ЗАЧЕМ И ПОЧЕМУ

Математика

Вольфганг Блум

Иллюстрации Йоахима Кнаппе

МИР КНИГИ

Предисловие

Математика — одна из самых древних наук. И сегодня используют математические утверждения, доказанные древнегреческими мыслителями Фалесом, Архимедом и Эвклидом.

Мы живем в эпоху математики. Ведь техника все активнее проникает в нашу жизнь, а ее создание немыслимо без этой науки. Существование вычислительной техники отнюдь не умаляет значения математики, оно лишь придает ей еще больший вес. Программы, которые используются компьютерами, — это не что иное, как прикладная математика.

Помимо вычислений, человеку издавна требовалось производить различные действия с пространством. Крестьянам надо было измерять поля, а мореплавателям — определять положение корабля во время путешествия, т. е. рассчитывать географические координаты. И в наши дни ученые занимаются измерениями пространства. В последнее время открыты новые методы его описания, а так называемая фрактальная геометрия предлагает совершенно иной взгляд на окружающий нас мир.

В математике изучается и такое понятие, как «случайность». Еще 300 лет назад знатные люди заказывали ученым выявление закономерностей, которые могли принести удачу в азартных играх. В наши дни многие компьютерные вычисления немыслимы без применения законов теории вероятности. Страховые компании давно бы обанкротились, если бы математики не рассчитали приемлемые размеры взносов для их клиентов.

Политики и военные пользуются шифрами с глубокой древности. А между тем шифры вошли и в нашу повседневную жизнь. Определенный шифр — своеобразный математический ключ — позволяет снимать деньги в банкомате и оплачивать покупки через Интернет.

Невозможно дать обзор этой науки в одной книге, которая в последние десятилетия развивалась намного быстрее, чем за всю свою историю. Ежегодно появляются многие тысячи исследовательских работ. Даже специалистам трудно уследить за прогрессом во всех ее областях. Эта книга приглашает читателя в удивительный мир, возникший благодаря абстрактному мышлению.

Источники иллюстраций:
Фотографии: Архив автора: С. 32 / 33, 34; Архив искусства и истории, Берлин: С. 6, 11, 15, 17, 26, 29, 30, 36 внизу справа, 41, 47; DPA: С. 36 вверху слева, 43; Фокус, Гамбург: С. 1, Mary Evans Picture Library, London: С. 21, 25; Ullstein Bilderdienst / Берлин: С. 12, 43 вверху слева; ZEFA Bildagentur, Дюссельдорф: С. 45 внизу
Иллюстрации: Йоахим Кнаппе

УДК 087.5
ББК 92я2
Б 70

Блум, Вольфганг
Математика / Пер. с нем. С.Н. Одинцовой. – М.: ЗАО «Мир Книги Ритейл», 2011. – 48 с.

Оригинальное издание: WAS IST WAS Mathematik

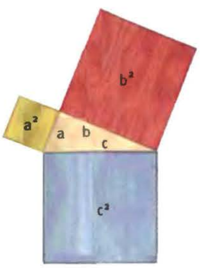
ISBN 978-5-501-00010-0

Содержание

Больше, чем просто счет

Числа

Пространство



Вероятность

Шифры

Больше, чем просто счет

Что изучает математика?

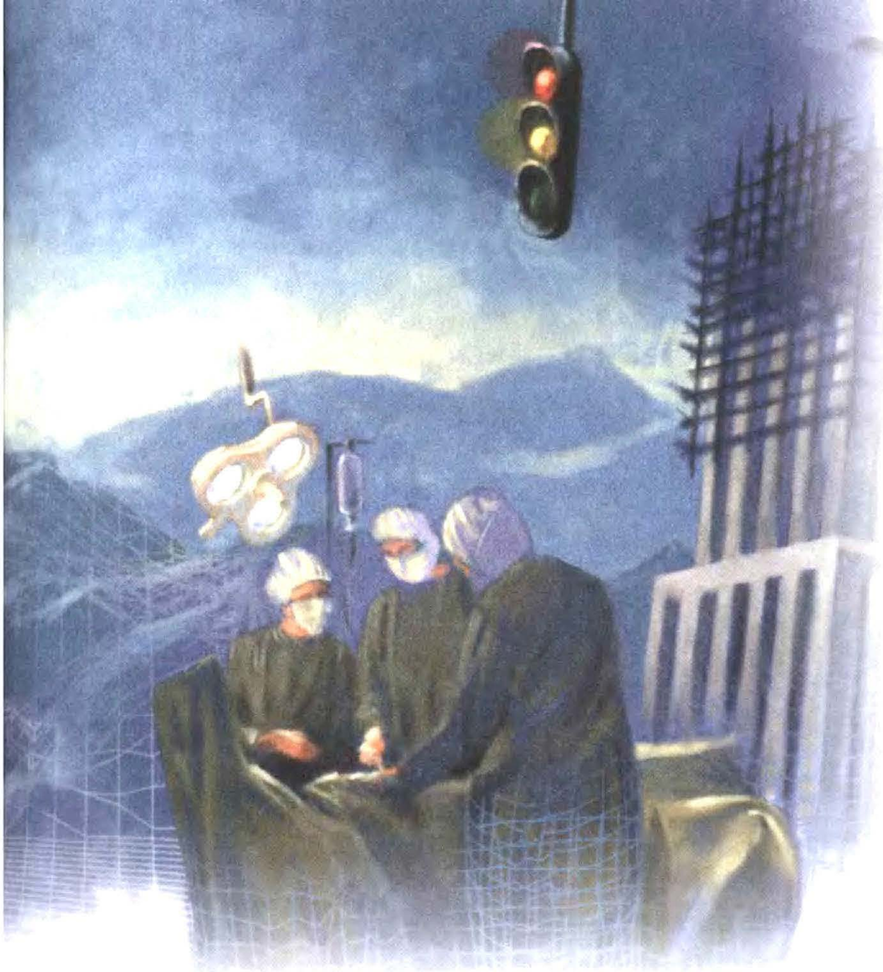
В математике отбрасывается все то, что не является необходимым для решения данной задачи, и учитывается лишь самое существенное. Математики имеют дело с абстрактными понятиями. Хороший пример тому — числа. Число 3 означает не «3 яблока» или «3 груши», а «3 штуки чего бы то ни было». Точно так же шар в математике — это не определенный, например бильярдный, шар, а абстрактная фигура.

Тот, кто изучает карту города, занимается математикой, сам того не ведая. Он не думает о домах, машинах, пешеходах и находит нужную улицу, хотя на карте она изображена только линией.

Задача математики, которую часто называют царицей наук, не в том, чтобы считать, а в том, чтобы распознавать логические закономерности. (Умение считать — это всего лишь условие для того, чтобы заниматься математикой.) Математическое достижение состоит не в том, чтобы умножить, например, 876 на 357, а в том, чтобы доказать, что

ВЕЧНЫЕ ИСТИНЫ

Математика — древнейшая наука, она существовала во всех древних цивилизациях: китайской, египетской, вавилонской, греческой. В математике единожды найденные закономерности верны всегда: 2+2 было равно 4 и в Древней Греции, равно оно четырем и сейчас, и в будущих столетиях.



Автомобили, самолеты, компьютеры, современная медицина — за всем этим стоит математика.

КРАСОТА МАТЕМАТИКИ

Английский математик Годфри Харолд Харди (1817—1947) писал: «Труды математика должны быть так же прекрасны, как произведения художника или поэта. Идеи должны гармонировать, как краски или слова». Неспециалистам сложно понять, что математики понимают под красотой. Шедеврами считаются, например, евклидово доказательство бесконечности простых чисел (см. с. 15) и теорема Пифагора (см. с. 27).

не может существовать самое большое число, поскольку для каждого числа можно создать еще большее, прибавив 1.

В первую очередь математика занимается числами. Но некоторые ее разделы сначала ничего общего с числами не имели. Геометрия, например, изучает фигуры, такие как треугольник, круг или сфера, и их свойства; теория вероятности — случайные события, например выпадение шести очков при игре в кости. Но и эти области математики связаны с миром чисел. Благодаря им можно, например, определить свойства геометрических фигур, таких как прямая или сфера.

В каких областях применяется математика?

Без математики не могли возникнуть телевидение, автомобили, электротехника, холодильники. За любой техникой всегда стоит математика, без ее применения невозможным было бы создание бытовых и научных приборов, любых предметов, которыми мы привыкли пользоваться. Например, в основе разработки двигателя автомобиля лежат сложные вычисления. Чтобы извлечь звуки из CD, тоже необходимы математические расчеты. Компьютеры действуют на основе логики и математики, поэтому их по праву называют математическими машинами.

Сила математики как раз в том, что она абстрактна и смотрит в корень каждой проблемы. Так, можно обнаружить общность в задачах, которые на первый взгляд совершенно различны. Идет ли речь о новой гидроэлектростанции, бесшумном

Изучая карту города, тоже занимаешься математикой.

самолете, детских подгузниках или об отливке металла, в каждом из этих случаев имеет место течение какого-то вещества. Неважно, вода это, воздух, моча или жидкий металл. Расчеты будут одни и те же. Единожды разработанная, математическая модель всех четырех процессов готова к применению. Точно так же расчеты расписания автобусов, вывоза мусора и разработки компьютерных чипов для математика — задачи одного порядка: во всех этих случаях надо сделать маршрут максимально коротким.

Не только инженерам и механикам, но и представителям естественных (и даже гуманитарных) наук математика необходима. Физика, химия или биология — все основано на формулах.

Чем занимаются математики?

Многие математики работают над тем, чтобы воплощать математические теории в жизнь. Сегодня это происходит чаще всего с помощью компьютеров. Небольшая часть специалистов в области этой науки — их называют чистыми математиками — создают новые теоретические знания, разрабатывают так называемые теоремы. Вот пример математической теоремы: «Число делится на 3 без остатка тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 без остатка». Например, сумма цифр числа 84 будет 8+4=12.

Математики не довольствуются лишь утверждениями, они пытаются доказать их, т. е. строго логически вывести подтверждение на основании уже доказанных теорем. Чтобы доказать утверждение, взятое нами в качестве примера, математику недостаточно составить список:

$1+2=3$ делится на 3;
$12=3\cdot4$ делится на 3;
$4+5=$делится на 3;
$45=3\cdot15$ делится на 3;
$8+1=9$ делится на 3;
$81=3\cdot27$ делится на 3.

Даже если этот список составлен компьютером и содержит многие сотни чисел, математика это не убедит. Ведь следующая строка может все опровергнуть.

Математик не довольствуется тем, чтобы подкрепить утверждение парой примеров или положиться на то, что оно не будет подвергаться сомнению со стороны коллег. Единственное, что ему необходимо — доказательство. Как можно бесспорно доказать приведенную в нашем примере теорему, мы увидим позже (см. с. 13).

Чем математика отличается от естественных наук?

В физике, химии или биологии теория считается правильной, если имеет достаточно подтверждений. Подтверждениями могут быть, к примеру, результаты экспериментов. В матема-

ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЙ (1564–1642) – знаменитый итальянский ученый, однажды писал: «Философия, изложенная в великой книге Мироздания, всегда открыта нашему взгляду. Но книгу эту не понять, не выучив прежде языка, на котором она написана. Изложена она языком математики, а буквы его — окружности, треугольники и прочие геометрические фигуры, без которых человеку невозможно понять ни единого слова; без нее он обречен на тщетные блуждания в лабиринте».

БОЛЕЕ 60 000 ИССЛЕДОВАНИЙ

в области математики публикуется ежегодно. Каждое из них содержит как минимум одну теорему, неизвестную до сих пор. В условиях такого информационного потопа ни один математик не может держать в поле зрения всю науку в целом. Ему приходится ограничиться немногими специальными областями. Подобно многим другим наукам, математика разветвляется на бесчисленные разделы.

Можно ли полностью покрыть костями домино шахматную доску из 62 клеток?

СТРОГАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

становится предметом многочисленных шуток. Вот одна из них: инженер, физик и математик едут в поезде по Шотландии. Когда они проезжают мимо черной овцы, инженер замечает: «Смотрите, в Шотландии овцы черные!» Физик поправляет его: «В Шотландии есть по крайней мере одна черная овца». Математик считает и это утверждение не очень точным и добавляет: «В Шотландии есть по крайней мере одна овца, черная по крайней мере с одного бока».

тике опираются не на эксперименты, а на непогрешимую логику. Разницу можно видеть из примера: шахматная доска имеет 64 клетки ($8 \cdot 8$). Уберем две крайних белых клетки по диагонали так, чтобы их осталось 62. Одна кость домино занимает два поля шахматной доски. Можно ли расположить 31 кость домино таким образом, чтобы полностью покрыть ими доску из 62 клеток?

Специалист в области естественных наук попытается поразному расположить кости домино. Спустя пару минут он поймет, что ничего не получается, и, исходя из этого, сделает вывод, что задача не имеет решения. Но поскольку существуют миллионы возможностей расположить кости домино, естествоиспытатель никогда не может быть уверенным наверняка. Возможно, кто-нибудь когда-нибудь и найдет решение. Математик же будет опираться на логику. Вот ход его рассуждений: у нас есть 30 белых и 32 черных клетки. Каждая кость домино покрывает две соседние клетки. Эти клетки всегда разного цвета. На оставшихся двух черных клетках расположить последнюю кость домино нельзя, поскольку две клетки одного цвета граничить не могут.

Числа

Что такое натуральные числа?

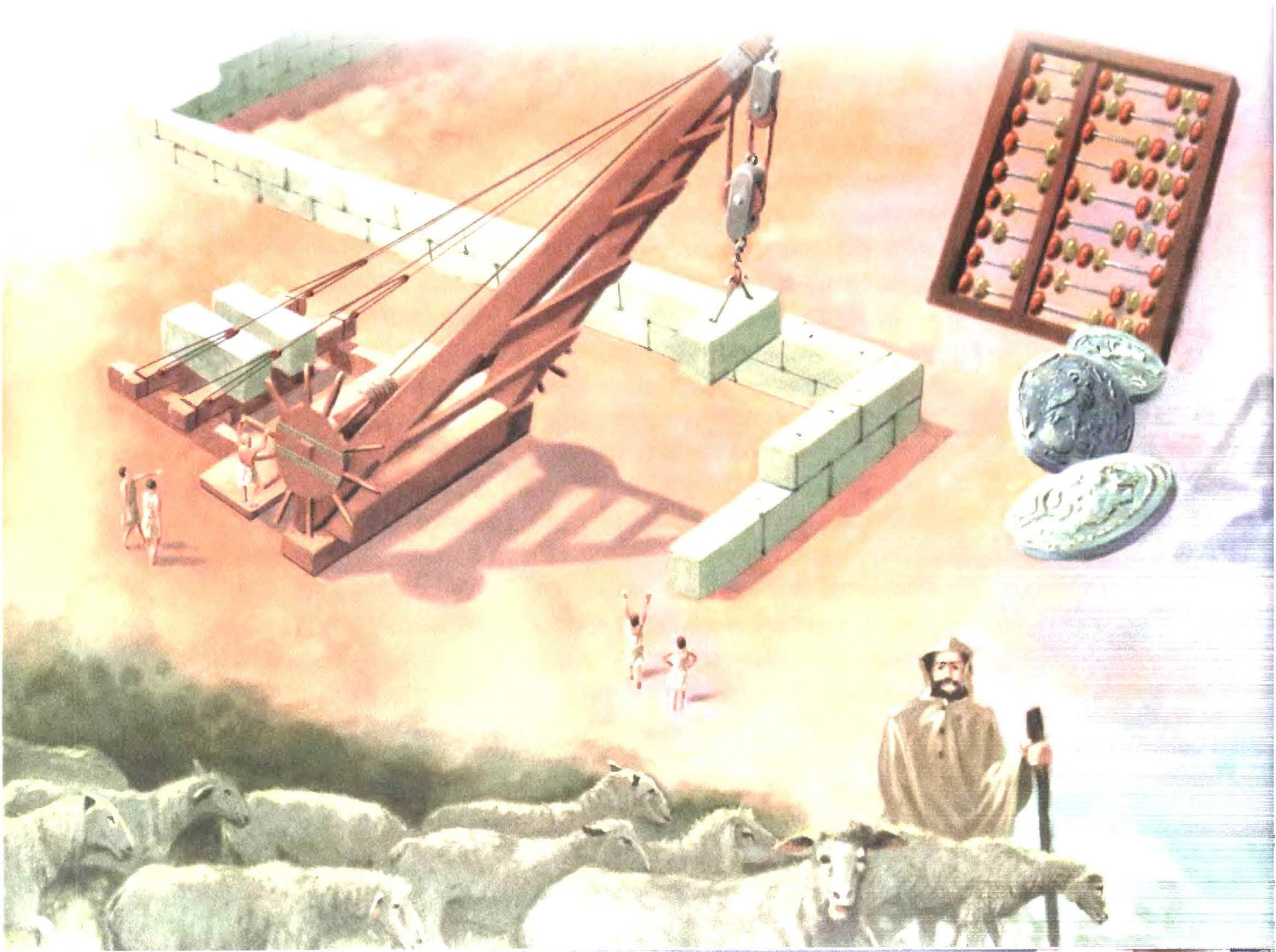
Математика оперирует числами. Самыми простыми из них являются натуральные числа: 1, 2, 3, 4 и т. д. Среди них нет наибольшего, поскольку для любого натурального числа всегда найдется еще большее, если прибавить к исходному 1. Множество натуральных чисел бесконечно. Самым меньшим натуральным числом является 1.

При **сложении** натуральных чисел получаем их **сумму** — тоже натуральное число, а при перемножении — **произведение**, также число натуральное. Пример: $6 \cdot 7 = 42$. 42 без остатка делится на 6 и на 7. Поскольку $42 \cdot 1 = 42$, то 42 можно без остатка делить на 1 и на само себя, как и любое натуральное число. Если же 42 разделить на 5, получится остаток: $42 = 8 \cdot 5 + 2$.

Если в расчете есть скобки, то сначала выполняется операция в скобках, например: $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 7 = 35$. Но можно каждое из заключенных в скобки чисел умножить на 5, а затем сложить результаты: $5 \cdot (4+3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$. Если же скобки убрать, то получится другое выражение и иной результат: $5 \cdot 4 + 3 = 23$.

БОЛЬШИЕ ЧИСЛА

МИЛЛИОН — это тысяча раз по тысяче, или единица с шестью нулями: 1 000 000. МИЛЛИАРД — это тысяча миллионов, или единица с девятью нулями: 1 000 000 000. БИЛЛИОН — это тысяча миллиардов, или единица с двенадцатью нулями. БИЛЛИАРД — тысяча биллионов, или единица с пятнадцатью нулями.



ЕЩЕ БОЛЬШИЕ ЧИСЛА

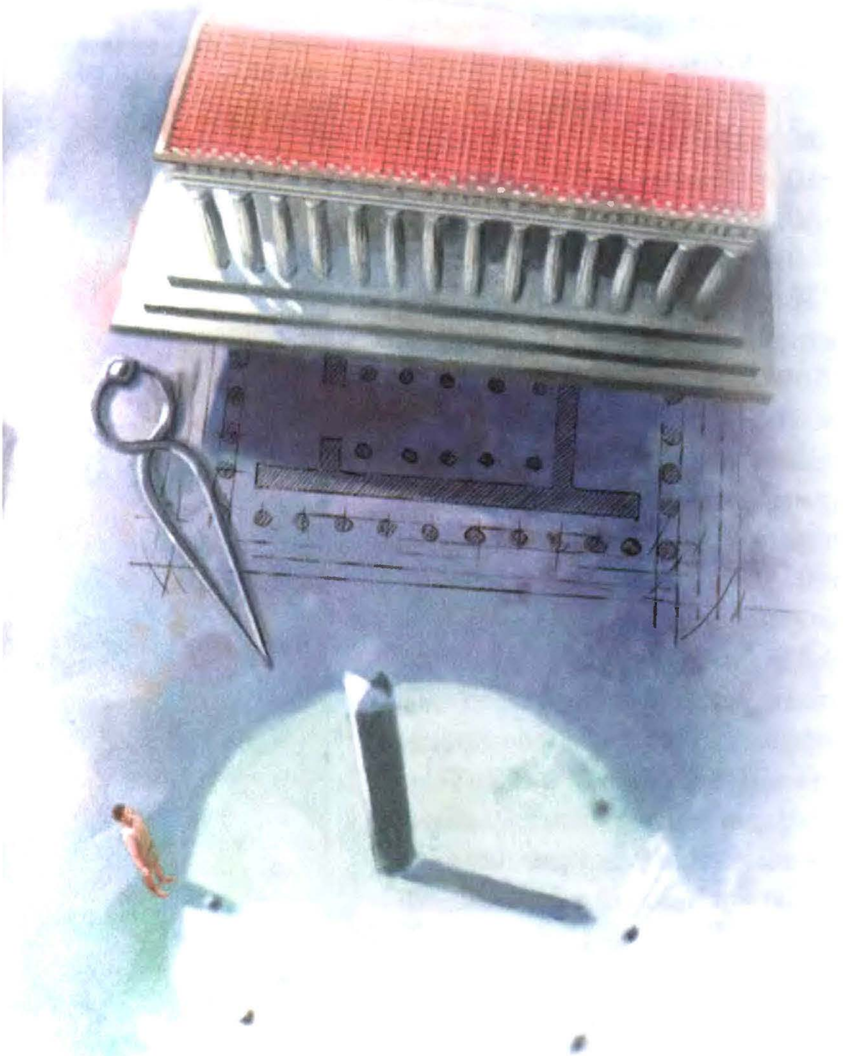
Вместо того, чтобы писать множество нулей, математики обозначают такие числа в виде степени числа 10. Так, миллион — это 10^6, миллиард — 10^9, биллион — 10^{12}, а биллиард— 10^{15}. Дальше идут триллион (10^{18}), триллиард (10^{21}), квадриллион (10^{24}), квадриллиард (10^{27}).

Роль чисел в истории человечества постоянно возрастала, требовалось ли считать скот, возводить здания или вести торговлю.

Число называется **четным**, если оно без остатка делится на 2. В противном случае мы называем его **нечетным**. Четные числа: 2, 4, 6, 8, 10, 12..., нечетные: 1, 3 , 5, 7, 9, 11, 13...

Умножение числа на себя называют **возведением в степень**. Например: $3\cdot3=3^2=9$, или 3 во второй степени, или 3 в квадрате. Если $4\cdot4\cdot4=4^3=64$, говорят: «4 в третьей степени». $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ — это 2 в четвертой степени.

При возведении числа в степень 1 получается само это число. Пример: $5^1=5$. Есть и нулевая степень. Любое число, возведенное в нулевую степень, равно 1.



Кто изобрел числа?

Одно из самых удивительных доказательств употребления чисел в древности найдено на раскопках в Заире (Центральная Африка), в местности, называемой ныне Ишанго. Археологи обнаружили там костяную ручку инструмента, возраст которой более 11 000 лет (его изображение см. на с. 10). На нем группами нанесены многочисленные насечки. В одном месте мы видим последовательность из 11, затем 13, 17 и 19 насечек. Так древние люди писали числа. Есть племена, до сих пор живущие в дальних уголках мира, которые, как маленькие дети, знают лишь пару-тройку чисел. Для всего, что выходит за эти рамки, существует понятие «много».

Со временем числа приобретали все большее значение в жизни людей. Чем многочисленнее становилось население и чем активнее происходило разделение труда, тем сильнее была потребность в счете. Пастух хотел знать, сколько животных в его стаде и сколько вилков капусты он может выменять за одну овцу. На рынке продавцы и покупатели должны были сравнивать цены. Плавая по морю, необходимо было знать, каким курсом идти, чтобы добраться до пункта назначения. Числа были нужны человеку для расчета времени, расстояний, площади и объема. Чтобы построить пирамиду,

Если хочешь продать ***овец,*** *научись считать.*

ЗАГАДКОЙ

остается и по сей день следующее обстоятельство: случайно или осознанно древние люди Ишанго наносили на кости последовательности из 11, 13, 17 и 19? Ведь 11, 13, 17 и 19 — единственные числа между 10 и 20, которые делятся без остатка только на себя и на 1. Числа с такими свойствами называют простыми (см. с. 14).

Кости Ишанго с насечками, обозначающими числа.

древние египтяне должны были рассчитать, сколько нужно каменных блоков. Такие сложные расчеты уже необходимо было записывать.

Что такое позиционная система счисления?

Наша нынешняя система счисления (арабская) пришла к нам из Индии через Аравию. Большим ее достоинством является то, что цифра меняет значение в зависимости от положения в числе (позиционная система). Так, единица на последнем месте означает 1, на третьем от конца сотню (например, в числе 101). Благодаря этому с помощью десяти символов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно изобразить все возможные числа, какими бы большими они ни были. Когда мы пишем число, мы раскладываем его на единицы, десятки, сотни, тысячи, десятки тысяч... Короче говоря, на так называемые **десятичные порядки** или **степени десяти.**

$10^0=1;$

$10^1=10;$

$10^2=10\cdot10=100,$

$10^3=10\cdot10\cdot10=1000,$

$10^4=10\cdot10\cdot10\cdot10=10\,000...$

263 — это сокращенное выражение для $2\cdot10^2+6\cdot10^1+3\cdot10^0$, а 5007 — это $5\cdot10^3+0\cdot10^2+0\cdot10^1+7\cdot10^0$.

Древним египтянам, грекам и римлянам принцип позиционной системы был еще неизвестен. Так, у римлян, например, I означало 1, V — 5, X — 10, L — 50, C — 100, D — 500, M — 1000. Чтобы записать число этими цифрами, их надо было повторять: III означало 3, XXXVII — 37. Имея такую систему счисления, римлянам приходилось не только каждый раз использо-

ЧИСЛА В ДЖУНГЛЯХ

У бакаири – племени, обитающем в бразильских джунглях,– единица называется «tokále», а два – «aháge». Чтобы продолжать счет дальше, они ставят оба слова друг за другом. Например, «aháge tokále» означает 3. Так продолжается до 6. Дальше бакаири помогают себе пальцами на руках и ногах. Если число превышает 20, они взлохмачивают волосы и кричат «méra méra».

ЦИФРЫ

Простая система счисления ишанго (каждое число обозначалось соответствующим числом штрихов) с течением времени оказалась неудобной. Ну кто станет делать 100 насечек? Или 1000? И кто захочет их считать? Поэтому многие древние народы создали специальные знаки для больших чисел. В древнекитайской системе счисления был значок для 100 , для 1000 . Египтяне изображали 100 как , а 1000 как . Когда майя писали большие числа, они ставили разные значки один под другим. Такое расположение означало умножение. 100 они обозначали как , это означало 5 — раз по 20. .

ПРИ РАСЧЕТАХ С НУЛЕМ

правила просты: если прибавить 0 к какому-то числу или вычесть его, это число останется неизменным. Если его умножить на 0, получится 0. Делить на 0 нельзя.

вать все новые символы для обозначения больших чисел. Даже умножение значительно затруднялось. В позиционной системе умножить 10 на 12 просто: всего лишь приписать 0 к 12. Результат — 120.

А вот умножая X на XII, результат (CXX) получить куда сложнее!

Кто изобрел ноль?

Древние вавилоняне еще 4000 лет назад были знакомы с позиционными системами счисления. Они изображали числа значками в виде клинышков на глиняных табличках (отсюда и называние — клинопись). Единица у них обозначалась вертикальным клинышком ▼, десятка — уголком ◀. Группа символов, которая находилась с правого края, считалась единицами, а следом шли не десятки, как у нас, а «шестидесятки». Число ▼▼◀◀▼◀ ▼▼▼ следует читать как $2 \cdot 60^2 + 21 \cdot 60 + 13 \cdot 60^0 =$ $= 7200 + 1260 + 13 = 8473$. Вавилонская система счисления существует и по сей день: мы делим час на 60 минут, а минуту — на 60 секунд.

Сложности возникали у вавилонян с такими числами, как 3601: ▼▼. Ведь число 61 пишется точно так же. Здесь не хватает символа-заполнителя для второго разряда. В арабских числах эту роль выполняет 0, так что спутать 101 и 11 невозможно. Но вавилонянам ноль был неизвестен, поэтому в V в. до н. э. они изобрели специальный знак для обозначения пустующего разряда. Самостоятельно этот знак не использовался.

Хотя древние вавилоняне, египтяне, греки и китайцы обладали обширными знаниями в математике, понятие «0» они не вводили, вероятно, подсознательно опасаясь значка, который означал «ничто».

Адам Ризе (1492—1559) впервые в Европе ввел ноль в своих учебниках, по которым долгое время учили арифметику в школах.

В VI в. ноль впервые употребил индийский математик и астроном Ариабхата. Он назвал его «kha», что означало «отверстие» или «дыра», но также и «небо». В VIII в. н. э. арабы переняли этот значок у другого индийского математика Брахмагупты. С Ближнего Востока ноль в XI в. попал в Европу.

Что такое двоичные числа?

В древности люди при счете пользовались пальцами как счетным инструментом (так же до сих пор делают маленькие дети, когда начинают учиться считать). Поэтому (и только поэтому) в настоящее время мы имеем 10 цифр и производим расчеты в так называемой десятичной или децимальной (от лат. decimus — десятый) системе. Существуют позиционные системы и с другим количеством символов. Так, компьютер знает всего два символа: отсутствие тока означает 0, наличие — 1. Все остальные числа образуются комбинациями этих двух. В этой системе — ее называют двоичной — запись 10 (читается не как «десять», а как «один ноль») означает 2, 11 («один один») — 3, 100 («один ноль ноль») — 4, 101 («один ноль один») — 5 и так далее. И единица здесь имеет разные значения в зависимости от того, где она стоит. На последнем месте она означает 1, на предпоследнем — 2, на третьем от конца — 4, а на пятом от конца — 8.

Записывая число в двоичной системе, его разбивают на степени двойки: $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=2\cdot2=4$, $2^3=2\cdot2\cdot2=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$ и т. д.

Так что в двоичной системе число 11111 означает:
$1\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0=$
$=16+8+4+2+1=31$,
а 100000111 означает:
$1\cdot2^8+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0=263$.

Как считать с помощью букв?

Математики часто используют в вычислениях буквы, которые могут обозначать неизвестные величины или служить символами-заполнителями. Например, мы можем сказать, что **а** означает один мешок яблок. Тогда 5 мешков с яблоками будут равны **5а**, а **7а** обозначают 7 мешков с яблоками. Если теперь мы хотим узнать, сколько всего у нас мешков с яблоками, то можем посчитать:
5а+7а=(5+7)·а = 12а.
То же самое верно и для любых натуральных чисел. Какие бы числа мы ни взяли, левая сторона уравнения всегда будет равна правой.

Расчеты с использованием букв облегчают решение многих

Десятичная система	Двоичная система				
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0

С помощью всего двух значков можно записать все числа.

В ДВОИЧНОМ СЧИСЛЕНИИ

можно считать так же, как и в десятичном. При сложении, например, оба числа пишут одно под другим и складывают разряды, начиная справа. Единственное различие: 1+1 дает 0 и перенос (подобно 5+5 в десятичной системе). Пример:

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 101 \\ \hline 1010 \end{array},$$

$1+1=0$ и перенос 1.

С двоичным счислением работали уже первые компьютеры. На фото: изобретатель компьютера Конрад Зузе с образцом разработанной им в 1938 г. модели «Зузе-1».

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОКУСЫ

Для демонстрации многих фокусов исполнителю требуется ловкость пальцев и большой навык. Для других трюков, например «распиливания человека», нужна виртуозная техника. Математические фокусы, напротив, очень просты, продемонстрировать их может каждый. Их действие основано на математических расчетах.

РАСЧЕТЫ С БУКВАМИ

позволяют сформулировать и доказать множество утверждений. Если математикам надо определить численное значение переменной, они предпочитают применять буквы x, y, z. Остальные буквы, такие как a, b и c, используются в качестве символов-заполнителей.

задач. Например, вопрос: «Чему равно число, значение которого, умноженное на 3, в сумме с его же значением, умноженным на 2, уменьшенное на 1, даст 9?» легко заменить выражением:

$2 \cdot \mathbf{x} + 3 \cdot \mathbf{x} - 1 = 9.$

Чтобы найти искомое число **x**, надо знать правила решения уравнений. Сложение или умножение в уравнениях можно осуществлять, только производя операцию с обеими частями уравнения. Итак, наше уравнение можно записать следующим образом: $5 \cdot \mathbf{x} - 1 = 9$.

Прибавим к обеим частям уравнения 1:

$5 \cdot \mathbf{x} - 1 + 1 = 9 + 1,$

получим: $5 \cdot \mathbf{x} = 10$.

Теперь разделим обе части на 5: $\mathbf{x} = 2$.

Символы-заполнители чисел

Но математики используют буквы не только для того, чтобы, как в данном примере, обозначать величины, которые надо вычислить, но и в качестве символов-заполнителей числа, которое может менять свое значение. Так, с их помощью можно доказать много общих утверждений, например следующее: «Число делимо без остатка на 3 в случае, если сумма его цифр также делится без остатка на 3».

Чтобы упростить задачу, возьмем для начала двузначные числа. Каждое двузначное число можно обозначить как $10 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$, при этом **b** означает одно из чисел от 1 до 9, а **c** — одно из чисел от 0 до 9. Итак, наше утверждение теперь выглядит так: $10 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$ без остатка делится на 3 только тогда, когда $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ также делится на 3. Или: $10 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} = 9 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Поскольку 9 делится на 3, то делится на 3 и $9 \cdot \mathbf{b}$. Отсюда следует, что $9\mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ делится на 3 тогда, когда на 3 делится $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Для трехзначных чисел доказательство выглядит подобным же образом: каждое трехзначное число можно представить как $100 \cdot \mathbf{a} + 10 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$, причем **a** означает числа от 1 до 9, **b** и **c** — числа от 0 до 9. $100 \cdot \mathbf{a} + 10 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} = 99 \cdot \mathbf{a} + 9 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Поскольку 99 и 9 делятся на 3, то делятся на 3 также $99\mathbf{a}$ и $9\mathbf{b}$.

Можно ли показать фокус с помощью математики?

Существует целый ряд математических фокусов. Например, фокусник вручает добровольцу из публики несколько монет и говорит: «Возьмите часть монет в левую руку, оставшиеся — в правую. С помощью магии я угадаю, в какой руке сколько монет». Затем он просит добровольца умножить число монет в левой руке на 5, а в правой — на 4, а результаты сложить и назвать сумму. После этого фокусник делает загадочные пассы волшебной палочкой, бормочет заклинания и объявляет, сколько монет находится в каждой руке.

Трюк совсем прост: фокусник делает вид, что дает добровольцу случайное количество монет. На самом деле их девять штук. Остальное — простая арифметическая задачка. Примем количество монет в левой руке за х. Тогда в правой руке находится (9 — х) монет. А теперь произведем действия, которые должен совершить доброволец :

$$\mathbf{a} = 5\mathbf{x} + 4(9 - \mathbf{x}) = 5\mathbf{x} + 36 - 4\mathbf{x} = \mathbf{x} + 36.$$

Если мы вычтем с обеих сторон уравнения по 36, то получим: $\mathbf{x} = \mathbf{a} - 36$.

Так что фокуснику достаточно лишь вычесть из результата, полученного добровольцем, число 36, чтобы узнать, сколько монет у него в левой руке. Если, к примеру, результат равен 40, то $40 - 36 = 4$ монеты. Проверяем:

$$5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 20 + 20 = 40.$$

Что такое простые числа?

Простыми числами называются натуральные числа, делимые без остатка только на себя и на 1. Например, 7 и 11. При делении одного из этих чисел на любое другое число всегда получается остаток. Поэтому говорят, что 7 и 11 — простые числа. 8 — напротив, не является простым. Ведь $8 = 2 \cdot 4$.

Единица не считается простым числом. Так что первыми простыми числами являются: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37...

Простые числа — это «кирпичики» натуральных чисел. Каждое натуральное число можно представить как состоящее из простых. Основная теорема теории чисел утверждает, что «всякое целое число раскладывается на произведение простых множителей и притом единственным образом». Пример: $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Невозможно подобрать другие простые числа, произведение которых составило бы 2002.

Фокус с монетами основан не на магии, а на математических расчетах.

Простые числа завораживали уже древних греков. И сегодня математики продолжают исследовать их свойства. Эти числа таят в себе еще немало загадок.

Сколько простых чисел существует?

Этот вопрос еще в III в. до н. э. занимал греческого мыслителя Евклида. Он гениально доказал, что их количество бесконечно. Евклид пользовался методом, который ча-

Немецкий математик ХРИСТИАН ГОЛЬДБАХ (1690—1764) утверждал: каждое четное число, большее 2, можно представить как сумму двух простых чисел. Например, $8 = 5 + 3$, $30 = 23 + 7$, а $166 = 83 + 83$. Компьютерный расчет подтвердил верность этого утверждения для первых 400 биллионов чисел. Но общего доказательства теоремы Гольдбаха пока нет.

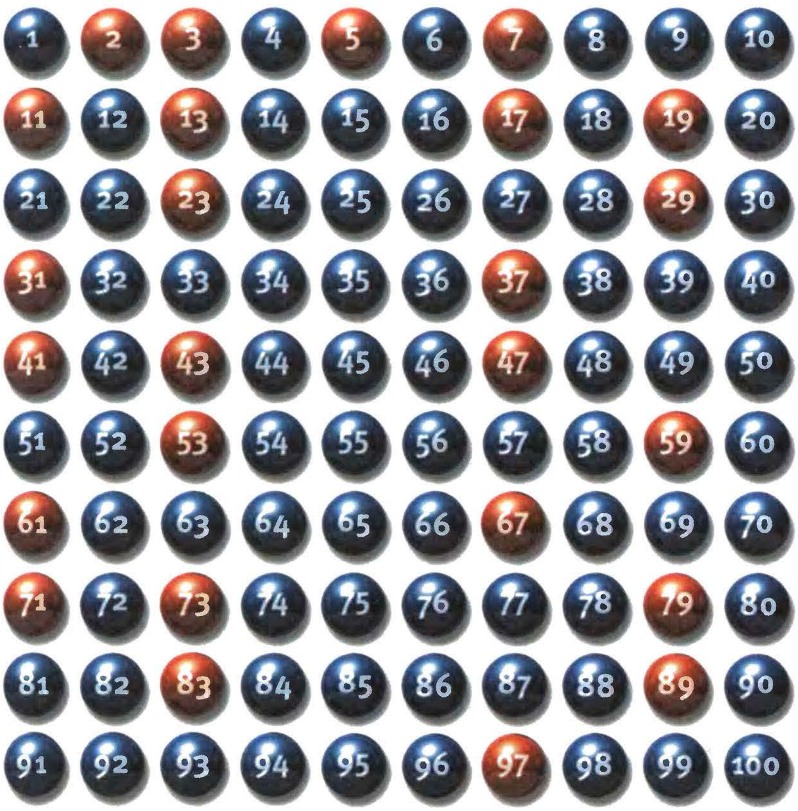
ЕВКЛИДОВО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

бесконечности ряда простых чисел считается математическим шедевром. Американский математик Уильям Данхэм считал его тестом на склонность к математике: «Тех, у кого есть природная склонность к математике, это доказательство тронет до слез, те, у кого такой склонности нет, найдут его малопонятным». А что думаешь ты?

сто применяется в математике: он предположил противоположное тому, что хотел доказать, и рассуждал, пока не столкнулся с противоречием. Поскольку выводы его были строго логическими, его предположение оказалось неверным. Этот метод называется «доказательство от противного».

Евклид начал с предположения, что ряд простых чисел конечен. Тогда эти числа можно сосчитать, как p_1, p_2, p_3... p_n (n означает неопределенное множество простых чисел). Затем Евклид ввел новое число: $p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, перемножив эти числа и прибавив единицу. Полученное число не будет делиться ни на одно из конечного набора простых чисел, поскольку остаток от деления на любое из них даст единицу. Но поскольку каждое число можно представить как произведение простых чисел, а p_1, p_2, ... p_n — это все простые числа, какие есть, мы приходим к противоречию (т. е. полученное число p должно делиться на некое простое число, не входящее в этот ряд). Значит, предположение оказалось ошибочным, и простых чисел должно быть бесконечно много.

Древнегреческий математик Евклид доказал, что простых чисел существует бесчисленное множество.



Простые числа (отмечены красным) среди первых ста чисел.

Какое самое большое простое число?

Ученые постоянно охотятся за новыми рекордами. Самые большие из известных простых чисел имеют несколько сотен тысяч разрядов. Это невообразимо много. Если записать хотя бы несколько из них, это займет несколько томов из серии «Зачем и почему». Для сравнения: число элементарных частиц во Вселенной оценивается восьмидесятиразрядным числом.

Рассчитываются эти монстры среди простых чисел с помощью всевозможных математических ухищрений и компьютерного программирования. Почти все известные гигантские простые числа — это числа Мерсенна, названные так в честь французского физика и математика Марена Мерсенна (1588–1648). Для них разработаны быстрые методы определения, являются ли они простыми. Это числа вида: ($2n - 1$), где n — натуральное число. Но не все числа Мерсенна являются натуральными: хотя $2^2-1=3$ и $2^3-1=7$, но уже $2^4-1=15=3\cdot5$.

Что такое треугольные числа?

Некий учитель математики XVIII в. решил однажды устроить себе передышку и велел ученикам в течение урока сложить все числа от 1 до 100. Но его надежды не оправдались: уже спустя несколько минут десятилетний Карл Фридрих справился с заданием. Он не стал складывать одно число с другим последовательно, а поступил хитрее: сложил первое число с последним, второе с предпоследним, третье с третьим от конца и так далее до 50 и следующего за ним. Результат при этом всегда получался один и тот же: $101=1+100=2+99=3+98\ldots=$ $=50+51$. Вместо того, чтобы рассчитывать $1+2+3+4+\ldots+100$, он посчитал: $1+100+2+99+3+98+\ldots+50+51$, или $50\cdot101=5050$. Этот мальчик был будущим великим математиком Карлом Фридрихом Гауссом.

Формулу сложения чисел от 1 до 100 школьник Карл Фридрих изобрел сам. Но она уже была известна древним грекам, которые из чисел, следующих друг за другом, формировали треугольник. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 можно изобразить вот так:

Из 21 шарика можно сложить треугольник. Так что число 21 — треугольное число.

Если из некоторого числа точек можно было составить треугольник, ученики математика Пифагора (около 570– 480 гг. до н. э.) называли такое число треугольным. Они вывели общую формулу для таких чисел: число является треугольным, если его можно изобразить так:

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2},$$

причем n — натуральное число.

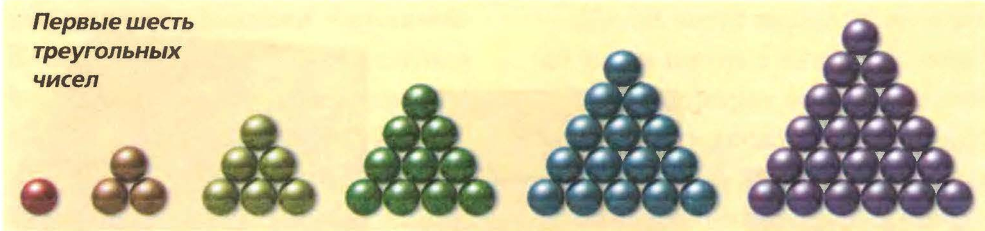
Возьмем $n=100$, тогда мы получим решение Гаусса:

$$\frac{100\cdot101}{2}=50\cdot101=5050.$$

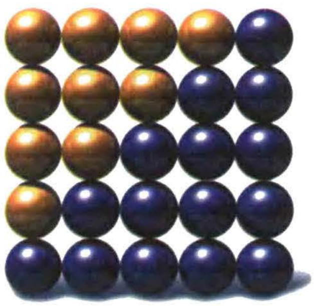
Для $n=6$ число точек в схеме равно $\frac{(6\cdot7)}{2}=21$. Так что шестое треугольное число — 21.

ЗАГАДКИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

еще далеко не разгаданы. Остается открытым вопрос, сколько вообще существует простых чисел. Простые числа-близнецы — это два соседних нечетных числа, оба из которых являются простыми. Пример: 5 и 7 или 101 и 103. До сих пор неизвестно, прерывается ли ряд простых чисел-близнецов или, как в случае простых чисел, продолжается. Простыми числами-тройняшками называют три следующих друг за другом нечетных числа, все из которых являются простыми. Существует лишь одна-единственная такая тройка: 3, 5, 7. Во всех остальных комбинациях двух чисел одно число всегда делится на 3 и, стало быть, не является простым.



КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС (1777—1855) — **один из самых значительных математиков в истории. Он не только открыл новые методы во многих областях математики, но занимался также астрономией, магнетизмом, механикой и оптикой.**



Два сложенных вместе треугольника образуют квадрат.

Что такое квадратные числа?

Из камешков можно выложить не только треугольник, но и квадрат — прямоугольник, стороны которого равны. Число камней, образующих квадрат, называется квадратным числом. Четыре камня образуют, к примеру, квадрат, длина стороны которого 2; 9 камней — квадрат с длиной стороны 3, а 16 камней — квадрат с длиной стороны 4.

Если треугольные числа являются суммами первых натуральных чисел, то квадратные числа получаются как сумма первых нечетных чисел:

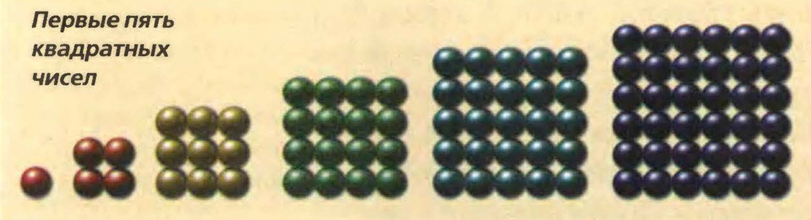
$4 = 2^2 = 1 + 3;$

$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5;$

$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7;$

$25 = 5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$

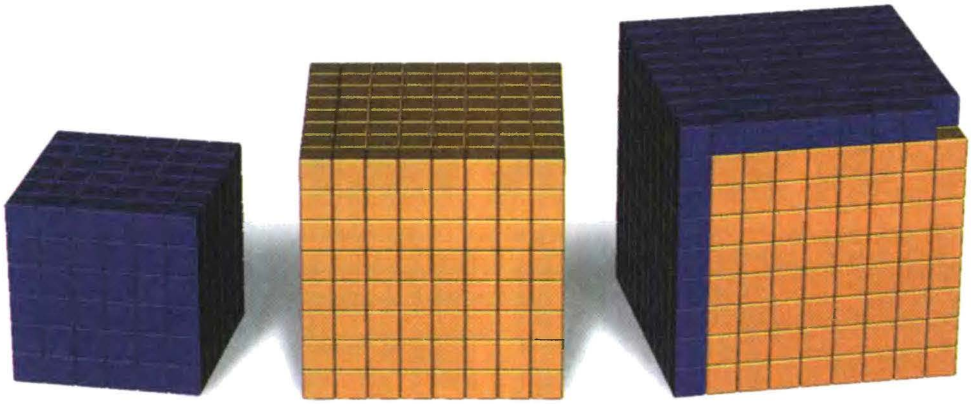
Число суммируемых нечетных чисел является тем самым числом, которое возводится во вторую степень, или, как еще говорят, в квадрат.



Что утверждает теорема Ферма?

Одним из самых знаменитых математических утверждений является теорема Ферма. Юрист и математик-любитель Пьер де Ферма (1601–1665) более 350 лет назад нацарапал ее на полях книги. Рядом он написал: «Я нашел поистине чудесное доказательство этого утверждения, но здесь слишком мало места, чтобы привести его». Свое «поистине чудесное доказательство» Ферма унес с собой в могилу. С тех пор целые поколения математиков безуспешно бились над этой задачей. И лишь в 1994 г. английскому физику Эндрю Уайлсу удалось ее доказать. Его работа составляет почти 160 печатных листов и опирается на новейшие открытия в математике. Маловероятно, чтобы Ферма нашел такое доказательство. Возможно, он, как и многие его последователи, допустил логическую ошибку.

Хотя доказательство очень замысловатое, но само утверждение понять несложно. Речь идет о решении уравнений. Уравнение $x + y = z$, например, имеет множество решений среди натуральных чисел; так, если $x = 1$, $y = 1$, то $z = 2$ или, если



Кубические числа получаются, если объединить маленький кубик с большим. Оба кубика слева состоят из $6^3 = 216$ и $8^3 = 512$ маленьких кубиков. В целом для кубика с длиной стороны m маленьких кубиков потребуется m^3 маленьких кубиков. Но из маленьких кубиков, составляющих два первых кубика, никогда не составить третий (больший) так, чтобы часть кубиков не оказалась лишней или наоборот, недостающей. Это следует из теоремы Ферма для $n = 3$. Для кубика справа с длиной стороны 9 не хватает как раз одного кубика. Ведь $6^3 + 8^3 = 216 + 512 = 728 = 729 - 1 = 9^3 - 1$.

$x = 12$, $y = 13$, то $z = 25$. Точно так же имеются решения для уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

Например, если $x = 3$, $y = 4$, то $z = 5$, ведь $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, или, если $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$, поскольку $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

Ферма задался вопросом, а существуют ли решения для других степеней, например, для $x^3 + y^3 = z^3$ или в целом для $x^n + y^n = z^n$, причем n — любое натуральное число, большее 2.

Как утверждал Ферма и доказал Уайлс, для таких уравнений не существует целочисленных решений.

Что такое рациональные числа?

Действие, обратное сложению двух чисел, называется вычитанием. При этом возникает вопрос: а что получится, если из 2 вычесть 3? В этом случае натуральных чисел уже недостаточно, требуется вводить **отрицательные числа**. Вместе с натуральными они образуют множество целых чисел. Хотя ни одному торговцу не придет в голову представить себе отрицательного верблюда, со временем и отрицательные числа получили практическое применение — при учете долгов.

Но целых чисел тоже было недостаточно. Если крестьянин хотел поделить 5 моргенов земли (морген — земельная мера в Германии, равная 0,25 га) между 3 сыновьями, ему приходилось делить 5 на 3. Поскольку 5 не делится на 3 без остатка, образуется так называемая **дробь:** $\frac{5}{3}$, или пять третьих. Число в верхней части дроби называется **числитель**, в нижней — **знаменатель.** Значение дроби тем больше, чем больше числитель и меньше знаменатель. Дроби называют так-

ПАУЛЬ ВОЛЬФСКЕЛЬ (1856—1906)
получил отказ от возлюбленной. Он был настолько потрясен, что решил покончить с собой. Этот промышленник, математик и врач из Дармштадта задумал застрелиться ровно в полночь. После того как все было готово, он, чтобы скоротать время, занялся в библиотеке теоремой Ферма. Вольфскель совершенно забыл о времени и пропустил назначенный срок самоубийства. И он отказался от своего намерения — занятия математикой вновь пробудили его волю к жизни. В благодарность он переписал завещание, оставив 100 000 марок (сумма, по покупательной способности равная нынешнему 1 млн евро) тому, кто решит загадку, спасшую ему жизнь. В 1997 г., наконец, эту награду получил в Гёттингене Эндрю Уайлс. Правда, из-за инфляции ее размеры сократились до 70 000 марок.

МАТЕМАТИКИ ШУТЯТ

Профессор математики выходит из аудитории, в которой остаются два студента. Немного позже из этой аудитории появляются три студента. Еще спустя пару минут туда заходит один студент. Профессор восклицает: «Слава Богу! Наконец аудитория снова пуста!»

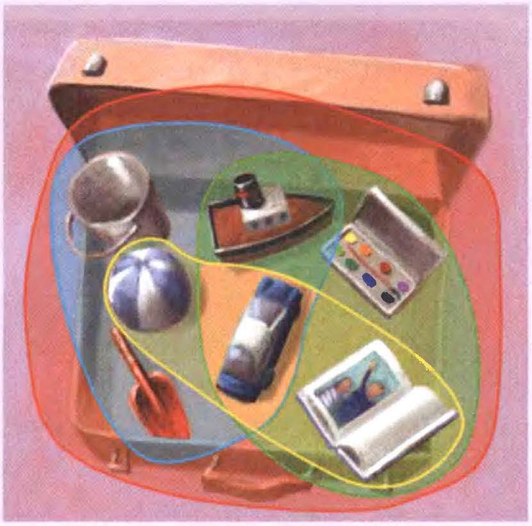
же **рациональными числами**. К ним относятся также целые числа, поскольку их можно записать в виде дроби. Так, 3 можно изобразить как $\frac{3}{1}$, или три первых. Рациональные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить, результатом всегда будет рациональное число.

Многие дроби можно сокращать. Для этого надо разложить числитель и знаменатель на их простые множители, удалив затем все одинаковые множители вверху и внизу.

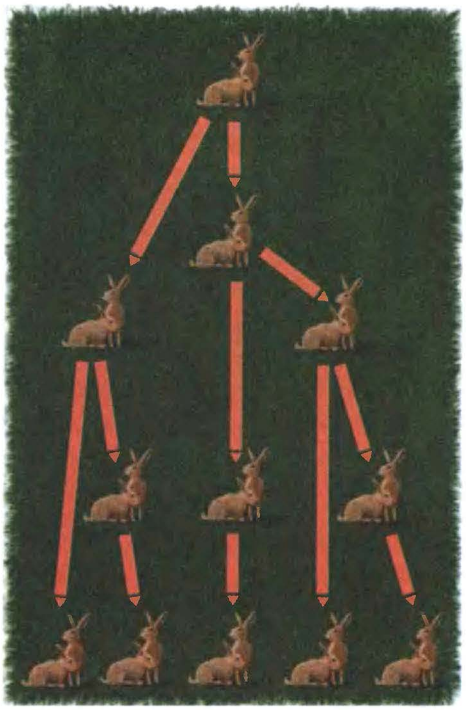
Дроби часто записывают в виде ряда цифр с запятой, отделяющей целую часть от дробной — это десятичные дроби. Например, $\frac{1}{2}$ можно записать как 0,5; $\frac{1}{3}$ — как 0,333... Первая цифра после запятой показывает, сколько в этой дроби десятых долей, вторая — сотых, третья — тысячных и т. д. 0,5 означает $\frac{5}{10}$. Сократив эту дробь, получим $\frac{1}{2}$. 0,587 означает число, которое получается при сложении дробей: $\frac{5}{10}+\frac{8}{1000}+\frac{7}{1000}$.

МНОЖЕСТВА

Учение о множествах — теория, для которой неважно, о каких предметах пойдет речь.
От **множества** требуется лишь одно: чтобы оно содержало так называемые **элементы**, которые могут быть чем угодно. Допустим, мы имеем множество футбольных клубов в бундеслиге, множество букв на этой странице и множество чисел: 1, 2 и 3. Клубы, буквы и числа 1, 2, 3 будут элементами соответствующих множеств. Множества могут состоять из бесконечного количества элементов, как, например, множество простых чисел.
Если множество содержит только элементы, которые принадлежат и другому множеству, оно называется подмножеством. Пример: Андреас едет с родителями на море. Он собирает в чемодан игрушки, которые хочет взять с собой: ведерко, совок, мячик, кораблик и машинку. Затем ему приходит в голову, что погода может испортиться, и он берет еще книгу и коробку с красками. Множество его игрушек, которое мы обозначим U, состоит из двух подмножеств: множества A для игр на воздухе (ведро, совок, мячик, кораблик, машинка) и множества B (книга, краски, кораблик и машинка). Кораблик и машинка относятся к обоим подмножествам, поскольку играть с ними можно как в помещении, так и на воздухе.
Конечно, мы можем выделить и другие подмножества в U, например, все игрушки бело-голубой расцветки: мяч, машинку и книгу.
Множество U состоит из всех элементов, которые содержатся в A или B (или в обоих). Говорят, что U — объединение A и B.
Множество игрушек, в которые Андреас может играть и дома, и на улице, будет **пересечением** A и B. Оно состоит из всех элементов, которые принадлежат как к A, так и к B, т. е. из кораблика и машинки.



Множество игрушек, которые Андреас берет с собой на море.



Из задачи «размножение кроликов» Фибоначчи развил теорию, согласно которой каждый член числового ряда является результатом сложения предыдущих двух членов этого ряда.

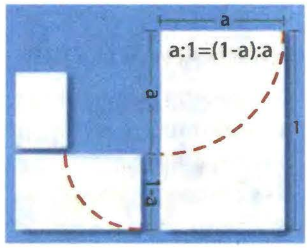
Что такое числа Фибоначчи?

Леонардо Пизанский, по прозванию Фибоначчи, задался вопросом, насколько быстро могут размножаться кролики. Он предположил, что каждая пара кроликов производит одно новое поколение и следующее за ним, а затем умирает. Начиная с одной пары, во втором поколении рождается еще одна пара, в третьем — две (одна от первой пары кроликов, другая — от их потомков), в четвертом — уже три (одна от пары второго поколения и по одной паре от обеих пар третьего поколения). Затем размножение кроликов набирает обороты: в пятом поколении уже 5 пар, в шестом — 8, в седьмом их уже 13, а в восьмом — 21.

Числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... сегодня называют числами Фибоначчи. Каждый член этого ряда равен сумме предыдущих двух членов. Хотя в вопросе размножения кроликов эта картина далека от реальной, но в природе она встречается, например, в мире цветов. Так, у подснежника 3 лепестка, у лютика 5, у дельфиниума 8, у календулы 13, у астры 21, и у многих маргариток 34, 55 или 89. Почему так происходит, ученые выяснили только в 1993 г. Это связано с развитием цветка. Числа Фибоначчи тесно связаны с золотым сечением, которое с античности считается характерным для гармоничных пропорций и широко распространено в искусстве и в архитектуре.

Существуют ли другие числа, кроме рациональных?

Для древних греков единственно возможными были рациональные числа. В частности, математик Пифагор, живший в VI в. до н. э., исследовав вибрации струны лиры, считал, что к колебаниям можно свести весь мир. Пифагор дергал струну, которая свободно вибрировала по всей длине. Затем он перехватывал ее в определенных местах и отмечал, гармонирует ли полученный тон с основным тоном свободной



ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ делит отрезок на две части так, чтобы большая часть отрезка относилась к целому так же, как меньшая часть к большей. Если длина отрезка равна 1, а длина большего его фрагмента обозначена «а», то меньшая равна 1 — а. Тогда золотое сечение равно $\frac{a}{1} = \frac{1-a}{a}$. Значение а = 0,618.

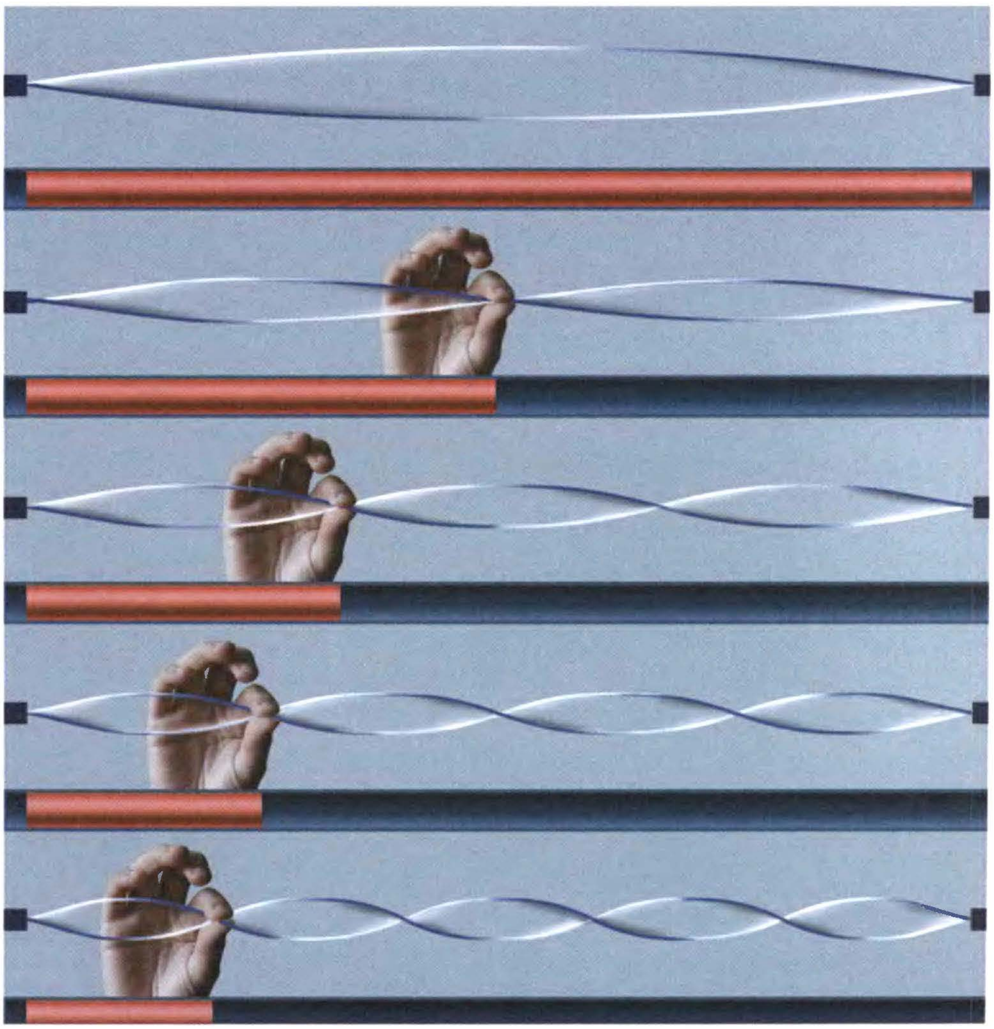
Благодаря ФИБОНАЧЧИ (около 1200 гг.) математика Европы в Средние века пережила подъем. Хотя эта наука была развита еще древними греками, но большая часть их знаний канула в Лету, заново они были открыты лишь тысячу лет спустя. Вина за это лежит на римлянах, которых интересовало лишь практическое применение знаний. Они восхищались, например, катапультами и рычагами Архимеда (около 285—212 гг. до н. э.), пренебрегая расчетами, без которых их нельзя создать.

ПИФАГОР САМОССКИЙ (около 570–480 гг. до н. э.) был убежден, что весь мир можно объяснить с помощью целых чисел и их соотношений, т. е. дробей. В этом и состояла для него красота математики. Но его ученик Гиппас доказал ему, что корень из 2 не является рациональным числом. Согласно некоторым легендам, Пифагор якобы предпочел прибегнуть к насилию, лишь бы не поколебать свое представление о мире и, не долго думая, приказал убить Гиппаса. Но есть и другие легенды, в которых дается иная трактовка этого эпизода.

струны. Звуки гармонировали, если струну фиксировали в центре или в точке, делившей ее на два отрезка, длина которых соотносилась, к примеру, как 2 к 3 или 3 к 4. Диссонанс возникал, если Пифагор зажимал струну там, где отрезки струны не составляли целочисленную пропорцию.

Пифагор изучал движение планет, составил свою систему мира, подобрав радиусы планетных орбит согласно своей теории гармонии, искал и находил законы чисел и в других явлениях природы. Через века дошло до нас его восклицание: «Весь мир — числа!» Он считал, что все в мире можно объяснить с помощью целых чисел и их пропорций. Возможно, уже тогда ему возражал его ученик Гиппас.

Спустя 200 лет грек Евклид написал труд, в котором доказывал, что число, которое, умноженное на себя, дает 2, не может быть рациональным. Число, произведение которого на себя является 2, называется корнем из 2, или $\sqrt{2}$. Так что $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ и соотношение отрезков в золотом сечении тоже не является числом рациональным.



Звук гармоничен лишь тогда, когда струну перехватывают так, чтобы оба ее отрезка составляли целочисленную пропорцию.

ПРОСТРАНСТВО

Сможет ли Ахиллес догнать черепаху?

Власть чисел показывает задача, придуманная древнегреческим философом Зеноном Элейским (около 490–430 гг. до н. э.). Легендарный герой Ахиллес состязается в беге с черепахой. У черепахи 100 м форы. Сможет ли Ахиллес когда-либо ее догнать? Ведь когда он достигнет стартового пункта черепахи, она пройдет еще какое-то расстояние. А пока он одолеет это расстояние, черепаха продвинется дальше. И это будет продолжаться сколь угодно долго, значит, черепаха выиграет гонку. Убедительно, верно?

На первый взгляд, да, но есть какое-то противоречие. Разрешить этот парадокс помогут числа, точный расчет. Если Ахиллес движется в 10 раз быстрее, чем черепаха, то, когда герой доберется до ее старта, она пройдет лишь 10 м; когда он одолеет эти 10 м, черепаха продвинется на 1 м; еще на 10 см, пока он пройдет метр...

Ахиллес соревнуется с черепахой.

Математическое понимание пространства важно как при строительстве пирамид, так и при запуске космических кораблей.

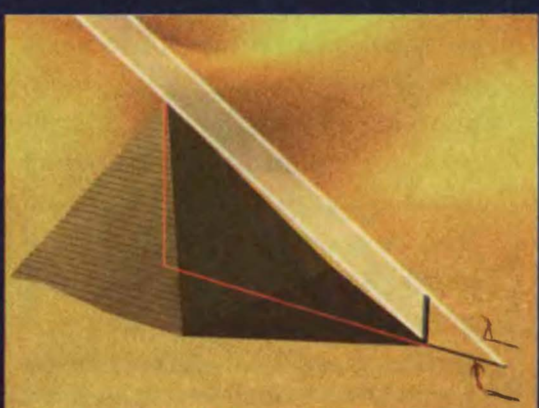
ГЕОМЕТРИЯ — важнейшая область математики, которая изучает свойства пространства. Это слово происходит из греческого языка и буквально означает «измерение земли». По сей день геометрия имеет огромное практическое значение. Без знания ее законов невозможно измерять поля, строить дома с прямыми стенами и ровными полами, уверенно вести корабли в море и благополучно возвращать на Землю космические корабли.

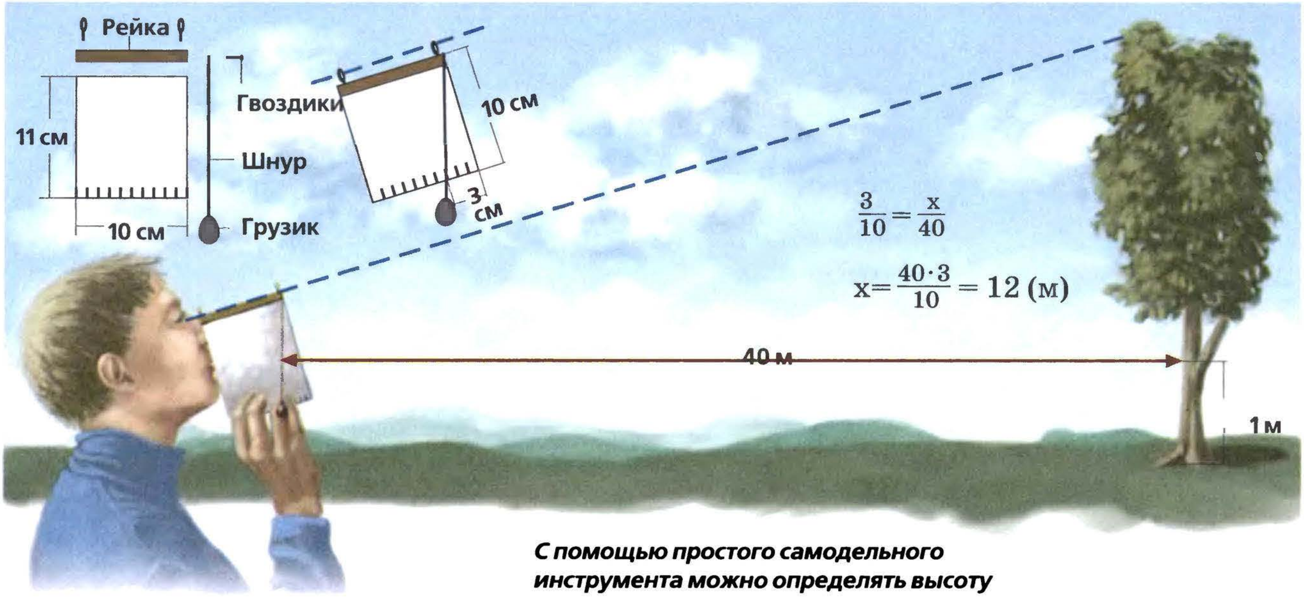
Продолжать можно до бесконечности, но общая длина пути составит 111,111... м. Затем герой обгонит черепаху.

Как измерить высоту?

Уже древние египтяне знали, как определить высоту гигантских пирамид. Для этого рядом с пирамидой в землю втыкали палку. Затем замеряли ее тень и тень пирамиды. Если длина палки составляла 3 м, ее тень — 6 м, а длина тени от пирамиды — 40 м, то высота сооружения должна была составлять 20 м. Ведь отношение длин теней и высот предметов, их отбрасывающих, должно быть одинаковым и для пирамиды, и для палки. Солнце стоит одинаково высоко для всех предметов.

Так египтяне измеряли высоту пирамиды.





С помощью простого самодельного инструмента можно определять высоту деревьев и домов.

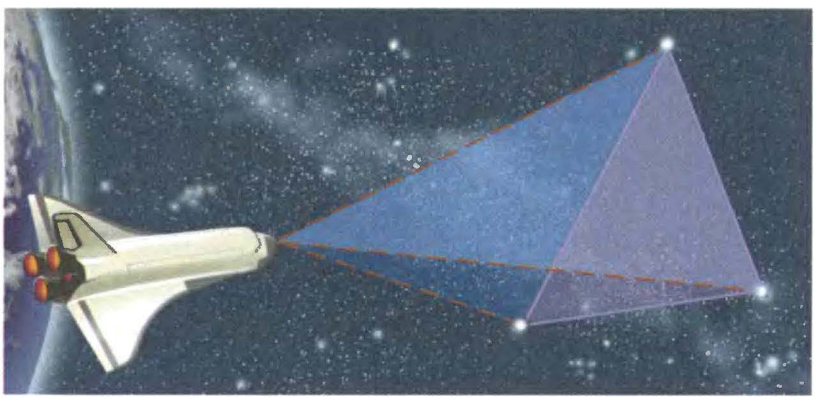
Кто не хочет пользоваться колышком, может соорудить простой инструмент из бумаги и деревянной рейки. На нижнем конце куска картона шириной 10 см и длиной 11 см делают разметку — каждый сантиметр отмечают штрихом. Если нужны более точные измерения, то сантиметровый отрезок делят на десятые доли, т. е. на миллиметры. Затем эти метки нумеруют и приклеивают картон к рейке толщиной 1 см и длиной 10 см. В рейку вбивают два гвоздика и на том конце, с которого начинается нумерация, закрепляют шнур длиной 15 см. К шнуру прикрепляется груз, получается отвес. Чтобы измерить этим инструментом высоту деревьев, опор электропередачи или домов, на их вершину смотрят через шляпки обоих гвоздиков. При этом отвес в определенном месте пересекает шкалу. Записываем значение, которое ближе всего к штриху. Затем измеряем в метрах расстояние от дерева, опоры или дома. Это расстояние умножается на отмеренное нами значение, и результат делится на 10. Теперь остается только добавить высоту измерительного инструмента над поверхностью земли, и мы получим высоту предмета.

Пример. Находясь на расстоянии 40 м от дерева, нацеливаем гвоздики измерительного прибора на его верхушку. Шнур показывает отметку 3 на картоне. Считаем: $3 \cdot 40 = 120$. Если мы держим прибор на высоте 1 м от земли, высота дерева составит $\frac{120}{10} + 1 = 13$ м.

ГРЕЧЕСКИЙ ФИЛОСОФ ПЛАТОН

(около 428—348 гг. до н. э.) писал: «Хотя геометры в своих исследованиях изображают конкретные фигуры, они думают не об этих фигурах, но о вещах, которые эти фигуры представляют. Квадрат как таковой или диаметр как таковой составляют предмет их рассуждений».

Для того чтобы знать местонахождение и направление полета космического корабля, определяют его координаты.



ФАЛЕС МИЛЕТСКИЙ (около 625—574 гг. до н. э.) вывел формулу расчета высоты египетских пирамид и доказал, что этот способ подходит для всех возможных случаев. Таким образом он создал одно из первых математических доказательств. Если египтяне довольствовались лишь практическим применением геометрии, то греки столетиями позже задумались о всеобщих законах, составляющих ее основу. Они сделали большой шаг от практики к теории.

Что такое планиметрия?

Геометрия изучает свойства фигур, лежащих на плоскости. Уже греческий математик Эвклид описывал их. С геометрией древних греков сегодня знаком каждый школьник.

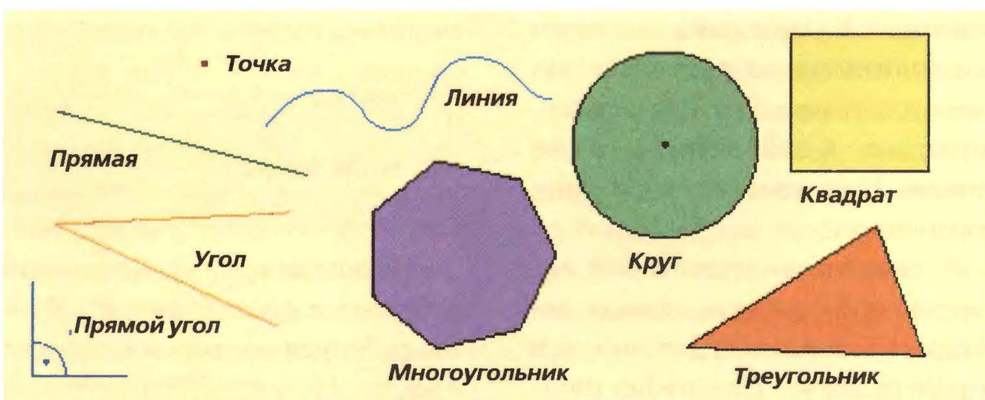
Важнейшие понятия геометрии — это точка, линия, прямая, круг, угол, треугольник. **Точка** — абстрактный объект. У нее нет ни длины, ни ширины, ни высоты, ни глубины. Математическая точка существует лишь условно. Ведь ни один самый острый карандаш не способен изобразить такую точку, у которой не было бы протяженности. **Линия** — черта, не имеющая ширины, т. е. бесконечно тонкая. **Прямая** — это линия, путь вдоль которой равен кратчайшему расстоянию между двумя точками. Она тянется в обоих направлениях до бесконечности. **Окружность** состоит из множества точек, которые находятся на одинаковом расстоянии от одной, называемой центром окружности. Это расстояние называется **радиусом.** Удвоенная длина радиуса называется **диаметром.**

Угол образуют две прямые линии, выходящие из одной точки. Если вокруг общей точки двух линий изобразить круг, и между этими линиями будет находиться ровно четверть круга, они образуют **прямой угол.**

Многоугольник — фигура на плоскости с прямыми сторонами. Многоугольник с тремя сторонами называется **треугольником,** с четырьмя — **четырехугольником.** Многоугольник, все стороны и углы которого равны, называется **правильным.** Правильный четырехугольник — **квадрат.**

Что такое декартова система координат?

Чтобы определять расположение фигур на плоскости или в пространстве, математики связали геометрию и числа. Числовая прямая — это прямая, на которой одна точка принята за нулевую, а положение всех остальных определяется расстоянием от этой нулевой точки. Число 4, например, со-



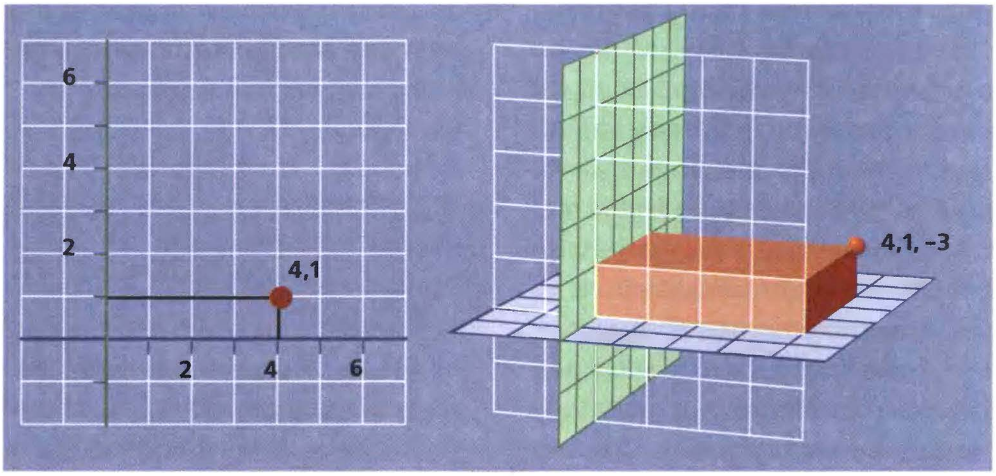
Основные фигуры планиметрии

ответствует точке, находящейся на расстоянии 4 единиц (миллиметров, сантиметров или километров) вправо от 0. Число (−2) находится в двух единицах слева от нуля.

Две взаимно перпендикулярные числовые прямые (оси координат) с точкой пересечения 0 (начало координат) образуют на плоскости **прямоугольную декартову систему координат** (Рене Декарт по латыни Renatus Cartesius). Каждую точку в этой системе можно описать с помощью двух чисел. Например, отложив 4 единицы от начала координат по одной числовой прямой, а затем 1 единицу вдоль другой, получим пару чисел (4, 1), определяющих положение данной точки. Их называют координатами точки.

С помощью декартовой системы координат можно находить координаты точек и в пространстве. Для этого нужна еще одна числовая прямая, которая пересекает две другие прямые в точке начала координат и образует прямой угол с каждой из двух других осей. Тогда каждую точку пространства можно описать с помощью трех чисел. (4, 1, −3) — это точка, которую получают, отложив 4 единицы по первой оси, 1 по второй и (−3) по третьей (минус означает, что расстояние от начала координат откладывается в сторону отрицательных значений). Поскольку в данном случае используются 3 оси, мы говорим о 3-мерном пространстве. Плоскость двумерна.

РЕНЕ ДЕКАРТ (1596—1650) известен сегодня в первую очередь своим знаменитым высказыванием: «Cogito ergo sum» (лат. «Мыслю, следовательно, существую»). Французский философ, естествоиспытатель и математик подвергал сомнению не только высказывания других, но и все, что сам видел, слышал и чувствовал. Во главу угла он ставил рассуждение.

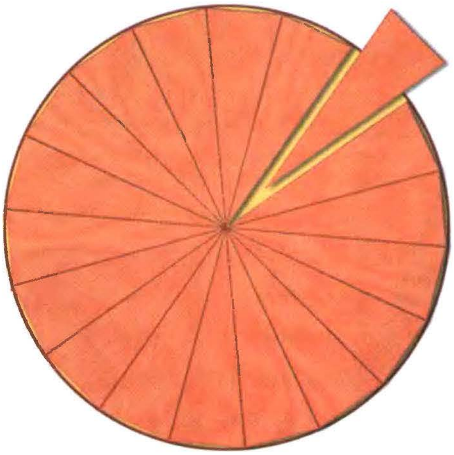


Декартова система координат:
На плоскости: (4,1) — это точка, которую получили, отложив от начала координат 4 единицы по первой оси, а затем 1 единицу по второй.
В пространстве (4,1,—3) это точка, которую получили, отложив 4 единицы по первой оси, 1 по второй и (—3) по третьей.

Что такое число π?

Площадь квадрата с длиной стороны a составляет a^2. Площадь круга вычислить не так просто. Но уже древние греки

АРХИМЕД
(285—212 гг. до н. э.) — древнегреческий математик и физик, рассчитал площадь круга, приблизив его к многоугольнику (рис. справа), а затем вычислив его площадь. Кроме этого, он конструировал подъемные блоки, винты, подъемные краны и метательные машины.



МАТЕМАТИКА КОНСЕРВНОЙ БАНКИ
С помощью консервной банки и листа бумаги можно приблизительно найти значение числа ϖ. Обернем лист бумаги вокруг банки и пометим место, где концы листа перекрываются. Так мы определим длину окружности банки. Теперь измерим радиус крышки. Он будет равен половине ее диаметра. Обозначим длину окружности, отмеренную полоской бумаги, как L, получим: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, т. е. $\pi = L / 2 \cdot r$.

умели определять ее хотя бы приблизительно. Если обозначить искомую площадь S, а радиус круга r, то получим формулу:

$$\mathbf{S = \pi \cdot r^2}.$$

π — это бесконечное число, оно равно 3,14159... π — буква греческого алфавита, произносится как «пи».

Длина окружности вычисляется так:

$$\mathbf{L = 2 \cdot \pi \cdot r}.$$

Архимед вычислил значение π, вписав в круг правильный многоугольник. Он провел расчеты для 96-угольника, получив значение 3,14084...

Голландский математик Людольф ван Цейлен (1540–1610) большую часть жизни посвятил вычислению числа π. Он рассчитывал площадь многоугольников огромным количеством углов. Так ему удалось определить первые 35 знаков после запятой в числе π. Современные ученые благодаря компьютерам и разным методам вычисления определили значение π до многих миллиардов знаков после запятой. Но рассчитать это число до последнего знака не удастся никогда. Ведь π не является рациональным числом. У него бесконечное количество знаков после запятой. В отличие от рациональных чисел, таких как, например, $\frac{1}{3} = 0{,}333...$, цифры числа π не образуют повторяющихся последовательностей.

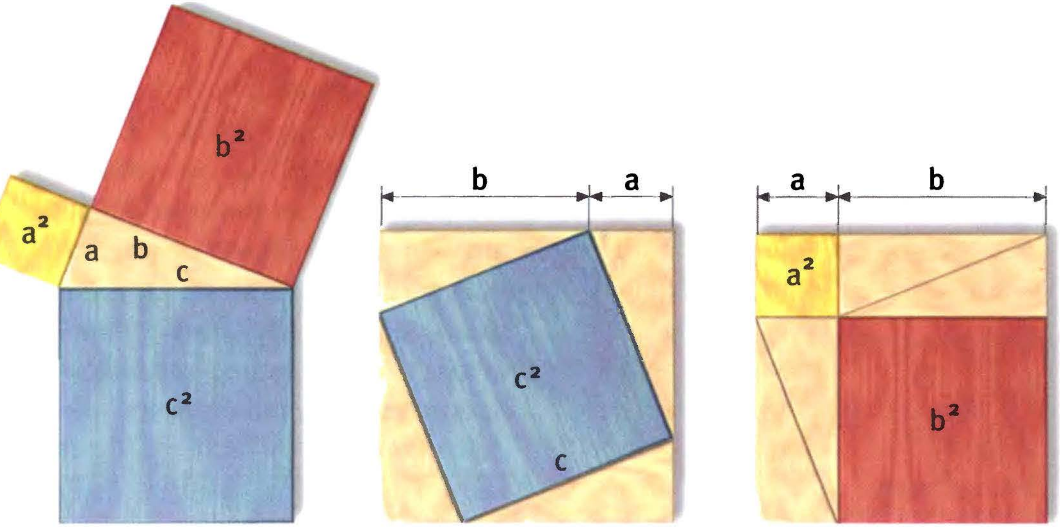
Что утверждает теорема Пифагора?

Одной из самых знаменитых математических теорем является теорема Пифагора, согласно которой квадрат самой длинной стороны (гипотенузы) прямоугольного треугольника равен сумме квадратов коротких сторон (катетов). Обычно стороны треугольника обозначают буквами a, b и c, причем буквой c обозначают длинную сторону. В краткой записи формулировка этой теоремы выглядит так:

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}.$$

Предполагают, что древним китайцам эта закономерность была известна задолго до Пифагора. Они доказывали ее с помощью своего рода головоломки (см. с. 28): квадрат с длиной стороны a + b можно составить из квадрата со стороной c и четырех треугольников со сторонами a, b и c, из одного квадрата со стороной a, одного со стороной b, а также четырех таких же треугольников. Обозначив площадь треугольников S, получим:

$$4S + c^2 = (a+b)^2 = 4 \cdot S + a^2 + b^2.$$



Теорема Пифагора

Слева изображен треугольник со сторонами a, b и c, на каждой из которых построен квадрат. Справа изображен квадрат со стороной a + b, составленный двумя разными способами. В обоих случаях четыре раза повторяется треугольник. Таким образом, остальная площадь должна соответствовать выражению $a^2 + b^2 = c^2$.

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН (1879—1955) — знаменитый физик, в возрасте 11 лет брал уроки геометрии у своего дяди. За основу были взяты труды греческого математика Евклида. Порой маленький Альберт находил доказательства излишне подробными, например доказательство теоремы Пифагора. Не долго думая, он принялся за дело и вывел ее новое доказательство.

Если убрать в обеих частях уравнения 4S, получим:

$c^2 = a^2 + b^2$.

Вряд ли существует другая математическая теорема, которая была бы доказана столь разнообразными способами, как теорема Пифагора. Известно несколько тысяч разных доказательств того, что в прямоугольном треугольнике $a^2+b^2=c^2$. В списке авторов мы найдем такие известные имена, как Леонардо да Винчи (около 1452–1519), бывший президент США Джеймс Абрам Гарфилд (1831–1881) и Альберт Эйнштейн (1879–1955). А сказочник Ганс Христиан Андерсен (1805–1875) изложил ее доказательство в стихах. В начале XIX в. даже разбивались поля, изображавшие доказательство теоремы Пифагора. Таким образом земляне хотели дать знак инопланетянам, что на Земле обитают разумные существа. Очевидно, эти энтузиасты были убеждены, что каждое разумное существо должно знать теорему Пифагора.

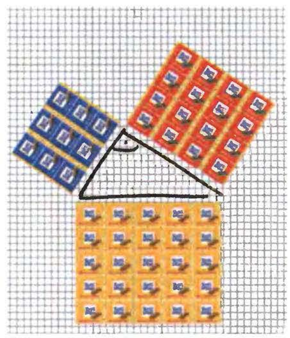
Какова длина диагонали квадрата со стороной, равной 1?

Длину диагонали, которую мы обозначим d, можно вычислить по теореме Пифагора, так как она с двумя сторонами квадрата образует прямоугольный треугольник:

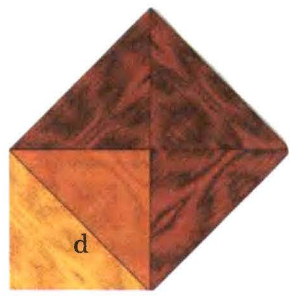
$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Отсюда следует, что $d = \sqrt{2}$.

Мы можем увидеть это на чертеже. Здесь большой квадрат вдвое больше маленького, площадь которого равна 1, поскольку он состоит из 4 одинаковых треугольников, двух из которых достаточно, чтобы составить маленький квадрат. Итак, площадь большого квадрата равна 2. Одна из его сторон является диагональю меньшего квадрата. Обозначим сторону большого квадрата d. Так что $d^2 = 2$, а это означает, что $d = \sqrt{2}$.



Теорема Пифагора используется даже в рекламе шоколада.



Длину диагонали квадрата можно определить, рассматривая ее как сторону другого, в два раза большего квадрата.

«ЭЛЕМЕНТЫ»
Евклида знаменуют начало современной математики. В 13 томах грек сформулировал основные положения, которые не нуждаются в доказательствах, и вывел из них математические теоремы. Эти книги — самый издаваемый научный текст, начиная с древности и по сей день.

ОКРУЖНОСТЬ И ПРЯМАЯ
были основными геометрическими фигурами для греков, поэтому они пытались выполнять все построения только с помощью циркуля и линейки. Судя по всему, деления на линейке при этом не применялись.

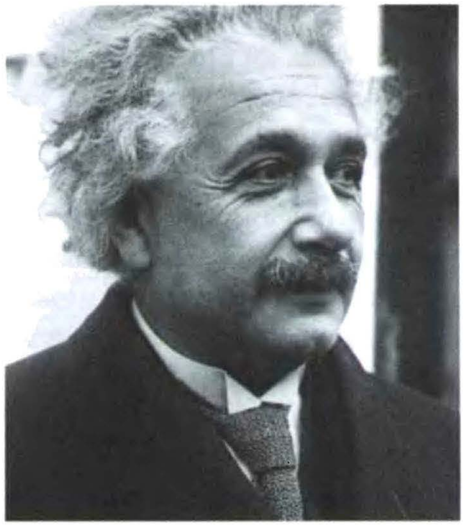
Построения с помощью циркуля и линейки

Древние греки считали, что для занятий геометрией достаточно только линейки и циркуля. Столетиями ученые бились над тем, чтобы с помощью этих двух инструментов разделить угол на три равные части, и только в XIX в. французский математик Пьер Лоран Вантцель (1814–1884) доказал, что некоторые углы линейкой и циркулем построить нельзя.

Из задач, которые греки хотели решить с этими инструментами, еще две оказались неразрешимыми. Первая: построение квадрата на основе окружности такой же площади (это называют «квадратурой круга»). Вторая: произвести из данного куба другой, объем которого вдвое больше данного («удвоение куба»). Это тоже математика: доказать, что определенные задачи не имеют решений.

Что такое аксиома о параллельных прямых?

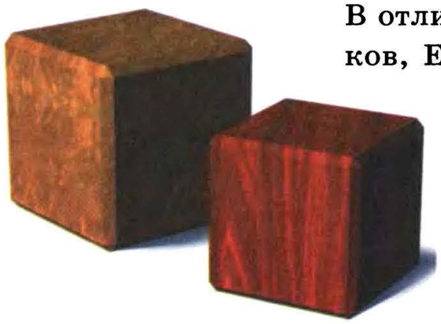
Считается, что основы современной математики заложены Эвклидом в его 13-томном труде «Элементы» около 300 г. до н. э. В отличие от предшественников, Евклид объясняет здесь геометрию не с помощью бесчисленных чертежей, но чисто логически. Вначале он описывает целый ряд фактов,



Немецкий физик Альберт Эйнштейн с помощью математических методов разработал теорию относительности, совершив переворот в физике XX в.

которые он считает истинными и непреложными. Эти факты называются постулатами. Один из таких постулатов Евклида, например, гласит: «Из каждой точки можно провести одну прямую к любой другой точке». Затем, исходя из этих постулатов, он выводит все остальное. Тем самым Евклид впервые продемонстрировал современное математическое мышление: исходя из определенных предположений, однажды сделанных и не подвергавшихся больше пересмотру, доказал множество других утверждений.

Столетиями шли споры по поводу пятого постулата Евклида, так называемой аксиомы о параллельных прямых: через любую точку P, лежащую вне прямой g, можно провести только одну прямую, которая не пересечет g. Такую прямую называют параллельной к прямой g, проходящей



Пользуясь только циркулем и линейкой, невозможно построить на основе одного куба другой, объем которого будет вдвое больше.

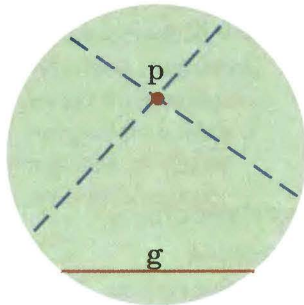
через точку P. Многие ученые стремились не просто принять это положение, а вывести его из первых четырех. Но это оказалось невозможным. Математики стали создавать геометрию, которая основывалась на первых четырех аксиомах Евклида и отвергала пятую. То, что вначале выглядело математической игрой, в начале XX в. оказалось востребованным. Альберт Эйнштейн увидел в этих моделях геометрии основу для своей общей теории относительности.

Круглый ли футбольный мяч?

«Разумеется, футбольный мяч круглый!» — скажет каждый футбольный болельщик. Но если быть точным, это не совсем так. Футбольный мяч состоит из некоторого числа граней, а точнее, из 12 пятиугольников и 20 шестиугольников. К тому же пятиугольники эти равносторонние, т. е. их стороны имеют одинаковую длину, и две соседние стороны образу-

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

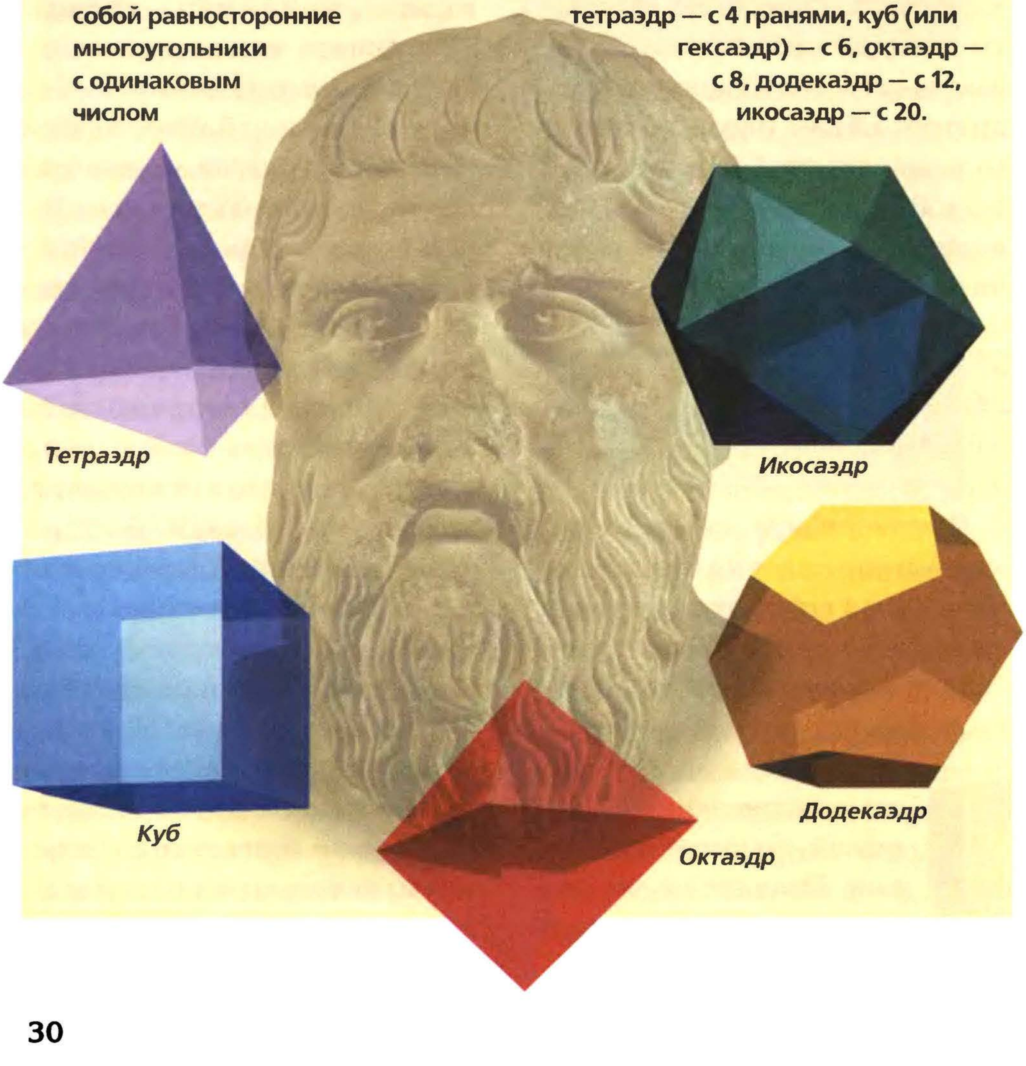
есть не что иное, как геометрия внутри круга на обычной (евклидовой) плоскости, лишь выраженная особым образом.



Точками здесь являются все точки внутри круга, прямые — это те части обычных прямых, которые находятся в пределах круга. Согласно постулату гиперболической геометрии, через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее. Остальные четыре постулата Евклида выполняются. Эта геометрическая теория была создана и развита русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским, который впервые сообщил о ней в 1826 г.

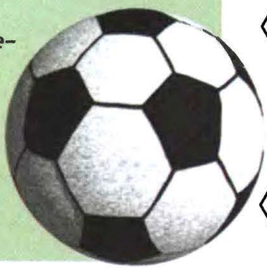
Платоновы тела

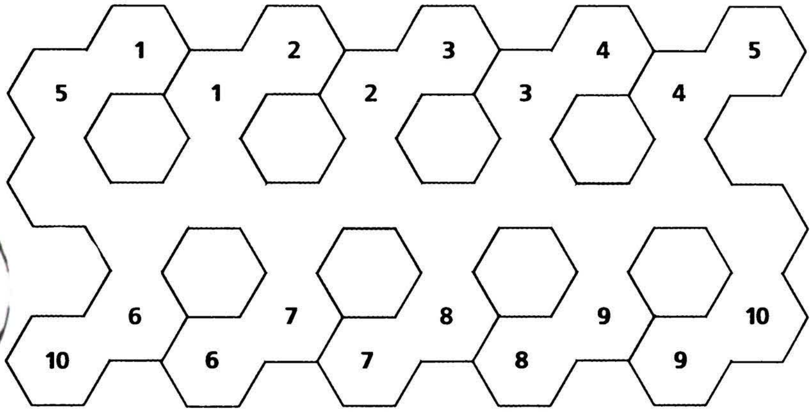
Платоновыми телами называются пространственные фигуры, все грани которых представляют собой равносторонние многоугольники с одинаковым числом вершин. Названы они так в честь греческого философа Платона. Существует пять платоновых тел: тетраэдр — с 4 гранями, куб (или гексаэдр) — с 6, октаэдр — с 8, додекаэдр — с 12, икосаэдр — с 20.



«ВЫКРОЙКА» ФУТБОЛЬНОГО МЯЧА

Скопируй этот шаблон, вырежи его по жирным линиям и согни по тонким. Если выкройка сложена правильно, то поля с одинаковыми номерами будут перекрываться. Склей их, и ты получишь «футбольный мяч», вместо пятиугольников которого будут отверстия.





ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (1707—1783) — мастер гипотез. Ни один другой математик, пожалуй, не выдвинул столько гипотез, сколько этот швейцарец. Большинство из них оказались верными, многие — ошибочными. Но это нисколько не умаляет заслуг Эйлера. Ведь даже опровержения движут вперед математическую науку. В 1726 г. Эйлер был приглашен в Россию и большую часть жизни прожил здесь, активно работая в Петербургской академии наук. Лишь с 1741 по 1766 г. провел в Берлине по приглашению прусского короля, где принял участие в реорганизации Берлинской АН.

ют одинаковые углы, равно как и у шестиугольников. При этом каждый пятиугольник окружен пятью шестиугольниками, а каждый шестиугольник — тремя пятиугольниками и тремя шестиугольниками.

Вершина — это точка, в которой сходятся более двух ребер. У футбольного мяча всегда ровно три ребра, не более. У других тел, состоящих из многоугольников, в одной точке могут сходиться и более трех ребер. Так сколько же вершин у футбольного мяча? Для этого представим, что каждая вершина относится к одному пятиугольнику и нет двух пятиугольников, имеющих общие вершины. Поэтому вершин должно быть 5 раз по 12 (столько на футбольном мяче пятиугольников):

$5 \cdot 12 = 60$.

А сколько у футбольного мяча ребер? У каждого пятиугольника 5 сторон, у шестиугольника — 6. Теперь умножим количество пятиугольников на 5 и прибавим умноженное на 6 количество шестиугольников, т. е. $5 \cdot 12 + 6 \cdot 20$. При этом каждое ребро мы сосчитали дважды, ведь каждое ребро точно ограничивает две плоскости. Так что число ребер составит половину от рассчитанного нами значения:

$(5 \cdot 12 + 6 \cdot 20)/2 = 90$.

А чтобы рассчитать количество граней, составляющих футбольный мяч, достаточно просто сложить количество пятиугольников и шестиугольников:

$12 + 20 = 32$.

Теперь из количества вершин вычтем количество ребер и прибавим количество граней:

$60 - 90 + 32 = 2$.

Результат — не случайное число, оно относится ко всем фигурам, стороны которых представляют собой многоугольники и которые не являются вогнутыми, т. е. не имеют углублений. Первым это доказал в XVIII в. швейцарский математик Леонард Эйлер. Примером теоремы Эйлера может служить кубик: у него 8 вершин, 12 ребер и 6 граней:

$8 - 12 + 6 = 2$.

Или пирамида: у нее (считая основание) 5 вершин, 8 ребер и 5 граней:

$5 - 8 + 5 = 2$.

Что такое фрактальная геометрия?

Классическая геометрия трехмерного пространства рассматривает лишь гладкие фигуры, например шары или кубы. Но реальность выглядит совершенно иначе. Облака — это не шары, горы — не кубики, а кора деревьев совсем не гладкая. Эти простые рассуждения вдохновили математика Бенуа Мандельброта, жившего в США, на поиски новой геометрии. Ее важнейшим свойством он считал самоподобие, которое наблюдал повсюду в природе: если рассматривать только форму, а не размеры, то сук дерева напоминает дерево в целом, ветка — сук, а жилки листа — ветку. Горы имеют сходство с отдельными скалами, скалы — с камнями, камни — с песчинками. Фигуры фрактальной геометрии Мандельброта также отличаются самоподобием. В отличие от фигур классической геометрии с их заданностью, так называемые фракталы возникают посредством роста.

Чтобы сконструировать их, действуют пошагово. Прямая линия изменяется по определенному правилу. То, что получилось, вновь изменяется по тому же правилу, результат в свою очередь тоже подвергается изменениям. Например, для создания «снежинки» (см. рис. на с. 34) на первом шаге средняя треть прямой линии превращается в зубчик. На следующем шаге точно так же средняя часть каждого отрезка прямой заменяется

зубчиком. После бесконечного повторения такой операции возникает линия, край которой напоминает снежинку.

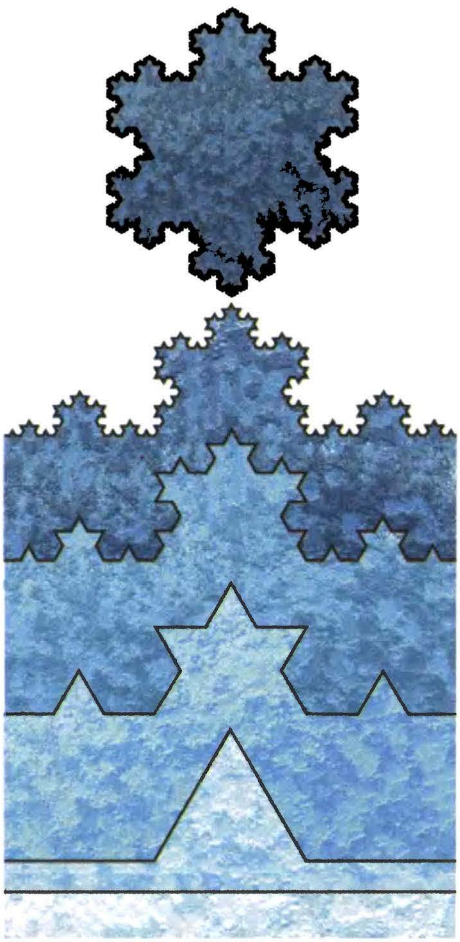
Раньше тысячекратные повторения таких операций были утомительным и долгим занятием. Но благодаря компьютеру теперь эти построения выполняются практически мгновенно. Именно поэтому расцвет фрактальной геометрии, ранние предшественники которой зародились еще сто лет назад, начался с развитием компьютерной техники.

МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА,
которое также называют «яблочным человечком», — известнейшая фигура фрактальной геометрии. Если постоянно повторять ее фрагменты, возникают самоподобные структуры. Так, по краям этой фигуры находятся многократно повторенные маленькие ее копии. Благодаря исследованиям последних лет ученые поняли закономерности возникновения самоподобия во многих случаях. Но некоторые моменты остаются загадкой даже для специалистов.

Какова протяженность побережья Великобритании?

Так называется статья, которую Бенуа Мандельброт опубликовал в американском научном журнале «Science». «Все зависит от масштаба», — таков ответ основателя фрактальной математики. Чем точнее топограф рассматривает береговую линию, тем больше появляется бухт и выступов, очертания которых приходится учитывать, измеряя длину берега. В книгах указываются расстояния от 7200 до 8000 км. По словам Мандельброта, природные формы отличаются тем, что практически не имеют определенной длины.

Математики создают фрактальные ландшафты и целые планеты подобно тому, как образуется снежинка Коха. Во многих научно-популярных фильмах и видеоиграх можно наблюдать фрактальные образования такого рода.



Кривая Коха (снежинка Коха): средняя треть каждого отрезка заменяется равносторонним зубцом.

Хайнц-Отто Пайтген из Бременского университета и его сотрудники измерили побережье Великобритании на картах циркулем. Приняв шаг равным 500 км, они получили результат 2600 км, а при масштабе 17 км — уже 8640 км. Чем меньше масштаб, тем больше длина. Этим и отличаются линии берега от таких фигур, как круги и треугольники. Пайтген измерил круг диаметром 1000 км тем же методом, как длину побережья Великобритании. При шаге циркуля, равном 500 км, он насчитал длину окружности 3000 км, при масштабе 17 км получилось 3141 км. Даже при самом мелком масштабе точнее,

ТЕОРИЯ ХАОСА

Фрактальная геометрия относится к исследованиям хаоса, изучающим большие последствия малых изменений. Это так называемый эффект бабочки: малейшее движение воздуха может обрести небывалые масштабы. Так (по крайней мере, теоретически) взмах крыльев бабочки на Карибах может вызвать ураган в Китае.

чем 1000π (3141,592... км), рассчитать никогда не удается.

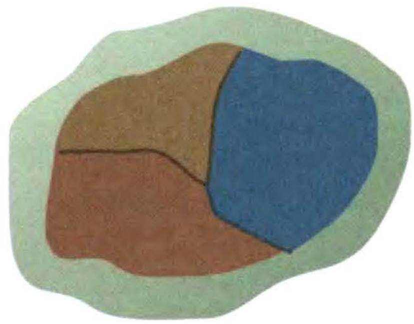
Фрактальные кривые, как и береговые линии, не имеют конечной длины. При формировании кривой снежинки зубчатая кривая с каждым шагом становится на треть длиннее, чем на предыдущей ступени. А поскольку этот опыт производится бесконечно много раз, длина бесконечно возрастает.

Как раскрасить географическую карту?

КОМПЬЮТЕР сыграл важную роль и в решении других задач, помимо задачи о четырех красках. Исследователи минимизируют количество ошибок, производя расчеты на нескольких машинах с различными программами. И все же до сих пор неизвестно, можно ли доказать задачу о четырех красках или любое другое математическое утверждение лишь с помощью компьютера.

В 1852 г. английский математик Фрэнсис Гатри составлял карту графств Великобритании. У него возник вопрос: какое минимальное количество цветов нужно, чтобы раскрасить карту любой конфигурации? Разумеется, соседние графства должны иметь разный цвет. Гатри предположил, что достаточно четырех цветов. Но доказать это не удалось ни ему, ни его коллегам на протяжении последних 124 лет. В результате четырех лет упорной работы и 1200 часов машинного времени решение нашли в 1976 г. ученые из Чикагского университета — Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен.

Поскольку ни один человек, даже математик, не может воспроизвести то, на что более 1000 часов тратит компьютер, доказательство проблемы о четырех красках сначала вызвало споры среди специалистов. В первые годы после публикации в ней находили все новые ошибки. Но Аппель и Хакен каждый раз устраняли их. Сейчас их работа считается признанной. К тому же математики нашли другие, не столь сложные, доказательства этой задачи. Но никому из них не удалось полностью обойтись без помощи компьютера.

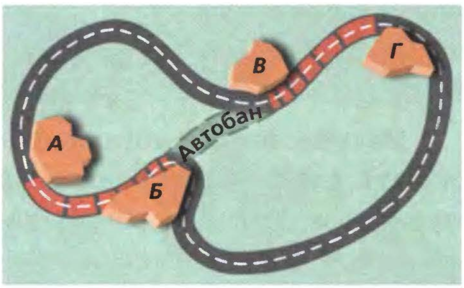


Для раскраски этой простой карты нужно 4 разных цвета.

Могут ли новые дороги привести к увеличению пробок?

Математики помогают создавать расписания движения транспорта, проектировать новые дороги и исследовать проблему возникновения пробок на дорогах. Например, математик из Бохума Дитрих Браес доказывает, что строительство новой дороги может привести к увеличению заторов: из города *А* в город *Г* ведут два пути, один — через город *Б*, другой — через город *В*. Утром из города *А* в город *Г* едут 6000 машин. Автобаны от *А* в *В* и от *Б* в *Г* прекрасно оборудованы. По ним можно добраться до пункта назначения за 50 минут. Дороги от *А* до *Б* и от *В* до *Г* относительно короткие, но очень узкие. Для того чтобы добраться до нужного места, 1000 машин потребуется 10 минут. Если машин будет 2000, необходимо 20 минут. При 3000 машин — до 30 минут, при 4000 — до 40, при 5000 — до 50, а при 6000 — до часа. Если половина водителей выберет маршрут через *Б*, а дру-

Математики исследуют вопрос, как возникают пробки.



Строительство автобана ведет к пробкам на дороге от А к Б и от В к Г.

гая половина — через *В*, на дорогу от *А* до *Г* уйдет 80 минут.

Теперь министр транспорта распорядился построить новый автобан, по которому машины за 10 минут могут добраться от *Б* до *Г*. Неудачная идея: новая дорога привлекает водителей. Из-за этого усиливается движение на отрезках дороги от *А* до *Б* и от *В* до *Г*, что увеличивает время поездки для всех водителей. Разгрузки автобана не происходит, ведь в любом случае требуется 50 минут на дорогу. Теперь, если каждый водитель ищет самый удачный маршрут, все проводят в дороге 90 минут, т. е. на 10 минут больше. На дорогах от *А* к *Б* и от *В* к *Г* теперь скапливаются 4000 машин, которым для преодоления узких мест нужно 40 минут. Ни один водитель не может сократить время поездки, выбрав другой путь.

Как наиболее компактно разложить шары?

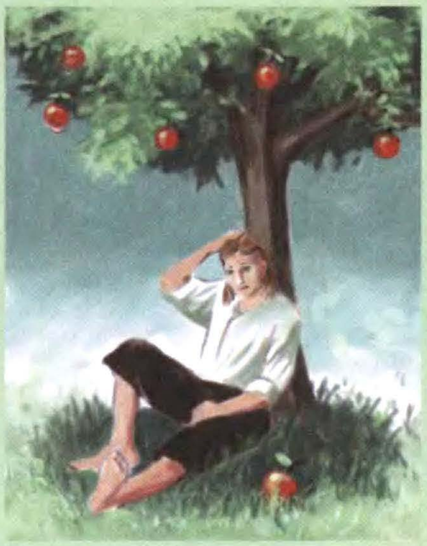
Окончательный ответ на этот вопрос нашел американский математик Том Хейлс из университета Энн Арбор (штат Мичиган): шары нельзя сложить плотнее, чем это делали солдаты с ядрами сотни лет назад. В наши дни по этому же принципу продавцы укладывают апельсины: к двум лежащим рядом апельсинам укладывается третий так, что он касается обоих других. Каждый следующий фрукт нижнего слоя можно положить лишь так, чтобы он касался двух уже лежащих. Когда покрыта вся поверхность стола, переходят к следующему слою, который выглядит точно так же, как первый. При этом апельсины сами скользят в нужное место, а именно — в ямки, образованные нижним рядом. Так заполняется слой за слоем. Фрукты при такой укладке занимают

ПРОБКИ НА ДОРОГАХ
возникают там, где идет ремонт дороги или случилась авария. Но часто они образуются «на ровном месте». Математики выяснили, как на дороге, где нет никаких помех, могут возникнуть пробки. Если водитель тормозит, (например, на его полосу перестраивается грузовик), то идущий за ним водитель часто замечает это с некоторым опозданием и вынужден тормозить сильнее. Если следующий за ним водитель еще сильнее нажмет на тормоз, его машина может остановиться.

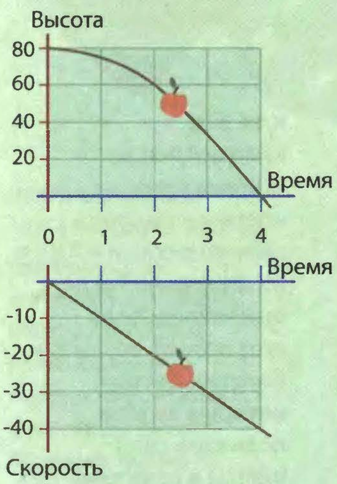
ИОГАНН КЕПЛЕР (1571–1630)
известен в первую очередь законами движения планет, которые этот немецкий астроном и математик вывел из наблюдений, включая многолетние наблюдения его учителя Тихо Браге, датского астронома. Они описывают движение планет и Солнца. Помимо этого Кеплер развил теорию линз и телескопов.

Дифференциальное исчисление

Одна из самых известных легенд гласит, что знаменитый физик Исаак Ньютон (1643–1727) сидел как-то под яблоней. Когда одно из яблок чуть не стукнуло его по голове, он задумался о силе, которая притянула яблоко к земле. Мы называем ее силой тяжести, или гравитации. Чтобы описать падение яблока, Ньютону пришлось развить новую область математики, которая и по сей день является чрезвычайно важной: дифференциальное исчисление. С его помощью можно понять принципы движения.



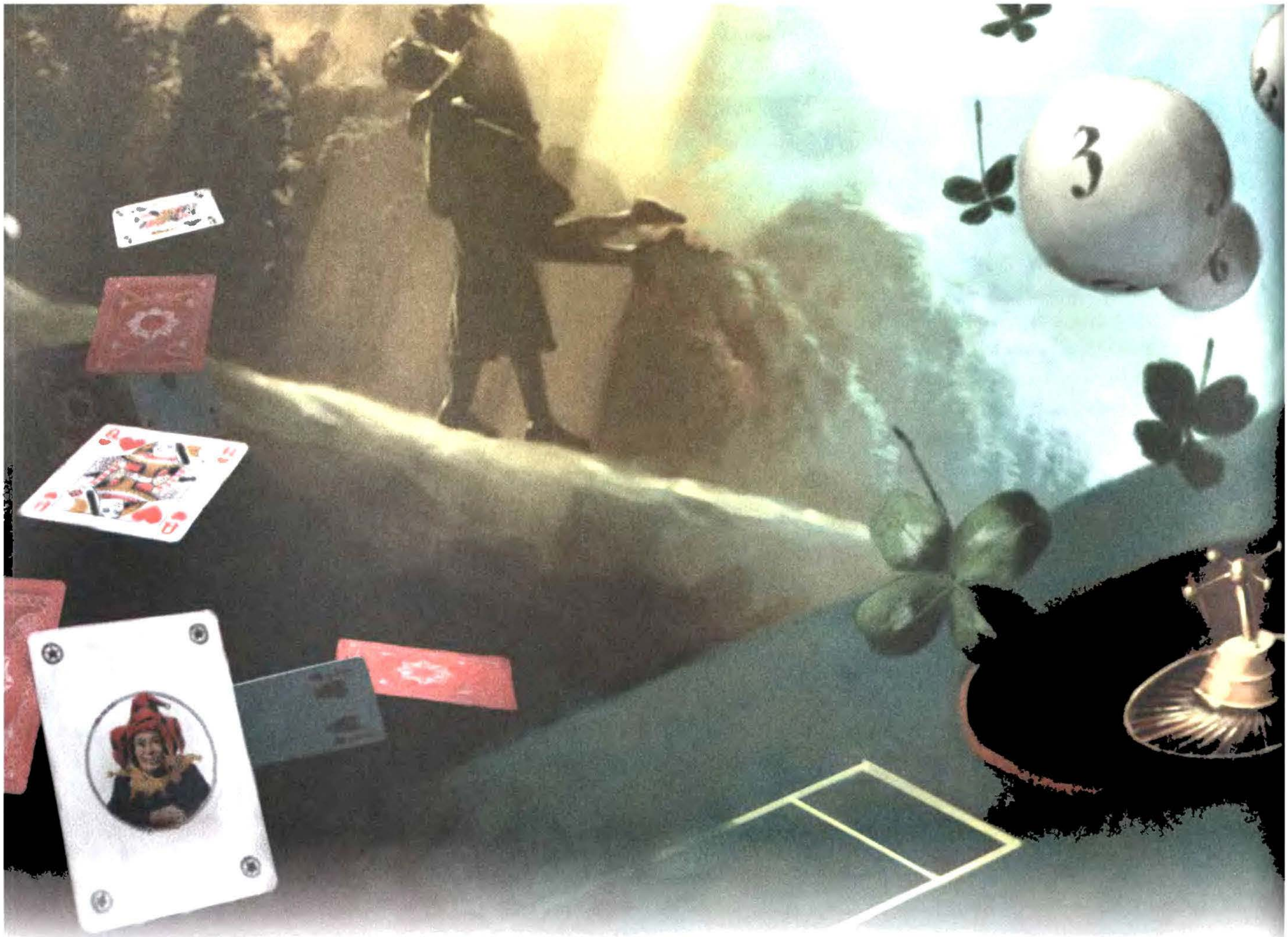
Чтобы расчет был проще, представим яблоню высотой 80 м. Яблоко за первую секунду пролетает 5 м, в следующую — 15 м (ускорившись силой тяжести), в третью — 25 м, в четвертую — 35 м. Пролетев 80 м, оно падает на землю. Каждую секунду его высота над землей составляет, соответственно, 80, 75, 60, 35, 0 м. О чем говорят нам изменения высоты, на которой находится яблоко? В этих числах вряд ли можно увидеть закономерность. Попытаемся понаблюдать за скоростью, с которой движется яблоко. Вначале оно находится в состоянии покоя, спустя секунду движется со скоростью 10 м/с (это 35 км/ч), спустя две секунды — 20 м/с, спустя три секунды — 30 м/с. Через четыре секунды оно падает на траву со скоростью 40 м/с. Таким образом, скорости дают простую картину: 0, 10, 20, 30, 40. За секунду яблоко прибавляет около 10 м/с. Физики говорят, что яблоко движется с постоянным ускорением около 10 м/с^2. Высоту и скорость яблока можно определить не только посекундно, но и в любой момент. Для этого начертим декартову систему координат (см. с. 26). По одной из ее осей измеряется время, по другой — высота. Теперь отметим высоту яблока в каждый момент времени. Получится кривая. Во второй системе координат по одной оси отмерим время, по другой — скорость. Поскольку яблоко падает вниз, возьмем отрицательные числа. Получится прямая. Ньютон обнаружил, что график скорости проще, чем график высоты, и разработал метод расчета, как перейти от одного к другому: дифференциальное исчисление. С его помощью можно определить скорость движения. На чертежах она соответствует углу наклона или крутизне линии.



Изменение высоты при падении яблока описывается кривой линией, а скорость его движения — прямой.

ровно три четверти емкости. О том, что плотнее их уложить нельзя, говорил еще в 1609 г. астроном Иоганн Кеплер. Но доказать это оказалось непросто. Вопрос оставался открытым 389 лет, дольше, чем знаменитая теорема Ферма. Хотя некоторые математики утверждали, что решили эту задачу, их коллеги каждый раз находили изъяны в доказательствах. «Эта область математики печально известна ошибочными доказательствами, — объяснил Том Хейлс, нашедший доказательство в 1998 г. — У меня ушло несколько месяцев на то, чтобы проверить работу».

Это самый компактный способ укладки апельсинов.



ВЕРОЯТНОСТЬ

Случайности определяют нашу жизнь, будь то азартная игра или выбор спутника жизни. Математики пытаются оценить вероятности.

Насколько часто вам везет?

Если подбросить в воздух монетку, она приземлится либо «орлом», либо «решкой» вверх. Шансы и того, и другого события одинаково равны. Математики говорят, что вероятность выпадения «решки» равна $\frac{1}{2}$. В математике вероятность наступления события всегда представлена числом от 0 до 1. Если бросить кубик, вероятность выпадения числа «6» составит $\frac{1}{6}$. Ведь кубик падает на одну из своих шести граней, и шансы того, что выпадет «6» так же велики, как для других граней кубика. Вероятность того, что выпадет «4», или «5», или «6», составляет $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Вероятность того, что выпадет 0, относится к событиям, которые никогда не наступят, например выпадение «7» при бросании кубика. Вероятность, равная 1, относится к событиям, которые обязательно наступят, например, то, что выпадет «1», «2», «3», «4», «5» или «6».

Легко вычислить и так называемое комплементарное (от лат. complementum — дополнение) событие: возможность того, что не выпадет «6», равна $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

КАК ВСЕ НАЧИНАЛОСЬ
Математики впервые занялись вероятностями в XVII в. во Франции. Тогда они исследовали этот вопрос по заказу богатых дворян, которые хотели повысить свои шансы в азартных играх. Сегодня теорией вероятности пользуются почти все науки.

ЯКОБ БЕРНУЛЛИ (1654—1705) — швейцарский математик и физик, считается одним из основателей теории вероятности. Он открыл закон больших чисел.

Насколько высока вероятность того, что при броске двух кубиков выпадет по крайней мере одна «6»? $\frac{1}{3}$? Нет. Посчитаем. Для двух кубиков существует 36 возможных вариантов, каждый из которых одинаково вероятен:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

В 11 из этих случаев (варианты последней строки и последнего столбца) выпадает «6». Итак, вероятность выпадения хотя бы одной «6» составит $\frac{11}{36}$, что немного меньше $\frac{1}{3}$. Тот, кто поставит на $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{6}$ на каждый кубик и затем сложить), дважды посчитал вариант, указанный в правом нижнем углу (6,6). Если уже выпала «6» на одном кубике, это не повысит шансы на победу, даже если выпадет «6» на другом кубике.

Можно вывести шансы на победу и через комплементарный результат: вероятность того, что не выпадет «6», для каждого кубика составит $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что не выпадет ни один кубик, составит $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$. Так что комплементарная возможность (выпадение хотя бы одной «6») составит

$$1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=1-\frac{25}{36}=\frac{36}{36}-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}=$$
$$=0{,}30555...$$

Есть ли память у случайности?

Нет. Если при броске кубика десять раз подряд выпало «6», вероятность такого же результата при одиннадцатом броске снова будет равна $\frac{1}{6}$. Разве что кубик будет фальшивым и, к примеру, одна его грань будет тяжелее другой. Очевидно, что кости, карты и шарик рулетки не имеют памяти. И все же многие игроки не верят в это и проигрывают целые состояния, ожидая милости судьбы.

Тот, кто надеется на это, неверно понял так называемый закон больших чисел, впервые сформулированный и доказанный Якобом Бернулли. Эта теорема гласит:

«Если много раз последовательно бросать кости и записывать результаты, то примерно в шестой части случаев выпадет "6"». Можно сформулировать иначе: если разделить количество выпавших «6» на количество всех бросков, то при достаточно большом количестве бросков результат будет составлять около $\frac{1}{6}$. Но нельзя определить, когда результаты сравняются. Через какое-то время «6» будет появляться чаще или реже, чем в $\frac{1}{6}$ случаев. Нет такой игровой системы, которая дала бы кому-то преимущества при игре в кости или в рулетку.

Закон больших чисел активно применяется и в наши дни, например, при расчете страховки, чтобы определить, каким должен быть взнос клиента, или для оценки общественного мнения при опросе 1000 человек.

Часто ли одноклассники празднуют дни рождения в один день?

Вероятность того, что у двоих детей из одного класса день рождения приходится на одно число, удивительно высока. Уже в случае, если в классе 23 ученика, она составляет более $\frac{1}{2}$. Допустим, у всех детей дни рождения приходятся на разные дни. Тогда день рождения первого из них может прийтись на любой день. Для второго остаются все дни, кроме дня рождения ученика N1. То есть вероятность того, что он будет праздновать в другой день, составит $\frac{364}{365}$. Для третьего ученика это может быть один из 363 дней (365 − 2), для четвертого — один из 362 дней (365 − 3) и т. д. Итак, вероятность того, что из 23 детей ни у кого дни рождения не совпадают, легко рассчитать на калькуляторе:

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \ldots \frac{343}{365} = 0{,}492\ldots$$

Значит, вероятность того, что хотя бы у двоих учеников дни рождения совпадают, будет больше $\frac{1}{2}$.

Если в классе 40 учеников, то вероятность того, что дни рождения у них приходятся на разные дни, составит:

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \ldots \frac{323}{365} = 0{,}108\ldots$$

Это меньше одной девятой.

Что такое условная вероятность?

Умножать вероятности друг на друга допустимо лишь в случае так называемых безуслов-

Совсем не редок случай, когда у двоих детей в классе день рождения выпадает на один день.

НЕОЖИДАННОСТИ
Часто расчетная вероятность противоречит нашим ожиданиям. Пример: допустим, что тест на вирусное заболевание оказывается положительным у каждого инфицированного, но также в среднем и у одного из 100 здоровых людей. Итак, в Германии 8000 инфицированных. И если у кого-то результат теста положителен, каждый считает, что может заболеть. При этом велика доля вероятности, что никакой опасности нет. Ведь если проверить все 80 млн немцев, тест окажется ошибочным для каждого сотого, а значит, для 800 000 человек. Сопоставим с 8000 инфицированных. Вероятность оказаться носителем вируса при положительном анализе составит

$$\frac{8000}{800000} = \frac{1}{1000} = 0{,}01.$$

ГОТТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНИЦ (1646—1716) — немецкий ученый, которого часто называют универсальным гением, считал одинаково вероятным выпадение суммы очков «11» и «12» двух кубиков. При этом сумму «12» дает лишь выпадение двух «6». «11», напротив, получается двумя разными способами: либо первый кубик даст «5», а второй «6», либо наоборот. Так что сумма «11» будет получаться в два раза чаще, чем «12», и вероятность обоих этих событий составит $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ в одном случае и, соответственно, $\frac{1}{36}$ в другом.

ных вероятностей: например, день рождения школьника никак не связан с днем рождения его соученика (исключение — близнецы).

Точно так же последовательные броски кубика никак не влияют друг на друга. В этих случаях мы говорим о том, что вероятности умножаются. Вероятность того, что подряд выпадет две «шестерки», составит $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Иначе обстоит дело с зависимыми событиями. Математики попытались «приручить» их с помощью так называемых условных вероятностей. Это вероятности того, что определенное событие наступит, если перед ним наступит другое. Пример: в коробке с печеньем лежат два шоколадных печенья и одно зерновое. Насколько велика вероятность взять не глядя два шоколадных печенья подряд? Можно посчитать: вероятность того, что попадется одно шоколадное печенье, равна $\frac{2}{3}$ (две возможности из трех). Значит, возможность вытащить оба раза по шоколадному печенью составит $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}=0{,}444\ldots$ Но это неверно. Ведь во время второй попытки в коробке остаются 2 печенья, одно шоколадное, одно простое. И условная вероятность вытащить во второй раз шоколадное печенье, если это уже удалось в первый раз, составит теперь $\frac{1}{2}$; значит, вероятность дважды подряд взять шоколадные печенья, составит $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$

Каковы шансы на выигрыш?

В одном американском шоу победитель в конце программы должен выбрать одну из трех дверей. За одной дверью находился главный приз — автомобиль, за каждой из двух других — коза, знак провала. После того, как кандидат сделал выбор, ведущий шоу открывает одну из двух оставшихся дверей, за которой находится коза. Теперь игроку дается возможность поменять свой выбор и выбрать другую дверь. Повысились ли в результате этого выбора его шансы?

Ответ гласит: да, шансы игрока возрастут вдвое, если он выбирает другую дверь. Ведь ведущий открывает не любую дверь, а именно ту, за которой находится коза и на которую игрок не указывал. Если игрок остается при своем решении (назовем эту дверь А), то он получает машину в $\frac{1}{3}$ случаев. Если он изменит выбор, его шансы на успех составят уже $\frac{2}{3}$. Он выигрывает в 2 из 3 возможных случаев, если машина скрыта за дверью Б или В:

если она находится за дверью Б, ведущий покажет ему козу за дверью В. Игрок поменяет выбор с А на Б и станет обладателем машины;

если машина находится за дверью В, ведущий откроет дверь Б. Игрок поменяет выбор с А на В и выиграет машину;

Этот пример показывает, как игрок может повысить свои шансы на победу в азартной игре.

и только в случае, если машина была за дверью А, он проиграет.

Те, кого сбила с толку эта задача, не одиноки. Несколько лет назад газеты США и Германии активно обсуждали проблему с козами. Даже опытные профессора математики не хотели сначала рассматривать правильное решение.

Что такое случайные числа?

С помощью так называемых случайных чисел — последовательности случайно выбранных чисел — ученые пытаются оценить неопределенные события, например: будет ли утром дождь, спустя какое время прибор может впервые выйти из строя или насколько вероятны пробки на дорогах? Компьютер, используя эти числа, за секунды рассчитает то, на что в реальной жизни уходят недели и месяцы. И не единожды: каждый раз, получая новые случайные числа, он ведет тысячекратные расчеты того, насколько часто может случиться определенное событие, например, перегорит лампочка или на следующий день пойдет дождь. Так можно выявлять вероятности. Случай-

МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО
Так называются методы, которые основаны на использовании случайных чисел. Названы они в честь знаменитого средиземноморского казино. Впервые их применили ученые, которые в 1943—1945 гг. занимались Манхэттенским проектом (разработка атомной бомбы), для расчета сложных физических процессов.

РИХАРД ФОН МИЗЕС (1883—1953) — австрийский математик, в первой половине XX в. пытался объяснить случайные числа отсутствием предвидения: последовательность нулей и единиц, по Мизесу, считается случайной, если нет правила, которое может предсказать появление следующего члена ряда с вероятностью большей, чем $\frac{1}{2}$. В отношении азартных игр это означает: не существует методов, которые давали бы преимущество одному из игроков. Но в этом описании есть одна загвоздка: фон Мизес не мог точно выразить математически, что он понимает под этим правилом. Поэтому его попытка осталась незавершенной.

ные числа помогают также решать задачи, в которых нет ничего случайного. Так геологи вычисляют месторождения нефти, а инженеры управляют роботами-автооператорами.

Чтобы использовать в расчетах случайные числа, недостаточно бросать кости или играть в рулетку. Слишком большое количество чисел необходимо.

Современные суперкомпьютеры поглощают миллионы случайных чисел в секунду.

Когда испытуемого просят написать ряды чисел, результат, как правило, оказывается совершенно непригодным. Ведь большинство людей очень редко позволяют себе написать одно и то же число дважды подряд или чаще. А при бросании костей, например, одно и то же число может выпасть каждый шестой раз. В последовательности из 120 случайных чисел между 1 и 6 можно ожидать выпадения около 20 пар одинаковых чисел, и примерно трижды — последовательности из трех одинаковых цифр. А тот, кто должен выписать случайные числа, непроизвольно думает: «Раз это должно выглядеть случайным, нельзя повторно брать то число, которое уже писал».

Современные суперкомпьютеры за секунды поглощают миллионы случайных чисел. Загружать их списками бесперспективно. Поэтому компьютеры сами составляют с помощью простых формул последовательности чисел, которые выглядят так, как будто они случайны. Так что каждый раз в наличии имеются достаточно большие списки для использования, хотя эти числа не случайны, а являются результатом расчетов. Для большинства сфер применения достаточно, если последовательности чисел обладают определенными свойствами, например каждая цифра появляется с одинаковой частотой.

Что математики понимают под случайностью?

Математики долго ломали головы над тем, что считать идеальным рядом случайных чисел. Если монету много раз подбрасывать и каждый раз обозначать единицей «решку», а нулем — «орел», то результат каждый раз можно считать случайным. Но есть одна сложность:

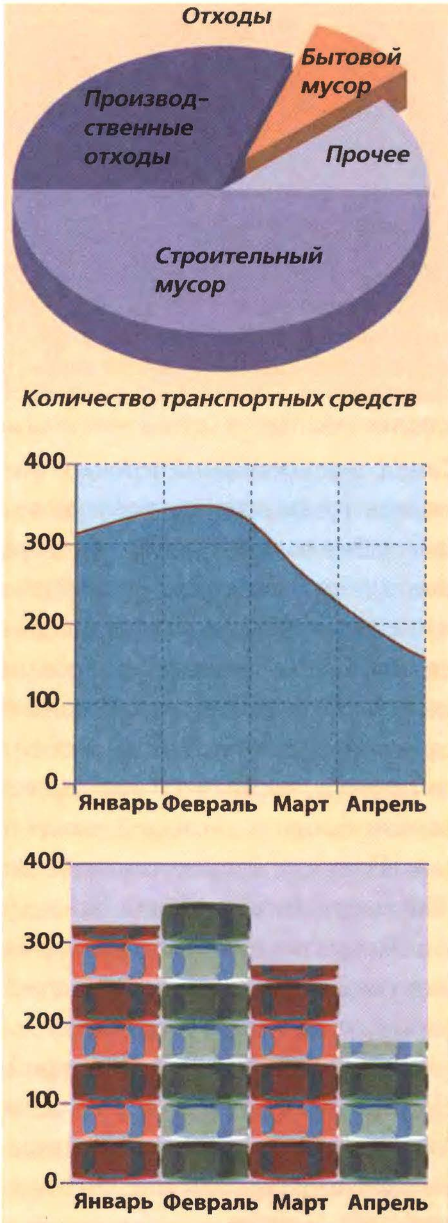
Выпадет ли «орел» или «решка», решает случай.

каждая возможная последовательность чисел появляется с одинаковой вероятностью. Так, вероятность 00000 будет равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{32}$, так же как и вероятность появления 10011, даже если последняя комбинация кажется более похожей на случайную. Ведь у вероятности нет памяти, и результат каждого броска независим от всех предыдущих.

И только в 60-х гг. XX в. исследователи нашли решение. Теперь ряд чисел считается случайным, если его нельзя описать более короткой цепочкой знаков. Так, последовательность 11111... можно выразить коротко — «одни единицы», 0101010101... — как «повторяющиеся 01». Для случайных последовательностей такие описания в короткой форме невозможны. Теоретиков, наверное, это определение удовлетворит, но оно годится лишь для того, чтобы распознать неслучайные ряды. Но как узнать, нельзя ли изобразить последовательность чисел короче? На деле это представляется не только сложным, но даже невозможным. Математики доказали, что нет такого метода, с помощью которого удалось бы дать кратчайшее описание числового ряда.

Что такое статистика?

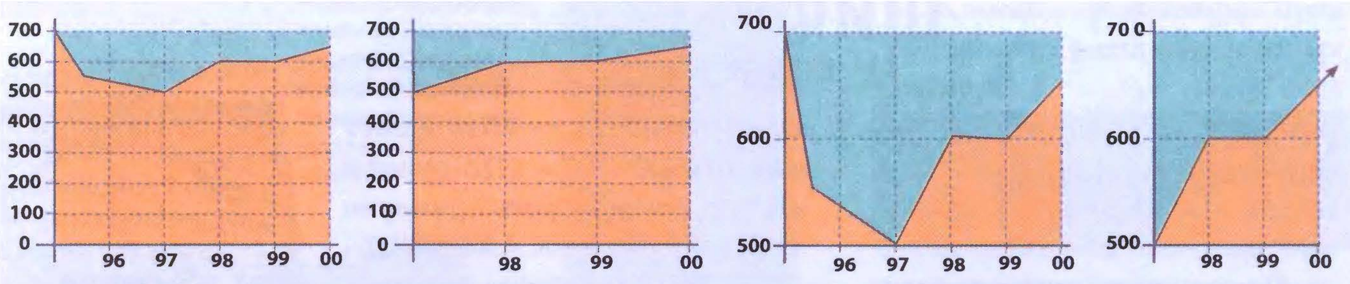
Термин «статистика» используется в двух случаях: так называют изображение чисел в виде таблиц или графиков, а в математике статистикой называется раздел, который помогает установить и оценить массовые явления. Например, защитник природы хочет знать, сколько слонов обитает в национальном парке. Зачастую сложно отыскать каждое животное. Поэтому считают, например, слонов в одной части парка и пытаются с помощью этого результата вычислить их общее



Различные способы изображения числовых данных: так называемые круговые (секторные) диаграммы (вверху) наглядно показывают доли. С первого взгляда видно, какую часть от прочего мусора составляют бытовые отходы. Вместо аскетичных графиков (в середине) часто используют картинки. На нижнем графике маленькие машинки показывают, насколько загружены дороги в указанные месяцы.

СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Если у Антона есть 3 конфеты, а у Берты 5, то в среднем на каждого приходится 4. Чтобы рассчитать среднее значение, числа складывают и делят результат на количество человек (в данном примере 3+5 делится на 2). Так необъятные колонки цифр сводятся к одному значению. Но здесь нужна осторожность. Если, к примеру, Антон — единственный в классе обладатель пакета со 100 конфетами, а в классе 25 учеников, то на каждого в среднем придется по 4 конфеты. И тем не менее у остальных ничего нет. Среднее значение не показывает, каков разброс значений. Это ясно из шутки: что говорит статистик, сунув ногу в холодильник, а руку положив на горячую плиту: средняя температура — приятная.



В основе четырех графиков, которые кажутся совершенно разными, лежат одни и те же цифры.

число. Другой пример: прогноз результатов на выборах. Опрашивают некоторое число случайно выбранных граждан (как правило, от 1000 до 2000), какой партии они отдадут свои голоса. На основе этих ответов делают прогноз, как проголосуют несколько десятков миллионов избирателей в стране.

В статистике уместна осторожность. Часто цифры «выявляют» такие зависимости, которых не существует вовсе. Так, газеты писали об одном исследовании, почему так рано умирают пилоты. Согласно этому исследованию, больше половины капитанов гражданской авиации умирали до 65 лет. То, что вызвало серьезную обеспокоенность, при внимательном рассмотрении оказалось совершенно естественным, поскольку в последние годы резко увеличилось количество перелетов, а большинство пилотов моложе 65 лет. Неудивительно, что более половины умерших еще не достигли этого возраста. Если полагаться только на цифры, можно даже доказать, что детей приносит аист. В период с 1964 по 1978 г. в Германии наблюдалось сокращение рождаемости, и одновременно — сокращение численности аистов.

Газеты и телепередачи часто представляют статистические расчеты в виде графиков. Читателю и зрителю так легче усвоить информацию. Но эти графики нередко тоже дают искаженное представление о действительности. Приведенные здесь четыре графика основаны на одних и тех же цифрах, которые могут представлять, например, стоимость акций или объем продаж в период 1995–2000 гг. И все же они производят на наблюдателя совершенно разные впечатления: первый показывает цифры неискаженными, во втором опущены первые два года. И только поэтому кривая неуклонно идет вверх год от года. В третьем — отсутствует нижняя часть. Из-за этого динамика выглядит намного более впечатляющей. А четвертый график и вовсе вводит в заблуждение: из пологой линии получилась крутая. Стрелка на четвертом графике обещает дальнейший подъем в будущем.

ЭЛИЗАБЕТ НОЭЛЬ-НОЙМАНН, известнейший в Германии социолог, говорит о своем предмете: «Для меня и сегодня остается загадкой, каким образом удается узнать, о чем думают 60 млн человек, если опрошены 2000. Я не могу это объяснить, но это так».

СТАТИСТИКА пользуется дурной славой. Специалисты шутят: «Не доверяй никакой статистике, если ее рассчитывал не ты». Британский политик Бенджамин Дизраэли (1804–1881) говорил: «Существует три вида лжи: ложь, грубая ложь и статистика».

С помощью статистики можно даже доказать, что детей приносят аисты.

ШИФРЫ

ZHU NDQQ GDV OHVHQ?

Послания, не предназначенные для чужих глаз, часто шифруются. Еще Цезарь (100–44 гг. до н. э.) посылал своим полководцам сообщения, которые не могли прочитать враги. Предположительно, римские полководцы и государственные деятели заменяли каждую букву текста другой, стоявшей в алфавите через две буквы от нее. Так, вместо A писалось D, вместо H — K. Каждая буква заменялась другой, которая в данном примере находится под ней.

Теперь мы можем расшифровать вопрос «ZHU NDQQ GDV OHVHQ?» — «Кто может это прочитать?» (По-русски это может выглядеть примерно так: НХС ПУЙЗХ АХС ТУСЪЛХГХЯ? Попробуйте расшифровать, используя русский алфавит. *Прим. ред.*)

Такой код несложно взломать, особенно если сообщение длинное, поскольку буквы алфавита встречаются в словах с разной частотой. Например, в обычном немецком тексте примерно пятую часть всех букв составляет E. Вторая по частоте буква — N. С помощью компьютера достаточно длинное сообщение расшифровывается за считанные секунды: та буква, которая встречается чаще всего, наверняка E, следующая по частоте — N и т. д.

Машина для шифровки сообщений с дисками букв.

Шифрами пользуются не только шпионы и секретные агенты, но и клиенты банков, и пользователи Интернета.

ПЕРВЫЕ ШИФРОВАЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Разумеется, не стоит, пользуясь кодом Цезаря, каждый раз сдвигать буквы на 3 позиции. Можно перемещать их, например, на 5 и на 10 позиций. Чтобы не составлять каждый раз новые списки перемещений, уже в XVI в. изобрели небольшой аппарат, состоявший из двух дисков с буквами, которые можно было вращать относительно друг друга.

ЭНИГМА

Во время Второй мировой войны (1939–1945) англичанам удалось расшифровать многие приказы немецкого командования, зашифрованные с помощью машины «Энигма». По мнению некоторых историков, это серьезно повлияло на исход Второй мировой войны. Расшифровка секретных сообщений удалась потому, что немцы слишком беззаботно относились к шифровке на «Энигме». Так, в качестве ключевых букв они часто набирали AAA, ABC и прочие незатейливые комбинации.

Немецкое командование во времена Второй мировой войны шифровало радиограммы с помощью машины «Энигма».

Что такое невзламываемый код?

А может ли существовать такой шифр, который невозможно взломать ни сейчас, ни через 10 или 1000 лет, ни с помощью современных компьютеров и более совершенных средств в будущем? Да, может, и это не особенно сложно.

Если заменять буквы кода Цезаря не всегда на одно и то же количество букв, но каждый раз на другое, то такой код уже не взломать. Например, сдвинем первую букву на 3 позиции, вторую — на 5, а третью — на 9, и вместо слова «ZHU» («КТО») получим «NYX». Новость, зашифрованную подобным образом, сможет прочесть только тот, кто знает, на сколько букв сдвинут текст. Поскольку те буквы, которые чаще всего встречаются в тексте, зашифрованы каждый раз по-разному, нежеланному читателю частота появления определенных букв не поможет расшифровать сообщение.

Но у этого метода есть существенный недостаток: у отправителя и получателя сообщения должны быть одинаковые списки с цифрами, указывающими, сколько букв каждый раз сдвигается. И этот список должен быть столь же длинным, как и зашифрованный текст.

Кто в наши дни использует шифрованные сообщения?

Сегодня шифруют сообщения не только секретные службы и военные. Шифры вошли в гражданскую жизнь, используются при получении денег в банкоматах и покупках через Интернет, когда информация о кредитной карте покупателя передается в шифрованной форме, чтобы никто не мог считать ее. Математики за прошедшие годы разработали для этого целый ряд методов. Часто используется метод под названием DES — data encryption standard (в пер. с англ. — стандарт кодировки данных). DES кодирует сообщение с помощью тайного 56-разрядного двоичного числа (см. с. 12). Считается, что подобрать это число невозможно, поскольку существует много биллиардов вариантов. И все же математики разработали вариант компьютерной программы, которая основана уже на 112-разрядных двоичных числах.

Вольфганг Блум

МАТЕМАТИКА

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ

Издание предназначено
для детей среднего школьного возраста

Ведущий редактор *Т.И. Смирнова*
Редактор *И.К. Лапина*
Технический редактор *С.В. Камышова*
Корректоры *Н.В. Васильева, И.К. Лапина*
Дизайнер обложки *А.М. Кузнецов*
Компьютерная верстка *Н.М. Андреевой*

ЗАО «Мир Книги Ритейл»
111024, Москва, ул. 2-я Кабельная, д. 2, стр. 6

Каталог «Мир книги» можно заказать по адресу:
111116, г. Москва, а/я 30 «МИР КНИГИ»,
тел.: (495) 974-29-74 e-mail: order@mirknigi.ru

Подписано в печать 15.08.2011. Формат 60 х 90/8.
Печать офсетная. Гарнитура KorinaC. Печ. л. 6,0.
Тираж 6000 экз. Заказ № 1113480.

arvato
ЯПК

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ЗАЧЕМ И ПОЧЕМУ

УЗНАЙ БОЛЬШЕ!

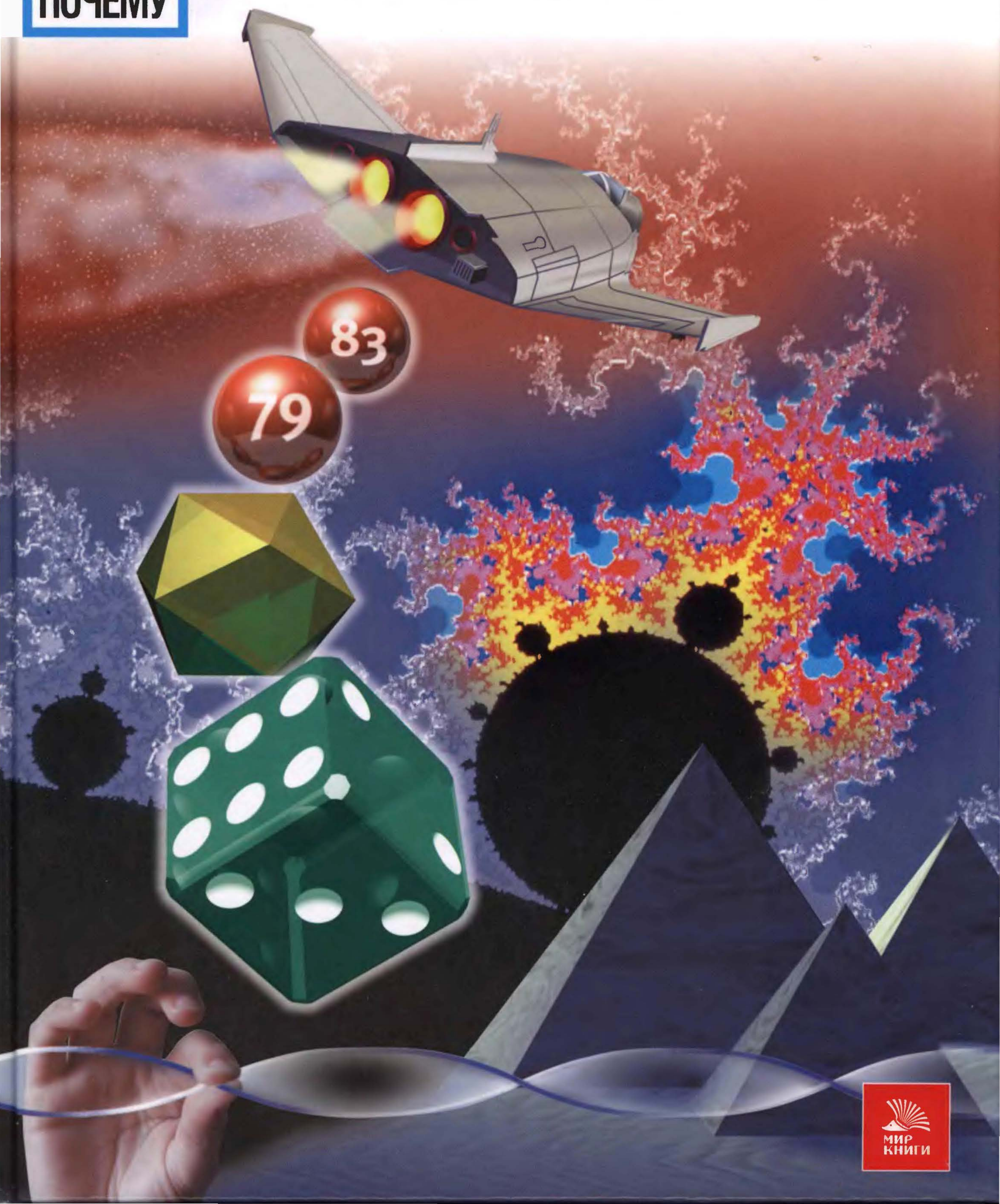
Хотите узнать много нового и интересного, весело провести время и найти ответы на любые вопросы? Добро пожаловать в удивительный мир «Зачем и Почему» — мир феноменов и загадок, ярких страниц истории и невероятных открытий! «Зачем и Почему» — 120 книг обо всем на свете и даже больше!

Зачем люди придумали числа и **почему** знание математики столь важно в жизни? **Зачем** нужен ноль и **почему** мы производим расчеты в так называемой десятичной системе? **Зачем** математики используют в уравнениях буквы и **почему** шифры так стремительно вошли в нашу повседневную жизнь? Все об удивительной науке, возникшей благодаря способности человека к абстрактному мышлению. Заглянув в мир чисел, геометрии и теории вероятности, вы убедитесь, что математика – невероятно увлекательная наука.

ISBN 978-5-501-00010-0

ЗАЧЕМ И ПОЧЕМУ

Математика



МИР КНИГИ