  $\mathbf{D}_{\pi}^B$  по выражению (П.2), которая характеризует ошибки в ориентации вычислительных осей ( $B$ ) относительно осей ( $\pi$ ) реальной платформы. Учитывая свойство матрицы преобразований  $\mathbf{D}_{\pi}^B = (\mathbf{D}_{\pi}^B)^T$ , можно записать матричное уравнение (П.10) в поэлементной форме. Пропуская несложные тригонометрические преобразования, получим нелинейные уравнения следующего вида:

$$\dot{\psi}_1 \cos \psi_2 = \omega_{x_B} (\cos \psi_3 - \cos \psi_2) - \omega_{y_B} (\sin \psi_1 \sin \psi_2 + \sin \psi_3) + \varepsilon_{x_{\pi}} \cos \psi_3 - \varepsilon_{y_{\pi}} \sin \psi_3;$$

$$\dot{\psi}_2 = \omega_{x_B} \sin \psi_3 + \omega_{y_B} (\cos \psi_3 - \cos \psi_1) + \varepsilon_{x_{\pi}} \sin \psi_3 + \varepsilon_{y_{\pi}} \cos \psi_3;$$

$$\dot{\psi}_3 \cos \psi_2 = -\omega_{x_B} \sin \psi_2 \cos \psi_3 + \omega_{y_B} (\sin \psi_1 + \sin \psi_2 \sin \psi_3) -$$

$$-\varepsilon_{x_{\pi}} \sin \psi_2 \cos \psi_3 + \varepsilon_{y_{\pi}} \sin \psi_2 \sin \psi_3 + \varepsilon_{z_{\pi}} \cos \psi_2 \quad (\text{П.11})$$

при начальных условиях  $\psi_1(0) = \psi_1^0, \psi_2(0) = \psi_2^0, \psi_3(0) = \psi_3^0$ .

Теперь перейдем к выводу уравнений ошибок в определении координат местоположения объекта.

В БЦВМ решается основное уравнение инерциальной навигации с использованием информации, поступающей от акселерометров и лага.

Здесь выбрана схема коррекции, в которой демпфирование осуществляется с одновременным изменением частот собственных колебаний.

Ей соответствуют следующие уравнения [1]:

$$\dot{\mathbf{u}}_{\text{в}} = \int_0^t (\dot{\mathbf{f}}_{\text{п}}^* + \mathbf{g}_{\text{в}} - [\omega]_{\text{в}} \mathbf{u}_{\text{в}} - k_1 \Delta \mathbf{V}_{\text{в}}) dt + \mathbf{u}_{\text{в}}^0, \quad (\text{П.12})$$

$$\mathbf{R}_{\text{в}} = \int_0^t (\mathbf{u}_{\text{в}} - [\omega]_{\text{в}} \mathbf{R}_{\text{в}} + k_2 \Delta \mathbf{V}_{\text{в}}) dt + \mathbf{R}_{\text{в}}^0, \quad (\text{П.13})$$

решение которых в ЦВМ позволяет определить элементы матрицы-столбца  $\mathbf{R}_{\text{в}}$ . Вычисленное положение объекта соответствует точке  $M_{\text{в}}$ , в которой вычислитель определяет оси В. Проекции  $R_{x_{\text{в}}}$ ,  $R_{y_{\text{в}}}$  на оси  $M_{\text{в}}x_{\text{в}}$ ,  $M_{\text{в}}y_{\text{в}}$  будут равны нулю, так как ось вычислительного трехгранника  $M_{\text{в}}z_{\text{в}}$  направлена по вектору  $\mathbf{R}$ . В осях В с началом координат в точке О эти проекции определяют положение точки  $M_{\text{в}}$ . Уравнение ошибок для больших углов перекоса осей  $p$ , В, П можно получить вычитая из уравнения возмущенной работы в осях В уравнение правильной работы, записанное в тех же осях.

Вектор кажущегося ускорения  $\bar{\mathbf{f}}$ , компоненты которого доступны измерением в осях П, расценивается вычислителем как вектор, соответствующий фиктивной платформе с осями В, хотя эти оси перекошены относительно П. Путевая скорость  $\mathbf{V}$  измеряется лагом, положение которого относительно платформы известно с высокой степенью точности. Поэтому в дальнейшем будем считать, что компоненты  $\mathbf{V}$  определены в осях П. Корректирующий член  $\Delta \mathbf{V}_{\text{в}} = \mathbf{V}_{\text{в}} - \mathbf{V}_{\text{п}}'$ , где матрица-столбец  $\mathbf{V}_{\text{в}} = \dot{\mathbf{R}}_{\text{в}} + [\rho]_{\text{в}} \mathbf{R}_{\text{в}} - k_2 \Delta \mathbf{V}_{\text{в}}$  соответствует вектору скорости относительно Земли, вычисляемому в осях В;  $\mathbf{V}_{\text{п}}' = \mathbf{V}_{\text{п}} + \delta \mathbf{V}_{\text{п}}$  соответствует вектору путевой скорости, измеряемому в осях П.  $\delta \mathbf{V}_{\text{п}} = [\delta V_{x_{\text{п}}}, \delta V_{y_{\text{п}}}, 0]^T$  — матрица-столбец ошибки измерения. С учетом приведенных выражений получим

$$\Delta \mathbf{V}_{\text{в}} = \frac{1}{1 + k_2} [\dot{\mathbf{R}}_{\text{в}} + [\rho]_{\text{в}} \mathbf{R}_{\text{в}} - (\mathbf{V}_{\text{п}} + \delta \mathbf{V}_{\text{п}})]. \quad (\text{П.14})$$

Смещения акселерометров вызовут ошибку  $\delta \mathbf{f}_{\text{п}} = [\delta f_{x_{\text{п}}}, \delta f_{y_{\text{п}}}, 0]^T$ , поэтому матрица-столбец, компоненты которой могут быть измерены на платформе, имеет вид

$$\dot{\mathbf{f}}_{\text{п}}^* = \dot{\mathbf{f}}_{\text{п}} + \delta \dot{\mathbf{f}}_{\text{п}},$$

где

$$\dot{\mathbf{f}}_{\text{п}} = [f_{x_{\text{п}}}, f_{y_{\text{п}}}, f_{z_{\text{п}}}]^T.$$

Продифференцируем уравнения (П.12), (П.13) и подставим в них значения  $\dot{\mathbf{f}}_{\text{п}}^*$ ,  $\Delta \mathbf{V}_{\text{в}}$ , определенные выше:

$$\dot{\mathbf{u}}_{\text{в}} = \dot{\mathbf{f}}_{\text{п}} + \delta \dot{\mathbf{f}}_{\text{п}} + \mathbf{g}_{\text{в}} + [\Omega]_{\text{в}}^2 \mathbf{R}_{\text{в}} - [\omega]_{\text{в}} \mathbf{u}_{\text{в}} - \frac{k_1}{1 + k_2} [\dot{\mathbf{R}}_{\text{в}} + [\rho]_{\text{в}} \mathbf{R}_{\text{в}} - (\mathbf{V}_{\text{п}} + \delta \mathbf{V}_{\text{п}})]; \quad (\text{П.15})$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{в}} = \mathbf{u}_{\text{в}} - [\omega]_{\text{в}} \mathbf{R}_{\text{в}} + \frac{k_2}{1 + k_2} [\dot{\mathbf{R}}_{\text{в}} + [\rho]_{\text{в}} \mathbf{R}_{\text{в}} - (\mathbf{V}_{\text{п}} + \delta \mathbf{V}_{\text{п}})], \quad (\text{П.16})$$

где  $\mathbf{g}_{\text{в}} = \mathbf{g}_{\text{в}} - [\Omega]_{\text{в}}^2 \mathbf{R}_{\text{в}}$ . Матрица  $\mathbf{g}_{\text{в}}$  определяется в вычислителе. Считая Землю сферой радиуса  $R_0$ ,  $\mathbf{g}_{\text{в}}$  вычисляем по формуле

$$\mathbf{g}_{\text{в}} = - \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{R}_{\text{в}}|} \mathbf{R}_{\text{в}} \cong - \frac{\mathbf{g}}{R_0} \mathbf{R}_{\text{в}} = - \mathbf{v}^2 \mathbf{R}_{\text{в}}. \quad (\text{П.17})$$

Из выражения (П.16) найдем, что

$$\mathbf{u}_B = \dot{\mathbf{R}}_B + [\omega]_B \mathbf{R}_B - \frac{k_2}{1+k_2} [\dot{\mathbf{R}}_B + [\rho]_B \mathbf{R}_B - (\mathbf{V}_\Pi + \delta \mathbf{V}_\Pi)]. \quad (\text{П.18})$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$\dot{\mathbf{u}}_B = \ddot{\mathbf{R}}_B + [\dot{\omega}]_B \dot{\mathbf{R}}_B + [\dot{\omega}]_B \mathbf{R}_B - \frac{k_2}{1+k_2} [\ddot{\mathbf{R}}_B + [\dot{\rho}]_B \mathbf{R}_B + [\rho]_B \dot{\mathbf{R}}_B - (\dot{\mathbf{V}}_\Pi + \delta \dot{\mathbf{V}}_\Pi)]. \quad (\text{П.19})$$

Подставляя (П.18), (П.19) в (П.15), получаем уравнение, определяющее компоненты вектора положения  $\bar{\mathbf{R}}$  ИНС в возмущенном состоянии в осях В:

$$\ddot{\mathbf{R}}_B + (k_1 \mathbf{I} - k_2 [\rho]_B) \dot{\mathbf{R}}_B + [(1+k_2)(\nu^2 \mathbf{I} + [\omega]_B^2 - [\Omega]_B^2 + [\dot{\omega}]_B - k_2([\dot{\rho}]_B + [\omega]_B [\rho]_B) + k_1 [\rho]_B) \mathbf{R}_B = (1+k_2)(\dot{\mathbf{f}}_\Pi + \delta \dot{\mathbf{f}}_\Pi) - k_2(\dot{\mathbf{V}}_\Pi + \delta \dot{\mathbf{V}}_\Pi) - (k_2 [\omega]_B - k_1 \mathbf{I})(\mathbf{V}_\Pi + \delta \mathbf{V}_\Pi). \quad (\text{П.20})$$

Теперь определим в осях В уравнение, соответствующее правильной работе ИНС. В осях  $p$  определены матрицы-столбцы  $\mathbf{f}_p$ ,  $\mathbf{V}_p$ . Их запись в осях  $\Pi$  даст матрицы  $\mathbf{f}_\Pi = \mathbf{D}_\Pi^p \mathbf{f}_p$ ,  $\mathbf{V}_\Pi = \mathbf{D}_\Pi^p \mathbf{V}_p$ , компоненты которых доступны измерению на реальной платформе. Учитывая то, что оси  $\Pi$  перекошены относительно осей В, правильное представление этих матриц в вычислительных осях определим выражениями

$$\mathbf{f}_{\Pi B} = \mathbf{D}_B^\Pi \mathbf{f}_\Pi, \quad \mathbf{V}_{\Pi B} = \mathbf{D}_B^\Pi \mathbf{V}_\Pi.$$

Уравнения, соответствующие невозмущенной работе ИНС и записанные в осях В, имеют вид

$$\mathbf{u}_{pB} = \int_0^t (\mathbf{D}_B^\Pi \mathbf{f}_\Pi - \nu^2 \mathbf{R}_{pB} + [\Omega]_B^2 \mathbf{R}_{pB} - [\omega]_B \mathbf{u}_{pB} - k_1 \Delta \mathbf{V}_{pB}) dt + \mathbf{u}_{pB}^0, \quad (\text{П.21})$$

$$\mathbf{R}_{pB} = \int_0^t (\mathbf{u}_{pB} - [\omega]_B \mathbf{R}_{pB} + k_2 \Delta \mathbf{V}_{pB}) dt + \mathbf{R}_{pB}^0, \quad (\text{П.22})$$

где 
$$\Delta \mathbf{V}_{pB} = \frac{1}{1+k_2} [\dot{\mathbf{R}}_{pB} + [\rho]_B \mathbf{R}_{pB} - \mathbf{D}_B^\Pi \mathbf{V}_\Pi], \quad (\text{П.23})$$

Индекс « $pB$ » означает что матрицы-столбцы вычисляются в осях В по измерениям, полученным в осях  $\Pi$  и учитывающим перекося осей В. Использование  $[\omega]_B$ ,  $[\rho]_B$  говорит о том, что (П.21), (П.22), (П.23) записаны в прежних осях В, соответствующих фиктивной платформе. Выполняя операции, аналогичные проделанным над (П.12), (П.13), получим уравнение невозмущенной работы, записанное в осях В:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_{pB} + (k_1 \mathbf{I} - k_2 [\rho]_B) \dot{\mathbf{R}}_{pB} + [(1+k_2)(\nu^2 \mathbf{I} + [\omega]_B^2 - [\Omega]_B^2 + [\dot{\omega}]_B) - k_2([\dot{\rho}]_B + [\omega]_B [\rho]_B) + k_1 [\rho]_B] \mathbf{R}_{pB} = (1+k_2) \mathbf{D}_B^\Pi \dot{\mathbf{f}}_\Pi - k_2 \mathbf{D}_B^\Pi \dot{\mathbf{V}}_\Pi - \\ - [k_2(\dot{\mathbf{D}}_B^\Pi + [\omega]_B \mathbf{D}_B^\Pi) - k_1 \mathbf{D}_B^\Pi] \mathbf{V}_\Pi. \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Тогда уравнение ошибок в осях В можно определить, вычтя из (П.20) уравнение (П.24). Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{R}}_B + (k_1 \mathbf{I} - k_2 [\rho]_B) \Delta \dot{\mathbf{R}}_B + [(1+k_2)(\nu^2 \mathbf{I} + [\omega]_B^2 - [\Omega]_B^2 + [\dot{\omega}]_B) - k_2([\dot{\rho}]_B + [\omega]_B [\rho]_B) + k_1 [\rho]_B] \Delta \mathbf{R}_B = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_B^\Pi) [(1+k_2) \dot{\mathbf{f}}_\Pi - k_2 \dot{\mathbf{V}}_\Pi] + [k_2 \mathbf{D}_B^\Pi - \\ - (k_2 [\omega]_B - k_1 \mathbf{I})(\mathbf{I} - \mathbf{D}_B^\Pi)] \mathbf{V}_\Pi + (1+k_2) \delta \dot{\mathbf{f}}_\Pi - k_2 \delta \dot{\mathbf{V}}_\Pi + k_1 \delta \mathbf{V}_\Pi - k_2 [\omega]_B \delta \mathbf{V}_\Pi, \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

где матрица-столбец ошибок  $\Delta \mathbf{R}_B = [\Delta x_B, \Delta y_B, 0]^T$ . При скоростях движения объекта, меньших скорости звука и  $|\omega_B| \gg |\varepsilon_B|$ , можно пренебречь членами второго порядка малости. В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{R}}_B + k_1 \Delta \dot{\mathbf{R}}_B + (1 + k_2) v^2 \Delta \mathbf{R}_B = & (\mathbf{I} - \mathbf{D}_B^n) [(1 + k_2) \mathbf{f}_B - k_2 \dot{\mathbf{V}}_B + k_1 \mathbf{V}_B] - \\ & - k_2 ([\omega]_B (\mathbf{I} - \mathbf{D}_B^n) + \mathbf{D}_B^n [\varepsilon]_B \mathbf{V}_B - k_2 \delta \dot{\mathbf{V}}_B - (k_2 [\omega]_B - k_1 \mathbf{I}) \delta \mathbf{V}_B + (1 + k_2) \delta \mathbf{f}_B). \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Можно записать уравнение ошибок, зависящее от матриц-столбцов правильной системы  $\mathbf{f}_p$  и  $\mathbf{V}_p$  с учетом матрицы преобразований  $\mathbf{D}_B^p$ . За счет гравиметрической обратной связи ось платформы  $Mz_B (Oz_B)$  достаточно точно восстанавливает местную вертикаль  $Mz_p (Oz_p)$ . Углы  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , характеризующие ошибку в построении вертикали, остаются малыми в течение всей работы ИНС. В то же время угол  $\Phi_3$ , характеризующий азимутальную ошибку платформы, может неограниченно возрастать. Поэтому элементы матрицы  $\mathbf{D}_B^p$  будут иметь вид

$$\mathbf{D}_B^p = \begin{bmatrix} \cos \Phi_3 & \sin \Phi_3 & \Phi_1 \sin \Phi_3 - \Phi_2 \cos \Phi_3 \\ -\sin \Phi_3 & \cos \Phi_3 & \Phi_1 \cos \Phi_3 + \Phi_2 \sin \Phi_3 \\ \Phi_2 & -\Phi_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{D}_B^p$  может быть найдена из соотношения

$$\mathbf{D}_B^p = \mathbf{D}_B^B \mathbf{D}_B^p,$$

полученного по выражениям (П.1).

Обозначим через  $\delta \omega_B = [\delta \omega_{x_B}, \delta \omega_{y_B}, 0]^T$  матрицу-столбец ошибок в вычислении абсолютной угловой скорости в ЦВМ. Тогда справедливо равенство

$$[\omega]_p = [\omega]_B - [\delta \omega]_B.$$

Применяя рассуждения, аналогичные используемым при получении уравнения (П.10), можно записать в осях В матричное уравнение для углов  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

$$\dot{\mathbf{D}}_B^p \mathbf{D}_B^p - \mathbf{D}_B^p ([\omega]_B - [\delta \omega]_B) \mathbf{D}_B^p = -[\omega]_B \quad (\text{П.27})$$

и соответствующие ему скалярные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 = & \omega_{x_B} (\cos \theta_3 - \cos \theta_2) - \omega_{y_B} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_3) + \\ & + \delta \omega_{x_B} \cos \theta_2 + \delta \omega_{y_B} \sin \theta_1 \sin \theta_2; \end{aligned} \quad (\text{П.28})$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_{x_B} \sin \theta_3 + \omega_{y_B} (\cos \theta_3 - \cos \theta_1) + \delta \omega_{y_B} \cos \theta_1;$$

$$\dot{\theta}_3 \cos \theta_2 = -\omega_{x_B} \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \omega_{y_B} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_3) - \delta \omega_{y_B} \sin \theta_1.$$

Зная  $\mathbf{D}_B^p$ , можно выразить компоненты  $\mathbf{V}_p, \mathbf{f}_p$  через компоненты  $\mathbf{V}_B, \mathbf{f}_B$ . Представим матрицу  $\mathbf{f}_B$  в виде

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{f}_B^{(1)} + \mathbf{f}_B^{(2)}, \text{ где } \mathbf{f}_B^{(1)} = [(\mathbf{D}_{B11}^p f_{xp} + \mathbf{D}_{B12}^p f_{yp}), (\mathbf{D}_{B21}^p f_{xp} + \mathbf{D}_{B22}^p f_{yp}), 0]^T;$$

$$\mathbf{f}_B^{(2)} = g [\mathbf{D}_{B13}^p, \mathbf{D}_{B23}^p, 1]^T, \quad \mathbf{D}_{Bkl}^p - \text{элементы матрицы } \mathbf{D}_B^p.$$

Очевидно,  $\dot{\mathbf{V}}_B = \mathbf{f}_B^{(1)}.$

Учитывая это, перепишем уравнение (П.26) в виде

$$\Delta \ddot{\mathbf{R}}_B + k_1 \Delta \dot{\mathbf{R}}_B + (1 + k_2) v^2 \Delta \mathbf{R}_B = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_B^n) [(1 + k_2) \mathbf{f}_B^{(2)} + \mathbf{f}_B^{(1)} + k_1 \mathbf{V}_B] -$$

$$- k_2 ([\omega]_B (\mathbf{I} - \mathbf{D}_B^n) + \mathbf{D}_B^n [\varepsilon]_B \mathbf{V}_B - k_2 \delta \dot{\mathbf{V}}_B - (k_2 [\omega]_B - k_1 \mathbf{I}) \delta \mathbf{V}_B + (1 + k_2) \delta \mathbf{f}_B). \quad (\text{П.29})$$

Перемножая матрицы, можно найти проекции уравнения ошибок (П.29) на оси  $Ox_B, Oy_B$ .

Полученные скалярные уравнения решаются совместно с (П.11), (П.28). Используя выражение

$$\Delta R_p = D_p^B \Delta R_B,$$

можно найти проекции вектора ошибок на оси  $Ox_p$ ,  $Oy_p$ .

Применение предложенной математической модели в задаче оценивания ошибок ИНС осложняется тем, что уравнения (П.11), (П.28) нелинейны.

В настоящее время достаточно хорошо разработаны методы линейного оценивания. Они требуют линеаризации нелинейных функций на каждом такте по предыдущей оценке. Однако оценки углов  $\psi_i$  и  $\theta_i$  получаются с большой ошибкой. Это приводит к быстрому расхождению действительных ошибок ИНС и их оценок. Линеаризация требует также большого объема вычислений на каждом такте.

Ниже предлагается метод кусочной линеаризации, позволяющий получить линейное описание ошибок ИС, справедливое при любом времени работы системы.

Представим матрицу  $D_{\Pi}^B$  в виде

$$D_{\Pi}^B = D_{\Pi k}^B (I - [\varphi]_B), \quad (\text{П.30})$$

где  $[\varphi]_B$  — кососимметричная матрица, соответствующая малым углам  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ;  $D_{\Pi k}^B$  — постоянная матрица, определяемая на  $k$  предыдущих пересчетах при достижении  $\varphi_i$  границ линейной зоны по формуле

$$D_{\Pi k}^B = D_{\Pi k-1}^B D_{\Pi}^{B\hat{\varphi}}$$

при начальных условиях  $D_{\Pi 0}^B = I$ .

Также можно представить матрицу  $D_B^P$  в виде

$$D_B^P = [I - [\tau]_B] D_B^P, \quad (\text{П.31})$$

где  $[\tau]_B$  и  $D_B^P$  имеют смысл, аналогичный  $[\varphi]_B$  и  $D_{\Pi}^B$ .

Слабая наблюдаемость  $\psi_i$  и  $\theta_i$  не позволяет получить их точные оценки с помощью алгоритмов фильтрации. Поэтому определяем приближенные оценки  $\hat{\psi}_i$  и  $\hat{\theta}_i$ , модуль которых равен средним квадратичным значениям соответствующих углов, а знаки определяются по знакам оценок  $\hat{\Delta x}_B$ ,  $\hat{\Delta y}_B$ , полученных при фильтрации. В линейной области изменения углов  $\psi_i$  и  $\theta_i$  справедливы соотношения

$$\theta_1(t) \approx -\psi_1(t); \quad \theta_2(t) \approx -\psi_2(t),$$

$$\text{где } \theta_1(t) = -\frac{\Delta y_B}{R_0}; \quad \theta_2(t) = \frac{\Delta x_B}{R_0}.$$

Получим приближенные оценки в виде

$$\hat{\varphi}_1 = \sigma_{\varphi 1} \cdot \text{sign}(\hat{\Delta y}_B), \quad \hat{\varphi}_2 = -\sigma_{\varphi 2} \text{sign}(\hat{\Delta x}_B).$$

Знак  $\hat{\varphi}_3$  определяется при найденных  $\hat{\varphi}_1$ ,  $\hat{\varphi}_2$  по третьему уравнению (П.33), полученному ниже. Аналогично находятся оценки  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$ ,  $\hat{\theta}_3$ .

Используя (П.30), линеаризуем уравнение ошибок ориентации (П.10), пренебрегая членами второго порядка малости.

Получим уравнение

$$[\hat{\varphi}]_B - [\varphi]_B D_B^B [\omega]_B D_{\Pi}^B + D_B^B [\omega]_B D_{\Pi}^B [\varphi]_B = D_B^B ([\omega]_B + [\varepsilon]_B) D_{\Pi}^B - [\omega]_B, \quad (\text{П.32})$$

которое определяет ошибки ориентации, линеаризованные относительно фиксированных осей вычислителя, определяемых матрицей  $D_{\Pi k}^B$ . Записывая (П.32) в элементарной форме, получим



$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= \alpha_3 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_3 + \alpha_1 + \gamma_1 - \omega_{xв}; \\
\dot{\varphi}_2 &= -\alpha_3 \varphi_1 + \alpha_1 \varphi_3 + \alpha_2 + \gamma_2 - \omega_{yв}; \\
\dot{\varphi}_3 &= \alpha_2 \varphi_1 - \alpha_1 \varphi_2 + \alpha_3 + \gamma_3,
\end{aligned}
\tag{П.33}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= D_{п11}^B \omega_{xв} + D_{п21}^B \omega_{yв}; \quad \gamma_1 = D_{п11}^B \varepsilon_{хп} + D_{п21}^B \varepsilon_{yp} + D_{п31}^B \varepsilon_{zn}; \\
\alpha_2 &= D_{п12}^B \omega_{xв} + D_{п23}^B \omega_{yв}; \quad \gamma_2 = D_{п12}^B \varepsilon_{хп} + D_{п22}^B \varepsilon_{yp} + D_{п32}^B \varepsilon_{zn}; \\
\alpha_3 &= D_{п13}^B \omega_{xв} + D_{п23}^B \omega_{yв}; \quad \gamma_3 = D_{п13}^B \varepsilon_{хп} + D_{п23}^B \varepsilon_{yp} + D_{п33}^B \varepsilon_{zn}.
\end{aligned}$$

Аналогично можно линеаризовать уравнение (П.27), используя выражение (П.31). Получим

$$[\dot{\gamma}]_в - [\gamma]_в D_p^B [\omega]_в D_p^B + D_p^B [\omega]_в D_p^B [\gamma] = [\omega]_в - D_p^B ([\omega]_в - [\delta\omega]_в) D_p^B$$

или в поэлементной форме

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_1 &= \beta_3 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_3 - \beta_1 + \kappa_1 + \omega_{xв}; \\
\dot{\gamma}_2 &= -\beta_3 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_3 - \beta_2 + \kappa_2 + \omega_{yв}; \\
\dot{\gamma}_3 &= \beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2 - \beta_3 + \kappa_3,
\end{aligned}
\tag{П.34}$$

где

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= D_{в11}^P \omega_{xв} + D_{в12}^P \omega_{yв} & \kappa_1 &= D_{в11}^P \delta\omega_{xв} + D_{в12}^P \delta\omega_{yв}; \\
\beta_2 &= D_{в21}^P \omega_{xв} + D_{в22}^P \omega_{yв} & \kappa_2 &= D_{в21}^P \delta\omega_{xв} + D_{в22}^P \delta\omega_{yв}; \\
\beta_3 &= D_{в31}^P \omega_{xв} + D_{в32}^P \omega_{yв} & \kappa_3 &= D_{в31}^P \delta\omega_{xв} + D_{в32}^P \delta\omega_{yв}.
\end{aligned}$$

Используя (П.30), можно записать матричное уравнение (П.29) ошибок определения местоположения объекта в осях В без учета членов второго порядка малости:

$$\begin{aligned}
\Delta \ddot{R}_в + k_1 \Delta \dot{R}_в + (1 + k_2) v^2 \Delta R_в = & -[\varphi]_в D_в^H [(1 + k_2) f_{п}^{(2)} + f_{п}^{(1)} + k_1 V_{п}] - \\
& - k_2 \delta \dot{V}_{п} - (k_2 [\omega]_в - k_1 I) \delta V_{п} + (I - D_в^H) [(1 + k_2) f_{п}^{(2)} + f_{п}^{(1)} + k_1 V_{п}] - \\
& - k_2 ([\omega]_в (I - D_в^H) - D_в^H [\varepsilon]_{п}) V_{п} + (1 + k_2) \delta f_{п}.
\end{aligned}
\tag{П.35}$$

Перемножая матрицы в (П.35), можно найти проекции этого уравнения на оси  $Ox_в$ ,  $Oy_в$ . Запись  $D_в^H f_{п}$  означает пересчет матрицы ускорений, элементы которой

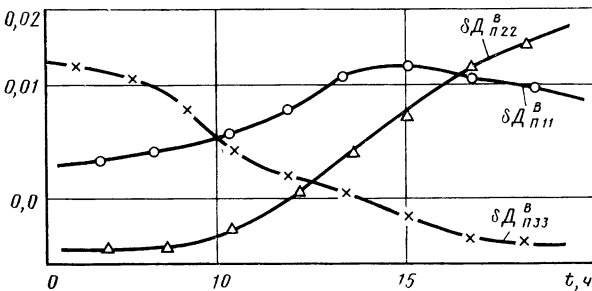


Рис. П.3. График ошибки линеаризации в определении диагональных направляющих косинусов матрицы  $D_п^B$

доступны измерению на платформе, к фиксированным вычислительным осям, определяемым матрицей  $D_{\text{п}}^{\text{н}}$ .

Решение уравнений (П.11), (П.33) на ЦВМ показало справедливость предложенной линеаризации. Сравнение проводилось по элементам матрицы  $D_{\text{п}}^{\text{н}}$ , полученной по выражению (П.2) для углов, вычисленных по уравнению (П.11), и матрицы  $D_{\text{п}}^{\text{н}}$ , полученной из выражения (П.30) и уравнений (П.33) при точном знании оценок углов. На рис. П.3 показаны графики разности диагональных направляющих косинусов точной и линеаризованной матриц.

## 2. ГИРОСТАБИЛИЗИРОВАННАЯ ПЛАТФОРМА

Традиционная система инерциальной навигации основана на использовании трехосной гиростабилизированной платформы. Точность ИНС находится в прямой зависимости от точности гироплатформы, т. е. от скорости дрейфа  $\epsilon$ . Дрейф  $\epsilon$ , в свою очередь, зависит не только от точности входящих в гироплатформу гироскопов, но и от структуры цепей разгрузки гироплатформы. Здесь рассматривается синтез цепи разгрузки, обеспечивающий высокую точность гироплатформы.

### СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГИРОПЛАТФОРМЫ

Уравнения движения гироплатформы, представляющей собой систему инерционных тел, получают по большей части на основе динамических уравнений Эйлера для твердого тела с одной неподвижной точкой [14, 15]. Уравнения Эйлера записывают для каждого входящего в состав гироплатформы тела. Воздействие на это тело со стороны других составляющих гироплатформу тел учитывают пока неизвестными моментами от нормальных реакций в точках соприкосновения. В дальнейшем эти моменты из уравнения исключаются.

Такой метод составления уравнений сложных электромеханических и гироскопических систем в отечественной литературе был впервые предложен в работе [7]. Аналогичный подход при составлении уравнений гироскопа несколько раньше выдвигался К. Магнусом [28, 29].

Указанный метод составления уравнений проиллюстрируем на примере двухосной гироплатформы, предназначенной для поддержания неизменным углового положения плоскости относительно инерциального пространства в условиях качки объекта, несущего платформу.

Схема платформы, имеющей силовую гироскопическую стабилизацию по двум осям, изображена на рис. П.4.

Рассмотрим движение платформы относительно системы координат  $Ox_my_mz_m$ , связанной с основанием (машиной), на котором установлена платформа. Чтобы определить положение платформы 4 в системе  $Ox_my_mz_m$ , свяжем с платформой систему координат  $Oxyz$ . Положение системы  $Oxyz$  относительно системы  $Ox_my_mz_m$  полностью определяется заданием углов  $\alpha^*$  и  $\beta^*$  (рис. П.5). Угол  $\alpha^*$  является углом поворота наружного кольца 3 (рис. П.4) вокруг его оси  $Ox_m$  относительно плоскости  $Ox_my_m$ , а угол  $\beta^*$  — углом поворота платформы 4 вокруг оси  $Oy$  относительно наружного кольца. Выбранные направления положительного отсчета для этих углов и соответствующие положительные угловые скорости (векторы  $\alpha^*$  и  $\beta^*$ ) показаны на рис. П.4 и П.5. На рис. П.4 показаны также направления положительного отсчета углов  $\sigma$  и  $\tau$ , определяющих положение гироскопов 1 и 2 относительно платформы. Эти углы измеряются потенциометрическими устройствами 7, 9, управляющими соответственно двигателями 8 и 10.

Положение платформы и гироскопов характеризуется четырьмя переменными (координатами  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ). Для определения этих переменных необходимо составить четыре уравнения. Такими уравнениями могут служить уравнения моментов вокруг осей карданова подвеса (оси  $Ox_m$ ,  $Oy_m$ ) и вокруг осей вращения гироскопов относительно платформы (оси  $O_1z_1$ ,  $O_2z_2$ ).

Составим эти уравнения, основываясь на динамических уравнениях Эйлера для твердого тела с одной неподвижной точкой. Динамические уравнения Эйлера имеют вид

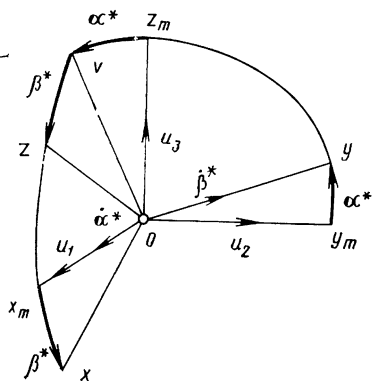
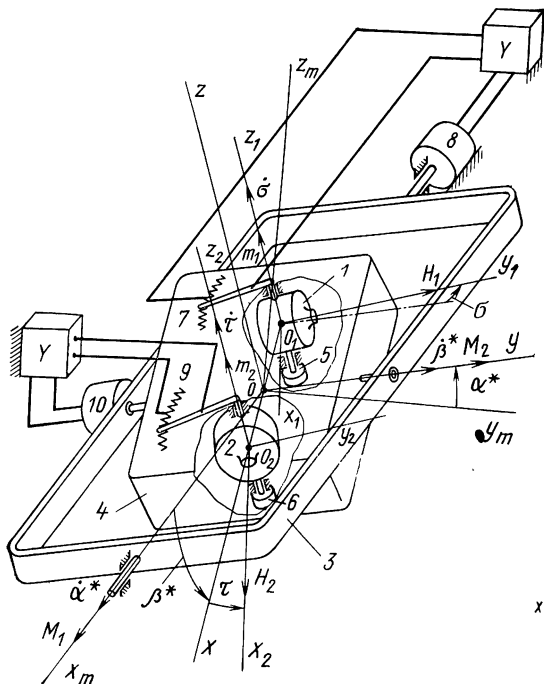


Рис. П.4. Схема двухосной гироскопической платформы

Рис. П.5. Система объекта  $Ox_m y_m z_m$  и система платформы  $Oxyz$

$$\begin{aligned} \frac{dG_x}{dt} + qG_z - rG_y &= M_x; & \frac{dG_y}{dt} + rG_x - pG_z &= M_y; \\ \frac{dG_z}{dt} + pG_y - qG_x &= M_z \end{aligned} \quad (\text{П.36})$$

Здесь  $G_x = Ap - Fq - Er$ ;  $G_y = -Fp + Bq - Dr$ ;  $G_z = -Ep - Dq + Cr$  (П.37)

— проекции кинетического момента  $G$  твердого тела на оси  $x, y, z$  системы координат, связанной с этим телом (подвижная система координат);

$p, q, r$  — проекции абсолютной угловой скорости подвижной системы координат  $Ox_m y_m z_m$  на оси этой же системы;

$$A = \sum m (y^2 + z^2); B = \sum m (x^2 + z^2); C = \sum m (x^2 + y^2)$$

— моменты инерции твердого тела относительно тех же осей;  $D = \sum myz$ .  $E = \sum mxz$ ,  $F = \sum mxy$  — центробежные моменты инерции ( $m$  — масса элементарных частиц тела);

$M_x, M_y, M_z$  — моменты, действующие на тело относительно его осей  $Ox, Oy, Oz$ .

Как уже отмечалось, уравнения Эйлера составляем относительно для каждого тела, учитывая воздействие на это тело других входящих в платформу тел пока неизвестными моментами от нормальных реакций в точках соприкосновения.

Такой метод составления уравнений гироскопических и других механических систем является более наглядным и простым, чем, например, метод, основанный на использовании уравнений Лангранжа второго рода. Этот метод имеет и другое

важное преимущество, заключающееся в том, что в уравнения движения можно вводить члены, учитывающие силы трения в опорах (подшипниках), зависящие от нормальных давлений в них.

Начнем с составления уравнений для гироскопов 1, 2 (под гироскопом подразумевается система, состоящая из ротора и его кожуха). С координатами этих гироскопов свяжем системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$  (см. рис. П.4).

Определим проекции  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  абсолютной угловой скорости системы  $O_1x_1y_1z_1$  на оси  $O_1x_1$ ,  $O_1y_1$ ,  $O_1z_1$  и проекции  $\omega_{x2}$ ,  $\omega_{y2}$ ,  $\omega_{z2}$  угловой скорости системы  $O_2x_2y_2z_2$  на оси этой же системы  $O_2x_2$ ,  $O_2y_2$ ,  $O_2z_2$ .

Если  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  — проекции абсолютной угловой скорости системы отсчета  $Ox_my_mz_m$  на оси этой же системы  $Ox_m$ ,  $Oy_m$ ,  $Oz_m$ , то проекции абсолютной угловой скорости платформы 4 на оси связанной с ней системы  $Oxyz$  (см. рис. П.5) (принимая векторы  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$  направленными в положительную сторону по осям  $Ox_m$ ,  $Oy_m$ ,  $Oz_m$ ) имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_x &= (u_1 + \dot{\alpha}^*) \cos \beta^* + u_2 \sin \alpha^* \sin \beta^* - u_3 \cos \alpha^* \sin \beta^*; \\ \omega_y &= u_2 \cos \alpha^* + u_3 \sin \alpha^* + \dot{\beta}^*; \\ \omega_z &= (u_1 + \dot{\alpha}^*) \sin \beta^* - u_2 \sin \alpha^* \cos \beta^* + u_3 \cos \alpha^* \cos \beta^*.\end{aligned}\quad (\text{П.38})$$

Искомые угловые скорости согласно рис. П.6 (принимая векторы  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  направленными в положительную сторону соответствующих осей) имеют вид

$$\omega_{x1} = \omega_x \cos \sigma + \omega_y \sin \sigma; \quad \omega_{y1} = -\omega_x \sin \sigma + \omega_y \cos \sigma; \quad \omega_{z1} = \omega_z + \dot{\sigma}; \quad (\text{П.39})$$

$$\omega_{x2} = \omega_x \cos \tau + \omega_y \sin \tau; \quad \omega_{y2} = -\omega_x \sin \tau + \omega_y \cos \tau; \quad \omega_{z2} = \omega_z + \dot{\tau}; \quad (\text{П.40})$$

где  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  — определяются формулами (П.38).

Найдем проекции кинетического момента гироскопа 1 (см. рис. П.4) на оси  $O_1x_1$ ,  $O_1y_1$ ,  $O_1z_1$ . Поскольку для гироскопа оси  $O_1x_1$ ,  $O_1y_1$  являются главными осями инерции, центробежные моменты относительно этих осей равны нулю. Обозначая через  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  моменты инерции гироскопа (кожух + ротор) относительно осей  $O_1x_1$ ,  $O_1y_1$ ,  $O_1z_1$  и учитывая, что кинетический момент  $H_1$  ротора направлен по оси  $O_1y_1$ , на основании соотношений (П.37) можно написать

$$G_{x1} = A' \omega_{x1}; \quad G_{y1} = B' \omega_{y1} + H_1; \quad G_{z1} = C' \omega_{z1}. \quad (\text{П.41})$$

Здесь  $H_1 = J\dot{\varphi}$ , где  $J$  — осевой момент инерции ротора;  $\dot{\varphi}$  — скорость вращения ротора относительно его кожуха.

Полагаем  $\dot{\varphi} = \text{const}$ , т. е. считаем, что ротор вместе с кожухом участвует во вращении  $\omega_{y1}$ . Тогда  $B' = B'_k + J$ , где  $B'_k$  — момент инерции кожуха относительно оси  $y_1$ ;  $C'$  — момент инерции гироскопа относительно оси  $z_1$  (см. рис. П.4).

Для гироскопа 2 аналогичным образом находим

$$G_{x2} = B' \omega_{x2} + H_2; \quad G_{y2} = A' \omega_{y2}; \quad G_{z2} = C' \omega_{z2}. \quad (\text{П.42})$$

Уравнения Эйлера (П.36) для гироскопов 1 и 2 можно записать в следующем виде:

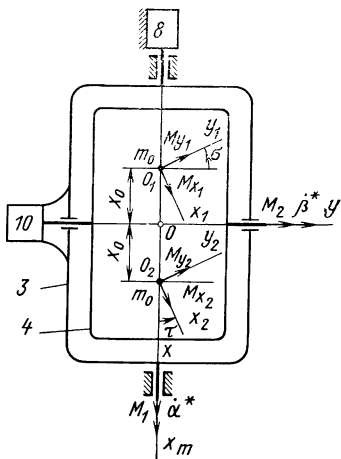


Рис. П.6. Моменты, действующие на платформу со стороны гироскопов

для гироскопа 1

$$A' \dot{\omega}_{x1} + C' \dot{\omega}_{z1} \omega_{y1} - B' \dot{\omega}_{y1} \omega_{z1} - H_1 \omega_{z1} = M_{x1n}; \quad (\text{П.43a})$$

$$B' \dot{\omega}_{y1} + A' \dot{\omega}_{x1} \omega_{z1} - C' \dot{\omega}_{z1} \omega_{x1} = M_{y1n}; \quad (\text{П.43б})$$

$$C' \dot{\omega}_{z1} + B' \dot{\omega}_{y1} \omega_{x1} + H_1 \omega_{x1} - A' \dot{\omega}_{x1} \omega_{y1} = m_1 - f_{\sigma} \dot{\sigma}; \quad (\text{П.43в})$$

для гироскопа 2

$$B' \dot{\omega}_{x2} + C' \dot{\omega}_{z2} \omega_{y2} - A' \dot{\omega}_{y2} \omega_{z2} = M_{x2n}; \quad (\text{П.44a})$$

$$A' \dot{\omega}_{y2} + B' \dot{\omega}_{x2} \omega_{z2} + H_2 \omega_{z2} - C' \dot{\omega}_{z2} \omega_{x2} = M_{y2n}; \quad (\text{П.44б})$$

$$C' \dot{\omega}_{z2} + A' \dot{\omega}_{y2} \omega_{x2} - B' \dot{\omega}_{x2} \omega_{y2} - H_2 \omega_{y2} = m_2 - \dot{f}_{\tau} \tau; \quad (\text{П.44в})$$

Здесь  $M_{x1n}$ ,  $M_{y1n}$ ,  $M_{x2n}$ ,  $M_{y2n}$  — моменты, передаваемые на гироскопы 1 и 2 со стороны платформы 4 за счет нормальных реакций в подшипниках осей кожуха  $O_1 z_1$ ,  $O z_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$  — моменты, прикладываемые к гироскопам со стороны моментных датчиков 5 и 6;  $\dot{f}_{\tau}$ ,  $\dot{f}_{\delta}$  — коэффициенты, учитывающие вязкое трение в подшипниках осей кожухов гироскопов и электродинамическое торможение в моментных датчиках.

Здесь и в дальнейшем момент сил сухого трения в подшипниках предполагается равным нулю. В действительности же для шарикового подшипника момент трения равен  $M_{\text{тр}} = \mu P$ , где  $\mu$  — постоянный коэффициент, а  $P$  — общее нормальное давление на подшипник. При желании момент  $M_{\text{тр}}$  всегда можно учесть в уравнениях движения. Для этого, например, в правую часть уравнения (П.43в) надо было бы ввести член<sup>1</sup>

$$-(\text{sign } \dot{\sigma}) \cdot 2\mu \frac{\sqrt{M_{x1n}^2 + M_{y1n}^2}}{l}, \quad (\text{П.45})$$

где  $l$  — расстояние между подшипниками оси  $z_1$ , а  $M_{x1n}$ ,  $M_{y1n}$  — моменты, определяемые выражениями (П.43а) и (П.43б).

Составим теперь уравнения Эйлера для платформы 4. Если масса платформы расположена относительно начала координат  $O$  симметрично, то ее центробежные моменты инерции относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  будут равны нулю, так что уравнения (П.36) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A^0 \dot{\omega}_x + C^0 \omega_z \omega_y - B^0 \omega_y \omega_z &= M_x; \\ B^0 \dot{\omega}_y + A^0 \omega_x \omega_z - C^0 \omega_z \omega_x &= M_y; \\ C^0 \dot{\omega}_z + B^0 \omega_y \omega_x - A^0 \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (\text{П.46})$$

Здесь  $A^0$  — момент инерции платформы без гироскопов 1 и 2 относительно оси  $Ox$ ;  $B^0 = B_n + 2m_0 x_0^2$  — момент инерции относительно оси  $Oy$  ( $B_n$  — момент инерции платформы без гироскопов 1 и 2;  $m_0$  — масса гироскопа;  $x_0$  — расстояние центра тяжести гироскопа до оси платформы  $Oy$ );  $C^0 = C_n + 2m_0 x_0^2$  — момент инерции вокруг оси  $Oz$  ( $C_n$  — момент инерции платформы без гироскопов 1 и 2 относительно оси  $Oz$ );  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  — проекции абсолютной угловой скорости платформы, определяемые формулами (11.38);  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  — моменты, действующие вокруг осей платформы  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Определим моменты, действующие на платформу. Со стороны гироскопов 1 и 2 на платформу 4 передаются следующие моменты [см. уравнения (П.43), (П.44)]:

$$M_{x1} = -M_{x1n} = H_1 \omega_{z1} - A' \dot{\omega}_{x1} - (C' - B') \omega_{y1} \omega_{z1};$$

$$M_{y1} = -M_{y1n} = -B' \dot{\omega}_{y1} + (C' - A') \omega_{x1} \omega_{z1};$$

<sup>1</sup> Здесь не учтено нормальное давление, обусловленное силой тяжести гироскопа. При учете этой силы выражение (П.10) значительно усложнится.

$$M_{z1} = -(m_1 - f_{\sigma} \dot{\sigma}); \quad (\text{П.47})$$

$$M_{x2} = -M_{x2n} = -B' \dot{\omega}_{x2} - (C' - A') \omega_{y2} \omega_{z2};$$

$$M_{y2} = -M_{y2n} = -H_2 \omega_{z2} - A' \dot{\omega}_{y2} + (C' - B') \omega_{x2} \omega_{z2};$$

$$M_{z2} = -(m_2 - f_{\tau} \dot{\tau}). \quad (\text{П.47})$$

Со стороны наружного кольца 3 на платформу 4 действуют:

$$1) \quad M_{xm} = M_1 + M'_{xm} - A'' (\ddot{\alpha}^* + \dot{u}_1) - f_{xm} \dot{\alpha}^*,$$

т. е. момент  $M_1$ , развиваемый вокруг оси  $Ox_m$  двигателем стабилизации 8, и внешний возмущающий момент  $M'_{xm}$  за вычетом той их части, которая идет на создание ускорения  $(\ddot{\alpha}^* + \dot{u}_1)$  наружного кольца ( $A''$  — момент инерции наружного кольца вокруг оси  $Ox_m$ ) и на преодоление момента сил вязкого трения  $f_{xm} \dot{\alpha}^*$ ;

2)  $M_2 + M'_y - f_y \dot{\beta}^*$ , т. е. момент  $M_2$ , развиваемый двигателем стабилизации 10 вокруг оси  $Oy$ , и внешний возмущающий момент  $M'_y$  за вычетом некоторой их части, затрачиваемой на преодоление момента сил вязкого трения  $f_y \dot{\beta}^*$ ;

3)  $M_v$  — момент вокруг оси  $v$ , перпендикулярной плоскости  $Ox_my$  наружного кольца. Этот момент возникает за счет нормальных реакций в подшипниках оси  $Ox_m$  наружного кольца и на платформу 4 передается нормальными давлениями в подшипниках оси  $Oy$  ( $Oy$  — ось вращения платформы относительно наружного кольца).

Принимая во внимание рис. П.6 и П.7, для составляющих результирующего момента, действующего на платформы, получим следующие выражения:

$$M_x = M_{x1} \cos \sigma - M_{y1} \sin \sigma + M_{x2} \cos \tau - M_{y2} \sin \tau + M_{xm} \cos \beta^* - M_v \sin \beta^*;$$

$$M_y = M_{x1} \sin \sigma + M_{y1} \cos \sigma + M_{x2} \sin \tau + M_{y2} \cos \tau + M_2 + M'_y - f_y \dot{\beta}^*;$$

$$M_z = M_{z1} + M_{z2} + M_{xm} \sin \beta^* + M_v \cos \beta^*.$$

Подставив эти выражения в уравнения Эйлера (П.46) и исключив затем из первого и третьего уравнений момент  $M_v$ , получим два первых уравнения приводимой далее системы (П.48):

$$\begin{aligned} A^0 \dot{\omega}_x + (C^0 - B^0) \omega_y \omega_z + [C^0 \omega_z + (B^0 - A^0) \omega_x \omega_y] \operatorname{tg} \beta^* &= M_{x1} \cos \sigma - \\ &- M_{y1} \sin \sigma + M_{x2} \cos \tau - M_{y2} \sin \tau + M_{xm} \cos \beta^* + \\ &+ (M_{z1} + M_{z2} + M_{xm} \sin \beta^*) \operatorname{tg} \beta^*; \end{aligned} \quad (\text{П.48а})$$

$$\begin{aligned} B^0 \omega_y + (A^0 - C^0) \omega_x \omega_z &= M_{x1} \sin \sigma + M_{y1} \cos \sigma + M_{x2} \sin \tau + M_{y2} \cos \tau + \\ &+ M_2 - f_y \dot{\beta}^* + M'_y; \end{aligned} \quad (\text{П.48б})$$

$$C' \dot{\omega}_{z1} + (B' - A') \omega_{x1} \omega_{y1} + H_1 \omega_{x1} = m_1 - f_{\sigma} \dot{\sigma}; \quad (\text{П.48в})$$

$$C' \dot{\omega}_{z2} + (A' - B') \omega_{x2} \omega_{y2} - H_2 \omega_{y2} = m_2 - f_{\tau} \dot{\tau}; \quad (\text{П.48г})$$

$$M_{xm} = M_1 + M'_{xm} - A'' (\ddot{\alpha}^* + \dot{u}_1) - f_{xm} \dot{\alpha}^*; \quad (\text{П.48д})$$

$$M_1 = K_1 \sigma; \quad (\text{П.48е})$$

$$M_2 = -K_2 \tau. \quad (\text{П.48ж})$$

Уравнения (П.48в) и (П.48г) этой системы представляют собой уравнения моментов относительно осей  $O_1z_1$ ,  $O_2z_2$  гироскопов. Последние два уравнения —

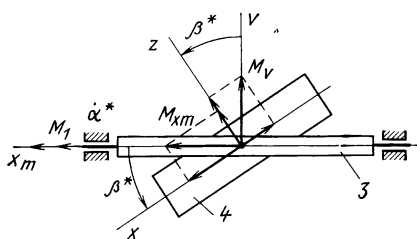


Рис. П.7. Моменты, действующие на платформу со стороны наружного кольца

это уравнения двигателей стабилизации 8, 10<sup>1</sup>.

Двигатель стабилизации 8 поддерживает перпендикулярность между осью гироскопа  $H_1$  и осью платформы  $Ox$ , а двигатель 10 — перпендикулярность между осью гироскопа  $H_2$  и осью платформы  $Oy$ . В соответствии с этим двигатель 8 включен таким образом, что при возникновении положительного угла  $\sigma$  он развивает положительный момент  $M_1$ , т. е. момент, направленный в положительном направлении оси  $Ox_m$  (положительный момент  $M_1$  вызывает прецессию гироскопа 1 в направлении отрицательного отсчета угла  $\sigma$ , что приводит к

уменьшению имеющегося положительного угла  $\sigma$ ).

При положительном  $\tau$  двигатель стабилизации 10 развивает отрицательный момент  $M_2$ , т. е. момент в отрицательном направлении оси  $Oy$ , что вызывает прецессию гироскопа 2 в сторону уменьшения  $\tau$ . Знак минус в уравнении (П.48ж) означает, что положительный угол  $\tau$  создает отрицательный момент  $M_2$ .

Система дифференциальных уравнений (П.48) представляет собой общие уравнения движения двухосной гиросtabilизированной платформы. Эти уравнения можно записать в развернутом виде, если вместо  $M_{x1}$ ,  $M_{y1}$ ,  $M_{z1}$ ,  $M_{x2}$ ,  $M_{y2}$ ,  $M_{z2}$  подставить выражения (П.47), а вместо  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$ ,  $\omega_{x2}$ ,  $\omega_{y2}$ ,  $\omega_{z2}$  — выражения (П.38), (П.39), (П.40).

Общие уравнения движения гиросtabilизированной платформы (П.48) нелинейные, так как переменные  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  входят под знаки тригонометрических функций, а переменные  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  перемножаются между собой. Для исследования системы методами линейной теории автоматического регулирования необходимо эти уравнения линеаризовать. Линеаризацию будем производить для окрестности равновесного состояния, характеризуемого следующими значениями переменных:

$$\begin{aligned}\omega_{x0} &= \omega_{y0} = \omega_{z0} = \omega_{x10} = \dots = \omega'_{z20} = 0; \\ u_{10} &= u_{20} = u_{30} = 0; \\ \sigma_0 &= \tau_0 = 0; \\ \alpha_0^* &= \text{const}, \beta_0^* = \text{const}; \\ M'_{xm0} &= M'_{y0} = 0.\end{aligned}\tag{П.49}$$

Здесь предполагается, что в равновесном состоянии неподвижны как платформа, так и основание, несущее платформу. Предположим также, что в случае устойчивости платформы сводятся к нулю не только малые отклонения переменных  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ , характеризующих платформу, но и малые отклонения угловых скоростей основания  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  от их равновесных значений (П.49). Такое положение встречается в тех случаях, когда гиросtabilизированная платформа установлена на объекте, являющемся звеном устойчивой замкнутой системы стабилизации.

Производя варьирование нелинейных уравнений (П.48), получим линейные уравнения относительно малых отклонений (вариаций) переменных от их значений в равновесном режиме (П.49). Если в этих уравнениях вариации относитель-

<sup>1</sup> Запасывания в усилительной цепи, состоящей из потенциометрического устройства, усилителя  $U$  и двигателя стабилизации, не учитываются. При учете запаздываний вместо постоянных коэффициентов  $K_1$ ,  $K_2$  будут фигурировать передаточные функции.

ных угловых скоростей  $\dot{\alpha}^*$ ,  $\dot{\beta}^*$  заменить вариациями абсолютных угловых скоростей согласно выражениям

$$\dot{\alpha}^* = \frac{1}{\cos \beta_0^*} (\omega_x - u_2 \sin \alpha_0^* \sin \beta_0^* + u_3 \cos \alpha_0^* \sin \beta_0^*) - u_1;$$

$$\dot{\beta}^* = \omega_y - u_2 \cos \alpha_0^* - u_3 \sin \alpha_0^*, \quad (\text{П.38})$$

вытекающим соответственно из первого и второго уравнений (П.38) после их варьирования, а вариацию абсолютной угловой скорости  $\omega_z$ , по которой стабилизация платформы не производится, выражением

$$\omega_z = \omega_x \operatorname{tg} \beta_0^* - \frac{\sin \alpha_0^*}{\cos \beta_0^*} u_2 + \frac{\cos \alpha_0^*}{\cos \beta_0^*} u_3,$$

также вытекающим из первого и третьего уравнений (П.38), то после умножения первого уравнения на  $\cos \beta_0^*$  линеаризованные уравнения можно представить в следующем виде <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\cos \beta_0^*} \dot{\omega}_x + \frac{f_{xm}}{\cos \beta_0^*} \omega_x - \frac{H_1 \sin 2\beta_0^*}{2 \cos \beta_0^*} \omega_x &= H_1 \cos \beta_0^* \dot{\sigma} + K_1 \sigma + f_{xm} u_1 + \\ + (C^0 + A'') \sin \alpha_0^* \operatorname{tg} \beta_0^* \dot{u}_2 + f_{xm} \sin \alpha_0^* \operatorname{tg} \beta_0^* u_2 - (C^0 + A'') \cos \alpha_0^* \operatorname{tg} \beta_0^* \dot{u}_3 - \\ - f_{xm} \cos \alpha_0^* \operatorname{tg} \beta_0^* u_3 + M'_{xm} + f_{\sigma} \sin \beta_0^* \dot{\sigma} + f_{\tau} \sin \beta_0^* \dot{\tau} - H_1 \sin \alpha_0^* u_2 + \\ + H_1 \cos \alpha_0^* u_3; \\ B \dot{\omega}_y + f_y \omega_y &= -H_2 \dot{\tau} - K_2 \tau + f_y \cos \alpha_0^* u_2 + f_y \sin \alpha_0^* u_3 + M'_y - \\ - H_2 \operatorname{tg} \beta_0^* \dot{\omega}_x + H_2 \frac{\sin \alpha_0^*}{\cos \beta_0^*} u_2 - H_2 \frac{\cos \alpha_0^*}{\cos \beta_0^*} u_3; \\ C' \ddot{\sigma} + f_{\sigma} \dot{\sigma} &= -H_1 \omega_x - C' \operatorname{tg} \beta_0^* \dot{\omega}_x + C' \frac{\sin \alpha_0^*}{\cos \beta_0^*} \dot{u}_2 - C' \frac{\cos \alpha_0^*}{\cos \beta_0^*} \dot{u}_3; \\ C' \ddot{\tau} + f_{\tau} \dot{\tau} &= H_2 \omega_y - C' \operatorname{tg} \beta_0^* \dot{\omega}_x + C' \frac{\sin \alpha_0^*}{\cos \beta_0^*} \dot{u}_2 - C' \frac{\cos \alpha_0^*}{\cos \beta_0^*} u_3, \quad (\text{П.50}) \end{aligned}$$

$$\text{где} \quad A = (A^0 + A' + B') \cos^2 \beta_0^* + C^0 \sin^2 \beta_0^* + A'';$$

$$B = B_0 + B' + A'.$$

Характерной особенностью уравнений (П.50) является то, что в качестве переменных в них фигурируют абсолютные угловые скорости платформы  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  вокруг связанных с ней осей и углы  $\sigma$ ,  $\tau$  отклонения гироскопов относительно платформы. Угловые скорости  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ , основания и моменты  $M'_{xm}$ ,  $M'_y$  вокруг осей карданова подвеса играют роль внешних возмущений.

<sup>1</sup> Для сокращения записи вариации обозначены теми же буквами, что и сами переменные. Моменты  $m_1$ ,  $m_2$  от моментных датчиков на осях процессии гироскопов 1 и 2 принимаем равными нулю.



## СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ОДНООСНОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА

Пусть в равновесном состоянии  $\beta^* = 0$  (угол поворота платформы относительно наружного кольца равен нулю) и  $\alpha^* = 0$  (угол поворота наружного кольца относительно объекта равен нулю). Тогда уравнения (П.50), соответствующие каналу  $x_m$ , принимают вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + f_{xm}\omega_x &= H_1\dot{\sigma} + K_1\sigma + f_{xm}u_1 + M'_{xm} + H_1u_3; \\ C'\ddot{\sigma} + f_{\sigma}\dot{\sigma} &= -H_1\omega_x - C'\dot{u}_3. \end{aligned} \quad (\text{П.51})$$

В этих уравнениях  $\omega_x$  — абсолютная угловая скорость платформы относительно ее оси  $Ox$ . Считаем ось  $Ox$  осью инерциальной системы координат, т. е. полагаем абсолютную угловую скорость оси  $Ox$  равной нулю. Тогда угол

$$\alpha = \int \omega_x dt$$

можно рассматривать как угол поворота платформы относительно инерциальной системы координат, а уравнения (П.51) записывать в виде

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + f_{xm}\dot{\alpha} &= H_1\dot{\sigma} + K_1\sigma + f_{xm}u_1 + M'_{xm}; \\ C'\ddot{\sigma} + f_{\sigma}\dot{\sigma} &= -H_1\dot{\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{П.52})$$

Отсутствие в этих уравнениях членов с  $u_3$  объясняется тем, что из принятого в отношении оси  $Ox$  предположения вытекает необходимость предположения  $u_3 = 0$ .

Уравнения (П.52) совпадают с известными уравнениями одноосного гиростабилизатора на неподвижном основании. Уравнениям (П.52) соответствует структурная схема гиростабилизатора, показанная на рис. П.8. Внутренний контур 1 соответствует свободному гироскопу. Заменяя этот контур эквивалентным звеном  $W_r^{\alpha}(s)$ , приходим к структурной схеме, изображенной на рис. П.9. Входящие в передаточную функцию  $W_r^{\alpha}(s)$  параметры имеют следующие выражения через исходные параметры гироскопа:

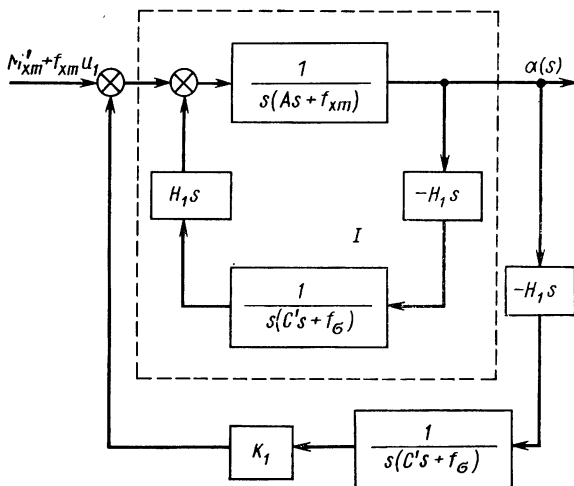


Рис. П.8. Структурная схема одноосного гиростабилизатора

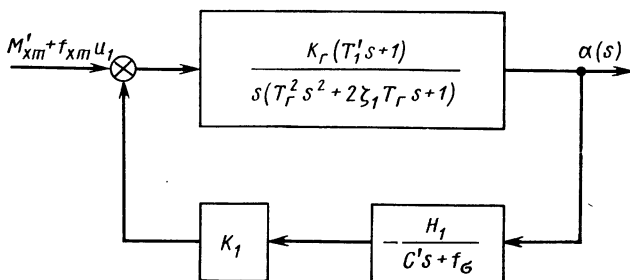


Рис. П.9. Структурная схема, эквивалентная схеме на рис. П.8

$$K_r^{(\alpha)} = \frac{f_\sigma}{H_1^2 + f_\sigma f_{xm}}; T_r = \sqrt{\frac{AC'}{H_1^2 + f_\sigma f_{xm}}}, T'_1 = \frac{C'}{f_\sigma}. \quad (\text{П.53})$$

В дальнейшем предполагаем, что в схеме гиросtabilизатора применен «сухой» гироскоп. Для этого гироскопа  $f_\sigma$  — очень малая величина. Коэффициент вязкого трения  $f_{xm}$  на оси стабилизации также стремятся свести к возможно меньшей величине. Учитывая малость коэффициентов  $f_\sigma$ ,  $f_{xm}$  можно параметры (П.53) выразить упрощенными формулами:

$$K_r^{(\alpha)} = \frac{f_\sigma}{H_1^2}, T_r = \frac{\sqrt{AC'}}{H_1}, T'_1 = \frac{C'}{f_\sigma}, \quad (\text{П.54})$$

## СТАТИЧЕСКАЯ ТОЧНОСТЬ И ПОЛОСА СТАБИЛИЗАЦИИ

Передаточная функция, связывающая угол стабилизации  $\alpha(s)$  и внешний возмущающий момент  $M'_{xm}(s)$ , имеет вид (см. рис. П.9):

$$\frac{\alpha(s)}{M'_{xm}(s)} = \frac{K_r^{(\alpha)} (T'_1 s + 1)}{s (T_r^2 s^2 + 2\zeta_1 T_r s + 1) + K_v}, \quad (\text{П.55})$$

где 
$$K_v = K_1/H_1. \quad (\text{П.56})$$

Постоянный внешний возмущающий момент  $m_{xm} = \text{const}$  вызывает по углу стабилизации статическое отклонение

$$\alpha_{\text{ст}} = \frac{\alpha(s)}{M'_{xm}(s)} m_{xm} \Big|_{s=0} = \frac{K_r^{(\alpha)}}{K_v} m_{xm} = \frac{f_\sigma}{H_1 K_1} m_{xm}. \quad (\text{П.57})$$

Назначение гиросtabilизатора состоит в том, чтобы поддерживать неизменным угол стабилизации  $\alpha$ , так что отклонение (П.57) нежелательно. При неизменном коэффициенте вязкого трения  $f_\sigma$  статическое отклонение можно уменьшить, увеличивая кинетический момент гироскопа  $H_1$  и коэффициент усиления цепи разгрузки  $K_1$ .

Для получения гиросtabilизатора, обладающего высоким качеством не только с точки зрения малости статической ошибки, но и ширины частотной полосы стабилизации, целесообразно увеличивать кинетический момент  $H_1$ , а не коэффициент усиления  $K_1$ .

Частотной полосой стабилизации называем полосу частот возмущающего момента  $m_{xm}$ , в которой ординаты амплитудно-частотной характеристики  $|\alpha(j\omega)/M'_{xm}(j\omega)|$  достаточно малы. Для свободного гироскопа, т. е. для случая

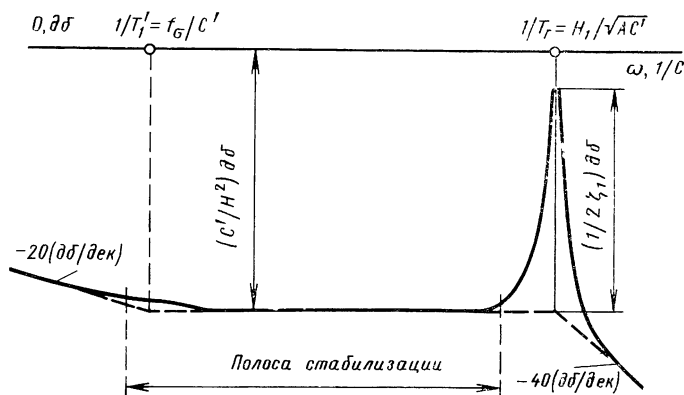


Рис. П.10. Амплитудно-частотная характеристика свободного гироскопа

$K_1=0$ , логарифмическая амплитудно-частотная характеристика  $\left| \frac{\alpha(j\omega)}{M'_{xm}(j\omega)} \right|_{\text{дБ}}$  представлена на рис. П.7. Полоса стабилизации здесь ограничена как со стороны высоких, так и со стороны низких частот. Нетрудно видеть (П.10), что при увеличении  $H_1$  высокочастотная граница полосы смещается в область более высоких частот, т. е. полоса стабилизации расширяется.

Введенное здесь понятие полосы стабилизации гиростабилизатора отличается от известного для следящих систем понятия полосы пропускания тем, что в полосе пропускания синусоидальный входной сигнал следящей системы по амплитуде почти точно воспроизводится на выходе этой системы, тогда как в полосе стабилизации синусоидальный возмущающий момент  $m_{xm}$  практически не вызывает синусоидальных колебаний по углу стабилизации  $\alpha$  (амплитуда вынужденных колебаний по углу  $\alpha$  очень мала).

Вследствие малости относительного коэффициента демпфирования  $\zeta_1$  гироскопа (например  $\zeta_1=0,01$ ) пик амплитудно-частотной характеристики  $\left| \frac{\alpha(j\omega)}{M'_{xm}(j\omega)} \right|$ ,

существующий при частоте  $H_1/\sqrt{AC'}$ , очень высок (его высота  $1/2\zeta_1$ ). Поэтому угловые вибрации несущего гироскоп объекта с частотой  $\omega$ , близкой к частоте нутации  $H_1/\sqrt{AC'}$ , вызывают вынужденные колебания по углу стабилизации  $\alpha$  с большой амплитудой. Резонансную частоту гироскопа  $H_1/\sqrt{AC'}$  (частоту нутации) целесообразно смещать в область возможно более высоких частот, что достигается выбором большого значения  $H_1$ . Однако кинетический момент  $H_1$  обычно ограничен требованием минимизации массы и габаритов гиростабилизатора. Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $H_1$  имеет некоторое фиксированное значение.

## ПРИДАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ГИРОСТАБИЛИЗАТОРУ

Поскольку  $f_\sigma$  и  $H_1$  фиксированы, уменьшение статической ошибки (П.57) возможно только увеличением коэффициента усиления  $K_1$  цепи разгрузки гиростабилизатора. Однако увеличение  $K_1$  приводит к неустойчивости гиростабилизатора, что видно из логарифмических частотных характеристик и из частотного годографа  $G(j\omega)$  разомкнутого гиростабилизатора, представленных на рис. П.11. Неустойчивость гиростабилизатора возникает из-за того, что частотный годограф  $G(j\omega)$  имеет вытянутую вдоль отрицательной части действительной оси выпуклость, внутрь которой попадает критическая точка  $(-1, j0)$ .

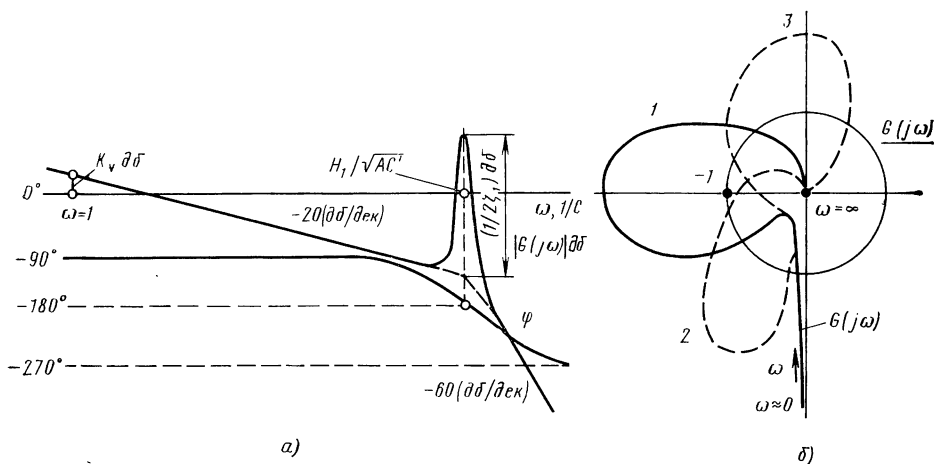


Рис. П.11. Логарифмические частотные характеристики (а) и частотный годограф (б) разомкнутого некорректированного гиросtabilизатора

Устойчивость замкнутого гиросtabilизатора можно обеспечить, принимая очень низкое значение коэффициента усиления  $K_1$  цепи разгрузки. Однако этот путь неприемлем, так как ведет к очень низкой статической точности гиросtabilизатора. При высоком значении  $K_1$  устойчивости можно достигнуть введением в цепь разгрузки корректирующего звена.

Специфическая особенность частотного годографа гиросtabilизатора, а именно, его вытянутость в направлении отрицательной части действительной оси, помимо традиционного для систем автоматического управления способа (использование фазопережающего контура), допускает возможность применения для целей стабилизации корректирующих контуров, вызывающих отставание по фазе. Такая возможность обусловлена тем, что к устойчивой замкнутой системе можно прийти не только поворотом «выпуклости» частотного годографа против часовой стрелки (кривая 2 на рис. П.10, соответствующая применению дифференцирующего контура), но и поворотом ее по часовой стрелке, например, за счет введения в цепь разгрузки инерционного звена (кривая 3).

Возникает вопрос, какой из этих двух способов стабилизации более предпочтителен. Ответ можно получить, обращаясь к логарифмическим корневым годографам (ЛКГ) замкнутого гиросtabilизатора [8].

Как показывает ЛКГ, относительный коэффициент демпфирования  $\zeta$  нутационных колебаний замкнутого гиросtabilизатора при использовании дифференцирующего и инерционного корректирующих контуров имеет примерно одно и то же значение  $\zeta = 0,005$ . Вместе с тем амплитудно-частотные характеристики

показывают, что дифференцирующий контур расширяет частотную полосу стабилизации гиросtabilизатора, а инерционный корректирующий контур эту полосу сужает. Таким образом, применение в цепи разгрузки дифференцирующего контура приводит, вообще говоря, к более качественному гиросtabilизатору.

Неминимально-фазовое корректирующее звено  $\frac{1 - Ts}{1 + Ts}$ , как и инерционное

$\frac{1}{Ts + 1}$ , обуславливает отставание по фазе и с точки зрения протяженности частотной полосы стабилизации гиросtabilизатора уступает дифференцирующему контуру.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 647 с.
2. Боднер В. А., Селезнев В. П., Овчаров В. Е. К теории инерциальных демпфированных систем с произвольным периодом, инвариантных по отношению к маневрированию объекта. — Изв. АН СССР, ОТН. Энергетика и автоматика: 1959, № 3, с. 11—18.
3. Броксмейер И. Ф. Системы инерциальной навигации. Л.: Судостроение, 1967. 279 с.
4. Бромберг П. В. Теория инерциальных систем навигации. М.: Наука, 1979. 294 с.
5. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М.: Изд. МГУ, 1976. 401 с.
6. Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
7. Кузовков Н. Т. О движении гиросtabilизированной платформы при больших углах отклонения. — Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 1, с. 44—51.
8. Кузовков Н. Т. Динамика систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1968. 428 с.
9. Кузовков Н. Т. Системы стабилизации летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1976. 302 с.
10. Кузовков Н. Т. Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М.: Оборонгиз, 1960. 445 с.
11. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М., Машиностроение, 1976. 184 с.
12. Кузовков Н. Т., Карабанов С. В., Салычев О. С. Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
13. Мехра Р. Идентификация и адаптивная фильтрация Калмана. — Механика (сборник статей), 1971, № 3, с. 34—51.
14. Неусыпин А. К. Гироскопические приводы. М.: Машиностроение, 1978. 191 с.
15. Пельпор Д. С. Теория гироскопических стабилизаторов. М.: Машиностроение, 1965. 348 с.
16. Петров Б. Н., Кухтенко А. И. О структуре абсолютно-инвариантных систем и условиях их физической осуществимости. — Труды II совещания по теории инвариантности в системах автоматического управления. Изд-во АН СССР, 1963.
17. Петров Б. Н., Рутковский В. Ю. Двухкратная инвариантность систем автоматического управления. — ДАН СССР, т. 161, 1965, № 4, с. 789—790.
18. Питтман Д. Инерциальные системы управления. М.: Оборонгиз, 1964, с. 453.
19. Ривкин С. С., Ивановский Р. И., Костров А. В. Статистическая оптимизация навигационных систем. Л.: Судостроение, 1976. 279 с.
20. Салычев О. С. Алгоритм предотвращения расходимости процесса оптимальной фильтрации. — Техническая кибернетика, 1979, № 4, с. 168—170.
21. Фридлендер Г. О. Инерциальные системы навигации. М.: Физматгиз, 1961. 154 с.
22. Bar-Itzhack I. Y. Navigation Computation in Terrestrial Strapdown Inertial Navigation Systems. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, November 1977, vol. AES-13 N 6, p. 679—689.

23. Jazwinski A. H. Stochastic Processes and Filtering Theory,—N. Y. 1970, p. 376.

24. Joos D. K. Fehlermodell eines Inertial — navigations Systems für die integrierte Navigation durch Ausgleichung nach der Methode der Kleinsten Quadrate. Zeitschrift für Flugwissenschaften and Weltraumforschung 1977, Mai/Juni Band 1, Heft 3, S. 185—193.

25. Kailath T. An innovations approach to least-squares Estimation.—IEEE Trans. Autom. Control, 1968, N 6, p. 646—655.

26. Kayton M., Fried W. R. Avionics Navigation Systems N. Y. 1969, p. 666.

27. Leondes T., Pearson J. Kalman Filtering of Systems with Parameter Uncertainties. A. Survey.—Int. J. Control, 1973, vol. 17, N 4, p. 758—801.

28. Magnus K. Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisel. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 35, Heft 1/2, Januar/Februar 1955, S. 23—34.

29. Magnus K. Fortschritte in der Kinetik von Mehrkörpersystemen, Jahrbuch 1972 der Deutschen Gesellschaft für Luft und Raumfahrt, S. 11—26.

30. Pinson Y. C. Inertial Guidance for Cruise Vehicles in book C. T. Leondes (ed), Guidance and Control of Aerospace Vehicles, ch 4, N. Y. 1963.

31. Quigley A. An Approach to the Control of Divergence in Kalman Filter Algorithms.—Int. J. Control, 1973, vol. 17, p. 741—746.

32. Weinreb A., Bar-Itzhack I. Y. The Psi-angle Error Equation in Strapdown Inertial Navigation Systems, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. vol. AES-14, May 1978, p. 539—542.

33. Wilcox J. C. A New Algorithm for Strapped-Down Inertial Navigation. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. vol. AES-3, N 3, Sept. 1967. p. 796—802.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1. Платформенные инерциальные навигационные системы . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Принцип действия инерциальной навигационной системы . . .	5
1.2. Инерциальная навигационная система с эллипсоидальной моделью Земли . . . . .	8
1.3. Инерциальная навигационная система со сферической моделью Земли . . . . .	13
1.4. Инерциальная навигационная система с неточными значениями параметров и нарушениями структуры . . . . .	17
1.5. Влияние дрейфа гироскопов . . . . .	21
1.6. Инерциальная навигационная система с ориентируемой по странам света платформой . . . . .	24
<b>Глава 2. Демпфирование свободных колебаний инерциальной навигационной системы без использования внешней информации . . .</b>	<b>26</b>
2.1. Демпфирование инерциальной навигационной системы подачей на вход гироскопов и второго интегратора вырабатываемой широты (долготы.) . . . . .	28
2.2. Демпфирование инерциальной навигационной системы прямой связью вокруг первого интегратора . . . . .	32
2.3. Демпфирование инерциальной навигационной системы прямой связью с изменением частоты . . . . .	35
2.4. Свободные колебания инерциальной навигационной системы, демпфированной прямой связью . . . . .	36
2.5. Демпфирование инерциальной навигационной системы подачей сигнала акселерометра на гироскопы . . . . .	38
2.6. О влиянии демпфирования на точность инерциальной навигационной системы . . . . .	40
<b>Глава 3. Инерциальные системы навигации с ограниченной ошибкой от дрейфа гироскопов . . . . .</b>	<b>42</b>
3.1. Причины возникновения ошибки инерциальной навигационной системы от дрейфа гироскопов . . . . .	42
3.2. Формирование каналов инерциальной навигационной системы для режима «идеальной работы» . . . . .	43
3.3. Схема инерциальной навигационной системы с ограниченной ошибкой от дрейфа гироскопов . . . . .	44
3.4. Точность инерциальной навигационной системы с ограниченной ошибкой от дрейфа гироскопов . . . . .	47
3.5. Схема инерциальной навигационной системы с вертикальным акселерометром . . . . .	51
<b>Глава 4. Бесплатформенные инерциальные навигационные системы . .</b>	<b>56</b>
4.1. Системы координат, обозначения и предположения . . . . .	57
4.2. Векторные и матричные уравнения . . . . .	59

4.3. Алгоритмы идеальной работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы	62
4.4. Расщепленная расчетная схема $m-n$	63
4.5. Определение матрицы перехода $D_i^m$	69
4.6. Последовательность и быстрота проведения расчетов	70
<b>Глава 5. Уравнения ошибок инерциальной навигационной системы</b>	<b>71</b>
5.1. Общие уравнения ошибок платформенной инерциальной навигационной системы (ПИНС)	72
5.2. Уравнения ошибок инерциальной навигационной системы со свободной в азимуте платформой	79
5.3. Структурная схема ошибок инерциальной навигационной системы	81
5.4. Уравнения ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС)	83
5.5. Сравнение методических ошибок платформенной и бесплатформенной инерциальных навигационных систем	88
<b>Глава 6. Наблюдаемость и идентификация ошибок инерциальной навигационной системы</b>	<b>89</b>
6.1. Один канал инерциальной навигационной системы	90
6.2. Уравнения ошибок инерциальной навигационной системы с ориентруемой по странам света платформой	95
6.3. Решение уравнений ошибок	96
6.4. Начальные условия при выставке с помощью гирокомпасирования	99
6.5. Алгебраическая модель для идентификации ошибок инерциальной навигационной системы	103
<b>Глава 7. Инерциальные навигационные системы, корректируемые по внешней информации</b>	<b>106</b>
7.1. Решение уравнений ошибок автономной инерциальной навигационной системы	106
7.2. Анализ уравнений ориентации	111
7.3. Демпфирование автономной инерциальной навигационной системы сигналами от доплеровского измерителя скорости (без изменения собственной частоты колебаний)	114
7.4. Демпфирование инерциальной навигационной системы с изменением собственной частоты	116
<b>Глава 8. Уравнения оптимальной фильтрации</b>	<b>122</b>
8.1. Оптимальная оценка вектора состояния в виде линейной комбинации измерений	123
8.2. Использование ортогональных проекций для определения оптимальной оценки	126
8.3. Анализ уравнений оптимальной фильтрации	132
8.4. Применение обновляемой последовательности для средней квадратичной фильтрации	134
<b>Глава 9. Адаптивная фильтрация</b>	<b>137</b>
9.1. Корреляционные адаптивные фильтры	137
9.2. Адаптивный фильтр Язвинского с обратной связью по обновляемому процессу	141
9.3. Новый адаптивный фильтр с обратной связью по обновляемой последовательности	146
9.4. Новый адаптивный фильтр, не требующий априорной информации о матрицах $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$	150
9.5. Редуцированный фильтр Калмана	153
9.6. Адаптивные редуцированные алгоритмы линейной фильтрации	160
9.7. Свойства фильтров с обратной связью по обновляемому процессу	168



Глава 10. Применение методов фильтрации в системах инерциальной навигации	172
10.1. Возможные схемы включения оптимального фильтра в инерциальную навигационную систему	172
10.2. Повышение точности инерциальной навигационной системы без использования внешних измерений	174
10.3. Повышение точности инерциальной навигационной системы на основе использования оптимального фильтра Калмана	177
10.4. Использование адаптивных редуцированных фильтров 1 и 2-й модификаций для повышения точности инерциальной навигационной системы	181
10.5. Применение адаптивного фильтра $k$ -й модификации для повышения точности инерциальной навигационной системы	187
Приложения	193
1. Нелинейные уравнения ошибок инерциальной навигационной системы и их линеаризация	193
2. Гиростабилизированная платформа	201
Составление уравнений гиросплатформы	201
Структурная схема одноосного гиростабилизатора	208
Статическая точность и полоса стабилизации	209
Придание устойчивости гиростабилизатору	210
Список литературы	212

ИБ № 2985

Николай Тимофеевич Кузовков,

*Олег Степанович Салычев*

## ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ И ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Редактор *И. А. Суворова*  
Художественный редактор *В. В. Лебедев*  
Технический редактор *В. И. Орешкина*  
Корректоры *О. Е. Мишина* и *А. П. Сизова*  
Обложка художника *С. Н. Орлова*

---

Сдано в набор 20.01.82. Подписано в печать 14.04.82. Т-09310. Формат 60×90<sup>1/16</sup>.  
Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 13,5.  
Уч.-изд. л. 13,56. Заказ 60. Тираж 1560 экз. Цена 80 к.

---

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение»,  
107076, Москва, Б-76 Стромынский пер., 4.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР  
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.  
Хохловский пер., 7.