



Г.Е.КУЗМАК

ДИНАМИКА
НЕУПРАВЛЯЕМОГО
ДВИЖЕНИЯ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ
АППАРАТОВ
ПРИ ВХОДЕ
В АТМОСФЕРУ

МЕХАНИКА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970**

Г. Е. КУЗМАК

**ДИНАМИКА
НЕУПРАВЛЯЕМОГО
ДВИЖЕНИЯ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ
АППАРАТОВ
ПРИ ВХОДЕ
В АТМОСФЕРУ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970**

6Т6

К89

УДК 629.19

Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу, Г. Е. Кузмак. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1970, 348 стр.

В книге в нелинейной постановке исследуется движение вокруг центра масс неуправляемых летательных аппаратов на пассивном участке траектории: главным образом при входе в атмосферу, а также при движении в атмосфере и при выходе из атмосферы.

Для исследования предлагаются: асимптотический метод, применимый в тех случаях, когда характерное время движения летательного аппарата вокруг центра масс много меньше характерного времени движения центра масс, и уточненный асимптотический метод, основанный на сопряжении численных и асимптотических решений уравнений движения, имеющий значительно более широкую область применимости. Кроме этого, в книге собраны известные аналитические решения для случая движения летательного аппарата с малыми углами атаки.

Большое внимание в книге уделяется исследованию случаев, когда в процессе снижения происходит изменение характера движения: вращательное движение переходит в колебательное, «скачкообразно» изменяются характеристики колебательного движения и т. д.

Получены и исследованы соотношения, описывающие характер движения летательного аппарата относительно центра масс при снижении. Рассмотрен вопрос об определении рассеивания неуправляемых летательных аппаратов при снижении под воздействием движения летательного аппарата относительно центра масс.

Табл. Илл. 154 Библ. 61 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Введение	11
Глава I. Вывод уравнений возмущенного движения . . .	20
§ 1. Выделение малых параметров	20
§ 2. Вывод уравнений возмущенного движения летательного аппарата в атмосфере	25
§ 3. Условия применимости уравнений, не учитывающих взаимодействия между возмущенным движением и движением центра масс летательного аппарата и кривизну осредненной траектории	34
§ 4. Приближенные формулы для определения компонент перегрузки, действующей на летательный аппарат	40
Глава II. Метод вычисления асимптотических решений уравнений возмущенного движения	46
§ 5. Преобразование уравнений движения к виду, близкому к уравнениям движения твердого тела в случае Лагранжа	46
§ 6. Эталонное уравнение. Выражение асимптотических решений через решения эталонного уравнения	48
§ 7. Выяснение физического смысла условий периодичности и преобразование их	59
§ 8. Сравнение асимптотических решений с точными и условие их применимости	69
§ 9. Метод ускорения численного интегрирования точных уравнений движения	73
Глава III. Плоское возмущенное движение при входе в атмосферу	87
[§ 10. Асимптотические решения в случае плоского движения при синусоидальной зависимости продольного момента от угла атаки	87
§ 11. Исследование плоского движения с помощью асимптотических решений, используемых на всей траектории снижения	102

§ 12. Метод получения уточненных асимптотических формул при плоском движении	105
§ 13. Исследование плоского движения в плотных слоях атмосферы с помощью уточненных асимптотических формул	114
§ 14. Исследование перегрузок на периферии летательного аппарата.	124
§ 15. Пример расчета характеристик возмущенного движения при снижении летательного аппарата, близкого по форме к конусу	123
Г л а в а IV. Плоское возмущенное движение при переходе через околосвуковой диапазон скоростей . . .	137
§ 16. Исследование случая, когда при $M \approx 1$ летательный аппарат становится статически неустойчивым на больших углах атаки	138
§ 17. Исследование случая, когда при $M \approx 1$ летательный аппарат становится статически неустойчивым на малых углах атаки	146
§ 18. Оценка погрешности, возникающей из-за неточности аппроксимации зависимости продольного момента от угла атаки	158
§ 19. Приближенное вычисление асимптотических решений	165
Г л а в а V. Вход в атмосферу летательного аппарата, стабилизированного вне атмосферы с помощью вращения относительно продольной оси	172
§ 20. Определение асимптотических решений в случае, когда движение представляет собой регулярную прецессию с медленно изменяющимися параметрами	172
§ 21. Исследование движения при входе в атмосферу летательного аппарата, стабилизированного вращением, с помощью асимптотических решений, применяемых на всей траектории снижения	180
§ 22. Метод получения уточненных асимптотических формул в случае входа в атмосферу летательного аппарата, стабилизированного вращением	186
§ 23. Исследование движения в плотных слоях атмосферы с помощью уточненных асимптотических формул в случае входа в атмосферу летательного аппарата, стабилизированного вращением	196
Г л а в а VI. Общий случай пространственного возмущенного движения при входе в атмосферу	204
§ 24. Определение асимптотических решений в случае синусоидальной зависимости продольного момента от угла атаки	204

§ 25. Вывод формул для параметров движения вне атмосферы и в плотных слоях атмосферы с помощью асимптотических решений, не используемых на всей траектории снижения	216
§ 26. Исследование пространственного движения с помощью формул, полученных в результате использования асимптотических решений на всей траектории снижения	225
§ 27. Метод получения уточненных асимптотических формул для параметров движения в плотных слоях атмосферы в общем случае движения	241
§ 28. Исследование движения в плотных слоях атмосферы с помощью уточненных асимптотических формул в общем случае пространственного движения	249
§ 29. Выбор величины скорости вращения летательного аппарата. Замечания о применимости плоской схемы движения	267
Глава VII. Исследование движения в случае, когда пассивный участок траектории начинается в атмосфере	279
§ 30. Движение при полете в атмосфере	279
§ 31. Движение при выходе из атмосферы	289
Глава VIII. Аналитические решения для случая движения летательного аппарата с малыми углами атаки	297
§ 32. Плоское движение. Определение момента перехода вращательного движения в колебательное . .	297
§ 33. Пространственное движение	307
Глава IX. Исследование рассеивания точек приземления летательных аппаратов при входе в атмосферу	322
§ 34. Определение компоненты рассеивания, связанной с колебаниями относительно центра масс	322
Приложение. Об особенностях численного интегрирования уравнения для угла атаки при пространственном движении	336
Основные обозначения	341
Литература	344

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последних лет стала весьма актуальной проблема спуска на Землю и на другие планеты летательных аппаратов, находящихся вне атмосферы. Важным аспектом этой проблемы является исследование неуправляемого движения летательных аппаратов относительно центра масс. Изучение этого движения необходимо для определения компонент перегрузки, правильной расшифровки показаний приборов, установленных на борту летательного аппарата, определения расположения теплозащитного покрытия, а также для определения рассен-
вания точек посадки.

Детальное исследование динамики неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу в нелинейной постановке было проведено автором в 1959—1962 гг. независимо от работ, выполненных на эту тему за рубежом, которые стали появляться в печати, начиная с 1961 г. Большой вклад в решение этой проблемы был сделан В. А. Ярошевским, Г. Алленом, Г. Леоном и Р. Норлингом, некоторые из результатов исследований которых используются ниже.

Для решения этой задачи весьма эффективным оказалось использование асимптотических методов исследования уравнений, близких к точно интегрирующимся нелинейным уравнениям. Такие методы были разработаны в СССР Ю. А. Митропольским, В. М. Волосовым и автором на базе известных работ Н. П. Боголюбова, А. А. Дородни-

цына и А. И. Тихонова. Асимптотические решения, непосредственно пригодные для исследования движения летательных аппаратов относительно центра масс с большими углами атаки на нестационарных режимах полета, были вычислены в работах автора, опубликованных в 1956—1960 гг.

В настоящей книге читателю предлагается первое систематизированное изложение вопросов динамики неуправляемого движения летательных аппаратов главным образом при входе в атмосферу, а также при движении в атмосфере и выходе из нее. При рассмотрении плоского движения на форму аппарата не накладывается никаких ограничений, при исследовании же пространственного движения предполагается, что летательный аппарат обладает аэродинамической и динамической осевой симметрией. Вопросы, связанные с влиянием несимметрии аппарата, в книге не рассматриваются. Известным оправданием этому может служить недавний выход в свет книги Г. С. Бюшгенса и Р. В. Студнева [10], в которой эти вопросы рассматриваются для случая установившихся режимов полета.

Для решения указанной задачи в книге используется асимптотический подход. В уравнениях движения выделяются малые параметры и для решения таких уравнений излагается асимптотический метод в той форме, которая была разработана автором и которая удобна для решения задач динамики полета. Этот метод применим в тех случаях, когда характерное время движения летательного аппарата относительно центра масс много меньше характерного времени движения центра масс. Для тех случаев, когда это условие не выполняется, предлагается уточненный асимптотический метод, основанный на сопряжении численных и асимптотических решений уравнений движения, имеющий значительно более широкую область применимости. Оба эти метода последовательно применя-

ются для исследования различных случаев движения. При этом основное внимание уделяется получению и исследованию соотношений, связывающих параметры движения летательного аппарата вне атмосферы с параметрами движения аппарата в плотных слоях атмосферы, а также исследованию случаев, когда при движении аппарата по траектории происходит изменение характера движения его относительно центра масс: вращательное движение переходит в колебательное либо скачкообразно изменяются характеристики колебательного движения и т. д.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области динамики полета. Для ознакомления с материалом книги достаточно знания теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теоретической механики и динамики полета в объеме обычных курсов вузов.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность А. А. Дородницыну и Г. С. Бюшгенсу за постановку ряда из рассматривающихся ниже вопросов, обсуждение результатов и неизменное внимание к работе.

Автор весьма благодарен рецензенту книги В. В. Белецкому, сделавшему ряд полезных замечаний при просмотре рукописи.

Большую помощь в проведении и оформлении расчетов оказали автору Т. А. Барсукова, Е. И. Арбекова, Н. С. Кочубеева и К. Г. Бабич. Автор пользуется случаем, чтобы выразить им свою глубокую признательность.

Поскольку настоящая монография является первой попыткой систематизированного изложения довольно сложного вопроса динамики полета современных летательных аппаратов, автор будет благодарен читателям за все замечания и пожелания,

Г. Кузмак

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет в результате развития ракетной техники, итогом которого явились межконтинентальные баллистические ракеты, запуски искусственных спутников Земли и полеты космических кораблей, стала весьма актуальной проблема спуска на Землю летательных аппаратов, находящихся вне атмосферы.

Одним из наиболее интересных и трудных вопросов этой проблемы является исследование неуправляемого движения летательных аппаратов относительно центра масс.

Несмотря на важность исследования движения относительно центра масс, этот вопрос по сравнению с траекторными вопросами и вопросами, связанными с аэродинамическим нагреванием летательных аппаратов, наименее проработан.

Расчетам траекторий и аэродинамического нагревания летательных аппаратов в настоящее время посвящено несколько десятков работ, которые обобщены в работах [1, 52, 32]. Что же касается движения относительно центра масс при входе в атмосферу, то имеющиеся в настоящее время материалы представлены статьями [40—61], в которых различными методами рассмотрены различные аспекты этой проблемы. Обобщающие работы по динамике движения относительно центра масс до настоящего времени отсутствовали. Из обобщающих работ на близкую тему следует отметить работу В. В. Белецкого [4], в которой рассматривается движение спутника относительно центра масс при полете по орбите. Для того чтобы пояснить основные особенности движения относительно центра масс при входе в атмосферу, проследим в общих чертах движение летательного аппарата на внеатмосферном участке траектории, а затем при снижении в плотные слои атмосферы.

При отделении от носителя летательный аппарат, предназначенный для спуска на Землю, получает некоторый импульс и приобретает начальный кинетический момент. При движении на внеатмосферном участке траектории при условии, что его длина не превосходит нескольких десятков тысяч километров, можно пренебречь внешними моментами, вследствие чего возмущенное движение летательного аппарата определяется законами движения твердого тела в случае Эйлера, а характер этого движения — величиной и направлением начального кинетического момента. Если начальный кинетический момент направлен так, что движение оказывается плоским, то при движении вне атмосферы летательный аппарат вращается с постоянной скоростью около поперечной оси («кувыркается»). В случае, когда летательный аппарат обладает осевой симметрией и при отделении ему сообщается вращение около продольной оси, он при движении вне атмосферы будет сохранять свою ориентацию в пространстве. Несмотря на различный характер движения в этих предельных случаях, при подходе к атмосфере углы атаки летательного аппарата могут иметь какое угодно значение.

В первом случае это очевидно, а во втором это может быть так вследствие кривизны внеатмосферного участка траектории. Точно так же может обстоять дело и в общем случае движения летательного аппарата вне атмосферы. Таким образом, сколько-нибудь полное решение задачи о входе в атмосферу может быть получено лишь при непременном условии отсутствия каких-либо ограничений на величину угла атаки. Можно сказать, что наличие больших углов атаки является одной из основных особенностей задачи о входе в атмосферу.

После прохождения внеатмосферного участка траектории летательный аппарат начинает снижаться и по мере возрастания плотности все в большей и большей степени начинает испытывать стабилизирующее действие атмосферы. В основе стабилизирующего действия атмосферы лежит известное свойство динамических систем с переменными параметрами, заключающееся в том, что если во время возмущенного движения жесткость системы увеличивается, то колебания затухают. В задаче о входе в атмосферу роль жесткости системы играет величина

M_z^α/I_z , где M_z^α — производная от размерного аэродинамического момента по углу атаки α , а I_z — момент инерции летательного аппарата относительно поперечной оси. При снижении из-за увеличения плотности значение M_z^α увеличивается на несколько порядков, и указанный эффект переменности параметров в системе является основным фактором, определяющим затухание колебаний. Для теории динамических систем с переменными параметрами, по-видимому, трудно представить себе более яркий пример влияния переменности характеристик, чем задача о возмущенном движении летательного аппарата при входе в атмосферу. Таким образом, влияние переменности параметров в системе является такой же важной особенностью рассматриваемой задачи, как и наличие больших углов атаки.

Эти особенности задачи об исследовании возмущенного движения при входе в атмосферу позволяют заключить, что снижающийся летательный аппарат представляет собой существенно нелинейную механическую систему с переменными параметрами. В таких системах происходят некоторые новые явления, которые объясняются взаимодействием нелинейных эффектов с влиянием переменности параметров.

Как известно, в нелинейных системах с постоянными параметрами характер их возмущенного движения весьма существенно зависит от значений характеристик возмущенного движения: амплитуды колебания, среднего значения, относительно которого происходят колебания, и т. д. Собственно же изменение этих характеристик существенно зависит от изменения параметров в системе. Вследствие этого существуют новые явления, которые возникают в нелинейных системах с переменными параметрами, состоит в появлении переходов возмущенного движения одного типа в возмущенное движение другого типа: так, например, вращательное движение в процессе возмущенного движения может перейти в колебательное, колебательное движение может скачкообразно перейти в колебательное же движение, но с другими амплитудой колебания, средним значением и т. д.

Несмотря на важность одновременного учета нелинейности и переменности аэродинамических моментов для

исследования возмущенного движения при входе в атмосферу, в первых работах Г. Аллена [40, 41] и Г. Леона [51] на эту тему, а также в работах В. С. Пугачева [33, 34], выполненных применительно к задаче об устойчивости артиллерийских снарядов и авиабомб, результаты которых также могут использоваться для исследования движения при входе в атмосферу, задача решалась в линейной постановке. Работы, в которых задача о входе в атмосферу рассматривалась в нелинейной постановке с учетом изменения параметров в процессе возмущенного движения [38, 42—45, 47, 48, 53, 55, 58—61], стали появляться начиная с 1961 г. в основном в зарубежной печати. В СССР эта задача была детально исследована в 1959—1962 гг.; отдельные результаты этого исследования опубликованы в работах [21—24, 38, 39 и 48].

Проведение параметрических исследований движения летательных аппаратов относительно центра масс при входе в атмосферу с помощью использования вычислительной техники требует чрезмерно большого количества машинного времени. С одной стороны, это связано с тем, что для случая движения летательного аппарата в плотных слоях атмосферы решения уравнений движения всегда содержат высокочастотные компоненты, а с другой стороны, из-за того, что задача о входе в атмосферу является многопараметрической, вследствие чего для более или менее полного анализа движения требуется просматривать сотни вариантов решений.

В тех случаях, когда движение летательного аппарата относительно центра масс оказывается высокочастотным, весьма существенного сокращения времени вычислений можно достигнуть, как известно, с помощью использования асимптотических методов, основанных на предположении о том, что характерное время движения летательного аппарата относительно центра масс много меньше характерного времени движения центра масс. Это объясняется тем, что асимптотические решения очень точно описывают высокочастотные колебательные процессы, расчет которых с помощью численных методов наиболее труден. Но так как на одной части траектории процесс может быть высокочастотным, а на другой — нет, то, по-видимому, наиболее эффективными методами решения таких задач

динамики полета (во всяком случае до тех пор, пока не появятся вычислительные машины со скоростью счета, существенно превышающей скорость счета современных машин) будут методы, основанные на совместном использовании как асимптотических, так и численных решений уравнений движения.

При не малых значениях скорости вращения летательного аппарата вне атмосферы Ω_0 предположение о малости характерного времени движения летательного аппарата относительно центра масс по сравнению с характерным временем движения центра масс выполняется на всей траектории снижения. В этом случае полное исследование возмущенного движения при входе в атмосферу может быть проведено с помощью использования лишь одних асимптотических решений уравнений движения, причем получающиеся таким образом результаты не только дают количественное решение задачи для не малых значений Ω_0 , но также позволяют установить основные качественные закономерности и при малых значениях Ω_0 , когда указанное предположение нарушается в верхней части атмосферного участка траектории снижения.

Исследованию асимптотического поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено значительное количество работ [5—9, 11—13, 16, 18—25, 27—31, 36 и др.]. Особое значение имеют работы И. М. Крылова и И. Н. Боголюбова [6] и [18], Дж. Биркгофа [5], А. А. Дородницына [16], Л. С. Понтрягина [30, 31] и А. И. Тихонова [36]. В этих работах сформулирован общий подход к задаче о вычислении асимптотических решений и доказаны основополагающие теоремы о соответствии между точными и асимптотическими решениями уравнений движения. Однако собственно вычисление асимптотических решений существенно нелинейных систем, к которым, как правило, приводятся задачи динамики полета, все же представляет собой довольно сложный вопрос, так как решения нелинейных уравнений первого приближения изучены и представляются в простой форме в очень небольшом количестве случаев.

Асимптотические решения уравнений движения, пригодные для исследования возмущенного движения летательных аппаратов с большой нелинейностью аэродина-

мических характеристик на неустановившихся режимах полета, были вычислены в ряде работ автора [19—25] и применялись для исследования возмущенного движения неуправляемых летательных аппаратов при входе в атмосферу [48]. Идея предложенного в работах [19—25] метода вычисления асимптотических решений была сформулирована в работе [16]. Она состоит в преобразовании исходных уравнений движения к такому виду, чтобы для преобразованной системы уравнений можно было бы подобрать такую более простую систему уравнений (систему *эталонных* уравнений), которая обладала бы основными особенностями исходных уравнений и решение которой выражалось бы через исследованные функции, а затем выразить асимптотические решения исходной системы уравнений через решения эталонной системы уравнений. Другими словами, сущность идеи метода эталонных уравнений [16] состоит в привлечении для вычисления асимптотических решений разработанного аппарата специальных функций, что весьма важно для приложений. В работе [16] этот метод был разработан применительно к вычислению асимптотических решений некоторых особых видов линейных уравнений. Для нелинейных систем с одной степенью свободы этот метод был разработан в работах автора [19—22], а затем в процессе решения задачи о пространственном возмущенном движении баллистических летательных аппаратов относительно центра масс при входе в атмосферу был распространен на определенный класс систем со многими степенями свободы [23, 24]. Аналогичные результаты были независимо получены В. М. Волосовым [11—13].

Для исследования возмущенного движения летательных аппаратов при входе в атмосферу в настоящей работе принят индуктивный метод. Сначала рассматриваются наиболее простые предельные случаи движения: плоское движение, при котором вне атмосферы летательный аппарат «кувыркается», и случай входа в атмосферу летательного аппарата, стабилизированного вне атмосферы с помощью вращения относительно продольной оси. После того как выяснены особенности движения в этих относительно простых случаях, рассматривается наиболее сложный общий случай пространственного движения.

Исследование движения в каждом из этих случаев производится в два этапа. Сначала движение исследуется с помощью асимптотических решений, применяемых на всей траектории снижения. Это, как уже указывалось, позволяет получить довольно простые расчетные формулы для не малых значений Ω_0 и проанализировать качественное влияние различных параметров при малых Ω_0 . После того как это сделано, проведенное исследование дополняется и уточняется для малых значений Ω_0 с помощью метода, который можно назвать *уточненным асимптотическим методом*. Этот метод основан на сопряжении решения для движения вне атмосферы с асимптотическими решениями в тот момент, когда последние становятся достаточно точными. Сопряжение производится с помощью использования численных решений, которые при малых Ω_0 находятся без всяких затруднений. Для исследования движения с помощью уточненного асимптотического метода требуется приблизительно в 50÷100 раз меньше машинного времени по сравнению с временем, потребным для исследования движения с помощью численного интегрирования уравнений движения на всей траектории снижения.

Всякий раз результаты, полученные с помощью уточненного асимптотического метода, сопоставляются с результатами, полученными с помощью использования асимптотических решений на всей траектории снижения, и таким образом определяется область применимости этих результатов.

В соответствии с принятым индуктивным методом исследования работа написана в следующем плане.

В главе I полная система уравнений движения преобразуется к безразмерной форме, выделяются в ней малые параметры, формулируются основные допущения, определяются условия, при которых они выполняются, и затем выписывается система уравнений возмущенного движения.

В главе II система уравнений возмущенного движения преобразуется к виду, близкому к системе уравнений движения твердого тела в случае Лагранжа, которая выбирается в качестве эталонной системы уравнений, и излагается разработанный автором метод вычисления асимптотических решений. На основании соотношений,

полученных для определения асимптотических решений, рассматривается задача об ускорении численного интегрирования точных уравнений движения.

В главах III и IV исследуются особенности движения при входе в атмосферу в наиболее простом случае, когда движение является плоским. Основное внимание в этих главах уделяется собственно исследованию особенностей движения, объясняющихся взаимодействием нелинейных эффектов с влиянием переменности параметров.

В главе III исследуется движение на верхней сверхзвуковой части атмосферного участка траектории, а в главе IV исследуются особенности движения, которые могут возникнуть при переходе через околосвуковой диапазон скоростей.

В главе V рассматривается случай движения, когда в атмосферу входит летательный аппарат, стабилизированный вне атмосферы с помощью вращения относительно продольной оси.

В главах III и V получены соотношения, связывающие компоненты кинетического момента, который летательный аппарат приобретает при отделении от носителя, с параметрами движения в плотных слоях атмосферы, и определяется момент, начиная с которого атмосферу можно считать достаточно плотной для того, чтобы можно было пользоваться этими формулами. В результате анализа этих формул выясняется влияние формы моментной характеристики, запаса устойчивости, демпфирования, а также в общих чертах определяется влияние параметров движения летательного аппарата вне атмосферы на его движение в плотных слоях атмосферы.

В главе VI исследуется наиболее сложный общий случай пространственного движения. Здесь исследование в основном проводится для случая синусоидальной зависимости продольного момента от угла атаки. Так же как и для предельных случаев движения, выводятся формулы, связывающие параметры движения летательного аппарата вне атмосферы с параметрами движения в плотных слоях атмосферы. Основное внимание при анализе этих формул уделяется важному вопросу о выборе величины скорости вращения летательного аппарата относительно продольной оси, которая должна быть сообщена летательному ап-

парату при отделении от носителя, с точки зрения получения минимально возможных значений угла атаки в плотных слоях атмосферы.

В главах III, V и VI рассматривается интересный вопрос об определении «границы» атмосферы с точки зрения движения относительно центра масс. Как оказывается, атмосфера начинает влиять на это движение с значительно больших высот, чем на движение центра масс летательного аппарата.

В главе VII рассматривается случай, когда отделение летательного аппарата происходит в атмосфере. Этот случай представляет интерес для летательных аппаратов малой дальности. Сначала исследуется пространственное движение при условии, что траектория полета целиком расположена в атмосфере, а затем исследуются особенности движения при выходе из атмосферы.

В главе VIII собраны аналитические решения, полученные в работах [40, 41, 48, 51, 54], позволяющие исследовать движение аппарата относительно центра масс при входе в атмосферу в случае малых углов атаки. Эти решения выражаются через функции Бесселя и достаточно наглядны.

Наконец, в последней главе IX рассматривается вопрос о рассеивании точек приземления при входе летательного аппарата в атмосферу, связанном с движением летательного аппарата относительно центра масс.

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. ВЫДЕЛЕНИЕ МАЛЫХ ПАРАМЕТРОВ

Как уже упоминалось во введении, в основе исследования лежит асимптотический метод. Поэтому прежде всего введем в полную систему уравнений движения летательного аппарата в атмосфере малый параметр. Наиболее просто это можно сделать, если взять полную систему уравнений движения в векторной форме:

$$\frac{dQ}{dt} = M, \quad \frac{dK}{dt} = F, \quad \frac{dr}{dt} = V. \quad (1.1)$$

Здесь Q , K — соответственно кинетический момент, вычисленный относительно центра масс, и количество движения летательного аппарата; M , F — соответственно главный момент сил, вычисленный относительно центра масс, и главный вектор сил, действующих на летательный аппарат; r , V — радиус-вектор и вектор скорости центра масс летательного аппарата.

Приведем уравнения (1.1) к безразмерному виду. Обозначим через Ω характерную скорость вращения летательного аппарата относительно центра масс, через V характерную скорость его центра масс, а через Δr характерное изменение радиуса-вектора центра масс летательного аппарата. Тогда характерные промежутки времени t_α и t_V соответственно для движения летательного аппарата относительно центра масс и для движения его центра масс можно определить с помощью очевидных формул

$$t_\alpha = \frac{1}{\Omega}, \quad t_V = \frac{\Delta r}{V}. \quad (1.2)$$

Будем считать, что за промежуток времени t_V скорость центра масс летательного аппарата изменяется на величину ΔV , и введем безразмерные переменные с помощью

следующих соотношений:

$$\left. \begin{aligned} Q &= mL^2 i_z \Omega Q_1, & K &= m \Delta V K_1, & r &= \Delta r r_1, \\ M &= |m_z^{c_n}| L F M_1, & F &= F F_1, & V &= V V_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Здесь Q_1 , K_1 , r_1 , M_1 , F_1 и V_1 — безразмерные переменные, i_z — безразмерный момент инерции, m — масса летательного аппарата, $m_z^{c_n}$ — запас устойчивости летательного аппарата, L — характерный линейный размер летательного аппарата, F — характерный «размер» главного вектора системы сил, действующих на летательный аппарат.

При таком определении безразмерных переменных изменение Q_1 за промежуток времени t_α и изменение величин K_1 и r_1 за промежуток времени t_V будут являться величинами порядка единицы.

Определим величину F . В задаче о входе в атмосферу, когда суммарное действие аэродинамических сил, которые определяют момент, действующий на летательный аппарат, существенно превосходит действие остальных сил, характерный «размер» F можно определить с помощью второго уравнения системы (1.1), считая, что количество движения летательного аппарата изменяется на величину $m \Delta V$ за промежуток времени t_V . На основании этого и выражения (1.2) для t_V получается следующее выражение для F :

$$F = \frac{m V \Delta V}{\Delta r}. \quad (1.4)$$

Введем безразмерное время t_1 . Так как задачей настоящей работы является исследование движения относительно центра масс, то в качестве масштаба времени следует выбрать промежуток времени t_α . Определяя время t_1 с помощью формулы $t_1 = \frac{t}{t_\alpha}$ и учитывая равенства (1.3), систему (1.1) можно переписать в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_1}{dt_1} &= \left(\frac{V}{\Omega \Delta r} \right)^2 \frac{m_z^{c_n}}{i_z} \frac{\Delta V}{V} \frac{\Delta r}{L} M_1, \\ \frac{dK_1}{dt_1} &= \left(\frac{V}{\Omega \Delta r} \right) F_1, \\ \frac{dr_1}{dt_1} &= \left(\frac{V}{\Omega \Delta r} \right) V_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что важное значение имеет параметр $\frac{V}{\Omega \Delta r}$, который в силу (1.2) представляет собой не что иное, как отношение интервала времени t_a , характерного для

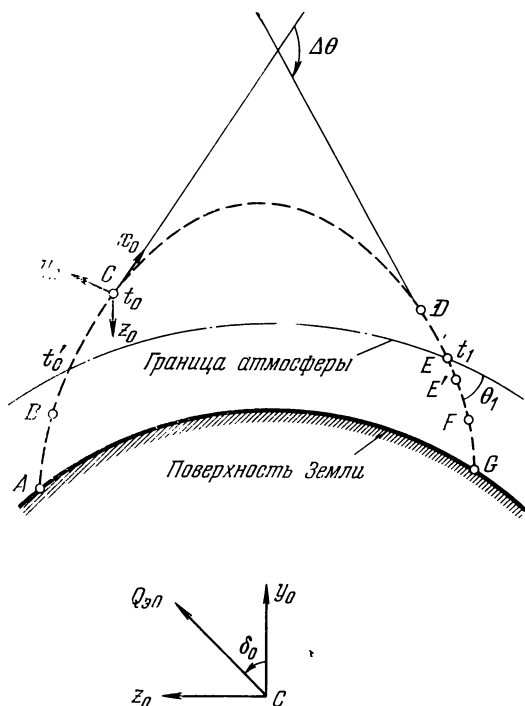


Рис. 1.

движения летательного аппарата вокруг центра масс, к интервалу времени t_v , характерному для движения центра масс летательного аппарата. Известно (см., например, [16]), что в тех случаях, когда это отношение является малым, эффективно использование асимптотических решений.

Чтобы оценить отношение t_a/t_v , разобьем атмосферный участок траектории снижения на два участка: на участок EE' , расположенный в начале атмосферного участка траектории, на котором Ω все еще является величиной поряд-

ка Ω_0 , где Ω_0 — скорость вращения летательного аппарата вне атмосферы, и на участок $E'G$, на котором порядок Ω определяется аэродинамическим моментом (рис. 1).

Вычислим отношение t_α/t_V сначала для участка траектории $E'G$. Так как при изменении t_1 на единицу ΔQ_1 и M_1 являются величинами порядка единицы, то из первого уравнения системы (1.5) сразу следует равенство

$$\frac{t_\alpha}{t_V} \approx \sqrt{\frac{i_z}{|m_{zn}^{cn}|} \frac{V}{\Delta V} \frac{L}{\Delta r}}. \quad (1.6)$$

Оценим численное значение этого отношения. При проведении такой оценки для некоторой средней точки участка траектории $E'G$ можно положить $\frac{i_z}{|m_{zn}^{cn}|} \approx 1$, $\frac{V}{\Delta V} \approx 9$,

$L \approx 1$ м, а $\Delta r \approx 10^4$ м. Тогда t_α/t_V оказывается порядка 0,03. Ясно, что в нижней части участка траектории $E'G$ это отношение будет меньше 0,03, а в верхней части больше 0,03, так как множитель $V/\Delta V$ при увеличении высоты возрастает. Но тем не менее ясно, что на участке траектории $E'G$, где действие аэродинамических сил существенно, отношение t_α/t_V много меньше единицы, вследствие чего уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\frac{dQ}{dt} = M, \quad \frac{dK}{dt} = \varepsilon F, \quad \frac{dr}{dt} = \varepsilon V, \quad (1.7)$$

где ε — малый параметр, равный t_α/t_V (индекс «1», обозначающий безразмерные величины, здесь и всюду далее опускается).

Оценим теперь отношение t_α/t_V в верхней части EE' атмосферного участка траектории. Так как здесь Ω является величиной порядка Ω_0 , то ясно, что на этом участке траектории $\frac{t_\alpha}{t_V} = \frac{V}{\Omega_0 \Delta r}$. Таким образом, для того чтобы систему (1.1) можно было записать в виде (1.7) и на участке траектории EE' , необходимо, чтобы Ω_0 — скорость вращения летательного аппарата вне атмосферы была такова, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{V}{\Omega_0 \Delta r} \ll 1. \quad (1.8)$$

В тех случаях, когда это неравенство выполняется, исследование возмущенного движения может быть проведено с помощью использования лишь одних асимптотических решений уравнений движения. Будем пока предполагать (в главах I и II), что неравенство (1.8) выполняется.

Как было сказано во введении, при исследовании каждого случая движения результаты, полученные для не малых значений Ω_0 , будут дополнены и уточнены для малых значений Ω_0 с помощью уточненного асимптотического метода, в основе которого лежит использование численных решений на участке траектории EE' .

При условии (1.8) из (1.7) следует, что любой из параметров V — величина вектора скорости, θ — угол наклона вектора скорости к местному горизонту и т. д., определяющих движение центра масс летательного аппарата, может быть представлен в виде

$$\left. \begin{aligned} V &= V_0(\tau) + \varepsilon V_1(\tau, t), \\ \theta &= \theta_0(\tau) + \varepsilon \theta_1(\tau, t), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время; $V_0(\tau)$, $\theta_0(\tau)$ — параметры траектории центра масс, либо определяемые без учета движения летательного аппарата относительно центра масс, либо учитывающие это влияние осредненно; V_1 , θ_1 — члены, определяемые движением летательного аппарата относительно центра масс.

Величины, зависящие от τ , на интервалах времени, характерных для движения летательного аппарата относительно центра масс, изменяются на величины порядка ε . На интервалах же времени, характерных для движения центра масс, функции $V_0(\tau)$, $\theta_0(\tau)$, ... могут измениться в несколько раз.

Если не учитывать члены порядка ε в этих формулах, то можно, очевидно, считать, что параметры траектории центра масс являются функциями от медленного времени τ . Этот результат будет существенно использоваться далее.

Оценим теперь величину числа Струхалия

$$St = \frac{\Omega L}{V}, \quad (1.10)$$

которое, как известно, характеризует величину демпфирующих моментов. Эту оценку, так же как и выше, проведем сначала для нижней части атмосферного участка траектории $E'G$, а затем для участка траектории EE' . Пользуясь формулами (1.2), (1.6) и (1.10), для величины числа St на участке траектории $E'G$ получим следующее выражение:

$$St = \sqrt{\frac{|m_z^{cn}|}{i_z} \frac{\Delta V}{V} \frac{L}{\Delta r}}. \quad (1.11)$$

Сопоставляя это выражение с выражением (1.6), видим, что на участке траектории $E'G$ величина числа St приблизительно на порядок меньше среднего значения отношения t_a/t_V , причем по мере возрастания высоты величина числа St уменьшается, в то время как отношение t_a/t_V увеличивается. На участке траектории EE' величину числа St следует оценивать с помощью формулы (1.10), положив в ней Ω равным Ω_0 . Если принять $\Omega_0 = 0,5 \text{ рад/сек}$, что является отнюдь не малым значением для этой величины, и положить $L = 1 \text{ м}$, а $V \approx 5000 \text{ м/сек}$, то значение числа St составит 0,0001, то есть оно очень мало.

Из этих оценок следует важный вывод, заключающийся в том, что демпфирующие моменты, которые определяются величиной числа St , можно считать малыми на всей траектории снижения. Причем, более того, из (1.11) следует, что демпфирование может сколько-нибудь существенно влиять на движение лишь в плотных слоях атмосферы, где отношение $\Delta V/V$ [см. (1.11)] становится заметной величиной. Эти выводы также будут существенно использоваться далее.

§ 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ

Имея в виду результаты оценок, проведенных в § 1, перейдем к выводу уравнений движения летательного аппарата относительно центра масс при полете в атмосфере. Так как при расчете номинальных траекторий баллистических летательных аппаратов предполагается, что угол атаки равен нулю, то эти уравнения будем далее называть

уравнениями возмущенного движения. Для того чтобы получить возможно более обозримые соотношения, при выводе этих уравнений не будут учитываться факторы, играющие второстепенную роль.

Прежде всего будем пренебрегать взаимодействием между движением летательного аппарата относительно центра масс и движением его центра масс.

Как будет видно ниже, существенно, чтобы эта гипотеза выполнялась в верхней части атмосферного участка траектории до тех пор, пока из-за стабилизирующего действия атмосферы углы атаки не станут меньше одного радиана. На остальной части траектории, где $\alpha < 1 \text{ рад}$, это взаимодействие нетрудно учесть. Этот вопрос будет специально рассмотрен в § 34. В то же время в верхней части атмосферного участка траектории снижения эта гипотеза, как правило, выполняется, так как обычно кинетическая энергия летательного аппарата, соответствующая движению его центра масс, во много раз больше кинетической энергии аппарата в движении его относительно центра масс. Вследствие этого аэродинамические моменты начинают влиять на движение относительно центра масс, стабилизируя летательный аппарат, на значительно больших высотах, чем аэродинамические силы на траекторию. В соответствии с этим предположением всюду, кроме главы IX, будем считать параметры траектории центра масс известными функциями времени. Для простоты также всюду, кроме главы IX, будем предполагать, что траектория полета является плоской.

При написании уравнений движения будем, кроме того, пренебрегать осредненным вращением вектора скорости центра масс летательного аппарата (кривизной осредненной траектории), вызванным действием силы тяжести, по сравнению со скоростью вращения летательного аппарата вокруг центра масс. Эта гипотеза заведомо выполняется на участках входа и выхода из атмосферы (участки BC и DF на рис. 1), так как здесь при скоростях полета порядка нескольких километров в секунду траектория полета близка к прямой. На атмосферных участках AB и FG , когда угол наклона траектории существенно изменяется, эта гипотеза также обычно выполняется вследствие того, что в этом случае поперечные компоненты ω_y и ω_z

скорости вращения летательного аппарата вокруг центра масс, с которыми надо сравнивать скорость изменения угла наклона траектории, весьма значительны. Не выполняется эта гипотеза, вообще говоря, лишь на внеатмосферном участке траектории CD (рис. 1). Это легко можно понять, если рассмотреть движение летательного аппарата, который при отделении от ракеты-носителя в точке C закручен относительно продольной оси и благодаря этому сохраняет свою ориентацию в пространстве. Ясно, что в этом случае угол атаки летательного аппарата определяется исключительно изменением угла наклона траектории и неучет вращения вектора скорости центра масс недопустим. Но на внеатмосферном участке траектории летательный аппарат движется по инерции и учет изменения угла наклона траектории осуществляется без затруднений (см. § 20 и 24).

Что касается изменения ориентации вектора скорости, вызванного действием аэродинамической подъемной силы, то оно будет учитываться. Такое изменение ориентации, очевидно, происходит с той же частотой, что и изменение угла атаки летательного аппарата, и, как хорошо известно, приводит к некоторому изменению скорости затухания колебаний летательного аппарата относительно центра масс. Условия, при которых сделанные предположения выполняются, выводятся в следующем параграфе.

Уравнения пространственного возмущенного движения будут ниже получены при условии, что летательный аппарат обладает как динамической, так и аэродинамической симметрией. Движение такого летательного аппарата удобно определять следующим образом (рис. 2, а). Обозначим через O центр масс летательного аппарата и направим ось Ox_c по направлению вектора скорости центра масс. Введем систему осей $Oxyz$, подвижную как в пространстве, так и относительно летательного аппарата. Ось Ox направим по оси симметрии летательного аппарата, ось Oy проведем в плоскости, проходящей через оси Ox и Ox_c , перпендикулярно к оси Ox , а ось Oz направим перпендикулярно к осям Ox и Oy так, чтобы система координат была правой. Обозначим через α угол между осями Ox в Ox_c . Очевидно, что α есть не что иное, как пространственный угол атаки (или угол нутации). Соответственно

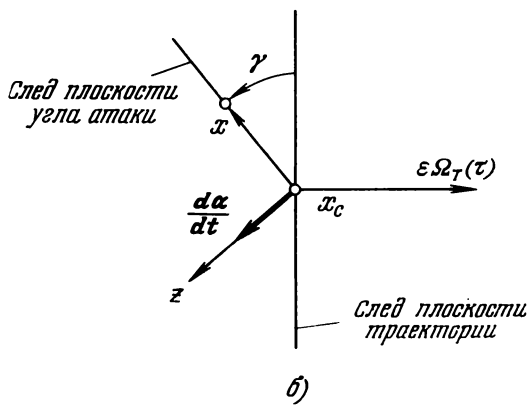
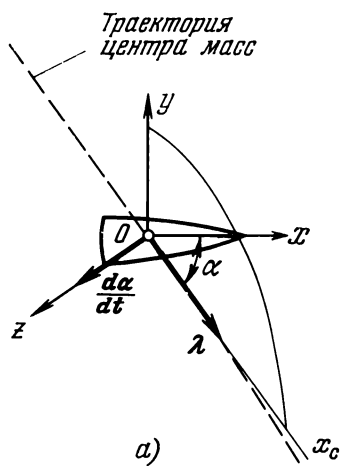


Рис. 2.

плоскость, содержащую оси Ox_c , Ox и Oy , будем называть *плоскостью угла атаки*. Движение оси летательного аппарата в этой плоскости характеризуется скоростью $\frac{d\alpha}{dt}$, которая направлена по оси Oz . Вращение плоскости угла атаки относительно вектора скорости (оси Ox_c) будем определять с помощью скорости прецессии λ ; эта скорость направлена по оси Ox_c . Наконец, вращение летательного аппарата относительно плоскости угла атаки будем определять с помощью скорости собственного вращения μ , направленной по оси Ox . Очевидно, что угловая скорость летательного аппарата отличается от угловой скорости системы координат на компоненту скорости μ . Кроме величин α , λ и μ , нам потребуется еще угол γ между плоскостью траектории и плоскостью угла атаки. Очевидно, что

$$\frac{d\gamma}{dt} = \lambda. \quad (2.1)$$

Направление отсчета этого угла показано на рис. 2, б, где изображен вид системы координат $Oxyz$ и траектории полета со стороны носовой части летательного аппарата. Углы α и γ изменяются в интервалах:

$$0 \leq \alpha \leq 180^\circ, \quad 0 \leq \gamma < \infty. \quad (2.2)$$

Очевидно, что знания величин α , γ (или λ) и μ вполне достаточно для того, чтобы полностью охарактеризовать пространственное движение летательного аппарата вокруг центра масс.

Если использовать описанную выше систему координат для исследования плоского движения, то ясно, что в те моменты времени, когда угол атаки проходит через крайние значения $\alpha = 0$ и $\alpha = 180^\circ$, плоскость угла атаки должна мгновенно поворачиваться на угол $\Delta\gamma = 180^\circ$, а в остальные моменты времени должна совпадать с плоскостью траектории. Заметим, что при плоском движении сделанное предположение об осевой симметрии летательного аппарата, очевидно, является несущественным.

Вследствие второго из сделанных предположений угловая скорость летательного аппарата будет равнодействующей трех вращений: $\frac{d\alpha}{dt}$, λ и μ . Кроме этого, как уже

указывалось выше, необходимо учесть изменение ориентации вектора скорости под воздействием аэродинамической подъемной силы, действующей на летательный аппарат. Эта сила действует в плоскости угла атаки и создает движение вектора скорости аппарата в этой же плоскости с угловой скоростью $\Delta\omega_z$, определяемой формулой

$$\Delta\omega_z = \varepsilon \frac{Y}{mV}, \quad (2.3)$$

где Y — подъемная сила:

$$Y = c_y q S. \quad (2.4)$$

Здесь $q = \frac{\rho V^2}{2}$ — скоростной напор, ρ — плотность воздуха, S — характерная площадь, c_y — коэффициент подъемной силы, зависящий от α и, вообще говоря, от времени через числа M и Re .

Угловая скорость, определяемая формулой (2.3), очевидно, направлена по оси Oz так же, как и скорость $\frac{d\alpha}{dt}$. Малый параметр ε поставлен здесь в соответствии с равенствами (1.7) и (1.9) в связи с тем, что угловая скорость изменения ориентации вектора скорости, вызываемая действием подъемной силы, мала по сравнению с угловой скоростью летательного аппарата, которая появляется при действии аэродинамического момента. Проекции ω_x , ω_y и ω_z угловой скорости летательного аппарата на оси системы координат $Oxyz$ можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \mu + \lambda \cos \alpha, \\ \omega_y &= -\lambda \sin \alpha, \\ \omega_z &= \frac{d\alpha}{dt} + \varepsilon \frac{Y}{mV}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Полагая здесь $\mu = 0$, получим выражения для проекций $\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$ и $\tilde{\omega}_z$ угловой скорости системы координат на ее же оси:

$$\tilde{\omega}_x = \lambda \cos \alpha, \quad \tilde{\omega}_y = \omega_y, \quad \tilde{\omega}_z = \omega_z. \quad (2.6)$$

В силу осевой симметрии летательного аппарата эллипсоид инерции для точки O будет эллипсоидом вращения, и моменты инерции относительно осей Oy и Oz будут равны одной и той же величине I_z несмотря на то, что эти оси

вращаются относительно летательного аппарата. Обозначая через I_x момент инерции летательного аппарата относительно оси Ox , выражения для проекций Q_x , Q_y и Q_z кинетического момента на оси системы координат $Oxyz$ можно записать в виде [2]

$$Q_x = I_x \omega_x, \quad Q_y = I_y \omega_y, \quad Q_z = I_z \omega_z. \quad (2.7)$$

В задаче о входе в атмосферу действующий на летательный аппарат момент M с достаточной точностью можно считать состоящим из восстанавливающего момента $M_z(t, \alpha)$, направленного по оси Oz , и, как это следует из оценок числа St , сделанных в § 1, малого (порядка ϵ) демпфирующего момента, который имеет проекции $\epsilon M_x^{\omega_x}(t, \alpha) \omega_x$, $\epsilon M_y^{\omega_y}(t, \alpha) \omega_y$ и $\epsilon M_z^{\omega_z}(t, \alpha) \omega_z$ на оси системы координат $Oxyz$. Явная зависимость от времени в этих формулах появляется из-за предполагаемой известной зависимости параметров траектории центра масс от времени, через которые выражаются действующие моменты:

$$\left. \begin{aligned} M_z(t, \alpha) &= m_z q S L, \\ M_x^{\omega_x}(t, \alpha) &= m_x^{\bar{\omega}_x} \frac{q S L^2}{V}, \\ M_y^{\omega_y}(t, \alpha) &= m_y^{\bar{\omega}_y} \frac{q S L^2}{V}, \\ M_z^{\omega_z}(t, \alpha) &= m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{q S L^2}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Здесь m_z , $m_x^{\bar{\omega}_x}$, $m_y^{\bar{\omega}_y}$, $m_z^{\bar{\omega}_z}$ — безразмерные аэродинамические коэффициенты, зависящие от α и, вообще говоря, от времени через числа M и Re .

Заметим, что при малых значениях угла атаки из-за осевой симметрии летательного аппарата $m_y^{\bar{\omega}_y} = m_z^{\bar{\omega}_z}$.

В силу предположения о выполнении условия (1.8) и вывода, который был сделан в § 1 из этого предположения, можно считать, что параметры траектории центра масс зависят только от медленного времени $\tau = \epsilon t$, и в формулах (2.8), в которых зависимость от времени появляется из-за зависимости от времени параметров траектории центра масс, вместо t следовало бы писать τ .

Проектируя первое уравнение системы (1.1) на оси подвижной в пространстве и относительно летательного аппарата системы координат $Oxyz$, имея в виду сделанные замечания относительно действующих моментов и учитывая равенства (2.7), уравнения движения летательного аппарата относительно центра масс можно записать в форме [2]

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + I_z \omega_z \tilde{\omega}_y - I_z \omega_y \tilde{\omega}_z &= \varepsilon M_x^{\omega_x}(\tau, \alpha) \omega_x, \\ I_z \frac{d\omega_y}{dt} + I_x \omega_x \tilde{\omega}_z - I_z \omega_z \tilde{\omega}_x &= \varepsilon M_y^{\omega_y}(\tau, \alpha) \omega_y, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + I_z \omega_y \tilde{\omega}_x - I_x \omega_x \tilde{\omega}_y &= M_z(\tau, \alpha) + \varepsilon M_z^{\omega_z}(\tau, \alpha) \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Если сюда подставить выражения (2.5) и (2.6) для $\tilde{\omega}_x$, ω_y , $\tilde{\omega}_y$, ω_z и $\tilde{\omega}_z$, то эту систему уравнений можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} + \varepsilon f_x(\tau, \alpha) r &= 0, \\ \frac{d\lambda}{dt} + \frac{(2\lambda \cos \alpha - r)}{\sin \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \varepsilon \left[f_y(\tau, \alpha) \lambda - \frac{Y}{mV \sin \alpha} r \right] &= 0, \\ \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \lambda^2 \sin \alpha \cos \alpha + r \lambda \sin \alpha + M(\tau, \alpha) + \\ &+ \varepsilon f_z(\tau, \alpha) \frac{d\lambda}{dt} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{I_x \omega_x}{I_z}, \quad M = - \frac{M_z(\tau, \alpha)}{I_z}, \\ f_x(\tau, \alpha) &= - \frac{M_x^{\omega_x}(\tau, \alpha)}{I_x}, \\ f_y(\tau, \alpha) &= - \frac{M_y^{\omega_y}(\tau, \alpha)}{I_z} + \frac{Y \cos \alpha}{mV \sin \alpha}, \\ f_z(\tau, \alpha) &= - \frac{M_z^{\omega_z}(\tau, \alpha)}{I_z} + \frac{Y^x}{mV}, \quad Y^x = \frac{\partial Y}{\partial \alpha}, \quad \tau = \varepsilon t, \end{aligned} \right\} \quad (2.10a)$$

ε — малый параметр.

Во многих случаях можно считать, что

$$M(\tau, \alpha) = g(\tau) F(\alpha), \quad (2.11)$$

где

$$F(\alpha) = \frac{m_z(\alpha)}{m_z|_{\alpha=0}}, \quad g(\tau) = -\frac{M_z^x|_{x=0}}{I_z}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции $f_x = f_x(\tau, \alpha)$, $f_y = f_y(\tau, \alpha)$, $f_z = f_z(\tau, \alpha)$, $Y = Y(\tau, \alpha)$ и $M = M(\tau, \alpha)$ являются достаточно гладкими при $0 \leq \tau \leq \tau_*$ и $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Очевидно также, что по α эти функции имеют период 2π .

В заключение настоящего параграфа приведем систему уравнений, описывающую плоское движение центра масс летательных аппаратов без двигателей в атмосфере [14, 33]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \varepsilon \left(-\frac{c_x q S}{m} - g_T \sin \theta \right), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon \left[\frac{c_y \cos \gamma \cdot q S}{mV} - \frac{g_T}{V} \cos \theta \left(1 - \frac{V^2}{R g_T} \right) \right], \\ \frac{dH}{dt} &= \varepsilon V \sin \theta, \quad R = R_0 + H, \\ \frac{dL}{dt} &= \varepsilon \frac{R_0}{R} V \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Здесь $c_x = c_x(\alpha)$ — коэффициент сопротивления, g_T — ускорение силы тяжести, R_0 — радиус Земли, θ — угол между касательной к траектории и местным горизонтом (при снижении аппарата $\theta < 0$), H — высота полета, L — дальность полета, измеряемая по поверхности Земли.

При расчетах траекторий центра масс осесимметричных летательных аппаратов подъемная сила, входящая во второе из этих уравнений, обычно не учитывается, так как ее осредненное влияние при $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0$ на траекторию очень мало.

Исследование системы уравнений (2.10) при известном решении системы уравнений (2.12) составляет основное содержание следующих глав.

§ 3. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЙ, НЕ УЧИТЫВАЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ВОЗМУЩЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ И ДВИЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА И КРИВИЗНУ ОСРЕДНЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ

Уравнения (2.10) возмущенного движения летательного аппарата в атмосфере получены при заданной траектории центра масс и не учитывают кривизны осредненной траектории. Чтобы получить условия применимости этих уравнений, определим условия, при которых эти предположения выполняются. Получим сначала условие, при котором выполняется первое предположение. Взаимодействие между возмущенным движением и движением центра масс летательного аппарата происходит из-за зависимости аэродинамических сил — подъемной силы и силы сопротивления — от угла атаки.

Влияние изменения подъемной силы при возмущенном движении на траекторию центра масс невелико, так как оно действует все время в разные стороны. Роль подъемной силы, как это видно из уравнений (2.10), главным образом состоит в создании некоторого дополнительного демпфирования колебаний угла атаки, которое, вообще, существенно лишь при движении в плотных слоях атмосферы. Основное влияние на траекторию центра масс оказывает сила сопротивления. Однако на большой высоте, где углы атаки велики и где при возмущенном движении коэффициент сопротивления $c_x(\alpha)$ изменяется существенно, эта сила не в состоянии изменить траекторию центра масс вследствие малой плотности воздуха. На малых же высотах возмущенное движение во многих случаях слабо влияет на траекторию центра масс из-за того, что к этому моменту летательный аппарат под воздействием аэродинамических моментов успевает стабилизироваться настолько, что изменение c_x при возмущенном движении становится несущественным. Искомое условие невливания возмущенного движения на движение центра масс будет получено исходя из того, чтобы к моменту, когда изменение $c_x(\alpha)$ может заметно влиять на движение, максимальное значение угла атаки за время каждого колебания $\alpha_{\max}$ было бы таким, чтобы при $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$

значения $c_x(\alpha)$ мало отличались от значения c_x при $\alpha = 0$. Чтобы определить момент, начиная с которого изменение сопротивления начинает заметно влиять на движение, будем считать, что вход в атмосферу происходит по траектории с постоянным углом наклона θ_1 (угол θ_1 в настоящем параграфе будет считаться положительным, если летательный аппарат снижается). Если пренебречь влиянием силы тяжести на изменение скорости, что вполне допустимо при скоростях порядка нескольких километров в секунду, то упрощенные уравнения движения центра масс летательного аппарата записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= -c_x(\alpha) \frac{S \rho V^2}{2}, \\ \frac{dH}{dt} &= -V \sin \theta_1, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где H — высота полета, m — масса летательного аппарата.

Если принять

$$\rho(H) \sim e^{-\lambda_1 H}, \quad (3.2)$$

то решение системы уравнений (3.1) имеет вид

$$V = V_1 e^{-\frac{S c_{x,0} \rho(H)}{2m \lambda_1 \sin \theta_1}} e^{-\frac{S}{2m \sin \theta_1} \int_H^{\infty} \Delta c_x \rho(H) dH}, \quad (3.3)$$

где V_1 — скорость летательного аппарата на границе атмосферы, c_{x0} — значение c_x при $\alpha = 0$, $\Delta c_x = c_x(\alpha) - c_{x0}$.

Последний множитель в этой формуле, очевидно, определяет влияние возмущенного движения на изменение скорости центра масс летательного аппарата. Ясно, что если

$$\frac{S}{2m \sin \theta_1} \frac{\Delta c_{x, \max} \rho(H)}{\lambda_1} \leq 0, 1, \quad (3.4)$$

где $\Delta c_{x, \max}$ — максимально возможное значение Δc_x , то движение аппарата относительно центра масс не может изменить величину скорости полета более чем на 10%. Обозначим через H_V высоту, выше которой изменение сопротивления Δc_x может изменить скорость полета не более

чем на 10%. Из (3.4) для H_V получается соотношение

$$\rho(H_V) = \frac{0,2\lambda_1 m \sin \theta_1}{S \Delta c_{x, \max}}. \quad (3.5)$$

В § 22 будет показано, что значения $\alpha_{\max}$ в общем случае возмущенного движения при полете в плотных слоях атмосферы определяются формулой

$$\alpha_{\max} = \frac{e - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}{\sqrt[4]{g(\tau)}} 2 \sqrt{k} N_{\max, \rho_1}, \quad (3.6)$$

где $k = \lambda_1 V_1 \sin \theta_1$, $N_{\max, \rho_1}$ — коэффициент, зависящий от параметров движения вне атмосферы,

$$g(\tau) = -\frac{m_z^\alpha q S L}{I_z}, \quad f_z(t) = f_z(\tau, \alpha)|_{z=0}. \quad (3.7)$$

Если при $H = H_V$ определенное с помощью (3.6) значение $\alpha_{\max}$ будет таково, что при $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ изменение $c_x(\alpha)$ можно считать малым, то гипотеза о независимости движения центра масс от движения вокруг центра масс может, очевидно, считаться подтвержденной для всей траектории снижения. В противном случае влияние движения относительно центра масс на движение центра масс летательного аппарата может быть учтено путем использования в уравнениях движения центра масс значений c_x , представляющих собой средние значения $c_x(\alpha)$ за период движения летательного аппарата вокруг центра масс. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в § 34. Сейчас же заметим, что для осреднения зависимости $c_x(\alpha)$ необходимо иметь выражение для $\alpha_{\max}$ и аналогичное выражение для $\alpha_{\min}$ — минимального за время каждого колебания значения угла атаки, которые получены в настоящей работе. Полученные в работе выражения для $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ применимы, если $\alpha_{\max}$ не превосходит одного радиана.

Таким образом, условие применимости результатов, полученных далее, состоит в том, чтобы при $H = H_V$ значения $\alpha_{\max}$, определенные согласно (3.6), не превосходили

бы одного радиана. Если в (3.6) пренебречь демпфированием, а при определении g (τ) положить $V = V_1$, то для определения высоты H_α , ниже которой $\alpha_{\max} \leq 1,0$, получается выражение

$$\rho(H_\alpha) = \frac{32\lambda_1^2 I_z N_{\max, \rho_1}^4 \sin^2 \theta_1}{|m_z^\alpha| SL}.$$

Соответственно условие $\rho(H_\alpha)/\rho(H_V) < 1,0$ применимости

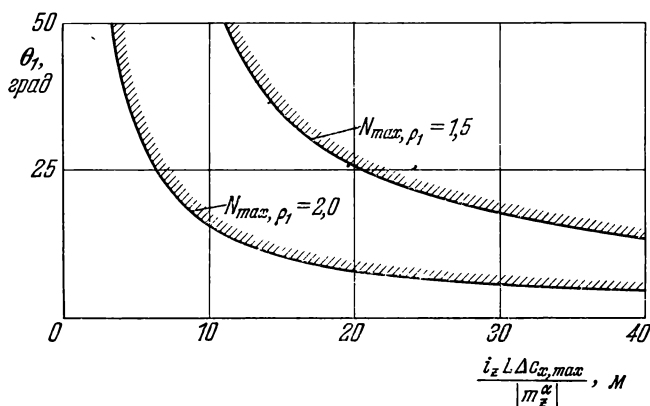


Рис. 3.

результатов, полученных в последующих главах, можно записать в виде

$$160 \lambda_1 N_{\max, \rho_1}^4 \frac{i_z L \Delta c_{x, \max}}{|m_z^\alpha|} \sin^2 \theta_1 \leq 1, \quad (3.8)$$

где $i_z = \frac{I_z}{m L^2}$ и можно положить $\lambda_1 = \frac{1}{7000} \mathcal{M}^{-1}$. Построенная в координатах θ_1 и $\frac{i_z L \Delta c_{x, \max}}{|m_z^\alpha|}$ область применимости результатов, которые получены в последующих главах, изображена на рис. 3 при различных значениях параметра $N_{\max, \rho_1}$.

Из формулы (3.8) и графиков, изображенных на этом рисунке, видно, что влияние движения относительно центра масс на движение центра масс уменьшается одновременно с уменьшением угла наклона траектории θ_1 . Это, очевидно, связано с увеличением участка траектории, расположенного в разреженных слоях атмосферы, так что летательный аппарат успевает стабилизироваться еще до подхода к плотным слоям атмосферы. При малых значениях θ_1 результаты, полученные далее, применимы для исследования движения весьма широкого класса летательных аппаратов.

Перейдем теперь к выводу условия, при котором в уравнениях возмущенного движения можно не учитывать кривизну осредненной траектории. Чтобы получить такое условие, необходимо записать выражения для компонент скорости вращения летательного аппарата и скорости вращения системы координат $Oxyz$ с учетом вращения вектора скорости центра масс летательного аппарата. Обозначим через $\varepsilon \Omega_T(\tau)$ скорость изменения угла наклона траектории относительно некоторого неподвижного направления. Возможность записи этой величины с малым параметром ε в качестве сомножителя, очевидно, следует из записи полной системы уравнений движения в виде (1.7). Будем считать, что $\Omega_T(\tau) > 0$, если вектор Ω_T направлен так, как это указано на рис. 2. С учетом кривизны осредненной траектории выражения для компонент ω_x , ω_y , ω_z угловой скорости летательного аппарата и компонент $\tilde{\omega}_x$, $\tilde{\omega}_y$, $\tilde{\omega}_z$ угловой скорости системы координат $Oxyz$ (рис. 2) по осям этой системы координат записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= [\mu + \lambda \cos \alpha - \varepsilon \Omega_T(\tau) \sin^2 \gamma \sin \alpha], \\ \omega_y &= -\lambda \sin \alpha - \varepsilon \Omega_T(\tau) \sin \gamma \cos \alpha, \\ \omega_z &= \frac{d\gamma}{dt} - \varepsilon \Omega_T(\tau) \cos \gamma, \\ \omega_x &= \lambda \cos \alpha - \varepsilon \Omega_T(\tau) \sin \gamma \sin \alpha, \\ \tilde{\omega}_y &= \omega_y, \\ \tilde{\omega}_z &= \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Эти соотношения совместно с (2.9) и (2.1) представляют

собой уравнения возмущенного движения, учитывающие кривизну траектории. По аналогии с работой [37] покажем, что с точностью до ε^2 уравнениям (2.9), (2.1) и (3.9) можно удовлетворить с помощью функций

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \text{const}, \\ \alpha &= \varepsilon \alpha_{\Omega}(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

где $\alpha_{\Omega}(\tau)$ — некоторая функция порядка единицы. Подставляя эти функции в (3.9) и учитывая, что в силу (2.1) $\lambda = 0$, после пренебрежения членами порядка ε^2 будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \mu, \quad \tilde{\omega}_x = 0, \\ \omega_y &= \tilde{\omega}_y = -\varepsilon \Omega_T(\tau) \sin \gamma, \\ \omega_z &= \tilde{\omega}_z = -\varepsilon \Omega_T(\tau) \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Подставляя эти выражения в уравнения системы (2.9) и учитывая, что при малых α в соответствии с (2.10) и (2.11) функция $M_z(\tau, \alpha)$ равняется $-I_z g(\tau) \alpha$, с той же точностью получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma &= 0, \\ \alpha_{\Omega}(\tau) &= -\frac{r_0(\tau) \Omega_T(\tau)}{g(\tau)} \sin \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где через $r_0(\tau)$ обозначен главный член функции r . Для однозначного определения γ необходимо еще учесть, что функция $\alpha_{\Omega}(\tau)$ должна быть неотрицательна.

Решение (3.12) в чистом виде описывает так называемый *эффект деривации* вращающихся летательных аппаратов, суть которого состоит в том, что при изменении угла наклона траектории ось летательного аппарата отклоняется вправо (или влево) от касательной к траектории.

Ясно, что функция $\alpha_{\Omega}(\tau)$ определяет собой величину погрешности в угле атаки, которая может возникнуть при неучете кривизны траектории и которую следует сравнивать со значениями функции $\alpha_{\max}(\tau)$. Таким образом, искомое условие, при котором можно не учитывать кривизну осредненной траектории, записывается в виде

$$\left| \frac{r_0(\tau) \Omega_T(\tau)}{g(\tau)} \right| \ll \alpha_{\max}(\tau). \quad (3.13)$$

Из условия (3.13) видно, что уравнениями (2.10) можно пользоваться на участках входа и выхода из атмосферы (см. рис. 1), так как там функция $\Omega_T(\tau)$ близка к нулю, можно пользоваться в плотных слоях атмосферы, где функция $g(\tau)$ достаточно велика, и заведомо нельзя пользоваться на внеатмосферном участке траектории, так как там функция $\Omega_T(\tau)$ отлична от нуля, а $g(\tau)$ представляет собой исчезающе малую величину.

Основываясь на этом, нетрудно наметить общий план исследования возмущенного движения летательных аппаратов на пассивном участке траектории. На участках входа и выхода из атмосферы, а также в плотных слоях атмосферы оно будет исследоваться с помощью системы уравнений (2.10), а вне атмосферы возмущенное движение будет исследоваться с помощью известных свойств движения твердого тела по инерции, согласно которым неизменны кинетический момент, кинетическая энергия, а также (при наличии осевой симметрии летательного аппарата, которая предполагается) проекция угловой скорости летательного аппарата на его ось [2]. При переходе с одного из этих участков траектории на другой получающиеся решения будут сопрягаться.

Класс траекторий, целиком расположенных в атмосфере, для которых исследование возмущенного движения может быть проведено с помощью результатов, которые будут получены далее, ограничивается условием (3.13). Ясно, что в каждом конкретном случае это условие трудно проверить.

§ 4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ ПЕРЕГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ

Одним из важных вопросов исследования движения летательных аппаратов при входе в атмосферу является определение продольной и поперечной компонент перегрузки. Обозначим через $n_x^{(m)}$ и $n_y^{(m)}$ максимальные значения компонент перегрузки за время каждого колебания соответственно по оси летательного аппарата и по нормали к ней. Величины $n_x^{(m)}$ и $n_y^{(m)}$, как известно, выражаются через параметры движения летательного аппарата с помощью

следующих формул:

$$n_x^{(m)} = \frac{qS}{G} \max_{0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}} c_l(\alpha), \quad n_y^{(m)} = \frac{qS}{G} \max_{0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}} c_n(\alpha), \quad (4.1)$$

где $c_n(\alpha)$ — коэффициент нормальной силы, $c_l(\alpha)$ — коэффициент тангенциальной силы, G — вес летательного аппарата.

Наиболее важно знать эти величины при движении в плотных слоях атмосферы, где они достигают своих максимальных значений. При движении в плотных слоях атмосферы в подавляющем большинстве случаев можно положить

$$c_l(\alpha) \approx c_{x0}, \quad c_n(\alpha) \approx c_n^\alpha \alpha. \quad (4.2)$$

Ясно, что если известны значения $\alpha_{\max}$ и параметры траектории центра масс, то расчет $n_x^{(m)}$ и $n_y^{(m)}$ нетрудно произвести без всяких упрощающих предположений. Но наряду с точным расчетом этих величин полезно иметь простые приближенные формулы, позволяющие представить в целом зависимость этих величин от геометрических и аэродинамических характеристик летательного аппарата и условий движения его вне атмосферы. Приведем вывод таких формул, следуя работе [41].

Будем исходить из упрощенной системы (3.1) уравнений движения центра масс летательного аппарата при $c_x = \text{const}$. Полагая в (3.1) $c_x(\alpha) = c_{x0}$, будем иметь:

$$V = V_1 e^{-\frac{c_{x0} S \rho(H)}{2m \Lambda_1 \sin \theta_1}}. \quad (4.3)$$

(Здесь и далее в настоящем параграфе угол θ_1 считается положительным при снижении летательного аппарата.) Кроме этого, пользуясь первым уравнением системы (3.1), нетрудно вычислить экспоненциальный множитель в формуле (3.6) для $\alpha_{\max}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau &= \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\frac{c_y^\alpha q S}{mV} - \frac{\bar{m}_z^{\omega_z} q S L^2}{I_z V} \right) d\tau = \\ &= \frac{S}{m} \left(c_y^\alpha - \frac{\bar{m}_z^{\omega_z}}{i_z} \right) \int_{V_1}^V \frac{q}{V} \frac{dV}{d\tau}. \end{aligned}$$

Если заменить здесь $\frac{dV}{d\tau}$ через $-\frac{c_{x0}S}{m}q$, то этот интеграл сразу вычисляется, после чего выражение для экспоненциального множителя в формуле (3.6) можно записать в виде

$$e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} = \left(\frac{V}{V_1} \right)^{\frac{1}{2c_{x0}}} \left(c_y^\alpha - \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{i_z} \right). \quad (4.4)$$

Входящие сюда значения c_{x0} , c_y^α и $m_z^{\bar{\omega}_z}$ взяты при $\alpha = 0$.

Из (4.4), в частности, следует подтверждение полученного в § 1 вывода о том, что демпфирование может сколь угодно существенно влиять на движение лишь после входа летательного аппарата в плотные слои атмосферы, когда скорость полета изменится значительно.

Формулы (4.3) и (4.4) весьма удобны для исследования поведения различных величин, зависящих от скорости, плотности, $\alpha_{\max}$ и характеризующих процесс снижения летательного аппарата. В частности, с помощью (4.3) и (4.4) нетрудно получить формулы для $n_x^{(m)}$ и $n_y^{(m)}$ в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} n_x^{(m)} &= \rho(H) e^{-\kappa_x \rho(H)} \frac{c_{x0} S V_1^2}{2G}, \\ n_y^{(m)} &= \rho(H)^{3/2} e^{-\kappa_y \rho(H)} V_1^2 \times \\ &\times \sqrt[4]{2 \left(\frac{S c_n^\alpha}{m} \right)^3 \frac{(\lambda_1 \sin \theta_1)^2 i_z L}{(-m_z^{cn})} \frac{N_{\max, \rho_1}}{g_T}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \frac{S c_{x0}}{m \lambda_1 \sin \theta_1}, \\ \kappa_y &= \frac{S}{4 m \lambda_1 \sin \theta} \left(3 c_{x0} + c_y^\alpha - \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{i_z} \right), \\ c_y^\alpha &= c_n^\alpha - c_{x0}. \end{aligned}$$

g_T — ускорение силы тяжести.

С помощью этих формул можно проследить изменение $n_x^{(m)}$ и $n_y^{(m)}$ при снижении летательного аппарата. Видно,

что изменение величин (4.5) при $\kappa_x > 0$ и $\kappa_y > 0$ имеет экстремальный характер. Максимальное значение $n_x^{(m)}$ достигается при $\rho(H) = \frac{1}{\kappa_x}$, а максимальное значение $n_y^{(m)}$ — при $\rho(H) = \frac{3}{4\kappa_y}$.

Если значения $\rho(H)$, определенные по этим формулам, меньше значений $\rho(H)$ на поверхности Земли, то есть экстремальные значения выражений (4.5) достигаются в процессе полета, то выражения для определения $\max n_x^{(m)}$ и $\max n_y^{(m)}$ получаются в результате подстановки этих значений для плотности в формулы (4.5) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \max n_x^{(m)} &= K_x V_1^2 \sin \theta_1, \\ \max n_y^{(m)} &= K_y V_1^2 \sin^3 \theta_1^{3/4} \times \\ &\times \sqrt[4]{\frac{Li_z}{-m_z^n} \left(\frac{c_n^2}{3c_{x0} + c_y - \frac{m_z^{\omega z}}{i_z}} \right)^3 N_{\max, \rho_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где

$$K_x = \frac{1}{2eg_T} = 2,68 \cdot 10^{-6} \frac{ср\kappa}{м^2},$$

$$K_y = \frac{2^{1/4} 3^{3/4} e^{3/4} \lambda^{5/4}}{g_T} = 2,04 \cdot 10^{-6} м^{3/4} \cdot с е\kappa^2.$$

Если же экстремальные значения $n_x^{(m)}$ и $n_y^{(m)}$ достигаются под поверхностью Земли, то в процессе снижения летательного аппарата компоненты перегрузки монотонно возрастают и их наибольшие значения достигаются в самой нижней точке траектории снижения и могут быть определены непосредственно по формулам (4.5) при $\rho(H) = \rho(0)$. Таким образом, условие монотонного возрастания компонент перегрузки при снижении состоит в том, чтобы экстремумы зависимостей $n_x^{(m)}(H)$ и $n_y^{(m)}(H)$ находились под поверхностью Земли. Эти условия можно записать в следующей форме:

условие монотонного возрастания $n_x^{(m)}(H)$:

$$\frac{Sp^{(1)}}{m\lambda_1} \frac{c_{x0}}{\sin \theta_1} \leq 1,0; \quad (4.7)$$

условие монотонного возрастания $n_y^{(m)}(H)$:

$$\frac{S_p(0)}{m\lambda_1} \left[\frac{c_{x0}}{3} + \frac{1}{3} \left(c_y^\alpha - \frac{m_z^{\bar{\omega}_z}}{i_z} \right) \right] \leq 1,0. \quad (4.8)$$

В результате сравнения расчетов по приближенным формулам (4.5) и (4.6) и по точным уравнениям установлено, что этими формулами можно пользоваться при $\theta_1 \geq 5^\circ$ и $V_1 \geq 1$ км/сек.

Из выражений (4.5) и (4.6) видно, что для того, чтобы иметь возможность определить компоненту перегрузки $n_y^{(m)}$, необходимо знать коэффициент $N_{\max, \rho_1}$, входящий в формулу (3.6) для $\alpha_{\max}$ и учитывающий зависимость $\alpha_{\max}$ от дальности полета и от начального кинетического момента, который летательный аппарат, предназначенный для спуска на Землю, приобретает при отделении от носителя. Определение этого коэффициента будет произведено в последующих главах. Исследование вида зависимости $N_{\max, \rho_1}$ от параметров является одним из наиболее сложных вопросов задачи об исследовании возмущенного движения при входе в атмосферу.

Укажем еще формулу для определения $\max \max n_y^{(m)}$, который может достигаться в так называемых *особых* случаях движения, в которых летательный аппарат подходит к положению неустойчивого равновесия $\alpha = 180^\circ$ с очень малой угловой скоростью и надолго задерживается в нем («зависает»), вследствие чего в плотных слоях атмосферы летательный аппарат движется с большими углами атаки. При таких движениях в момент, когда $q = q_{\max}$, где $q_{\max}$ — максимальное значение скоростного напора, летательный аппарат может иметь такое значение угла атаки $\alpha = \tilde{\alpha}$, при котором $c_n(\alpha) = c_{n, \max}$, где $c_{n, \max}$ — максимально возможное значение c_n .

Именно при таком движении достигается $\max \max n_y^{(m)}$. Если считать, что до момента времени, при котором $q = q_{\max}$, изменение скорости полета определяется некоторым средним значением c_x при изменении значений угла атаки в интервале $\tilde{\alpha} \leq \alpha \leq 180^\circ$, и воспользоваться решением (4.3) для $V(H)$, то для $\max \max n_y^{(m)}$

получается следующая приближенная формула:

$$\max \max n_{ij}^{(m)} = K_x \frac{c_{n, \max}}{c_{x \text{ ср}}} V_1^2 \sin \theta_1, \quad (4.9)$$

где

$$c_{x \text{ ср}} = \frac{1}{2} \left[\max_{\tilde{\alpha} \leq \alpha \leq 180^\circ} c_x + \min_{\bar{\alpha} \leq \alpha \leq 180^\circ} c_x \right],$$

$\tilde{\alpha}$ — значение угла атаки, при котором $c_n(\alpha) = c_{n, \max}$. Исследование условий, при которых реализуются или не реализуются особые случаи движения, будет выполнено в последующих главах.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ К ВИДУ, БЛИЗКОМУ К УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon = 0$ и отсутствует зависимость аэродинамических сил и моментов от времени. В этом случае уравнения (2.10) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \lambda^2 \sin \alpha \cos \alpha + r\lambda \sin \alpha + M(\alpha) &= 0, \\ \frac{d\lambda}{dt} + \frac{2\lambda \cos \alpha - r}{\sin \alpha} \frac{d\alpha}{dt} &= 0, \\ \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Эти уравнения в основном совпадают с уравнениями движения осесимметричного твердого тела в случае Лагранжа [2, 15, 26]. Отличие состоит лишь в том, что вместо восстанавливающего аэродинамического момента $M(\alpha)$ в случае Лагранжа стоит момент от силы тяжести, пропорциональный $\sin \alpha$. Как будет видно далее, это отличие не является сколько-нибудь существенным для той задачи, которая рассматривается в настоящей главе.

Как известно, в случае Лагранжа имеются три первых интеграла: интеграл, выражающий условие постоянства механической энергии, и два интеграла, выражающих условие постоянства проекций кинетического момента на ось симметрии твердого тела и на направление силы тяжести, от которого отсчитывается угол нутации.

В случае движения летательного аппарата угол нутации совпадает с пространственным углом атаки α , аналогом направления силы тяжести является направление вектора скорости — ось Ox_c , а ось Ox летательного аппарата является, по предположению, осью его симметрии. Приведем выражения для этих интегралов.

Интеграл энергии:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{\lambda^2 \sin^2 \alpha}{2} + \int M(\alpha) d\alpha = \text{const.} \quad (5.2)$$

Условие сохранения проекции кинетического момента на ось Ox_c :

$$G = \frac{Q_x \cos \alpha - Q_y \sin \alpha}{I_z} = \lambda \sin^2 \alpha + r \cos \alpha = \text{const.} \quad (5.3)$$

Условие сохранения проекции кинетического момента на ось Ox :

$$r = \text{const.} \quad (5.4)$$

Выразим λ через α с помощью уравнения (5.3):

$$\lambda = \frac{G - r \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}. \quad (5.5)$$

Подставляя это выражение в интеграл энергии, получим соотношение, определяющее изменение угла α в случае Лагранжа:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{(G - r \cos \alpha)^2}{2 \sin^2 \alpha} + \int M(\alpha) d\alpha = \text{const.} \quad (5.6)$$

Из равенств (5.5) и (5.6) видно, что движение твердого тела в случае Лагранжа представляет собой одночастотный колебательный процесс с не изменяющимися во времени характеристиками. При наличии возмущений — демпфирующих моментов и зависимости восстанавливающего момента от медленного времени — движение также будет являться одночастотным колебательным процессом, но с изменяющимися во времени амплитудой, частотой и т. д. Одновременно будут медленно изменяться во времени переменные G и r . Отсюда ясно, что систему уравнений (2.10), описывающую движение летательного аппарата относительно центра масс, можно преобразовать к виду, близкому к системе, описывающей нелинейные колебания системы с одной степенью свободы. Для того чтобы это сделать, введем в уравнения (2.10) вместо переменной λ новую неизвестную G с помощью формул (5.3) и (5.5). Входящие в эти формулы переменные G и r будут рассматриваться как некоторые функции времени.

Получим уравнение для новой неизвестной G . Вычислим для этого производную $\frac{dG}{dt}$, пользуясь при преобразованиях первым и вторым уравнениями системы (2.10):

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= (2\lambda \cos \alpha - r) \sin \alpha \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \sin^2 \alpha \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \cos \alpha \cdot \frac{dr}{dt} = \\ &= (2\lambda \cos \alpha - r) \sin \alpha \cdot \frac{d\lambda}{dt} - (2\lambda \cos \alpha - r) \sin \alpha \cdot \frac{d\lambda}{dt} - \\ &\quad - \varepsilon \sin^2 \alpha \left(f_y \lambda - \frac{Y}{mV \sin \alpha} r \right) - \varepsilon \cos \alpha \cdot f_x r = \\ &= -\varepsilon \left\{ \sin^2 \alpha \left[f_y(\tau, \alpha) \lambda - \frac{Y}{mV \sin \alpha} r \right] + f_x(\tau, \alpha) \cos \alpha \cdot r \right\}\end{aligned}$$

Исключая отсюда и из третьего уравнения системы (2.10) переменную λ с помощью формулы (5.5), исходную систему (2.10) нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{(G - r \cos \alpha)(r - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + M(\tau, \alpha) + \\ + \varepsilon f_z(\tau, \alpha) \frac{dx}{dt} = 0, \\ \frac{dG}{dt} + \varepsilon \left\{ f_y(\tau, \alpha) G + \right. \\ \left. + \left[(f_x(\tau, \alpha) - f_y(\tau, \alpha)) \cos \alpha - \frac{Y(\tau, \alpha) \sin \alpha}{mV} \right] r \right\} = 0, \\ \frac{dr}{dt} + \varepsilon f_x(\tau, \alpha) r = 0.\end{aligned} \right\} (5.7)$$

Из уравнений движения, записанных в такой форме, при $\varepsilon = 0$ и медленном времени $\tau = \varepsilon t$, рассматриваемом как параметр, сразу следуют все интегралы (5.2) — (5.4), существующие при движении твердого тела в случае Лагранжа. Система уравнений (5.7), очевидно, является близкой к консервативной системе с одной степенью свободы.

§ 6. ЭТАЛОННОЕ УРАВНЕНИЕ. ВЫРАЖЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЯ ЭТАЛОННОГО УРАВНЕНИЯ

В результате выполненных выше преобразований уравнения возмущенного движения приводятся к виду, близкому к одному уравнению, описывающему колебания угла

атаки аппарата. Если ввести единообразные обозначения

$$x_1 = G, \quad x_2 = r, \quad x_3 = V, \quad x_4 = \theta, \quad x_5 = H, \quad x_6 = L$$

и пренебречь подъемной силой в уравнениях движения центра масс аппарата, то систему уравнений (5.7) и (2.12) можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + M_{\Sigma}(x_1, x_2, \dots, \alpha) + \varepsilon f_z(x_1, x_2, \dots, \alpha) \frac{d\alpha}{dt} &= 0, \\ \frac{dx_i}{dt} + \varepsilon X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 6),$$

где

$$\left. \begin{aligned} M_{\Sigma} &= \frac{(G - r \cos \alpha)(r - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + M(\tau, \alpha), \\ X_1 &= f_y(\tau, \alpha) G + \left\{ [f_x(\tau, \alpha) - f_y(\tau, \alpha)] \cos \alpha - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Y(\tau, \alpha) \sin \alpha}{mV} \right\} r, \\ X_2 &= f_x(\tau, \alpha) r, \\ X_3 &= \frac{c_x(\alpha) q S}{m} + g_T \sin \theta, \\ X_4 &= \frac{g_T \cos \theta}{V} \left(1 - \frac{V^2}{R g_T} \right), \\ X_5 &= -V \sin \theta, \\ X_6 &= -\frac{R_0}{R} V \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Выражения для входящих в уравнения (6.1) и (6.2) функций $f_x(\tau, \alpha)$, $f_y(\tau, \alpha)$ и $f_z(\tau, \alpha)$ даются формулами (2.10а). Всюду далее будем предполагать функции $M_{\Sigma}(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ и $X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ ($i=1, \dots, 6$) достаточно гладкими функциями своих аргументов.

Поставим перед собой задачу найти приближенные выражения для решений системы уравнений (6.1), обладающие достаточно высокой точностью на интервале времени порядка $1/\varepsilon$. При записи уравнений движения в виде (6.1) период колебания является величиной порядка

единицы ε , следовательно, интервал времени порядка $1/\varepsilon$ содержит большое количество периодов колебаний. Такой интервал времени достаточен для исследования основных особенностей движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. Асимптотические методы нахождения приближенных решений уравнений вида (6.1) разливались в ряде работ [7, 8, 11—13 и 19—24]. Метод, который будет изложен ниже, был предложен в работах [19—24].

Как уже указывалось, при $\varepsilon = 0$ движение, описываемое уравнениями (6.1), представляет собой одночастотный колебательный процесс с постоянными параметрами. При $\varepsilon \neq 0$ движение также будет представлять собой одночастотный колебательный процесс, но уже с изменяющимися во времени амплитудой и частотой. Поэтому решение уравнений (6.1) целесообразно искать в виде функции двух переменных: медленного времени $\tau = \varepsilon t$, которое определяет собой изменение постоянных при $\varepsilon = 0$ параметров колебательных компонент решения, и фазы колебания φ , которая определяет движение консервативной системы, имея в виду уравнения, связывающие τ и φ с t :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \varepsilon, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Тогда, если через y обозначить любую из неизвестных системы (6.1), имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} y &= y(\tau, \varphi), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} \omega(\tau) + \frac{\partial y}{\partial \tau} \varepsilon, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \omega^2(\tau) + \varepsilon \left[2 \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \tau} \omega(\tau) + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \omega'(\tau) \right] + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} \varepsilon^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Из этих равенств видно, что представление решений уравнений движения в виде функции от двух переменных позволяет выделить в выражениях для производных члены различного порядка малости, что существенно упрощает решение получающихся далее уравнений. С учетом

(6.4) систему уравнений (6.1) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + M_{\Sigma}(x_1, x_2, \dots, \alpha) + \varepsilon \left(f_z \omega \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \omega' \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + \right. \\ \left. + 2\omega \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi \partial \tau} \right) + \varepsilon^2 \left(f_z \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau^2} \right) = 0, \\ \omega \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} + \varepsilon \left(\frac{\partial x_i}{\partial \tau} + X_i \right) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, 6). \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Отсюда видно, что в качестве уравнения, через решения которого следует попытаться выразить асимптотические решения или, более точно, главные члены асимптотических разложений решений системы (6.1) по малому параметру ε , следует взять уравнение

$$\omega^2(\tau) \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \varphi^2} + M_{\Sigma}[x_{10}(\tau), x_{20}(\tau), \dots, \alpha_0] = 0, \quad (6.6)$$

где $\omega(\tau)$ и $x_{i0}(\tau)$ — произвольные функции, подлежащие определению.

Заметим тут же, что, помимо этих функций, решение этого уравнения зависит еще от двух функций: $\Psi(\tau)$ и $E(\tau)$ — произвольных постоянных для уравнения (6.6), первая из которых аддитивна к аргументу φ , а вторую можно рассматривать как энергию системы.

Переменные τ и φ в уравнении (6.6) можно, очевидно, считать независимыми.

Уравнение (6.6) не изменяется при замене φ на $-\varphi$, вследствие этого функцию $\alpha_0(\tau, \varphi)$ можно определить так чтобы

$$\alpha_0(\tau, -\varphi) = \alpha_0(\tau, \varphi). \quad (6.7)$$

Для этого, очевидно, необходимо функцию $\Psi(\tau)$ положить равной нулю или константе, что несущественно. В дальнейшем будем предполагать, что равенство (6.7) выполняется. Будем также предполагать, что функция $\alpha_0(\tau, \varphi)$, будучи определена из уравнения (6.6), обладает свойством

$$\alpha_0(\tau, \varphi + T_{\varphi}) = \alpha_0(\tau, \varphi) + \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}, \quad (6.8)$$

где T_φ — некоторая не зависящая от φ величина, которую далее будем называть «периодом» функции $\alpha_0(\tau, \varphi)$ по φ .

Случай, когда в равенстве (6.8) прибавляется 2π , соответствует вращательному движению аппарата относительно поперечной оси; случай же, когда добавляется нуль, соответствует колебаниям.

Это условие всегда выполняется вследствие того, что аэродинамический момент $M_z(x_3, x_5, \dots, \alpha)$ и соответственно функция $M_\Sigma(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ обладают по α периодом 2π . По этой причине фазовая плоскость уравнения (6.6) периодична по α с этим же периодом. Уравнение (6.6) будем называть *эталонным* уравнением [16].

Из сопоставления уравнений (6.1) с эталонным уравнением и известных теорем о непрерывной зависимости дифференциальных уравнений от параметра следует, что решения исходной системы уравнений будут отличаться от функций $\alpha_0[\varepsilon t, \int \omega dt]$ и $x_{i0}(\varepsilon t)$ на величины порядка ε на каждом интервале времени порядка единицы.

Однако для того, чтобы асимптотические решения были близки к решению исходной системы уравнений на интервале времени $0 \leq t \leq \frac{\tau_*}{\varepsilon}$, который содержит большое число периодов колебаний, необходимо соответствующим образом выбрать произвольные функции $\omega(\tau)$, $x_{i0}(\tau)$ и $E(\tau)$.

Чтобы получить условия для определения этих функций, введем в рассмотрение функции α_ε и $x_{i\varepsilon}$ ($i = 1, \dots, 6$):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\varepsilon(t) &= \alpha_0(\tau, \varphi) + \varepsilon \alpha_1(\tau, \varphi), \\ x_{i\varepsilon}(t) &= x_{i0}(\tau) + \varepsilon x_{i1}(\tau, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

($i = 1, 2, \dots, 6$).

Здесь τ и φ выражены через t с помощью равенств (6.3).

Заметим, что когда t изменяется в интервале $0 \leq t \leq \frac{\tau_*}{\varepsilon}$, то в силу (6.3) переменные τ и φ не выходят соответственно из областей $0 \leq \tau \leq \tau_*$ и $0 \leq \varphi < \infty$, если, конечно, $\omega(\tau) > 0$, что будет предполагаться.

Постараемся с помощью функций (6.9) удовлетворить системе (6.5) с точностью до членов порядка ε^2 при $0 \leq \tau \leq \tau_*$ и $0 \leq \varphi \leq \infty$

Подставляя (6.9) и (6.5), получаем:

$$\left. \begin{aligned} & \omega^2 \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \varphi^2} + M_{\Sigma}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_0) + \varepsilon \left[\omega^2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & + M_{\Sigma, \alpha} \alpha_1 + \sum_{k=1} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} + (f_2 \omega + \omega') \frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} + \\ & \quad \left. + 2\omega \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \varphi \partial \tau} \right] + \varepsilon^2 \Delta_{\alpha}(\tau, \varphi) = 0, \\ & \omega \frac{\partial x_{i0}}{\partial \varphi} + \varepsilon \left[\omega \frac{\partial x_{i1}}{\partial \varphi} + x'_{i0} + X_i \right] + \varepsilon^2 \Delta_i(\tau, \varphi) = 0 \\ & \quad (i = 1, \dots, 6). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Здесь через $M_{\Sigma, \alpha}$ и M_{Σ, x_k} обозначены производные от функции $M_{\Sigma}(x_1, x_2, \dots, x_6)$ соответственно по α и x_k , вычисленные при $\alpha = \alpha_0$ и $x_k = x_{k0}$. Входящие сюда функции X_i вычисляются также при $\alpha = \alpha_0$ и $x_k = x_{k0}$. Штрихом здесь и далее обозначается дифференцирование по τ .

Выражения для функций $\Delta_{\alpha}(\tau, \varphi)$ и $\Delta_i(\tau, \varphi)$ легко выписать, однако в этом нет необходимости. Для дальнейшего достаточно отметить лишь то, что эти функции зависят от переменных τ и φ через функции

$$\left\{ \frac{\partial^{n+m} \alpha_0}{\partial \tau^n \partial \varphi^m}, \frac{\partial^{n+m} \alpha_1}{\partial \tau^n \partial \varphi^m}, \frac{\partial^{n+m} x_{i0}}{\partial \tau^n \partial \varphi^m}, \frac{\partial^{n+m} x_{i1}}{\partial \tau^n \partial \varphi^m} \right\} \quad (6.11)$$

$$(n, m, n+m = 0, 1, 2; i = 1, \dots, 6),$$

причем так, что при ограниченных значениях этих функций функции Δ_{α} и Δ_i ограничены некоторыми константами, не зависящими от ε .

Члены порядка единицы в этих уравнениях компенсируются полностью в силу выбора эталонного уравнения (6.6) и независимости функций x_{i0} от переменной φ . Члены порядка ε компенсируются выбором функций α_1 и x_{i1} . Из равенств (6.10) видно, что для этого их достаточно

определить из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \varphi^2} + M_{\Sigma, \alpha} \alpha_1 = \\ = -2\omega \frac{\partial^2 x_0}{\partial \varphi \partial \tau} - (f_z \omega + \omega') \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} - \sum_{k=1}^6 M_{\Sigma, x_k} x_{k1}, \\ \omega \frac{\partial x_{i1}}{\partial \varphi} = -x'_{i0} - X_i \\ (i = 1, 2, \dots, 6). \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Переменные τ и φ в этих уравнениях, так же как в уравнении (6.6), можно считать независимыми.

Левая часть уравнения для α_1 системы (6.12) обращается в нуль, если положить $\alpha_1 = \frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$. Это сразу видно из равенства, которое получается путем дифференцирования уравнения (6.6) по φ :

$$\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right) + M_{\Sigma, \alpha} \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} = 0.$$

Вследствие этого применение метода вариации произвольных постоянных позволяет получить выражение для α_1 в виде

$$\alpha_1 = \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \int_{-\frac{T_\varphi}{2}}^{\varphi} K(\tau, \varphi) d\varphi, \quad (6.13)$$

где

$$K = \frac{-1}{\omega \left(\frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right)^2} \int_0^{\varphi} \left[2\omega \frac{\partial^2 x_0}{\partial \varphi \partial \tau} + (f_z \omega + \omega') \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} + \sum_{k=1}^6 M_{\Sigma, x_k} x_{k1} \right] \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Функции x_{i1} определяются из (6.12) простым интегрированием, так как $X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ вычислены при $x_k = x_{k0}$ и

$\alpha = \alpha_0$ и являются известными функциями φ :

$$x_{i1} = \frac{-1}{\omega} \int_0^{\varphi} (x'_{i0} + X_i) d\varphi \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (6.14)$$

Чтобы сформулировать условия для определения произвольных функций $x_{i0}(\tau)$, $\omega(\tau)$ и $E(\tau)$, обратимся в (6.10) к членам порядка ε^2 . Эти функции следует определить таким образом, чтобы функции Δ_α и Δ_i были ограничены при $0 \leq \tau \leq \tau_*$ и $0 \leq \varphi < \infty$. В силу сделанных выше замечаний это эквивалентно удовлетворению исходным уравнениям движения с точностью до членов порядка ε^2 при $0 \leq t \leq \frac{\tau_*}{\varepsilon}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(\tau, \varphi + T_\varphi) &= \alpha_1(\tau, \varphi), \\ x_{i1}(\tau, \varphi + T_\varphi) &= x_{i1}(\tau, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, \dots, 6) \quad (6.15)$$

и период T_φ в этих равенствах, а также в равенстве (6.8) не зависел от τ . При T_φ , не зависящем от τ , все производные от α_0 , α_1 и x_{i1} по τ и φ будут периодичны по φ с периодом T_φ . Чтобы в этом убедиться, достаточно продифференцировать равенства (6.15) и (6.8) нужное число раз по τ и φ . При условии выполнения равенств (6.8) и (6.15) с периодом T_φ , не зависящим от τ , функции Δ_α и Δ_i в (6.10) будут ограничены при $0 \leq \tau \leq \tau_*$ и $0 \leq \varphi < \infty$, если только функции (6.11) ограничены при $0 \leq \tau \leq \tau_*$ и $0 \leq \varphi \leq T_\omega$, то есть на одном периоде изменения φ . Последнее же в силу известных теорем об оценках решений уравнений вида (6.6) и (6.12) всегда будет иметь место, если только функция $\omega(\tau)$, будучи определена из соотношений, которые указаны ниже, не обращается в нуль при $0 \leq \tau \leq \tau_*$.

Можно показать, что условие независимости периода T_φ от τ позволяет определить одну из функций $\omega(\tau)$, $E(\tau)$ и $x_{i0}(\tau)$ ($i = 1, \dots, 6$). Недостающие соотношения получаются из условия периодичности функций $\alpha_1(\tau, \varphi)$ и $x_{i1}(\tau, \varphi)$ по φ . Докажем, что эти функции будут периодичны

по φ , если выполняются равенства

$$\left[\omega \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} \left(\frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi \right]' + \omega \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} f_z \left(\frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi + \\ + \sum_{k=1}^6 \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} d\varphi = 0, \quad (6.16)$$

$$\frac{T_\varphi}{2} x'_{i0} + \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} X_i d\varphi = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (6.17)$$

(штрихом здесь обозначено дифференцирование по τ). Выражения для x_{i1} даются формулами (6.14). Периодичность функций x_{i1} сразу следует из равенств (6.17), (6.7) и (6.14). В самом деле, из равенств (6.14) и (6.17) имеем:

$$x_{i1} \left(\tau, \varphi + \frac{T_\varphi}{2} \right) - x_{i1} \left(\tau, \varphi - \frac{T_\varphi}{2} \right) = \\ = - \frac{1}{\omega} \int_{-\frac{T_\varphi}{2}}^{\frac{T_\varphi}{2}} [x'_{i0} + X_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{00})] d\varphi.$$

В силу же четности функции $\alpha_0(\tau, \varphi)$ по переменной φ [см. (6.7)] подынтегральное выражение также является четной функцией φ и интеграл, входящий в правую часть этого равенства, можно заменить удвоенным интегралом, взятым от 0 до $\frac{T_\varphi}{2}$:

$$x_{i1} \left(\tau, \varphi + \frac{T_\varphi}{2} \right) - x_{i1} \left(\tau, \varphi - \frac{T_\varphi}{2} \right) = - \frac{2}{\omega} \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} (x'_{i0} + X_i) d\varphi = \\ = - \frac{2}{\omega} \left(\frac{T_\varphi}{2} x'_{i0} + \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} X_i d\varphi \right) \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Пользуясь далее равенством (6.17), получим, что

$$x_{i1} \left(\tau, \varphi + \frac{T_\varphi}{2} \right) - x_{i1} \left(\tau, \varphi - \frac{T_\varphi}{2} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Это, очевидно, и означает, что все функции $x_{i1}(\tau, \varphi)$ являются периодическими функциями φ с периодом T_φ . В силу четности подынтегрального выражения в равенствах (6.14) все функции $x_{i1}(\tau, \varphi)$ являются нечетными функциями φ и в соответствии с (6.17) обращаются в нуль при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm \frac{T_\varphi}{2}$. Точно такими же свойствами обладает производная $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$. Чтобы в этом убедиться, продифференцируем равенство (6.7) по φ :

$$\frac{\partial x_0(\tau, -\varphi)}{\partial \varphi} = - \frac{\partial x_0(\tau, \varphi)}{\partial \varphi}.$$

Это равенство означает, что $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ является нечетной функцией φ . Полагая в этом равенстве $\varphi = 0$, получаем, что $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ обращается в нуль при $\varphi = 0$. Из нечетности $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ следует, что

$$\left. \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = -\frac{T_\varphi}{2}} = - \left. \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = +\frac{T_\varphi}{2}}.$$

В силу же периодичности производной $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ по φ с периодом T_φ одновременно выполняется равенство

$$\left. \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = -\frac{T_\varphi}{2}} = \left. \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \frac{T_\varphi}{2}}.$$

Из этих двух равенств, очевидно, следует, что $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ обращается в нуль при $\varphi = \pm \frac{T_\varphi}{2}$. Таким образом, доказано, что $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ является нечетной функцией φ и обращается в нуль при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm \frac{T_\varphi}{2}$.

Пользуясь установленными свойствами функций $\alpha_0(\tau, \varphi)$, $\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi}$ и $x_{i1}(\tau, \varphi)$ и равенством (6.16), с учетом того, что

$$\left[\omega \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi \right]' = \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} \left(2\omega \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \varphi \partial \tau} + \omega' \frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} d\varphi,$$

с помощью рассуждений, аналогичных только что проведенным, нетрудно установить следующие свойства функции $K(\tau, \varphi)$, входящей в равенство (6.13):

$$K(\tau, 0) = K\left(\tau, \frac{T_\varphi}{2}\right) = 0, \quad K(\tau, -\varphi) = -K(\tau, \varphi),$$

$$\int_{-\frac{T_\varphi}{2}}^{\frac{T_\varphi}{2}} K(\tau, \varphi) d\varphi = 0, \quad K(\tau, \varphi + T_\varphi) = K(\tau, \varphi).$$

Из этих равенств в силу (6.13) с очевидностью следует периодичность функции $\alpha_1(\tau, \varphi)$ по φ с периодом T_φ , не зависящим от τ . Равенства (6.16) и (6.17) будем далее называть *условиями периодичности*.

Таким образом, получены все соотношения, необходимые для того, чтобы функции $\alpha_\varepsilon(t)$ и $x_{i\varepsilon}(t)$ удовлетворяли исходным соотношениям с точностью до членов порядка ε^2 на интервале $0 \leq t \leq \frac{\tau_*}{\varepsilon}$. Важнейшим условием этого является отличие функции $\omega(\tau)$ от нуля. Из изложенного следует, что с указанной точностью исходные уравнения (6.1) могут быть заменены системой условий периодичности (6.17), которые представляют собой уравнения для медленно изменяющихся компонент решения. Если решение эталонного уравнения известно, то задача об интегрировании исходной системы уравнений (6.1) сразу сводится к интегрированию системы уравнений (6.16), (6.17), решения которой изменяются в $1/\varepsilon$ раз медленнее решений исходных уравнений и соответственно интегрирование их требует в $1/\varepsilon$ раз меньше машинного времени, чем интегрирование точных уравнений (6.1).

Члены порядка ε в выражениях (6.9) представляют собой малые колеблющиеся поправки, добавляемые к главным членам, и их обычно можно не учитывать, поэтому формулы для вычисления асимптотических решений можно брать в виде [см. также равенства (6.4)]

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(\tau, \varphi), \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \omega(\tau) \frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi}, \quad x_{i_0}(t) = x_{i_0}(\tau), \quad (6.18)$$

где

$$\tau = \varepsilon t, \quad \varphi = \int \omega(\varepsilon t) dt.$$

Из периодичности функций $\alpha_0(\tau, \varphi)$ по φ с периодом T_φ и равенств (6.3) следует, что мгновенный период колебаний $T(\tau)$ связан с функцией $\omega(\tau)$ с помощью формулы

$$T(\tau) = \frac{T_\varphi}{\omega(\tau)}. \quad (6.19)$$

Соответственно функцию $\omega(\tau)$ можно рассматривать как мгновенную частоту колебаний.

В заключение параграфа заметим, что индекс «0», который в настоящем параграфе использовался для обозначения асимптотических решений, иногда в дальнейшем изложении для упрощения записи формул будем опускать.

§ 7. ВЫЯСНЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО СМЫСЛА

УСЛОВИЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИХ

Выясним сначала физический смысл отдельных слагаемых в условии периодичности (6.16). Вводя вместо φ в качестве переменной интегрирования время $t = \int \frac{d\varphi}{\omega}$ и учитывая выражение (6.18), для $\frac{dx}{dt}$ можем написать:

$$D = \omega \int_0^{\frac{T_\varphi}{\omega}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right)^2 d\varphi = \int_0^{\frac{T_\varphi}{\omega}} \omega^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right)^2 dt = \int_0^{\frac{T_\varphi}{\omega}} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} d\alpha \quad (7.1)$$

(индекс «0», обозначающий] асимптотические решения, здесь и дальше опущен). Через $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ обозначены такие значения α , при которых производная $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$, будучи определена из эталонного уравнения, обращается в нуль. При вычислении интегралов в этих формулах функции $x_1, x_2, \dots$ и E , от которых зависит $\frac{d\alpha}{dt}$, следует, очевидно, рассматривать как параметры.

Из равенств (7.1) видно, что рассматриваемое выражение, которое мы обозначили через D , представляет собой не что иное, как интеграл от удвоенной кинетической энергии системы, взятый по половине мгновенного периода колебаний, а первое слагаемое в равенстве (6.16) — скорость изменения этой величины. Если в остальных слагаемых условия периодичности (6.16) сделать такую же замену переменной интегрирования, то это условие можно переписать в форме

$$\left(\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} d\alpha \right)' + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} f_z \frac{dx}{dt} d\alpha + \sum_{k=1}^6 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} d\alpha = 0. \quad (7.2)$$

Из такой записи видно, что второе и последующие слагаемые представляют собой соответственно величины, пропорциональные работе суммарного демпфирующего момента $f_z \frac{dx}{dt}$ и работе вариаций суммарного восстанавливающего момента за половину периода колебаний.

Таким образом, условие периодичности (6.16) или (7.2) представляет собой энергетическое соотношение, согласно которому скорость изменения D — интеграла от удвоенной кинетической энергии определяется работой возмущающих моментов в течение половины периода колебаний.

Выясним, далее, физический смысл условий периодичности (6.17). Переходя в этих условиях от интегрирования по φ к интегрированию по t , получаем:

$$x'_i + \frac{1}{\frac{T(\tau)}{2}} \int_0^{\frac{T(\tau)}{2}} X_i dt = 0 \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (7.3)$$

Отсюда видно, что условия периодичности (6.17) представляют собой не что иное, как результат осреднения уравнений (6.1) для x_i ($i = 1, \dots, 6$) по половине мгновенного периода колебаний. Эти условия могут быть получены сразу с помощью применения метода осреднения [6—8] к исходным уравнениям, определяющим изменение этих функций.

Использование условий периодичности в форме (6.16) и (6.17) удобно в тех случаях, когда известно явное выражение для решения эталонного уравнения (6.6). Далее будет рассмотрено довольно большое количество задач, когда это условие выполняется и решение эталонного уравнения выражается через эллиптические функции Якоби. Но так как такое решение имеется все же не всегда, то целесообразно преобразовать условия периодичности к такому виду, чтобы все входящие в них интегралы могли бы быть вычислены с помощью функций f_z , M_Σ и X_i ($i = 1, \dots, 6$), входящих в исходные уравнения движения. Выполним такие преобразования с учетом результатов, полученных в работах [11—13 и 38].

Отметим прежде всего ряд соотношений, следующих из интеграла энергии эталонного уравнения (6.6).

Из (6.6) с учетом (6.18) имеем:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \Phi(x_1, x_2, \dots, E, \alpha) = 0. \quad (7.4)$$

Здесь

$$\Phi = \int_0^\alpha M_\Sigma(x_1, x_2, \dots, \alpha) d\alpha - E,$$

а функции $x_1, x_2, \dots$ и E рассматриваются как параметры. Так как $\frac{d\alpha}{dt}$ при $\alpha = \alpha_{\min}$ и $\alpha = \alpha_{\max}$ обращается в нуль, то

$$E = \int_0^{\alpha_{\min}} M_\Sigma d\alpha, \quad \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} M_\Sigma d\alpha = 0. \quad (7.5)$$

Эти соотношения связывают функции $E(\tau)$, $\alpha_{\max}(\tau)$ и $\alpha_{\min}(\tau)$. Вследствие этого далее вместо функции $E(\tau)$ можно подразумевать любую из этих функций.

Из (7.4) производная $\frac{dx}{dt}$ определяется как функция от x_k , H и α с помощью формулы

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{-2\Phi}. \quad (7.6)$$

Отсюда, в частности, получается следующее выражение для мгновенного периода колебаний:

$$T = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} = 2 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{-2\Phi}}. \quad (7.7)$$

Как уже указывалось, здесь при выполнении интегрирования все входящие в подынтегральное выражение функции от τ следует рассматривать как параметры.

Выразим теперь условия периодичности (6.17) через известные функции (6.2) и функцию Φ . Для этого достаточно в (6.17) или в (7.3) перейти при вычислении интеграла к интегрированию по α . Выполнив это и учтя (7.7), получим:

$$x'_i + \bar{X}_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 6), \quad (7.8)$$

где

$$\bar{X}_i = \frac{2}{T} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} X_i \frac{dx}{dt} = \frac{\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} X_i \frac{dx}{dt}}{\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt}}. \quad (7.9)$$

В этих формулах $\frac{dx}{dt}$ выражается через α с помощью равенства (7.6).

Заметим, что $\bar{X}_i$ есть среднее значение функции X_i при изменении α от $\alpha_{\min}$ до $\alpha_{\max}$, определенное с весом $1/(d\alpha/dt)$.

Продолжим далее преобразование условия периодичности (7.2). Из определения функции Φ имеем:

$$M_{\Sigma, x_k} = \frac{\partial \Phi_{x_k}}{\partial \alpha}, \quad (7.10)$$

где через Φ_{x_k} обозначена частная производная от функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, E, \alpha)$ по x_k .

Учитывая это, преобразуем интеграл, стоящий под знаком суммы в (7.2), с помощью интегрирования по частям.

Пользуясь тем, что $x_{k1} = 0$ при $\alpha = \alpha_{\min}$ и $\alpha = \alpha_{\max}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} d\alpha &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\partial \Phi_{x_k}}{\partial \alpha} x_{k1} d\alpha = - \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \Phi_{x_k} \frac{dx_{k1}}{d\alpha} d\alpha = \\ &= - \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \Phi_{x_k} \frac{dx_{k1}}{dt} \frac{d\alpha}{dt} \quad (k = 1, \dots, 6). \end{aligned}$$

Из (6.14), (6.4) и (7.8) следует, что

$$\frac{dx_{k1}}{dt} = -(x'_{k0} + X_k) = \bar{X}_k - X_k \quad (k = 1, \dots, 6).$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} d\alpha &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \Phi_{x_k} \frac{(X_k - \bar{X}_k)}{\frac{d\alpha}{dt}} d\alpha \quad (7.11) \\ &\quad (k = 1, \dots, 6). \end{aligned}$$

Если продифференцировать равенство (7.4) по x_k , то получается следующее выражение для Φ_{x_k} :

$$\Phi_{x_k} = - \frac{d\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) \quad (k = 1, \dots, 6). \quad (7.12)$$

Пользуясь этим, находим:

$$\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} d\alpha = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} (\bar{X}_k - X_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) d\alpha. \quad (7.13)$$

С учетом равенства (7.13) условие периодичности (7.2)

записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\tau}{dt} d\alpha \right) + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} f_z \frac{d\tau}{dt} d\alpha + \\ + \sum_{k=1}^6 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} (\bar{X}_k - X_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dx}{dt} \right) d\alpha = 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Все входящие сюда функции являются известными функциями от α : производная $\frac{dx}{dt}$ выражается через α с помощью равенства (7.4) [или (7.6)], а функции $f_z(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ и $X_k(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ являются данными ($\bar{X}_k$ от α не зависят). Условия периодичности, взятые в виде (7.8) и (7.14), позволяют определить асимптотические решения в случаях, когда решение эталонного уравнения через известные функции не выражается.

Приведем еще две формы условия периодичности (7.14), которые оказываются удобными в отдельных случаях.

Преобразуем первое слагаемое в равенстве (7.14). В соответствии с изложенным интеграл D [см. (7.1)] является функцией от $x_k(\tau)$ и $E(\tau)$. Рассматривая этот интеграл как сложную функцию от медленного времени и учитывая (7.8), получаем:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} d\alpha \right) = \frac{\partial D}{\partial \tau} \Big|_{x_k = \text{const}} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial D}{\partial x_k} x'_k.$$

Из равенства (7.1) с учетом того, что $\frac{dx}{dt}$ обращается в нуль при $\alpha = \alpha_{\min}$ и $\alpha = \alpha_{\max}$, имеем:

$$\frac{\partial D}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} d\alpha = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dx}{dt} \right) d\alpha. \quad (7.15)$$

Это тождество позволяет предыдущее равенство записать в следующей форме:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} d\alpha \right) = \frac{\partial D}{\partial \tau} \Big|_{x_k = \text{const}} - \sum_{k=1}^6 \bar{X}_k \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dx}{dt} \right) d\alpha. \quad (7.16)$$

Подставляя (7.16) в (7.14), получаем условие периодичности в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} d\alpha \right) \Big|_{x_k = \text{const}} + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} f_z \frac{dx}{dt} d\alpha - \\ - \sum_{k=1}^6 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} X_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) d\alpha = 0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Этот вид условия периодичности отличается от предыдущего тем, что в него не входят $\bar{X}_k$ — средние значения функций X_k . В процессе проведенных преобразований члены, содержащие $\bar{X}_k$, взаимно скомпенсировались.

Равенство (7.17) можно записать в еще более компактной форме, если ввести в рассмотрение средние значения функций f_z и X_k по α , определяемые с некоторыми весами:

$$\bar{f}_z = \frac{\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} f_z \frac{dx}{dt} d\alpha}{\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} d\alpha}, \quad \bar{X}_k = \frac{\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} X_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) d\alpha}{\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) d\alpha}. \quad (7.18)$$

Из равенств (7.1) и (7.15) следует, что интегралы, стоящие в знаменателях этих формул, суть соответственно D и $\frac{\partial D}{\partial x_k}$. Это позволяет записать следующие тождества:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} f_z \frac{dx}{dt} d\alpha &= \bar{f}_z D, \\ \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} X_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) d\alpha &= \bar{X}_k \frac{\partial D}{\partial x_k}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Используя эти тождества, условие периодичности можно записать в следующем виде [38]:

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} \Big|_{x_k = \text{const}} - \sum_{k=1}^6 \frac{\partial D}{\partial x_k} \bar{X}_k + \bar{f}_z D = 0. \quad (7.20)$$

Первые два члена этого уравнения можно объединить в своеобразную полную производную от интеграла D по времени, отличающуюся от истинной полной производной тем, что значения $\dot{x}_k = -\dot{\bar{X}}_k$ ($k = 1, \dots, 6$) заменяются значениями $\dot{x}_k = -\bar{X}_k$. Если функции X_k ($k = 1, \dots, 6$) не зависят от α и $f_z = 0$, то $\bar{X}_k = \dot{\bar{X}}_k$ и из (7.20) или из (7.14) следует, что $D = \text{const.}$ На этом основании для интеграла D в литературе принят термин *адиабатический инвариант* [9].

Условия периодичности (6.16) и (6.17), взятые в какой-либо одной из указанных в настоящем параграфе форм, вместе с конечными соотношениями (7.5) и формулой для периода колебаний (7.7) служат для определения медленно изменяющихся характеристик возмущенного движения $T(\tau)$, $\alpha_{\min}(\tau)$, $\alpha_{\max}(\tau)$, $E(\tau)$ и $x_i(\tau)$ ($i = 1, \dots, 6$). Общее число полученных соотношений, очевидно, равняется общему числу неизвестных функций.

Заметим, что полученные результаты без всяких изменений справедливы также и в случае, когда функции f_z , X_i и M_Σ , помимо зависимости от указанных выше переменных, зависят еще и от медленного времени τ .

Если считать, что функции $\alpha_{\min}(\tau)$, $\alpha_{\max}(\tau)$ и $T(\tau)$ выражены через функции $E(\tau)$ и $x_i(\tau)$ ($i = 1, \dots, 6$), то система условий периодичности будет представлять собой систему дифференциальных уравнений для этих величин. В общем случае в конечной форме эта система уравнений не интегрируется.

Однако численное интегрирование этой системы уравнений в тех случаях, когда все входящие в нее интегралы удастся вычислить аналитически, требует значительно меньшего машинного времени, чем численное интегрирование исходной системы уравнений, так как ее решения изменяются в $1/\varepsilon$ раз медленнее.

Сделаем ряд замечаний относительно интегрирования условий периодичности в случае, когда возмущенное движение аппарата при входе в атмосферу рассматривается при заданной траектории центра масс. В этом случае s_x следует считать не зависящим от α , и последние четыре из условий периодичности (7.8), которые описывают движение центра масс летательного аппарата, можно считать проинтегрированными.

При известных $V(\tau)$, $\theta(\tau)$, $H(\tau)$ первые два из этих условий и условие периодичности (7.14), описывающие движение аппарата относительно центра масс, могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left(\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{dt} d\alpha \right) + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} f_z \frac{d\alpha}{dt} d\alpha + \\ & + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} (\bar{X}_1 - X_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{dx}{dt} \right) d\alpha + \\ & + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} (\bar{X}_2 - X_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{dx}{dt} \right) d\alpha = 0, \\ & \frac{dG}{d\tau} = - \bar{X}_1 = - \left\{ \bar{f}_y G + \left[(f_x - f_y) \cos \alpha - \frac{Y \sin \alpha}{mV} \right] r \right\}, \\ & \frac{dr}{d\tau} = - \bar{X}_2 = - \bar{f}_x r \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

(черточками, как и раньше, обозначены осредненные величины).

Заметим, далее, что так как выражения для $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ содержат лишь демпфирующие члены и члены, учитывающие действие подъемной силы, которые имеют такой же порядок, как и демпфирующие члены, то роль их в соответствии с оценками § 1 существенна лишь после попадания аппарата в плотные слои атмосферы. Это видно также и из выражений для $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$, все слагаемые которых пропорциональны q/V . Так как в задаче о входе в атмосферу скорость V является величиной порядка нескольких тысяч метров в секунду, влияние этих членов на движение становится ощутимым на значительно меньших высотах, чем влияние статических сил и моментов, которые пропорциональны скоростному напору q . Поэтому на больших высотах можно считать, что

$$\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{dt} = \text{const}, \quad G = \text{const}, \quad r = \text{const}. \quad (7.22)$$

После попадания же аппарата в плотные слои атмосферы углы атаки аппарата во многих случаях можно считать достаточно малыми для того, чтобы члены, зависящие от α в выражениях для X_1 и X_2 , с достаточной точностью можно было заменить их значениями при $\alpha = 0$. При таком предположении $X_1 = \bar{X}_1$, $X_2 = \bar{X}_2$, и с учетом того, что для осесимметричного аппарата при $\alpha = 0$ $m_z^{\omega z} = m_y^{\omega y}$ и, следовательно, $f_z = f_y$, уравнения (7.21) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{dt} d\alpha \right) + f_z(\tau) \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{dt} d\alpha &= 0, \\ \frac{dG}{d\tau} &= - \{ f_z(\tau) G + [f_x(\tau) - f_z(\tau)] r \}, \\ \frac{dr}{d\tau} &= - f_x(\tau) r, \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

где

$$f_z = \frac{c_y^{\alpha} q S}{mV} - \frac{m_z^{\omega z} q S L^2}{I_z V}, \quad f_x = - \frac{m_x^{\omega x} q S L^2}{I_x V}.$$

Эта система уравнений интегрируется и ее решения могут быть записаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} D &= \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{dt} d\alpha = \omega(\tau) \int_0^{\frac{T_\Phi}{2}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \Phi} \right)^2 d\Phi = \text{const } e^{-\int f_z(\tau) d\tau}, \\ G &= r + \text{const } e^{-\int f_z(\tau) d\tau}, \\ r &= \text{const } e^{-\int f_x(\tau) d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Так как на больших высотах функции $f_x(\tau)$ и $f_z(\tau)$ близки к нулю, то можно считать, что последние формулы включают в себя формулы (7.22). Таким образом, при указанных предположениях асимптотические решения определяются из конечных соотношений.

§ 8. СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ С ТОЧНЫМИ И УСЛОВИЕ ИХ ПРИМЕНИМОСТИ

Для того чтобы получить критерий применимости асимптотических решений, сравним между собой в уравнениях (6.5) члены порядка ε с членами порядка единицы. Ясно, что в общем случае, если асимптотические решения точны, то члены порядка ε должны быть меньше членов порядка единицы. Из уравнений (6.5) видно, что наиболее характерным членом порядка единицы является член

$$\omega^2(\tau) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2}. \quad (8.1)$$

Чтобы выбрать характерный член порядка ε , необходимо учесть, что все члены порядка ε связаны между собой уравнениями (6.12). Из уравнения для α_1 системы (6.12) и формулы (6.13) для его решения вытекает, что величина функции α_1 определяется функцией, которая стоит в правой части, и соответственно величина членов порядка ε в уравнении для α_1 определяется величинами слагаемых, из которых состоит правая часть уравнения для α_1 . Если взять за основу случай, когда $X_i = \bar{X}_i (i = 1, \dots, 6)$ и, следовательно, $X_{i1} \approx 0 (i = 1, \dots, 6)$, то становится ясно, что характерными членами порядка ε являются члены

$$\left. \begin{aligned} 2\omega(\tau) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi \partial \tau}, \\ \omega'(\tau) \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}, \\ f_z(\tau, \alpha) \omega(\tau) \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Оценим производные $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2}$, которые входят в (8.1) и (8.2). Во время пространственного возмущенного движения угол атаки изменяется от $\alpha_{\min}$ до $\alpha_{\max}$ при изменении переменной φ на $T_\varphi/2$. Вследствие этого

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} &\approx \pm \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{T_\varphi/2}, \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} &\approx \pm \frac{2(\alpha_{\max} - \alpha_{\min})}{(T_\varphi/2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi \partial \tau} \approx \pm \frac{\alpha'_{\max} - \alpha'_{\min}}{T_{\varphi/2}}.$$

Записывая условие малости слагаемых порядка ε по сравнению со слагаемым порядка единицы, получаем следующие необходимые критерии точности асимптотических решений:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_1(\tau) &= \left| \frac{\varepsilon T_{\varphi}}{4} \frac{\omega'(\tau)}{\omega^2(\tau)} \right| \ll 1, \\ \tilde{\varepsilon}_2(\tau) &= \left| \frac{\varepsilon T_{\varphi}}{4} \frac{f_z(\tau)}{\omega(\tau)} \right| \ll 1, \\ \tilde{\varepsilon}_3(\tau) &= \left| \frac{\varepsilon T_{\varphi} [\alpha'_{\max}(\tau) - \alpha'_{\min}(\tau)]}{2\omega(\tau) [\alpha_{\max}(\tau) - \alpha_{\min}(\tau)]} \right| \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad [(8.4)]$$

С учетом формулы (6.19) для мгновенного периода колебаний эти условия можно записать так:

$$\tilde{\varepsilon}_1(\tau) = \left| \frac{\varepsilon}{4} T'(\tau) \right| \ll 1, \quad (8.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_2(\tau) &= \left| \frac{\varepsilon}{4} f_z(\tau) T(\tau) \right| \ll 1, \\ \tilde{\varepsilon}_3(\tau) &= \left| \frac{\varepsilon T(\tau)}{2} \frac{d}{d\tau} \ln |\alpha_{\max}(\tau) - \alpha_{\min}(\tau)| \right| \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Заметим, что при использовании этих неравенств для оценки условий применимости асимптотических решений для плоского движения под $T(\tau)$ следует понимать промежуток времени между двумя последовательными моментами времени, в которые угол атаки обращается в нуль, то есть $T(\tau)$ в (8.5) в этом случае представляет собой половину мгновенного периода, определяемого для плоского движения обычным образом. Это является следствием того обстоятельства, что при плоском движении $|\alpha|$ изменяется от $\alpha = 0$ до $\alpha = \alpha_{\max}$ за $1/4$ периода, понимаемого в обычном смысле, или за $1/2$ периода, если плоское движение рассматривается в пространственной системе координат, когда $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Полученные неравенства (8.5) и (8.6) являются необходимыми условиями точности асимптотических решений,

если не принимать во внимание случаи, когда пренебрежение большими членами в уравнениях движения не приводит к заметной ошибке. В таких случаях асимптотические решения могут давать правильные результаты и при невыполнении неравенств (8.5) и (8.6). Получение достаточных условий применимости асимптотических решений принципиально возможно (см., например, [6, 16 и 33]), однако практической ценности они обычно не имеют, так как не выполняются во многих случаях, в которых асимптотические решения точны.

В соответствии с изложенным параметры $\tilde{\epsilon}_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3$) можно рассматривать как параметры, определяющие величину погрешности асимптотических решений. Основываясь на этом, можно попытаться приближенно определить зависимость погрешности асимптотических решений от параметров $\tilde{\epsilon}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Для этого, очевидно, нужно для ряда конкретных уравнений провести сравнение асимптотических решений с точными при одновременном определении $\tilde{\epsilon}_i(\tau)$, определить погрешность асимптотических решений для ряда моментов времени и затем сопоставить величину погрешности со значениями параметра $\tilde{\epsilon}_i(\tau)$ в эти же моменты времени. Прежде всего имеет смысл рассмотреть линейные уравнения, точные решения которых выражаются с помощью простых аналитических формул.

В качестве первого примера было рассмотрено уравнение

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + a^2 y = 0,$$

где a и b — константы. Его точное решение y и асимптотическое решение y_{ac} имеют вид:

$$y = e^{-\frac{b}{2}t} \left| \cos \left[a \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2} t \right] \right|,$$

$$y_{ac} = e^{-\frac{b}{2}t} | \cos at |.$$

В качестве второго примера было взято уравнение Эйлера

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c^2}{t^2} y = 0,$$

где c — константа. Его точное решение y и асимптотическое решение y_{ac} записываются так:]

$$y = \sqrt{t} \left| \cos \left[\int \frac{c}{t} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2c} \right)^2} dt \right] \right|,$$

$$y_{ac} = \sqrt{t} \left| \cos \left[\int \frac{c}{t} dt \right] \right|.$$

Знак модуля поставлен в этих формулах в связи с тем, что как в этом примере, так и в следующих решение $y = \alpha$ рассматривается в пространственной системе координат, описанной в § 2 и изображенной на рис. 2.

Видно, что в обоих случаях асимптотические решения точно дают закон изменения мгновенной амплитуды колебаний, в то время как мгновенный период колебаний определяется с некоторой погрешностью. Относительная погрешность мгновенного периода колебаний в обоих случаях выражается через параметр $\tilde{\varepsilon}_1$ с помощью формулы

$$\frac{T - T_{ac}}{T_{ac}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\tilde{\varepsilon}_1}{\pi} \right)^2}} - 1. \quad (8.7)$$

Здесь T — точное значение мгновенного периода, T_{ac} — значение мгновенного периода, полученное из асимптотического решения.

Зависимость (8.7), выраженная в процентах и обозначенная через Δ , построена на рис. 10 (пунктирная линия).

После рассмотрения линейных уравнений было проведено сопоставление асимптотических решений с точными для некоторых нелинейных уравнений, точные решения которых были получены численным интегрированием. При этом асимптотические решения изображались пунктирными линиями, а численные решения — сплошными. На рис. 4 представлены асимптотические и точные решения уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1 + 0,05t}{1 + 0,01t} y - \frac{1 + 0,2t}{1 + 0,1t} y^3 = 0$$

для

$$y|_{t=0} = 0,5, \quad y'|_{t=0} = 0,45 \quad \text{при} \quad \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

Результаты расчетов для $y|_{t=0} = 0,5$ обозначены цифрой 1, а для $y|_{t=0} = 0,45$ — цифрой 2.

На рис. 6—8 представлены точные и асимптотические решения уравнения

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g(t) \sin \alpha = 0 \quad (8.8)$$

соответственно для $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0,75$ град/сек, $0,79$ град/сек

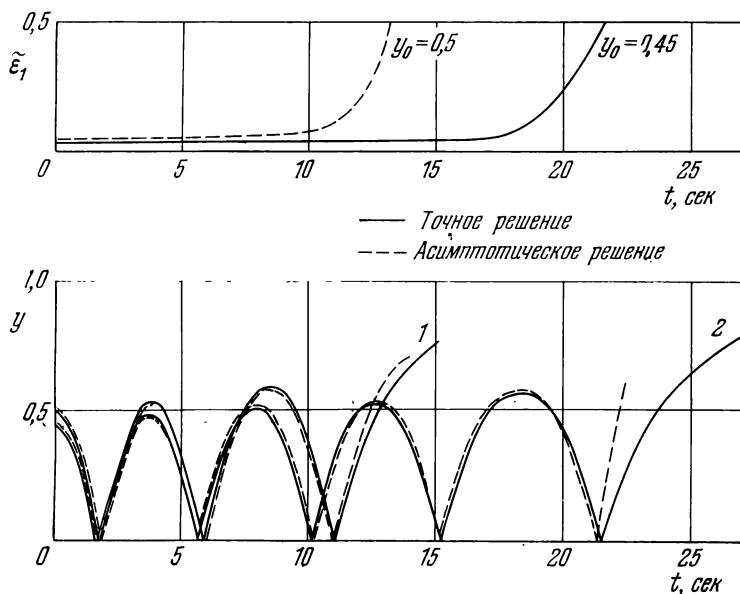


Рис. 4.

и $1,0$ град/сек при $\alpha|_{t=0} = 0$. График функции $g(t)$ изображен на рис. 5. Видно, что эта функция изменяется достаточно быстро. Уравнение (8.8) описывает плоское возмущенное движение летательного аппарата при входе в атмосферу. Вначале летательный аппарат вращается, а затем, по мере возрастания t , вращение переходит в колебания. Так как в окрестности перехода вращения в коле-

бания $\tilde{\epsilon}_1 \gg 1$, то сравнение асимптотических решений с точными производилось отдельно для вращения и отдельно для колебаний. Результаты расчетов для колеба-

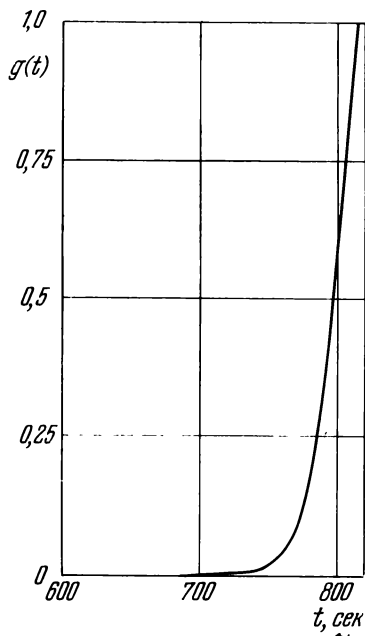


Рис. 5.

тельного движения обозначены цифрами 3—5, а для вращательного — цифрами 6—8. Видно, что асимптотические решения очень точны как при вращательном, так и при колебательном движении. Точность их нарушается лишь на малом интервале времени, расположенном в окрестности точки перехода вращения в колебания.

Паконец, на рис. 9 приведены точное решение, мгновенные период T и амплитуда колебаний $\alpha_{\max}$, определенные с помощью асимптотических решений, для уравнения

$$\frac{d\alpha}{dt} + \left[\frac{r_1^2}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} + g(t) \right] \sin \alpha = 0 \quad (8.9)$$

при $r_1 = 1$ град/сек, $\alpha|_{t=0} = 0$ и $\frac{d\alpha}{dt}|_{t=0} = 0,79$ град/сек.

В качестве $g(t)$ здесь была взята та же функция, что и в (8.8). Уравнение (8.9) описывает пространственное движение летательного аппарата при входе в атмосферу в случае, когда отделение летательного аппарата от ракеты-носителя происходит на прямолинейном участке траектории непосредственно перед входом в атмосферу (участок DE на рис. 1). Результаты расчетов для этого случая обозначены цифрой 9.

На рис. 4 и 6—9, помимо решений уравнений, построена зависимость параметра $\tilde{\epsilon}_1$ от t . На этих рисунках четко видно, что возрастание погрешности асимптотических

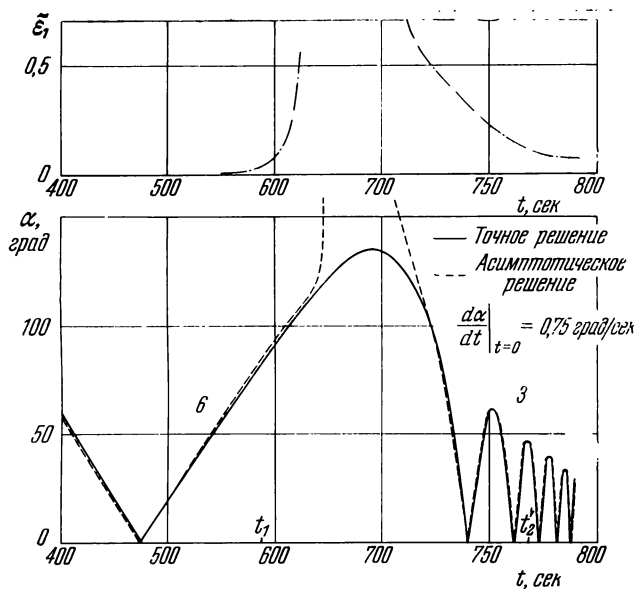


Рис. 6.

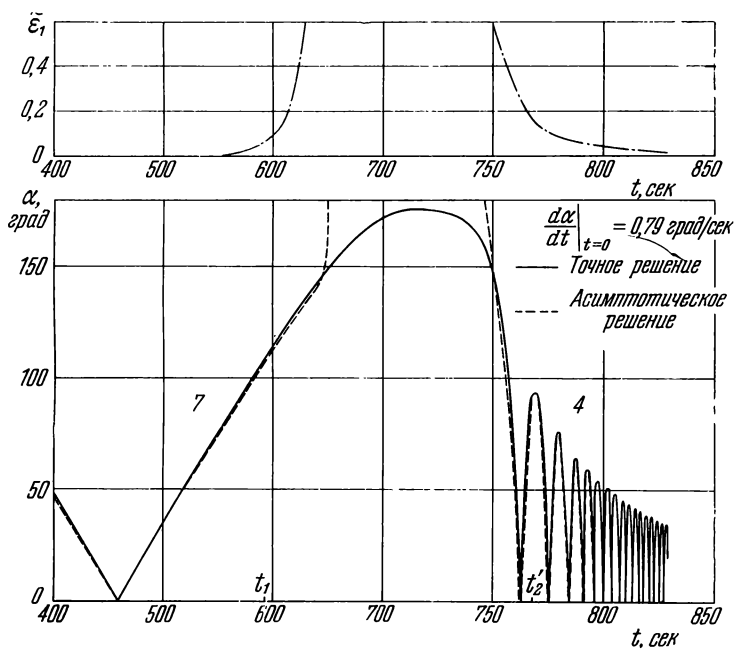


Рис. 7.

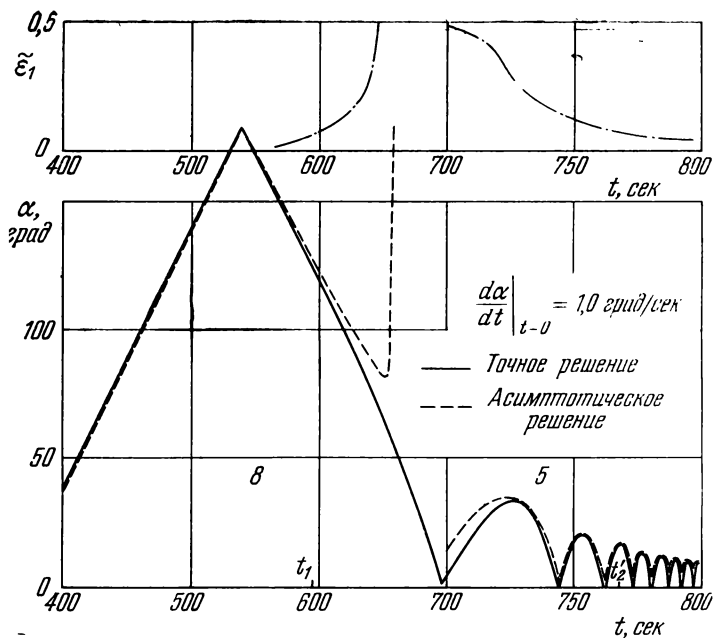


Рис. 8.

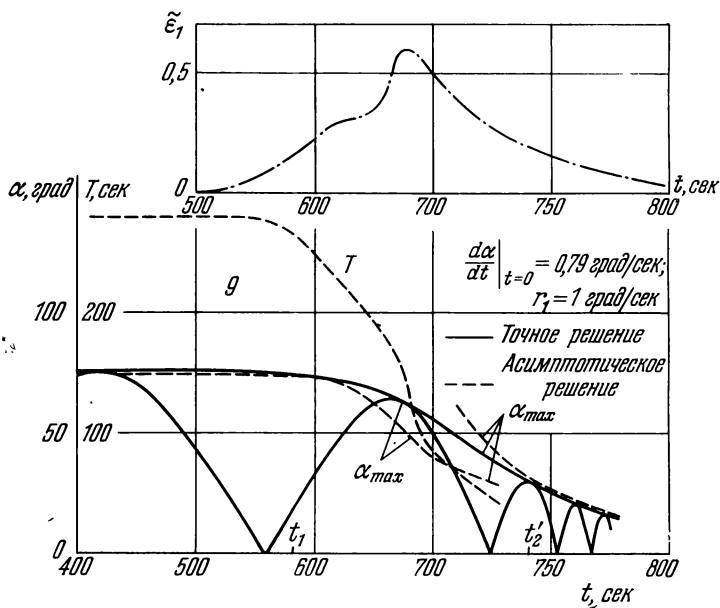


Рис. 9.

решений всегда происходит одновременно с возрастанием этого параметра.

Для каждого из рассмотренных девяти случаев были получены зависимости относительной погрешности Δ асимптотических решений от $\tilde{\epsilon}_1$. Относительная погрешность определялась как отношение абсолютной ошибки к значению мгновенной амплитуды колебаний, определенной с

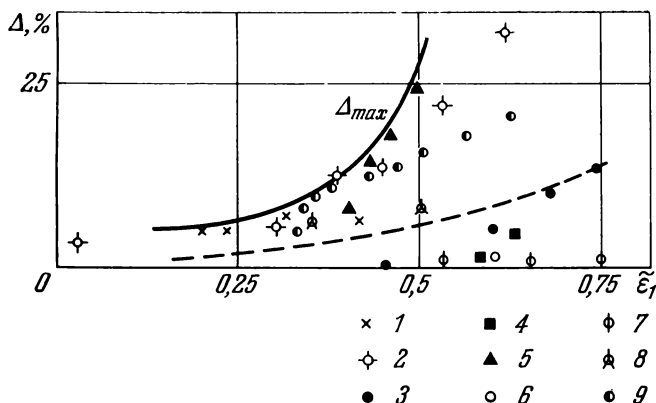


Рис. 10.

помощью асимптотических решений, в соответствующий момент времени. При вращательном движении в качестве амплитуды колебаний было взято значение, равное 180° . Полученные зависимости Δ от $\tilde{\epsilon}_1$ приведены на рис. 10.

Так как получившиеся зависимости для разных уравнений отличаются друг от друга, то была построена огибающая этих кривых $\Delta_{\max}$, с помощью которой в каждом конкретном случае по известному значению $\tilde{\epsilon}_1$ можно оценить максимально возможное значение погрешности. Из вида этой кривой следует, что если

$$\tilde{\epsilon}_1 \leq 0,35, \quad (8.10)$$

то погрешность асимптотических решений не превосходит 10%.

На рис. 4 и 6—8 хорошо видно, что в окрестности тех моментов времени, когда изменяется характер возмущен-

ного движения, асимптотические решения становятся неточными. Это объясняется тем, что при изменении характера движения мгновенная частота обращается в нуль (это будет видно далее) и условия применимости асимптотических решений (8.4) заведомо не выполняются. Если движение необходимо исследовать как до момента изменения характера движения, так и после, то в окрестности этого момента времени асимптотические решения должны быть уточнены. Весьма эффективно это можно сделать с помощью численного интегрирования уравнений движения, так как интервал времени, на котором нужно уточнять асимптотические решения, невелик.

Заметим, что при достаточно малом ε асимптотические решения всегда указывают несколько меньшее значение для t_* — момента изменения характера возмущенного движения, чем это получается в точных решениях. Как уже указывалось, в этот момент мгновенная частота $\omega(\tau)$, определенная с помощью асимптотических решений, обращается в нуль. Если предположить, что при некотором $t_{*1} < t_*$ в точных решениях уже произошло изменение характера возмущенного движения, то при $t_{*1} < t < t_*$ асимптотические решения будут заведомо неточны несмотря на то, что при достаточно малом ε условие их применимости (8.10) будет выполняться. Это свойство асимптотических решений хорошо видно на рис. 4, где колебательное движение переходит в аperiодическое, а также на рис. 6—8, где вращение переходит в колебательное движение: пунктирные кривые на этих рисунках всегда указывают момент перехода несколько раньше, чем сплошные.

Основываясь на этом свойстве асимптотических решений, можно получать условия сохранения характера возмущенного движения без уточнения асимптотических решений в окрестности точки перехода.

§ 9. МЕТОД УСКОРЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В предыдущих параграфах задача отыскания асимптотических решений уравнений движения была сведена к интегрированию системы уравнений, состоящих из условий периодичности. Если все интегралы, которые необхо-

димо вычислять при определении осредненных величин, входящих в эти уравнения, удастся получить аналитически, то последующее численное интегрирование этих уравнений оказывается довольно простой задачей, так как решения их не содержат быстро изменяющихся компонент. В этом случае использование асимптотических решений позволяет примерно в $1/\varepsilon$ раз уменьшить необходимое для расчетов машинное время. Однако при достаточно сложной зависимости аэродинамических характеристик от угла атаки в общем случае пространственного движения входящие в условия периодичности интегралы не вычисляются аналитически и их приходится вычислять численно. А так как их приходится вычислять на каждом шаге численного интегрирования, то использование асимптотических решений оказывается эффективным способом сокращения времени вычислений лишь в тех случаях, когда условие применимости асимптотического метода выполняется с достаточно большим запасом. Для этих случаев, когда условие применимости асимптотического метода выполняется с запасом, в работе [39] (см. также [25]) предложен метод определения основных характеристик асимптотических решений, не требующий вычисления интегралов, входящих в условия периодичности, и вследствие этого упрощающий программирование.

Идея предложенного метода основывается на том, что существует бесчисленное множество дифференциальных уравнений, имеющих одни и те же асимптотические решения. Вследствие этого можно решать не соотношения для определения асимптотических решений, которые в рассматриваемом здесь случае предполагаются сложными, а другие дифференциальные уравнения, которые проще интегрируются, чем те, которые описывают движение летательного аппарата, и одновременно имеют те же самые зависимости $X_i(\tau)$, $\alpha_{\max}(\tau)$, $\alpha_{\min}(\tau)$ и т. д., что и уравнения движения.

Проиллюстрируем идею этого метода на примере системы уравнений следующего вида [25]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varepsilon X_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (9.1)$$

где ε — малый параметр.

Входящие в (9.1) функции $X_i(x_1, \dots, x_n, t)$ ($i = 1, \dots, n$) предполагаются периодическими функциями времени с периодом 2π . Система осредненных уравнений, определяющих асимптотические решения уравнений (9.1), записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_i(x_1, \dots, x_n, t) dt \\ (i &= 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Если интегралы, стоящие в правых частях этой системы уравнений, вычисляются аналитически, то проще всего при малом ε численно интегрировать эту систему уравнений. Если же это не так и одновременно ε достаточно мало, то более удобно при вычислении асимптотических решений исходить из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_i}{dt} &= \varepsilon X_i\left(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \frac{2\pi}{T}t\right) (T > 2\pi) \\ (i &= 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Эта система отличается от исходной системы уравнений (9.1) только тем, что ее правые части имеют по t период T , больший чем период правых частей уравнений (9.1). При применении асимптотического метода к этой системе уравнений осреднение производится по периоду T . Отметим равенство

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_i(x_1, \dots, x_n, t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T X_i\left(x_1, \dots, x_n, \frac{2\pi}{T}t\right) dt \\ (i &= 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Здесь переменные $x_1, \dots, x_n$ рассматриваются как параметры. При таком условии это равенство доказывается с помощью простой замены переменной интегрирования. Из равенства (9.4), очевидно, следует, что системы уравнений, определяющие асимптотические решения соответственно для уравнений (9.1) и (9.3), совпадают между собой. Это значит, что медленно изменяющиеся характери-

стики решений уравнений (9.1) и (9.3) также должны совпадать между собой. Это иллюстрируется на рис. 11. Таким образом, медленно изменяющиеся характеристики решений системы уравнений (9.1) можно получить с помощью численного интегрирования системы уравнений (9.3), решения которой изменяются медленнее решений уравнений (9.1). Если учесть, что нужный шаг численного интегрирования пропорционален периоду правых частей этих

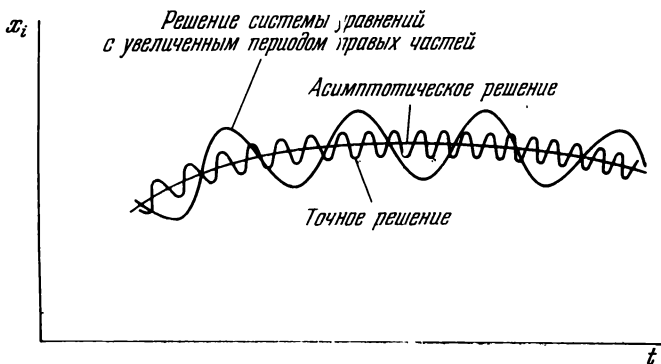


Рис. 11.

уравнений по t , то отсюда следует, что, интегрируя систему (9.3), можно получить выигрыш в необходимом для численного интегрирования времени в $T/2\pi$ раз. Однако следует помнить, что отношение $T/2\pi$ ограничено условием применимости асимптотического метода к уравнениям (9.3) с увеличенным периодом правых частей, и поэтому большой выигрыш во времени интегрирования может быть получен только в тех случаях, когда условие применимости асимптотического метода к исходным уравнениям (9.1) выполняется с большим запасом.

Изложим, далее, аналогичный метод вычисления медленно изменяющихся характеристик решения для уравнений (6.1), описывающих движение летательного аппарата при входе в атмосферу [39]. Как уже указывалось, система уравнений, описывающая движение летального аппарата при входе в атмосферу, может быть записана в

следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + \varepsilon f_z(x_1, x_2, \dots, \alpha) \frac{dx}{dt} + M_\Sigma(x_1, x_2, \dots, \alpha) &= 0, \\ \frac{dx_i}{dt} + \varepsilon X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (9.5)$$

Асимптотические решения этой системы определяются соотношениями [см. (7.17) и (7.8)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{dx}{dt} d\alpha \right) \Big|_{x_k = \text{const}} + \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} f_z \frac{d\alpha}{dt} d\alpha - \\ - \sum_{k=1}^6 \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} X_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{dx}{dt} \right) d\alpha = 0, \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} + \frac{\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} X_i \frac{dx}{d\alpha/dt} d\alpha}{\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{d\alpha/dt}} = 0 \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (9.7)$$

Входящая в эти формулы зависимость $\frac{d\alpha}{dt}$ от α определяется выражением [см. (7.4)]

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} M_\Sigma(x_1, x_2, \dots, \alpha) d\alpha = 0. \quad (9.8)$$

Будем далее вместо исходных уравнений (9.5) рассматривать несколько отличающуюся систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{\alpha}}{dt^2} + \varepsilon \left[f_z(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{\alpha}) - \frac{1}{k(\tau)} \frac{dk}{d\tau} \right] \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} + \\ + k^2(\tau) M_\Sigma(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_2, \tilde{\alpha}) &= 0, \\ \frac{d\tilde{x}_i}{dt} + \varepsilon X_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{\alpha}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (9.9)$$

Здесь $k(\tau)$ — некоторая функция от τ , о выборе которой будет сказано ниже. Волнистой чертой сверху обозначены неизвестные этой системы уравнений, а также далее будет обозначаться все остальные величины, характеризующие асимптотические решения этой системы. Установим связь между асимптотическими решениями систем уравнений (9.5) и (9.9). Для системы уравнений (9.9) соотношения (9.6) — (9.8), определяющие асимптотические решения, записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} d\tilde{\alpha} \right) \Big|_{\tilde{x}_k = \text{const}} + \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} \left(f_z - \frac{1}{k} \frac{dk}{d\tau} \right) \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} d\tilde{\alpha} - \\ - \sum_{k=1}^6 \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} X_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} \right) d\tilde{\alpha} = 0, \quad (9.10)$$

$$\frac{d\tilde{x}_i}{d\tau} + \frac{\int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} X_i \frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{\alpha}/dt}}{\int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} \frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{\alpha}/dt}} = 0 \quad (i = 1, \dots, 6), \quad (9.11)$$

$$\frac{i}{2} \left(\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} \right)^2 - k^2(\tau) \int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}_{\max}} M_{\Sigma}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{\alpha}) d\tilde{\alpha} = 0. \quad (9.12)$$

Равенства (9.8) и (9.12) можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\alpha}{dt} = A(\alpha, \alpha_{\max}, x_1, x_2, \dots), \quad (9.13)$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt} = k(\tau) A(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_{\max}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots), \quad (9.14)$$

где

$$A(\alpha, \alpha_{\max}, x_1, x_2, \dots) = \sqrt{2 \int_{\alpha}^{\alpha_{\max}} M_{\Sigma}(x_1, x_2, \dots, \alpha) d\alpha}.$$

Подставляя (9.14) в уравнение (9.10), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[k(\tau) \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} A(\tilde{\alpha}, \dots) d\tilde{\alpha} \right] \Big|_{\tilde{x}_k = \text{const}} + \\ + \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} \left(f_z - \frac{1}{k} \frac{dk}{dt} \right) k(\tau) A(\tilde{\alpha}, \dots) d\tilde{\alpha} - \\ - \sum_{k=1}^6 \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} X_k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} [k(\tau) A(\tilde{\alpha}, \dots)] d\tilde{\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Выполняя дифференцирование в первом слагаемом, приводя подобные члены и деля затем все уравнение на $k(\tau)$, преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} A(\tilde{\alpha}, \dots) d\tilde{\alpha} \right] \Big|_{\tilde{x}_k = \text{const}} + \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} f_z A(\tilde{\alpha}, \dots) d\tilde{\alpha} - \\ - \sum_{k=1}^6 \int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} X_k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} A(\tilde{\alpha}, \dots) d\tilde{\alpha} = 0. \quad (9.15) \end{aligned}$$

Уравнения (9.11) после подстановки в них выражения (9.14) для $\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}$ можно записать так:

$$\frac{d\tilde{x}_i}{d\tau} + \frac{\int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} X_i \frac{d\tilde{\alpha}}{A(\tilde{\alpha}, \dots)}}{\int_{\tilde{\alpha}_{\min}}^{\tilde{\alpha}_{\max}} \frac{d\tilde{\alpha}}{A(\tilde{\alpha}, \dots)}} = 0 \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (9.16)$$

Если иметь в виду равенство (9.13), то сразу видно, что системы уравнений (9.15) и (9.16) лишь волнистой чертой

над неизвестными отличаются от системы уравнений (9.6) и (9.7).

Из равенств (7.5) видно также, что функции $\tilde{\alpha}_{\max}$ и $\tilde{\alpha}_{\min}$ связаны между собой точно так же, как и функции $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$. Все это позволяет заключить, что

$$\tilde{\alpha}_{\max}(\tau) = \alpha_{\max}(\tau), \quad \tilde{\alpha}_{\min}(\tau) = \alpha_{\min}(\tau), \quad \tilde{x}_i(\tau) = x_i(\tau) \\ (i = 1, \dots, 6). \quad (9.17)$$

Отметим еще равенства, связывающие мгновенные периоды колебаний и энергии для исходной системы уравнений (9.5) и для модифицированной системы уравнений (9.9). Из равенств (7.5), (7.7) и (9.17) следует, что

$$\tilde{T}(\tau) = \frac{T(\tau)}{k(\tau)}, \quad \tilde{E}(\tau) = k(\tau) E(\tau). \quad (9.18)$$

Равенства (9.17) и (9.18) дают искомые связи и между решениями уравнений движения (9.5) и решениями модифицированной системы уравнений (9.9). Видно, что зависимости $\alpha_{\max}$ от времени и осредненные значения функций x_i у обеих систем совпадают, а мгновенный период колебаний и энергия для модифицированной системы уравнений соответственно в $1/k(\tau)$ и $k(\tau)$ раз больше этих величин для исходной системы уравнений. Таким образом, основные сведения о движении летательного аппарата при входе в атмосферу можно получить путем численного интегрирования модифицированной системы уравнений (9.9). Если функцию $k(\tau)$ выбрать меньшей единицы, то период колебательных компонент решения у модифицированной системы (9.9) будет в $1/k(\tau)$ раз больше периода колебательных компонент решения системы (9.5) и, следовательно, численное интегрирование системы уравнений (9.9) в $1/k(\tau)$ раз быстрее численного интегрирования системы уравнений (9.5).

Однако слишком малой функцию $k(\tau)$ выбирать нельзя, так как при этом нарушатся условия применимости асимптотического метода для модифицированной системы уравнений. Чтобы получить условие, ограничивающее значения функции $k(\tau)$ снизу, запишем второе из условий применимости асимптотических решений (8.6) для модифицированной системы уравнений. С учетом равенств

(9.17) и (9.18) это условие можно записать так:

$$\left| \frac{\varepsilon T(\tau)}{2k(\tau)} \frac{d}{d\tau} \ln |\alpha_{\max}(\tau) - \alpha_{\min}(\tau)| \right| \ll 1. \quad (9.19)$$

Здесь $T(\tau)$, $\alpha_{\max}(\tau)$ и $\alpha_{\min}(\tau)$ — величины, характеризующие асимптотические решения исходной системы уравнений (9.5). Величина выражения, стоящего в левой части этого неравенства, очевидно, определяет собой величину погрешности асимптотических решений для модифицированной системы уравнений и, следовательно, точность, с которой выполняются равенства (9.17) и (9.18). При заданной величине этого выражения функция $k(\tau)$ определяется однозначно.

Изложенный метод вычисления асимптотических решений с помощью численного интегрирования модифицированной системы уравнений (9.9) можно назвать *методом искусственного увеличения периода* [25] или *методом искусственного уменьшения жесткости* [39].

ПЛОСКОЕ ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ

§ 10. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПРОДОЛЬНОГО МОМЕНТА ОТ УГЛА АТАКИ

Исследование возмущенного движения летательных аппаратов при входе в атмосферу мы начнем с наиболее простого случая, когда оно происходит в плоскости траектории центра масс летательного аппарата. В этом случае $r = G = \lambda = 0$ и уравнение для угла атаки записывается в виде

$$\frac{d\alpha}{dt^2} + \varepsilon f_z(\tau, \alpha) \frac{dx}{dt} + M(\tau, \alpha) = 0. \quad (10.1)$$

Чтобы найти асимптотическое решение этого уравнения, необходимо найти решение эталонного уравнения (6.6) при $r_0 = G_0 = 0$

$$\omega^2 \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \varphi^2} + M(\tau, \alpha_0) = 0 \quad (10.2)$$

и определить входящие в него произвольные функции таким образом, чтобы период $\alpha_0(\tau, \varphi)$ не зависел от τ и выполнялось условие периодичности (7.21) при $G_0 = r_0 = 0$:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\omega(\tau) \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi \right] + \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} f_z(\tau, \alpha_0) \omega(\tau) \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi = 0. \quad (10.3)$$

Это соотношение можно записать также в виде

$$\omega(\tau) \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi = D e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \bar{f}_z(\tau) d\tau}, \quad (10.4)$$

где $\bar{f}_z(\tau)$ определяется формулой

$$\bar{f}_z(\tau) = \frac{\int_0^{\frac{T_\Phi}{2}} f_z(\tau, \alpha_0) \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \Phi} \right)^2 d\Phi}{\int_0^{\frac{T_\Phi}{2}} \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \Phi} \right)^2 d\Phi}. \quad (10.5)$$

Величина $\bar{f}_z(\tau)$ представляет собой осредненное значение функции $f_z(\tau, \alpha)$ при $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, где $\alpha_{\max}$ — амплитуда колебаний летательного аппарата. Вследствие этого правая часть равенства (10.4) зависит от $\alpha_{\max}$ и, вообще говоря, не может быть вычислена сразу. Но, как уже указывалось, в задаче о входе в атмосферу демпфирование существенно влияет лишь в плотных слоях атмосферы, где значения $\alpha_{\max}$ невелики. При малых же $\alpha_{\max}$ значения $\bar{f}_z(\tau)$ близки к $f_z(\tau, \alpha)|_{\alpha=0}$, так как эта функция является четной функцией. Поэтому можно положить

$$f_{zcp}(\tau) = f_z(\tau, \alpha)|_{\alpha=0} = f_z(\tau). \quad (10.6)$$

В настоящем параграфе будет подробно рассмотрен случай, когда

$$M(\tau, \alpha) = g(\tau) \sin \alpha. \quad (10.7)$$

При таком предположении, как уже указывалось, решение уравнения (10.2) выражается через эллиптические функции Якоби и анализ движения может быть выполнен наиболее полно. Без ограничения общности, так как это связано с произволом в выборе начала отсчета угла атаки, можно предполагать, что летательный аппарат статически устойчив при малых углах атаки. В этом случае

$$g(\tau) > 0. \quad (10.8)$$

При условии (10.7) эталонное уравнение имеет вид

$$\omega^2(\tau) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \Phi^2} + g(\tau) \sin \alpha = 0 \quad (10.9)$$

(индекс «0», который использовался для обозначения решений эталонного уравнения, здесь и всюду далее будет опускаться). Фазовая плоскость уравнения (10.8) периодична по α . Один период фазовой плоскости от $\alpha = -\pi$ до $\alpha = \pi$ построен на рис. 12. Область V на этом рисунке

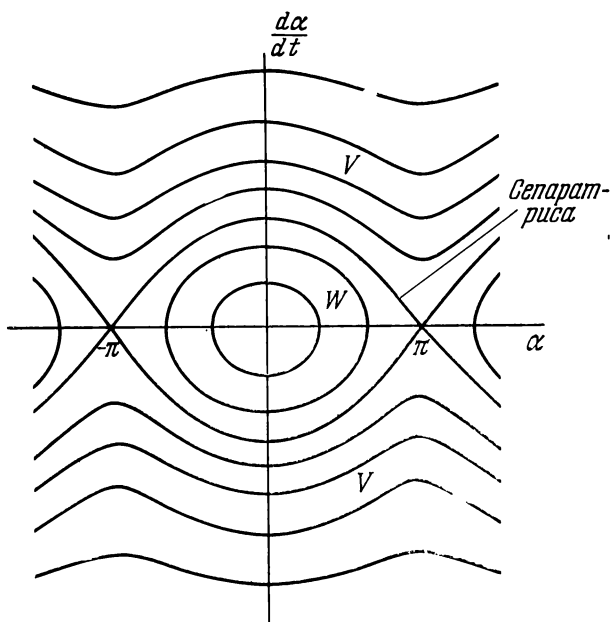


Рис. 12.

соответствует вращению летательного аппарата, а область W — колебаниям. Двигаясь вне атмосферы, летательный аппарат вращается, а затем, в процессе снижения, вращение переходит в колебательное движение. В связи с различием в характере этих движений решение эталонного уравнения (10.9) для вращения и колебательного движения целесообразно искать в различной форме. Остановимся сначала на расчете вращательного движения. Решение уравнения (10.9), соответствующее области V , имеет вид [2, 26]

$$\alpha(\tau, \varphi) = \pm 2 \operatorname{am} \{K[v(\tau)] \varphi, v(\tau)\}, \quad (10.10)$$

где $K(v) = \int_0^1 \frac{d\xi}{V(1-\xi)(1-v\xi)}$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\text{am}[K(v)\varphi, v]$ — амплитуда Якоби, v — квадрат модуля.

График функции $K(v)$ изображен на рис. 13. Известно [17], что амплитуда Якоби обладает следующим свойством:

$$\text{am}[u + 2K(v), v] = \pi + \text{am}(u, v). \quad (10.11)$$

Руководствуясь этим свойством, произвольная функция в выражении (10.10) для $\alpha(\tau, \varphi)$, которая является коэффициентом при φ , положена равной $K(v)$. При этом очевидно, что «период» T_φ в равенстве (6.8) не будет зависеть от τ и равен двум.

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} \text{an}(\varphi, v) &= \\ &= 2\text{am}[K(v)\varphi, v] - \pi\varphi. \end{aligned} \quad (10.12)$$

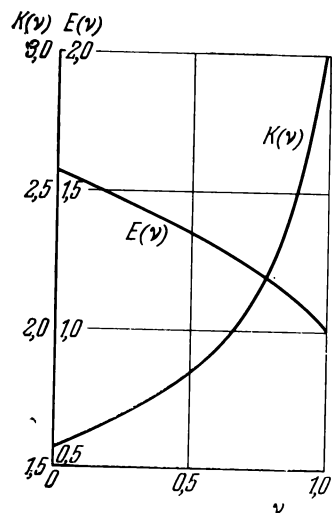


Рис. 13.

В силу (10.11) эта функция является периодической функцией φ с периодом $T_\varphi = 2$. График этой функции при $0 \leq \varphi \leq 2$ и различных значениях v изображен на рис. 14.

Из равенства (10.12) и этого графика следует, что амплитуда Якоби представляет собой результат наложения колеблющейся поправки на линейную функцию от переменной φ .

Произвольными функциями, подлежащими определению, являются функция $\omega(\tau)$, входящая в эталонное уравнение (10.9), и функция $v(\tau)$, входящая в решение (10.10) этого уравнения. Чтобы получить соотношения для определения этих функций, необходимо подставить выражение (10.10) в эталонное уравнение и в условие периодичности

(10.4). Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \pm 2 K(v) \operatorname{dn} u, \quad (10.13)$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} = \mp 2 K^2(v) v \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \quad [u = K(v) \varphi] \quad (10.14)$$

(здесь $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ — эллиптические функции Якоби). График функции $\operatorname{dn} [K(v) \varphi, v]$, которая необходима для

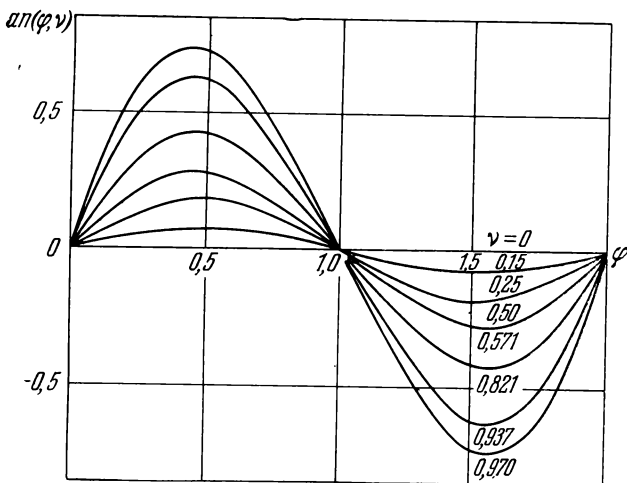


Рис. 14.

расчета производной $\frac{d\alpha}{dt}$ и которая по φ имеет период, равный двум, изображен на рис. 15 при $0 \leq \varphi \leq 2$ и различных значениях v . Под v и ω здесь и далее следует подразумевать $v(\tau)$ и $\omega(\tau)$.

Подставляя (10.10) и (10.14) в уравнение (10.9), получаем:

$$\mp 2\omega^2 K^2(v) \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \pm g(\tau) \sin 2 \operatorname{am} u = 0, \\ \sin 2 \operatorname{am} u = 2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u,$$

откуда

$$\omega(\tau) = \frac{1}{K[v(\tau)]} \sqrt{\frac{g(\tau)}{v(\tau)}}. \quad (10.15)$$

Отметим, что в силу (10.8), для того чтобы функция $\omega(\tau)$ была действительной величиной, функция $\nu(\tau)$ должна быть положительна. Таким образом, одно соотношение между произвольными функциями $\nu(\tau)$ и $\omega(\tau)$ нами получено. Чтобы получить второе соотношение, обратимся

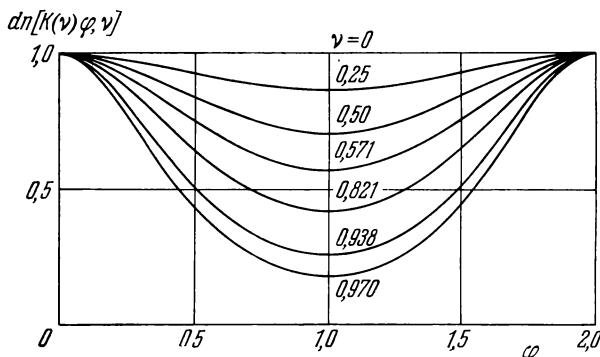


Рис. 15.

к условию периодичности. Подставляя (10.13) в (10.4), получаем:

$$4\omega K(\nu) E(\nu) = D e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}, \quad (10.16)$$

где

$$E(\nu) = K(\nu) \int_0^1 dn^2[K(\nu)\varphi, \nu] d\varphi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\nu\xi^2}{1-\xi^2}} d\xi$$

$$(\xi = \operatorname{sn} u). \quad (10.16a)$$

График функции $E(\nu)$, которая представляет собой полный эллиптический интеграл второго рода, построен на рис. 13. Исключив из соотношений (10.15) и (10.16) произведение $\omega K(\nu)$, получим уравнение для определения функции $\nu(\tau)$:

$$\frac{\sqrt{\nu(\tau)}}{4E[\nu(\tau)]} = \frac{\sqrt{g(\tau)}}{D} e^{\int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} = \beta(\tau). \quad (10.17)$$

Это уравнение следует решать графически. График для определения функции $v(\tau)$ по известным значениям функции $\beta(\tau)$ построен на рис. 16. После того как функция $v(\tau)$ определена, функция $\omega(\tau)$ легко может быть вычислена с помощью формулы (10.15).

Приведем выражения для функций $\alpha(t)$ и $\frac{dx}{dt}$. Пользуясь (6.18), (10.10), (10.12) и (10.13), выражения для этих функций можно записать в виде

$$\alpha(t) = \pm \{ \pi \varphi(t) + a n [\varphi(t), v(\tau)] \}, \quad (10.18)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \pm \frac{D}{2E[v(\tau)]} e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_2(\tau) d\tau} \operatorname{dn} \{ K[v(\tau)] \varphi(t), v(\tau) \}, \quad (10.19)$$

где $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \omega(\tau) dt$, $\tau = \epsilon t$, а φ_0 — произвольная постоянная. Знак в этих формулах следует брать такой же, как и у $\frac{d\alpha}{dt}$ при $t = t_0$.

Остановимся, далее, на определении констант D и φ_0 с помощью условий, которые выполняются в момент отделения летательного аппарата, предназначенного для спуска на Землю, от летательного аппарата носителя. Примем, что эти условия имеют вид

$$\alpha \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0} = \omega_{z_0}. \quad (10.20)$$

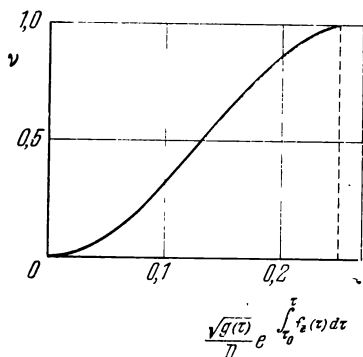


Рис. 16.

В этом случае из формулы (10.18) следует, что

$$\varphi_0 = 0. \quad (10.21)$$

Определим значение функции $v(\tau)$ при $t = t_0$. Воспользуемся для этого соотношением, определяющим поведе-

ние интегральных кривых в фазовой плоскости. Чтобы получить такое соотношение, умножим уравнение (10.9) на $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$ и проинтегрируем по φ . Будем иметь:

$$\frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right)^2 + 2g(\tau) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = E_c(\tau), \quad (10.22)$$

где $E_c(\tau)$ — полная энергия системы. Учитывая равенства (6.18), (10.13) и (10.15), это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2g(\tau) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2g(\tau)}{v(\tau)}. \quad (10.23)$$

Полагая здесь $t = t_0$ и пользуясь (10.20), получаем:

$$v_0 = \frac{4g_0}{\omega_{20}^2} \quad (10.24)$$

(индексом «0» обозначены значения функций при $t = t_0$). Используя, далее, выражение (10.19) для $\frac{d\alpha}{dt}$ при $t = t_0$, с учетом того, что $\varphi_0 = 0$, получаем следующее выражение для D :

$$D = 2E(v_0) |\omega_{20}|. \quad (10.25)$$

Заметим, что представляющий несколько меньший практический интерес случай более общих начальных условий, чем (10.20), когда $\alpha|_{t=t_0}$ отлична от нуля, может быть рассмотрен аналогично.

В случаях, когда отделение происходит на большой высоте, значение v_0 из-за малости величины g_0 , которая пропорциональна скоростному напору, оказывается во много раз меньше единицы. Для таких случаев выражение (10.25) может быть взято в форме

$$D \approx \pi |\omega_{20}|. \quad (10.26)$$

Погрешность этой формулы можно легко оценить с помощью графика на рис. 13 для $E(v)$. Случай малых значений v_0 представляет большой практический интерес.

Теперь нами получены все формулы, необходимые для расчета вращательного движения.

Перейдем к анализу полученных формул. Прежде всего заметим, что полученное нами решение является действительным лишь до тех пор, пока значения функции $\nu(\tau)$ не превосходят единицы. Это видно сразу из выражений (10.10) и (10.16 а) для полных эллиптических интегралов $K(\nu)$ и $E(\nu)$, от которых зависит рассматриваемое асимптотическое решение. Так что выполнение неравенства

$$\nu(\tau) < 1 \quad (10.27)$$

является условием существования вращательного движения.

Предположим, что условие (10.27) при $t = t_0$ выполняется, что в большинстве случаев из-за малых значений g_0 [см. (10.24)] имеет место. В этом случае сразу после отделения от носителя летательный аппарат вращается. При снижении летательного аппарата вследствие роста скоростного напора функция $g(\tau)$ быстро возрастает. Одновременно с этим растет и функция $\beta(\tau)$. Из графика на рис. 16 видно, что когда $\beta(\tau)$ достигает значения 0,25, то функция $\nu(\tau)$ достигает единицы. Так что если непосредственно после отделения вращательное движение имело место, то оно будет продолжаться лишь до момента времени t_* , определяемого уравнением

$$\beta(t_*) = \frac{1}{4}. \quad (10.28)$$

Это уравнение для случаев, когда $\nu_0 \ll 1$, можно переписать в виде

$$\frac{\pi}{4} |\omega_{z0}| = \sqrt{g(\tau_*)} e^{\tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_*} f_z(\tau) d\tau. \quad (10.29)$$

Явление перехода вращательного движения в колебательное может быть весьма наглядно проиллюстрировано с помощью квазистатического рассмотрения фазовой плоскости. Покажем прежде всего, что когда $\nu(\tau)$ стремится к единице, то изображающая точка на фазовой плоскости (рис. 12) стремится к сепаратрисе — границе областей V и W . В силу того, что сепаратриса проходит через

точку $\left(\frac{d\alpha}{dt} = 0, \alpha = \pi\right)$, ее уравнение имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2g(\tau) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2g(\tau). \quad (10.30)$$

Очевидно, что чем дальше в области V изображающая точка находится от сепаратрисы, тем большее значение

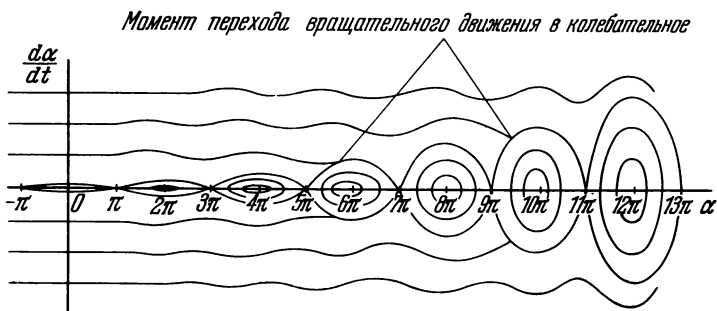


Рис. 17.

должна иметь правая часть равенства (10.30). Сопоставляя между собой равенства (10.23) и (10.30), видим, что когда функция $v(\tau)$ увеличивается, изображающая точка приближается к сепаратрисе и достигает ее в момент времени t_* , когда выполняется равенство (10.28) или (10.29). Если при $t = t_0$ функция $g(\tau)$ очень мала, то также малы и размеры области W , так что фазовая плоскость в основном состоит из интегральных кривых, соответствующих вращению (рис. 17). По мере входа в атмосферу, в связи с ростом $g(\tau)$ размеры области W увеличиваются и при $t \approx t_*$ расширяющаяся область W «захватывает» изображающую точку, после чего вращательное движение переходит в колебательное.

Нетрудно дать интерпретацию сомножителям, стоящим в правой части равенства (10.29). Первый сомножитель учитывает увеличение области W , связанное с возрастанием скоростного напора, а второй сомножитель учитывает изменение угловой скорости, обусловленное демпфированием.

Оценим, далее, изменение $\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\max}$ — максимального за время каждого оборота значения величины угловой скорости во время вращательного движения. Пользуясь тем, что функция $v(\tau)$ принимает лишь положительные значения, при которых функция $\ln [K(v)\varphi, v]$ не превосходит единицы, можно написать [см. (10.19)]:

$$\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\max} = |\omega_{z0}| \frac{E(v_0)}{E[v(\tau)]} e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}.$$

Вследствие того, что обычно вращение имеет место на большой высоте, где скоростной напор очень мал, экспоненциальный множитель в этой формуле близок к единице. Учитывая это и имея в виду, что $E(1) = 1$ (см. рис. 13), можно заключить, что к моменту прекращения вращательного движения величина $\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\max}$ увеличивается в $E(v_0)$ раз. Если v_0 мало, то увеличение составляет величину порядка 50%. Интересно отметить, что, несмотря на это, время $T(\tau)$, за которое летательный аппарат совершает полный оборот, в связи с одновременным уменьшением минимальных значений угловой скорости по мере входа в атмосферу увеличивается. Это сразу видно из формулы для $T(\tau)$, которую с помощью (6.19), (10.16) и (10.25) можно записать в виде

$$T(\tau) = \frac{4K[v(\tau)] E[v(\tau)]}{|\omega_{z0}| E(v_0)} e^{\int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau},$$

и графиков на рис. 13 для $K(v)$ и $E(v)$. Отметим, что при $v(\tau) = 1$ в момент перехода вращательного движения в колебательное мгновенная частота $\omega(\tau) = \frac{2}{T(\tau)}$ обращается в нуль. В окрестности момента перехода асимптотические решения, строго говоря, должны быть уточнены. Этот вопрос будет рассмотрен в следующих параграфах настоящей главы. О точности асимптотических решений для вращательного движения можно судить с помощью графиков на рис. 6—8. Видно, что, за исключением

небольшой окрестности точек, в которых происходит изменение характера возмущенного движения, совпадение между точными и асимптотическими решениями достаточно хорошее.

Перейдем к расчету колебательного движения. В этом случае решение эталонного уравнения (10.9) следует искать в виде [2, 26]

$$\alpha(\tau, \varphi) = 2 \arcsin \{ \sqrt{v(\tau)} \operatorname{sn} [K(v(\tau)) \varphi, v(\tau)] \}. \quad (10.31)$$

Коэффициент при φ в этой формуле, так же как и в выражении (10.10), выбран так, чтобы период этой функции по φ не зависел бы от τ . При таком определении этого коэффициента функция (10.31) имеет по φ период, равный четырем. Так же как и ранее, функциями, подлежащими определению, являются $\omega(\tau)$ и $v(\tau)$. Для того чтобы получить соотношения для определения этих функций, необходимо подставить выражение (10.31) в эталонное уравнение (10.9) и в условие периодичности (10.4). Имеем [17]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} &= 2K(v) \sqrt{v} \operatorname{cn} u, \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} &= -2K^2(v) \sqrt{v} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \end{aligned} \right\} \quad (10.32)$$

где $u = K(v) \varphi$.

После подстановки этих выражений в равенства (10.9) и (10.4) и несложных выкладок, для определения $v(\tau)$ и $\omega(\tau)$ получаются следующие выражения:

$$4[E(v) - (1-v)K(v)] = \frac{De^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt{g(\tau)}} = \frac{1}{\beta(\tau)}, \quad (10.33)$$

$$\omega(\tau) = \frac{\sqrt{g(\tau)}}{K[v(\tau)]}. \quad (10.34)$$

Если обозначить через $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\max}^{(\varphi)}$ соответственно амплитуды колебаний угла атаки и угловой скорости, то выражения для $\alpha(t)$ и $\frac{d\alpha}{dt}$ можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_{\max}(\tau) S[\varphi(t), \alpha_{\max}(\tau)], \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \alpha_{\max}^{(\varphi)}(\tau) S_{\varphi}[\varphi(t), \alpha_{\max}(\tau)], \end{aligned} \right\} \quad (10.35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} &= 2 \arcsin \sqrt{v}, \\ \alpha_{\max}^{(\varphi)} &= 2 \sqrt{g(\tau)} \sin \frac{\alpha_{\max}}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

а функции $S(\varphi, \alpha_{\max})$ и $S_{\varphi}(\varphi, \alpha_{\max})$ выражаются в силу (10.31) и (10.32) через $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{cn} u$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} S(\varphi, \alpha_{\max}) &= \frac{2 \arcsin \{ \sqrt{v} \operatorname{sn} [K(v) \varphi, v] \}}{2 \arcsin \sqrt{v}}, \\ S_{\varphi}(\varphi, \alpha_{\max}) &= \operatorname{cn} [K(v) \varphi, v]. \end{aligned} \right\} \quad (10.37)$$

Здесь v выражено через $\alpha_{\max}$ с помощью первого равенства (10.36). Графики функций $S(\varphi, \alpha_{\max})$ и $S_{\varphi}(\varphi, \alpha_{\max})$ построены на рис. 18 и 19. Из рисунков видно, что эти функции изменяются от -1 до 1 и при значениях $\alpha_{\max}$, не слишком близких к π , близки соответственно к $\sin \frac{\pi}{2} \varphi$ и $\cos \frac{\pi}{2} \varphi$.

Функция $\alpha_{\max}(\tau)$ определяется с помощью уравнения (10.33), где v надо предварительно выразить через $\alpha_{\max}$ с помощью первого равенства (10.36). График для определения $\alpha_{\max}(\tau)$, рассчитанный с помощью этого уравнения, изображен сплошной линией на рис. 20. После того как $\alpha_{\max}(\tau)$ известно, мгновенный период колебаний определяется с помощью формулы [см. (6.19) и (10.34)]

$$T(\tau) = \frac{4K(\alpha_{\max})}{\sqrt{g(\tau)}}, \quad (10.38)$$

где $K(\alpha_{\max}) = K[v(\alpha_{\max})]$. График этой функции построен на рис. 21.

Для того чтобы иметь возможность вычислить функции $\alpha_{\max}(\tau)$ и $T(\tau)$, необходимо знать значение константы D . Если в начальный момент известно $\alpha_{\max, 0}$ — начальное значение амплитуды колебаний, то это, очевидно, нетрудно сделать с помощью графика на рис. 20.

Таким образом, получены все соотношения, необходимые для расчета характеристик колебательного движения.

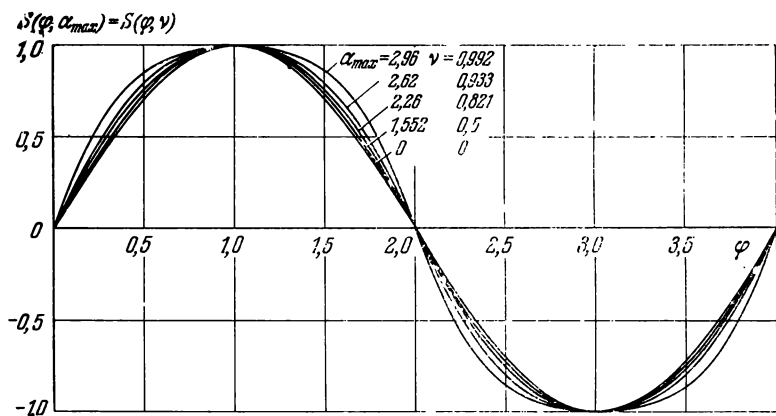


Рис. 18

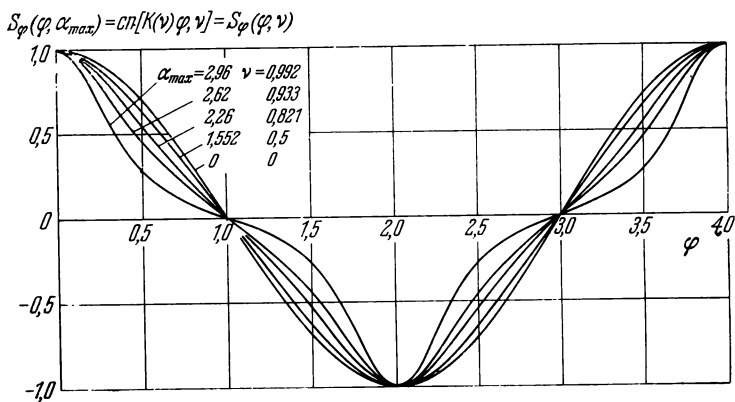


Рис. 19.

Перейдем теперь к анализу полученных формул. Первое, что следует отметить, заключается в том, что действительные решения уравнения (10.33) существуют лишь при $\beta(\tau) > 1/4$, когда функция $\nu(\tau)$, будучи определена из этого уравнения, оказывается меньше единицы. Вследствие этого полученное асимптотическое решение для колебательного движения можно рассматривать как продолжение асимптотического решения для вращения, которое, как указывалось выше, существует при $0 \leq \beta(\tau) \leq 1/4$.

Для того чтобы выяснить характер изменения основных характеристик колебательного движения $\alpha_{\max}(\tau)$ и $T(\tau)$ при снижении летательного аппарата

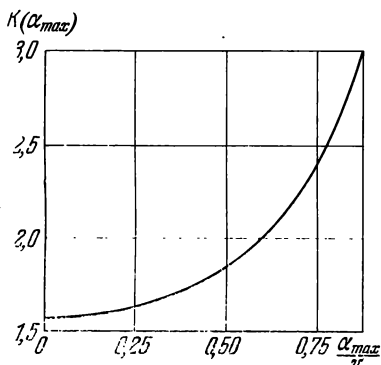


Рис. 21.

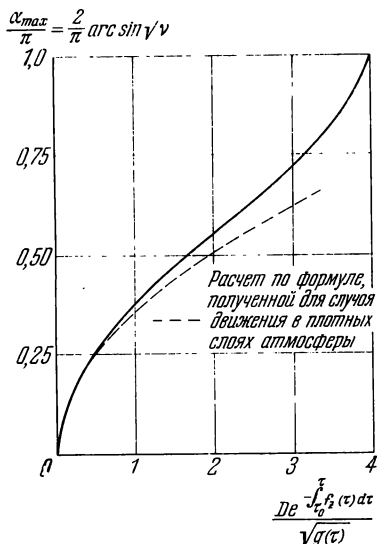


Рис. 20.

на участке траектории с положительным градиентом скоростного напора, необходимо рассмотреть полученные соотношения и графики для определения этих величин при возрастании функций $g(\tau)$ и $\beta(\tau)$. Заметим, что при $f_z(\tau) > 0$, функция $\beta^*(\tau)$ возрастает значительно быстрее, чем $g(\tau)$. Из графика на рис. 20 видно, что при снижении летательного аппарата амплитуда колебаний быстро

уменьшается, причем это, с одной стороны, происходит

благодаря росту скоростного напора, что является основным стабилизирующим фактором на больших высотах, а с другой стороны, благодаря демпфированию, роль которого становится существенной после попадания летательного аппарата в плотные слои атмосферы. Что касается изменения мгновенного периода колебаний $T(\tau)$, то из (10.38) и графика на рис. 20 видно, что при снижении на рассматриваемом участке траектории эта величина также уменьшается.

После попадания летательного аппарата на участок траектории с отрицательным градиентом скоростного напора, где $g(\tau)$ убывает, нестационарность режима полета стремится «раскачать» летательный аппарат и увеличить его период колебаний. Что же касается величины $T(\tau)$, то так как ее изменение определяется изменением функции $g(\tau)$, то она на этом участке траектории увеличивается.

Сравнение асимптотических решений с точными для случая колебательного движения приведено на рис. 6—8.

§ 11. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ НА ВСЕЙ ТРАЕКТОРИИ СНИЖЕНИЯ

В настоящем параграфе исследование плоского движения будет проведено для случая не малых значений ω_{z0} . Причем несмотря на то, что в окрестности перехода вращения в колебательное движение мгновенная частота колебаний обращается в нуль и условие применимости асимптотических решений (8.5) на малом интервале времени нарушается, исследование движения будет проведено с помощью непосредственного сопряжения асимптотических решений для вращательного и колебательного движений. Можно ожидать, что при таком подходе к этому вопросу правильные результаты получатся во всех тех случаях, когда переход изображающей точки из области V (рис. 12) в область W происходит вдали от положений неустойчивого равновесия $\alpha = \pm\pi$. В этом случае при не малых значениях ω_{z0} скорость движения изображающей точки вдоль фазовых траекторий много больше скорости движения изображающей точки поперек их, и по существу

основное предположение метода предыдущей главы выполняется. Заметим, что это никоим образом не противоречит результатам, полученным в § 8, так как условие применимости асимптотических решений получено в этом параграфе с помощью приближенных выражений (8.3) для производных $\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \varphi^2}$, которые в случае, когда $\omega(\tau)$ обращается в нуль, являются слишком грубыми. Поэтому в тех случаях, когда условие (8.5) не выполняется, для решения вопроса о применимости асимптотических решений необходимо специальное исследование. Такое исследование будет проведено в следующих параграфах.

При непосредственном сопряжении асимптотических решений для вращательного и колебательного движений константа D в равенствах (10.16) и (10.33) имеет одно и то же значение и может быть вычислена с помощью выражения (10.25) или выражения (10.26). При таком определении D параметры колебательного движения оказываются в силу равенства (10.33) связанными с величиной угловой скорости ω_{z0} , которую летательный аппарат приобретает в момент отделения от носителя. Наиболее важно знать эти параметры при движении летательного аппарата в плотных слоях атмосферы, где достигаются максимальные значения аэродинамических сил, действующих на летательный аппарат. Такие формулы для $\alpha_{\max}(\tau)$, $\alpha_{\max}^{(\varphi)}(\tau)$ и $T(\tau)$ можно получить, если в выражениях (10.33), (10.34) и (10.36) удерживать лишь главные члены при больших значениях функции $g(\tau)$. Из графика на рис. 20 и равенств (10.36) видно, что при возрастании $g(\tau)$ функции $\alpha_{\max}(\tau)$ и $v(\tau)$ стремятся к нулю. Поэтому при больших $g(\tau)$ можно пользоваться следующими приближенными формулами [17]:

$$\left. \begin{aligned} K(v) &\approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{v}{4} \right), \\ E(v) &\approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{v}{4} \right), \\ v &\approx \left(\frac{\alpha_{\max}}{2} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

Подставляя (11.1) в (10.33), получаем:

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} f_2(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} \sqrt{\frac{4D}{\pi}}, \quad (11.2)$$

$$\alpha_{\max}^{(\varphi)}(\tau) = \sqrt{g(\tau)} \alpha_{\max}(\tau), \quad (11.3)$$

$$T(\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{g(\tau)}}. \quad (11.4)$$

Отсюда видно, что последнее допущение позволяет весьма существенно упростить расчетные соотношения. Оно будет также использоваться в последующих главах. В связи с этим важным вопросом для дальнейшего исследования является определение момента, начиная с которого атмосферу можно считать достаточно плотной, чтобы пользоваться формулами (11.2) — (11.4). Этот вопрос, очевидно, можно исчерпывающе решить, если сопоставить зависимости $\alpha_{\max}$ от

$$\frac{De^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_2(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}},$$

которые даются точными соотношениями (10.33), (10.36) и приближенным соотношением (11.2). Такое сопоставление проведено на рис. 20, где наряду с точной зависимостью, изображенной сплошной линией, приведена пунктирной линией приближенная зависимость. Из этого рисунка видно, что погрешность формулы (11.2) становится совершенно несущественной, начиная с момента, когда значения $\alpha_{\max}(\tau)$ не превосходят одного радиана.

Если в соответствии с (10.26) положить в (11.2) $D = \pi\omega_{z_0}$, то формула (11.2) может быть переписана в виде

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} f_2(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} 2\sqrt{\omega_{z_0}}. \quad (11.5)$$

Ниже при исследовании общего случая пространственно-

го движения будет показано, что эта формула и аналогичные ей справедливы для достаточно широкого класса зависимостей продольного момента от угла атаки. К этому классу зависимостей $m_z(\alpha)$ относятся функции, имеющие достаточно большой линейный участок при малых α и не обращающиеся в нуль при $0 < \alpha < \pi$. Следует отметить, что формула (11.5) не зависит от угла атаки летательного аппарата на границе атмосферы. Как будет показано далее, этот результат справедлив лишь при не малых скоростях вращения летательного аппарата вне атмосферы.

§ 12. МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ УТОЧНЕННЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

В § 11 были получены формулы для исследования плоского возмущенного движения, основанные на использовании асимптотических решений на всей траектории снижения. Как уже указывалось во введении и в § 1, такие формулы применимы при выполнении условия (1.8). Для того чтобы дополнить анализ движения для случая произвольно малых значений ω_{z0} , когда условие (1.8) не выполняется, и, кроме того, строго показать возможность непосредственного сопряжения асимптотических решений для вращения и колебательного движения при не малых значениях ω_{z0} , как уже указывалось в § 1, на участке траектории EE' (см. рис. 1) следует использовать численные решения. В этом случае их легко получить, так как здесь при малых значениях ω_{z0} угол атаки изменяется достаточно медленно. Из рис. 6—8 видно, что вне этого участка траектории асимптотические решения описывают движение с весьма высокой точностью. Вследствие этого метод, который будет сейчас изложен, основан на сопряжении с помощью численного интегрирования решения для движения вне атмосферы с асимптотическими решениями в тот момент, когда они становятся достаточно точными. При этом будет предполагаться, что траектория летательного аппарата имеет внеатмосферный участок.

Разобьем траекторию снижения летательного аппарата на три участка: участок DE , расположенный вне атмосферы, где $t \leq t_1$, участок EE' , расположенный в атмосфере,

на котором асимптотические решения еще не точны ($t_1 \leq t \leq t_2$), и участок $E'G$, соответствующий $t \geq t_2$, на котором асимптотические решения описывают движение с достаточной точностью. Примерное представление о расположении этих участков можно получить с помощью рис. 6—8, где указаны моменты времени t_1 и t_2 .

При исследовании движения в конце первого и на всем втором участке будем пользоваться следующими допущениями:

$$\left. \begin{aligned} V &= \text{const}, \\ \theta &= \text{const}, \\ \rho(H) &\sim e^{-\lambda_1 H} \left(\lambda_1 \approx \frac{1}{7000} \text{ м}^{-1} \right), \\ f_z(\tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Здесь V — скорость полета, θ — угол наклона траектории, H — высота, $\rho(H)$ — плотность. В случае скорости полета порядка нескольких километров в секунду эти допущения обычно выполняются. При таких допущениях уравнение плоского движения можно записать в виде

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + g_0 e^{kt} F(\alpha) = 0. \quad (12.2)$$

Здесь $k = \lambda_1 V_1 \sin \theta_1$, $F(\alpha) = \frac{m_z(\alpha)}{m_z^x|_{\alpha=0}}$ (индексом «1» обозначены значения параметров движения на границе атмосферы при $t = t_1$). Входящую в (12.2) константу g_0 можно, очевидно, считать очень малой величиной.

Функция $F(\alpha)$ всюду в настоящей главе будет считаться не зависящей от времени. Это связано с тем, что при скорости полета порядка нескольких километров в секунду коэффициент момента m_z очень слабо зависит от чисел Re и M , которые являются функциями времени. Это допущение обычно выполняется для всего участка траектории, где скорость полета заметно превосходит скорость звука.

Определим конец первого участка (момент времени t_1) исходя из того, чтобы значение угла атаки при $t = t_1$,

определяемое с учетом действия атмосферы, отличалось на величину порядка одного градуса от его значения, определенного без учета действия атмосферы. Для проведения такой оценки примем

$$F(\alpha) = \sin \alpha \quad (12.3)$$

и будем решать уравнение (12.2) с помощью обычного метода последовательных приближений Пикара. Если в качестве первого приближения $\alpha^{(1)}$ взять решение, не учитывающее действия атмосферы,

$$\alpha^{(1)} = \alpha_0 + \Delta\theta + \omega_{z0}t, \quad (12.4)$$

подставить его во второе слагаемое уравнения (12.2) и затем два раза проинтегрировать это уравнение, пренебрегая величинами порядка g_0 , то для второго приближения получается следующее выражение:

$$\alpha^{(2)} = \alpha^{(1)} - \frac{g(t)}{k^2 + \omega_{z0}^2} \sin \left[\alpha^{(1)} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_{z0}}{k} \right]. \quad (12.5)$$

В (12.4) через $\Delta\theta$ обозначено полное изменение угла наклона траектории на ее внеатмосферном участке, то есть при $t_0 \leq t \leq t_1$. Второй член в этом выражении представляет собой поправку за счет действия атмосферы. Будем определять момент t_1 из условия

$$\frac{g(t_1)}{k^2 + \omega_{z0}^2} = \bar{g}_1. \quad (12.6)$$

Если положить $\bar{g}_1 = 0,01$, то ясно, что в этом случае при $t \leq t_1$ движение летательного аппарата будет несущественно отличаться от равномерного вращения. Формула (12.6) является точным определением употребляемого в книге термина «граница атмосферы». Заметим, что, как видно из этой формулы, положение границы атмосферы при $\omega_{z0} \ll k$ не зависит от величины ω_{z0} . При увеличении ω_{z0} граница атмосферы перемещается в сторону меньших высот.

Будем, таким образом, считать, что при $t = t_1$ известны значения α_1 и ω_1 — угла атаки и угловой скорости

летательного аппарата:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \omega_{z0} t_1 + \Delta\theta, \\ \omega_1 &= \omega_{z0}. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Заметим тут же, что если t_1 достаточно велико, то очень малого изменения ω_{z0} достаточно для того, чтобы угол атаки при $t = t_1$ мог принять любое значение, заключенное между πk и $\pi(k + 2)$, где k — целое число. Физически это соответствует тому, что при подходе к границе атмосферы летательный аппарат с одинаковой вероятностью может иметь любую ориентацию в пространстве.

На втором участке траектории под воздействием атмосферы при плоском движении происходит переход вращательного движения в колебательное и устанавливается ярко выраженный колебательный процесс, который с высокой точностью описывается асимптотическими решениями. Для исследования движения на этом участке введем новую независимую безразмерную переменную v :

$$v = \sqrt{k^2 + \omega_1^2} (t - t_1). \quad (12.8)$$

С помощью этой переменной уравнение (12.2) и начальные условия при $t = t_1$ преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dv^2} + \frac{g(t_1)}{k^2 + \omega_1^2} e^{k/\sqrt{k^2 + \omega_1^2} v} F(\alpha) &= 0, \\ \alpha \Big|_{v=0} &= \alpha_1, \quad \frac{d\alpha}{dv} \Big|_{v=0} = \frac{\omega_1}{\sqrt{k^2 + \omega_1^2}}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение безразмерный параметр

$$\mu_1 = \frac{\omega_1}{k}. \quad (12.9)$$

Этот параметр представляет собой не что иное, как отношение промежутка времени t_v , характерного для движения центра масс, к промежутку времени t_α , характерному для движения летательного аппарата относительно его центра масс. Это сразу видно из формул (1.2), если в качестве характерной величины Δr взять отрезок траекто-

рии, на котором плотность изменяется в e раз. В самом деле,

$$\Delta H = \frac{1}{\lambda_1}, \quad \Delta r = \frac{\Delta H}{\sin \theta_1},$$

откуда в силу того, что $k = \lambda_1 V_1 \sin \theta_1$, следует:

$$\frac{t_v}{t_\alpha} = \frac{\omega_1 \Delta r}{V_1} = \frac{\omega_1}{\lambda_1 V_1 \sin \theta_1} = \mu_1$$

(через ΔH обозначено изменение высоты, при котором плотность изменяется в e раз). Если теперь воспользоваться равенством (12.6) при $\bar{g}_1 = 0,01$, то задача становится зависящей лишь от параметров α_1 и μ_1 :

$$\frac{d\alpha}{dv^2} + \bar{g}_1 e^{-\frac{v}{\sqrt{1+\mu_1^2}}} F(\alpha) = 0, \quad (12.10)$$

$$\alpha \Big|_{v=0} = \alpha_1, \quad \frac{d\alpha}{dv} \Big|_{v=0} = \frac{\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}.$$

Отметим также равенство, имеющее место при $t_0 \leq t \leq t'_2$:

$$\frac{g[t(v)]}{k^2 + \omega_1^2} = \bar{g}_1 e^{-\frac{v}{\sqrt{1+\mu_1^2}}}. \quad (12.11)$$

Это равенство потребуется нам далее.

Как уже указывалось, решение задачи на втором участке следует производить с помощью численного интегрирования этого уравнения.

Как уже упоминалось, конец второго участка следует определить так, чтобы в последующие моменты времени колебательный процесс с достаточной точностью описывался асимптотическими решениями. Для того чтобы иметь возможность сделать это, преобразуем соотношения (10.2) и (10.4) асимптотического метода к более удобному для дальнейших приложений виду. Умножая уравнение (10.2) на $\frac{\partial x_0}{\partial \varphi}$ и интегрируя, будем иметь:

$$\frac{\omega^2(\tau)}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \int M(\tau, \alpha) d\alpha = E(\tau). \quad (12.12)$$

Это соотношение определяет поведение интегральных кривых в фазовой плоскости.

Если считать, что летательный аппарат симметричен относительно плоскости, от которой отсчитывается угол атаки, то $M(\tau, -\alpha) = -M(\tau, \alpha)$ и фазовая плоскость, описываемая уравнением (12.12), симметрична как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат. Будем предполагать, что это условие выполняется. При таком предположении начало отсчета φ можно выбрать так, что при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{T_\varphi}{2}$ производная $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}$ будет равняться нулю, а $|\alpha(t)|$ в соответствующие моменты времени будет равняться амплитуде колебаний $\alpha_{\max}(\tau)$.

Если в (10.4) при переходе от интегрирования по φ к интегрированию по α учесть эти замечания, то (10.4) нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$\int_0^{\alpha_{\max}(\tau)} \sqrt{2 \left[E(\tau) - \int_0^\alpha M(\tau, \eta) d\eta \right]} d\alpha = D e^{-\int_0^\tau z(\tau) d\tau} \quad (12.13)$$

(под τ здесь подразумевается его значение, соответствующее экстремуму). Всюду далее при выводе уточненных асимптотических формул условие периодичности будет использоваться именно в этой форме.

Запишем соотношение (12.13) применительно к уравнению (12.10). В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\alpha M(\tau, \eta) d\eta &= \bar{g}_1 e^{v_*/(1+\mu_1^2)} \Phi(\alpha), \\ E(\tau) &= \bar{g}_1 e^{v_*/(1+\mu_1^2)} \Phi[\alpha_{\max}(v_*)], \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

где $\Phi(\alpha) = \int_0^\alpha F(\alpha) d\alpha$, а через v_* обозначено значение v , соответствующее экстремуму. Так как в уравнении (12.10) демпфирующий член отсутствует, то (12.13) с учетом (12.14) записывается в виде

$$\bar{D} = \sqrt{\bar{g}_1 e^{v_*/(1+\mu_1^2)}} \int_0^{\alpha_{\max}} \sqrt{2 [\Phi(\alpha_{\max}) - \Phi(\alpha)]} d\alpha. \quad (12.15)$$

Вернемся теперь к вопросу об определении конца второго участка. Будем судить о точности асимптотических решений следующим образом. Если вычислять значения $\bar{D}$ для последовательных экстремумов зависимости $\alpha(v)$, получаемой при численном интегрировании уравнения (12.10), то ясно, что асимптотические решения будут точны, начиная с того момента, когда значения $\bar{D}$ перестанут изменяться при переходе от одного экстремума к другому. Очевидно, что о точности асимптотических решений можно судить также и по постоянству любой другой величины, однозначно связанной с $\bar{D}$. Именно так это и будет сделано далее.

Принимая этот способ определения конца второго участка, перейдем к решению задачи для третьего участка, где колебательный процесс описывается асимптотическими решениями. На этом участке, в отличие от двух предыдущих, при исследовании движения надо учитывать демпфирование и переменность параметров траектории центра масс летательного аппарата. В этом случае в качестве уравнения движения следует взять уравнение (10.1) при $M(\tau, \alpha) = g(\tau) F(\alpha)$. Для такого уравнения равенство (12.13) имеет вид

$$\int_0^{\alpha_{\max}} \sqrt{2[\Phi(\alpha_{\max}) - \Phi(\alpha)]} d\alpha = D \frac{e^{-\int_0^{\tau_2} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt{g(\tau)}}. \quad (12.16)$$

Установим связь между уже определенной константой $\bar{D}$ и константой D . Полагая $t = t_2 (v = v_2)$ в равенствах (12.15) и (12.16) и пользуясь равенством (12.11) также при $t = t_2$, получаем:

$$D = \sqrt{k^2 + \omega_1^2} \bar{D}. \quad (12.17)$$

Из равенства (12.16) видно, что при возрастании $g(\tau)$ амплитуда $\alpha_{\max}(\tau)$ убывает. Обозначим через t_2 такой момент времени, начиная с которого (то есть при $t \geq t_2$) амплитуду колебаний $\alpha_{\max}(\tau)$ можно считать малой величиной. Как показано в предыдущем параграфе, практически для этого достаточно, чтобы значения $\alpha_{\max}$ не пре-

восходили одного радиана. Считая константу D в равенстве (12.16) известной, упростим его так же, как это было сделано в § 11 для $t \geq t_2$. При малых $\alpha_{\max}$ и α имеем:

$$\Phi(\alpha_{\max}) = \frac{\alpha_{\max}^2}{2}, \quad \Phi(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2},$$

и равенство (12.16) после вычисления интеграла приводится к виду

$$\frac{\pi}{4} \alpha_{\max}^2(\tau) = D \frac{e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt{g(\tau)}}. \quad (12.18)$$

Эта формула, очевидно, отличается от равенства (11.2) лишь величиной константы D . Введем в рассмотрение величину

$$N_{\max}(\alpha_1, \mu_1) = \sqrt{\frac{D}{\pi}}. \quad (12.19)$$

С помощью (12.17) и (12.19) выражение (12.18) для амплитуды колебаний $\alpha_{\max}(\tau)$ при больших значениях $g(\tau)$, то есть в плотных слоях атмосферы, записывается в виде

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} 2 \sqrt[4]{k^2 + \omega_1^2} N_{\max}(\alpha_1, \mu_1). \quad (12.20)$$

Отсюда видно, что $\sqrt[4]{1 + \frac{1}{\mu_1^2}} N_{\max}$ является поправочным

коэффициентом к асимптотической формуле (11.5).

Коэффициент $N_{\max}$ является единственным множителем в (12.20), который зависит от формы зависимости продольного момента от угла атаки. Каждая аэродинамическая компоновка летательного аппарата при исследовании его движения вокруг центра масс характеризуется вполне определенной зависимостью $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$. Основное качественное отличие уточненной формулы (12.20) от формулы (11.5) заключается в том, что она учитывает

зависимость движения летательного аппарата в атмосфере от его ориентации на границе атмосферы. Из (12.19) и (12.15) имеем:

$$N_{\max}(\alpha_1, \mu_1) = \sqrt{\frac{V_{g1}}{\pi}} e^{v_*/1} \sqrt{1+\mu_1^2} S_1(\alpha_{\max}), \quad (12.21)$$

где

$$S_1(\alpha_{\max}) = \sqrt{\int_0^{\alpha_{\max}} \sqrt{2[\Phi(\alpha_{\max}) - \Phi(\alpha)]} d\alpha}$$

[через v_* и $\alpha_{\max}$ здесь соответственно обозначены абсцисса и ордината зависимости $\alpha(v)$, соответствующие экстремуму]. Ясно, что для интервала значений $v \geq v_2$, когда асимптотика точна, $\alpha_{\max} = \alpha(v_*)$.

Вернемся опять к вопросу об определении конца второго участка траектории. Из изложенного выше следует, что при фиксированных значениях α_1 и μ_1 правая часть формулы (12.21) должна вычисляться для нескольких последовательных значений $v = v_*$, при которых $\frac{d\alpha}{dv}$ обращается в нуль. Обозначим через $N_{\max,k}$ и $N_{\max,k+1}$ значения функции $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$ для двух последовательных экстремумов зависимости $\alpha(v)$. Тогда в качестве условия для определения момента прекращения численного интегрирования уравнения (12.10) можно взять следующее:

$$\left. \begin{aligned} |N_{\max,k+1} - N_{\max,k}| &\leq \Delta_0 + \Delta_1 N_{\max,k+1} \\ (\Delta_0 \approx 0,01, \Delta_1 \approx 0,05), \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

где Δ_0 и Δ_1 — константы, определяющиеся потребной точностью вычислений.

Ясно, что с помощью выбора констант Δ_0 и Δ_1 можно задать потребную величину как относительной, так и абсолютной погрешности в величине $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$.

В заключение настоящего параграфа заметим, что плоское движение рассчитывается значительно быстрее пространственного. Это имеет место, во-первых, в силу того, что уравнение движения на переходном участке EE' траектории (рис. 1) при плоском движении значительно проще, чем при пространственном, а во-вторых, из-за того,

что интеграл $S_1(\alpha_{\max})$ в формуле (12.21) входит в виде сомножителя, не зависящего от α_1 и μ_1 , вследствие чего его достаточно вычислить один раз для всех рассчитываемых вариантов решений. Время расчета коэффициента $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$ на ЭЦВМ типа М-20 для одной пары значений α_1 и μ_1 составляет 2—3 сек.

§ 13. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ В ПЛОТНЫХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ УТОЧНЕННЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Из изложенного выше следует, что изменение угла атаки в плотных слоях атмосферы описывается выражением

$$\alpha = \alpha_{\max}(\tau) \sin \left[\int \sqrt{g(\tau)} dt \right], \quad (13.1),$$

где $\alpha_{\max}(\tau)$ определяется формулой (12.20). Отсюда видно что для получения полного представления о возможных движениях летательного аппарата в плотных слоях атмосферы достаточно рассчитать коэффициент $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$ в формуле (12.20) для различных значений α_1 и μ_1 .

Такие расчеты были выполнены для трех зависимостей $F(\alpha)$. Эти зависимости изображены на рис. 22. Для каждой из этих зависимостей расчеты были выполнены примерно для 300 пар значений α_1 и μ_1 . Значения μ_1 брались в интервале от $\mu_1 = 0$ до $\mu_1 = 10$, при котором получающиеся значения $N_{\max}$ оказываются уже достаточно близкими к асимптотическому значению $N_{\max}^{(ac)}$, равному единице. При каждом значении μ_1 расчеты производились примерно при 30 значениях α_1 сначала с крупным шагом по α_1 , равным 20° , а затем в окрестности наибольшего из этих значений вычислялись значения $N_{\max}$ с мелким шагом, равным сначала 2° , а затем 1° . Это делалось для того, чтобы иметь возможность точно построить зависимость $N_{\max}$ от α_1 в окрестности получающихся максимумов. Результаты этих расчетов для вариантов зависимости $F(\alpha)$ № 1, 2 и 3 приводятся соответственно на рис. 23—24, 25—27 и 28—29. Первое, что обращает на себя внимание на этих рисунках,— это наличие на каждой кривой ярко выраженных экстремумов. Физически эти экстремумы соответствуют такому сочетанию значений α_1 и μ_1 ,

при котором летательный аппарат при переходе от вращательного движения к колебательному подходит к положению неустойчивого равновесия с очень малой угловой скоростью и надолго там задерживается («зависает»). При интерпретации движения на фазовой плоскости, изображенной на рис. 12, такие сочетания значений α_1 и μ_1 соответствуют переходу изображающей точки из области

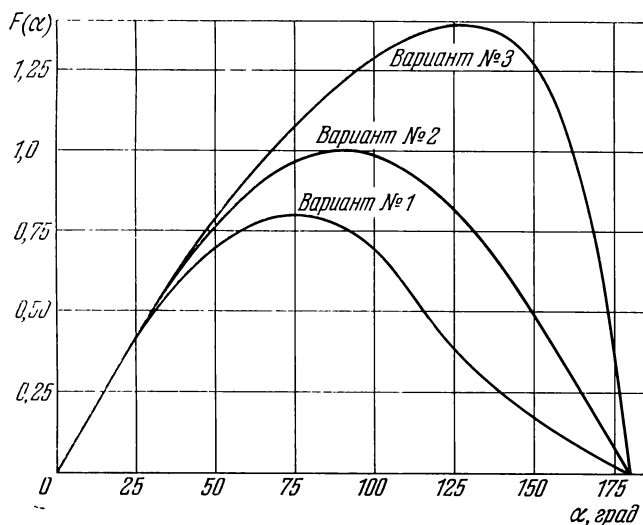


Рис. 22.

V в область W в окрестности значений $\alpha = \pm\pi$. Так как в окрестности этих значений α скорость движения изображающей точки вдоль фазовых траекторий при любых значениях ω_{z0} меньше или того же порядка, что и скорость движения изображающей точки поперек фазовых траекторий, то предположения, лежащие в основе асимптотического метода (см. главу II), в этом случае определенно не выполняются и естественно, что этот эффект никак не учитывается неутонченной асимптотической формулой (11.5).

Сопоставление кривых (рис. 25—27) для различных μ_1 показывает, что по мере увеличения μ_1 все точки кривой $N_{\max}$, кроме точек, лежащих в малой окрестности

максимума, быстро приближаются к $N_{\max}^{(ac)}$ — асимптотическому значению $N_{\max}$, которое не зависит от α_1 и изображено на этих рисунках пунктирной линией. Таким образом, целесообразность непосредственного сопряжения

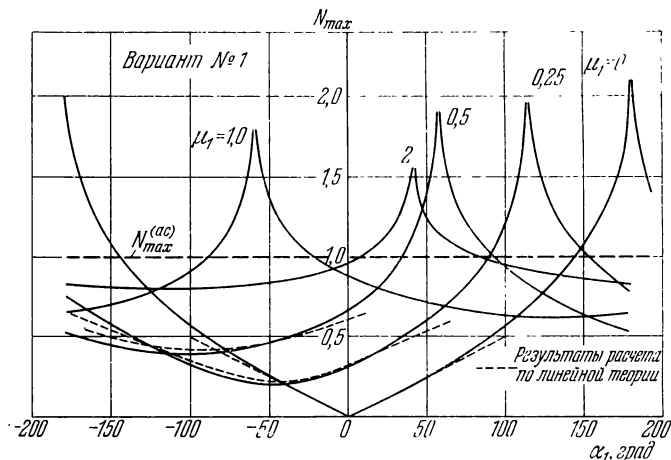


Рис. 23.

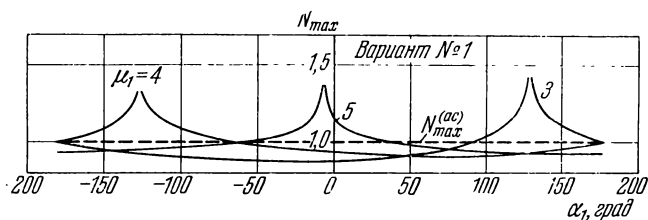


Рис. 24.

асимптотических решений для вращательного и колебательного движений несмотря на то, что в момент сопряжения мгновенная частота обращается в нуль, сомнений не вызывает. Это становится еще более ясным, если учесть, что при снижении летательный аппарат непрерывно подвергается атмосферным возмущениям, вследствие чего возможность длительного нахождения летательного аппарата

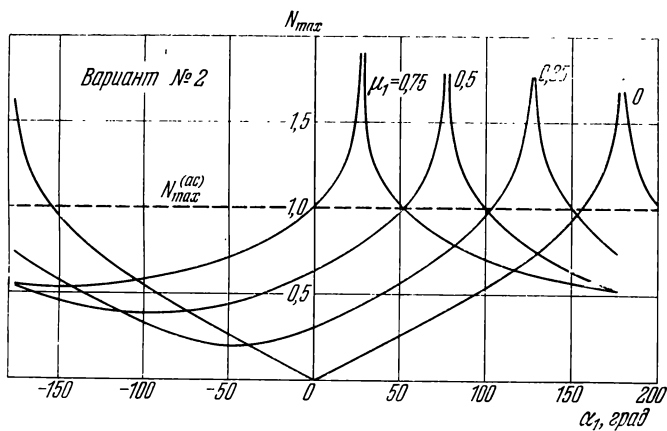


Рис. 25.

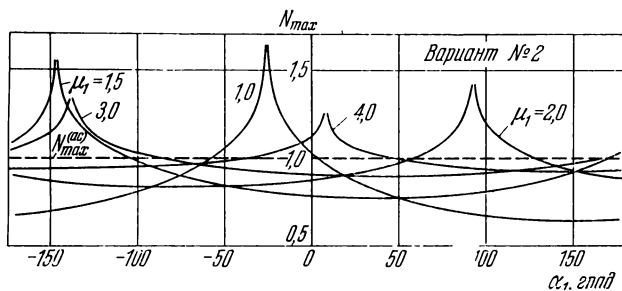


Рис. 26.

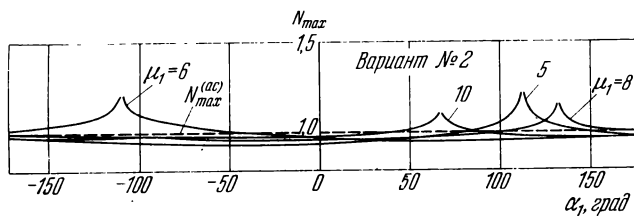


Рис. 27.

в окрестности неустойчивого положения равновесия $\alpha = 180^\circ$ и соответственно реальность пиков на рис. 23—29 маловероятны. Последнее замечание, разумеется, справедливо при условии, что $F(\alpha) > 0$ при $0 < \alpha < \pi$.

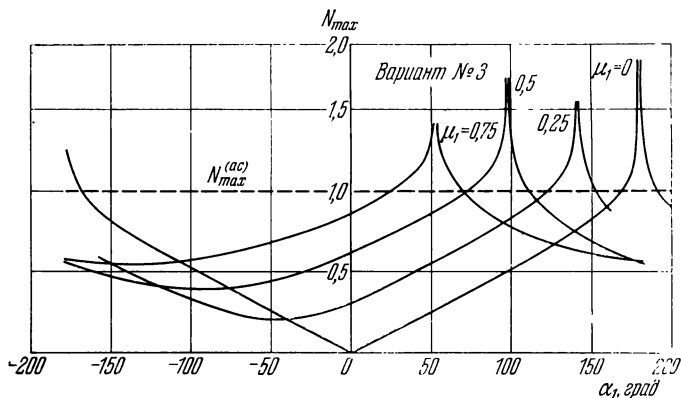


Рис. 28.

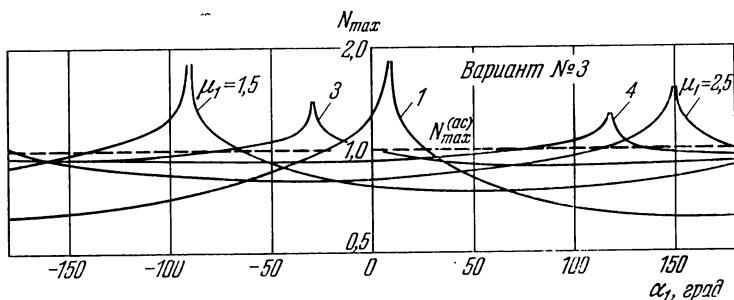


Рис. 29.

Введем, далее, понятие практического максимума $\bar{N}_{\max}$ зависимости $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$. Будем под $\bar{N}_{\max}$ понимать такое значение $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$, которое превосходит все значения этой функции при α_1 из интервала $-180^\circ \leq \alpha_1 \leq 180^\circ$ и фиксированном μ_1 с вероятностью, равной 99%.

Если внеатмосферный участок траектории достаточно большой, то, как уже указывалось, при подходе к грани-

це атмосферы летательный аппарат может иметь любую ориентацию. Другими словами, в таких случаях можно считать, что все значения α_1 из интервала $-180 \leq \alpha_1 \leq 180^\circ$ равновероятны. При таком условии определение практического максимума, очевидно, сводится к определению такого значения $\bar{N}_{\max}$, при котором отрезок, параллельный оси абсцисс и опирающийся своими концами соответственно на правую и левую ветви зависимости $N_{\max}$

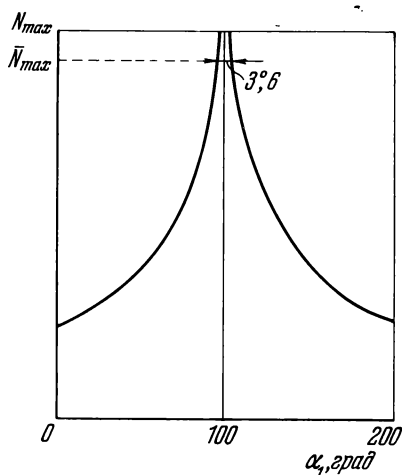


Рис. 30.

от α_1 , равен $3^\circ,6$. Другими словами, $\bar{N}_{\max}$ есть решение уравнения

$$\Delta\alpha_1^0(\bar{N}_{\max}) = 3^\circ,6, \quad (13.2)$$

где $\Delta\alpha_1^0$ — расстояние между правой и левой ветвями зависимости $N_{\max}$ от α_1 (рис. 30).

Полученные зависимости $\bar{N}_{\max}$ от μ_1 для всех рассматриваемых вариантов $F(\alpha)$ построены на рис. 31. Видно, что при увеличении μ_1 значения $\bar{N}_{\max}$ стремятся к асимптотическому значению, равному единице, причем асимптотическое значение достигается тем быстрее, чем больше абсолютное значение наклона кривой $F(\alpha)$ при $\alpha = 180^\circ$.

Это объясняется тем, что по мере увеличения $F_\alpha(180^\circ) = \left. \frac{dF}{dz} \right|_{\alpha=180^\circ}$ уменьшается интервал времени, в течение которого летательный аппарат может находиться в окрестности неустойчивого положения равновесия.

Остановимся теперь на вопросе о влиянии параметра μ_1 на движение. Из формулы (12.20) видно, что для того,

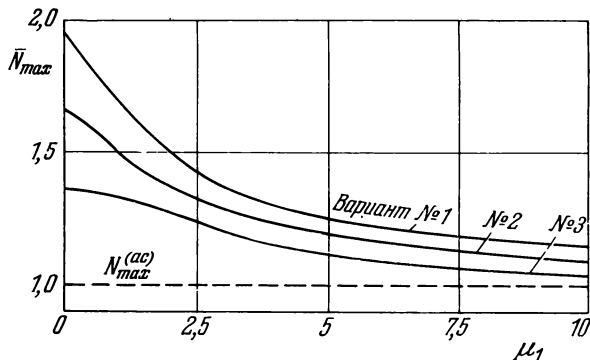


Рис. 31.

чтобы иметь возможность судить о влиянии μ_1 , необходимо вместо $N_{\max}$ строить в зависимости от μ_1 величину

$$\bar{N}_{\max, \mu_1} = \sqrt[4]{1 + \mu_1^2} \bar{N}_{\max}. \quad (13.3)$$

Зависимости $\bar{N}_{\max}$, μ_1 от μ_1 построены на рис. 32. Из графиков, приведенных на этом рисунке, видно, что вне малой окрестности значения $\mu_1 = 0$ увеличение μ_1 приводит к увеличению практических максимальных значений $\alpha_{\max}$ при полете в плотных слоях атмосферы. Это является следствием того, что при больших μ_1 переход вращательного движения в колебательное происходит позднее и, следовательно, значения $\bar{\alpha}_{\max}$ в плотных слоях атмосферы оказываются большими. Этот результат следует и из неуточненной формулы (11.5). Таким образом, для определения практического максимума поперечной перегрузки расчеты следует производить при $\mu_1 = 0$ и $\mu_1 = \mu_{1\max}$, где $\mu_{1\max}$ — максимально возможное зна-

чение μ_1 , и затем в качестве практического максимума поперечной перегрузки взять максимальное из получившихся при этих расчетах значений перегрузки.

Из рассмотрения графиков на рис. 31, 32 можно сделать вывод о влиянии кривой $F(\alpha)$ на максимально возможные значения $\alpha_{\max}$ в плотных слоях атмосферы. На

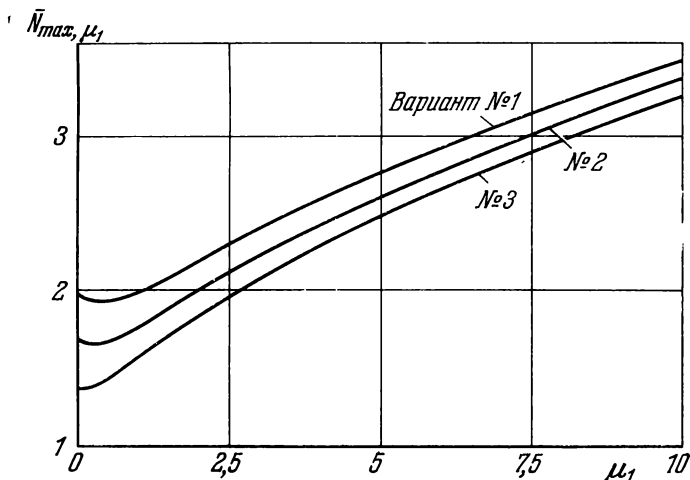


Рис. 32.

рис. 22 видно, что рассмотренные зависимости $F(\alpha)$ в основном отличаются значением $|F_\alpha(180^\circ)|$. Поэтому исследование влияния формы кривой $F(\alpha)$ эквивалентно исследованию влияния $|F_\alpha(180^\circ)|$. Из графиков на рис. 22 и 31, 32 видно, что увеличение $|F_\alpha(180^\circ)|$ приводит к уменьшению максимально возможных значений $\alpha_{\max}$ при полете в плотных слоях атмосферы.

В заключение настоящего параграфа, имея в виду результаты расчетов, представленные на рис. 23—31, несколько усовершенствуем неуточненную асимптотическую формулу (11.5). Как уже указывалось, уточненная асимптотическая формула (12.20) отличается от неуточненной поправочным коэффициентом $\sqrt[4]{1 + \frac{1}{\mu_1^2} N_{\max}}$. Ясно, что этот коэффициент становится особенно большим при

малых μ_1 и близок к $N_{\max}$ при $\mu_1 > 2,5$, так как

$$\sqrt[4]{1 + \frac{1}{\mu_1^2}} \approx 1 + \frac{1}{4\mu_1^2} + \dots$$

Отсюда следует, что точность формулы (11.5) для малых значений μ_1 можно существенно повысить, если записать ее в виде

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} 2\sqrt[4]{k^2 + \omega_1^2}. \quad (13.4)$$

На рис. 23—31, где для сравнения пунктирной линией нанесено асимптотическое значение коэффициента $N_{\max}^{\text{ас}}$, равное единице, имелась в виду именно такая запись неуточненной асимптотической формулы. Таким образом, для практического использования при оценках максимальной поперечной перегрузки вместо формулы (11.5) следует рекомендовать формулу (13.4).

Рассмотрим более подробно характер зависимости $\alpha_{\max}$ от времени при движении летательного аппарата в плотных слоях атмосферы. Из формулы (12.20) следует, что в этом случае

$$\alpha_{\max}(\tau) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}}. \quad (13.5)$$

Выражения для функций $f_z(\tau)$ и $g(\tau)$ в соответствии с формулами (2.10а), (2.11) и (2.8) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} f_z(\tau) &= \left(c_{\omega}^{\alpha} - \frac{m_z^{\omega_z}}{i_z} \right) \frac{S}{2m} \rho(H) V, \\ g(\tau) &= -\frac{m_z^{\alpha} S L}{2I_z} \rho(H) V^2. \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

Эти равенства с учетом того, что функция $f_z(\tau)$ на больших высотах близка к нулю, позволяет формулу (13.5) пере-

писать в следующем виде:

$$\alpha_{\max}(\tau) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\rho^{1/4} \left(\frac{V}{V_1} \right)^{1/2}}.$$

С учетом формулы (4.4) для экспоненциального множителя в этой формуле и формулы (4.3) для отношения V/V_1 , полученного для случая спиральной траектории входа ($\theta = \text{const}$), это выражение нетрудно преобразовать к форме

$$\alpha_{\max}(\tau) \sim \rho^{-1/4}(H) e^{-\kappa \rho(H)}, \quad (13.7)$$

где

$$\kappa = \frac{S \left(c_{y0}^{\alpha} - \frac{m_z^{\bar{\omega}}}{i_z} - c_{x0} \right)}{4m\lambda_1 \sin \theta_1}. \quad (13.8)$$

При $\kappa > 0$ из этой формулы следует, что при снижении амплитуда колебаний монотонно уменьшается. Если же $\kappa < 0$, то $\alpha_{\max}(\tau)$ с ростом $\rho(H)$ сначала уменьшается, а затем, начиная с некоторого значения $\rho = \rho_*$, начинает возрастать. Однако и в этом случае можно получить условие монотонного затухания амплитуды колебаний на всей траектории снижения. Для этого, очевидно, необходимо потребовать, чтобы минимум зависимости (13.7) достигался под поверхностью Земли. Дифференцирование зависимости (13.7) и приравнивание производной нулю дают следующее выражение для ρ_* :

$$\rho_* = -\frac{1}{4\kappa}. \quad (13.9)$$

Исходя из условия $\rho_* \geq \rho(0)$, обеспечивающего нахождение минимума зависимости (13.7) под поверхностью Земли, условие монотонного затухания колебаний на всей траектории снижения можно записать в виде

$$\frac{S\rho(0)}{m\lambda_1} \frac{\left(c_{x0} - c_{y0}^{\alpha} + \frac{m_z^{\bar{\omega}}}{i_z} \right)}{\sin \theta_1} \leq 1. \quad (13.10)$$

Напомним, что здесь, также как и в § 4, угол θ_1 считается положительным в случае снижения летательного аппарата.

При $\kappa > 0$ это условие выполняется всегда, однако оно выполняется также и при небольших по абсолютной величине отрицательных значениях κ . В последнем случае на монотонность или немонотонность затухания колебаний влияют угол наклона траектории к горизонту и параметры летательного аппарата.

§ 14. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕГРУЗОК НА ПЕРИФЕРИИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Рассмотрим распределение перегрузок по корпусу летательного аппарата в системе координат Oxy , жестко связанной с аппаратом, начало которой находится в центре масс. Ось Ox этой системы направим к носовой части летательного аппарата вдоль его оси симметрии, а ось Oy — перпендикулярно к ней так, чтобы рассматриваемая система координат была правой.

В некоторой точке с координатами (x, y) суммарная перегрузка складывается из компонент n_x и n_y , соответствующих движению центра масс летательного аппарата, и компонент n_ϵ и n_π , соответствующих движению летательного аппарата вокруг центра масс. Компонента n_x определяется тангенциальной аэродинамической силой и направлена вдоль продольной оси летательного аппарата, компонента n_y определяется нормальной аэродинамической силой и направлена параллельно оси Oy , а компоненты n_ϵ и n_π возникают соответственно благодаря центростремительному и вращательному ускорениям точек летательного аппарата при его движении вокруг центра масс и направлены соответственно вдоль радиуса-вектора рассматриваемой точки и перпендикулярно к нему. Схема компонент суммарной перегрузки в некоторой точке с координатами (x, y) изображена на рис. 33. Стрелками на этом рисунке указаны положительные направления, выбранные таким образом, что при положительном значении угла атаки величины n_x , n_y , n_π и n_ϵ принимают положительные значения.

Формулы для расчета компонент суммарной перегрузки n_x , n_y , n_ϵ и n_Π могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} n_x &= -\frac{c_t q S}{G}, & n_y &= \frac{c_n q S}{G}, \\ n_\epsilon &= -\frac{V \sqrt{x^2 + y^2}}{g_T} \frac{d\alpha}{dt}, \\ n_\Pi &= \frac{V \sqrt{x^2 + y^2}}{g_T} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

При выводе этих формул использовано допущение

$$\left| \frac{d\alpha}{dt^2} \right| \gg \left| \frac{d\theta}{dt^2} \right|.$$

Проекции суммарной перегрузки N_x на отрицательное

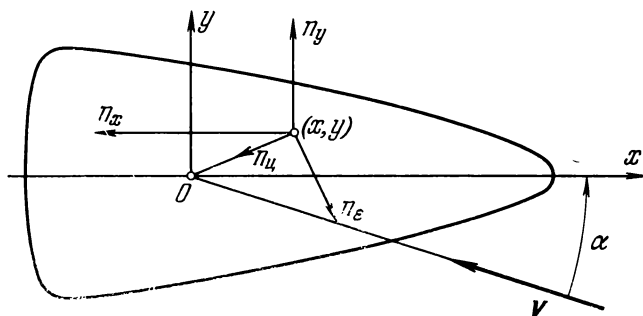


Рис. 33.

направление оси Ox и N_y — на ось Oy можно вычислить по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= n_x + \frac{y}{g_T} \frac{d\alpha}{dt^2} + \frac{x}{g_T} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2, \\ N_y &= n_y + \frac{x}{g_T} \frac{d\alpha}{dt^2} - \frac{y}{g_T} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

Проанализируем распределение поперечной перегрузки N_y вдоль оси летательного аппарата. Из формул (14.2)

при $y = 0$ имеем:

$$N_y = n_y + \frac{x}{g_T} \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (14.3)$$

Подставляя сюда выражение для n_y из формул (14.1) и пользуясь тем, что при плоском движении α и $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ в первом приближении удовлетворяют соотношению

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{m_z^c n_c(\alpha) qSL}{I_z} = 0,$$

выражение (14.3) можно переписать в виде

$$N_y = n_y \left(1 + \frac{x}{L} \frac{m_z^c n}{i_z} \right), \quad (14.4)$$

где

$$i_z = \frac{I_z}{mL^2},$$

а $m_z^c n$ — расстояние от центра давления до центра тяжести летательного аппарата. Если летательный аппарат статически устойчив при полете носовой частью вперед, то $m_z^c n < 0$. Будем предполагать, что это условие выполняется. Из формулы (14.4) видно, что впереди центра масс летательного аппарата (при $x > 0$) на расстоянии

$$x_{**} = L \frac{i_z}{|m_z^c n|} \quad (14.5)$$

имеется точка, в которой поперечная перегрузка обращается в нуль. В этой точке ускорение, возникающее под действием аэродинамической подъемной силы, компенсируется вращательным ускорением, возникающим при движении летательного аппарата вокруг центра масс под воздействием аэродинамического момента (рис. 34).

Если летательный аппарат предназначен для перенесения груза, для которого действие поперечной перегрузки является нежелательным, то такой груз целесообразно размещать в окрестности этой точки. В таких случаях

соотношение (14.5) следует иметь в виду при аэродинамической компоновке летательного аппарата. Так, если размеры тормозных устройств следует выбирать исходя из необходимых значений c_{x0} , то положение их по длине летательного аппарата, которое существенно влияет на $|m_z^{cn}|$, следует выбирать с учетом равенства (14.5) так, чтобы точка $x = x_{**}$ находилась в нужной точке летательного

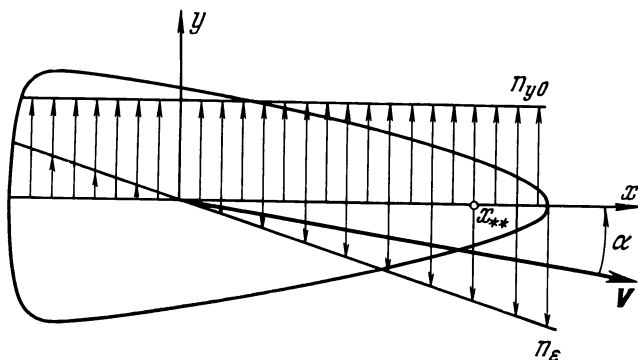


Рис. 34.

аппарата. Очевидно, что таким способом можно весьма существенно уменьшить поперечную перегрузку, действующую на переносимый груз вдоль всей траектории летательного аппарата.

Остановимся, далее, на вопросе о выборе оптимального значения $|m_z^{cn}|$. Из формул предыдущих параграфов следует, что значение поперечной перегрузки в центре масс n_y пропорционально $|m_z^{cn}|^{-1/4}$. Вследствие этого между $|m_z^{cn}|$ и N_y в точках, расположенных на оси летательного аппарата, имеет место следующая связь:

$$N_y \sim \frac{1}{|m_z^{cn}|^{1/4}} \left(1 - \frac{x}{L} \frac{|m_z^{cn}|}{i_z} \right). \quad (14.6)$$

Из сказанного выше, а также из этой формулы следует, что наибольшие значения N_y достигаются в хвостовой

части летательного аппарата при $x = -\Delta L$, где ΔL — расстояние от центра масс до хвостовой части летательного аппарата. Если $|m_z^{cn}|$ выбирать из условия минимизации наибольших вдоль оси аппарата значений поперечной перегрузки, то для $|m_z^{cn}|_{\text{opt}}$ из (14.6) получается следующая формула:

$$|m_z^{cn}|_{\text{opt}} = \frac{i_z}{3 \frac{\Delta L}{L}}.$$

При увеличении и уменьшении $|m_z^{cn}|$ от этого значения наибольшие вдоль оси аппарата значения поперечной перегрузки увеличиваются.

§ 15. ПРИМЕР РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ СНИЖЕНИИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА, БЛИЗКОГО ПО ФОРМЕ К КОНУСУ

В качестве примера были рассчитаны характеристики возмущенного движения баллистического летательного аппарата, близкого по форме к конусу с углом полураствора порядка 10° и баллистическим коэффициентом $\sigma_x = \frac{c_x S}{G}$, равным $0,0001 \text{ м}^2/\kappa\Gamma$.

Предполагалось, что летательный аппарат снижается под углом 30° к горизонту со скоростью 6000 м/сек . Зависимости параметров, характеризующих траекторию центра масс (скорость V , скоростной напор q и время полета t), от высоты H приведены на рис. 35. Видно, что из-за малого значения σ_x скорость полета начинает заметно уменьшаться, начиная лишь с высоты порядка 20 км . Вблизи Земли скорость летательного аппарата составляет 2250 м/сек . Из-за таких больших значений скорости на малых высотах скоростной напор также оказывается очень большим. Его максимальное значение составляет $500\,000 \kappa\Gamma/\text{м}^2$. Полное время снижения равняется 35 сек .

При анализе возмущенного движения прежде всего были рассмотрены условия перехода вращательного

движения в колебательное. На рис. 36 представлена зависимость высоты, на которой вращательное движение

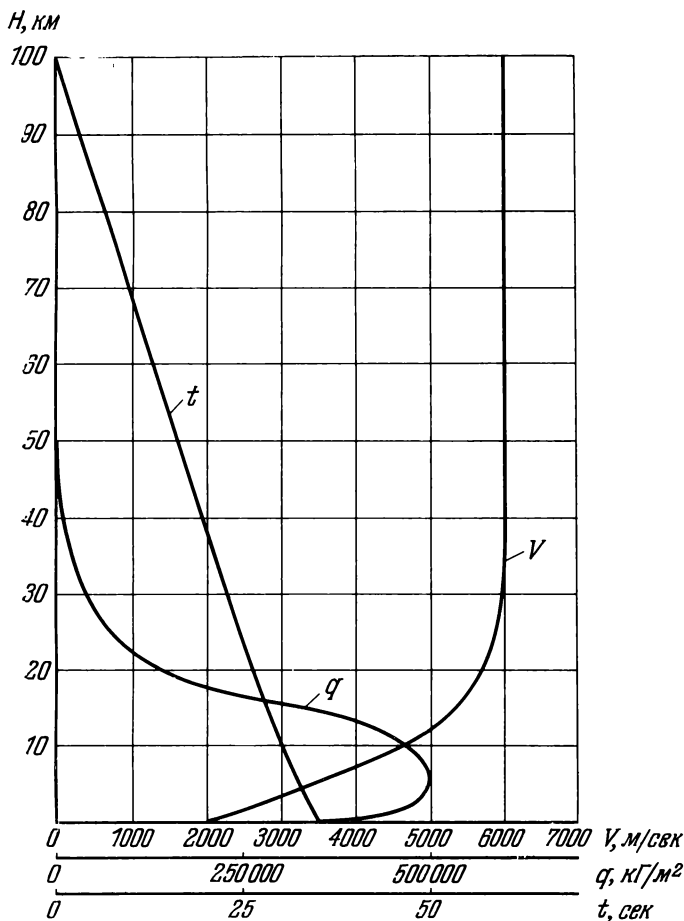


Рис. 35.

ходит в колебательное, от запаса устойчивости — m_z^c для переразличных значений величины начальной угловой скорости ω_{z0} в случае, когда отделение летательного аппарата

происходит при $H=130$ км. Видно, что при малых угловых скоростях $\omega_{z0} \leq 1$ 1/сек и значениях $|m_z^{cn}|$, не превышающих 0,1, увеличение запаса устойчивости приводит к существенному увеличению высоты, на которой начинается колебательное движение. При больших угловых скоростях и значениях $|m_z^{cn}|$ кривые становятся более

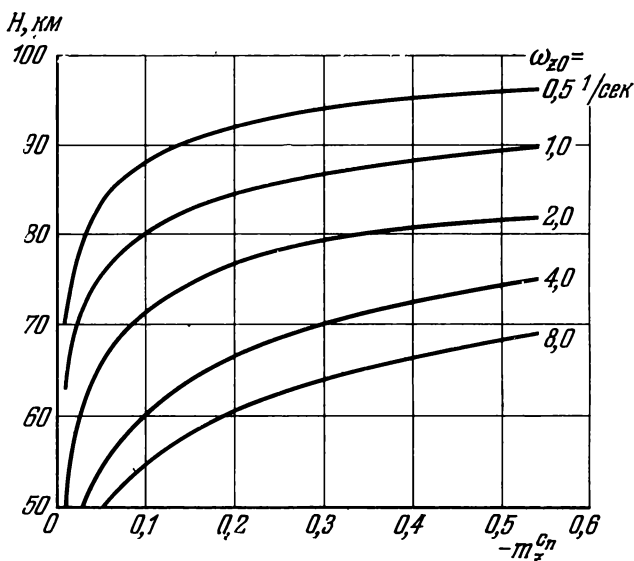


Рис. 36.

пологими, откуда следует, что дальнейшее увеличение $|m_z^{cn}|$ становится малоэффективным.

Был рассмотрен вопрос о необходимости учета $m_z^{\bar{\omega}z}$ при анализе вращательного движения. Сначала было исследовано влияние $m_z^{\bar{\omega}z}$ на высоту, соответствующую переходу вращательного движения в колебательное при $\omega_{z0} = 2$ 1/сек. Из рис. 37, на котором представлены значения указанной высоты в зависимости от $m_z^{\bar{\omega}z}$ при различных значениях m_z^{cn} , видно, что это влияние при $\omega_{z0} \leq 2$ 1/сек

пренебрежимо мало. В связи с этим был рассмотрен вопрос об определении совокупности значений $m_z^{c_n}$ и ω_{z0} , при которых значения высоты, соответствующие переходу вращения в колебания, зависят от величины демпфирования. На рис. 38 построены зависимости ω_{z0} от $-m_z^{c_n}$ для ряда значений $\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z}$. В области, расположенной выше

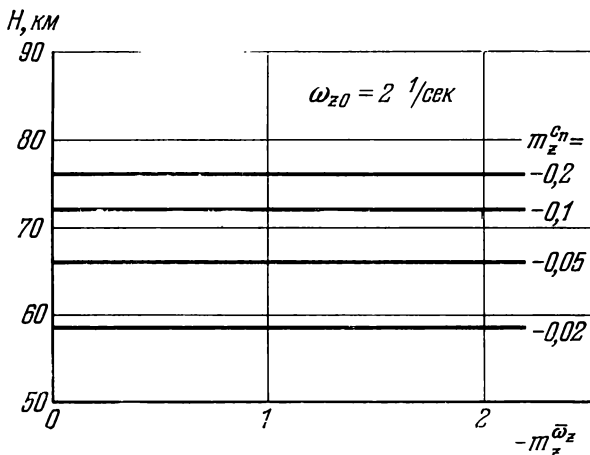


Рис. 37.

этих кривых, демпфирование влияет и его необходимо учитывать, а ниже этих кривых демпфированием можно пренебречь. Из рис. 38 видно, что введение в расчет $\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z}$ при анализе вращательного движения для данного примера имеет смысл только в случаях, когда ω_{z0} более 5 1/сек .

Целью расчетов, представленных на рис. 39, являлось определение совокупности значений ω_{z0} и $m_z^{c_n}$, при которых колебательный процесс начинается сразу после отделения летательного аппарата, предназначенного для спуска на Землю, от носителя на высоте 130 км. Значения параметров, лежащие ниже кривой, построенной на этом рисунке, соответствуют случаям, когда колебания

начинаются сразу после отделения летательного аппарата, а значения параметров, лежащие выше этой кривой, соответствуют случаю, когда колебательный процесс начинается после окончания вращательного движения.

После проведения анализа перехода вращательного движения в колебательное были рассчитаны характеристики колебательного движения для $\omega_{z0} = 2$ 1/сек. На рис. 40 пред-

ставлены зависимости $\alpha_{\max}$ — амплитуды колебаний угла

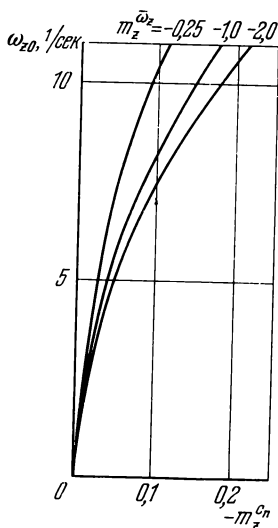


Рис. 38.

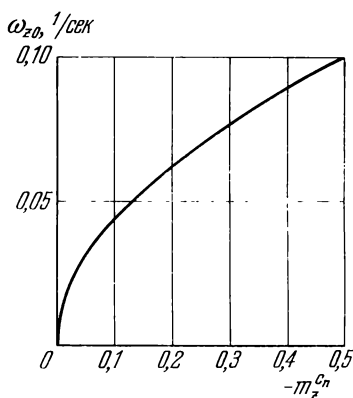


Рис. 39.

атаки (в радианах) от высоты при различных значениях запаса устойчивости m_z^{cn} . Видно, что независимо от величины запаса устойчивости колебания полностью затухают при $H = 15$ км. Отметим, что на высотах $35 \div 40$ км эти зависимости имеют довольно резкое изменение производной (излом).

Для различных значений $m_z^{\bar{\omega}_z}$ были определены высоты, ниже которых демпфирование заметно влияет на изменение амплитуды колебаний. Результаты этого расчета представлены на рис. 41. Видно, что в данном случае демпфирование необходимо учитывать, начиная с высоты порядка 40 км.

С помощью графика на рис. 41 можно объяснить излом кривых, изображенных на рис. 40. В самом деле, из сопоставления графиков можно заключить, что наличие излома связано со сменой факторов, определяющих затухание колебаний: выше 40 км затухание в основном определяется ростом скоростного напора, а ниже 40 км — наличием демпфирования.

На рис. 42 представлены зависимости мгновенного периода колебаний от высоты при различных значениях запаса устойчивости. Видно, что при снижении период колебаний быстро уменьшается от нескольких секунд до

долей секунды. При $H = 6$ км (максимум скоростного напора) мгновенный период колебаний имеет минимум. Минимальная величина мгновенного периода колебаний построена на рис. 43 в зависимости от m_z^c . Видно, что при увеличении запаса устойчивости от 2 до 20% минимальное значение периода колебаний уменьшается от 0,16 сек до 0,05 сек.

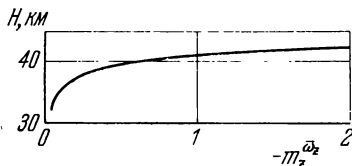


Рис. 41.

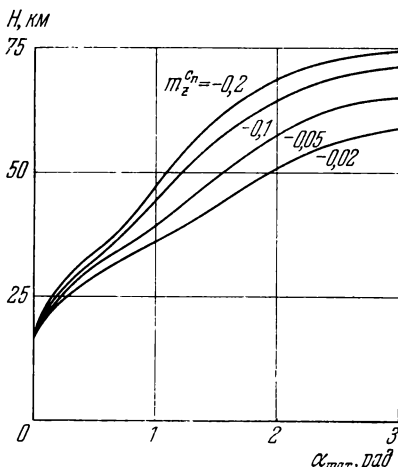


Рис. 40.

С помощью полученных характеристик колебательного процесса были определены амплитуды $n_x^{(m)}$, $n_y^{(m)}$, $n_z^{(m)}$ и $n_{\Sigma}^{(m)}$ компонент суммарной перегрузки на расстоянии одного метра от центра тяжести летательного аппарата в зависимости от высоты. Результаты этих расчетов для ряда значений m_z^c приведены на рис. 44—47. Видно, что полученные кривые имеют ярко выраженный экстре-

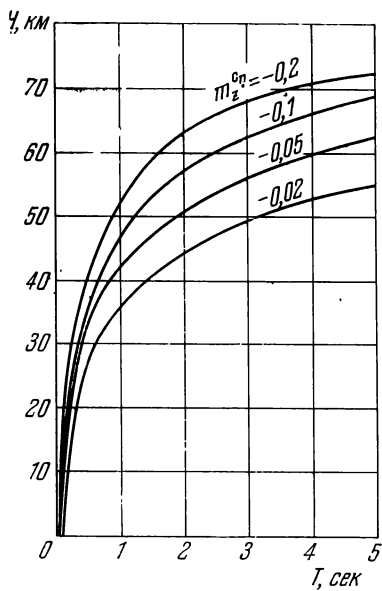


Рис. 42.

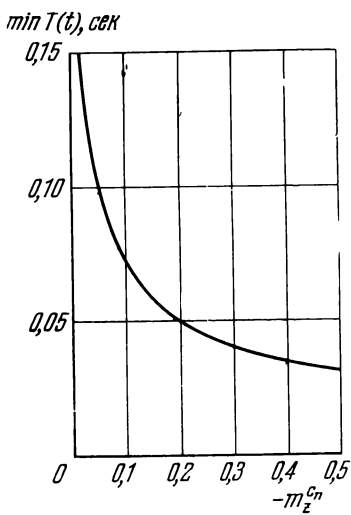


Рис. 43.

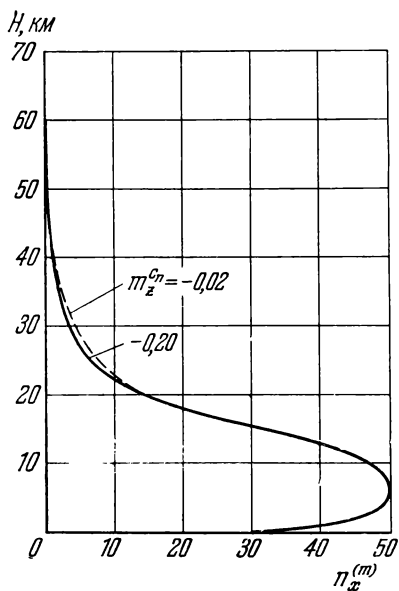


Рис. 44.

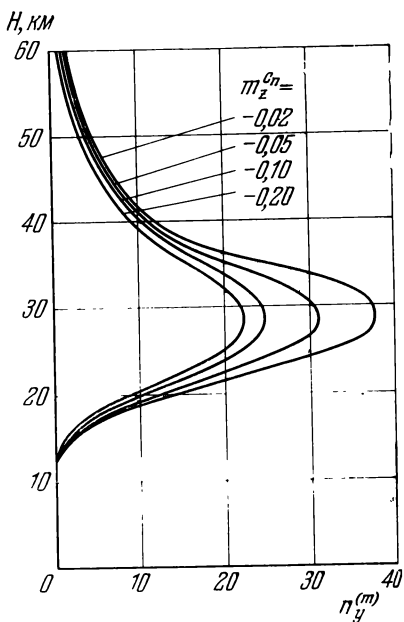


Рис. 45.

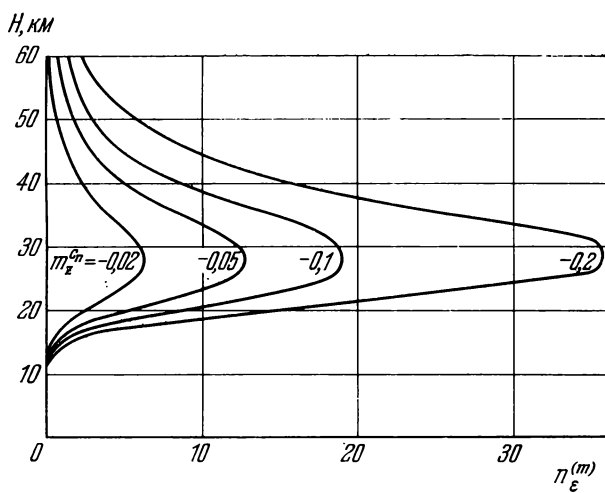


Рис. 46.

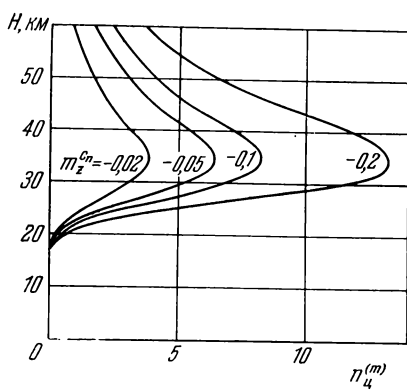


Рис. 47.

мальный характер. Максимальные значения амплитуд компонент перегрузки при увеличении $|m_z^{cn}|$ от 0,02 до 0,2 следующее:

$$\begin{aligned} \max n_x^{(m)} &= 50 = \text{const}, & \max n_y^{(m)} &= 38 \div 22, \\ \max n_\epsilon^{(m)} &= 6,2 \div 35,6, & \max n_\Pi^{(m)} &= 3,8 \div 13,2. \end{aligned}$$

Следует отметить, что максимальные значения амплитуд $n_y^{(m)}$, $n_\epsilon^{(m)}$ и $n_\Pi^{(m)}$ достигаются раньше, то есть на большей высоте ($H = 30$ км), чем максимальное значение амплитуды $n_x^{(m)}$ ($H = 5$ км). Это следует иметь в виду при определении суммарной перегрузки.

Увеличение запаса устойчивости по-разному влияет на компоненты перегрузки $n_x^{(m)}$ и $n_y^{(m)}$ в центре масс летательного аппарата и на компоненты $n_\epsilon^{(m)}$ и $n_\Pi^{(m)}$, связанные с движением летательного аппарата вокруг центра масс: при увеличении $|m_z^{cn}|$ компоненты перегрузки $n_x^{(m)}$ и $n_y^{(m)}$ убывают, в то время как компоненты $n_\epsilon^{(m)}$ и $n_\Pi^{(m)}$ быстро увеличиваются. Этот факт следует учитывать при выборе запаса устойчивости.

ПЛОСКОЕ ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ ОКОЛОЗВУКОВОЙ ДИАПАЗОН СКОРОСТЕЙ

§ 16. ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЯ, КОГДА ПРИ $M \approx 1$ ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ СТАНОВИТСЯ СТАТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫМ НА БОЛЬШИХ УГЛАХ АТАКИ

Как было указано в конце § 10, на участке траектории снижения с отрицательным градиентом скоростного напора нестационарность режима полета стремится «раскачать» летательный аппарат. Если при снижении на этом участке траектории летательный аппарат затормаживается до дозвуковых скоростей, то при числе Маха порядка единицы у зависимости m_z от α не исключено появление нелинейности такого вида, которая может существенно усилить дестабилизирующее влияние нестационарности режима полета. В частности, возможен переход колебательного движения в окрестности $\alpha = 0$ в колебательное же движение, но в окрестности $\alpha = 180^\circ$, что, очевидно, соответствует опрокидыванию летательного аппарата. Такое изменение характера возмущенного движения будет в случае, когда при торможении летательного аппарата от сверхзвуковой скорости до дозвуковой зависимость m_z от α изменяется примерно так, как это показано на рис. 48. На этом рисунке время отсчитывается от момента, при котором начинается изменение формы зависимости m_z от α .

Будем предполагать, что в тот момент времени, когда начинается изменение вида зависимости m_z от α , в результате исследования движения (см. § 10—13) на предшествующем участке траектории известно $\alpha_{\max, 0}$ — начальное значение амплитуды колебаний летательного аппарата.

Поставим перед собой задачу получить условие (условие неопрокидывания), при котором сохранится колебательное движение летательного аппарата в окрестности $\alpha = 0$ на всей остальной части траектории снижения, а также исследовать особенности движения в этом случае.

Для решения такой задачи моментную характеристику летательного аппарата, очевидно, достаточно аппроксимировать между $\alpha = 0$ и ближайшим положением равновесия. При таком условии в качестве аппроксимирующей функции для функции $M(\tau, \alpha)$ в уравнении (10.1) можно

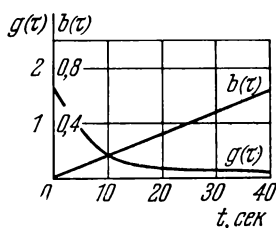
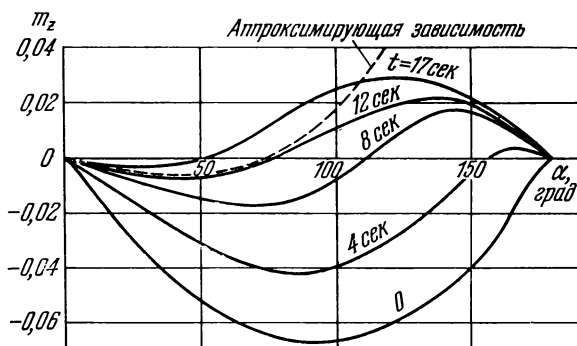


Рис. 48.

взять кубическую параболу с переменными коэффициентами:

$$M(\tau, \alpha) = g(\tau)\alpha - b(\tau)\alpha^3, \quad (16.1)$$

где

$$g(\tau) > 0, \quad b(\tau) \geq 0.$$

Заметим, что в силу того, что начало отсчета времени взято в момент, когда начинается изменение формы зависимости m_z от α , можно считать, что $b(0) = 0$. С учетом равенства (13.1) эталонное уравнение (10.2) записывается

в виде

$$\omega^2(\tau) \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + g(\tau) \alpha - b(\tau) \alpha^3 \right] = 0. \quad (16.2)$$

Решение его при $g(\tau) > 0$ и $b(\tau) \geq 0$ наиболее удобно искать в форме

$$\alpha(\tau, \varphi) = \alpha_{\max}(\tau) \operatorname{sn} \{k[v(\tau)] \varphi, v(\tau)\}. \quad (16.3)$$

График функции $\operatorname{sn} [k(v) \varphi, v]$ изображен на рис. 49. Это решение зависит от трех произвольных функций: $\alpha_{\max}(\tau)$,

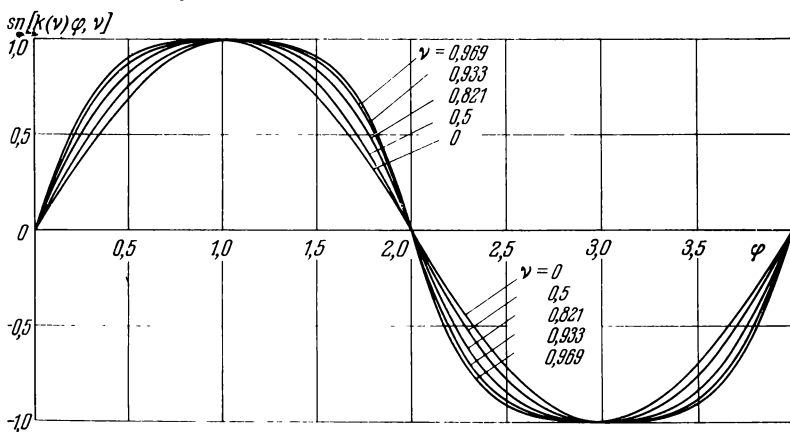


Рис. 49.

$v(\tau)$ и $\omega(\tau)$. Два из трех соотношений для определения этих функций получаются в результате подстановки выражения (16.3) в уравнение (16.2). Имеем [17]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} &= \alpha_{\max} K(v) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} &= \alpha_{\max} K^2(v) [2v \operatorname{sn}^3 u - (1+v) \operatorname{sn} u], \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

где $u = K(v)\varphi$.

Подставляя второе соотношение (16.4) в (16.2) и приравнявая нулю коэффициенты при $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{sn}^3 u$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 K^2(v) (1+v) &= g(\tau), \\ \omega^2 K^2(v) 2v &= b(\tau) \alpha_{\max}^2. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

Недостающее третье соотношение получается в результате подстановки выражения (16.4) для $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$ в условие периодичности (10.4). Это соотношение можно записать в виде

$$\omega K(\nu) \alpha_{\max}^2 L(\nu) = D e^{-\int_0^{\tau} f_z(\tau) d\tau}, \quad (16.6)$$

где

$$L(\nu) = \frac{(1+\nu)E(\nu) - (1-\nu)K(\nu)}{3\nu}, \quad L(0) = \frac{\pi}{4}, \quad L(1) = \frac{2}{3}.$$

График функции $L(\nu)$ изображен на рис. 50.

Соотношения (16.5) и (16.6) после несложных преобразований с учетом того, что мгновенный период

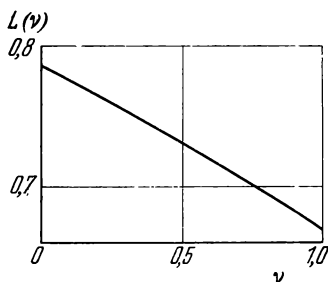


Рис. 50.

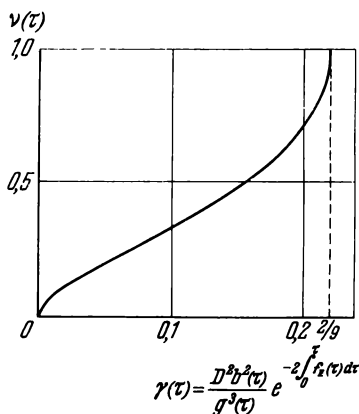


Рис. 51.

колебаний $T(\tau) = \frac{4}{\omega(\tau)}$, могут быть записаны в форме

$$\frac{4\nu^2 L^2(\nu)}{(1+\nu)^3} = \frac{D^2 b^2(\tau)}{g^3(\tau)} e^{-2 \int_0^{\tau} f_z(\tau) d\tau} = \gamma(\tau), \quad (16.7)$$

$$T(\tau) = 4K(\nu) \sqrt{\frac{1+\nu}{g(\tau)}}, \quad (16.8)$$

$$\alpha_{\max}(\tau) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^{\tau} f_z(\tau) d\tau} \sqrt{\frac{D \sqrt{1+\nu}}{V g(\tau) L(\nu)}}. \quad (16.9)$$

Соотношение (16.7) служит для определения функции $v(\tau)$. График для определения $v(\tau)$ по известным значениям функции $\gamma(\tau)$ построен на рис. 51. После того как $v(\tau)$ определено, $T(\tau)$ и $\alpha_{\max}(\tau)$ могут быть вычислены с помощью формул (16.8) и (16.9).

Если после определения $T(\tau)$ найти еще $T''(\tau)$, то с помощью результатов, полученных в § 8, нетрудно оценить величину погрешности асимптотических решений в рассматриваемом случае. Однако на основании оценок, проведенных в § 1 (см. равенство (1.6)), можно сразу сказать, что если только m_z^n при $M < 1$ не становится чрезвычайно малой величиной, то величина этой погрешности не может быть большой, так как переход через околосзвуковой диапазон скоростей обычно происходит на небольшой высоте.

Для того чтобы указанные расчеты могли быть выполнены, необходимо предварительно определить константу D . Чтобы это сделать, положим $t = 0$ в соотношениях (16.5) и, поделив их одно на другое, вычислим v_0 — начальное значение функции $v(\tau)$ в следующем виде:

$$v_0 = \frac{1}{\frac{g_0}{b_0 \alpha_{\max, 0}^2} - 1}, \quad (16.10)$$

где g_0 и b_0 — начальные значения функций $g(\tau)$ и $b(\tau)$. При известном v_0 константа D легко может быть вычислена либо с помощью графика на рис. 51, либо с помощью формулы (16.9) при $t = 0$. В рассматриваемом случае $b_0 = 0$ и в силу (16.10) $v_0 = 0$. При $v_0 = 0$ из формулы (16.9) получается следующее выражение для D :

$$D = \frac{\pi}{4} \sqrt{g_0} \alpha_{\max, 0}^2. \quad (16.11)$$

Перейдем теперь к анализу полученных формул.

Из графика на рис. 51 видно, что когда функция $\gamma(\tau)$ увеличивается от нуля до значения $2/9$, то функция $v(\tau)$ изменяется от нуля до единицы. При $\gamma(\tau) > 2/9$ уравнение (16.7) действительных решений не имеет, что говорит о невозможности в этом случае колебательного процесса в окрестности $\alpha = 0$. В момент, когда $\gamma(\tau) = 2/9$, проис-

ходит изменение характера возмущенного движения. В рассматриваемом нами случае функция $\gamma(\tau)$ возрастает, так как $g(\tau)$ убывает, а $b(\tau)$ возрастает. Выясним влияние нелинейного члена $b(\tau)\alpha^3$ на изменение $T(\tau)$ и $\alpha_{\max}(\tau)$ при возрастании функции $\gamma(\tau)$. Выделим для этого в формулах (16.8) и (16.9) линейную часть, то есть часть, изменение которой определяется линейным членом $g(\tau)\alpha$ в равенстве (16.1). Полагая в (16.7) $b(\tau) = 0$ и используя формулы (16.8) и (16.9), получаем:

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{лин}}(\tau) &= 0, \\ T_{\text{лин}}(\tau) &= \frac{2\pi}{\sqrt{g(\tau)}}, \\ \alpha_{\max}(\tau)_{\text{лин}} &= e^{-\frac{1}{2} \int_0^{\tau} f_z(\tau) d\tau} \sqrt{\frac{4D}{\pi \sqrt{g(\tau)}}}. \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

Формулы (16.8) и (16.9) с учетом (16.12) могут быть переписаны в виде

$$\left. \begin{aligned} T(\tau) &= T_{\text{лин}}(\tau) \frac{2K(v)}{\pi} \sqrt{1+v}, \\ \alpha_{\max}(\tau) &= \alpha_{\max}(\tau)_{\text{лин}} \sqrt{\frac{\pi \sqrt{1+v}}{4L(v)}}. \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

Из этих формул видно, что с увеличением влияния нелинейности (с ростом v) мгновенный период и амплитуда колебаний возрастают [см. рис. 13 и 50, на которых построены графики функций $K(v)$ и $L(v)$]. В момент, когда $\gamma(\tau) = 2/9$ и $v = 1$, эти величины принимают следующие значения:

$$T(\tau) = \infty, \quad \alpha_{\max}(\tau) = [\alpha_{\max}(\tau)]_{\text{лин}} \cdot 1,289. \quad (16.14)$$

Множитель 1,289 определяет раскачивание системы, вызванное нестационарной нелинейностью продольного момента.

Таким образом, упоминавшаяся выше возможность опрокидывания летательного аппарата при законе изменения зависимости m_z от α , указанном на рис. 48, определяется двумя факторами: во-первых, увеличением ампли-

туды колебаний при уменьшении функции $g(\tau)$ и возрастании функции $b(\tau)$, а во-вторых, приближением положения неустойчивого равновесия на рис. 48 к началу координат. Условие, при котором опрокидывания летательного аппарата не произойдет, вытекает из равенства (16.7) и в силу замечаний, сделанных выше, представляет собой неравенство

$$\frac{D^2 b^2(\tau)}{g^3(\tau)} e^{-2 \int_0^{\tau} f_z(\tau) d\tau} < \frac{2}{9}. \quad (16.15)$$

Так как D выражается через $\alpha_{\max, 0}$ [см. выражение (16.11)], то с помощью этого неравенства можно указать $\max \alpha_{\max, 0}$ — максимально допустимую величину начальной амплитуды колебаний, при которой летательный аппарат на всем рассматриваемом интервале времени $0 \leq t \leq t|_{H=0}$ будет колебаться в окрестности $\alpha = 0$. Выражение для $\alpha_{\max, 0}$ нетрудно получить из (16.15), если вместо D подставить выражение (16.11):

$$\max \alpha_{\max, 0} = \sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}} \min_{0 \leq t \leq t|_{H=0}} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^{\tau} f_z(\tau) d\tau} \sqrt[4]{\frac{g(\tau)}{g_0}} \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}} \right] \quad (16.16)$$

(здесь через $t|_{H=0}$ обозначен момент времени, в который летательный аппарат достигает поверхности Земли.)

Каждый из сомножителей этой формулы имеет ясный физический смысл. Сомножители $\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}}$ и $\sqrt[4]{\frac{g(\tau)}{g_0}}$ учитывают раскачивание системы, вызванное соответственно членами $b(\tau)\alpha^3$ и $g(\tau)\alpha$ в выражении (16.1) для $M(\tau, \alpha)$. Сомножитель $\sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}$ учитывает эффект приближения неустойчивого положения равновесия к значению $\alpha = 0$. Эти три сомножителя при возрастающей функции $b(\tau)$ и убывающей функции $g(\tau)$, очевидно, уменьшают величину $\max \alpha_{\max, 0}$. Экспоненциальный сомножитель в (16.16) учитывает влияние демпфирования. Если $f_z(\tau) > 0$, то демпфирование способствует затуханию колебаний, и этот

сомножитель в отличие от остальных сомножителей в (16.16) способствует увеличению $\max \alpha_{\max, 0}$.

В конце § 8 было указано, что асимптотические решения при достаточно медленном изменении параметров в системе всегда указывают несколько меньшее значение

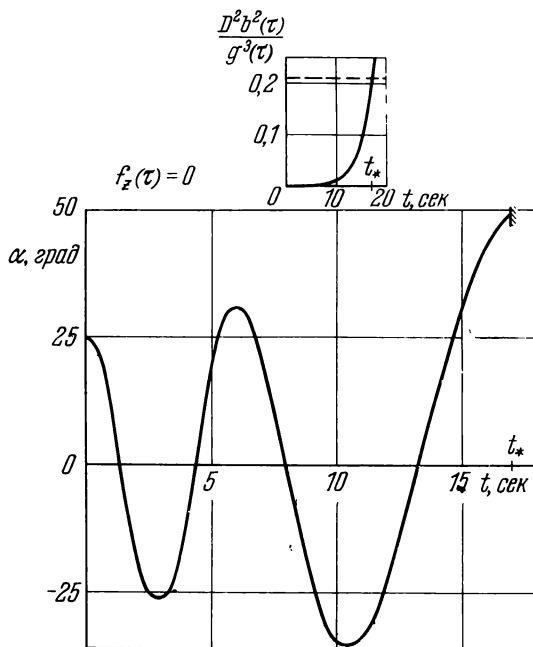


Рис. 52.

для момента изменения характера возмущенного движения, чем это получается в точных решениях. Вследствие этого можно утверждать, что формула (16.16) указывает значения $\max \alpha_{\max, 0}$ с некоторым запасом.

Для иллюстрации результатов, полученных в настоящем параграфе, было рассчитано изменение угла атаки в случае, когда при переходе через околозвуковой диапазон скоростей моментная характеристика летательного аппарата изменяется так, как это указано на рис. 48. На этом же рисунке приведены графики коэффициентов $g(\tau)$

и $b(\tau)$. Для того чтобы выделить влияние нестационарной нелинейности, сначала был рассчитан случай, когда система не имеет демпфирования: $f_z(\tau) = 0$. На рис. 52 приведены результаты этого расчета при $\alpha_{\max, 0} = 25^\circ$. Из рисунка видно, что с течением времени амплитуда колебаний

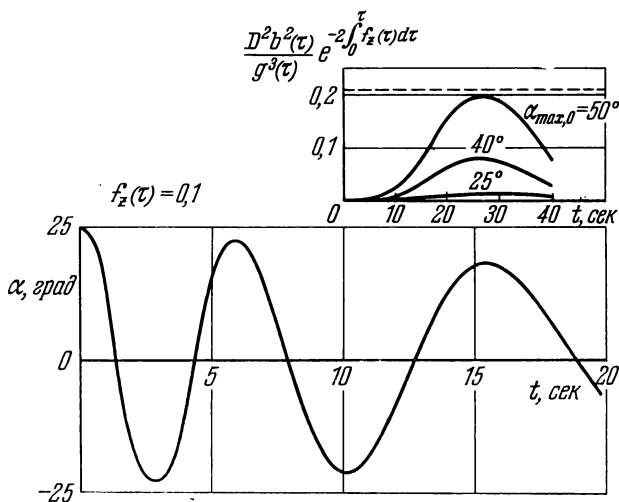


Рис. 53.

увеличивается до тех пор, пока при $t_* = 17$ сек не происходит опрокидывания летательного аппарата. На том же рисунке построен график функции $\frac{D^2 b^2(\tau)}{g^3(\tau)}$, которая, как это ясно из изложенного выше, в основном определяет характер возмущенного движения. Видно, что при $t_* = 17$ сек она в соответствии с результатами, полученными в § 7, монотонно возрастая, достигает значения $2/9$. При увеличении начального возмущения опрокидывание летательного аппарата произойдет раньше, а при уменьшении — позже.

Для того чтобы выяснить влияние демпфирования, было рассчитано возмущенное движение того же самого летательного аппарата на той же самой траектории в случае, когда функция $f_z(\tau) = 0,1$.

Результаты этих расчетов при $\alpha_{\max, 0} = 25^\circ$ приведены на рис. 53. Из этого рисунка видно, что демпфирование существенно способствует затуханию колебаний. Для того чтобы судить о возможности опрокидывания летательного аппарата при наличии демпфирования, на этом же рисунке построен график функции

$$\frac{D^2 b^2(\tau)}{g^3(\tau)} e^{-2 \int_0^\tau f_z(\tau) d\tau} \quad \text{при различных значениях } \alpha_{\max, 0}.$$

В отличие от ранее рассмотренного случая, теперь эта функция имеет максимум при $t = 27,5 \text{ сек}$, величина которого существенно зависит от величины начального возмущения. Из этого графика видно, что в рассматриваемом случае опрокидывание летательного аппарата может произойти только при $\alpha_{\max, 0} > 50^\circ$.

§ 17. ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЯ, КОГДА ПРИ $M \approx 1$ ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ СТАНОВИТСЯ СТАТИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВЫМ НА МАЛЫХ УГЛАХ АТАКИ

В настоящем параграфе задача об исследовании плоского возмущенного движения при переходе через околозвуковой диапазон скоростей ставится примерно так же, как и в предыдущем. Как и ранее, время t отсчитывается от момента, когда в окрестности $\alpha = 0$ начинается изменение формы моментной характеристики, и, как и ранее, предполагается, что при $t = 0$ в результате исследования движения на сверхзвуковой части траектории известно значение амплитуды колебаний летательного аппарата $\alpha_{\max, 0}$. Отличие случая, рассматриваемого в настоящем параграфе, от случая, рассмотренного в § 16, состоит в законе изменения формы моментной характеристики. Примерное изменение формы зависимости m_z от α в рассматриваемом случае изображено на рис. 54. На сверхзвуковых скоростях летательный аппарат при $\alpha = 0$ статически устойчив. При $M \approx 1$ положение равновесия $\alpha_p = 0$ становится неустойчивым, но одновременно появляются два близких к $\alpha = 0$ устойчивых положения равновесия $\alpha = \alpha_p$ и $\alpha = -\alpha_p$. После же того как околозвуковой диапа-

зон скоростей пройден, положение равновесия $\alpha_p = 0$ снова становится устойчивым, а положения равновесия $\alpha = \pm \alpha_p$ исчезают.

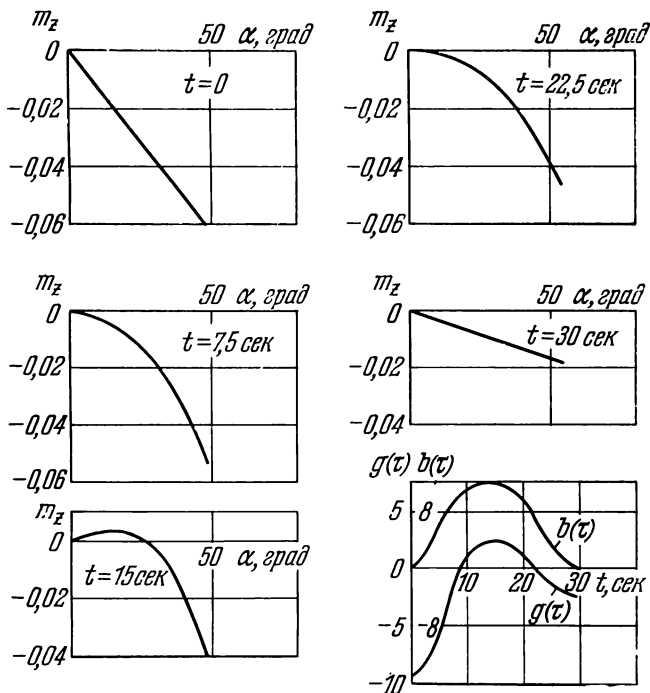


Рис. 54.

Такое изменение формы моментной характеристики так же, как и в § 16, может быть описано с помощью кубической параболы

$$M(\tau, \alpha) = -g(\tau)\alpha + b(\tau)\alpha^3, \quad (17.1)$$

где функции $g(\tau)$ и $b(\tau)$ удовлетворяют неравенствам

$$g(\tau) \geq 0, \quad b(\tau) \geq 0, \quad (17.2)$$

причем при $t = 0$ в соответствии с изложенным

$$g(0) < 0, \quad b(0) = 0. \quad (17.3)$$

С учетом (17.1) эталонное уравнение (10.2) записывается в виде *)

$$\omega^2(\tau) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} - g(\tau) \alpha + b(\tau) \alpha^3 = 0. \quad (17.4)$$

В зависимости от знака коэффициента $g(\tau)$ в системе, описываемой уравнением (17.4), имеются либо три, либо одно положение равновесия.

Рассмотрим сначала случай, когда $g(\tau) > 0$. В этом случае имеются три положения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_p &= 0, \\ \alpha_p &= \pm \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

Первое из них неустойчиво, а второе и третье устойчивы. Поэтому в системе возможны, во-первых, колебания с большой амплитудой, происходящие относительно $\alpha_p = 0$, и, во-вторых, колебания с малой амплитудой, происходящие в окрестности $\alpha_p = \pm \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}$.

В случае, когда $g(\tau) < 0$, летательный аппарат имеет одно положение равновесия $\alpha_p = 0$.

В этом случае колебания могут происходить только относительно $\alpha = 0$. Таким образом, в системе, описываемой уравнением (17.4) при условиях (17.2), возможны колебательные процессы двух типов, различающиеся своими средними значениями, амплитудами и частотами.

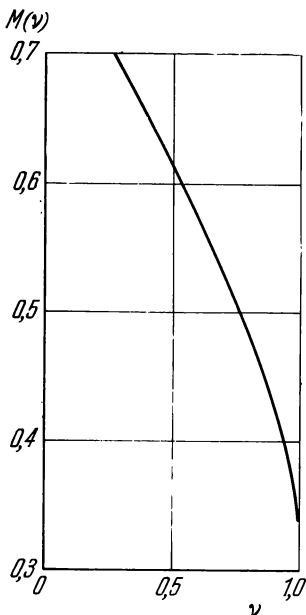


Рис. 55.

*) В настоящем параграфе под $g(\tau)$ подразумевается та же самая функция, что и в остальных главах, взятая с обратным знаком. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть во всех формулах роль статической неустойчивости при $\alpha = 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда колебания происходят относительно $\alpha = 0$. В этом случае решение уравнения (17.4) целесообразно искать в виде

$$\alpha(\tau, \varphi) = \alpha_{\max}(\tau) \sin \{K[v(\tau)]\varphi, v(\tau)\}. \quad (17.6)$$

График функции $\sin [K(v)\varphi, v]$ изображен на рис. 19. По φ эта функция имеет период, равный четырем. Определение функций $\alpha_{\max}(\tau)$, $v(\tau)$ и $T(\tau)$, от которых зависит это выражение, производится точно так же, как это делалось в предыдущем параграфе. Опуская несложные выкладки, выражения для определения этих функций можно записать в следующем виде:

$$\frac{4v^2 M^2(v)}{(2v-1)^3} = \frac{D^2 b^2(\tau)}{g^3(\tau)} e^{-2 \int_0^\tau \int_{z(\tau)} l \tau} = \gamma(\tau), \quad (17.7)$$

$$T(\tau) = 4K(v) \sqrt{\frac{2v-1}{g(\tau)}}, \quad (17.8)$$

$$\alpha_{\max}(\tau) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{z(\tau)} l \tau} \sqrt{\frac{D \sqrt{1-2v}}{\sqrt{-g(\tau)} M(v)}}, \quad (17.9)$$

где

$$M(v) = \sqrt{1-v} L\left(\frac{-v}{1-v}\right), \quad M(0) = \frac{\pi}{4}, \quad M(1) = \frac{1}{3}.$$

График функции $M(v)$ построен на рис. 55. Входящая в (17.7) и (17.9) константа D будет ниже определена с помощью начальных условий. Уравнение (17.7) служит для определения функции $v(\tau)$. Рассчитанные с помощью (17.7) графики для определения этой функции при $b(\tau) \geq 0$ построены на рис. 56. После того как $v(\tau)$ определено, $T(\tau)$ и $\alpha_{\max}(\tau)$ определяются с помощью формул (17.8) и (17.9).

Из графиков на рис. 56 видно, что решение для функции $v(\tau)$ существует при значениях функции $\gamma(\tau)$, заключенных в интервалах

$$-\infty < \gamma(\tau) \leq 0, \quad \frac{4}{9} \leq \gamma(\tau) < \infty. \quad (17.10)$$

Приближение $\gamma(\tau)$ к нулю при $g(\tau) < 0$ соответствует установлению линейных колебаний в системе. В этом

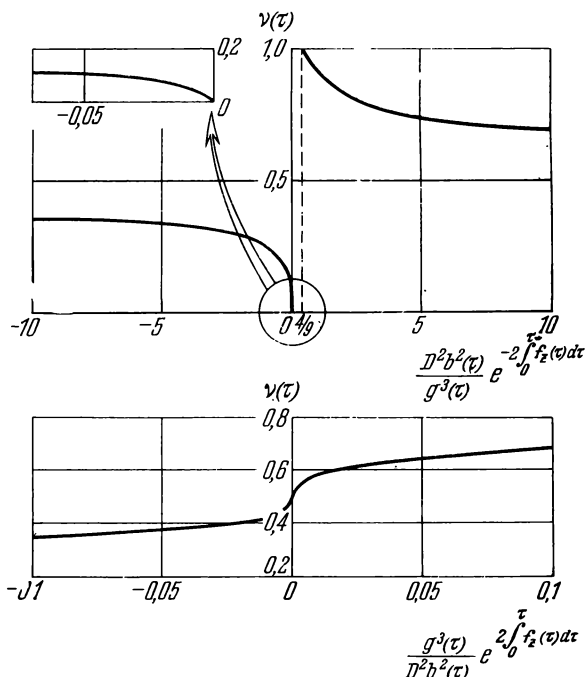


Рис. 56.

случае $T(\tau)$ и $\alpha_{\max}(\tau)$ стремятся к следующим значениям:

$$\left. \begin{aligned} T(\tau) |_{\gamma(\tau)=0} &= \frac{2\pi}{\sqrt{g(\tau)}}, \\ \alpha_{\max}(\tau) |_{\gamma(\tau)=0} &= e^{-\frac{1}{2} \int_0^\tau f_2(\tau) d\tau} \sqrt{\frac{4D}{\pi \sqrt{-g(\tau)}}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

При $g(\tau) \geq 0$ и $\gamma(\tau)$, стремящемся к $\pm \infty$, возрастает роль нелинейной компоненты восстанавливающего момента, которая при $b(\tau) \geq 0$ является стабилизирующей. На рис. 56 видно, что в этом случае $\gamma(\tau)$ стремится к $1/2$ и в

силу (17.8) и (17.9) $T(\tau)$ и $\alpha_{\max}(\tau)$ одновременно стремятся к нулю.

Во втором из интервалов (17.10) функция $\gamma(\tau)$ изменяется при $g(\tau) > 0$. Как уже указывалось, в этом случае в системе имеются три положения равновесия и возможны два типа возмущенного движения. Нам осталось рассмотреть случай, когда функция $\gamma(\tau)$, будучи положительной, приближается к $\frac{4}{9}$, так как случай, когда $\gamma(\tau)$ стремится к $+\infty$, был только что рассмотрен. При $\gamma(\tau)$, стремящемся к $\frac{4}{9}$, функция $v(\tau)$ стремится к единице и в силу (17.7) — (17.9) мгновенные период и амплитуда колебаний стремятся к следующим значениям:

$$T(\tau) \Big|_{\gamma(\tau)=\frac{4}{9}} = \infty, \quad \alpha_{\max}(\tau) \Big|_{\gamma(\tau)=\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2g(\tau)}{b(\tau)}}. \quad (17.12)$$

При $0 < \gamma(\tau) < \frac{4}{9}$ уравнение (17.7) действительных решений для $v(\tau)$ не имеет. Это связано с тем, что для этих значений функции $\gamma(\tau)$ решение эталонного уравнения (17.4) не может быть описано с помощью функции, колеблющейся около значения $\alpha = 0$, каковой является эллиптический косинус, так как в этом случае решение колеблется с малой амплитудой в окрестности $\alpha = \pm \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}$. Нетрудно убедиться в том, что значение (17.12) для $\alpha_{\max}(\tau)$ соответствует сепаратрисе на фазовой плоскости уравнения (17.4).

Для того чтобы получить асимптотическое решение для случая, когда колебания происходят в окрестности $\alpha_p = \pm \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}$, решение эталонного уравнения следует искать в виде

$$\alpha(\tau, \varphi) = \alpha_{\max}(\tau) \operatorname{dn} \{K[v(\tau)]\varphi, v(\tau)\}. \quad (17.13)$$

График функции $\operatorname{dn} [K(v)\varphi, v]$ построен на рис. 15. Период этой функции по φ равен двум. В результате подстановки этого выражения в уравнение (17.4) и в условие периодичности (10.4) получаются следующие выражения для

функций $v(\tau)$, $T(\tau)$ и $\alpha_{\max}(\tau)$:

$$\frac{4N^2(v)}{(2-v)^3} = \frac{D^2 b^2(\tau)}{g^3(\tau)} e^{-2 \int_0^\tau f_z(\tau) d\tau} = \gamma(\tau), \quad (17.14)$$

$$T(\tau) = 2K(v) \sqrt{\frac{2-v}{g(\tau)}}, \quad (17.15)$$

$$\alpha_{\max}(\tau) = \pm \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)} \frac{2}{(2-v)}}, \quad (17.16)$$

где

$$N(v) = \frac{(2-v)E(v) + 2(v-1)K(v)}{3},$$

$$N(0) = 0, \quad N(1) = \frac{1}{3}.$$

График функции $N(v)$ построен на рис. 57. В силу того, что функция $\ln [K(v)\Phi, v]$ изменяется между единицей и $\sqrt{1-v}$ (см. [17]), для $\alpha_{\min}(\tau)$ — минимального значения угла атаки за время каждого колебания получается формула

$$\alpha_{\min}(\tau) = \alpha_{\max}(\tau) \sqrt{1-v}. \quad (17.17)$$

Получим еще выражение для $\alpha_{\text{ср}}(\tau)$ — среднего значения угла атаки за время каждого колебания. По определению,

$$\alpha_{\text{ср}}(\tau) = \frac{1}{T_\Phi} \int_0^{T_\Phi} \alpha(\tau, \varphi) d\varphi.$$

Подставляя сюда (17.13) и вычисляя интеграл (см. [17]), получаем:

$$\alpha_{\text{ср}}(\tau) = \alpha_{\max}(\tau) \frac{\pi}{2K(v)}. \quad (17.18)$$

График для решения уравнения (17.14) для $v(\tau)$ построен на рис. 58. После того как $v(\tau)$ определено, $T(\tau)$, $\alpha_{\max}(\tau)$, $\alpha_{\min}(\tau)$ и $\alpha_{\text{ср}}(\tau)$ нетрудно вычислить с помощью выражений (17.15)–(17.18).

Из графика на рис. 56 видно, что решение уравнения (17.14) существует при

$$0 \leq \gamma(\tau) \leq \frac{4}{9}, \quad (17.19)$$

причем $v(\tau) = 0$ при $\gamma(\tau) = 0$ и $v(\tau) = 1$ при $\gamma(\tau) = 4/9$. При изменении $\gamma(\tau)$ от нуля до значения $4/9$ характери-

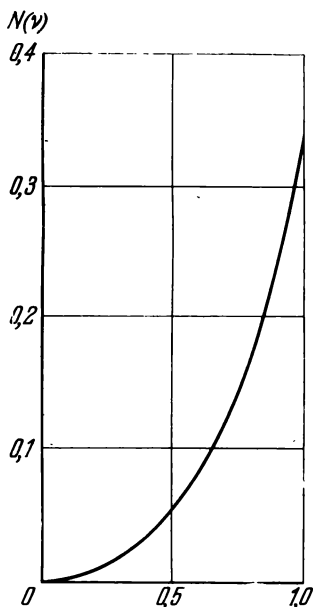


Рис. 57.

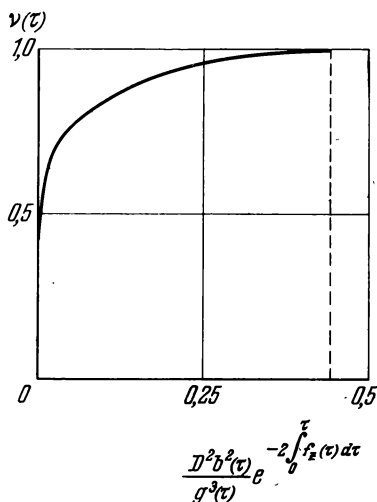


Рис. 58.

ки колебательного процесса изменяются в следующих интервалах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi \sqrt{2}}{\sqrt{g(\tau)}} &\leq T(\tau) < \infty, \\ \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}} &\leq |\alpha_{\max}(\tau)| \leq \sqrt{\frac{2g(\tau)}{b(\tau)}}, \\ \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}} &\geq |\alpha_{\min}(\tau)| \geq 0, \\ \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}} &\geq |\alpha_{\text{ср}}(\tau)| \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

Отсюда видно, что при стремлении $\gamma(\tau)$ к нулю колебания затухают и летательный аппарат стремится к одному из

устойчивых положений равновесия $\alpha_p = \pm \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}$, и наоборот, при стремлении $\gamma(\tau)$ к значению $4/9$ летательный аппарат раскачивается до тех пор, пока в момент, когда

$$\frac{D'b^2(\tau)}{g^3(\tau)} e^{-2 \int_0^\tau f_2(\tau) d\tau} = \frac{4}{9}, \quad (17.21)$$

не произойдет изменения характера колебательного процесса.

Таким образом, асимптотические решения (17.6) и (17.13) взаимно дополняют друг друга. С помощью сопряжения этих решений в моменты времени, когда выполняется равенство (17.21), можно исследовать возмущенное движение при произвольных значениях функции $\gamma(\tau)$ [при $b(\tau) \geq 0$]. Строго говоря, сопряжение асимптотических решений (17.6) и (17.13) следует производить с помощью численного интегрирования уравнения движения в окрестности корней уравнения (17.21). Это можно сделать примерно так же, как это было сделано в § 12 при исследовании перехода вращательного движения в колебательное.

Однако в результате анализа, проведенного в § 12 и 13, было установлено, что в случаях, когда параметр μ_1 , равный отношению интервала времени t_V , характерного для движения центра масс, к интервалу времени t_α , характерному для движения относительно центра масс летательного аппарата, достаточно велик (см. графики на рис. 25—27), то непосредственное сопряжение дает правильные результаты для подавляющего большинства начальных условий. В рассматриваемом случае, при исследовании движения при переходе через околозвуковой диапазон скоростей, отношение t_V / t_α является величиной порядка нескольких десятков (см. оценки, найденные в § 1), поэтому достаточно полную информацию о движении в рассматриваемом случае можно получить с помощью непосредственного сопряжения асимптотических решений (17.6) и (17.13).

При непосредственном сопряжении константа D в выражении для $\gamma(\tau)$ имеет одно и то же значение на всем рас

рассматриваемом интервале времени. Определим ее с помощью известного значения $\alpha_{\max}$ при $t = 0$. Так как при $t = 0$ функция $g(\tau) < 0$ [см. первое выражение (17.3)], то вначале летательный аппарат колеблется относительно $\alpha = 0$, и для определения D следует воспользоваться асимптотическим решением (17.6). Полагая в (17.7) и (17.9) $t = 0$ и учитывая, что при $t = 0$ функция $b(\tau) = 0$, получаем для D следующее выражение:

$$D = \frac{\pi}{4} \sqrt{-g_0} \alpha_{\max, 0}^2, \quad (17.22)$$

где g_0 — значение функции $g(\tau)$ при $t = 0$.

В рассматриваемом случае функция $\gamma(\tau)$ изменяется следующим образом: на сверхзвуковых и дозвуковых скоростях эта функция отрицательна и обращается в $-\infty$ в те моменты времени, когда теряется статическая устойчивость летательного аппарата при $\alpha = 0$, а на интервале времени, заключенном между этими моментами, когда летательный аппарат статически неустойчив при $\alpha = 0$, функция $\gamma(\tau) > 0$ и изменяется от $+\infty$ до некоторого минимального значения, а затем снова от этого минимального значения до $+\infty$. Это хорошо видно на рис. 59, где функция $\gamma(\tau)$ построена для закона изменения коэффициентов $g(\tau)$ и $b(\tau)$, изображенных на рис. 54. Из изложенного ясно, что если при $g(\tau) > 0$

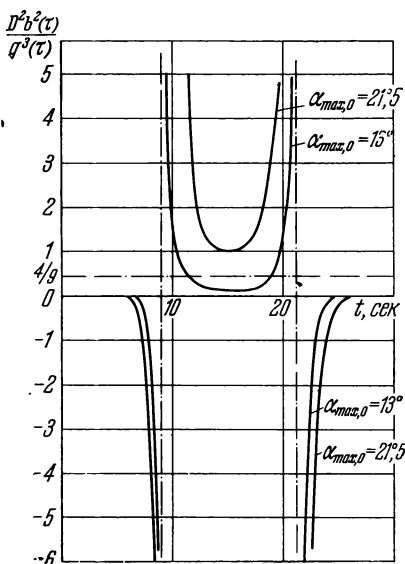


Рис. 59.

$$\min \left\{ \frac{D^2 b^2(\tau)}{g^3(\tau)} e^{-2 \int_0^\tau f_z(\tau) d\tau} \right\} > \frac{4}{9}, \quad (17.23)$$

то летательный аппарат все время колеблется относительно $\alpha = 0$ и изменений характера возмущенного движения не происходит, и наоборот, если при $g(\tau) > 0$ это неравенство нарушается, то при $t = t_{*1}$ происходит скачкообразная смена колебаний относительно $\alpha_p = 0$ колебаниями относительно $\alpha_p = \pm \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}$, а затем снова при $t = t_{*2}$ скачкообразно восстанавливаются колебания относительно $\alpha_p = 0$ [здесь через t_{*1} и t_{*2} обозначены корни уравнения (17.21)]. Заметим, что, подобно тому как это было сделано в § 10, изменения характера возмущенного движения, которые рассматривались в настоящем и предыдущем параграфах, очень наглядно могут быть объяснены с помощью квазистатического рассмотрения фазовых плоскостей для соответствующих эталонных уравнений.

В случае изменения моментных характеристик, которое рассматривается в настоящем параграфе, при $t_{*1} < t < t_{*2}$ среднее за период значение угла атаки отлично от нуля. Вследствие этого подъемная сила, действующая на летательный аппарат, при $t_{*1} < t < t_{*2}$ имеет постоянную составляющую, под воздействием которой летательный аппарат может отклониться от заданной траектории. Для оценки ΔL — величины отклонения летательного аппарата от заданной траектории в горизонтальной плоскости можно получить следующую приближенную формулу:

$$\Delta L = \int_{t_{*1}}^{t_{*2}} \int_{\eta}^{\eta} \frac{c_{\eta}^{\alpha} \alpha_{cp} q S}{m} \sin \theta dt d\eta. \quad (17.24)$$

Здесь α_{cp} связано с t при помощи формулы (17.18), а зависимости скоростного напора q и угла наклона траектории θ от t берутся для исходной траектории. Для того чтобы получить эту формулу уравнения движения центра масс летательного аппарата, следует спроектировать на горизонталь и затем проварьировать получающееся таким образом уравнение вблизи исходной траектории.

Для иллюстрации, результатов, полученных в настоящем параграфе, было рассчитано изменение угла атаки летательного аппарата, у которого коэффициент момента m_z изменяется в соответствии с графиками, изображен-

ными на рис. 54. Чтобы выделить влияние рассматриваемой нелинейности, расчеты были выполнены без учета демпфирования. Сначала была рассчитана зависимость

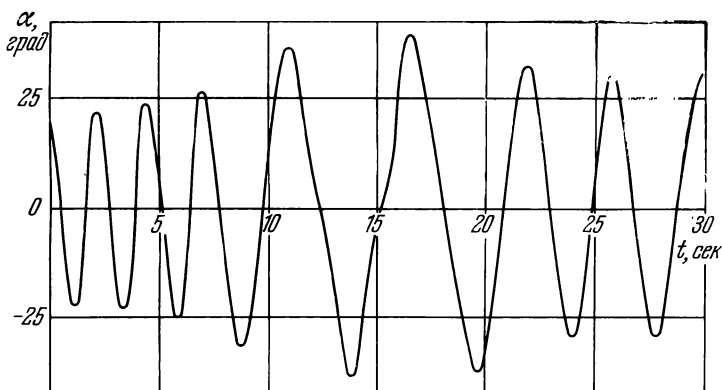


Рис. 60.

$\alpha(t)$ при $\alpha_{\max,0} = 21^\circ,5$. Результаты этого расчета представлены на рис. 60. Из рисунка видно, что при таком

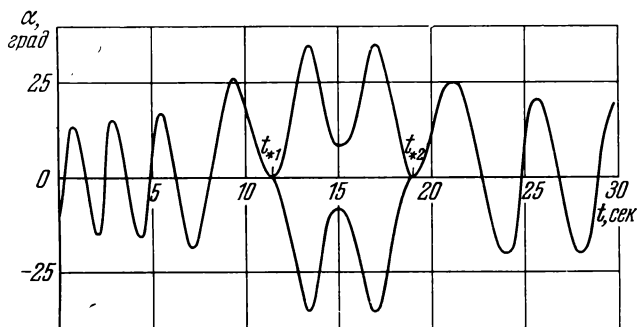


Рис. 61.

значении $\alpha_{\max,0}$ происходит довольно сильное увеличение амплитуды колебаний при тех значениях t_{*j} , при которых положение равновесия $\alpha = 0$ становится неустойчивым.

Следующий расчет был произведен при $\alpha_{\max,0} = 13^\circ$. Результаты этого расчета изображены на рис. 61. В этом случае влияние неустойчивости положения равновесия $\alpha = 0$ проявляется в том, что при $t_{*1} = 11,5$ сек и $t_{*2} = 19$ сек происходит изменение характера колебательного процесса. При $t < t_{*1}$ и $t > t_{*2}$ колебания происходят относительно $\alpha = 0$, а при $t_{*1} < t < t_{*2}$ летательный аппарат совершает колебания либо в окрестности $\alpha \approx 22^\circ$, либо в окрестности $\alpha \approx -22^\circ$. При таком начальном значении амплитуды колебаний летательный аппарат может отклониться от заданной траектории.

§ 18. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ИЗ-ЗА НЕТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ЗАВИСИМОСТИ ПРОДОЛЬНОГО МОМЕНТА ОТ УГЛА АТАКИ

Рассмотрим вопрос о влиянии неточностей, которые неизбежно возникают при аппроксимации зависимости продольного момента от угла атаки. Ограничиваясь случаем плоского движения, сравним для этого решения уравнения (10.1) для угла атаки, полученные для случаев, когда зависимость $m_z(\tau, \alpha)$ аппроксимируется кубической параболой и синусоидой. В этих случаях выражения для функции $M(\tau, \alpha)$ могут быть записаны в виде

$$M(\tau, \alpha) = g(\tau)\alpha - b(\tau)\alpha^3, \quad g(\tau) > 0, \quad b(\tau) \geq 0; \quad (18.1)$$

$$M(\tau, \alpha) = a(\tau)\sinh(\tau)\alpha, \quad a(\tau) > 0, \quad h(\tau) > 0. \quad (18.2)$$

В соответствии с изложенным в предыдущих параграфах для каждой из таких зависимостей $M(\tau, \alpha)$ могут быть найдены асимптотические решения и затем сопоставлены между собой все характеристики возмущенного движения. Такое сопоставление будет проведено для случая, рассмотренного в § 16.

Весьма важными величинами при аппроксимации являются нули функции $M(\tau, \alpha)$. Эти величины определяют собой положения равновесия, ограничивают область колебательности решения и т. д. Поэтому прежде всего необходимо потребовать, чтобы функции (18.1) и (18.2) обращались в нуль при одних и тех же значениях α .

Для этого, очевидно, необходимо определить функцию $h(\tau)$ с помощью формулы

$$h(\tau) = \pi \sqrt{\frac{b(\tau)}{g(\tau)}}. \quad (18.3)$$

Для полного определения функции (18.2) необходимо наложить еще одно условие. Так, например, можно потребовать совпадения касательных при каких-либо значениях α , можно потребовать равенства площадей, ограничиваемых этими кривыми, и т. д. Ниже рассматриваются два случая: случай, когда функции (18.1) и (18.2) имеют одинаковые касательные при $\alpha = 0$, и случай, когда при каждом значении τ имеет место равенство площадей, ограничиваемых кривыми (18.1) и (18.2) и заключенных между их нулями.

Решения уравнения движения (10.1) вычислялись с помощью асимптотических формул, приведенных в предыдущих параграфах, и лишь в окрестности точки, где решение теряет колебательный характер, продолжались с помощью численного интегрирования. Асимптотические решения для зависимости $M(\tau, \alpha)$, определяемой выражением (18.1), вычислялись с помощью формул § 16. Все результаты для этого случая изображены на рис. 62—65 пунктирными линиями. Что же касается зависимости (18.2) для $M(\tau, \alpha)$, то вследствие ее отличия коэффициентом $h(\tau)$ при α от зависимости (10.7) для $M(\tau, \alpha)$, для которой в § 10 вычислены асимптотические решения, формулы для определения асимптотических решений в рассматриваемом случае несколько отличаются от формул § 10. Опуская несложные выкладки, совершенно аналогичные выкладкам, проведенным в § 10, приведем итоговые соотношения для определения асимптотических решений в случае зависимости $M(\tau, \alpha)$, определяемой выражением (18.2).

Выражения для $\alpha(t)$ и $d\alpha/dt$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_{\max}(\tau) S[\varphi(t), v(\tau)], \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \alpha_{\max}^{(\varphi)}(\tau) S_{\varphi}[\varphi(t), v(\tau)], \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

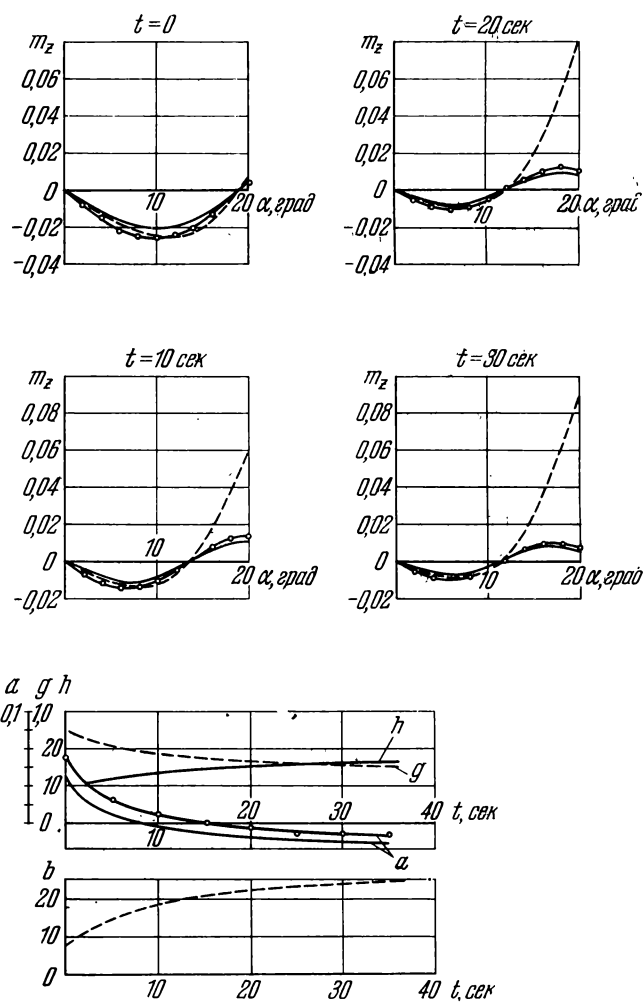


Рис. 62.

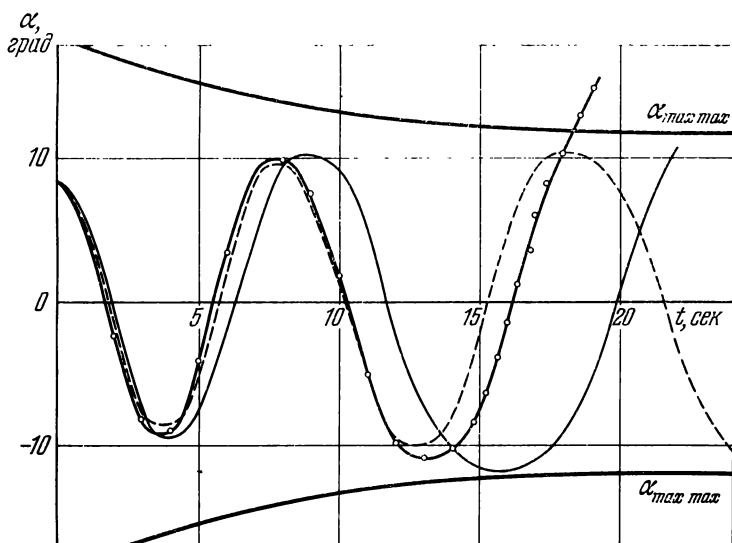


Рис. 63.

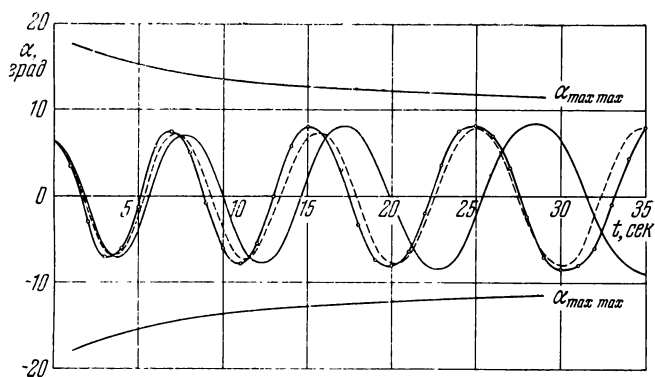


Рис. 64.

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} &= \frac{2}{h(\tau)} \arcsin \sqrt{\bar{v}}, \\ \alpha_{\max}^{(\varphi)} &= 2 \sqrt{\frac{a(\tau)}{h(\tau)}} \sin \frac{h(\tau) \alpha_{\max}}{2}, \\ \varphi(t) &= \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau + \omega, \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

а функции $S(\varphi, v)$ и $S_{\varphi}(\varphi, v)$ изображены на рис. 18 и 19.

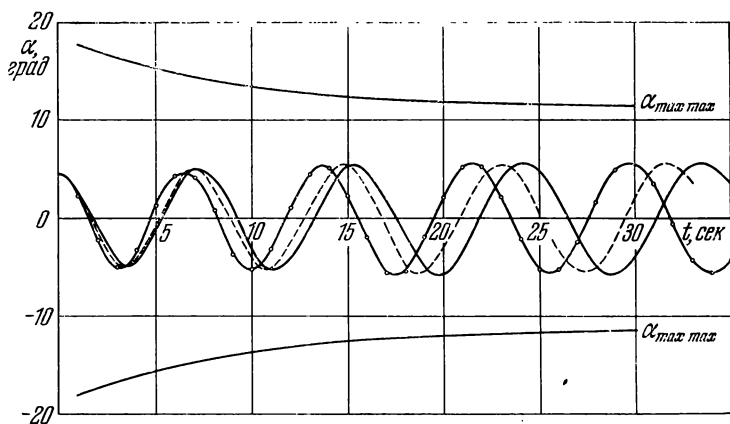


Рис. 65.

Уравнение для определения функции $v(\tau)$ записывается в форме

$$4 [E(v) - (1 - v) K(v)] = \frac{De^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_2(\tau) d\tau} h^2(\tau)}{\sqrt{a(\tau) h(\tau)}}. \quad (18.6)$$

Это уравнение может быть решено с помощью графика на рис. 20, построенного для решения уравнения (10.33), если считать, что на этом рисунке по оси абсцисс отложены значения функции, стоящей в правой части этого уравнения. Наконец, мгновенная частота колебаний $\omega(\tau)$

определяется формулой

$$\omega(\tau) = \frac{\sqrt{a(\tau)h(\tau)}}{K[v(\tau)]}. \quad (18.7)$$

При $h(\tau) = 1$ эти формулы переходят в аналогичные формулы (10.33) — (10.37).

Перейдем к анализу результатов расчета. Рассмотрим сначала случай, когда функции (8.1) и (8.2) имеют одинаковые касательные при $\alpha = 0$. В этом случае выражение для $a(\tau)$ имеет вид:

$$a(\tau) = \frac{g(\tau)}{h(\tau)} = \frac{g(\tau)}{a} \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}. \quad (18.8)$$

Результаты расчетов, соответствующие этому случаю, изображены на рис. 62—65 сплошными линиями.

На рис. 62 произведено сравнение моментных характеристик $m_z(\tau, \alpha)$ и построены графики коэффициентов $g(\tau)$, $b(\tau)$, $a(\tau)$ и $h(\tau)$. Видно, что при рассматриваемом условии для выбора функции $a(\tau)$ в интересующем нас диапазоне изменения угла атаки пунктирные кривые, соответствующие кубической параболе, лежат ниже сплошных кривых. Это означает, что в случае кубической параболы получаются несколько большие по абсолютной величине значения восстанавливающего момента, чем в случае зависимости $m_z(\tau, \alpha)$ вида (18.2). Вследствие этого решения, соответствующие функции (18.1) (пунктирные линии), должны иметь большую частоту колебаний и меньшую амплитуду по сравнению с решениями, соответствующими функции (18.2) (сплошные линии). Эти соображения иллюстрируются результатами расчетов, представленными на рис. 63 — 65. На этих рисунках изображены зависимости $\alpha(t)$ при различных значениях начального возмущения $\alpha(0)$. Как видно из графиков, из-за отличия в частоте колебаний пунктирные и сплошные кривые быстро расходятся и по прошествии нескольких колебаний их фазы начинают значительно различаться. Отличия в амплитуде колебаний, несмотря на то, что они невелики, становятся существенными (см. рис. 63) при подходе решения к линиям $\alpha_{\max \max}(\tau)$, определяющим положения

неустойчивого равновесия

$$\alpha_{\max \max}(\tau) = \pm \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}} \quad (18.9)$$

— границы колебательности решения.

При движении в окрестности этих линий малого изменения амплитуды достаточно для того, чтобы вызвать качественное изменение характера решения — привести к потере колебательности. Из сопоставления кривых на рис. 63—65 видно, что большие отличия между пунктирными и сплошными кривыми получаются в случае больших начальных возмущений. Этот результат является естественным следствием различия кривых $m_z(\tau, \alpha)$.

Перейдем ко второму случаю, когда функция $a(\tau)$ выбирается из условия равенства площадей. Все кривые, соответствующие этому случаю, изображены на рис. 62—65 линиями с кружками. Исходное уравнение для определения функции $a(\tau)$ имеет вид:

$$\int_0^{\alpha_{\max \max}} g(\tau) \alpha - b(\tau) \alpha^3 d\alpha = \int_0^{\alpha_{\max \max}} a(\tau) \sin h(\tau) \alpha d\alpha.$$

Из этого уравнения после несложных преобразований получается следующая формула для расчета функции $a(\tau)$:

$$a(\tau) = \frac{\pi^3}{8} \frac{g(\tau)}{h(\tau)} = \frac{\pi}{8} g(\tau) \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}}. \quad (18.10)$$

Из сопоставления формул (18.8) и (18.10) видно, что в рассматриваемом случае абсолютное значение наклона кривых $m_z(\tau, \alpha)$ при $\alpha = 0$ получается в $\pi^2/8 = 1,232$ раза больше, чем в первом случае. Это также хорошо видно и на рис. 62. Вследствие этого кривые с кружками при больших начальных возмущениях (рис. 63 и 64) лежат значительно ближе к пунктирным кривым, чем сплошные. Однако это не имеет места при малом начальном возмущении (рис. 65), когда основную роль играет совпадение наклона кривых (18.1) и (18.2) при $\alpha = 0$.

Из сопоставления кривой с кружками с пунктирной и сплошной кривыми на рис. 63 хорошо видно, что малые

изменения амплитуды, вызванные неточностями при аппроксимации, вместе с ошибкой в фазе колебаний могут привести к значительной разнице в моментах потери колебательности решения. Видно, что в рассмотренных примерах ошибка в этой величине может оказаться порядка периода колебаний.

В результате изложенного выше становится ясно, что малые погрешности в аппроксимации зависимости продольного момента от угла атаки, хотя и мало изменяют частоту и амплитуду колебаний, однако, накапливаясь, приводят к значительным погрешностям в фазе колебаний и в моменте потери колебательности решения. Этот факт следует иметь в виду при использовании и разработке приближенных методов для исследования уравнений возмущенного движения. Так, например, обычно весьма громоздкие вычисления необходимо производить при определении поправок к частотам, обеспечивающих совпадение фазы колебаний. Из изложенного ясно, что эти вычисления могут оказаться совершенно бесполезными из-за ошибок, допущенных при аппроксимации исходных зависимостей. Очевидно, что точно так же обстоит дело с вычислением решений в окрестности особых, с точки зрения асимптотического метода, точек, в которых происходит изменение характера решения.

В заключение заметим, что полученные качественные выводы о погрешностях, происходящих из-за неточностей при аппроксимации исходных зависимостей, допускают простое объяснение, которое было приведено выше, и в силу этого, несмотря на то, что они получены на основании рассмотрения одного примера, имеют достаточно общий характер. Рассмотренный пример лишь иллюстрирует их.

§ 19. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Наряду с изложенными в главе II точными методами вычисления асимптотических решений целесообразно иметь в распоряжении также и более простые приближенные методы. Использование таких методов особенно целесообразно в случаях, когда исходные зависимости аэродина-

мических характеристик от угла атаки и времени известны с не очень высокой точностью. Очевидно, что погрешность, допускаемая при вычислении асимптотических решений, не должна быть больше погрешностей, которые возникают из-за неточности задания исходных данных.

В настоящем параграфе будет изложен приближенный метод вычисления асимптотических решений, основанный на разыскании решения эталонного уравнения (6.6) в виде ряда Фурье. Данный метод будет изложен на примере уравнения плоского движения (10.1), а точность этого метода будет оценена путем сравнения с точным асимптотическим решением, описывающим колебания угла атаки летательного аппарата при переходе через околозвуковой диапазон скоростей (см. § 16).

Будем искать решение эталонного уравнения (10.2) в следующем виде:

$$\alpha_0(\tau, \varphi) = \sum_{n=0}^N B_n(\tau) \cos n\varphi. \quad (19.1)$$

Подставляя это выражение в эталонное уравнение (10.2), получаем:

$$\begin{aligned} -\omega^2(\tau) \sum_{n=0}^N B_n(\tau) n^2 \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=0}^N M_n[\tau, B_0(\tau), \dots, B_N(\tau)] \cos n\varphi = 0. \end{aligned} \quad (19.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_n[\tau, B_0(\tau), \dots, B_N(\tau)] = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi M \left[\tau, \sum_{n=0}^N B_n(\tau) \cos \varphi \right] \cos n\varphi d\varphi \\ (n = 0, 1, \dots). \end{aligned} \quad (19.3)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых гармониках и пренебрегая гармониками более высокого порядка, чем N , получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2(\tau) B_n(\tau) n^2 + M_n[\tau, B_0(\tau), \dots, B_N(\tau)] = 0 \\ (n = 0, 1, \dots, N). \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

Эта система уравнений состоит из $N + 1$ уравнений и содержит $N + 2$ неизвестных: $\omega(\tau)$, $B_0(\tau), \dots, B_N(\tau)$. Недостающее уравнение получается в результате подстановки выражения (19.1) в условие периодичности (10.3). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{T_\Phi}{2} \int_0^2 \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \Phi} \right)^2 d\Phi &= \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^N B_n(\tau) n \sin n\Phi \right]^2 d\Phi = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^N B_n^2(\tau) n^2. \quad (19.5) \end{aligned}$$

С учетом (19.5) условие периодичности (10.3) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\omega(\tau) \sum_{n=0}^N B_n^2(\tau) n^2 \right] + \omega(\tau) \frac{2}{\pi} \times \\ \times \int_0^\pi f_z \left[\tau, \sum_{n=0}^N B_n(\tau) \cos n\Phi \right] \left[\sum_{n=0}^N B_n(\tau) n \sin n\Phi \right]^2 d\Phi = 0. \end{aligned} \quad (19.6)$$

При помощи системы уравнений (19.4) и (19.6) неизвестные функции $\omega(\tau)$, $B_0(\tau), \dots, B_N(\tau)$ могут быть выражены через известные функции. Наибольший интерес из-за простоты представляет случай, когда $N = 1$. В этом случае система уравнений (19.4) и (19.6) содержит всего лишь три неизвестных: $\omega(\tau)$, $B_0(\tau)$ и $B_1(\tau)$.

Очевидно, что аналогичная методика приближенного вычисления асимптотических решений может быть также развита и для полных уравнений (6.1) пространственного движения летательного аппарата.

Для того чтобы проиллюстрировать эту методику и оценить ее точность в случае $N = 1$, вычислим приближенное асимптотическое решение уравнения (10.1) при зависимости $M(\tau, \alpha)$, определяемой выражением (16.1), и $f_z(\tau, \alpha) = f_z(\tau)$ и затем сравним его с точным асимптотическим решением. Система уравнений (19.4) и (19.6) в

этом случае имеет вид;

$$\left. \begin{aligned} g(\tau) B_0(\tau) - b(\tau) B_0(\tau) \left[B_0^2(\tau) + \frac{3}{2} B_1^2(\tau) \right] &= 0, \\ -\omega^2(\tau) B_1(\tau) + g(\tau) B_1(\tau) - b(\tau) B_1(\tau) \times \\ &\times \left[3B_0^2(\tau) + \frac{3}{4} B_1^2(\tau) \right] = 0, \\ \omega(\tau) B_1^2(\tau) &= C e^{-\int_0^\tau f_2(\tau) d\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

где C — произвольная постоянная,

В рассматриваемом случае, когда $g(\tau) > 0$, колебания могут происходить только лишь относительно $\alpha = 0$. Вследствие этого

$$B_0(\tau) = 0. \quad (19.8)$$

С учетом этого равенства система уравнений (19.7) упрощается и записывается в форме

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2(\tau) + g(\tau) - \frac{3}{4} b(\tau) B_1^2(\tau) &= 0, \\ \omega(\tau) B_1^2(\tau) &= C e^{-\int_0^\tau f_2(\tau) d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (19.9)$$

Для того чтобы привести эту систему к более удобному виду, введем в рассмотрение функцию $\mu(\tau)$ при помощи равенства

$$\omega(\tau) = \sqrt{g(\tau)} \mu(\tau). \quad (19.10)$$

Исключая из (19.9) функцию $B_1(\tau)$ и используя (19.10), получаем следующее уравнение для $\mu(\tau)$:

$$\mu^3(\tau) - \mu(\tau) + \frac{3}{4} q(\tau) = 0, \quad (19.11)$$

где

$$q(\tau) = \frac{Cb(\tau)}{g(\tau)^{3/2}} e^{-\int_0^\tau f_2(\tau) d\tau}.$$

Физический смысл имеет положительное действительное решение этого уравнения, стремящееся в силу (19.10) к единице при $b(\tau)$, стремящемся к нулю. График для вычисления такого решения уравнения (19.11) изображен на

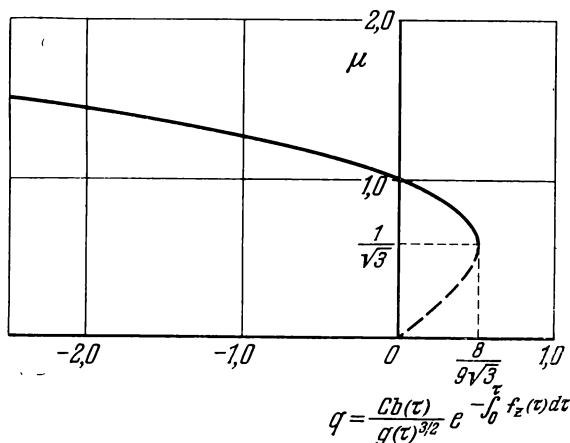


Рис. 66.

рис. 66. Из графика видно, что решение для $\mu(\tau)$ существует при условии

$$\frac{Cb(\tau)}{g(\tau)^{3/2}} e^{-\int_0^\tau f_z(\tau) d\tau} \leq \frac{8}{9\sqrt{3}}. \quad (19.12)$$

В тех случаях, когда это условие нарушается, решение эталонного уравнения нельзя искать в виде (19.1).

В момент $t = t_*$, когда

$$\frac{Cb(\tau)}{g(\tau)^{3/2}} e^{-\int_0^\tau f_z(\tau) d\tau} = \frac{8}{9\sqrt{3}}, \quad (19.13)$$

движение теряет колебательный характер (летательный аппарат опрокидывается).

После того как мгновенная частота колебаний $\omega(\tau)$ определена, амплитуда колебаний $B_1(\tau)$ вычисляется при

помощи второго из уравнений системы (19.9):

$$B_1(\tau) = e^{-\frac{1}{2} \int_0^\tau f_2(\tau) d\tau} \sqrt{\frac{C}{V g(\tau) \mu(\tau)}}. \quad (19.14)$$

По мере приближения системы к границе колебательности решения функция $\mu(\tau)$ убывает (см. рис. 66) и, следовательно, влияние нелинейности приводит к увеличению амплитуды колебаний.

Сравним приближенные асимптотические формулы для мгновенного периода и амплитуды колебаний с точными асимптотическими формулами § 16. Рассмотрим сначала случай, когда $b(\tau) = 0$. Из графика на рис. 66 видно, что в этом случае $\mu(\tau) = 1$, и из формул (19.9), (19.10) и (6.19) с учетом того, что в данном случае $T_\phi = 2\pi$, следует, что

$$T(\tau)|_{b=0} = \frac{2\pi}{V g(\tau)}, \quad B_1(\tau)|_{b=0} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^\tau f_2(\tau) d\tau} \sqrt{\frac{C}{V g(\tau)}}. \quad (19.15)$$

Как показывает рассмотрение равенств (16.11), (16.12) и (19.1), в этом случае точные асимптотические формулы совпадают с (19.15). Рассмотрим, далее, случай, когда $b(\tau) > 0$ и с течением времени эта функция возрастает. Здесь возможна потеря колебательности решения — опрокидывание летательного аппарата. Этот случай является наиболее тяжелым для приближенного метода при $N = 1$, так как здесь влияние высших гармоник, которые при $N = 1$ не учитываются, должно быть наибольшим. Сравним приближенные и точные соотношения в момент опрокидывания летательного аппарата. Из графика на рис. 66 и равенства (19.13) видно, что в этот момент

$$\mu(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (19.16)$$

Из равенств (19.14) и (19.15) следует, что в этот же момент

$$B_1(\tau)| = B_1(\tau)|_{b=0} \sqrt[4]{3}. \quad (19.17)$$

Выражение (16.14) для $B_1(\tau) = \alpha_{\max}(\tau)$ в этот момент времени, полученное при помощи точных асимптотических соотношений (16.7) и (6.9) при $\nu = 1$, отличается от (19.17) тем, что вместо коэффициента $\sqrt[4]{3} = 1,316$ стоит коэффициент 1,289. Сравним, далее, выражения для $\max \alpha_{\max, 0}$, при котором летательный аппарат на всем рассматриваемом интервале времени $0 \leq t \leq t|_{H=0}$ будет колебаться в окрестности $\alpha = 0$. Так же как и в § 16, рассмотрим случай, когда при $t = 0$

$$b(0) = 0, \quad g(0) = g_0, \quad B_1(0) = \alpha_{\max, 0}. \quad (19.18)$$

В этом случае $\mu(0) = 1,0$ и в силу (19.14)

$$C = \sqrt{g_0} \alpha_{\max, 0}^2. \quad (19.19)$$

Условие неопрокидывания летательного аппарата представляет собой неравенство (19.12). Подставляя туда выражение (19.19) для C , выражение для $\max \alpha_{\max, 0}$ можно записать в виде

$$\max \alpha_{\max, 0} = \sqrt[4]{\frac{8}{9 \sqrt{3}}} \min_{0 \leq t \leq t|_{H=0}} \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^t z(\tau) \tau^4 \frac{g(\tau)}{g_0} d\tau} \sqrt[4]{\frac{g(\tau)}{g_0}} \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}} \right). \quad (19.20)$$

Выражение для $\max \alpha_{\max, 0}$, которое получено при помощи точного асимптотического решения в § 16, отличается от (19.20) лишь тем, что вместо коэффициента $\sqrt[4]{\frac{8}{9 \sqrt{3}}} = 0,716$ стоит коэффициент $\sqrt[4]{\frac{4 \sqrt{2}}{3\pi}} = 0,775$. Таким образом, в рассмотренном примере приближенные асимптотические формулы по сравнению с точными асимптотическими формулами имеют ошибку порядка 10%.

ВХОД В АТМОСФЕРУ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА, СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ВНЕ АТМОСФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ ВРАЩЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ

§ 20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В СЛУЧАЕ, КОГДА ДВИЖЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ РЕГУЛЯРНУЮ ПРЕЦЕССИЮ С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

В настоящей главе будет рассматриваться движение летательного аппарата, которому в момент отделения от носителя сообщается угловая скорость ω_{x0} относительно продольной оси. Если величина этой скорости много больше поперечных компонент угловой скорости ω_{y0} и ω_{z0} , то летательный аппарат будет сохранять свою ориентацию при движении на внеатмосферном участке траектории. В этом случае угол атаки у летательного аппарата в момент входа в атмосферу появляется из-за изменения угла наклона траектории в процессе движения и на границе атмосферы он будет равен $\Delta\theta$ — полному изменению угла наклона траектории на ее внеатмосферном участке (см. рис. 1). Если пренебречь проекциями угловой скорости ω_{z0} и ω_{y0} по сравнению с ω_{x0} , то начальные условия для исследования возмущенного движения в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha|_{t=t_1} &= \Delta\theta, \quad r|_{t=t_1} = r_1 = \frac{I_x \omega_{x0}}{I_z}, \\ \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=t_1} &= 0, \quad \lambda|_{t=t_1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20.1)$$

(здесь через t_1 обозначен момент попадания летательного аппарата на границу атмосферы). Соотношение для определения границы атмосферы в рассматриваемом случае указано в § 22.

Сделаем одно замечание относительно коэффициента момента m_z . Так как проблема входа в атмосферу пред-

ставляет интерес лишь для летательных аппаратов, движущихся со скоростями порядка нескольких километров в секунду, то при решении ее на всей верхней части траектории можно с достаточной степенью точности не учитывать изменения формы зависимости m_z от α при изменении чисел Re и M и соответственно считать выполняющимся равенство (2.11). Кроме этого, будем предполагать, что начало отсчета угла атаки выбрано таким образом, что при $\alpha = 0$ летательный аппарат является статически устойчивым. При таком условии можно, очевидно, считать [см. выражение (2.11)], что $g(\tau) \geq 0$.

До тех пор пока летательный аппарат, стабилизированный с помощью вращения, находится за пределами атмосферы, его скорость прецессии равняется нулю. По мере входа летательного аппарата в атмосферу появляется аэродинамический момент M_z , который стремится изменить его угол атаки. Как хорошо известно из теории гироскопов, под воздействием этого момента летательный аппарат начнет прецессировать относительно вектора скорости центра масс. Если в процессе снижения аэродинамический момент изменится достаточно плавно, то летательный аппарат будет продолжать прецессировать с медленно изменяющейся скоростью прецессии и углом атаки.

В соответствии с этим решение задачи о движении вращающегося относительно продольной оси летательного аппарата при входе в атмосферу можно искать среди решений, описывающих регулярные прецессии с медленно изменяющимися параметрами.

Для определения асимптотических решений в случае регулярных прецессий с помощью метода, изложенного в главе II, следует считать, что решения эталонного уравнения (6.6) не зависят от φ . При таком условии эталонное уравнение (6.6) с учетом выражения (6.2) для M_z и (2.11) для $M(\tau, \alpha)$ записывается в виде

$$\frac{(G - r \cos \alpha)(r - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + g(\tau) F(\alpha) = 0. \quad (20.2)$$

Выражение для скорости прецессии λ дается формулой (5.5). С учетом этого выражения уравнения,

определяющие λ и α могут быть записаны в форме

$$\left. \begin{aligned} -\lambda^2 \sin \alpha \cos \alpha + r \lambda \sin \alpha + g(\tau) F(\alpha) &= 0, \\ \lambda \sin^2 \alpha + r \cos \alpha - G &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.3)$$

Для того чтобы замкнуть эту систему, следует воспользоваться условиями периодичности (7.21). При $\alpha(\tau, \varphi)$ и $\lambda(\tau, \varphi)$, не зависящих от φ , первое из условий (7.21) удовлетворяется тождественно, а последние два записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} G' + f_y(\tau, \alpha) G + \\ + \left\{ [f_x(\tau, \alpha) - f_y(\tau, \alpha)] \cos \alpha - \frac{Y(\tau, \alpha) \sin \alpha}{mV(\tau)} \right\} r &= 0, \\ r' + f_x(\tau, \alpha) r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

индекс «0», использовавшийся в главе II для обозначения асимптотических решений, здесь опущен; штрихами обозначены производные по медленному времени τ).

Заметим, что уравнения (20.3) и (20.4) можно сразу получить из уравнений движения (5.7), если считать, что α является функцией от τ , и пренебречь первым и последним членами в первом из уравнений (5.7), которые оказываются порядка ε^2 .

Уравнения (20.3) и (20.4) представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка для функций r , α , λ и G . Вследствие этого можно задать начальные условия только для двух из этих величин. Для того чтобы показать, что решение задачи о входе в атмосферу содержится среди решений системы уравнений (20.3) и (20.4), необходимо убедиться в том, что можно удовлетворить всем начальным условиям (20.1). Значения $\alpha|_{t=t_1}$ и $r|_{t=t_1}$, очевидно, следует считать определенными из условий движения летательного аппарата вне атмосферы. Что же касается $\lambda|_{t=t_1}$ и $\frac{dx}{dt}|_{t=t_1}$, то необходимо убедиться в том, что равенство этих величин нулю вытекает из уравнений (20.3) и (20.4). Равенство нулю $\lambda|_{t=t_1}$ сразу следует из первого уравнения (20.3), так как в силу исчезающе малых значений плотности на границе атмосферы можно считать, что $g(\tau)|_{t=t_1} = 0$. Что касается производной

$\frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=t_1}$, то равенство ее нулю также не вызывает сомнений, так как у ориентированного аппарата на участке траектории DE (см. рис. 1) угол атаки не изменяется. Это можно показать также и с помощью уравнений (20.3) и (20.4), если учесть, что на границе атмосферы при $t = t_1$ как аэродинамические моменты, так и их производные по времени можно считать равными нулю.

Таким образом, исследование движения летательного аппарата при входе в атмосферу в рассматриваемом случае можно провести с помощью уравнений (20.3) и (20.4).

Рассмотрим сначала случай входа в атмосферу нейтрального летательного аппарата, у которого $g(\tau) = 0$. В этом случае из уравнений (20.3) и равенств (20.1) следует, что

$$\lambda = 0, \quad G = r \cos \alpha. \quad (20.5)$$

Таким образом, в этом случае плоскость угла атаки не вращается относительно вектора скорости.

Подставляя выражение (20.5) для G в первое уравнение (20.4), получаем:

$$r' \cos \alpha - r \sin \alpha \cdot \alpha' + f_y r \cos \alpha + \left[(f_x - f_y) \cos \alpha - \frac{Y \sin \alpha}{mV} \right] r = 0.$$

Используя выражение (20.4) для r' , приведем это уравнение к виду

$$\alpha' = - \frac{Y(\tau, \alpha)}{mV(\tau)} = - \frac{c_y(\alpha) q(\tau) S}{mV(\tau)}. \quad (20.6)$$

Это уравнение описывает изменение угла атаки за счет изменения угла наклона траектории под действием подъемной силы в плоскости угла атаки. Если обозначить через θ_α угол между некоторым неподвижным направлением в плоскости угла атаки и касательной к траектории, а через ϑ_α угол между этим направлением и осью аппарата, то очевидно, что

$$\vartheta_\alpha = \theta_\alpha + \alpha. \quad (20.7)$$

а уравнение, описывающее изменение угла θ_x , полученное, так же как и уравнения (20.3) и (20.4) без учета действия гравитационных сил, имеет вид:

$$\dot{\theta}_x = \frac{Y(\tau, \alpha)}{mV(\tau)}. \quad (20.8)$$

Из уравнений (20.6) — (20.8) вытекает, что

$$\dot{\vartheta}_x = 0, \quad \vartheta_x = \text{const}. \quad (20.9)$$

Из этих формул следует очевидный факт, заключающийся в том, что при снижении «закрученного» нейтрального летательного аппарата его ориентация не изменяется. Уравнение для угла атаки (20.6) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными и может быть легко проинтегрировано. Если считать, что $c_y(\alpha) \sim \alpha$, то выражение для угла атаки, полученное с учетом формул (20.6) и (3.1), может быть записано в виде

$$\alpha = \Delta\theta e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} \frac{c_{yq} \alpha}{mV} d\tau} = \Delta\theta \left(\frac{V}{V_1} \right)^{c_{yq}/c_x}. \quad (20.10)$$

При известной зависимости $\alpha(\tau)$ уравнение (20.4) для r может быть проинтегрировано при произвольной зависимости $m_x^{\omega}(\tau, \alpha)$. Однако особенно наглядная формула получается при $m_x^{\omega} = \text{const}$:

$$r = r_1 \left(\frac{V}{V_1} \right)^{-m_x^{\omega}/i_x c_x}. \quad (20.11)$$

Напомним, что в формулах (20.10), (20.11) и далее индексом «1» обозначаются параметры движения на границе атмосферы. Через $i_x = \frac{I_x}{mL^2}$ обозначен безразмерный момент инерции. Следует отметить, что формула (20.11) при $m_x^{\omega} = \text{const}$ справедлива для всех случаев движения летательного аппарата относительно центра масс, которые будут рассматриваться далее.

При $g(\tau) > 0$ систему уравнений (20.3) и (20.4), вообще говоря, следует интегрировать численно, что не представ-

ляет сколько-нибудь серьезных затруднений, так как решения этой системы уравнений являются медленно изменяющимися функциями. Но тем не менее целесообразно попытаться получить результаты в конечной форме. Это можно сделать, если, как это уже указывалось в § 7, учесть, что демпфирование и подъемная сила могут сколько-нибудь существенно влиять на движение лишь в плотных слоях атмосферы, где угол атаки летательного аппарата можно считать малой величиной. При движении же в плотных слоях атмосферы все члены в уравнениях (20.4), учитывающие демпфирование и подъемную силу, мало изменяются при изменении угла атаки в окрестности $\alpha = 0$. Поэтому при вычислении этих членов можно полагать $\alpha = 0$.

В § 7 было показано, что при таких предположениях исследование движения сводится к исследованию конечных соотношений, которые в данном случае представляют собой интегралы уравнений (20.4). Для больших высот интегралы уравнений (20.4) с учетом начальных условий (20.1) записываются в виде

$$r(\tau) = r_1, \quad G(\tau) = r_1 \cos \Delta \theta. \quad (20.12)$$

Если через τ_2 обозначить такой момент времени, что при $\tau \geq \tau_2$ угол атаки можно считать малым, то для $\tau \geq \tau_2$ выражения для функций r и G в соответствии с (7.24) или (20.4) следует брать в форме

$$r(\tau) = r_2 e^{-\int_{\tau_2}^{\tau} f_1(\tau) d\tau}, \quad G(\tau) = r(\tau) + (G_2 - r_2) e^{-\int_{\tau_2}^{\tau} f_2(\tau) d\tau} \quad (20.13)$$

(здесь r_2 и G_2 — соответственно значения функций r и G при $\tau = \tau_2$). Очевидно, что

$$r_2 = r_1, \quad G_2 = r_1 \cos \Delta \theta. \quad (20.14)$$

Перейдем к исследованию устойчивости регулярных прецессий с медленно изменяющимися параметрами. При этом в настоящем параграфе сосредоточим основное внимание на получении условий (условий статической устойчивости), при которых возможен колебательный процесс в окрестности регулярных прецессий.

Из первого уравнения системы (5.7) видно, что условием статической устойчивости является неравенство

$$c(\tau) = \frac{d}{dx} \left[\frac{(G - r \cos \alpha)(r - G \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + M(\tau, \alpha) \right]_{x=\tilde{\alpha}} > 0. \quad (20.15)$$

Здесь через $\tilde{\alpha}$ обозначено решение уравнения (20.2), описывающее изменение угла атаки в случае регулярных прецессий с медленно изменяющимися параметрами.

При наличии равенства (2.11) для $M(\tau, \alpha)$ выражение для $c(\tau)$ можно преобразовать к виду

$$c(\tau) = g(\tau) \frac{dF}{dx} \Big|_{x=\tilde{\alpha}} - \tilde{\lambda}^2 \cos 2\tilde{\alpha} + r\tilde{\lambda} \cos \tilde{\alpha} + \\ + (r - 2\tilde{\lambda} \cos \tilde{\alpha})^2, \quad (20.16)$$

где

$$\tilde{\lambda} = \frac{G - r \cos \tilde{\alpha}}{\sin \tilde{\alpha}}.$$

Докажем это. Перепишем равенство (20.15), используя второе уравнение (20.3) для определения λ :

$$c(\tau) = \frac{d}{dx} [-\lambda^2 \sin \alpha \cos \alpha + r\lambda \sin \alpha + g(\tau) F(\alpha)]_{\alpha=\tilde{\alpha}}.$$

После выполнения дифференцирования это равенство принимает вид:

$$c(\tau) = -\tilde{\lambda}^2 \cos 2\tilde{\alpha} + r\tilde{\lambda} \cos \tilde{\alpha} + \\ + (r \sin \tilde{\alpha} - 2\tilde{\lambda} \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha}) \frac{d\tilde{\lambda}}{d\tilde{\alpha}} + g(\tau) \frac{dF}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\tilde{\alpha}}. \quad (20.17)$$

Дифференцируя второе уравнение (20.3) по α , получаем уравнение для определения $\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tilde{\alpha}}$:

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tilde{\alpha}} = \frac{r - 2\tilde{\lambda} \cos \tilde{\alpha}}{\sin \tilde{\alpha}}.$$

Исключая с помощью этого равенства $\frac{d\tilde{\lambda}}{d\tilde{\alpha}}$ из выражения (20.17), получаем формулу (20.16).

Ограничимся, далее, рассмотрением верхнего участка траектории, для которого функции r и G определяются формулами (20.12).

Рассмотрим сначала случай, когда $\Delta\theta = 180^\circ$. В этом случае $G(\tau) = -r(\tau)$ [см. равенства (20.12)], и на части траектории возможно движение летательного аппарата хвостовой частью вперед. Исследуем устойчивость такого движения. При $G(\tau) = -r(\tau)$ уравнения (20.3) имеют решение:

$$\tilde{\alpha} = 180^\circ, \quad \tilde{\lambda} = -\frac{r(\tau)}{2}. \quad (20.18)$$

С учетом этого условие статической устойчивости $c(\tau) > 0$ записывается в форме

$$c(\tau) = g(\tau) F_\alpha(180^\circ) + \frac{r(\tau)}{4} > 0. \quad (20.19)$$

Обычно $F_\alpha(180^\circ) < 0$, а $g(\tau) > 0$. Поэтому в верхних слоях атмосферы, где $g(\tau)$ мало, это условие выполняется. По мере снижения аппарата вследствие возрастания функции $g(\tau)$ может быть достигнут такой момент времени, в который это неравенство перестает выполняться. В таких случаях условие (20.19) определяет момент времени, начиная с которого летательный аппарат начинает поворачиваться носовой частью вперед.

Чтобы иметь возможность судить об устойчивости регулярных прецессий в общем случае, когда $\sin \tilde{\alpha} \neq 0$, несколько преобразуем выражение для $c(\tau)$. Из первого уравнения системы (20.3) имеем:

$$r\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\lambda} \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha} - g(\tau) F(\tilde{\alpha})}{\sin \tilde{\alpha}}.$$

Подставляя это выражение в выражение (20.16) для $c(\tau)$, можем его записать в виде

$$c(\tau) = g(\tau) \sin \tilde{\alpha} \frac{d}{dx} \left[\frac{F(x)}{\sin x} \right] \Big|_{x=\tilde{\alpha}} + \tilde{\lambda}^2 \sin^2 \tilde{\alpha} + (r - 2\tilde{\lambda} \cos \tilde{\alpha})^2. \quad (20.20)$$

Отсюда видно, что если зависимость $F(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{F(x)}{\sin x} \right] \Big|_{x=\tilde{\alpha}(\tau)} \geq 0, \quad (20.21)$$

то регулярные прецессии будут наверняка устойчивыми. Нетрудно представить себе вид зависимостей $F(\alpha)$, удовлетворяющих этому неравенству. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы отношение $F(\alpha)/\sin \alpha$ не убывало при увеличении α . В частности, это условие удовлетворяется при $0 \leq \tilde{\alpha} \leq \pi$ в случае синусоидальной зависимости продольного момента от угла атаки.

В заключение настоящего параграфа отметим формулу для мгновенного периода колебаний движений, близких к регулярным прецессиям с медленно изменяющимися параметрами. Эта формула будет приведена для случая, когда $F(\alpha) = \sin \alpha$. Выражение для периода имеет вид

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{c(\tau)}}.$$

При $F(\alpha) = \sin \alpha$, пользуясь выражениями (20.3) и (20.12), выражение для $c(\tau)$ можно преобразовать к виду

$$c(\tau) = r_1^2 \left(\frac{1 + \cos \Delta\theta}{1 + \cos \tilde{\alpha}} \right)^2 + 2g(\tau)(1 + \cos \tilde{\alpha}). \quad (20.22)$$

Соответственно

$$T = \frac{\frac{2\pi}{r_1}}{\sqrt{\left(\frac{1 + \cos \Delta\theta}{1 + \cos \tilde{\alpha}} \right)^2 + 2 \frac{g(\tau)}{r_1} (1 + \cos \tilde{\alpha})}}. \quad (20.23)$$

Если после определения $\tilde{\alpha}(\tau)$ найти $T(\tau)$ и $T'(\tau)$, то с помощью графиков на рис. 10 можно оценить величину погрешности асимптотических решений в случае регулярных прецессий с медленно изменяющимися параметрами.

§ 21. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА, СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ВРАЩЕНИЕМ, С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ НА ВСЕЙ ТРАЕКТОРИИ СНИЖЕНИЯ

Рассмотрим прежде всего случай синусоидальной зависимости продольного момента от угла атаки. При этом в начале параграфа ограничимся рассмотрением верхнего участка траектории снижения, для которого функции G и r определяются формулами (20.12).

Для этого случая уравнения (20.3) для регулярных прецессий с медленно изменяющимися параметрами можно записать в виде

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{\cos \Delta\theta - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}, \quad (21.1)$$

$$\frac{g(\tau)}{r^2} = \left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 \cos \alpha - \frac{\lambda}{r}. \quad (21.2)$$

В соответствии с замечанием, сделанным в § 20, ограничимся исследованием этой системы для случая летательного аппарата, статически устойчивого при $\alpha = 0$, когда функция $g(\tau) \geq 0$. Решение системы (21.1) и (21.2) представляет собой семейство кривых, зависящих от одного параметра $\Delta\theta$. Определим прежде всего граничную кривую этого семейства, которая получается при $\Delta\theta = 180^\circ$. Напомним, что в этом случае наряду с решением, которое дается системой уравнений (21.1) и (21.2), имеется решение $\alpha = 180^\circ$, условие устойчивости которого дается неравенством (20.19). В соответствии с этим неравенством α будет равно 180° до тех пор, пока значение функции $g(\tau)/r^2$ не станет больше $1/4$. Далее это решение станет неустойчивым и следует обратиться к системе уравнений (21.1) и (21.2). При $\Delta\theta = 180^\circ$ эту систему нетрудно преобразовать к виду

$$\alpha = \arccos \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{g(\tau)}{r^2}}} \right] \quad \left[\frac{g(\tau)}{r^2} > \frac{1}{4} \right], \quad (21.3)$$

$$\frac{\lambda}{r} = - \sqrt{\frac{g(\tau)}{r^2}} \quad \left[\frac{g(\tau)}{r^2} > \frac{1}{4} \right]. \quad (21.4)$$

Из (21.3) видно, что при $g(\tau)/r^2 = 1/4$ угол $\alpha = 180^\circ$ и, следовательно, решение (21.3) является непрерывным продолжением решения $\alpha = 180^\circ$ для значений $g(\tau)/r^2$, превосходящих $1/4$. Эти решения для α и λ/r построены соответственно на рис. 67 и 68.

При значениях $g(\tau)/r^2$, при которых $\alpha = 180^\circ$, кривая для определения λ/r не строилась, так как в этом случае скорость прецессии, строго говоря, является неопределенной величиной.

В случаях, когда $0 < \Delta\theta < 180^\circ$, найти решение системы (21.1) и (21.2) в явном виде не удастся. В этих случаях систему следует решать графически. При построении необходимых для такого решения графиков для каждого значения $\Delta\theta$ задавался ряд значений α и затем с помощью формул (21.1) и (21.2) последовательно определялись λ/r и

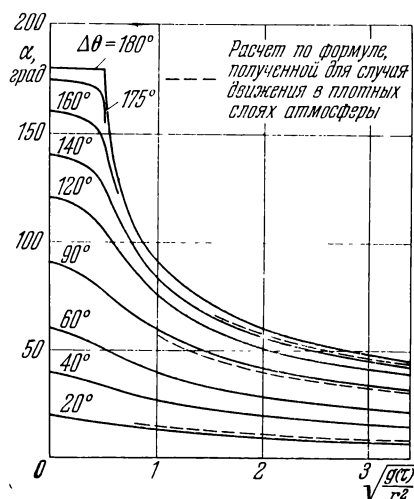


Рис. 67.

$g(\tau)/r^2$. Вычисленные таким образом зависимости α и λ/r от функции $\sqrt{g(\tau)/r^2}$ построены соответственно на рис. 67 и 68. Полученное семейство кривых для $0 < \Delta\theta < 180^\circ$ ограничивается кривыми, построенными с помощью формул (21.3) и (21.4) для $\Delta\theta = 180^\circ$.

С помощью построенных на рис. 67 и 68 графиков можно решить все вопросы, связанные с исследованием движения. Ясно, что все особенности движения определяются характером функции $g(\tau)/r^2$. На верхнем участке траектории (участок EF на рис. 1) скорость полета изменяется мало и изменение функции $g(\tau)/r^2$ в основном связано с изменением плотности. Вследствие этого при входе в атмосферу абсолютное значение этой функции возрастает. Как видно из графиков, построенных на рис. 67, в

этом случае угол атаки стремится к нулю при всех значениях $\Delta\theta$.

Изменение скорости прецессии при снижении можно представить себе с помощью графиков, построенных на рис. 68. Первое, что следует отметить, заключается в том, что скорость прецессии очень слабо зависит от начального значения угла атаки: «граничные» кривые на рис. 68, соответствующие $\Delta\theta =$

$= 20^\circ$ и $\Delta\theta = 180^\circ$, очень незначительно отличаются одна от другой. При снижении вместе с ростом абсолютного значения функции $g(\tau)/r^2$ абсолютное значение скорости прецессии увеличивается, причем при $g(\tau) > 0$ знак λ противоположен знаку функции r . Неожиданным является то, что скорость прецессии очень слабо зависит от функции r , которая пропорциональна скорости вращения летательного ап-

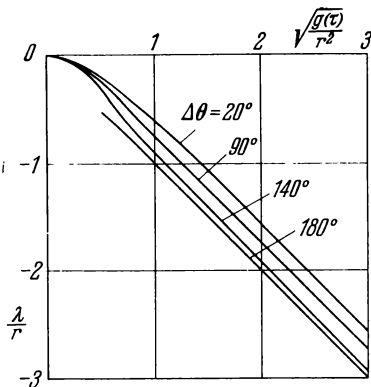


Рис. 68.

парата относительно продольной оси и является одной из основных причин появления прецессии. Это хорошо видно из графиков на рис. 68, а также следует из формулы (21.4), полученной для случая, когда $\Delta\theta = 180^\circ$.

Графики, построенные на рис. 67 и 68, полезно дополнить приближенными формулами для больших значений функции $g(\tau)/r^2$. В этом случае, как это следует из анализа, проведенного выше, значения угла атаки можно считать малыми. Так же как это было при плоском движении (см. § 11), при малых α расчетные соотношения можно существенно упростить. Формулы для больших значений функции $g(\tau)/r^2$ можно получить при значительно менее жестких предположениях о виде функции $F(\alpha)$, чем те, которые были сделаны в начале настоящего параграфа. Относительно функции $F(\alpha)$ достаточно предположить, что при $0 < \alpha < 180^\circ$ она не обращается в нуль, и в окрестности $\alpha = 0$ можно положить $F(\alpha) = \alpha$,

Относительно демпфирования будем считать выполняющимися те предположения, которые были сделаны в § 7. В соответствии с этим при $\tau = \tau_2$ будем считать выполняющимися равенства (20.12), а при $\tau \geq \tau_2$ — равенства (20.13). В момент $\tau = \tau_2$ получающиеся решения будут сопрягаться.

Обратимся к уравнениям (20.3). Если сохранить в них лишь члены, содержащие отрицательные степени α и α в первой степени, то при малых α эти уравнения с достаточно высокой степенью точности можно записать в виде

$$\lambda = \frac{G(\tau) - r(\tau)}{\alpha^3} + \left\{ \frac{r(\tau)}{2} + \frac{1}{3} [G(\tau) - r(\tau)] \right\}, \quad (21.5)$$

$$- \frac{[G(\tau) - r(\tau)]^2}{\alpha^3} + g_r(\tau) \alpha = 0, \quad (21.6)$$

где

$$g_r(\tau) = g(\tau) + \frac{1}{4} \{ r^2(\tau) + r(\tau) [G(\tau) - r(\tau)] + \\ + \frac{4}{15} [G(\tau) - r(\tau)]^2 \} = g(\tau) + \frac{1}{16} \left[(G + r)^2 + \frac{(G - r)^2}{15} \right].$$

Входящие сюда функции $G(\tau)$ и $r(\tau)$ при $\tau \leq \tau_2$ определяются формулами (20.12), а при $\tau \geq \tau_2$ — формулами (20.13). Сопрягая эти выражения при $\tau = \tau_2$, для $\tau \geq \tau_2$ можем написать:

$$\left. \begin{aligned} r(\tau) &= r_1 e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} f_x(\tau) d\tau}, \\ G(\tau) - r(\tau) &= -2r_1 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

Здесь $f_x(\tau)$ и $f_z(\tau)$ следует считать равными нулю при $\tau \leq \tau_2$. Подставляя выражение (21.7) для $G(\tau) - r(\tau)$ в уравнения (21.5) (и 21.6), получаем искомые выражения для угла атаки и скорости прецессии:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\tau) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt{g_r(\tau)}} \sqrt{2r_1} \sin \frac{\Delta\theta}{2}, \\ \lambda(\tau) &= -\sqrt{g_r(\tau)} + \left\{ \frac{r(\tau)}{2} + \frac{1}{3} [G(\tau) - r(\tau)] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

Здесь предполагается, что $r_1 > 0$.

По мере снижения летательного аппарата функция $g(\tau)$ возрастает и соответственно роль членов в выражениях (21.6) и (21.8), содержащих функции $G(\tau)$ и $r(\tau)$, становится пренебрежимо малой. Для тех случаев, когда

$$\left. \begin{aligned} g(\tau) &\gg \frac{1}{4} \left| r^2(\tau) + r(\tau) [G(\tau) - r(\tau)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{15} [G(\tau) - r(\tau)]^2 \right|, \\ \sqrt{g_r(\tau)} &\gg \left| \frac{r(\tau)}{2} + \frac{1}{3} [G(\tau) - r(\tau)] \right|, \end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

формулы (21.8) можно записать в более простой форме:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\tau) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_2(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} \sqrt{2r_1} \sin \frac{\Delta\theta}{2}, \\ \lambda(\tau) &= -\sqrt{g(\tau)} \quad (r_1 > 0). \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

Полученные формулы (21.6) — (21.10) связывают параметры движения летательного аппарата в плотных слоях атмосферы с параметрами движения на внеатмосферном участке траектории и в этом смысле аналогичны формуле (11.5), полученной для случая плоского движения. Интересно отметить, что несмотря на то, что рассматриваемый случай очень далек от случая плоского движения, полученный закон затухания угла атаки с точностью до константы совпадает с законом затухания амплитуды колебаний при плоском движении.

Приведем еще формулу для периода колебаний движений, близких к регулярным прецессиям с медленно изменяющимися параметрами, для случая, когда летательный аппарат пересекает плотные слои атмосферы. Эта формула получается из выражения (20.23), если положить в нем $\cos \alpha = 1$ и считать, что $g(\tau) \gg r_2^1$:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{g(\tau)}}. \quad (21.11)$$

Так же как это было сделано в § 11 при исследовании плоского движения, определим момент, начиная с которого атмосферу можно считать достаточно плотной, чтобы

пользоваться формулами (21.10). Для этого, очевидно, необходимо сопоставить результаты расчета по формуле (21.10) для $\alpha(\tau)$ с результатами расчетов, представленными на рис. 67. Такое сопоставление для $\Delta\theta = 20^\circ$; 90° и 180° проведено на рис. 67. Пунктиром нанесены результаты расчета $\alpha(\tau)$ по формуле (21.10). Из сопоставления пунктирных и сплошных кривых на рис. 67 можно заключить, что ошибка формулы (21.10) для $\alpha(\tau)$ не превосходит нескольких процентов при

$$\sqrt{\frac{g(\tau)}{r_1^2}} e^{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau} I_z(\tau) d\tau \geq 2. \quad (21.12)$$

В этом случае при всех значениях $\Delta\theta$ значения угла атаки меньше одного радиана. На основании этого результата и аналогичного результата, полученного для случая плоского движения (см. рис. 20), в дальнейшем формулы для исследования движения в плотных слоях атмосферы будут считаться применимыми, начиная с момента, когда $\alpha_{\max}(\tau)$ меньше одного радиана.

§ 22. МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ УТОЧНЕННЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ В СЛУЧАЕ ВХОДА В АТМОСФЕРУ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА, СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ВРАЩЕНИЕМ

В двух предыдущих параграфах исследование движения в рассматриваемом в настоящей главе случае было проведено с помощью асимптотических решений, используемых на всей траектории снижения. Как было указано в § 1, полученные при таком подходе формулы будут давать правильные количественные результаты при не малых скоростях вращения летательного аппарата вне атмосферы. Для того чтобы дополнить исследование, проведенное в предыдущих параграфах, для случая малых значений r_1 и одновременно определить область применимости формул § 20 и 21, следует аналогично случаю плоского движения (см. § 12 и 13) развить методику получения уточненных асимптотических формул и затем исследовать движение с их помощью.

Так же как и в § 12, разобьем траекторию снижения на три участка и на первых двух участках будем считать выполняющимися предположения (12.1). При таких предположениях уравнение для угла атаки (5.7) с учетом (2.11) и (20.12) может быть записано в виде

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{r_1^2 (\cos \Delta\theta - \cos \alpha) (1 - \cos \Delta\theta \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + g(t) F(\alpha) = 0. \quad (22.1)$$

Под $g(t)$ и $F(\alpha)$ здесь подразумевается то же самое, что и в § 12.

Остановимся прежде всего на вопросе об определении границы атмосферы, которая достигается в момент времени $t = t_1$. Чтобы определить этот момент времени, положим

$$\alpha = \Delta\theta + \Delta\alpha. \quad (22.2)$$

В силу предположения о сохранении летательным аппаратом ориентации в процессе движения вне атмосферы при решении задачи на первом участке $\Delta\alpha$ можно считать малой величиной. Подставляя (22.2) в (22.1) и пренебрегая малыми более высокого порядка, чем первый, будем иметь:

$$\frac{d^2 \Delta\alpha}{dt^2} + r_1^2 \Delta\alpha + g(t) F(\Delta\theta + \Delta\alpha) = 0. \quad (22.3)$$

Полагая $g(t) = g_0 e^{kt}$, это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2 \Delta\alpha}{dt^2} + r_1^2 \Delta\alpha = -g_0 e^{kt} F(\Delta\theta + \Delta\alpha). \quad (22.4)$$

Будем решать полученное уравнение методом последовательных приближений. Принимая в качестве первого приближения решение $\Delta\alpha^{(1)} = 0$, не учитывающее действия атмосферы, для второго приближения $\Delta\alpha^{(2)}$ получим формулу

$$\Delta\alpha^{(2)} = -\frac{g(t)}{k^2 + r_1^2} F(\Delta\theta). \quad (22.5)$$

Это приближение, очевидно, учитывает изменение угла атаки под воздействием атмосферы. Если для определения

момента $t = t_1$ взять условие

$$\frac{g(t_1)}{k^2 + r_1^2} = \bar{g}_1 \quad (\bar{g}_1 \approx 0,01), \quad (22.6)$$

то ясно, что при $t \approx t_1$ действие атмосферы сможет изменить угол атаки летательного аппарата лишь на величину порядка одного градуса.

Для исследования движения на втором участке, так же как и в случае плоского движения, введем безразмерные величины

$$v = \sqrt{k^2 + r_1^2}(t - t_1) \text{ и } v_1 = \frac{r_1}{k}. \quad (22.7)$$

С учетом (22.7) и (22.6) уравнение движения (22.1) нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{d^3\alpha}{dv^3} + \frac{v_1^2}{1 + v_1^2} \frac{(\cos \Delta\theta - \cos \alpha)(1 - \cos \Delta\theta \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + \bar{g}_1 e^{\frac{v}{1 + v_1^2}} F(\alpha) = 0. \quad (22.8)$$

Начальные условия для этого уравнения в силу (20.1) и (20.2) имеют следующий вид:

$$\left. \frac{d\alpha}{dv} \right|_{v=0} = 0, \quad \alpha|_{v=0} = \Delta\theta. \quad (22.9)$$

Заметим, что в случае регулярной прецессии решение задачи на втором участке, так же как и в плоском случае, является двухпараметрическим. Уравнение (22.8) решается с помощью численного интегрирования. Особенности численного интегрирования этого уравнения описаны в приложении.

Определение конца второго участка будет производиться в основном так же, как и при плоском движении. Ниже будут указаны соотношения для определения константы D в условии периодичности (12.13), и о точности асимптотики будем судить, как и ранее, по близости значений D для последовательных экстремумов зависимости $\alpha(v)$, получаемой при численном интегрировании уравне-

ния (22.8). Однако как в общем случае пространственного движения, так и в его частном случае, который рассматривается в настоящей главе, следует иметь в виду, что асимптотические решения правильно описывают движение для нескольких первых экстремумов зависимости $\alpha(v)$, затем погрешность их может возрасти и лишь при v , превосходящих некоторое значение, асимптотические решения станут снова точными вплоть до сколько угодно больших значений v . Поэтому прежде, чем начинать проверять совпадение значений D для последовательных экстремумов зависимости $\alpha(v)$, необходимо быть уверенным в том, что первый диапазон значений v , на котором значения константы D могут совпадать, уже пройден.

Как было показано в § 8, о точности асимптотических решений можно судить по интенсивности изменения мгновенного периода колебаний во времени. Поэтому для того чтобы получить искомое условие, обратимся к асимптотической формуле (20.23) для периода колебаний в случае регулярных прецессий с медленно изменяющимися параметрами при $F(\alpha) = \sin \alpha$. Для уравнения движения в безразмерном виде (22.8) формула (20.23) записывается так:

$$\frac{T_v}{2\pi \sqrt{\frac{1+v_1^2}{v_1^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos \Delta\theta}{1+\cos \tilde{\alpha}}\right)^2 + \bar{g}(v)^2 (1+\cos \tilde{\alpha})}}, \quad (22.10)$$

где

$$\bar{g}(v) = \frac{1+v_1^2}{v_1^2} \bar{g}_1 e^{\frac{v}{\sqrt{1+v_1^2}}},$$

T_v — период колебаний по переменной v .

Входящая сюда функция $\cos \tilde{\alpha}$ с помощью указанных выше соотношений для регулярной прецессии с медленно изменяющимися параметрами для $F(\alpha) = \sin \alpha$ определяется как функция от $\Delta\theta$ и $\bar{g}(v)$. Рассчитанная с помощью (22.10) и графиков для определения $\tilde{\alpha}$, приведенных на рис. 67, зависимость периода T_v от $\bar{g}(v)$ при различных значениях $\Delta\theta$ изображена на рис. 69. Из графиков,

приведенных на этом рисунке, видно, что наиболее интенсивное изменение T_v происходит в окрестности $\bar{g}(v) = 1/4$. Более того, нетрудно убедиться в том, что при $\Delta\theta = 180^\circ$ период T_v при $g(v) = 1/4$ обращается в бесконечность. Поэтому, если сравнение значений D для последовательных

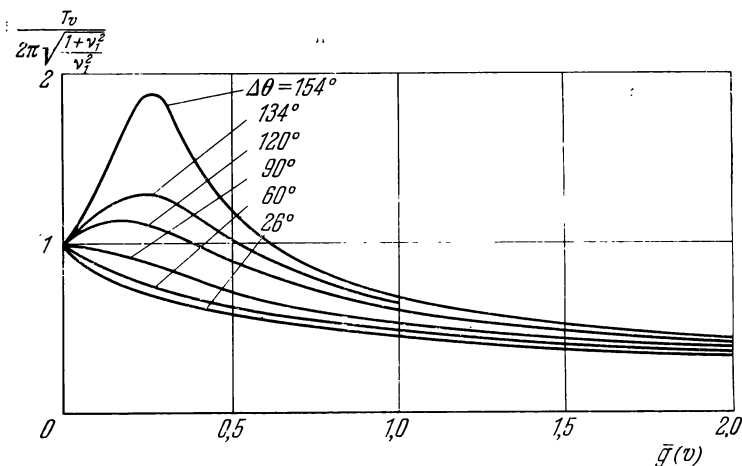


Рис. 69.

экстремумов зависимости $\alpha(v)$ производить, начиная с таких v , при которых выполняется неравенство

$$\bar{g}(v) \geq \frac{1}{4}, \quad (22.11)$$

то можно ожидать, что при этом диапазон значений v , на котором возможно несовпадение значений D , будет наверняка пройден.

Поясним физический смысл последнего неравенства. Рассмотрим для этого случай, когда $\Delta\theta = 180^\circ$ и летательный аппарат входит в атмосферу хвостовой частью. В этом случае уравнение (22.8) при малых $\Delta\alpha = \alpha - 180^\circ$ преобразуется к виду

$$\frac{d^2 \Delta x}{dv^2} + \left[\frac{v_1^2}{4(1+v_1^2)} - \bar{g}_1 e^{\frac{v}{1+v_1^2}} |F_\alpha(180^\circ)| \right] \Delta x = 0.$$

Отсюда видно, что выполнение или невыполнение условия (22.11) эквивалентно неустойчивости или устойчивости движения летательного аппарата при $F(\alpha) = \sin \alpha$ хвостовой частью вперед. В соответствии с этим условие (22.11) (и аналогичные ему) будем в дальнейшем называть *условием опрокидывания*. Из графиков на рис. 69 видно, что при $\Delta\theta < 180^\circ$ область наиболее интенсивного изменения периода колебаний смещается к началу координат. Это значит, что в этих случаях условие опрокидывания указывает значения v , начиная с которых можно сравнивать значения D , с некоторым запасом.

Из сопоставления неравенства (22.11) с последним уравнением следует, что для случая произвольной зависимости $F(\alpha)$ условие опрокидывания следует брать в виде

$$\bar{g}_1 \frac{v}{V_{1+v_1^2}} \geq \frac{v_1^2}{4(1+v_1^2)} k_F, \quad (22.12)$$

где

$$k_F = \frac{1}{|F_\alpha(180^\circ)|}.$$

Условие (22.12) прохождения первого диапазона значений v , на котором асимптотические решения точны, получено из не строгих соображений. Однако с его помощью можно строго убедиться в том, что указанный диапазон значений v пройден. Для этого достаточно выполнить расчеты для ряда характерных случаев при k_F достаточно большом и $k_F = \frac{1}{|F_\alpha(180^\circ)|}$. Если результаты расчетов для различных k_F совпадут, то это, очевидно, может служить достаточной гарантией правильности вычислений.

Заметим, что при плоском движении аналогичная проблема также имеет место, так как в первые моменты времени после входа в атмосферу вращательное движение достаточно точно описывается асимптотическими решениями и диапазон значений v , на котором асимптотика может быть не точной, лежит в окрестности перехода вращательного движения в колебательное. Для случая плоского движения условием, аналогичным условию (22.12), является условие (10.29) перехода вращательного движения в ко-

лебательное. Это условие для уравнения (12.10) имеет вид

$$\sqrt{\bar{g}_1 e^{\frac{v}{1+\mu_1^2}}} \geq \frac{\pi}{4} \frac{\mu_1}{\sqrt{1+\mu_1^2}}. \quad (22.13)$$

Однако в случае плоского движения надобность в таком условии отпадает, ибо судить о том, произошел указанный переход или нет, проще по наличию или отсутствию экстремумов у зависимости $\alpha(v)$, получаемой при интегрировании уравнения (12.10), как это и было сделано в § 12.

Укажем теперь соотношения для определения константы D в случае прецессии. Соотношение (12.13) для уравнения (22.8) записывается в виде

$$\bar{D} = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sqrt{2[\bar{E}(v_*) - \bar{I}(v, \alpha)]} d\alpha, \quad (22.14)$$

где

$$\bar{I}(v, \alpha) = \frac{v_1^2}{1+v_1^2} \frac{(\cos \Delta\theta - \cos \alpha)}{2 \sin' \alpha} + \bar{g}_1 e^{\frac{v}{1+v_1^2}} \Phi(\alpha), \quad (22.15)$$

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\alpha F(x) dx,$$

v_* — значение v , соответствующее экстремуму зависимости $\alpha(v)$.

Имеют место равенства

$$\bar{E}(v_*) = \bar{I}(v_*, \alpha_{\min}) = \bar{I}(v_*, \alpha_{\max}). \quad (22.16)$$

Таким образом, под $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ подразумеваются такие значения α , при которых подынтегральное выражение в (22.14) обращается в нуль.

Как уже указывалось выше, считать по формулам (22.14)—(22.16) следует лишь после выполнения условия опрокидывания. Порядок расчета по этим формулам должен быть следующим. Сначала по известным параметрам экстремума v_* и $\alpha_* = \alpha_{\min}$ ($\alpha_* = \alpha_{\max}$) зависимости

$\alpha(v)$ определяется $\bar{E}(v)$ с помощью (22.16), а затем вычисляется интеграл (22.14). При вычислении интеграла его удобно рассматривать как неопределенный и интегрировать от α_* до такого значения α , при котором подынтегральное выражение обратится в нуль.

Перейдем теперь к выводу формул, описывающих движение летательного аппарата на третьем участке траектории. Здесь необходимо учитывать демпфирование и переменность параметров траектории центра масс летательного аппарата. При учете демпфирования будем предполагать выполняющимися предположения, сформулированные в § 20. При таких предположениях в силу (20.12) и (20.13) уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + r_1^2 e^{-2 \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} \frac{(\cos \Delta\theta - \cos \alpha)(1 - \cos \Delta\theta \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + g(\tau) F(\alpha) + \varepsilon f_z(\tau) \frac{d\alpha}{dt} = 0. \quad (22.17)$$

Соотношение (12.13) для этого уравнения записывается в виде

$$\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sqrt{2[E(\tau) - I(\tau, \alpha)]} d\alpha = D e^{-2 \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}, \quad (22.18)$$

где

$$I(\tau, \alpha) = r_1^2 e^{-2 \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} \frac{(\cos \Delta\theta - \cos \alpha)^2}{2 \sin \alpha} + g(\tau) \Phi(\alpha), \quad (22.19)$$

$$E(\tau) = I(\tau, \alpha_{\min}) = I(\tau, \alpha_{\max}). \quad (22.20)$$

Установим связь между константами D и $\bar{D}$. Так как $v = v_2'(\tau = \tau_2')$ и

$$\frac{g(\tau)}{k^2 + r_1^2} = \bar{g}_1 e^{\frac{v}{\sqrt{1+v_1^2}}},$$

то из сопоставления равенств (22.14)—(22.16) с равенствами (22.18)—(22.20) при $\tau = \tau_2'$ вытекает связь

$$D = \sqrt{k^2 + r_1^2 \bar{D}}. \quad (22.21)$$

Таким образом, константу D можно считать известной.

Вопрос о том, как при известном значении константы D вычислить параметры движения летательного аппарата в плотных слоях атмосферы, подробно рассматривается в § 25. Оказывается, что изменение угла атаки в плотных слоях атмосферы описывается формулами

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} \sqrt{a + b \sin^2 \varphi}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \sqrt{g_r(\tau)}, \end{aligned} \right\} \quad (22.22)$$

где a и b — положительные константы, а функция $g_r(\tau)$ определяется формулой (21.6) при $G(\tau)$ и $r(\tau)$, определяемых из формул (21.7). Константы a и b выражаются через константу D (см. § 25). Отсюда видно, что, вообще говоря, угол атаки представляет собой колеблющуюся функцию времени, изменяющуюся между $\alpha_{\max}(\tau)$ и $\alpha_{\min}(\tau)$. Приведем выражения для $\alpha_{\max}(\tau)$ и $\alpha_{\min}(\tau)$, которые получаются из первой формулы (22.22) соответственно при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max}(\tau) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} \sqrt{2 \sqrt{k^2 + r_1^2} P_{\max}(\Delta\theta, v_1)}, \\ \alpha_{\min}(\tau) &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} \sqrt{2 \sqrt{k^2 + r_1^2} P_{\min}(\Delta\theta, v_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (22.23)$$

где

$$P_{\max} = \sqrt{\left(\frac{v_1 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}}{\sqrt{1+v_1^2}} + \frac{\bar{D}}{\pi}\right)} + \sqrt{\frac{\bar{D}}{\pi} \left(\frac{\bar{D}}{\pi} + \frac{2v_1 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}}{\sqrt{1+v_1^2}}\right)}, \quad (22.24)$$

$$P_{\min} = \sqrt{\left(\frac{v_1 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}}{\sqrt{1+v_1^2}} + \frac{\bar{D}}{\pi}\right)} - \sqrt{\frac{\bar{D}}{\pi} \left(\frac{\bar{D}}{\pi} + \frac{2v_1 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}}{\sqrt{1+v_1^2}}\right)}. \quad (22.25)$$

Входящая сюда константа $\bar{D}$ определяется, как указано выше, с помощью формул (22.8) и (22.14)—(22.16) и зависит, очевидно, также только от $\Delta\theta$ и v_1 . В случаях, когда выполняются неравенства (21.9), в формулах (22.23) вместо функции $g_r(\tau)$ можно подразумевать просто функцию $g(\tau)$. Заметим, что из соображений, высказанных в § 1, следует, что при увеличении v_1 полученные только что уточненные асимптотические формулы должны переходить в формулу (21.8) или (21.10) для $\alpha(\tau)$. При этом $\bar{D}$ должно стремиться к нулю, а коэффициенты (22.24) и (22.25) должны стремиться к одному и тому же значению, равному $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$.

Вернемся теперь опять к вопросу об определении конца второго участка. Ясно, что вместо сравнения значений $\bar{D}$ для последовательных экстремумов целесообразнее сравнивать связанную с $\bar{D}$ константу $P_{\max}$, так как для нее легче задать допустимую величину погрешности. Если обозначить через $P_{\max, k+1}$ и $P_{\max, k}$ значения $P_{\max}$, соответствующие последовательным экстремумам зависимости $\alpha(v)$, получаемой при численном интегрировании уравнения (22.8), то, так же как и в случае плоского движения, вычисления можно прекращать сразу после того, как выполнилось неравенство

$$|P_{\max, k+1} - P_{\max, k}| \leq \Delta_0 + \Delta_1 P_{\max, k+1}. \quad (22.26)$$

Значения констант Δ_0 и Δ_1 определяются потребной точностью вычислений.

**§ 23. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОТНЫХ
СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ
УТОЧНЕННЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ
В СЛУЧАЕ ВХОДА В АТМОСФЕРУ ЛЕТАТЕЛЬНОГО
АППАРАТА, СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ВРАЩЕНИЕМ**

В предыдущем параграфе было показано, что, вообще говоря, после входа летательного аппарата в плотные слои атмосферы изменение его угла атаки представляет собой функцию, колеблющуюся между $\alpha_{\max}(\tau)$ и $\alpha_{\min}(\tau)$, которые изменяются во времени в соответствии с формулами (22.23). Что касается периода колебаний угла атаки, то из (22.22) видно, что он по-прежнему определяется формулой (21.11). Из формул (22.23) видно, что для полного исследования изменения угла атаки в плотных слоях атмосферы в случае регулярных прецессий достаточно для различных значений $\Delta\theta$ и v_1 и различных $F(\alpha)$ рассчитать коэффициенты $P_{\max}$ и $P_{\min}$ в формулах (22.23). Такие расчеты были выполнены для трех зависимостей $F(\alpha)$, изображенных на рис. 22. Для каждой зависимости $F(\alpha)$ расчеты производились примерно для 300 пар значений $\Delta\theta$ и v_1 из интервалов

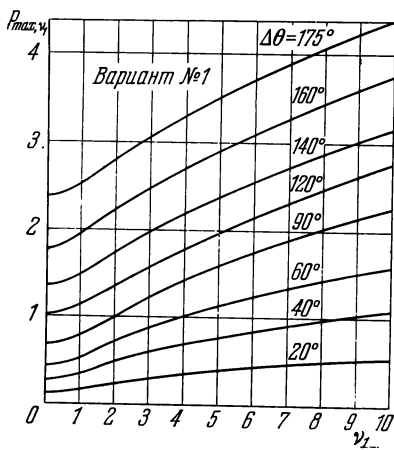
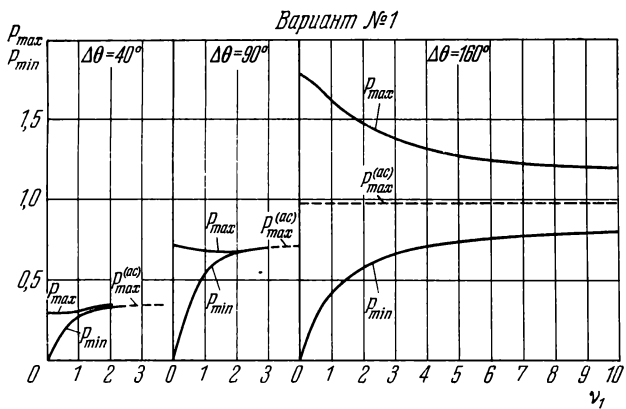
$$\left. \begin{aligned} 0 \leq v_1 \leq 10, \\ 0 \leq \Delta\theta < 180^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$

Для того чтобы иметь возможность судить о влиянии параметра v_1 на максимально возможные значения угла атаки в плотных слоях атмосферы, кроме $P_{\max}$ и $P_{\min}$ вычислялась еще величина $P_{\max, v_1}$ связанная с $P_{\max}$ формулой

$$P_{\max, v_1} = \sqrt[4]{1 + v_1^2} P_{\max}. \quad (23.2)$$

Результаты этих расчетов для вариантов $F(\alpha)$ № 1, 2 и 3 представлены соответственно на рис. 70—71, 72—74 и 75—76.

Из рис. 70, 72—73 и 75, где пунктирной линией нанесены значения $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$, видно, что при увеличении v_1 значения $P_{\max}$ и $P_{\min}$, полученные с помощью уточненных асимптотических формул, стремятся к своим неуточненным



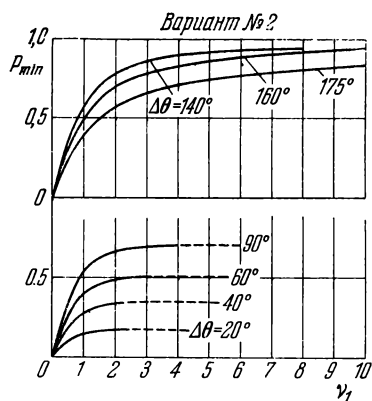


Рис. 72.

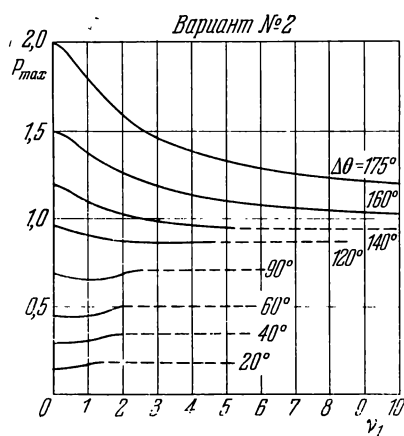
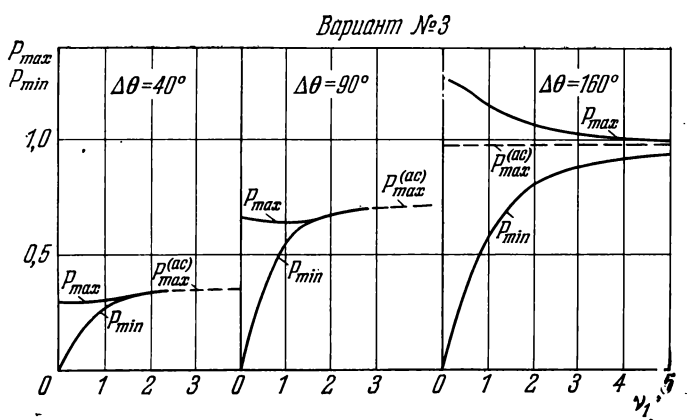
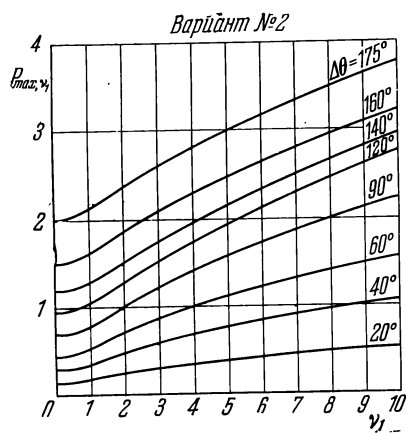


Рис. 73.



асимптотическим значениям. Это значит, что при не малых значениях параметра ν_1 движение летательного аппарата, стабилизированного вне атмосферы с помощью вращения относительно продольной оси, представляет собой регулярную прецессию с медленно изменяющимися параметрами и может исследоваться с помощью результатов, полученных в § 20 и 21.

С помощью результатов расчетов, представленных на этих рисунках, нетрудно указать значения ν_1 , начиная

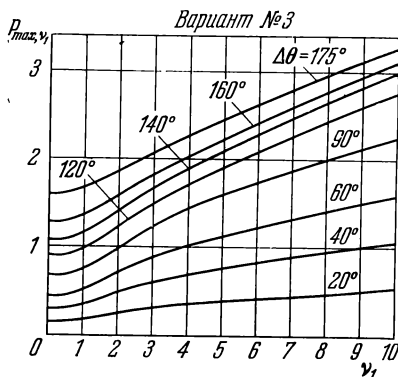


Рис. 76.

с которых можно пользоваться не уточненными асимптотическими формулами. Следует отметить, что асимптотическое значение $P_{\max}^{(ac)} = \sin \frac{\Delta\theta}{2}$ достигается при тем меньших значениях ν_1 , чем меньше значение $\Delta\theta$. Это объясняется тем, что случай $\Delta\theta = 180^\circ$ является особым с точки зрения асимптотики. В самом деле, при $\Delta\theta = 180^\circ$ летательный аппарат входит в атмосферу, находясь в положении равновесия, хотя и неустойчивом, в плотных слоях атмосферы. Так как при регулярной прецессии $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} = 0$, то летательный аппарат будет продолжать движение хвостовой частью вперед. Поэтому при значении $\Delta\theta$, близком к 180° , и $\nu_1 \leq 10$ уточненные асимптотические формулы дают значения, существенно отличающиеся от $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$.

Точность неуточненной формулы (21.8) для $\alpha_{\max}(\tau)$ может быть существенно повышена при малых значениях v_1 , если ее, так же как и в случае плоского движения, записывать в виде

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} \sqrt{2 \sqrt{k^2 + r_1^2} \sin \frac{\Delta\theta}{2}}. \quad (23.3)$$

Из графиков, приведенных на рис. 70, 73 и 75, видно, что при такой записи неуточненной асимптотической формулы

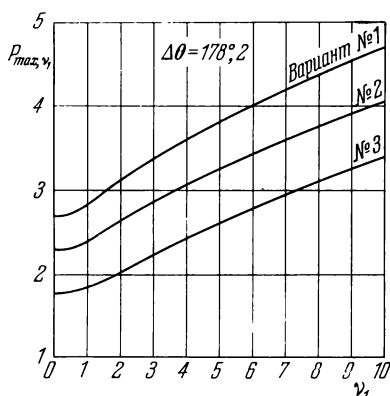


Рис. 77.

она дает достаточно верные значения $\alpha_{\max}$ для всего диапазона v_1 при $0 < \Delta\theta \leq 120^\circ$.

Остановимся, далее, на влиянии v_1 на $\alpha_{\max}$. Из графиков для $P_{\max, v_1}$, приведенных на рис. 71, 74 и 76, видно, что во всех рассмотренных случаях увеличение параметра v_1 приводит к увеличению значений $\alpha_{\max}(\tau)$. Этот результат следует также и из неуточненной асимптотической формулы (21.8) и объясняется влиянием гироскопических сил, стремящихся сохранить ориентацию летательного аппарата в пространстве. Вследствие этого определение максимального значения поперечной

перегрузки следует производить при $v_{1\max}$ — максимально возможном значении v_1 .

Для того чтобы представить себе влияние вида зависимости $F(\alpha)$ на $\alpha_{\max}(\tau)$, на рис. 77 приведено сравнение зависимостей $P_{\max, v_1}$ для трех рассмотренных вариантов кривой $F(\alpha)$. Сравнение производилось для $\Delta\theta = 178^\circ, 2$, когда влияние вида кривой $F(\alpha)$ наибольшее. Видно, что, так же как и в случае плоского движения, уменьшение $|F_\alpha(180^\circ)|$ приводит к увеличению возможных значений угла атаки в плотных слоях атмосферы. Это, очевидно, связано с тем, что при уменьшении $|F_\alpha(180^\circ)|$ летательный аппарат более продолжительное время сохраняет

свою исходную ориентацию в пространстве при снижении.

С помощью уточненных асимптотических формул (22.23) можно решить задачу об определении практического максимума угла атаки в случае входа в атмосферу искусственного спутника Земли, стабилизированного с помощью вращения. У такого спутника при движении по орбите за время каждого оборота вокруг Земли угол атаки

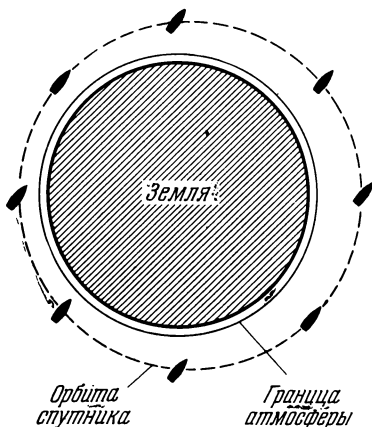


Рис. 78.

будет принимать все значения, заключенные между нулем и ста восемьюдесятью градусами (рис. 78). Если спутник существует достаточно долго, то весьма трудно заранее предсказать момент его возвращения в атмосферу. Вследствие этого можно считать, что начальное значение угла атаки (обозначаемое в настоящей главе через $\Delta\theta$) с одинаковой вероятностью может иметь любое значение из интервала $0 \leq \Delta\theta \leq 180^\circ$. Для того чтобы иметь возможность определить практический максимум угла атаки в рассматриваемом случае, следует коэффициент $P_{\max, v_1}$ построить в зависимости от $\Delta\theta$. Такие графики по-

строены на рис. 79 для функций $F(\alpha)$, изображенных на рис. 22. Если, так же как и в случае плоского движения, под $\bar{P}_{\max, \nu_1}$ — практическим максимумом подразумевать

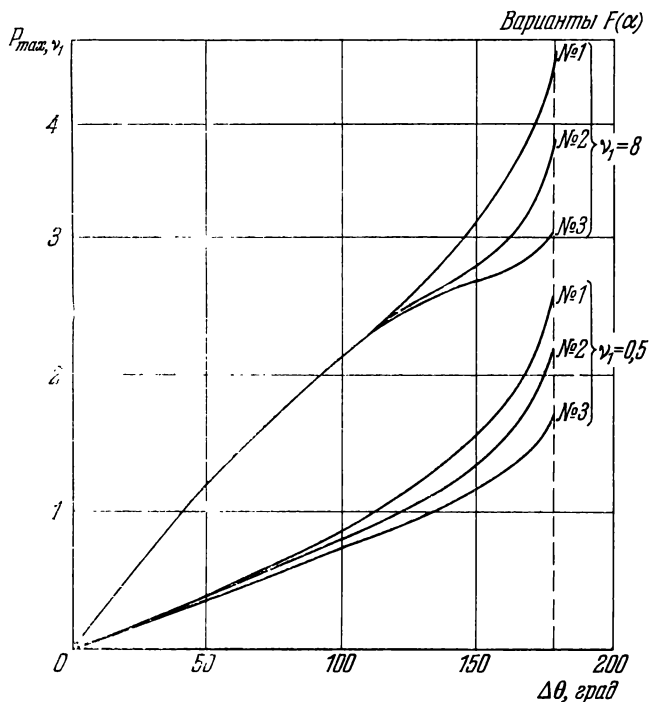


Рис. 79.

такое значение коэффициента $P_{\max, \nu_1}$, которое с вероятностью 99% превосходит все остальные значения этого коэффициента при $0 \leq \Delta\theta \leq 180^\circ$ и фиксированном ν_1 , то из графиков на рис. 79 видно, что

$$\bar{P}_{\max, \nu_1} = P_{\max, \nu_1}(\Delta\theta, \nu_1) |_{\Delta\theta=178.2}. \quad (23.4)$$

Значения $P_{\max, \nu_1}$ для $\Delta\theta = 178.2$, как уже указывалось, построены на рис. 77.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ

§ 24. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В СЛУЧАЕ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПРОДОЛЬНОГО МОМЕНТА ОТ УГЛА АТАКИ

При исследовании общего случая пространственного движения, так же как и ранее, будем предполагать, что траектория полета является плоской кривой и что в момент $t = t_0$, когда происходит отделение летательного аппарата от носителя, его угол атаки равен нулю. Кроме этого, будет предполагаться, что отделение происходит в некоторой точке C (см. рис. 1), расположенной вне атмосферы. Выражение для определения «границы атмосферы» в общем случае пространственного движения указано в § 27.

Силы, действующие на летательный аппарат при отделении, сообщают ему некоторый начальный кинетический момент, который определяет дальнейшее движение летательного аппарата вокруг центра масс вне атмосферы. Чтобы определить положение вектора начального кинетического момента в пространстве, введем прямоугольную систему координат $Cx_0y_0z_0$ (см. рис. 1), начало которой находится в точке C , ось Cx_0 направлена по касательной к траектории в точке C , ось Cy_0 расположена в плоскости траектории, а ось Cz_0 перпендикулярна к ней. Начальный кинетический момент летательного аппарата можно представлять себе состоящим из двух компонент: продольной компоненты Q_{x_0} , направленной по оси Cx_0 , которая совпадает с осью летательного аппарата при отделении, и экваториальной компоненты Q_{z_0} , которая расположена в плоскости Cy_0z_0 и составляет некоторый угол δ_0 с осью Cy_0 (рис. 1). Заметим, что если исключить из рассмотрения случаи, когда имеются специальные управляющие устройства, задающие величину угла δ_0 , то этот угол может иметь любое значение от $\delta_0 = 0$ до $\delta_0 = 360^\circ$,

так как он определяется неравномерностью распределения сил, действующих на летательный аппарат при отделении. Плоское движение реализуется при $Q_{x0} = 0$ и $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$, и $\delta_0 = \frac{3\pi}{2}$.

В соответствии с изложенным проекции Q_{y0} и Q_{z0} вектора начального кинетического момента на оси Cy_0

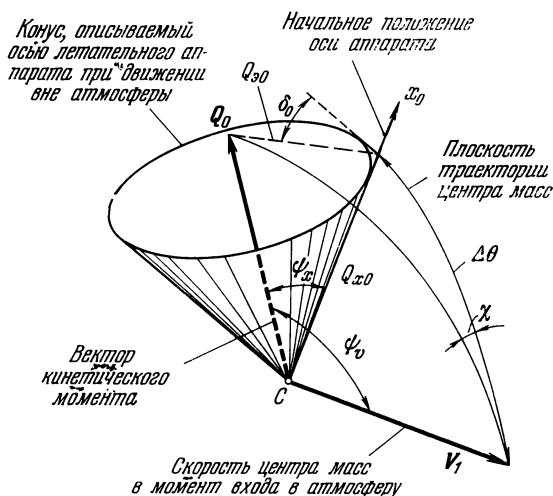


Рис. 80.

и Cz_0 системы координат $Cx_0y_0z_0$ записываются в виде

$$Q_{y0} = Q_{z0} \cos \delta_0, \quad Q_{z0} = Q_{z0} \sin \delta_0. \quad (24.1)$$

После отделения на внеатмосферном участке траектории летательный аппарат движется по инерции с неизменными кинетическим моментом, кинетической энергией и проекцией угловой скорости на ось летательного аппарата. Движение его относительно центра масс представляет собой регулярную прецессию, при которой ось летательного аппарата описывает круговой конус относительно неизменного в пространстве направления вектора кинетического момента (рис. 80). Угол полураствора этого конуса

обозначим через ψ_x , а угол между осью конуса — вектором кинетического момента и вектором скорости центра масс аппарата в момент входа в атмосферу через ψ_v . По инерции летательный аппарат движется до тех пор, пока он не попадает на почти прямолинейный участок траектории DF (рис. 1), на котором происходит стабилизация летательного аппарата под воздействием аэродинамического момента. На участке траектории DF движение летательного аппарата описывается системой уравнений (5.7). На этом участке угол атаки, очевидно, отсчитывается от направления DF .

Пользуясь упомянутыми свойствами движения летательного аппарата по инерции, нетрудно определить значения параметров r , $V\sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}$ и G на участке DE траектории, непосредственно примыкающем к границе атмосферы. Эти значения будут обозначаться индексом «1».

Учитывая формулы (2.7) и (24.1), имея в виду, что G_1 с точностью до множителя представляет собой проекцию на направление DE неизменного вне атмосферы вектора кинетического момента, который при $t = t_0$ имеет компоненты Q_{x0} и Q_{y0} , и что $r = \frac{I_{x^{(0)}x0}}{I_z}$, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{Q_{x0}}{I_z}, \\ \omega_1 &= V\sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}|_{t=t_1} = \frac{Q_{y0}}{I_z}, \\ G_1 &= \frac{1}{I_z}(Q_{x0} \cos \Delta\theta - Q_{y0} \sin \Delta\theta) = \\ &= r_1 \cos \Delta\theta - \omega_1 \cos \delta_0 \sin \Delta\theta. \end{aligned} \right\} \quad (24.2)$$

Величины (24.2) представляют собой основную часть начальных условий для системы уравнений (5.7). Как будет видно далее, знания r_1 , ω_1 и G_1 достаточно для определения основных характеристик возмущенного движения летательного аппарата при снижении. В дальнейшем в качестве исходных данных будем рассматривать величины Q_{x0} , Q_{y0} , δ_0 и $\Delta\theta$ и выясним зависимость характера движения летательного аппарата в атмосфере именно от этих параметров. Однако для понимания получающих-

ся результатов иногда полезно знать величины углов ψ_x и ψ_v . Из рис. 80 следует, что

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \psi_x &= \frac{Q_{x0}}{Q_{y0}} = \rho_1, \\ \cos \psi_v &= \frac{I_z G_1}{\sqrt{Q_{x0}^2 + Q_{y0}^2}} = \frac{G_1}{\omega_1 \sqrt{1 + \rho_1^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (24.3)$$

Через ρ_1 здесь обозначен новый безразмерный параметр. Первую из формул (24.3) следует рассматривать как определение этого параметра.

Относительно коэффициента момента m_z и компонент демпфирующего момента в настоящей главе будут полагаться выполняющимися все те предположения, которые были сделаны в конце § 7.

Остановимся прежде всего на случае, когда

$$F(\alpha) = \sin \alpha.$$

При этом, как уже указывалось, решение эталонного уравнения (6.6) выражается через эллиптические функции Якоби. При получении расчетных соотношений удобно вместо уравнения (6.6) иметь дело с его интегралом энергии. Этот интеграл с учетом выражения (6.2) для M_Σ можно записать в виде

$$\frac{\omega^2(\tau)}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{G(\tau) - r(\tau) \cos \alpha}{\sin \alpha} \right]^2 + \int_0^\alpha M(\tau, \alpha) d\alpha = E(\tau), \quad (24.4)$$

где $E(\tau)$ — произвольная функция от τ .

При $F(\alpha) = \sin \alpha$

$$\int_0^\alpha M(\tau, \alpha) d\alpha = -g(\tau) \cos \alpha \quad (24.5)$$

и решение уравнения (24.4) можно искать в виде [2]

$$\cos \alpha = A(\tau) + B(\tau) \operatorname{sn}^2\{K[v(\tau)] \varphi, v(\tau)\}. \quad (24.6)$$

Здесь $\operatorname{sn}[K(v)\varphi, v]$ — эллиптический синус, v — квадрат модуля, $K(v)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $A(\tau)$, $B(\tau)$, $v(\tau)$ — произвольные функции.

Коэффициент при φ , равный $K(v)$, который, вообще говоря, произволен, выбран так, чтобы период $\alpha(\tau, \varphi)$ по φ не зависел от τ ($T_\omega = 2$). В уравнения (24.4) и (24.6) входят семь неопределенных функций: $A(\tau)$, $B(\tau)$, $v(\tau)$, $E(\tau)$, $G(\tau)$, $r(\tau)$ и $\omega(\tau)$. В общем случае для их определения выражение (24.6) надо подставить в уравнение (24.4) и в условия периодичности § 7. В настоящем параграфе будет рассмотрен случай движения на верхней части траектории снижения, когда влияние демпфирования и подъемной силы на движение относительно центра масс пренебрежимо мало. В этом случае

$$G = G_1, \quad r = r_1 = \frac{G_1}{\xi}, \quad (24.7)$$

где $\xi = \frac{G_1}{r_1} = \cos \Delta\theta - \frac{\omega_1}{r_1} \cos \delta_0 \sin \Delta\theta$.

Таким образом, остаются пять неопределенных функций: $A(\tau)$, $B(\tau)$, $v(\tau)$, $E(\tau)$ и $\omega(\tau)$. В соотношениях, которые будут приведены ниже, эти функции часто будут записываться без указания явной зависимости их от τ . Приведем три соотношения из теории эллиптических функций Якоби [17], которые нам сейчас потребуются:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial u} &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{cn}^2 u &= 1 - \operatorname{sn}^2 u, \\ \operatorname{dn}^2 u &= 1 - v \operatorname{sn}^2 u. \end{aligned} \right\} \quad (24.8)$$

Из (24.6) и (24.8) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} &= - \frac{2K(v) B \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\sin \alpha} = \\ &= \pm \frac{2K(v) B \operatorname{sn} u \sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - v \operatorname{sn}^2 u)}}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (24.9)$$

Подставляя (24.6) и (24.9) в уравнение (24.4), учитывая (24.5) и имея в виду, что $G = \xi r$, получаем:

$$\begin{aligned} (4\psi^2 B^2 \operatorname{sn}^2 u (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - v \operatorname{sn}^2 u) + r^2 [\xi - (A + B \operatorname{sn}^2 u)]^2 - \\ - 2 [E + g(\tau)(A + B \operatorname{sn}^2 u)][1 - (A + B \operatorname{sn}^2 u)^2] = 0, \end{aligned} \quad (24.10)$$

где $\psi = K(v)\omega$.

Это соотношение представляет собой полином третьей степени относительно $\operatorname{sn}^2 u$. Если он обращается в нуль при некоторых четырех значениях $\operatorname{sn}^2 u$, то он будет равен нулю тождественно. Выберем в качестве таких значений $\operatorname{sn}^2 u = \infty$, $\operatorname{sn}^2 u = \frac{1}{v}$, $\operatorname{sn}^2 u = 1$ и $\operatorname{sn}^2 u = 0$. Подстановка этих значений в (24.10) дает:

$$2\psi^2 v = -g(\tau)B \quad [\psi = K(v)\omega], \quad (24.11)$$

$$(\xi - u_i)^2 - 2 \left[\frac{E}{r^2} + \frac{g(\tau)}{r^2} u_i \right] (1 - u_i^2) = 0 \quad (24.12)$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= A + \frac{B}{v}, \\ u_2 &= A + B, \\ u_3 &= A. \end{aligned} \right\} \quad (24.13)$$

Еще одно соотношение получается в результате подстановки выражения (24.9) в первое из условий периодичности (7.22) или (7.24). С учетом (24.6) и того, что $\psi = -K(v)\omega$, его можно записать так:

$$4\psi B^2 \int_0^1 \frac{\xi \sqrt{(1-\xi)(1-v\xi)}}{1-(1+B\xi)^2} d\xi = D_r r, \quad (24.14)$$

где

$$\xi = \operatorname{sn} u, \quad D_r = \frac{D}{r_1}.$$

Равенства (24.11) — (24.14) представляют собой исковую систему пяти соотношений для определения пяти неизвестных: A , B , v , E и ω . Если кубический полином относительно u , стоящий в левой части равенства (24.12), обозначить через $\pi(u)$, то нетрудно убедиться в том, что при $u = \pm 1$ и $u = \pm \infty$ имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} \pi(-\infty) &= -\infty, & \pi(-1) &= (\xi + 1)^2, \\ \pi(1) &= (\xi - 1)^2, & \pi(\infty) &= \infty, \end{aligned} \right\} \quad (24.15)$$

если, конечно, летательный аппарат статически устойчив при $\alpha = 0$, когда $g(\tau) \geq 0$. С точки зрения использова-

ния имеющихся таблиц для эллиптических функций, удобно искать такое решение уравнений (24.11)–(24.14), в котором $0 \leq v \leq 1$. При этом из (24.11) следует, что $B \leq 0$ и соответственно корни кубического уравнения (24.12) располагаются в следующем порядке:

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3.$$

В силу (24.6) и (24.13) $\cos \alpha$ изменяется между корнями u_2 и u_3 , и чтобы решение системы (24.11)–(24.14) имело физический смысл, величины u_2 и u_3 , будучи определены из этих соотношений, должны быть заключены между -1 и 1 . Если в качестве неизвестных в системе (24.11)–(24.14) рассматривать функции

$$\frac{\psi}{\sqrt{g(\tau)}}, \quad A, \quad B, \quad v \quad \text{и} \quad \frac{E}{r^2}, \quad (24.16)$$

то они будут зависеть от одной функции $\sqrt{\frac{g(\tau)}{r^2}}$ и двух констант ξ и D_r .

Укажем способ построения номограмм для определения решения системы (24.11)–(24.14), имеющего физический смысл. При фиксированных значениях ξ и $\sqrt{\frac{g(\tau)}{r^2}}$ зададимся рядом значений u_i , заключенных между -1 и 1 , подставим их в (24.12) и найдем значения E/r^2 . Зная E/r^2 , разделим уравнение (24.12) на $u - u_i$ и найдем оставшиеся два корня этого уравнения. Из равенств (24.15) следует, что один из этих корней будет меньше -1 , а второй будет заключен между -1 и 1 .

Таким образом, определяемые с помощью такого способа значения корней u_1, u_2, u_3 заключены в следующих интервалах:

$$-\infty < u_1 \leq -1 \leq u_2 \leq u_3 \leq 1. \quad (24.17)$$

Зная корни уравнения (24.12), с помощью (24.13) нетрудно найти значения неизвестных A, B и v . После того как эти функции вычислены, нетрудно, пользуясь (24.11), определить $\frac{\psi}{\sqrt{g(\tau)}}$, а затем, выполнив интегрирование в (24.14), определить значения константы D_r . Такие рас-

четы при фиксированном ξ следует провести для различных значений $\sqrt{\frac{g(\tau)}{r^3}}$, после чего для каждого фиксированного ξ можно построить зависимости искомых функций от $\sqrt{\frac{g(\tau)}{r^3}}$ при различных значениях D_r или, наоборот, — от D_r при различных значениях $\sqrt{\frac{g(\tau)}{r^3}}$. Заметим, что в ряде случаев для исследования возмущенного движения удобнее строить номограммы для функций $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ и $T\sqrt{g(\tau)}$, которые связаны с A , B и $\frac{\psi}{\sqrt{g(\tau)}}$ с помощью соотношений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\min} &= \arccos A, \\ \alpha_{\max} &= \arccos (A + B), \\ T\sqrt{g(\tau)} &= 2K(v) \frac{\sqrt{g(\tau)}}{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (24.18)$$

где $T = 2/\omega$ — мгновенный период колебаний.

Примеры номограмм для $\xi = 1$ приводятся на рис. 138 и 139. Если известны константы ξ и D_r , то с помощью таких номограмм можно решать задачи, связанные с исследованием движения, а также оценить применимость асимптотики в каждом конкретном случае, если кроме определения $T(\tau)$ найти $T'(\tau)$ и воспользоваться условием применимости асимптотических решений (8.5).

При известных начальных условиях определение констант ξ и D_r не составляет сколько-нибудь серьезных трудностей. Далее это будет проиллюстрировано.

Отметим некоторые особенности движения в случаях, когда $\xi = 1$ и $\xi = -1$. В этих случаях уравнение (24.12) имеет корни, соответственно равные 1 и -1 .

При $\xi = 1$ корень $u_3 \equiv A \equiv 1$ при любых значениях функции $g(\tau)$. В силу (24.6) это значит, что во время каждого колебания при снижении угол атаки принимает значение, равное нулю (рис. 81). Ясно, что это имеет место только при $\xi = 1$. Случай $\xi = 1$ реализуется, в частности, в задаче о входе в атмосферу при $\Delta\theta = 0$ [см. (24.7)]. Анализ этого случая будет продолжен в § 30.

При $\xi = -1$, если исключить из анализа случай регулярной прецессии, когда $u_2 = u_3$, значение -1 могут принимать корни u_1 и u_2 . Так как при $g(\tau)$, стремящемся к нулю, один из корней уравнения (24.12) стремится к $-\infty$, то это значит, что при малых $g(\tau)$ корень $u_2 = -1$. Чтобы найти предельные значения корней при $g(\tau)$, стремящемся к ∞ , следует обратиться ко всем равенствам

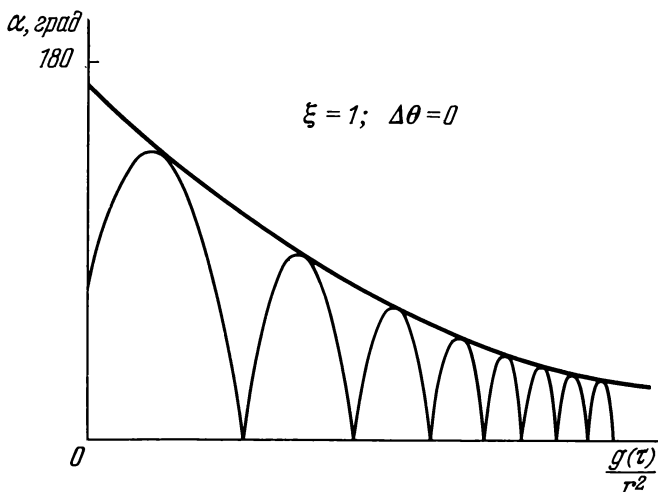


Рис. 81.

(24.11)—(24.14). Если в (24.14) заменить ψ с помощью (24.11), то становится ясно, что при $g(\tau)$, стремящемся к бесконечности, B стремится к нулю. Из (24.12) вытекает, что при $g(\tau)$, стремящемся к ∞ , u_3 стремится к единице. В силу стремления B к нулю это значит, что корень u_2 также стремится к единице. Поэтому при больших значениях $g(\tau)$ минус единице может быть равен только корень u_1 . Стремление u_2 и u_3 к единице при $g(\tau)$, стремящемся к ∞ , выражает ясный физический факт, заключающийся в том, что при возрастании величины восстанавливающего момента угол атаки летательного аппарата стремится к нулю. Таким образом, при увеличении $\frac{g(\tau)}{r^2}$ от нуля до

некоторого критического значения $\left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*$ корень $u_2 = -1$, а u_1 увеличивается от $-\infty$ до -1 . В момент $t = t_*$, когда $\frac{g(\tau)}{r^2} = \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*$, выполняется равенство $u_1 = u_2$. При дальнейшем увеличении $\frac{g(\tau)}{r^2}$ корень $u_1 = -1$, а u_2 вместе с u_3 стремятся к единице. Так как $\cos \alpha$ изменяется между u_2 и u_3 , то это значит, что при $\frac{g(\tau)}{r^2} < \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*$ угол атаки во время каждого колебания принимает значение, равное 180° , и только после того, как будет выполняться неравенство $\frac{g(\tau)}{r^2} > \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*$, летательный аппарат начинает воспринимать стабилизирующее действие атмосферы (рис. 82).

Значение $\left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*$ зависит от D_r . Найдём эту зависимость. В момент $t = t_*$ из уравнения (24.12) при $\xi = -1$ имеем:

$$u_1 = u_2 = -1, \quad u_3 = 1 - \frac{1}{2 \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*}.$$

И в силу (24.13)

$$v = 1, \quad A = 1 - \frac{1}{2 \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*}, \quad B = \frac{1}{2 \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*} - 2. \quad (24.19)$$

С помощью (24.11) и (24.19) равенство (24.14) можно переписать в виде

$$D_r = 2 \left\{ 4 \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_* - 1 \right\}^{3/2} \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{1 + \left\{ 4 \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_* - 1 \right\} \xi^2}.$$

После вычисления интеграла будем иметь:

$$D_r = 2 \left\{ \sqrt{4 \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_* - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{4 \left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_* - 1} \right\}. \quad (24.20)$$

Зависимость $\left[\frac{g(\tau)}{r}\right]_*$ от D_r , построенная с помощью этой формулы, приведена на рис. 83. При $D_r = 0$ функция $\left[\frac{g(\tau)}{r}\right]_* = \frac{1}{4}$ и увеличивается вместе с увеличением D_r . При больших значениях D_r равенство (24.20) можно

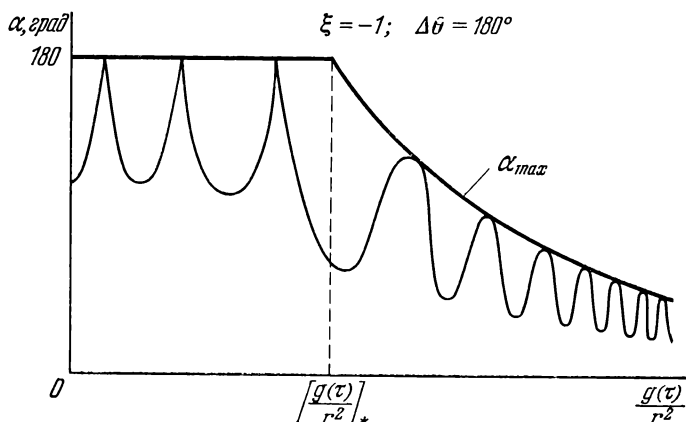


Рис. 82.

заменить более простым приближенным соотношением

$$\frac{D_r}{4} = \sqrt{\left[\frac{g(\tau)}{r^2}\right]_*}. \quad (24.21)$$

Случай $\xi = -1$ в задаче о входе в атмосферу реализуется, в частности, при $\Delta\theta = 180^\circ$. Если значение $B = B_1$ вне атмосферы не очень велико, что соответствует случаю, когда летательный аппарат вне атмосферы летит хвостовой частью вперед, то условие (24.20) определяет момент, когда летательный аппарат начинает переворачиваться носовой частью вперед. Так как D_r выражается через начальные условия, то с помощью равенства (24.20) устанавливается связь между параметрами движения вне атмосферы и моментом переворачивания летательного аппарата.

Отметим формулу для мгновенной частоты колебаний $\omega(\tau)$. Из (24.11) имеем:

$$\omega(\tau) = \frac{1}{\Lambda(\nu)} \sqrt{-\frac{g(\tau)B}{2\nu}}. \quad (24.22)$$

В силу формул (24.19) и того, что $K(1) = \infty$, ясно, что при $\xi = -1$ функция $\omega(\tau)$ обращается в нуль при $t = t_*$. Так

как при $\omega = 0$ условия (8.4) применимости асимптотики нарушаются, то в окрестности точки $t = t_*$ асимптотические решения, строго говоря, следует уточнять с помощью какого-либо другого метода решения уравнений движения.

Предполагая здесь, что при снижении $g(\tau)$ не обращается в нуль, покажем, что мгновенная частота при пространственном движении может обратиться в нуль только при $\xi = -1$. Из (24.22) видно, что $\omega(\tau)$ может обратиться в нуль в двух случаях: либо при

$B/\nu = 0$, либо при $\nu = 1$. Из (24.13) и (24.17) следует, что в каждом из этих случаев должно быть $u_1 = u_2 = -1$. Это в силу (24.12) может быть только тогда, когда $\xi = -1$.

Таким образом, случай $\xi = -1$ является единственным возможным случаем пространственного движения, при котором установленные условия применимости асимптотики нарушаются и требуется специальное исследование. Такое исследование будет проведено в § 27 и 28. Случаи плоского и пространственного движений при $\xi = -1$ в дальнейшем будут называться *особыми*.

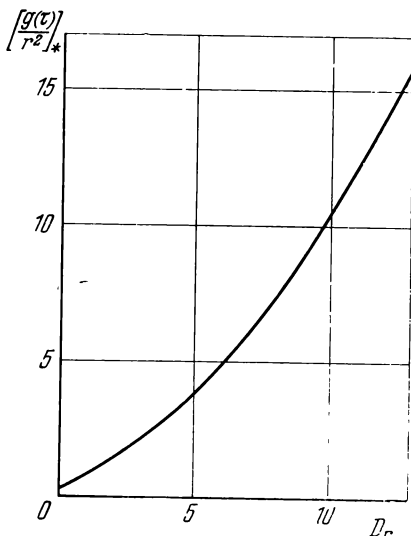


Рис. 83.

**§ 25. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ
ВНЕ АТМОСФЕРЫ И В ПЛОТНЫХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ
С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ,
ИСПОЛЪЗУЕМЫХ НА ВСЕЙ ТРАЕКТОРИИ СНИЖЕНИЯ**

В предыдущем параграфе для случая синусоидальной зависимости восстанавливающего момента от угла атаки была указана методика расчета возмущенного движения на всей траектории при условии пренебрежения влиянием демпфирования и подъемной силой. Однако достаточно полное представление о возмущенном движении при снижении можно получить, если исследовать его характеристики сначала на участке DE (рис. 1) внеатмосферной части траектории, а затем в плотных слоях атмосферы. В такой постановке задача об исследовании возмущенного движения может быть рассмотрена для достаточно широкого класса зависимостей восстанавливающего момента от угла атаки. Этот класс зависимостей определяется тем условием, чтобы по мере возрастания интенсивности аэродинамического момента $g(\tau)$ угол атаки летательного аппарата стремился к нулю. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы

$$\left. \begin{aligned} F(\alpha) > 0 \text{ при } 0 < \alpha < 180^\circ, \\ F(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

Кроме этого, в такой постановке можно учесть влияние демпфирующих моментов.

Получим сначала формулы, описывающие движение летательного аппарата вне атмосферы на участке траектории DE . Для этого, очевидно, следует обратиться к формулам предыдущего параграфа при $g(\tau)$, стремящемся к нулю. Ясно, что при $g(\tau) = 0$ они справедливы для произвольной зависимости восстанавливающего момента от угла атаки. Определим прежде всего входящие в них константы ξ и E_1 по известным начальным условиям (24.2) на участке DE . Из (2.5), (24.4), (24.7) и (24.2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{\omega_1^2}{2}, \\ \xi &= \cos \Delta\theta - \frac{\omega_1}{r_1} \cos \delta_0 \sin \Delta\theta. \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

Индексом «1» здесь и далее будут обозначаться значения параметров движения вне атмосферы на участке DE . Полагая в (24.12) $g(\tau) = 0$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_{1,1} &= -\infty, \\ (\xi - u_{i,1})^2 &= \frac{2E_1}{r_1^2} (1 - u_{i,1}^2) \quad (i = 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

Решая квадратное уравнение (25.3), будем иметь следующие выражения для $u_{2,1}$ и $u_{3,1}$:

$$\left. \begin{aligned} u_{2,1} &= \frac{\xi - \sqrt{\frac{2E_1}{r_1^2} \left(1 + \frac{2E_1}{r_1^2} - \xi^2\right)}}{1 + \frac{2E_1}{r_1^2}}, \\ u_{3,1} &= \frac{\xi + \sqrt{\frac{2E_1}{r_1^2} \left(1 + \frac{2E_1}{r_1^2} - \xi^2\right)}}{1 + \frac{2E_1}{r_1^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (25.4)$$

Если в (25.4) вместо ξ и E_1 подставить их выражения (25.2), то после ряда элементарных преобразований можно получить выражения для

$$\alpha_{\max, 1} = \arccos u_{2,1}$$

и

$$\alpha_{\min, 1} = \arccos u_{3,1}$$

в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max, 1} &= \arccos \{ [\rho_1 (\rho_1 \cos \Delta\theta - \cos \delta_0 \sin \Delta\theta - \\ &\quad - \sqrt{\sin^2 \delta_0 + (\rho_1 \sin \Delta\theta + \cos \delta_0 \cos \Delta\theta)^2}) (1 + \rho_1^2)^{-1}], \\ \alpha_{\min, 1} &= \arccos \{ [\rho_1 (\rho_1 \cos \Delta\theta - \cos \delta_0 \sin \Delta\theta + \\ &\quad + \sqrt{\sin^2 \delta_0 + (\rho_1 \sin \Delta\theta + \cos \delta_0 \cos \Delta\theta)^2}) (1 + \rho_1^2)^{-1}]. \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

Если воспользоваться введенными выше углами ψ_x и ψ_y , то из схемы, приведенной на рис. 80, сразу получаются

следующие выражения для $\alpha_{\max, 1}$ и $\alpha_{\min, 1}$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max, 1} &= \begin{cases} \psi_v + \psi_x & \text{при } \psi_v + \psi_x \leq \pi, \\ 2\pi - (\psi_v + \psi_x) & \text{при } \psi_v + \psi_x \geq \pi, \end{cases} \\ \alpha_{\min, 1} &= |\psi_v - \psi_x|. \end{aligned} \right\} \quad (25.6)$$

Нетрудно проверить, что формулы (25.5) и (25.6) переходят друг в друга.

Отметим еще соотношения, вытекающие из равенств (24.13) и свойств корней уравнения (25.3):

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 0, \\ 2A_1 + B_1 &= \frac{2\xi}{1 + \frac{2E_1}{r_1^2}}, \\ A_1(A_1 + B_1) &= \frac{\xi \left(\xi - \frac{2E_1}{r_1^2} \right)}{1 + \frac{2E_1}{r_1^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

Получим выражение для периода движения летательного аппарата вне атмосферы. Для этого необходимо раскрыть неопределенность в формуле (24.11), которая получается из-за того, что v стремится к нулю одновременно с $g(\tau)$. Чтобы это сделать, получим приближенное соотношение для определения корня u_1 при значениях $g(\tau)$, близких к нулю. Так как при $g(\tau)$, стремящемся к нулю, u_1 стремится к $-\infty$, то для того, чтобы получить такое соотношение, следует в (24.12) отбросить младшие степени u_1 . Выполняя это, будем иметь:

$$-\frac{g(\tau)}{r^2} u_1 + \frac{1}{2} + \frac{E_1}{r^2} = 0.$$

Отсюда в силу того, что $u_1 = A + \frac{B}{v}$ и $\frac{E_1}{r^2}$ при $g(\tau)$, стремящемся к нулю, стремится к $\frac{\omega_1^2}{2r_1^2}$ [см. (25.2)], сразу получается формула, определяющая главный член v при малых $g(\tau)$ и позволяющая раскрыть упомянутую неопре-

деленность в (24.11):

$$\nu = \frac{-2Bg(\tau)}{r_1^2 + \omega_1^2}.$$

Подставляя эту формулу в (24.11), учитывая (6.19) и пользуясь тем, что $K(\nu) = \pi/2$ при $\nu = 0$, получим искомое выражение для периода движения летательного аппарата вне атмосферы:

$$T_1 = \frac{\pi}{\psi_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{r_1^2 + \omega_1^2}}. \quad (25.8)$$

С помощью полученных выражений для $\alpha_{\max, 1}$, $\alpha_{\min, 1}$ и T_1 можно, очевидно, достаточно полно исследовать движение летательного аппарата вокруг центра масс на внеатмосферном участке траектории DE . Ясно также, что эти формулы дают точное решение задачи для этого случая.

Переходим к выводу формул для параметров движения летательного аппарата в плотных слоях атмосферы. Определим прежде всего константу D_r . Эта задача решается сразу, если записать равенство (24.14) для внеатмосферного участка траектории DE . Учитывая, что на этом участке $\nu_1 = 0$, будем иметь:

$$D_r = \frac{4\psi_1 B_1^2}{r_1} \int_0^1 \frac{\xi^2 \sqrt{1 - \xi}}{1 - (A_1 + B_1 \xi)} d\xi. \quad (25.9)$$

После вычисления интеграла это равенство приводится к виду

$$D_r = \frac{\pi\psi_1}{r_1} [2 - \sqrt{(1 - A_1)(1 - A_1 - B_1)} - \sqrt{(1 + A_1)(1 + A_1 + B_1)}], \quad (25.10)$$

где следует брать положительные значения корней. Если воспользоваться выражениями (25.7) и (25.8) с учетом того, что $\frac{2E_1}{r_1^2} = \frac{\omega_1^2}{r_1^2}$, то равенство (25.10) записывается так:

$$D_r = \pi \left(\sqrt{1 + \frac{\omega_1^2}{r_1^2}} - \frac{|\xi - 1| + |\xi + 1|}{2} \right). \quad (25.11)$$

После того как D_r известно, можно найти параметры движения летательного аппарата в плотных слоях атмосферы при больших значениях функции $\frac{g(\tau)}{r^2(\tau)}$. Обозначим через t_2 такой момент времени, чтобы при $t \geq t_2$ угол атаки можно было считать малой величиной. В соответствии с замечаниями об учете демпфирования, сделанными в § 7, при $t \leq t_2$ будем пользоваться условиями периодичности (7.22), а при $t \geq t_2$ — условиями периодичности (7.24). В момент $t = t_2$ получающиеся решения будут сопрягаться. Обозначим через r_2 и G_2 значения функций r и G при $\tau = \tau_2$. Из (7.22) имеем:

$$r_2 = r_1, \quad G_2 = G_1. \quad (25.12)$$

Учитывая это, для $t \geq t_2$ на основании (7.24) и (25.12) можно написать:

$$\left. \begin{aligned} r(\tau) &= r_2 e^{-\int_{\tau_2}^{\tau} f_x(\tau) d\tau} = r_1 e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} f_x(\tau) d\tau}, \\ G(\tau) - r(\tau) &= (G_2 - r_2) e^{-\int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} = (G_1 - r_1) e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (25.13)$$

Действуя точно так же, с помощью (7.22) и (7.24) нетрудно для $t \geq t_2$ получить равенства

$$\left. \begin{aligned} \omega \int_0^{\frac{T_\phi}{2}} \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 d\phi &= D e^{-\int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}, \\ D &= r_1 D_r, \end{aligned} \right\} \quad (25.14)$$

где D_r вычисляется с помощью (25.11).

Упростим теперь уравнение (24.4) для $t \geq t_2$, когда угол атаки α можно считать малой величиной. Полагая в нем $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = \alpha$, $M(\tau, \alpha) = g(\tau)\alpha$, что справедливо для достаточно широкого класса моментных характеристик, и пользуясь (25.13), будем иметь:

$$\frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{(G_1 - r_1)^2}{2\alpha^2} e^{-2\int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} + g_r(\tau) \frac{\alpha^2}{2} = E, \quad (25.15)$$

где функция $g_r(\tau)$ определяется формулой (21.6) при $G(\tau)$ и $r(\tau)$, определенных согласно (25.13).

Чтобы определить ω , E и α , необходимо совместно решить уравнения (25.14) и (25.15) при дополнительном условии о независимости от τ периода $\alpha(\tau, \varphi)$ по φ . Такое решение уравнений (25.14) и (25.15) можно искать в виде

$$\alpha = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} \sqrt{a + b \sin^2 \varphi}, \quad (25.16)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} \frac{b \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{a + b \sin^2 \varphi}}, \quad (25.17)$$

$$E = h \sqrt{g_r(\tau)} e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}, \quad (25.18)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = c \sqrt{g_r(\tau)}. \quad (25.19)$$

Здесь a , b , c и h — неопределенные константы, которые удобно определить так, чтобы имели место неравенства

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c > 0.$$

Подставляя (25.16) — (25.19) в уравнение (25.15), после несложных преобразований получаем:

$$cb^2 \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) + (G_1 - r_1)^2 + \\ + (a + b \sin^2 \varphi - 2h)(a + b \sin^2 \varphi) = 0. \quad (25.20)$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях φ . Так как оно представляет собой квадратный полином относительно $\sin^2 \varphi$, для этого достаточно потребовать, чтобы оно удовлетворялось при $\sin^2 \varphi = \infty$, $\sin^2 \varphi = 0$ и $\sin^2 \varphi = 1$. Подставляя эти значения в (25.20), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} c &= 1, \\ v_i^2 - 2hv_i + (G_1 - r_1)^2 &= 0 \quad (i = 1, 2), \\ v_1 &= a, \quad v_2 = a + b. \end{aligned} \right\} \quad (25.21)$$

Чтобы a и b были положительными, будем искать такое решение, в котором

$$v_1 \leq v_2. \quad (25.22)$$

Еще одно соотношение получается в результате подстановки (25.17) и (25.19) при $c = 1$ в условие периодичности (25.14) при $T_\varphi = \pi$:

$$b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{a + b \sin^2 \varphi} d\varphi = D.$$

После вычисления интеграла это уравнение записывается в виде

$$\frac{\pi}{4} [2a + b - 2 \sqrt{a(a+b)}] = D. \quad (25.23)$$

Уравнений (25.21) и (25.23), очевидно, достаточно для определения констант a , b и h . Из свойств корней уравнения (25.21) имеем:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 2h, \\ a(a + b) &= (G_1 - r_1)^2. \end{aligned}$$

С учетом этого уравнение (25.23) позволяет сразу получить выражение для h :

$$h = \frac{2D}{\pi} + |G_1 - r_1|. \quad (25.24)$$

Решая теперь при известном h уравнение (25.21), получаем выражения для a и b :

$$\left. \begin{aligned} a &= h - \sqrt{h^2 - (G_1 - r_1)^2}, \\ b &= 2 \sqrt{h^2 - (G_1 - r_1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (25.25)$$

Заметим, что эти формулы вместе с выражением (25.16) для α дополняют номограммы для определения параметров движения на всей траектории, способ расчета которых указан в предыдущем параграфе для случаев, когда угол атаки становится достаточно малым. В результате сравнений, проведенных для случаев плоского движения

(см. § 11 и рис. 20) и регулярных прецессий (см. § 21 и рис. 67), в которых аналогичные номограммы имеются, было выяснено, что формулами для движения в плотных слоях атмосферы можно пользоваться, начиная с такого момента $t = t_2$, когда формула (25.16) дает значения угла атаки, не превышающие одного радиана. Получающаяся при этом ошибка не превышает нескольких процентов.

С помощью формул (25.24) и (25.25) нетрудно получить выражения (22.24) и (22.25) для $P_{\max}$ и $P_{\min}$, которые были приведены в § 22 без вывода. Для этого, очевидно, достаточно [см. соотношения (20.12) и (22.21)] в формулы (25.24) и (25.25) подставить

$$G_1 = r_1 \cos \Delta\theta$$

и

$$D = \sqrt{k^2 + r_1^2} \bar{D},$$

ввести безразмерный параметр $v_1 = r_1/k$ и затем выполнить несложные преобразования.

Если в равенства (25.24) и (25.25) подставить выражения (24.2) для G_1 и (25.11) для D , при $\xi = G_1/r_1$, то константы a и b оказываются выраженными через параметры движения вне атмосферы:

$$\left. \begin{aligned} b &= 4 \left[\left(\sqrt{r_1^2 + \omega_1^2} - \left| r_1 \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\omega_1 \sin \Delta\theta \cos \delta_0}{2} \right| \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(r_1 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\omega_1 \sin \Delta\theta \cos \delta_0}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ a &= 2 \left(\sqrt{r_1^2 + \omega_1^2} - \left| r_1 \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\omega_1 \sin \Delta\theta \cos \delta_0}{2} \right| - \frac{b}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25.26)$$

В этих формулах параметр δ_0 входит под знаком косинуса, который, как известно, принимает все свои значения при $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$. Вследствие этого в дальнейшем при проведении исследования вместо интервала $0 \leq \delta_0 \leq 360^\circ$ будет рассматриваться меньший интервал $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$. По аналогичным соображениям далее будут рассматриваться только неотрицательные значения r_1 . В самом деле, изменение знака r_1 , как это видно из (25.26), эквивалентно замене δ_0 на $180^\circ - \delta_0$, и соответственно результа-

ты исследования при $r_1 > 0$ без труда могут быть перенесены на случай $r_1 < 0$.

Отметим формулы для максимального $\alpha_{\max}(\tau)$ и минимального $\alpha_{\min}(\tau)$ значений угла атаки за время каждого колебания. Из (25.16) и (25.26) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} 2\sqrt[4]{r_1^2 + \omega_1^2} N_{\max}^{(ac)}(\Delta\theta, \rho_1, \delta_0), \\ \alpha_{\min} &= \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} 2\sqrt[4]{r_1^2 + \omega_1^2} N_{\min}^{(ac)}(\Delta\theta, \rho_1, \delta_0), \end{aligned} \right\} \quad (25.27)$$

где

$$N_{\max}^{(ac)} = \left[\left\{ \sqrt{1 + \rho_1^2} - m + [(\sqrt{1 + \rho_1^2} - m)^2 - \left(\rho_1 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\cos \delta_0 \sin \Delta\theta}{2} \right)^2]^{\frac{1}{2}} \right\} (2\sqrt{1 + \rho_1^2})^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (25.28)$$

$$N_{\min}^{(ac)} = \left[\left\{ \sqrt{1 + \rho_1^2} - m - [(\sqrt{1 + \rho_1^2} - m)^2 - \left(\rho_1 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\cos \delta_0 \sin \Delta\theta}{2} \right)^2]^{\frac{1}{2}} \right\} (2\sqrt{1 + \rho_1^2})^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (25.29)$$

$$m = \left| \rho_1 \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2} - \frac{\cos \delta_0 \sin \Delta\theta}{2} \right|. \quad (25.30)$$

Из формул (25.26), (25.27) и (25.19) видно, что форма зависимости восстанавливающего момента от угла атаки не влияет на движение летательного аппарата в плотных слоях атмосферы, если только, конечно, начальные условия задаются вне атмосферы.

Заметим, что формулы (25.27), очевидно, переходят в аналогичные формулы (11.5) и (21.8), полученные соответственно для плоского движения и регулярных прецессий с медленно изменяющимися параметрами. Чтобы получить формулу (11.5), следует в (25.26) положить $r_1 = 0$ и $\delta_0 = \pi/2$, а чтобы получить формулу (21.8), следует в (25.26)

принять $\omega_1 = 0$. Отметим еще формулу для периода колебаний аппарата в плотных слоях атмосферы:

$$T(\tau) = \frac{\pi}{\sqrt{g_r(\tau)}}. \quad (25.31)$$

В заключение настоящего параграфа заметим, что для того, чтобы полученные в настоящем параграфе формулы давали правильные значения параметров движения в плотных слоях атмосферы, очевидно, необходимо, чтобы асимптотические решения были точны на всей траектории снижения. Как неоднократно указывалось выше, для этого необходимо, чтобы скорость вращения летательного аппарата вне атмосферы была бы не очень малой величиной. Более точно область применимости формул настоящего параграфа будет определена в § 28. Так же как и в предыдущей главе, при больших значениях функции $g(\tau)$ во всех приведенных выше формулах функцию $g_r(\tau)$ можно заменить функцией $g(\tau)$.

§ 26. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НА ВСЕЙ ТРАЕКТОРИИ СНИЖЕНИЯ

В настоящем параграфе будет рассмотрено влияние величины и направления начального импульса, который летательный аппарат, предназначенный для спуска на Землю, получает в момент отделения от ракеты-носителя, на его последующее движение. При этом основное внимание будет уделено исследованию влияния величин r_1 , ω_1 и $\Delta\theta$ на $\alpha_{\max}(\tau)$, так как именно эта величина определяет действующую на летательный аппарат поперечную перегрузку.

а) Исследование движения в случае, когда продольная компонента вектора начального кинетического момента равняется нулю. Рассмотрим сначала случай, когда вектор начального кинетического момента имеет только экваториальную компоненту $Q_{\phi 0}$, а $Q_{\chi 0} = \rho_1 = 0$. В этом случае движение обычно рассчитывается с помощью плоской схемы, которая, как это видно на рис. 1, реализуется

при $\delta_0 = 90^\circ$ *). При $\delta_0 \neq 90^\circ$ движение является пространственным вследствие того, что поперечная компонента начального импульса выводит ось летательного аппарата из плоскости траектории.

Выясним сначала влияние пространственности движения на величину $\alpha_{\max,1}$, которая характеризует движение

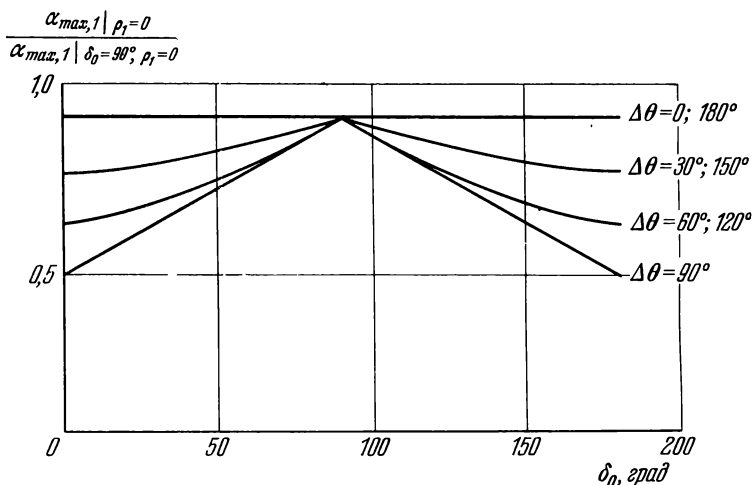


Рис. 84.

на внеатмосферном участке траектории DE . С этой целью с помощью первого выражения (25.5) при $\rho_1 = 0$ составим отношение

$$\frac{\alpha_{\max, 1} | \rho_1=0}{\alpha_{\max, 1} | \delta_0=90^\circ, \rho_1=0} = \frac{1}{\pi} \arccos \left(- \sqrt{\sin^2 \delta_0 + \cos^2 \delta_0 \cos^2 \Delta \theta} \right). \quad (26.1)$$

Зависимость этого отношения от δ_0 при различных значениях $\Delta \theta$ изображена на рис. 84. Видно, что влияние пространственности движения наибольшее при $\Delta \theta = 90^\circ$.

*) Плоская схема реализуется также и при $\delta_0 = 270^\circ$, но в соответствии со сделанным в § 25 замечанием всюду в настоящем параграфе при проведении исследования будет рассматриваться интервал $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$.

Это легко понять, если учесть, что вне атмосферы при $\rho_1 = 0$ летательный аппарат равномерно вращается относительно неизменного направления. Обращает на себя внимание наличие изломов у всех кривых при $\delta_0 = 90^\circ$. Эти изломы получаются из-за того, что при изменении δ_0 в окрестности $\delta_0 = 90^\circ$ значение аргумента $\arccos x$ сначала достигает минус единицы, а затем удаляется от нее.

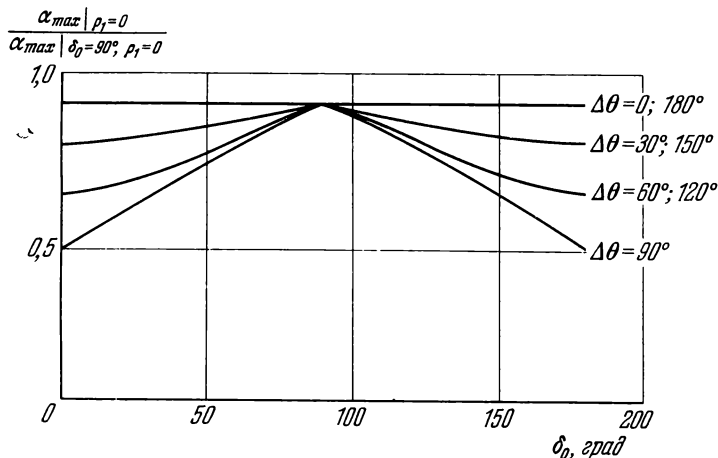


Рис. 85.

Рассмотрим теперь влияние пространственности движения на значение $\alpha_{\max}$ при движении летательного аппарата в плотных слоях атмосферы. Обращаясь к первой формуле (25.27), составим отношение

$$\frac{\alpha_{\max} | \rho_1=0}{\alpha_{\max} | \delta_0=90^\circ, \rho_1=0} = \sqrt{\frac{1 - \left| \frac{\cos \delta_0 \sin \Delta \theta}{2} \right| + \sqrt{1 - |\cos \delta_0 \sin \Delta \theta|}}{2}}. \quad (26.2)$$

Результаты расчетов этого отношения представлены на рис. 85. Первое, что следует отметить — это сходство кривых на рис. 84 и 85: аналогичное влияние параметров и наличие изломов при $\delta_0 = 90^\circ$, которые получаются благодаря наличию в (26.2) особенности типа $|x|$. Таким образом, движение летательного аппарата вне атмосферы

по инерции в значительной степени определяет характер движения летательного аппарата в плотных слоях атмосферы. Еще один вывод, который следует сделать из графиков на рис. 85, заключается в том, что при плоском движении значения $\alpha_{\max}$ в плотных слоях атмосферы являются максимально возможными при $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$ и $\rho_1 = 0$: как при уменьшении δ_0 от $\delta_0 = 90^\circ$ до $\delta_0 = 0$, так и при увеличении δ_0 от $\delta_0 = 90^\circ$ до $\delta_0 = 180^\circ$ значения отношения (26.2) монотонно убывают. Вследствие этого, если δ_0 может иметь любое значение из этого интервала, то расчет $\max \alpha_{\max}$ при $\rho_1 = 0$ следует производить с помощью плоской схемы.

Здесь уместно заметить, что этот вывод никак не относится к вопросу об определении вероятности P , с которой при $\rho_1 = 0$ $\alpha_{\max}$ может превосходить свое практически максимальное значение. Это связано с тем, что имеется параметр δ_0 , который может принимать все значения из интервала $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$. Вследствие этого плоское движение является весьма частным случаем возможных движений при $\rho_1 = 0$. Оставаясь же в рамках плоской схемы, невозможно определить вероятность пространственных движений, близких к плоскому, на которую для получения правильных значений P надо умножать значение $P = P_0$, определенное с помощью плоской схемы. Ясно, что по этой причине значения вероятности P_0 , вообще говоря, во много раз могут превосходить истинные значения P .

б) Исследование влияния продольной компоненты начального кинетического момента. Основной целью настоящего пункта является выяснение влияния на движение параметра

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\omega_1} = \frac{Q_{x0}}{Q_{\omega_0}}, \quad (26.3)$$

который представляет собой котангенс угла полураствора конуса, описываемого осью летательного аппарата при движении вне атмосферы.

В дальнейшем будем считать, что угол δ_0 может иметь любое значение из интервала $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$. Вследствие этого значения $\alpha_{\max}$ при $\rho_1 > 0$ целесообразно относить к максимально возможному значению $\alpha_{\max}$ при $\rho_1 = 0$.

Это связано с тем, что при определении потребной величины ρ_1 имеет смысл сравнивать максимальные из значений $\alpha_{\max}$ при $\rho_1 = 0$ и $\rho_1 > 0$. В предыдущем пункте было указано, что максимальное значение $\alpha_{\max}$ при $\rho_1 = 0$ и $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$ достигается при $\delta_0 = 90^\circ$. В соответствии с этим с помощью первого выражения (25.5) составим отношение, характеризующее влияние ρ_1 на внеатмосферном участке траектории DE :

$$\frac{\alpha_{\max, 1}}{\alpha_{\max, 1} | \delta_0=90^\circ, \rho_1=0} = \frac{1}{\pi} \arccos \{ [\rho_1 (\rho_1 \cos \Delta\theta - \cos \delta_0 \sin \Delta\theta) - \sqrt{\sin^2 \delta_0 + (\rho_1 \sin \Delta\theta + \cos \delta_0 \cos \Delta\theta)^2}] (1 + \rho_1^2)^{-1} \}. \quad (26.4)$$

Так как $\Delta\theta$ определяется формой внеатмосферного участка траектории и, следовательно, для каждого конкретного случая является фиксированной величиной, то зависимость (26.4) и другие аналогичные зависимости будут изображаться в виде серий кривых, в которых аргументом является ρ_1 , параметром δ_0 , а $\Delta\theta$ — константа.

Представленные таким образом результаты расчетов отношения (26.4) изображены на рис. 86—92. В соответствии с замечанием, сделанным в § 25, расчеты были выполнены лишь для $\rho_1 \geq 0$. Если сопоставить графики для различных $\Delta\theta$, то видно, что значения $\alpha_{\max}$ при увеличении $\Delta\theta$ в основном увеличиваются. Увеличение ρ_1 при ρ_1 , больших некоторого значения, приводит к уменьшению $\alpha_{\max}$, причем величина влияния ρ_1 существенно зависит от $\Delta\theta$. При малых $\Delta\theta$ влияние ρ_1 существенно больше, чем при значениях $\Delta\theta$, близких к 180° .

Эти свойства полученных кривых нетрудно понять, если учесть, что, двигаясь вне атмосферы по инерции, летательный аппарат периодически принимает свое исходное положение, которое он имел при отделении.

Так же как на рис. 84 и 85, на некоторых кривых, приведенных на рис. 86—92, имеются изломы. Эти изломы можно разделить на две группы: изломы, которые имеют ординаты, равные единице, и изломы, ординаты которых существенно меньше единицы. Первая группа изломов появляется из-за свойств функции $\arccos x$ при x , сначала достигающем, а затем удаляющемся от минус единицы. Из (25.4) видно, что эти изломы соответствуют значению

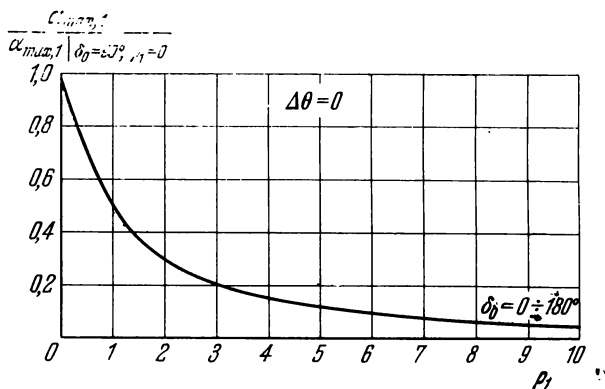


Рис. 86.

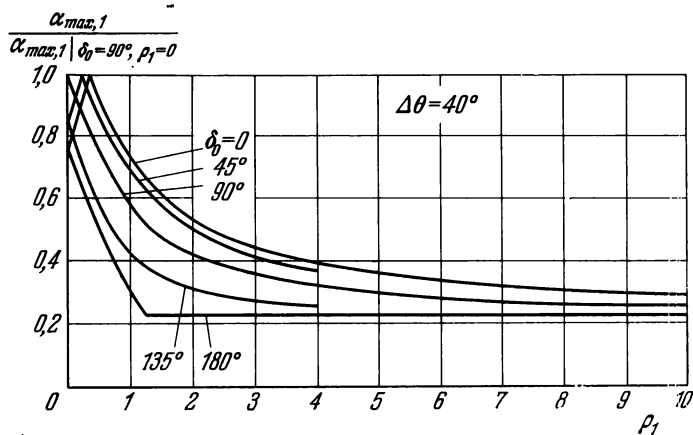


Рис. 87.

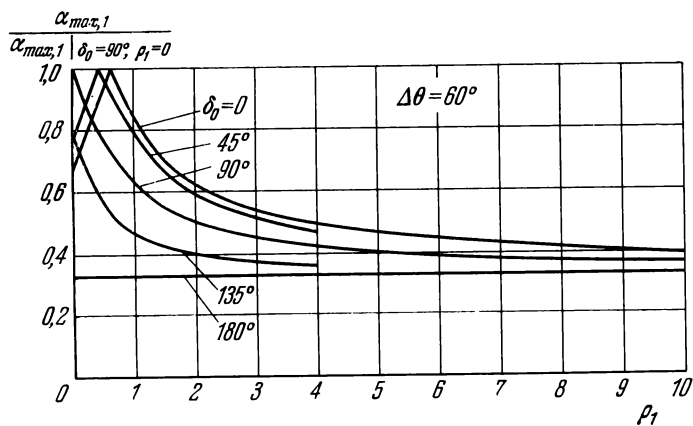


Рис. 88.

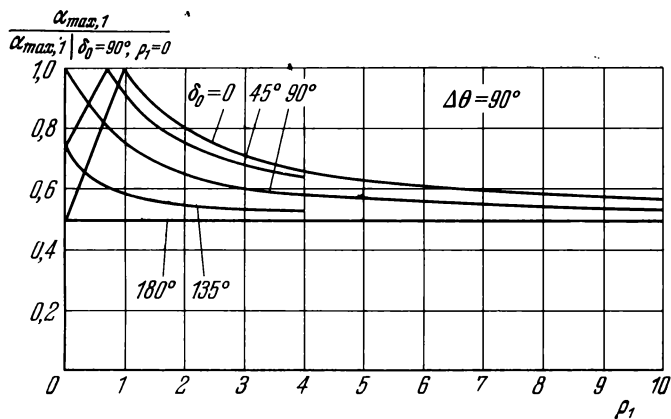


Рис. 89.

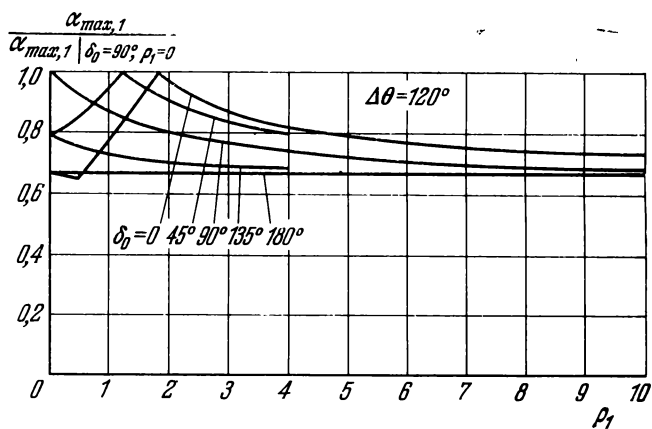


Рис. 90.

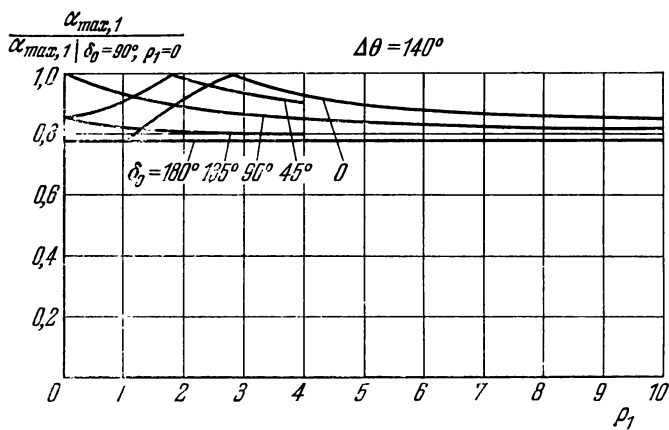


Рис. 91.

$\xi = -1$. Если учесть выражение (25.2) для ξ , то для абсцисс $\rho_{1,1}$ первой группы изломов сразу получается формула

$$\rho_{1,1} = \cos \delta_0 \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}. \quad (26.5)$$

Отсюда видно, что изломы первой группы могут быть только при $0 \leq \delta_0 \leq 90^\circ$, если абсциссы $\rho_{1,1}$ положительны.

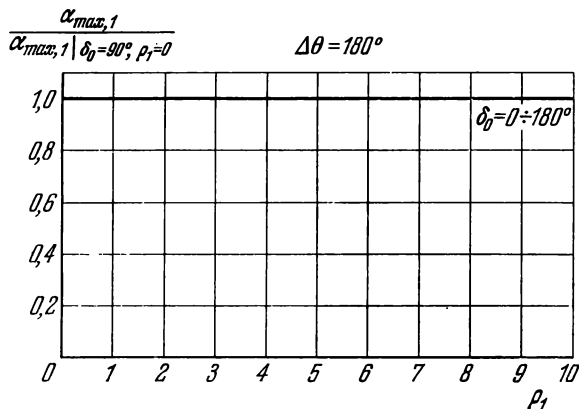


Рис. 92.

Как уже указывалось, в случае, когда $\xi = -1$, то есть когда $\rho_1 = \rho_{1,1}$, при движении вне атмосферы угол атаки летательного аппарата периодически принимает значение, равное 180° . Этот случай является особым.

Изломы второй группы могут быть только при $\delta_0 = 0$ и $\delta_0 = 180^\circ$. Они появляются из-за того, что при $\sin \delta_0 = 0$ под знаком корня в (26.4) получается полный квадрат, что после извлечения корня дает особенность типа $|x|$. Абсциссы $\rho_{1,2}$ этих изломов можно определить, если приравнять нулю стоящее в (26.4) под знаком корня выражение в скобках. Выполнив это, будем иметь:

$$\rho_{1,2} = -\cos \delta_0 \operatorname{ctg} \Delta\theta. \quad (26.6)$$

Таким образом, при $\rho_{1,2} \geq 0$ изломы второй группы могут быть при $90^\circ \leq \Delta\theta \leq 180^\circ$, если $\delta_0 = 0$, и при

$0 \leq \Delta\theta \leq 90^\circ$, если $\delta_0 = 180^\circ$. Заметим, что в обоих случаях

$$\rho_{1,2} < \rho_{1,1}.$$

Из формул (25.5) видно, что при $\sin \delta_0 = 0$ и $\rho_1 = = \rho_{1,2}$ имеет место равенство $\alpha_{\max, 1} = \alpha_{\min, 1}$, означающее, что в этом случае ось летательного аппарата описывает круговой конус относительно вектора скорости центра масс. При указанных условиях вектор начального кинетического момента аппарата параллелен вектору скорости аппарата в момент входа в атмосферу.

Перейдем теперь к исследованию движения в плотных слоях атмосферы. Пользуясь (25.27) и (25.28), составим, так же как и ранее, отношение

$$\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\max} |_{\delta_0=90^\circ, \rho_1=0}} = \sqrt[4]{1 + \rho_1^2} N_{\max}^{(ac)}(\Delta\theta, \rho_1, \delta_0). \quad (26.7)$$

Входящая сюда функция $N_{\max}^{(ac)}$ определяется формулой (25.28). Результаты расчетов отношения (26.7) представлены на рис. 93—99. Первое, что следует отметить, заключается в том, что, так же как и в случае, когда $\rho_1 = 0$, характер кривых, изображенных на этих рисунках, во многом напоминает характер кривых на рис. 86—92, описывающих движение летательного аппарата вне атмосферы. Кривые на рис. 93—99 для случая движения в атмосфере можно представлять себе как результат поворота кривых, изображенных на рис. 86—92, против направления движения часовой стрелки на угол, зависящий от $\Delta\theta$. Получающееся при этом увеличение угла атаки, очевидно, связано с наличием гироскопических сил, которые стремятся сохранить направление оси летательного аппарата.

Кривые, описывающие движение в атмосфере, имеют изломы, расположение и характер которых в основном совпадают с характером и расположением изломов для кривых, описывающих движение вне атмосферы. Абсциссы этих изломов по-прежнему даются формулами (26.5) и (26.6). Это нетрудно показать с помощью элементарного анализа формулы (26.7). Изломы с абсциссами $\rho_{1,1}$ получаются из-за наличия в выражении для $N_{\max}^{(ac)}$

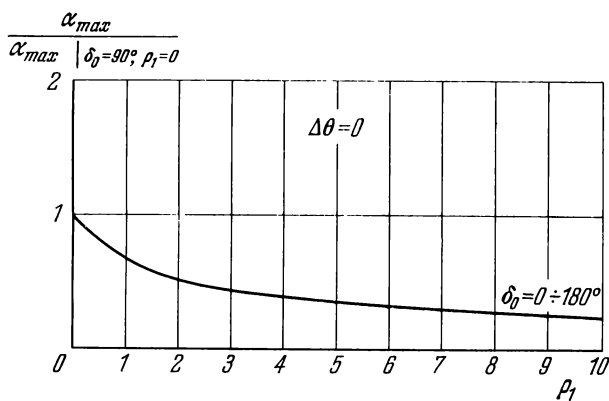


Рис. 93.

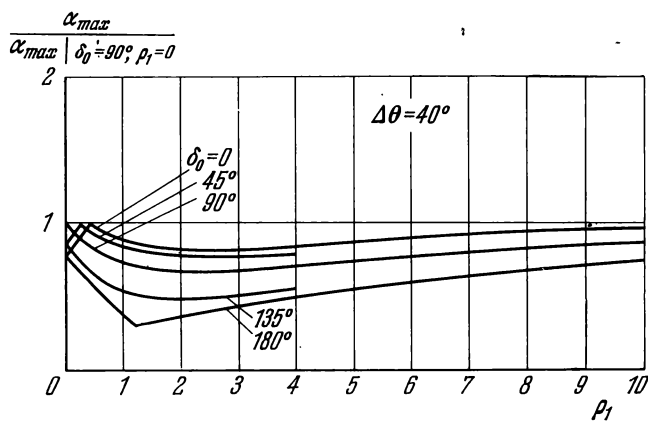


Рис. 94.

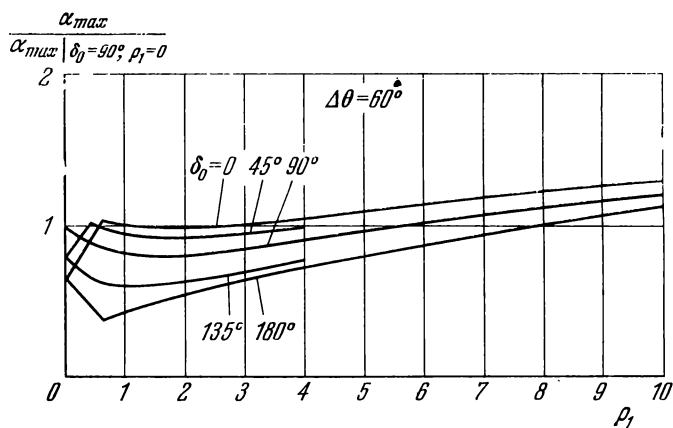


Рис. 95.

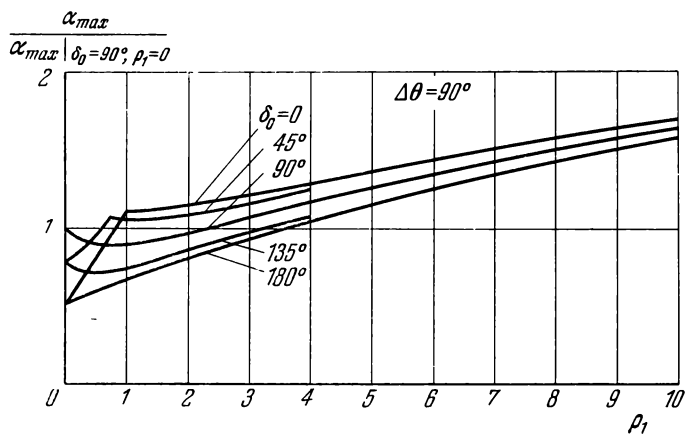


Рис. 96.

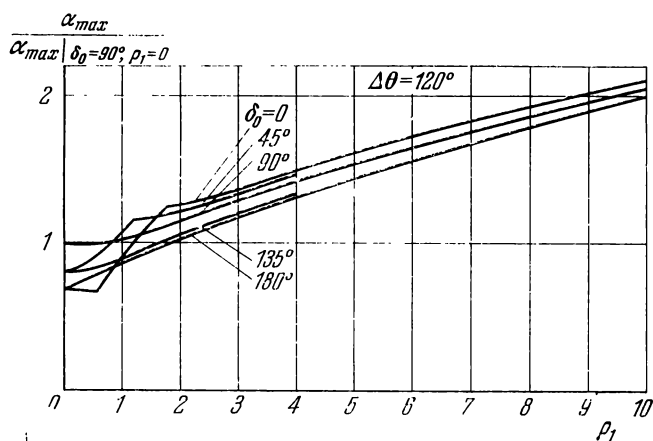


Рис. 97.

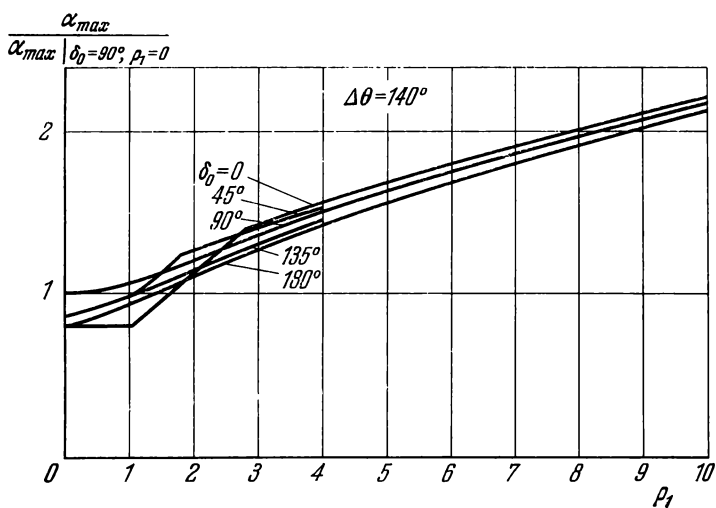


Рис. 98.

[см. формулы (25.28) и (25.30)] группы членов, стоящих под знаком модуля, а изломы с абсциссами $\rho_{1,2}$ получаются так же, как и раньше, из-за того, что выражение, стоящее во внутренних квадратных скобках в (25.28), при $\sin \delta_0 = 0$ и $\rho_1 < \rho_{1,1}$ имеет нуль второго порядка, что после извлечения корня также дает особенность типа $|x|$.

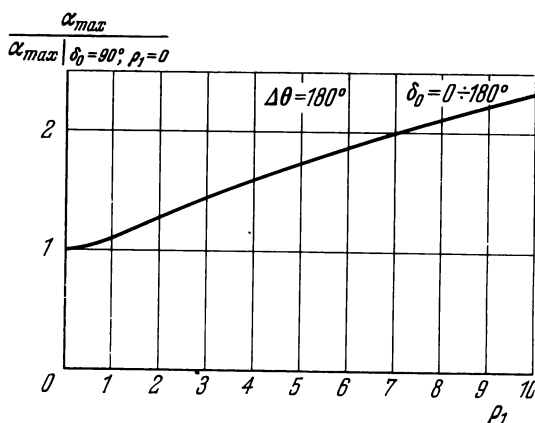


Рис. 99.

Таким образом, установлено, что свойства движения летательного аппарата в плотных слоях атмосферы во многом копируют свойства его движения по инерции вне атмосферы.

Сделаем еще ряд замечаний относительно величины отношения (26.7) при $\rho_1 = \rho_{1,1}$. Так как в этой точке $\xi = -1$, то эта точка соответствует особому случаю, в котором в процессе движения мгновенная частота обращается в нуль. Как было показано на примере плоского движения (см. § 13), в этом случае значения отношения $\alpha_{\max}/(\alpha_{\max}|_{\delta_0=90^\circ, \rho_1=0})$ определяются выражением (26.7), хотя и для большинства, но все же не для всех значений угла атаки летательного аппарата на границе атмосферы. Вследствие этого в точных решениях при $\rho_1 = \rho_{1,1}$ можно получить значения указанного отношения, заключенные в некотором интервале. Так что если не принимать во внимание соображения о маловероятности таких значе-

ний, то, строго говоря, вместо точек при $\rho_1 = \rho_{1,1}$ на рис. 93—99 следовало бы провести вертикальные отрезки.

Сделаем несколько замечаний относительно влияния параметра δ_0 на величину отношения (26.7). Из графиков на рис. 93—99 видно, что δ_0 влияет по-разному в зависимости от знака неравенства $\rho_1 \leqslant \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$. При $\rho_1 < \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$ увеличение δ_0 от 0 до δ_0^* , где δ_0^* — корень уравнения

$$\rho_1 = \cos \delta_0 \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}, \quad (26.8)$$

приводит к увеличению отношения (26.7), а затем при дальнейшем увеличении δ_0 это отношение уменьшается. Если же $\rho_1 \geqslant \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$, то увеличение параметра δ_0 всегда приводит к уменьшению отношения (26.7). Таким образом, максимальное значение отношения (26.7) при $0 \leqslant \delta_0 \leqslant 180^\circ$, на которое следует ориентироваться при определении поперечной перегрузки, при $\rho_1 < \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$ достигается при $\delta_0 = \delta_0^*$, а при $\rho_1 \geqslant \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$ — при $\delta_0 = 0$.

Эти выводы о влиянии параметра δ_0 нетрудно также получить и из выражения (25.28) для $N_{\max}^{(ac)}$. Заменяя в этом выражении разность квадратов, стоящую во внутренних квадратных скобках, произведением суммы на разность, запишем его в виде

$$N_{\max}^{(ac)} = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \rho_1^2} - m + \sqrt{(\sqrt{1 + \rho_1^2} \pm \rho_1)(\sqrt{1 + \rho_1^2} \mp \rho_1 - 2m)}}{2\sqrt{1 + \rho_1^2}}}, \quad (26.9)$$

где

$$m = \left| \rho_1 \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \cos \delta_0 \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| \cos \frac{\Delta\theta}{2}.$$

Из выражения для $N_{\max}^{(ac)}$ в такой форме видно, что $N_{\max}^{(ac)}$ является монотонно убывающей функцией m . Из этого, очевидно, сразу следуют все те выводы о влиянии угла

δ_0 , которые были сделаны выше. В частности, максимальное значение $N_{\max}^{(ac)}$ при $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$, которое далее

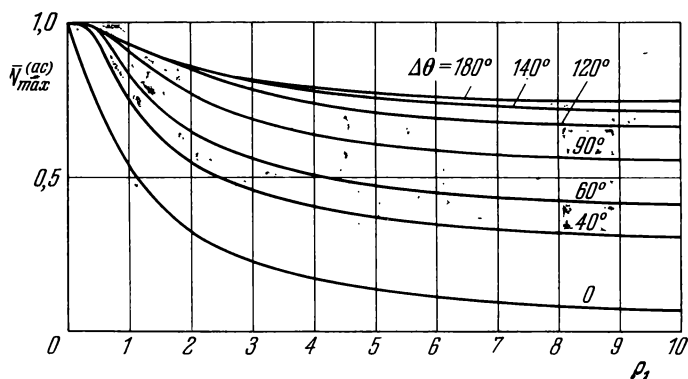


Рис. 100.

будет обозначаться через $\bar{N}_{\max}^{(ac)}$ и которое определяется из (26.9) при

$$m = \min_{0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ} m = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho_1 \leq \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}, \\ m|_{\delta_0=0} & \text{при } \rho_1 \geq \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}, \end{cases}$$

находится с помощью формул

$$\bar{N}_{\max}^{(ac)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{V_{1+\rho_1^2+1}}{2V_{1+\rho_1^2}}} & \text{при } \rho_1 \leq \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}, \\ N_{\max}^{(ac)}|_{\delta_0=0} & \text{при } \rho_1 \geq \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}. \end{cases} \quad (26.10)$$

Верхняя формула в (26.10) есть не что иное, как $N_{\max}^{(ac)}$ при $\Delta\theta = 180^\circ$. Графики функции $\bar{N}_{\max}^{(ac)}$, которая, очевидно, зависит только от ρ_1 и $\Delta\theta$, приведены на рис. 100.

§ 27. МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ УТОЧНЕННЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОТНЫХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ

Чтобы дополнить исследование пространственного движения, проведенное в предыдущем параграфе для случая малых скоростей вращения летательного аппарата вне атмосферы, а также более точно проанализировать особенности движения в особом случае, когда $\xi = -1$, следует воспользоваться уточненным асимптотическим методом. Для предельных случаев движения этот метод был изложен в § 12 и 22. В общем случае пространственного движения уточненные асимптотические формулы получаются примерно так же, как это делалось в § 22. Поэтому ниже методика получения уточненных асимптотических формул будет изложена очень кратко и внимание в основном будет уделено лишь тем вопросам, которые в § 12 и 22 рассматривались недостаточно полно.

Так же как в § 12 и 22, разобьем траекторию снижения на три участка: участок DE (рис. 1), расположенный вне атмосферы, участок, расположенный в атмосфере и соответствующий $t_1 \leq t \leq t_2'$, на котором асимптотические решения еще не точны, и участок, соответствующий $t \geq t_2'$, на котором решения уравнений движения описываются асимптотическими решениями с достаточной точностью.

При исследовании движения на первом и втором участках возьмем уравнение движения в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{(G_1 - r_1 \cos \alpha)(r_1 - G_1 \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + g(t) F(\alpha) = 0. \quad (27.1)$$

Здесь G_1 и r_1 определяются формулами (24.2), а под $g(t)$ и $F(\alpha)$ подразумевается то же самое, что и в § 12 и 22. Укажем соотношение для определения границы атмосферы в рассматриваемом случае. Действуя точно так же, как в § 12 и 22, можно показать, что если момент $t = t_1$ определять из равенства

$$\frac{g(t_1)}{k^2 + \omega_1^2 + r_1^2} = \bar{g}_1 \quad (\bar{g}_1 = 0,01), \quad (27.2)$$

то при $t \approx t_1$ поправки за счет действия атмосферы к значениям угла атаки, определенным без учета действия атмосферы, не будут превосходить величин порядка 1° .

Приведем соотношения, описывающие движение летательного аппарата на внеатмосферном участке траектории DE . На этом участке траектории угол атаки летательного аппарата определяется выражением (24.6) при $v = 0$. Так как при $v = 0$ эллиптический синус превращается в обыкновенный, то на участке траектории DE выражение (24.6) можно записать в виде

$$\alpha = \arccos \left(A_1 + B_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \quad (27.3)$$

[через φ здесь обозначено произведение π на величину фазы в выражении (24.6)]. Из (25.8) и (27.3) имеем:

$$\varphi = \sqrt{r_1^2 + \omega_1^2} (t + \text{const}). \quad (27.4)$$

Если воспользоваться выражениями (25.5) для $\alpha_{\max, 1}$ и $\alpha_{\min, 1}$, то для A_1 и B_1 получаются выражения

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -\frac{2}{1 + \rho_1^2} \sqrt{\sin^2 \delta_0 + (\rho_1 \sin \Delta\theta + \cos \delta_0 \cos \Delta\theta)^2}, \\ A_1 &= \frac{\rho_1 \eta_1}{1 + \rho_1^2} - \frac{B_1}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (27.5)$$

где

$$\eta_1 = \rho_1 \cos \Delta\theta - \cos \delta_0 \sin \Delta\theta = \xi \rho_1. \quad (27.6)$$

Получим еще выражение для $d\alpha/dt$ на участке траектории DE . Воспользуемся для этого интегралом энергии (24.4). На участке траектории DE он с учетом (25.2) может быть записан в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{G_1 - r_1 \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{\bar{\omega}_1^2}{2},$$

где ω_1 определяется выражением (24.2). Отсюда для $d\alpha/dt$ получается следующее выражение:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \omega_1 \sqrt{1 - \frac{(\eta_1 - \rho_1 \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}. \quad (27.7)$$

Знак $d\alpha/dt$ должен выбираться в соответствии с равенством (27.3).

Из выражения для угла атаки (27.3) видно, что в общем случае пространственного движения летательный аппарат при $t = t_1$ может иметь далеко не все возможные значения угла атаки. Например, в случае прецессии угол атаки может иметь всего лишь одно значение, равное $\Delta\theta$. Но φ — фаза угла атаки при достаточно большом t_1 , так же как и угол атаки при плоском движении, может, очевидно, по-прежнему иметь любое значение из интервала от $-\pi$ до π . Заметим, что при плоском движении, когда $\rho_1 = 0$ и $\delta_0 = 90^\circ$, фаза φ совпадает с α_1 . Поэтому в дальнейшем при исследовании движения вместо предположения о равновероятности значений α_1 , которое принималось при плоском движении, будем считать равновероятными все значения фазы φ из интервала $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Для исследования движения на втором участке, как и ранее, введем безразмерную независимую переменную

$$v = \sqrt{k^2 + \omega_1^2 + r_1^2} (t - t_1). \quad (27.8)$$

Тогда уравнение (27.1) и начальные условия (27.3) и (27.7) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dv} + \bar{\omega}_1 \frac{(\rho_1 - \eta_1 \cos \alpha)(\eta_1 - \rho_1 \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + \bar{g}_1 e^v / \sqrt{1 + \mu_1^2 + \nu_1^2} F(\alpha) &= 0, \\ \alpha|_{v=0} &= \arccos \left(A_1 + B_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = \alpha_1, \\ \frac{d\alpha}{dv} \Big|_{v=0} &= \bar{\omega}_1 \operatorname{sign} \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_1 - \rho_1 \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (27.9)$$

где

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{1 + \mu_1^2 + \nu_1^2}}, \quad \mu_1 = \frac{\omega_1}{k}, \quad \nu_1 = \frac{r_1}{k}. \quad (27.10)$$

Решение задачи на втором участке производится с помощью численного интегрирования. Численное интегрирование уравнения (27.9) представляет собой отнюдь не простую задачу, так как это уравнение при $\alpha = 0$ и $\alpha = 180^\circ$, вообще говоря, имеет особенности. Детали численного

интегрирования этого уравнения описаны в приложении. Определение конца второго участка в общем случае пространственного движения в основном не отличается от того, как это делалось в § 22: так же как и ранее, конец второго участка будет определяться из условия совпадения значений D для последовательных экстремумов зависимости $\alpha(v)$, получаемой при численном интегрировании уравнения (27.9). Отличие состоит лишь в выборе условия опрокидывания, которое обеспечивает прохождение с помощью численного интегрирования интервала значений v , на котором асимптотические решения могут быть не точны.

Чтобы получить условие опрокидывания для пространственного движения, так же как для регулярных прецессий, обратимся к особому случаю, когда $\eta_1 = -\rho_1$ ($\xi = -1$). Общий характер движения в этом случае иллюстрируется графиком на рис. 82: при $t < t_*$ летательный аппарат колеблется в окрестности $\alpha = 180^\circ$, а затем, после того как стабилизирующее действие атмосферы станет достаточно интенсивным, при $t > t_*$ аппарат начинает приближаться к устойчивому положению равновесия $\alpha = 0$. Как было выяснено в § 24, при $t = t_*$ мгновенная частота колебаний обращается в нуль, и в окрестности $t = t_*$ асимптотические решения могут быть неточными. Момент t_* является корнем уравнения (24.20). Это уравнение с помощью введенных в настоящем параграфе безразмерных величин можно записать в виде

$$V\bar{\sigma} - \frac{\bar{\omega}_1 \rho_1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{V\bar{\sigma}}{\bar{\omega}_1 \frac{\rho_1}{2}} \right] = \frac{\pi \bar{\omega}_1}{4} \left(\sqrt{1 + \rho_1^2} - \frac{|\eta_1 - \rho_1| + |\eta_1 + \rho_1|}{2} \right), \quad (27.11)$$

где

$$\sigma = \bar{g}_1 e^v / \sqrt{1 + \mu_1^2 + v_1^2} = \frac{v_1^2}{4(1 + \mu_1^2 + v_1^2)}. \quad (27.12)$$

Так как левая часть равенства (27.11) является монотонно возрастающей функцией v , то ясно, что для того, чтобы из (27.11) получить условие опрокидывания, надо знак равенства в (27.11) заменить на знак «больше или

равно». Ясно, что прежде, чем проверять получающееся таким образом условие опрокидывания, необходимо убедиться в том, что $\sigma \geq 0$. Если сопоставить условие $\sigma \geq 0$ с условием опрокидывания (22.12) для регулярных прецессий, то видно, что эти условия совпадают при $k_F = 1$ и $\mu_1 = 0$. Отсюда следует, что условие опрокидывания (27.11) является более жестким, чем условие опрокидывания в случае регулярных прецессий. Заметим, что если $\mu_1 = 0$, $\rho_1 = \infty$, $\mu_1 \rho_1 = \nu_1$, то есть в случае, когда реализуются регулярные прецессии, то условие (27.11), очевидно, эквивалентно условию $\sigma \geq 0$, то есть переходит в условие опрокидывания для регулярных прецессий. Если, наоборот, устремить ρ_1 к нулю при $\mu_1 \neq 0$ и $\delta_0 = 90^\circ$, то нетрудно убедиться в том, что условие (27.11) переходит в условие (22.13) перехода вращательного движения в колебательное при плоском движении, которое, как уже указывалось, в этом случае играет роль условия опрокидывания.

В неособых случаях движения, когда $\eta_1 \neq -\rho_1$, в качестве условия опрокидывания также будет использоваться условие (27.11). По аналогии со случаем регулярных прецессий можно ожидать, что при $\eta_1 \neq -\rho_1$ оно будет давать значения ν , начиная с которых можно сравнивать значения D для последовательных экстремумов с некоторым запасом. Также по аналогии со случаем регулярных прецессий условие (27.11), полученное для $F(\alpha) = \sin \alpha$, можно распространить для случаев произвольных $F(\alpha)$, если выражение для σ взять в виде

$$\sigma = \bar{g}_1 e^\nu / \sqrt{1 + \mu_1^2 + \nu_1^2} - k_F \frac{\nu_1^2}{4(1 + \mu_1^2 + \nu_1^2)}, \quad (27.13)$$

где

$$k_F = \frac{1}{|F_\alpha(180)|}.$$

Принимая для дальнейшего условие опрокидывания (27.11) с выражением для σ в виде (27.13), укажем соотношения для определения D в общем случае пространственного движения. Условие периодичности (12.13) для

уравнения (27.9) записывается в виде

$$\bar{D} = \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sqrt{2 [\bar{E}(v_*) - \bar{I}(v_*, \alpha)]} d\alpha, \quad (27.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}(v_*, \alpha) &= \bar{\omega}_1^2 \frac{(\eta_1 - \rho_1 \cos \alpha)^2}{2 \sin^2 \alpha} + \bar{g}_1 e^v / \sqrt{1 + \mu_1^2 + v_1^2} \Phi(\alpha), \\ \Phi(\alpha) &= \int_0^\alpha F(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (27.15)$$

а v_* — значение v , соответствующее экстремуму зависимости $\alpha(v)$.

Константы $\bar{E}(v_*)$, $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ связаны соотношениями

$$\bar{E}(v_*) = \bar{I}(v_*, \alpha_{\min}) = \bar{I}(v_*, \alpha_{\max}). \quad (27.16)$$

Считать по этим формулам надо следующим образом: сначала по известным параметрам экстремума зависимости $\alpha(v)$ найти $\bar{E}(v_*)$, а затем вычислить интеграл (27.14).

Считая, далее, $\bar{D}$ известным, перейдем к решению задачи на третьем участке траектории. Здесь необходимо учитывать демпфирование и переменность скорости летательного аппарата. В этом случае уравнение для угла атаки следует взять в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + e^{-2 \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} & \left(\frac{(G_1 - r_1 \cos \alpha)(r_1 - G_1 \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + \right. \\ & \left. + g(\tau) F(\alpha) + \varepsilon f_z(\tau) \frac{d\alpha}{dt} \right) = 0. \end{aligned} \quad (27.17)$$

Для этого уравнения условие периодичности (12.13) записывается в виде

$$\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sqrt{2 [E(\tau) - I(\tau, \alpha)]} d\alpha = D e^{-\int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}, \quad (27.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I(\tau, \alpha) &= e^{-2 \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} \left\{ \frac{(G_1 - r_1 \cos \alpha)^2}{2 \sin \alpha} + g(\tau) \Phi(\alpha) \right\} \\ E(\tau) &= I(\tau, \alpha_{\min}) = I(\tau, \alpha_{\max}). \end{aligned} \right\} \quad (27.19)$$

Установим связь между константами D и $\bar{D}$. Так как при $t = t_2'$

$$\frac{g(\tau)}{k^2 + \omega_1^2 + r_1^2} = \bar{g}_1 e^v / \sqrt{1 + \mu_1^2 + v_1^2}, \quad (27.20)$$

то из сопоставления равенств (27.14) и (27.15) соответственно с равенствами (27.18) и (27.19) получается связь

$$D = \sqrt{k^2 + \omega_1^2 + r_1^2} \bar{D}. \quad (27.21)$$

Таким образом, константу D можно считать известной. При известном D дальнейшее решение задачи на третьем участке, очевидно, дается формулами (25.16), (25.24) и (25.25). Если ввести в эти формулы безразмерные параметры v_1 и μ_1 [см. равенства (27.10)], то выражения для $\alpha_{\max}(\tau)$ и $\alpha_{\min}(\tau)$ записываются в виде

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} 2 \sqrt[4]{k^2 + \omega_1^2 + r_1^2} \times \\ \times N_{\max}(\Delta\theta, \rho_1, \mu_1, \delta_0, \varphi), \quad (27.22)$$

$$\alpha_{\min}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g_r(\tau)}} 2 \sqrt[4]{k^2 + \omega_1^2 + r_1^2} \times \\ \times N_{\min}(\Delta\theta, \rho_1, \mu_1, \delta_0, \varphi). \quad (27.23)$$

Здесь $k = \lambda_1 V_1 \sin \theta_1$, $g_r(\tau)$ определяется формулой (21.6) при $G(\tau)$ и $r(\tau)$, определенных с помощью формул (25.13), а

$N_{\max}$ и $N_{\min}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned}
 N_{\max} &= \frac{\sqrt{\frac{\bar{D}}{\pi} + \left| \frac{\eta_1 - \rho_1}{2} \right| \bar{\omega}_1} + \sqrt{\left(\frac{\bar{D}}{\pi} + \left| \frac{\eta_1 - \rho_1}{2} \right| \bar{\omega}_1 \right)^2 - \left(\frac{\eta_1 - \rho_1}{2} \right)^2 \bar{\omega}_1^2}}{2}, \\
 N_{\min} &= \frac{\sqrt{\frac{\bar{D}}{\pi} + \left| \frac{\eta_1 - \rho_1}{2} \right| \bar{\omega}_1} - \sqrt{\left(\frac{\bar{D}}{\pi} + \left| \frac{\eta_1 - \rho_1}{2} \right| \bar{\omega}_1 \right)^2 - \left(\frac{\eta_1 - \rho_1}{2} \right)^2 \bar{\omega}_1^2}}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{27.24}$$

Так же как и ранее, вместо сравнения значений $\bar{D}$ для последовательных экстремумов зависимости $\alpha(v)$ целесообразнее сравнивать значения $N_{\max}$, так как для $N_{\max}$ проще задать допустимую величину погрешности. Численное интегрирование уравнения (27.9) можно прекращать после того, как выполнилось неравенство

$$\begin{aligned}
 |N_{\max, k+1} - N_{\max, k}| &\leq \Delta_0 + \Delta_1 N_{\max, k+1} \\
 (\Delta_0 &\approx 0,01; \Delta_1 \approx 0,05).
 \end{aligned}$$

Через $N_{\max, k}$ и $N_{\max, k+1}$ здесь обозначены значения $N_{\max}$ для последовательных экстремумов зависимости $\alpha(v)$. Средняя скорость расчета коэффициентов $N_{\max}$ и $N_{\min}$ для одной комбинации значений $\Delta\theta$, ρ_1 , μ_1 , δ_0 и φ с помощью программы, составленной для исследования пространственного движения на основании изложенного метода, на вычислительной машине с быстродействием порядка 20 000 операций в секунду составляет 5–10 сек. Это приблизительно в 50–100 раз меньше времени, необходимого для получения решения уравнения для угла атаки с помощью численного интегрирования на такой же машине.

В заключение параграфа заметим, что формулами (27.22) и (27.23), так же как и неуточненными формулами (25.27), можно пользоваться, начиная с момента, когда значения $\alpha_{\max}(\tau)$, определенные согласно (27.22), оказываются меньше одного радиана,

§ 28. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОТНЫХ СЛОЯХ АТМОСФЕРЫ С ПОМОЩЬЮ УТОЧНЕННЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Полученные выше уточненные асимптотические формулы по сравнению с неуточненными формулами (25.27) зависят дополнительно еще от φ — значения фазы угла атаки летательного аппарата на границе атмосферы. Вследствие этого представление результатов расчета в наглядной форме вызывает известные трудности. Эти трудности можно преодолеть в тех случаях, когда интервал времени $t_0 \leq \leq t \leq t_1$ достаточно велик для того, чтобы, как уже указывалось, параметры δ_0 и φ с одинаковой вероятностью могли бы иметь любое значение в областях

$$0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ, \quad -180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ. \quad (28.1)$$

Это предположение будет принято далее. При таком предположении при фиксированных ρ_1 , μ_1 и $\Delta\theta$ в основу расчета поперечной перегрузки целесообразно положить максимально возможное значение $N_{\max}$ при δ_0 и φ из областей (28.1) или вместо $\max N_{\max}$ по аналогии со случаем плоского движения взять $\bar{N}_{\max}$ — практически максимальное значение $N_{\max}$.

Чтобы определить понятие практического максимума при пространственном движении, будем при фиксированных $\Delta\theta$, ρ_1 и μ_1 рассматривать $N_{\max}$ как функцию от δ_0 и φ . Обозначим через S_N площадь сечения поверхности $N_{\max}(\delta_0, \varphi)$ плоскостью, параллельной плоскости $\delta_0\varphi$. Ясно, что S_N является функцией от $N_{\max}$. Назовем *практическим максимумом* такое значение $N_{\max}$, при котором площадь S_N равняется 1% от площади областей (28.1). Ясно, что $\bar{N}_{\max}$ является решением уравнения

$$S_N(N_{\max}) = 0,02 \pi^2. \quad (28.2)$$

Так же как и в случае плоского движения, $\bar{N}_{\max}$ — практический максимум превосходит подавляющее большинство значений $N_{\max}$ при δ_0 и φ , изменяющихся в областях (28.1). Ясно, что $\bar{N}_{\max}$ зависит лишь от трех параметров: $\Delta\theta$, ρ_1 и μ_1 . Вследствие этого результаты расчетов $\bar{N}_{\max}$ могут быть представлены в легко обозримой форме. Если

пользоваться неуточненными асимптотическими формулами, то ясно, что для получения практического максимума $N_{\max}^{(ac)}$ достаточно взять максимальные из значений $N_{\max}^{(ac)}$ при $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$, так как $N_{\max}^{(ac)}$ не зависит от φ . В § 26 для $\bar{N}_{\max}^{(ac)}$ было получено выражение (26.10) (см. также рис. 100).

Ниже будут изложены методика определения $\bar{N}_{\max}$, анализ зависимости $\bar{N}_{\max}$ от ρ_1 , μ_1 и $\Delta\theta$ и сопоставление значений $\bar{N}_{\max}$ со значениями $\bar{N}_{\max}^{(ac)}$. В связи с тем, что влияние вида зависимости $m_z(\alpha)$ на движение было в основном выяснено при исследовании предельных случаев движения, анализ зависимости $\bar{N}_{\max}$ от ρ_1 , μ_1 и $\Delta\theta$ выполнен лишь для $F(\alpha) = \sin \alpha$.

Прежде всего были проведены расчеты, выясняющие форму поверхности $N_{\max}(\varphi, \delta_0)$, что необходимо для определения значений практических максимумов. С этой целью были рассчитаны зависимости $N_{\max}(\varphi)$ при различных значениях δ_0 . Для каждого значения $\Delta\theta$ такие зависимости рассчитывались для двух качественно различающихся случаев: для случая, в котором $\alpha_{\max,1} = 180^\circ$ и, следовательно, возможны зависания летательного аппарата в окрестности неустойчивого положения равновесия, и для случая, когда зависания невозможны. В § 24 было показано, что особые случаи движения, при которых возможны зависания, реализуются тогда, когда $\xi = -1$. Равенство $\xi = -1$ в силу (27.6) эквивалентно следующему:

$$\rho_1 = \cos \delta_0 \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}. \quad (28.3)$$

Отсюда ясно, что если

$$\rho_1 \leq \rho'_1,$$

то зависания возможны, и, наоборот, если

$$\rho_1 \geq \rho'_1,$$

то движение происходит без зависаний. Значение $\rho_1 = \rho'_1$, очевидно, определяется с помощью формулы

$$\rho'_1 = \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}. \quad (28.4)$$

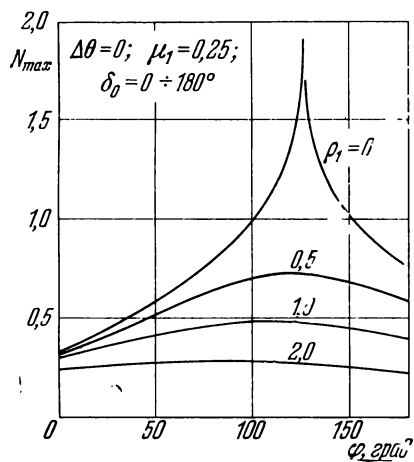


Рис. 101.

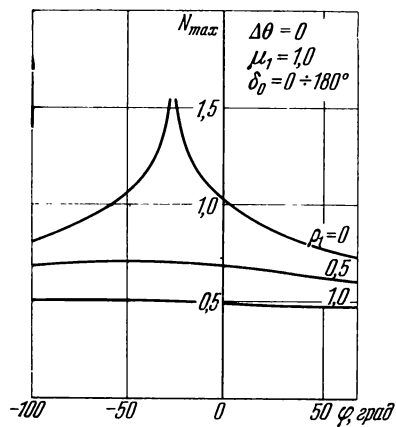


Рис. 102.

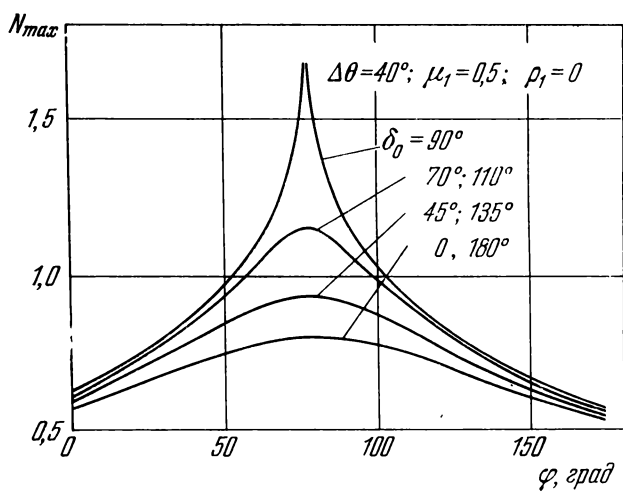


Рис. 103.

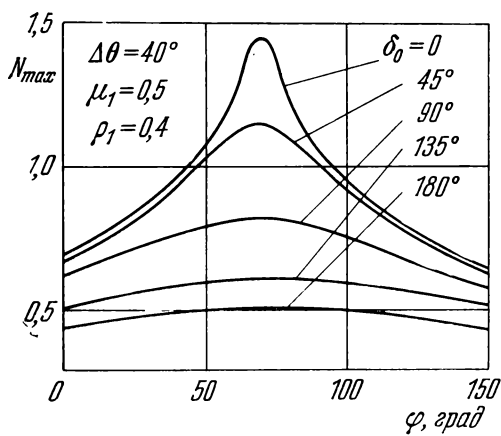


Рис. 104.

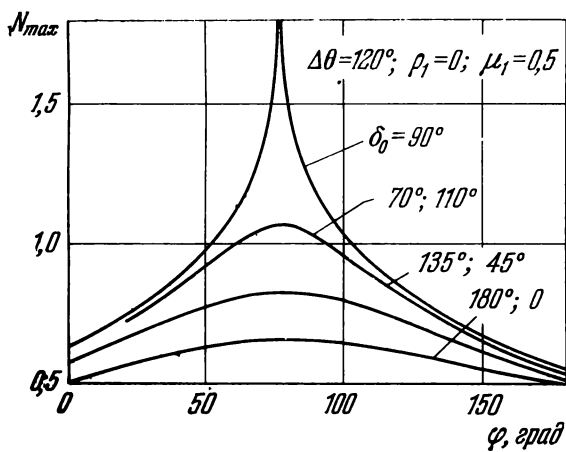


Рис. 105.

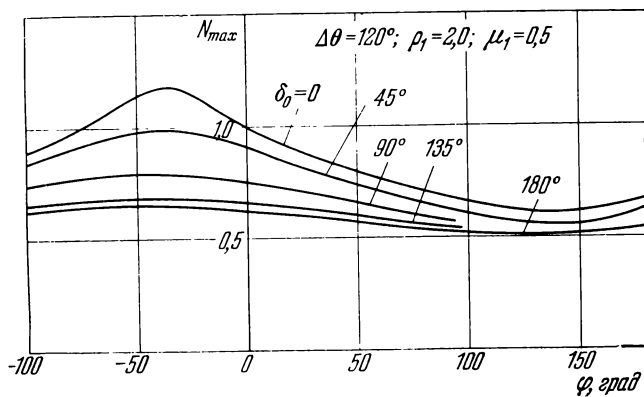


Рис. 106.

Поэтому при каждом $\Delta\theta$ (кроме $\Delta\theta = 0$ и $\Delta\theta = 180^\circ$) расчеты производились для $\rho_1 = 0$ и для $\rho_1 > \rho'_1$. Результаты этих расчетов для $\Delta\theta = 0; 40^\circ; 120^\circ$ и 180° представлены соответственно на рис. 101—102, 103—104, 105—106

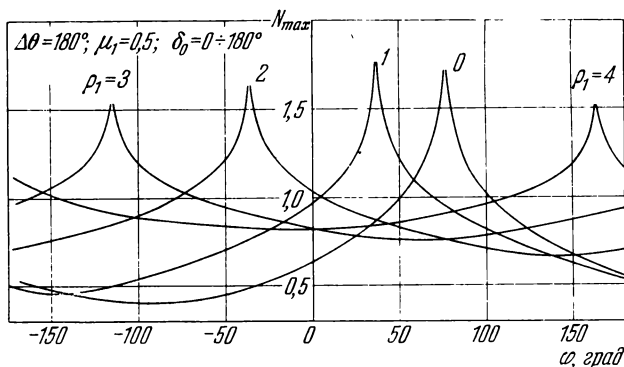


Рис. 107.

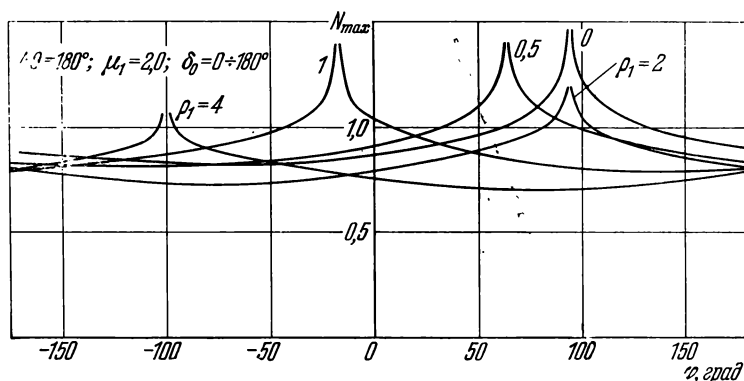


Рис. 108.

и 107—108. Для $\Delta\theta = 0$ (рис. 101, 102) и $\Delta\theta = 180^\circ$ (рис. 107, 108) коэффициент $N_{\max}$ не зависит от δ_0 , что также легко усмотреть и из формул предыдущего параграфа. Здесь поверхность $N_{\max}(\varphi, \delta_0)$ представляет собой цилиндрическую поверхность, сечения которой для различных ρ_1 указаны на рис. 101, 102 и 107, 108. Вследствие этого

в рассматриваемых случаях определение практических максимумов производится точно так же, как это делалось при плоском движении. Заметим еще, что так как при $\Delta\theta = 0$ $\rho'_1 = 0$, а при $\Delta\theta = 180^\circ$ $\rho'_1 = \infty$, то в первом случае при всех $\rho_1 > 0$ движение происходит без зависаний, а во втором случае, наоборот, при всех значениях ρ_1 движение происходит с зависаниями. Это хорошо видно на приведенных графиках.

При $0 < \Delta\theta < 180^\circ$ поверхности $N_{\max}(\varphi, \delta_0)$ имеют ярко выраженный трехмерный характер. В случаях с зависаниями (рис. 103 и 105) максимумы получаются очень острыми, причем они достигаются при значении $\delta_0 = 90^\circ$, удовлетворяющем равенству (28.3) при $\rho_1 = 0$. В случаях, когда $\rho_1 > \rho'_1$, как уже указывалось, зависания невозможны и экстремумы на рис. 104 и 106 получаются значительно более пологими. В этих случаях максимальное значение $N_{\max}$ при $\varphi = \text{const}$ всегда достигается при $\delta_0 = 0$, что также следует и из формул, полученных в § 26.

Для определения $\overline{N}_{\max}$ необходимо уметь определять площади S_N сечений поверхности $N_{\max}(\varphi, \delta_0)$ плоскостями, параллельными плоскости $\delta_0 \varphi$. Чтобы выбрать правило для определения S_N , с помощью графиков, приведенных на рис. 103—106, были построены линии уровня поверхностей $N_{\max}(\varphi, \delta_0)$. Эти графики изображены на

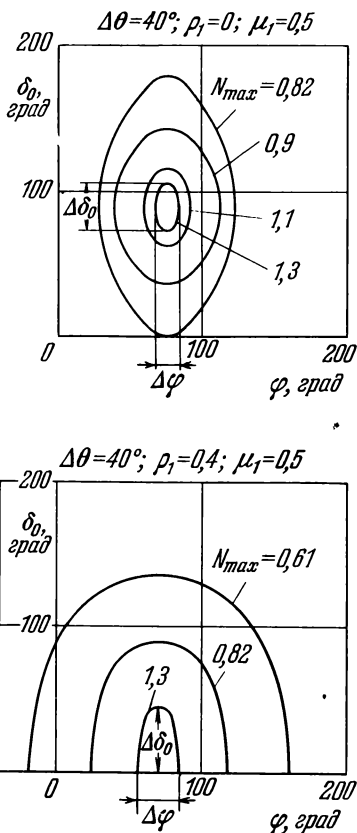


Рис. 109.

рис. 109 и 110 соответственно для $\Delta\theta = 40^\circ$ и $\Delta\theta = 120^\circ$. В верхних частях каждого из этих рисунков изображены линии уровня для случаев, в которых возможны зависания,

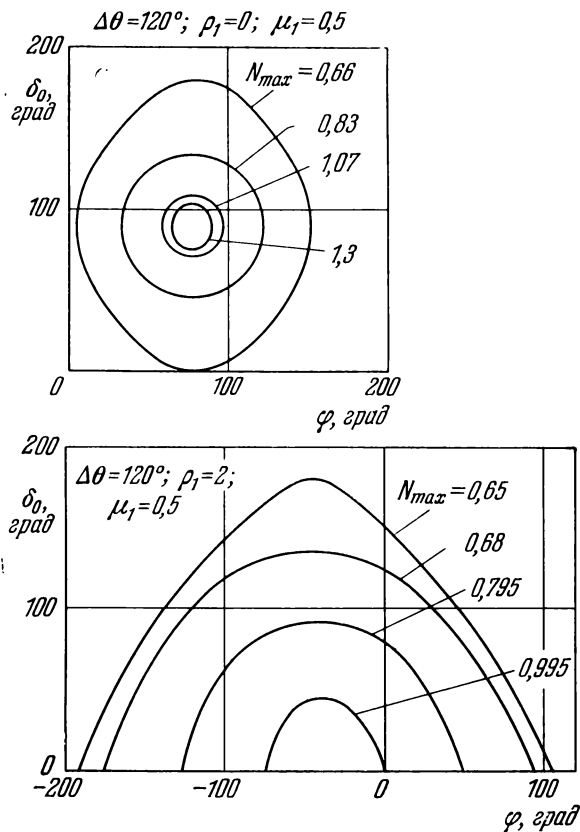


Рис. 110.

а в нижних частях — для случаев без зависаний. На этих рисунках видно, что форма линий уровня для случаев с зависаниями близка по форме к эллипсу, а для случаев без зависаний — к полуэллипсу. Следовательно, площади S_N можно определять с помощью формулы для площади

эллипса

$$S_N = \frac{\pi}{4} \Delta\delta_0 \Delta\varphi \quad (28.5)$$

(здесь под $\Delta\delta_0$ и $\Delta\varphi$ следует понимать поперечные размеры областей, ограниченных линиями уровня соответственно вдоль осей $O\delta_0$ и $O\varphi$). Определение этих величин поясняется на рис. 109. При таком определении $\Delta\delta_0$ и $\Delta\varphi$ формула для S_N не зависит от того, имеем мы дело с эллипсом или полуэллипсом.

Если принять такое правило для определения площади сечения S_N , то уравнение (28.2) для определения практических максимумов можно переписать в виде

$$\Delta\delta_0(\bar{N}_{\max}) \Delta\varphi(\bar{N}_{\max}) = 0,08\pi. \quad (28.6)$$

При таком способе определения S_N для определения $\bar{N}_{\max}$ достаточно знать всего лишь два взаимно перпендикулярных сечения поверхности $N_{\max}(\varphi, \delta_0)$ плоскостями, параллельными оси $ON_{\max}$. Чтобы получить эти сечения, расчеты необходимо вести в следующем порядке: сначала надо рассчитать зависимость $N_{\max}(\varphi)$ при δ_0 , удовлетворяющем уравнению (28.3), если $\rho_1 \leq \rho'_1$, либо при $\delta_0 = 0$, если $\rho_1 \geq \rho'_1$, найти значение $\varphi = \varphi_{\max}$, при котором эта зависимость имеет максимум, и затем определить зависимость $N_{\max}(\delta_0)$ при $\varphi = \varphi_{\max}$. Схема, поясняющая порядок проведения расчетов, изображена на рис. 111. После того как эти расчеты выполнены, нетрудно найти $\Delta\delta_0$ и $\Delta\varphi$ и решить уравнение (28.6).

Указанные сечения поверхностей $N_{\max}(\varphi, \delta_0)$ для ряда случаев приведены на рис. 112—117. Для каждого $\Delta\theta$, отличного от нуля и 180° , примеры полученных сечений по φ и δ_0 приводятся для $\rho_1 = 1$ и $\rho_1 = 2$ при двух значениях μ_1 . Для $\Delta\theta = 40^\circ, 90^\circ$ и 120° эти сечения построены соответственно на рис. 112—113, 114—115, 116—117.

Если сопоставить графики на рисунках для различных значений μ_1 и $\Delta\theta = \text{const}$, то видно, как по мере увеличения μ_1 зависимость $N_{\max}$ от φ становится все менее и менее существенной. Это объясняется тем, что по мере возрастания модуля угловой скорости летательного аппарата вне атмосферы полученные зависимости все с большей и большей

точностью начинают описываться неуточненными асимптотическими формулами, согласно которым $N_{\max}$ совсем не зависит от φ .

Результаты расчетов $\bar{N}_{\max}$ для $\mu_1 = 0,25; 0,5; 1,0$ и $2,0$ и $0 \leq \rho_1 \leq 10$ представлены на рис. 118—124 соответ-

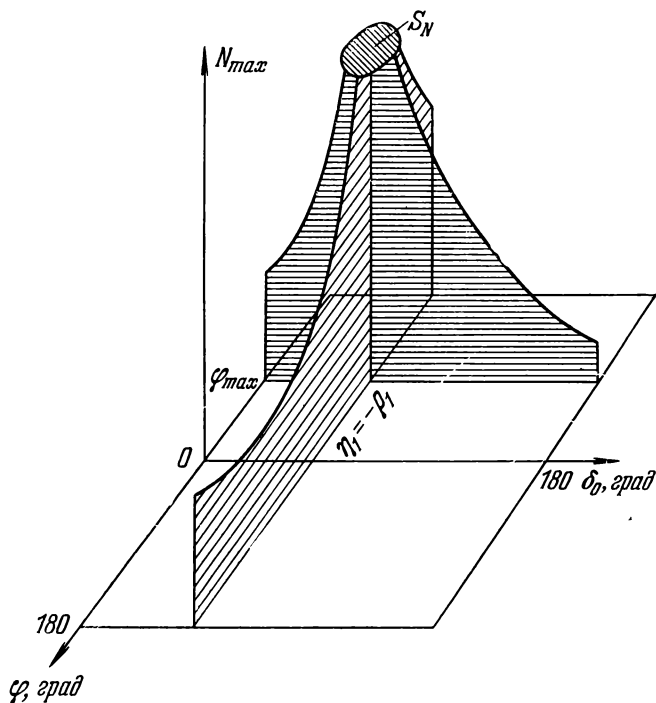


Рис. 111.

венно для $\Delta\theta = 0; 40^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 140^\circ$ и 180° . Пунктирными линиями на этих рисунках нанесены кривые, полученные с помощью неуточненных асимптотических формул (26.10). Кроме этого, на графиках указаны значения $\rho'_1 = \text{tg}(\Delta\theta/2)$. Полученные кривые, с точки зрения расположения их относительно пунктирной кривой, ведут себя существенно различно в зависимости от того, имеет место неравенство $\rho_1 \leq \rho'_1$ или неравенство $\rho_1 \geq \rho'_1$: при

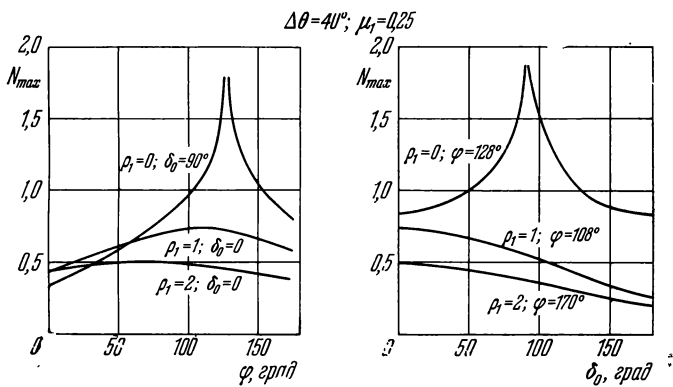


Рис. 112.

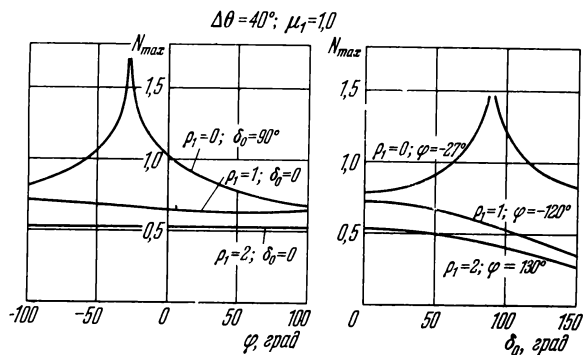


Рис. 113.

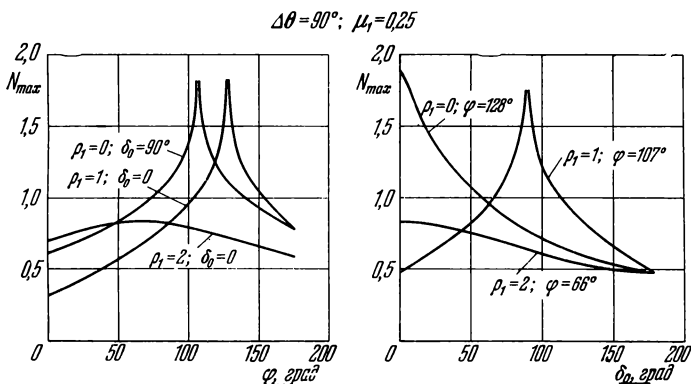


Рис. 114.

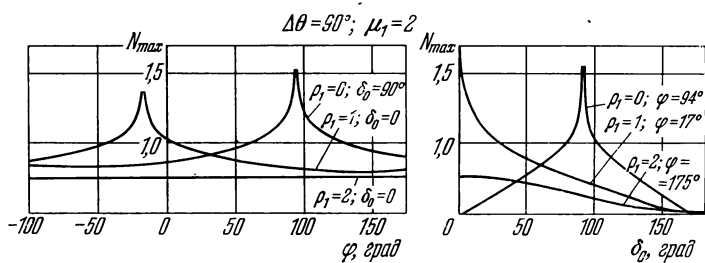


Рис. 115.

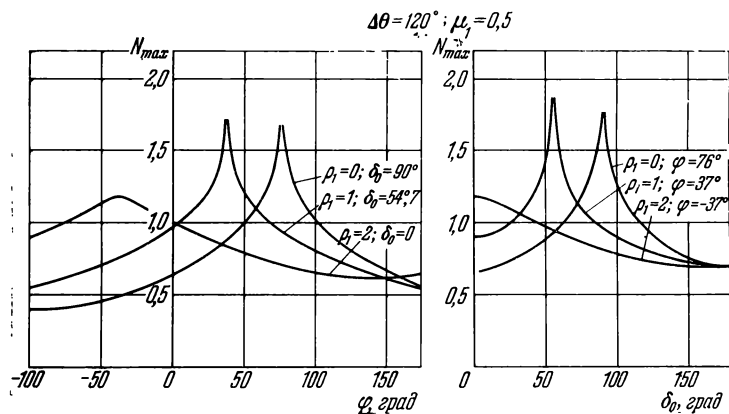


Рис. 116.

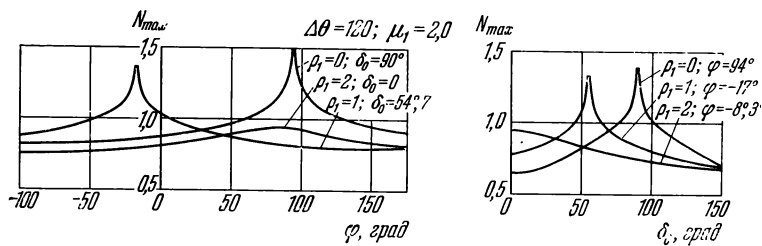


Рис. 117.

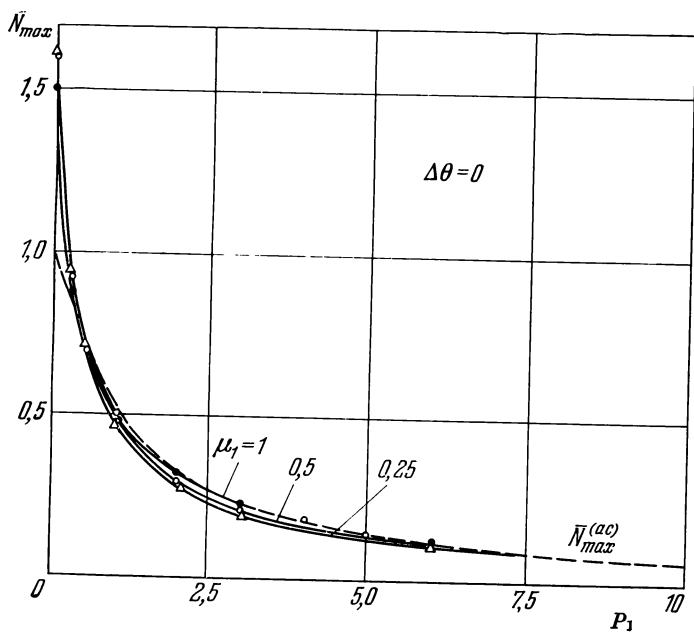


Рис. 118.

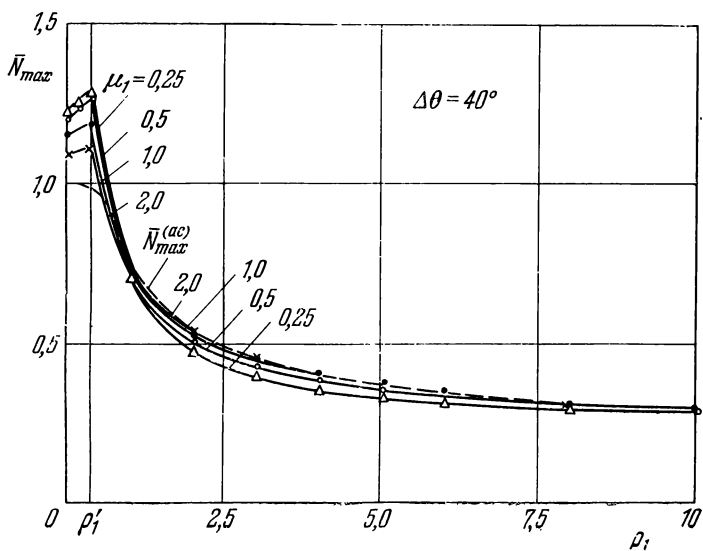


Рис. 119.

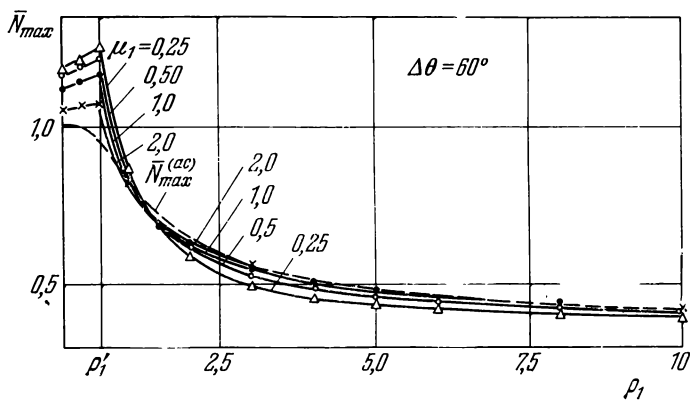


Рис. 120.

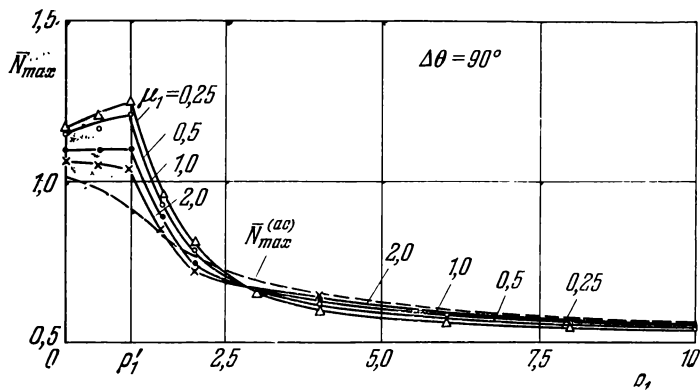


Рис. 121.

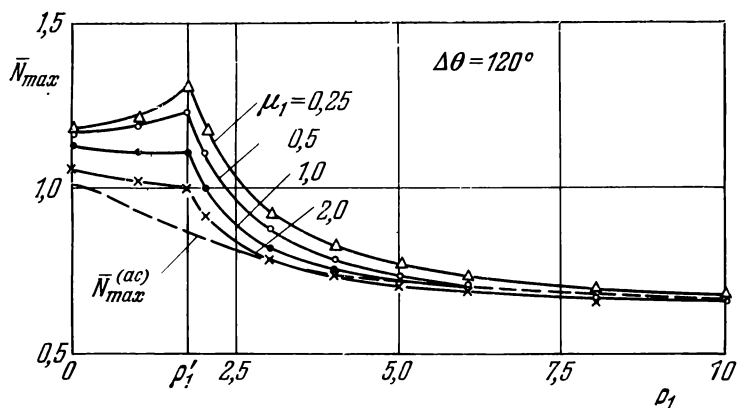


Рис. 122.

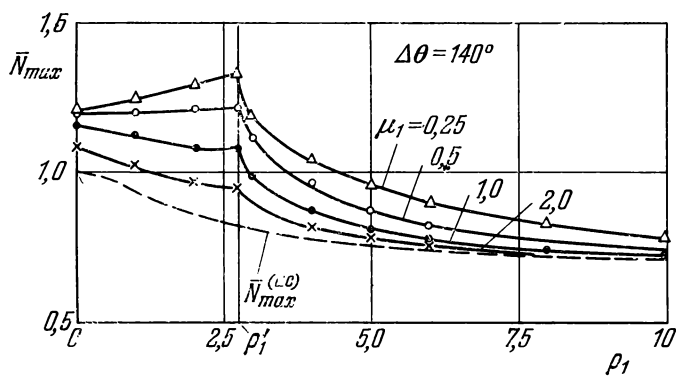


Рис. 123.

$\rho_1 \leq \rho'_1$ они несколько удаляются от пунктирной кривой при увеличении ρ_1 , а при $\rho_1 \geq \rho'_1$ очень быстро стремятся к ней. Особенно четко это выражено при значениях $\Delta\theta$, заметно отличающихся от 180° . Это, очевидно, является следствием того, что при $\rho_1 \leq \rho'_1$ возможны движения с зависаниями, а при $\rho_1 \geq \rho'_1$ такие движения невозможны.

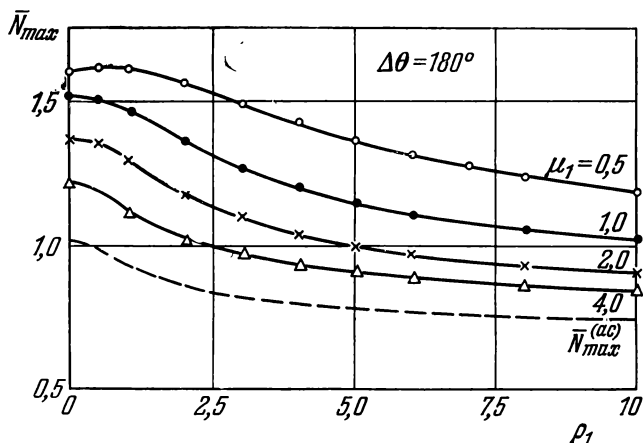


Рис. 124.

Заметим, что при $\rho_1 \geq \rho'_1$ практические максимумы очень несущественно отличаются от максимумов в обычном смысле. При увеличении μ_1 значения $\bar{N}_{max}$ приближаются к пунктирной кривой независимо от того, имеет место неравенство $\rho_1 \geq \rho'_1$ или неравенство $\rho_1 \leq \rho'_1$. Этим объясняется пересечение получающихся кривых для разных μ_1 при $\Delta\theta = 0; 40^\circ; 60^\circ$ и 90° . При $\rho_1 = \rho'_1$ зависимости $\bar{N}_{max}$ от ρ_1 имеют изломы. Наличие этих изломов, очевидно, связано с различным характером движений при $\rho_1 \leq \rho'_1$ и $\rho_1 > \rho'_1$.

Укажем теперь модернизированную неуточненную асимптотическую формулу для общего случая пространственного движения.

Из графиков, приведенных на рис. 118—124, совершенно очевидно, что точность неуточненной асимптотической

формулы (25.27) для $\alpha_{\max}(\tau)$ можно существенно повысить для малых значений $\sqrt[4]{r_1^2 + \omega_1^2}$, если так же, как это делалось для предельных случаев движения, писать ее в виде

$$\alpha_{\max} = \frac{e}{\sqrt[4]{g}(\tau)} - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_2} f_2(\tau) d\tau - 2 \sqrt[4]{k^2 + r_1^2 + \omega_1^2} N_{\max}^{(ac)}(\Delta\theta, \rho_1, \delta_0). \quad (28.7)$$

При сопоставлении значений $\bar{N}_{\max}$ со значениями $\bar{N}_{\max}^{(ac)}$ подразумевалось, что неуточненная асимптотическая формула берется именно в такой форме.

С помощью графиков на рис. 118—124 нетрудно оценить область применимости формулы (28.7). Рассмотрим для этого три характерных примера. В качестве первого примера рассмотрим летательный аппарат, спускающийся с орбиты искусственного спутника Земли и имеющий струйную систему управления, работающую вне атмосферы. В этом случае для оценки $\alpha_{\max}(\tau)$ при движении аппарата в атмосфере его можно рассматривать как неуправляемый, задав следующие начальные условия на границе атмосферы:

$$\alpha|_{t=t_1} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt}|_{t=t_1} = \omega_1, \quad r|_{t=t_1} = r_1. \quad (28.8)$$

Ясно, что в этом случае $\Delta\theta = 0$, и для определения $\omega_1^{(*)}$ — нижней границы значений ω_1 , при которых можно пользоваться формулой (28.7), следует обратиться к рис. 118. Чтобы воспользоваться графиками, приведенными на этом рисунке, необходимо предварительно определить параметр $k = \lambda_1 V_1 \sin \theta_1$. Если принять

$$\lambda_1 = \frac{1}{7000 \text{ м}}, \quad V_1 = 7800 \text{ м/сек}, \quad \theta_1 = 2^\circ,$$

то k оказывается равным 0,0389 1/сек. На рис. 118 видно, что пунктирная кривая отличается от сплошной кривой, соответствующей $\mu_1 = 0,25$, не более чем на 10%, начиная с $\rho_1 = \frac{r_1}{\omega_1} = 0,25$. В этом случае величина $\omega_1^{(*)}$ оказывается равной 0,558 °/сек. Таким образом, в рассматриваемом

примере формулой (28.7) можно пользоваться при $\omega_1 \geq 0,6^\circ/\text{сек}$ и $\rho_1 \geq 0,25$.

В качестве второго примера рассмотрим спуск неуправляемого летательного аппарата с орбиты спутника Земли. Если считать, что орбита расположена на высоте порядка 300 км, то $\Delta\theta$ оказывается величиной порядка 60° при k , по-прежнему равно $0,0389 1/\text{сек}$. В этом случае для определения области применимости формулы (28.7) следует обратиться к рис. 120. Из этого рисунка видно, что если

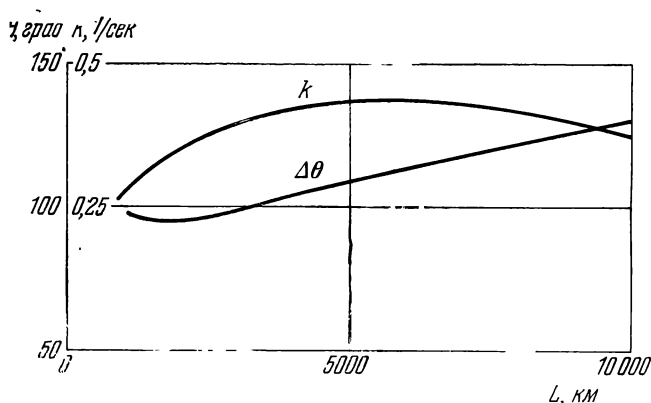


Рис. 125.

$\rho_1 \geq 0,8$, то формулой (28.7) можно пользоваться с погрешностью меньшей 10% (так же, как и ранее при $\mu_1 \geq 0,25$). При этом $\omega_1^{(*)} = 0,558^\circ/\text{сек}$. Если же по условиям отделения $\rho_1 \ll 1$, то оценку применимости формулы (28.7) следует делать для $\rho_1 = 0$. В этом случае погрешность не превосходит 10% при $\omega_1 \geq 3^\circ/\text{сек}$.

В качестве последнего примера рассмотрим условия применимости формулы (28.7) для исследования возмущенного движения головной части баллистической ракеты. Зависимости параметров $\Delta\theta$ и k от дальности полета L , определенные для характерных баллистических траекторий с помощью методики, указанной в работе [1], изображены на рис. 125. Видно, что $\Delta\theta$ и k не сильно зависят от дальности полета. Поэтому оценку области применимости формулы (28.7) можно произвести для $L = 7500$ км, когда

$\Delta\theta = 120^\circ$ и $k = 0,424$ 1/сек. Зависимости $\bar{N}_{\max}$ и $\bar{N}_{\max}^{(ac)}$ для этого случая, как уже указывалось, изображены на рис. 122.

В следующем параграфе будет показано, что весьма существенного уменьшения поперечной перегрузки и расцеивания точек приземления можно достигнуть путем придания головной части небольшого вращения относительно продольной оси. Поэтому оценку применимости формулы (28.7) прежде всего следует произвести для случая, когда $\rho_1 \approx \rho_{\text{opt}}$. При $\Delta\theta = 120^\circ$ $\rho_{\text{opt}} = 4$. На рис. 122 видно, что при $\rho_1 \geq 4$ формула (28.7) имеет погрешность, не превосходящую 12% при $\mu_1 \geq 0,25$. В этом случае для возможности применимости формулы (28.7) должно быть $\omega_1 \geq 6,5^\circ/\text{сек}$. Если же при отделении летательный аппарат не «закручивается» относительно продольной оси, то оценку $\omega_1^{(*)}$ следует производить при $\rho_1 = 0$. В этом случае погрешность формулы (28.7) не будет превосходить 13% и 20% соответственно при $\mu_1 \geq 1,0$ и $\mu_1 \geq 0,25$. При этом $\omega_1^{(*)}$ оказывается соответственно равной $26^\circ/\text{сек}$ и $6,5^\circ/\text{сек}$.

Таким образом, неуточненной асимптотической формулой (28.7) в неособых случаях движения можно пользоваться, начиная со скоростей порядка $1^\circ/\text{сек}$, для применимости же ее в особых случаях движения скорости вращения летательного аппарата вне атмосферы должны быть в несколько раз больше.

§ 29. ВЫБОР ВЕЛИЧИНЫ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА. ЗАМЕЧАНИЯ О ПРИМЕНИМОСТИ ПЛОСКОЙ СХЕМЫ ДВИЖЕНИЯ

При исследовании влияния параметров φ , δ_0 и $\Delta\theta$ на $\alpha_{\max}(\tau)$ было удобно иметь дело с коэффициентом $N_{\max}$, так как этот коэффициент является единственным сомножителем в выражении (27.22), который зависит от этих параметров. Если же необходимо исследовать влияние компонент скорости вращения летательного аппарата вне атмосферы на $\bar{\alpha}_{\max}(\tau)$ — максимальные значения $\alpha_{\max}(\tau)$ при $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$ и $-180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$, то, как это видно из выражения (27.22), вместо коэффициента $\bar{N}_{\max}$

следует рассматривать связанный с ним коэффициент $\bar{N}_{\max, \rho_1}$:

$$\bar{N}_{\max, \rho_1} = \sqrt[4]{1 + v_1^2 + \mu_1^2} \bar{N}_{\max}. \quad (29.1)$$

С учетом этого обозначения формула для $\bar{\alpha}_{\max}(\tau)$ записывается в виде

$$\bar{\alpha}_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} 2\sqrt{k} \bar{N}_{\max, \rho_1}(\mu_1, \rho_1, \Delta\theta). \quad (29.2)$$

Напомним, что

$$\left. \begin{aligned} k &= \lambda_1 V_1 \sin \theta_1, \quad \mu_1 = \frac{\omega_1}{k}, \quad v_1 = \frac{r_1}{k}, \\ \rho_1 &= \frac{r_1}{\omega_1} = \frac{v_1}{\mu_1}. \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

Зависимости $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ от ρ_1 при $\mu_1 = 0; 0,25; 0,5; 1,0$ и $2,0$ для $\Delta\theta = 0; 40^\circ; 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 140^\circ$ и 180° представлены соответственно на рис. 126—132. В соответствии с (29.1) кривые на этих рисунках получаются путем поворота кривых, изображенных на рис. 118—124, против направления движения часовой стрелки. Угол поворота тем больше, чем больше μ_1 . В результате этого поворота значения $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ при $\rho_1 = \rho_1'$ оказываются наибольшими из значений $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ при $\rho_1 \leq \rho_1'$. Это, очевидно, свидетельствует о том, что наиболее опасным из режимов движения с зависаниями является режим, реализующийся при максимально возможной для движений с зависаниями скорости вращения летательного аппарата относительно продольной оси. Если воспользоваться выражением (24.20) при $\xi = -1$, то нетрудно убедиться, что этот результат связан с тем, что по мере увеличения ρ_1 переход колебательного движения в окрестности $\alpha = 180^\circ$ в колебания относительно $\alpha = 0$, который происходит при движениях с зависаниями (см. рис. 82), передвигается в более плотные слои атмосферы.

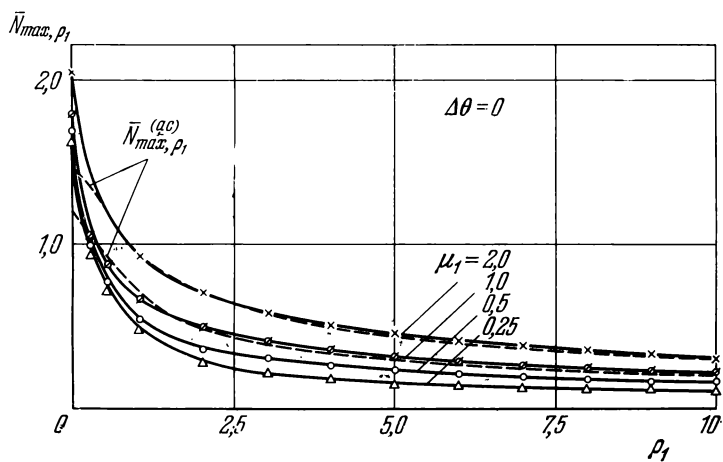


Рис. 126.

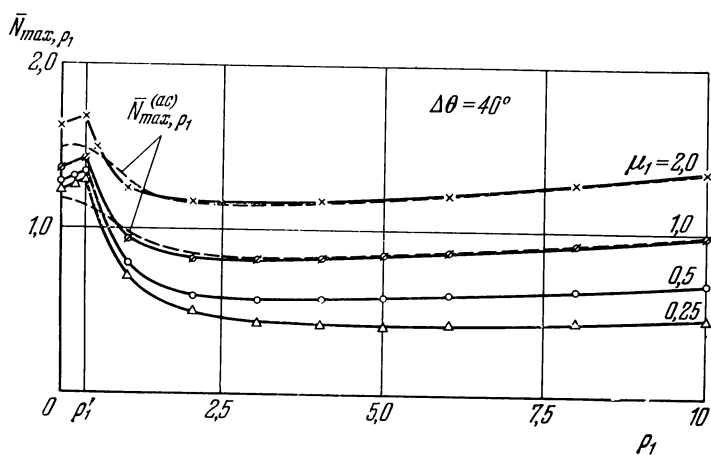


Рис. 127.

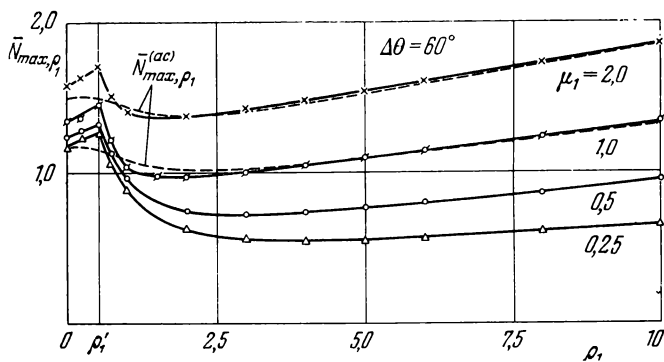


Рис. 128.

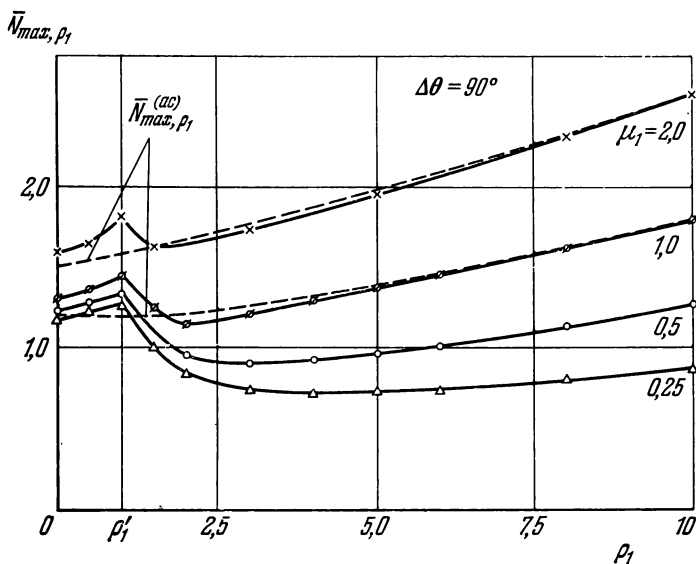


Рис. 129.

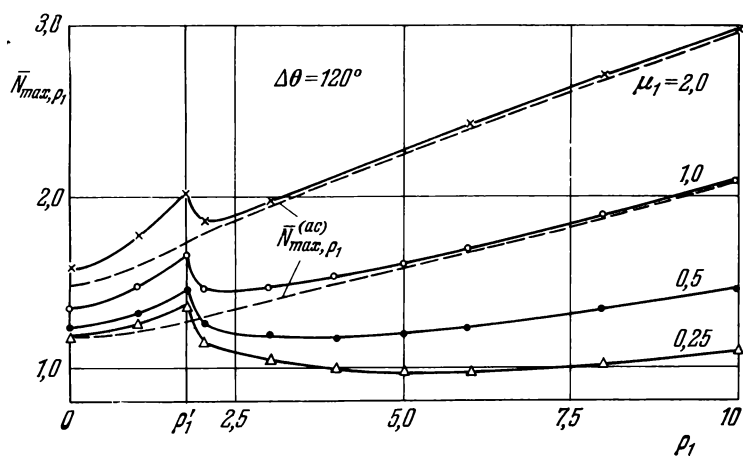


Рис. 130.

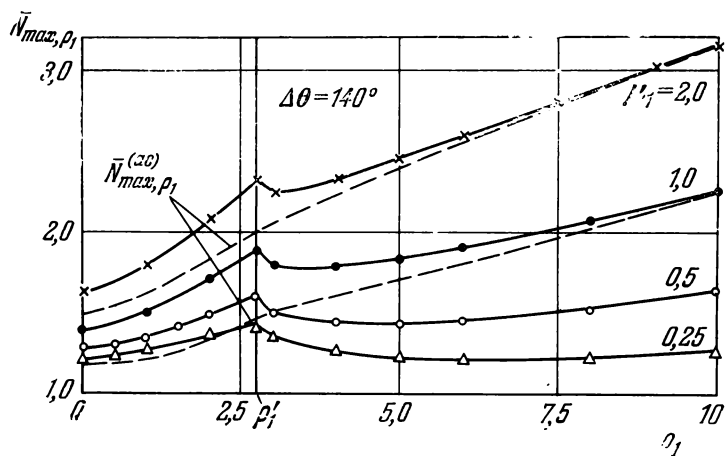


Рис. 131.

Пунктирными линиями на рис. 126—131 для сравнения нанесены значения $\bar{N}_{\max, \rho_1}^{(ac)}$, определенные с помощью равенства [см. формулу (28.7)]

$$\bar{N}_{\max, \rho_1}^{(ac)} = \sqrt[4]{1 + v_1^2 + \mu_1^2} \bar{N}_{\max}^{(ac)}. \quad (29.4)$$

Зависимости $N_{\max}^{(ac)}$ от ρ_1 при различных значениях $\Delta\theta$, как уже указывалось выше, изображены на рис. 100.

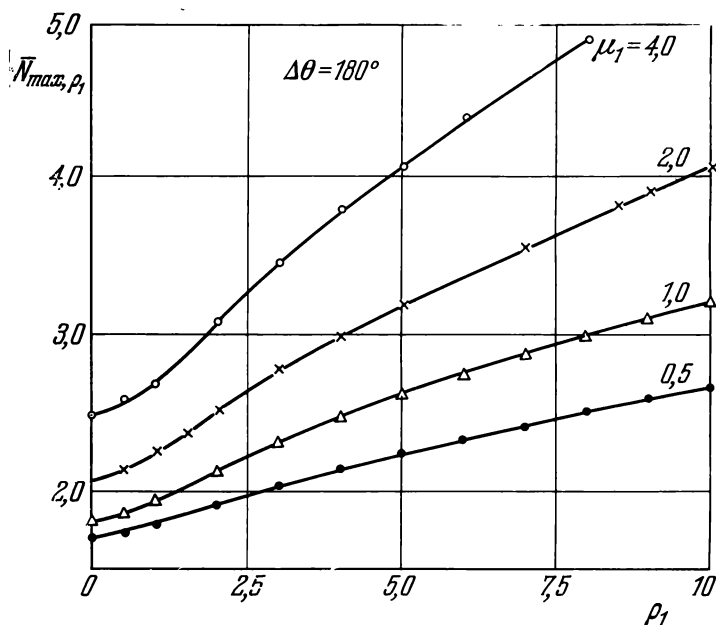


Рис. 132.

Основной целью настоящего параграфа является решение вопроса о рациональном выборе скорости вращения летательного аппарата относительно продольной оси с точки зрения уменьшения $\alpha_{\max}(\tau)$ в плотных слоях атмосферы. В этом случае параметр v_1 следует считать вполне определенной величиной, а параметр μ_1 — заключенным в интервале $\mu_{1\min} \leq \mu_1 \leq \mu_{1\max}$, так как он определяется несимметрией сил, действующих на летательный аппарат

при отделении. Для выбора $v_{1 \text{ opt}}$ — оптимальной величины параметра v_1 , очевидно, необходимо сравнить между собой $\max \bar{N}_{\max, \rho_1}$ при значениях μ_1 , заключенных между $\mu_{1 \text{ min}}$ и $\mu_{1 \text{ max}}$ для $v_1 = 0$ и $v_1 > 0$.

Поэтому прежде всего остановимся на определении $\max \bar{N}_{\max, \rho_1}$ при $\mu_{1 \text{ min}} \leq \mu_1 \leq \mu_{1 \text{ max}}$. Обратимся для этого к выражению (29.4) для $\bar{N}_{\max, \rho_1}^{(\text{ac})}$, полученному с помощью использования асимптотических решений на всей траектории снижения. Из рис. 100 видно, что сомножитель $\bar{N}_{\max}^{(\text{ac})}$ в этом выражении является монотонно убывающей функцией параметра $\rho_1 = v_1/\mu_1$ и, следовательно, возрастает при увеличении μ_1 . Так как первый сомножитель в выражении (29.4) также возрастает при увеличении μ_1 , то ясно, что

$$\max_{\mu_{1 \text{ min}} \leq \mu_1 \leq \mu_{1 \text{ max}}} \bar{N}_{\max, \rho_1} \left(\mu_1, \frac{v_1}{\mu_1} \right) = \bar{N}_{\max, \rho_1} \left(\mu_{1 \text{ max}}, \frac{v_1}{\mu_{1 \text{ max}}} \right). \quad (29.5)$$

Расчеты показывают, что этот результат с достаточной для целей настоящего параграфа степенью точности при $F(\alpha) = \sin \alpha$ справедлив также для зависимости $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ от μ_1 и ρ_1 , определенной с помощью уточненного асимптотического метода. В связи с этим верхний индекс «ас» у $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ в равенстве (29.5) опущен.

Из равенства (29.5), в частности, следует важный вывод о том, что определение $\max n_y$ при $m_z(\alpha) \approx m_z^\alpha \sin \alpha$ следует производить при $\mu_1 = \mu_{1 \text{ max}}$. Из сопоставления пунктирных и сплошных кривых на рис. 126—131 видно, что во многих случаях это можно делать с помощью неуточненной формулы (28.7).

При выборе значения скорости вращения летательного аппарата относительно продольной оси следует прежде всего стремиться к тому, чтобы совсем исключить движения с зависаниями, при которых достигается $\max \max n_y$ и $\max \max \Delta L$, где ΔL — рассеивание точек приземления летательного аппарата. Из изложенного выше ясно, что при $F(\alpha) \approx \sin \alpha$ для этого достаточно, чтобы ρ_1 было бы больше, чем $\text{tg}(\Delta\theta/2)$. Аналогичное условие отсутствия движений с зависаниями можно получить и для случая,

когда $F(\alpha)$ при $(180^\circ - \Delta) \leq \alpha \leq 180^\circ$ имеет зону нечувствительности. Для этого необходимо потребовать, чтобы при $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$ значения $\alpha_{\max, 1}$ не превышали $180^\circ - \Delta$. Если воспользоваться выражением (26.4), то после несложных выкладок для $\rho'_{1,\Delta}$ (то есть для значения ρ_1 , ограничивающего сверху интервал значений ρ_1 , при которых возможны движения с зависаниями) получается формула

$$\rho'_{1,\Delta} = \frac{\sin \Delta \theta + \sin \Delta}{\cos \Delta \theta + \cos \Delta}. \quad (29.6)$$

Ясно, что при $\Delta = 0$ $\rho'_{1,\Delta} = \operatorname{tg} \frac{\Delta \theta}{2}$. Если выбрать величину параметра v_1 так, чтобы

$$v_1 > \rho'_{1,\Delta} \mu_{1 \max}, \quad (29.7)$$

то при всех возможных значениях μ_1 из интервала $\mu_{1 \min} \leq \mu_1 \leq \mu_{1 \max}$ параметр ρ_1 будет больше, чем $\rho'_{1,\Delta}$, и, следовательно, движения с зависаниями реализовываться не будут.

Чтобы оценить величину выигрыша в поперечной перегрузке, следует составить отношение $\frac{\max n_y^{(m)}}{\max \max n_y^{(m)}}$. Если воспользоваться выражениями (4.6) и (4.9), то для этого отношения получается выражение

$$\frac{\max n_y^{(m)}}{\max \max n_y^{(m)}} = 0,76 \frac{c_{x \text{ сн}}}{c_{n \text{ max}}} \left[\frac{\sin \theta_1 L i_z}{-m_z^c} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{c_n^\alpha}{3c_{x0} + c_y^\alpha - \frac{m_z^\omega}{i_z}} \right)^3 \right]^{1/4} \bar{N}_{\max, \rho_1} \Big|_{\mu_1 = \mu_{1 \max}}. \quad (29.8)$$

Здесь под $\max n_y^{(m)}$ подразумевается максимальное из значений $n_y^{(m)}$ при $0 \leq \delta_0 \leq 180^\circ$, $-180^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ и $\mu_{1 \min} \leq \mu_1 \leq \mu_{1 \max}$.

Из (29.7) и (29.8) видно, что чем меньше $\mu_{1 \max}$, тем, с одной стороны, меньше потребная величина скорости

вращения летательного аппарата относительно продольной оси, а с другой стороны (см. рис. 126—132), больше выигрыш в величине поперечной перегрузки, так как при уменьшении μ_1 значения $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ уменьшаются. Таким образом, придание летательному аппарату вращения относительно продольной оси наиболее выгодно при малых значениях $\mu_{1\max}$.

Из выражения (29.8) также видно, что при прочих равных условиях выигрыш в перегрузке получается тем больше, чем меньше θ_1 — угол наклона траектории на границе атмосферы.

В ряде случаев величина $\max \max n_{\parallel}^{(m)}$ из-за ее маловероятности во внимание не принимается и возмущенное движение характеризуется величиной практического максимума поперечной перегрузки. В этом случае величину выигрыша в $\max n_{\parallel}^{(m)}$ следует оценивать с помощью отношения

$$\frac{\max n_{\parallel}^{(m)} \big|_{v_1=v_{1\text{opt}}}}{\max n_{\parallel}^{(m)} \big|_{v_1=0}} = \left[\frac{\bar{N}_{\max, \rho_1} \big|_{\rho_1=\rho_{1\text{opt}}}}{\bar{N}_{\max, \rho_1} \big|_{\rho_1=0}} \right]^{\mu_1 \cdots \mu_{1\max}}. \quad (29.9)$$

Здесь через $\rho_{1\text{opt}}$ обозначено такое значение ρ_1 , при котором это отношение имеет минимальное значение при $\rho_1 > \rho'_1$. Зависимости $\rho_{1\text{opt}}$ от $\Delta\theta$ для $\mu_1 = 0,25; 0,5; 1,0$ и $2,0$, определенные с помощью результатов расчета, представленных на рис. 126—132, изображены на рис. 133.

Для сравнения там же изображена зависимость $\rho'_1 = \operatorname{tg} \frac{\Delta\theta}{2}$ от $\Delta\theta$. Заметим, что $\rho_{1\text{opt}}$ всегда больше, чем ρ'_1 . Значения отношения (29.9) для тех же значений $\Delta\theta$ и μ_1 представлены на рис. 134. При известном значении $\rho_{1\text{opt}}$ величина параметра $v_{1\text{opt}}$ в силу (29.5) определяется выражением

$$v_{1\text{opt}} = \rho_{1\text{opt}} \mu_{1\max}. \quad (29.10)$$

Из рис. 133 и 134 видно, что наибольший эффект от придания летательному аппарату вращения относительно продольной оси достигается при малых $\Delta\theta$. При этом диапазон значений $\Delta\theta$, при которых придание вращения целесообразно, тем больше, чем меньше $\mu_{1\max}$. Так, например, при $\mu_1 = 0,25$ придание вращения летательному аппарату

целесообразно вплоть до значения $\Delta\theta = 120^\circ$, в то время как при $\mu_1 = 2,0$ придание вращения целесообразно лишь при $\Delta\theta \leq 80^\circ$.

Из графиков, приведенных на рис. 118—124 и 126—132, видно, что при увеличении $\Delta\theta$ от 0 до 180° значения

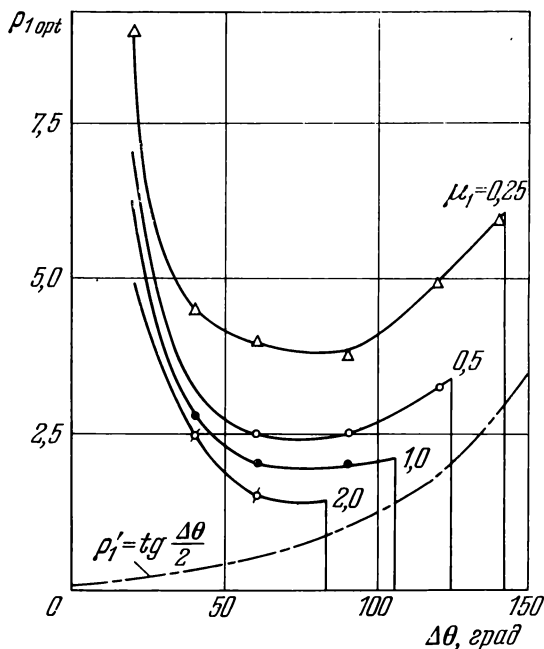


Рис. 133.

коэффициентов $\bar{N}_{\max}$ и $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ увеличиваются. Особенно четко это видно на рис. 100, где изображены зависимости $\bar{N}_{\max}^{(ac)}$ для различных значений $\Delta\theta$. Вследствие этого при $\Delta\theta > 90^\circ$ весьма существенного уменьшения $\bar{\alpha}_{\max}$ можно добиться путем установки на ракете головной части «хвостом вперед», так как в этом случае при расчетах во все выше приведенные формулы вместо $\Delta\theta$ следует подставлять значение $180^\circ - \Delta\theta$, которое может оказаться существенно меньше, чем $\Delta\theta$. Так, например, для головных

частей баллистических ракет дальнего действия, когда $\Delta\theta \approx 120^\circ \div 140^\circ$, значения $180^\circ - \Delta\theta$ будут заключены между 40° и 60° , что в соответствии с графиком на рис. 134 позволит уменьшить $\bar{x}_{\max}$ в несколько раз.

Заметим, что все выводы о влиянии вращения в основном следуют также и из неуточненных асимптотических формул.

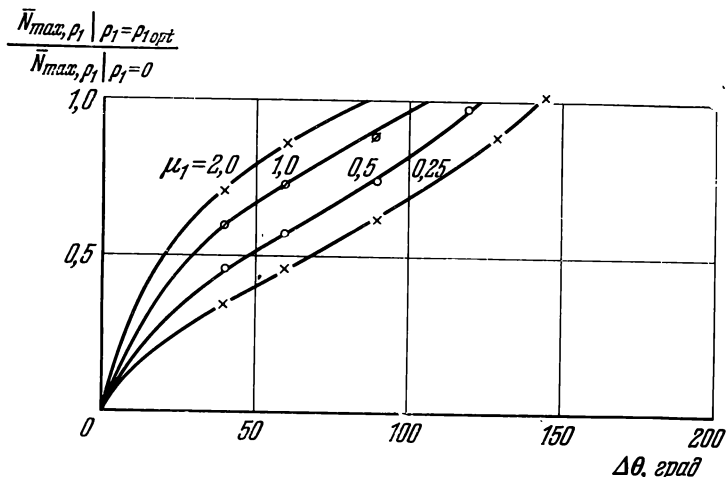


Рис. 134.

С помощью графиков на рис. 126—132 можно также решить вопрос о применимости упрощенной схемы плоского движения для исследования пространственного движения. Эта схема обычно применяется в тех случаях, когда значения ρ_1 не превосходят единицы. Из анализа, проведенного выше, следует, что из-за существенности влияния угла δ_0 плоская схема дает точные результаты при $\rho_1 = 0$ и результаты, близкие к истинным, при $0 \leq \rho_1 \leq 1,0$ лишь тогда, когда $\Delta\theta = 0$ и $\Delta\theta = 180^\circ$. С помощью графиков на рис. 126—132 можно точно определить величину погрешности схемы плоского движения при $0 < \Delta\theta < 180^\circ$ и $0 \leq \rho_1 \leq 1,0$. С этой целью на рис. 135 для $\mu_1 = 1,0$ построены зависимости $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ [см. формулу (29.2)] от $\Delta\theta$ для ряда значений ρ_1 из интервала $0 \leq \rho_1 \leq 1,0$. Для

сравнения там же нанесены результаты расчета по уточненной (штрих-пунктирная линия) и неуточненной (пунктирная линия) асимптотическим формулам, полученным для случая плоского движения.

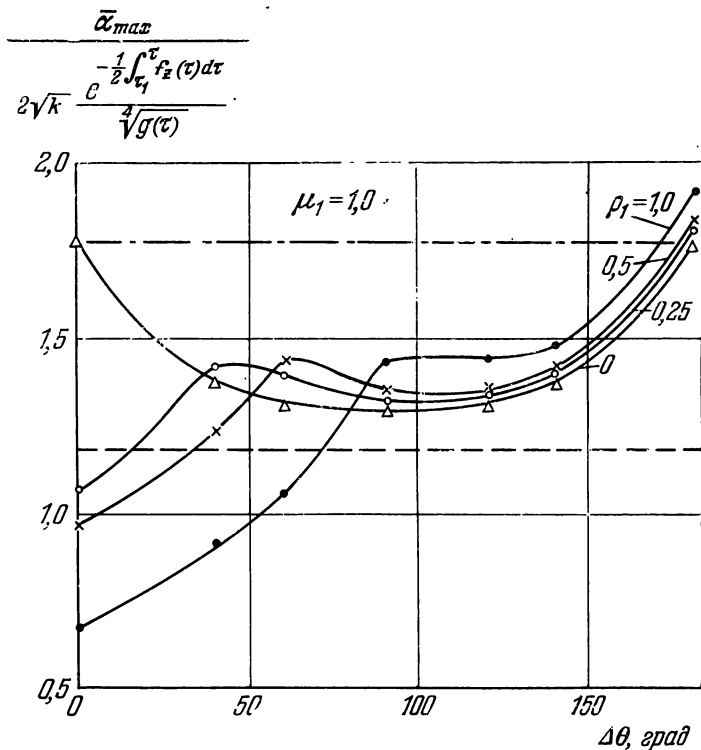


Рис. 135.

Из сопоставления сплошных кривых с штрих-пунктирной кривой (рис. 135) становится ясно, что за исключением случаев, когда $\Delta\theta \approx 0$ и $\Delta\theta \approx 160^\circ \div 180^\circ$, схема плоского движения дает несколько большие значения $\bar{\alpha}_{\max}$, чем это получается при исследовании пространственного движения.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ, КОГДА ПАССИВНЫЙ УЧАСТОК ТРАЕКТОРИИ НАЧИНАЕТСЯ В АТМОСФЕРЕ

§ 30. ДВИЖЕНИЕ ПРИ ПОЛЕТЕ В АТМОСФЕРЕ

В настоящей главе будет рассматриваться класс задач, в которых отделение летательного аппарата от носителя происходит в атмосфере. К этому классу задач относятся случаи, когда траектория полета целиком расположена в атмосфере, а также исследование движения при выходе из атмосферы.

Будем предполагать, что непосредственно после отделения известны следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} |_{t=t_0} &= \alpha_{\max, 0}, \\ r |_{t=t_0} &= r_0, \\ g(\tau) |_{t=t_0} &= g_0. \end{aligned} \right\} \quad (30.1)$$

Кроме этого, по-прежнему предполагается, что в момент отделения угол атаки равняется нулю. Учет демпфирования будет производиться при тех же предположениях, которые были сформулированы в § 7. Поэтому на малых высотах, где движение происходит с малыми углами атаки, для G и r будут использоваться выражения (7.24), а на больших высотах, где влиянием демпфирующих моментов и подъемной силы на движение относительно центра масс можно пренебречь, функции G и r будут считаться постоянными. При таких предположениях можно считать, что на всей траектории функции G и r определяются выражениями (7.24). В силу равенства нулю угла атаки в начальный момент, очевидно, имеет место равенство

$$G_0 = r_0,$$

где G_0 — начальное значение функции G , представляющей собой величину, пропорциональную проекции вектора кинетического момента на вектор скорости. С учетом этого

из формул (7.24) следует, что

$$G(\tau) = r(\tau) = r_0 e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_x(\tau) d\tau} \quad (30.2)$$

на всей траектории.

Заметим, что при наличии такого равенства (см. § 24) в процессе возмущенного движения после отделения угол атаки летательного аппарата «периодически» обращается в нуль.

В настоящем параграфе будет исследоваться возмущенное движение для случая траекторий, целиком расположенных в атмосфере. Исследование движения будет производиться с помощью уравнений (6.1), которые не учитывают изменения кривизны осредненной траектории. В рассматриваемом случае в окрестности вершины траектории пренебрежение кривизной траектории может оказаться недопустимым. Поэтому всякий раз при исследовании движения на атмосферных траекториях необходимо проверять условие (3.13), при котором кривизной траектории можно пренебречь.

Остановимся сначала на исследовании плоского движения. При $F(\alpha) = \sin \alpha$ оно может быть достаточно полно проведено с помощью графика на рис. 20 (см. § 10). Из этого рисунка видно, что на восходящей ветви траектории летательный аппарат раскачивается, так как здесь $g(\tau)$ убывает, а стабилизирующее действие демпфирования на больших высотах невелико, а затем, после попадания на нисходящую ветвь траектории, где $g(\tau)$ растёт, колебания затухают. Значение константы D , от которой зависит функция, изображенная на оси абсцисс на рис. 20, очевидно, нетрудно определить по известным значениям $\alpha_{\max, 0}$ и g_0 .

При известном D для определения $\alpha_{\max}(\tau)$ в плотных слоях атмосферы можно воспользоваться выражением (11.2). Если после определения D с помощью начальных условий будет иметь место неравенство $\alpha_{\max, 0} < 1$, то это выражение можно записать в виде

$$\alpha_{\max}(\tau) = \alpha_{\max, 0} \sqrt[4]{\frac{g_0}{g(\tau)}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}. \quad (30.3)$$

Перейдем теперь к расчету пространственного возмущенного движения на траекториях, не имеющих внеатмосферного участка. Так же как и в § 24, будем сначала пренебрегать демпфирующими членами. Тогда с учетом равенства (30.2) это может быть сделано с помощью системы соотношений (24.11) — (24.14) при $r(\tau) = r_0$ и $\xi = 1$. При $\xi = 1$ эти соотношения можно существенно упростить. Как уже указывалось, в этом случае уравнение (24.12) имеет корень $u_3 = A = 1$, и после сокращения на $(u - 1)$ его можно заменить следующим:

$$(1 - u_i) - 2 \left[\frac{E}{r_0^2} + \frac{g(\tau)}{r_0^2} u_i \right] (1 + u_i) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (30.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 1 + \frac{B}{v} \\ u_2 &= 1 + B. \end{aligned} \right\} \quad (30.5)$$

Исключим из этой системы функцию E . Введем для этого новую переменную $w = 1 + u$. Подставляя $u = w - 1$ в (30.4) и (30.5), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{g(\tau)}{r_0^2} w_i^2 + \left\{ \frac{1}{2} + \frac{[E - g(\tau)]}{r_0^2} \right\} w_i - 1 &= 0, \\ w_1 &= 2 + \frac{B}{v}, \\ w_2 &= 2 + B. \end{aligned} \right\} \quad (30.6)$$

Если записать выражение для произведения корней этого уравнения, то получится искомое соотношение, не содержащее E :

$$(2 + B) \left(2 + \frac{B}{v} \right) = - \frac{r_0^2}{g(\tau)}. \quad (30.7)$$

Отсюда

$$v = \frac{-B(B + 2)}{2(B + 2) + \frac{r_0^2}{g(\tau)}}. \quad (30.8)$$

Зависимости v от B для различных значений $\frac{r_0^2}{g(\tau)}$ постро-

ны на рис. 136. Видно, что все кривые r расположены внутри острого угла с вершиной в точке $(v=1, B=-2)$, который соответствует плоскому движению ($r_0 = 0$). Одна сторона этого угла соответствует вращению летательного аппарата относительно поперечной оси, а другая — колебательному движению. В § 24 указывалось, что если v достигает значения, равного единице, то мгновенная частота обращается в нуль и вследствие этого такой случай является особым. Из рис. 136 видно, как пространственность движения ($r_0 > 0$) приводит к устранению особенности, имеющейся при плоском движении.

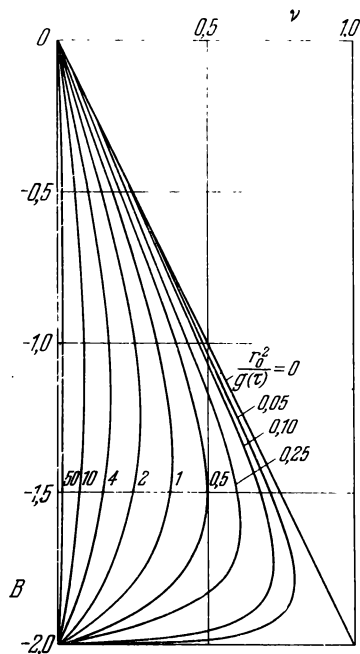


Рис. 136.

Соотношение (24.14) при $A = 1$ также упрощается. Если исключить из него функцию ψ с по-

мощью (24.11), то оно может быть записано в виде

$$D_r = -2B \sqrt{-\frac{B}{2v}} L(B, v) \sqrt{\frac{g(v)}{r_0^2}}, \quad (30.9)$$

где

$$L(B, v) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-\xi)(1-v\xi)}}{1 + \frac{B}{2}\xi^2} d\xi.$$

Интеграл в этой формуле выражается через известные функции при $B = 0$, $B = -2$, $v = 0$, $v = 1$ и $v = -B/2$. Для остальных значений B и v он был вычислен численно. Зависимость $L(B, v)$ изображена на рис. 137.

Таким образом, в рассматриваемом случае система уравнений (24.11) — (24.14) сводится к двум уравнениям (30.8) и (30.9). Эти уравнения решались с помощью метода, аналогичного указанному в § 24: при фиксированном

значении $\sqrt{\frac{g(\tau)}{r_0^2}}$ задавался ряд значений B , а затем последовательно определялись v с помощью формулы (30.8) и D_r с помощью формулы (30.9). Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 138 и 139 в виде зависимо-

стей $\alpha_{\max}$ и $T\sqrt{g}$ от $\sqrt{\frac{g(\tau)}{r_0^2}}$ при различных значениях D_r .

Напомним, что $\alpha_{\max}$ и $T\sqrt{g}$ связаны с B и v следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} &= \arccos(1 + B), \\ T\sqrt{g} &= 2K(v)\sqrt{-\frac{2v}{B}}. \end{aligned} \right\} \quad (30.10)$$

При $\xi = 1$ функция $\alpha_{\min}$, как это указывалось в § 24, тождественно равняется нулю. Константа D_r определяется по известным значениям

$\alpha_{\max,0}$ и g_0/r_0^2 с помощью графиков на рис. 138.

Графики на рис. 138 и 139 можно использовать также и в тех случаях, когда на какой-то части рассматриваемого интервала времени асимптотические решения неточны и решение уравнений движения для этой части траектории находится каким-либо другим методом. В таких случаях этими графиками можно пользоваться, начиная с того момента, при котором последовательные экстремальные значения $\alpha(t)$ ложатся на одну и ту же кривую на рис. 138.

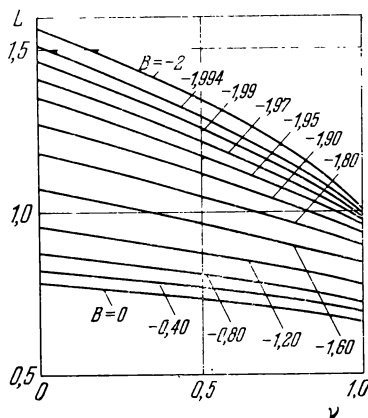
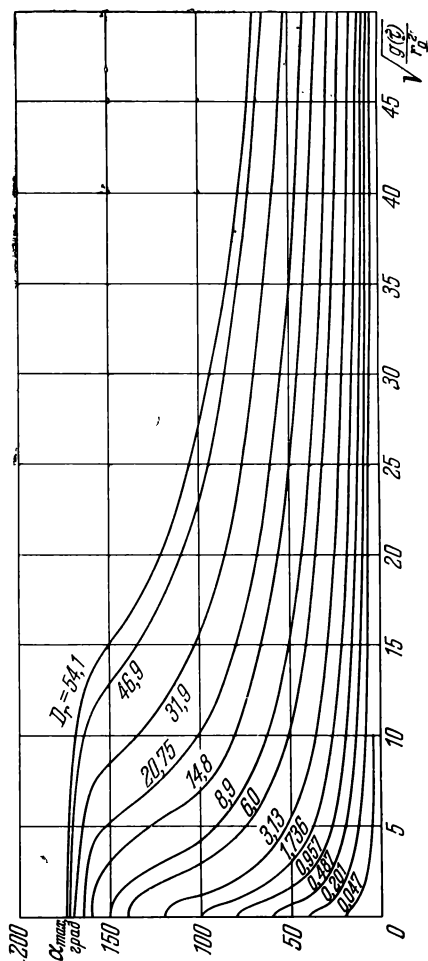


Рис. 137.



.831 РИС.

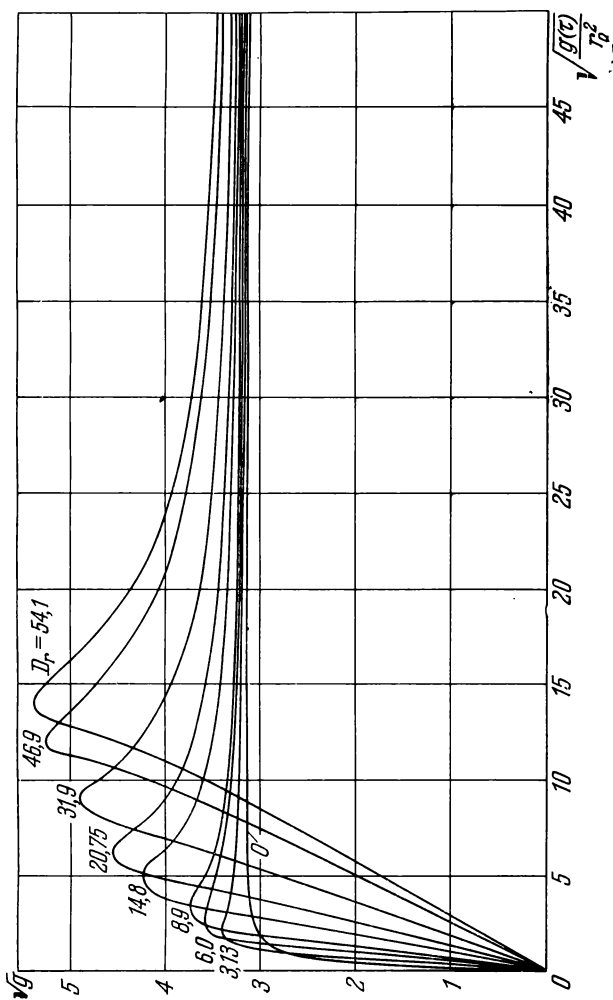


Рис. 139.

Графики, представленные на рис. 138 и 139, полезно дополнить приближенными формулами для малых значений $\alpha_{\max}(\tau)$. При малых значениях $\alpha_{\max}(\tau)$ функцию B и в силу (30.8) функцию ν можно рассматривать как малые величины. Удерживая в (30.8) — (30.10) только главные члены при малых B и ν , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{-2B}{4 + \frac{r_0^2}{g(\tau)}}, \\ D_r &= -2B \sqrt{-\frac{B}{2\nu}} L(0, 0) \sqrt{\frac{g(\tau)}{r_0^2}}, \\ \alpha_{\max} &= \sqrt{-2B}, \\ T \sqrt{g(\tau)} &= 2K(0) \sqrt{-\frac{2\nu}{B}}, \end{aligned} \right\} (30.11)$$

где

$$L(0, 0) = \frac{\pi}{4}, \quad K(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Из этих формул после простых преобразований получаются следующие выражения для $\alpha_{\max}(\tau)$ и $T(\tau)$:

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{\sqrt{\frac{4D_r}{\pi}}}{\sqrt[4]{\frac{g(\tau)}{r_0^2} + \frac{1}{4}}}, \quad (30.12)$$

$$T(\tau) = \frac{\pi}{\sqrt{g(\tau) + \frac{r_0^2}{4}}}. \quad (30.13)$$

Эти формулы получены без учета демпфирования. Действуя примерно так же, как в § 25, можно показать, что при учете демпфирования выражение (30.12) следует записать в виде

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau) + \frac{r_0^2}{4}}} \sqrt{\frac{4D}{\pi}}, \quad (30.14)$$

где

$$r(\tau) = r_0 e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} f_x(\tau) d\tau}, \quad D = D_r r_0.$$

Учет члена $[r^2(\tau)]/4$ в равенстве (30.14) существен в тех случаях, когда отделение летательного аппарата от носителя происходит на большой высоте.

Если начальное значение амплитуды колебаний $\alpha_{\max, 0}$ не превосходит одного радиана, то константу D можно определить с помощью равенства (30.14), записанного для момента $t = t_0$. Выполняя это, выражение (30.14) для $\alpha_{\max}(\tau)$ можно записать в виде

$$\alpha_{\max}(\tau) = \alpha_{\max, 0} \sqrt[4]{\frac{g_0 + \frac{r_0^2}{4}}{g(\tau) + \frac{r(\tau)}{4}}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}. \quad (30.15)$$

Это выражение аналогично выражению (30.3), полученному для плоского движения, и связывает значения параметров движения при $t = t_0$ с $\alpha_{\max}(\tau)$ при движении аппарата в плотных слоях атмосферы.

Из вывода формул (30.3) и (30.15), которые представляют собой не что иное, как линейные асимптотические формулы, следует, что эти формулы связывают между собой параметры движения в начале восходящей ветви траектории с параметрами движения в конце нисходящей ветви несмотря на то, что в окрестности вершины траектории колебания происходят с большими амплитудами и эти формулы неприменимы.

В ряде случаев вместо начального значения амплитуды колебаний в равенствах (30.1) задается начальное значение экваториальной компоненты угловой скорости ω_{z0} . Установим связь между $\alpha_{\max, 0}$ и ω_{z0} . Обратимся для этого к интегралу энергии (24.4). При $G = r$ его можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{r^2}{2} \lg^2 \frac{\alpha}{2} + 2g(\tau) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \bar{E}(\tau). \quad (30.16)$$

При $t = t_0$ $\alpha = 0$, $d\alpha/dt = \omega_{z0}$ и из этого равенства получается следующее выражение для $\bar{E}_0$ — начального значения функции $\bar{E}(\tau)$:

$$\bar{E}_0 = \frac{\omega_{z0}^2}{2}.$$

Записывая теперь равенство (30.16) для ближайшего к t_0 момента времени, при котором $d\alpha/dt = 0$ и $\alpha = \alpha_{\max, 0}$, будем иметь:

$$\frac{r_0^2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_{\max, 0}}{2} + 2g_0 \sin^2 \frac{\alpha_{\max, 0}}{2} = \frac{\omega_{z0}^2}{2}.$$

Для случая малых значений $\alpha_{\max, 0}$ эта связь между $\alpha_{\max, 0}$ и ω_{z0} записывается так:

$$\alpha_{\max, 0} = \frac{\omega_{z0}}{\sqrt{g_0 + \frac{r_0^2}{4}}}. \quad (30.17)$$

Отметим еще выражение для скорости прецессии λ летательного аппарата. Из (5.5) при $G(\tau) = r(\tau)$ имеем:

$$\lambda = \frac{r(\tau)}{1 + \cos \alpha}.$$

Отсюда видно, что при движении по траекториям, целиком расположенным в атмосфере, плоскость угла атаки вращается в пространстве в одном и том же направлении.

Перейдем теперь к вопросу о применимости асимптотических решений для исследования движения по траекториям, целиком расположенным в атмосфере. Этот вопрос всегда может быть решен с помощью условий (8.4), (8.6) и (8.10), если при расчетах, помимо периода колебаний, также вычисляется и его производная. Однако желательно иметь и приближенное условие применимости, которое позволяло бы ориентировочно решать вопрос по известным данным о траектории центра масс без предварительного расчета периода колебаний.

В настоящем параграфе такое условие будет указано для случая траекторий, целиком расположенных в атмосфере. Возьмем с этой целью для периода колебаний выра-

жение (25.31) при $g_r(\tau) = g(\tau)$ и будем считать, что функция $g(\tau)$ изменяется в основном за счет изменения плотности. Тогда можно приближенно положить

$$|g'| = \lambda_1 V_0 |\sin \theta_0| g, \quad (30.18)$$

где V_0 и θ_0 — соответственно скорость и угол наклона траектории летательного аппарата в момент отделения.

Из (25.31) и (30.18) имеем:

$$T'' = - \frac{\pi \lambda_1 V_0 \sin \theta_0}{2 \sqrt{g(\tau)}}.$$

Подставляя это выражение в (8.10) [см. также (8.5)] и пренебрегая демпфированием, искомое условие применимости асимптотических решений для траекторий, не имеющих внеатмосферного участка, можно записать в виде

$$\left| \frac{\lambda_1 V_0 \sin \theta_0}{\sqrt{g_{\min}}} \right| \leq 0,8, \quad (30.19)$$

где

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{7000}.$$

§ 31. ДВИЖЕНИЕ ПРИ ВЫХОДЕ ИЗ АТМОСФЕРЫ

При исследовании движения на восходящей ветви траектории, имеющей внеатмосферный участок, представляют интерес два вопроса: во-первых, собственно исследование изменения характеристик возмущенного движения при выходе из атмосферы и, во-вторых, определение параметров движения вне атмосферы с тем, чтобы иметь возможность в дальнейшем определить движение летательного аппарата при входе в атмосферу. Что касается первого вопроса, то он может быть рассмотрен с помощью соотношений и графиков, указанных в предыдущем параграфе. Поэтому в настоящем параграфе основное внимание будет уделено второму вопросу.

Из изложенного в главах III, V и VI следует, что для определения движения вне атмосферы и при входе в атмосферу достаточно знать в момент $t = t'_0$ ($\tau = \tau'_0$) выхода из атмосферы величины Q'_{x0} и Q'_{y0} — соответственно проек-

ции вектора кинетического момента на касательную к траектории и на направление, перпендикулярное к ней, или связанные с Q_{x0} и Q'_{x0} величины

$$r_1 = \frac{Q'_{x0}}{I_z} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \frac{Q'_{y0}}{I_z}. \quad (31.1)$$

Поэтому основной задачей настоящего параграфа является установление связи между r_1 и ω_1 и начальными значениями параметров $\alpha_{\max, 0}$, r_0 и g_0 . В силу сделанных предположений о демпфировании из (7.22) и (7.24) следуют равенства

$$r_1 = r_0 e^{-\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_x(\tau) d\tau}, \quad (31.2)$$

$$\left[\omega \int_0^{\frac{\tau_\Phi}{2}} \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \Phi} \right)^2 d\Phi \right]_{\tau=\tau_0}^{\tau_1} = D e^{-\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_z(\tau) d\tau}, \quad (31.3)$$

где $D = D_r r_0$ выражается через начальные условия (30.1) с помощью графика на рис. 138. При малых значениях $\alpha_{\max, 0}$ для D из (30.14) получается следующая формула:

$$D = \frac{\pi}{4} \alpha_{\max, 0}^2 \sqrt{g_0 + \frac{r_0^2}{4}}. \quad (31.4)$$

В момент $t = t'_0$ влияние атмосферы уже можно не учитывать, вследствие чего левая часть равенства (31.3) может быть определена с помощью выражения (25.11) при $\xi = 1$.

Таким образом, имеем:

$$\pi \left(\sqrt{\omega_1^2 + r_1^2} - r_1 \right) = D e^{-\int_{\tau_0}^{\tau_1} f_z(\tau) d\tau}.$$

Отсюда для ω_1 получается следующее выражение:

$$\omega_1 = \frac{D}{\pi} e^{-\int_{\tau_0}^{\tau_0'} f_z(\tau) d\tau} \sqrt{1 + \frac{2r_1}{\tau_0' - \int_{\tau_0}^{\tau_0'} f_z(\tau) d\tau} \frac{D}{\pi} e^{-\int_{\tau_0}^{\tau_0'} f_z(\tau) d\tau}}. \quad (31.5)$$

Связь между r_1 и r_0 дается равенством (31.2).

Дополним эти результаты с помощью анализа уточненных асимптотических формул § 12 и 27. Ясно, что если формулы (12.20) и (27.22) обратить, то с их помощью для случаев, когда $\alpha_{\max, 0} < 1$, можно сразу определить параметры $\mu_1 = \omega_1/k'$ и $\nu_1 = r_1/k'$ (через k' здесь обозначено значение параметра $k = \lambda_1 V_1 |\sin \theta_1|$ для случая выхода из атмосферы). Заметим сразу, что так как для баллистических траекторий величина скорости полета и модуль угла наклона траектории одинаковы при входе в атмосферу и выходе из нее, то всюду далее будем считать, что $k' = k$.

Рассмотрим сначала плоское движение ($r_0 = r_1 = \nu_1 = 0$). Уточненную асимптотическую формулу (12.20) для этого случая при $t = t_1$ можно записать в виде

$$N_{\max, \mu_1}(\alpha_1, \mu_1) = \frac{\alpha_{\max, 0}}{2} \sqrt{\frac{V g_0}{k}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_0'} f_z(\tau) d\tau}. \quad (31.6)$$

Здесь α_1 — угол атаки летательного аппарата в момент выхода из атмосферы, а

$$N_{\max, \mu_1}(\alpha_1, \mu_1) = \sqrt[4]{1 + \mu_1^2} N_{\max}(\alpha_1, \mu_1).$$

Графики функций $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$ изображены на рис. 23—29. Для случая $F(\alpha) = \sin \alpha$ графики функции

$$N_{\max, \mu_1}(\alpha_1, \mu_1) = N_{\max, \rho_1}(\varphi, \mu_1, \nu_1) \big|_{\varphi=\alpha_1, \nu_1=0}$$

изображены на рис. 141.

Правая часть равенства (31.6), очевидно, известна, и, таким образом, равенство (31.6) определяет собой связь между α_1 и μ_1 . Но α_1 — угол атаки летательного аппарата на границе атмосферы является случайной величиной, так как очевидно, что очень малого изменения высоты, при которой происходит отделение, а также частоты колебаний в

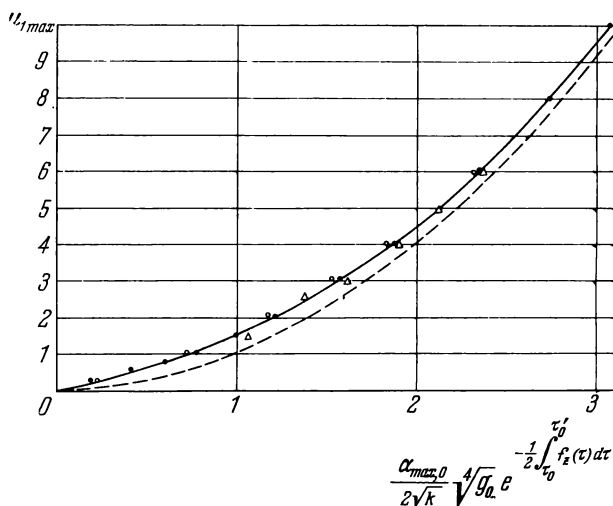


Рис. 140.

процессе полета на восходящей ветви траектории достаточно для того, чтобы летательный аппарат мог иметь какое угодно значение угла атаки на границе атмосферы. Вследствие этого после выхода из атмосферы летательный аппарат может иметь любое значение угловой скорости из интервала $\mu_{1 \min} \leq \mu_1 \leq \mu_{1 \max}$.

Как видно из графиков на рис. 141, $\mu_{1 \max}$ — верхняя граница этого интервала удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \min_{-180^\circ \leq \alpha_1 \leq 180^\circ} N_{\max, \mu_1}(\alpha_1, \mu_{1 \max}) = \\ = \frac{\alpha_{\max, 0}}{2} \sqrt{\frac{V g_0}{k}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_0'} f_z(\tau) d\tau} \end{aligned} \quad (31.7)$$

Нижняя граница $\mu_{1 \min}$ равняется нулю, так как зависимость $N_{\max, \rho_1}$ от α_1 при всех значениях μ_1 имеет бесконечные пики. Заметим, что равенство $\mu_{1 \min} = 0$ имеет место только в случае плоского движения. График для определения $\mu_{1 \max}$, построенный на основании уравнения (31.7) для $F(\alpha) = \sin \alpha$, изображен на рис. 140. Чтобы представить себе влияние вида $F(\alpha)$ на $\mu_{1 \max}$, там же для сравнения нанесены точки, полученные для вариантов $F(\alpha)$ № 1 и № 3 (см. рис. 22). Видно, что влияние формы зависимости $F(\alpha)$ на $\mu_{1 \max}$ очень невелико, и, следовательно, построенная кривая может использоваться для определения $\mu_{1 \max}$ в случае моментных характеристик, существенно отличающихся от синусоиды. На рис. 140 нанесена также пунктирной линией зависимость, следующая из неуточненной асимптотической формулы (31.5).

Для случая малых $\alpha_{\max, 0}$ константа D определяется равенством (31.4), и формула (31.5) при $r_0 = 0$ записывается в виде

$$\mu_1 = \left[\frac{\alpha_{\max, 0}}{2} \sqrt{\frac{V_{g_0}}{k}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_0'} f_z(\tau) d\tau} \right]^2. \quad (31.8)$$

Из сопоставления пунктирной и сплошной кривых на рис. 140 видно, что эта формула может использоваться для определения $\mu_{1 \max}$ с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,5.

Перейдем, далее, к расчету пространственного движения с помощью уточненной асимптотической формулы (27.22) при $\Delta\theta = 0$ ($\xi = 1$). При $G(\tau) = r(\tau)$ имеет место равенство

$$g_r(\tau) = g(\tau) + \frac{r'(\tau)}{4}.$$

С учетом этого выражение (27.22) в начальный момент может быть записано в виде

$$N_{\max, \rho_1}(\varphi, \mu_1, \nu_1) \sim \frac{\alpha_{\max, 0}}{2} \sqrt{\frac{V_{g_0 + \frac{r_0^2}{4}}}{k}} e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_0'} f_z(\tau) d\tau}. \quad (31.9)$$

При такой записи учтено то, что при $\Delta\theta = 0$ коэффициент $N_{\max, \rho_1}$ не зависит от δ_0 . Графики функций $N_{\max, \rho_1}$, построенные в зависимости от φ при нескольких значениях μ_1 и

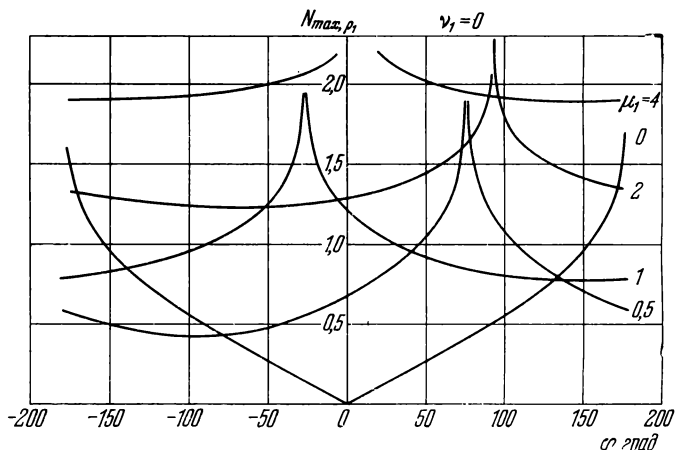


Рис. 141.

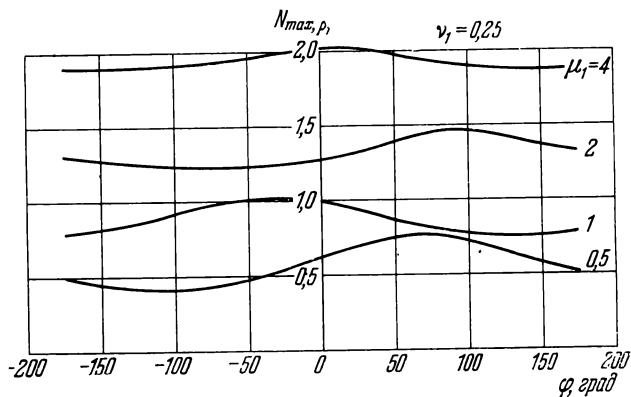


Рис. 142.

фиксированном ν_1 , изображены на рис. 141—143. Значения $\nu_1 = r_1/k$ по-прежнему определяются с помощью выражения (31.2). В силу произвольности φ значения μ_1 ,

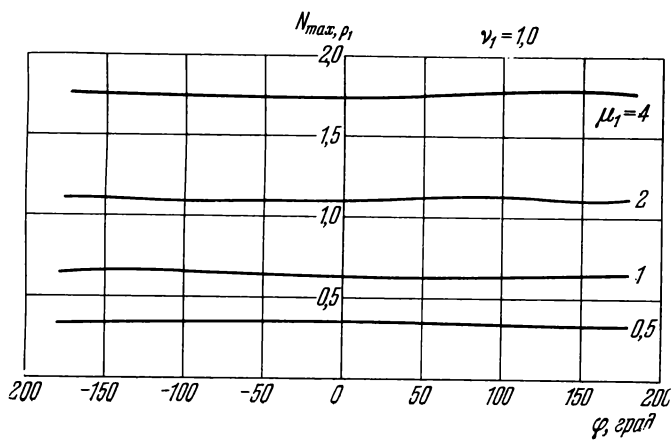


Рис. 143.

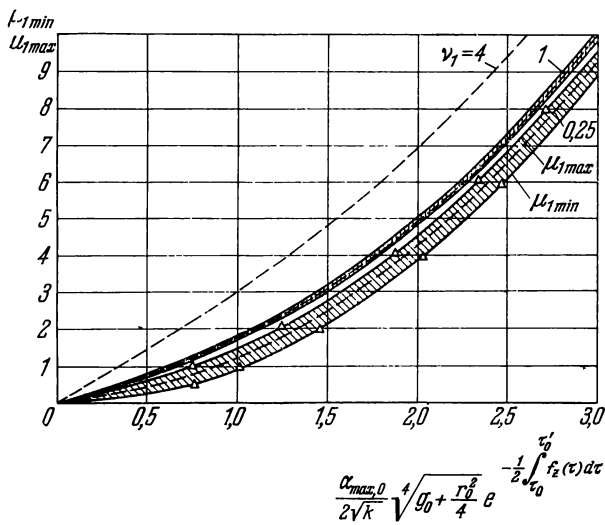


Рис. 144.

которые могут быть после выхода из атмосферы, заключены внутри интервала $\mu_1 \min \leq \mu_1 \leq \mu_1 \max$. Графики для определения $\mu_1 \max$ и $\mu_1 \min$ построены на рис. 144 в виде зависимостей от известной правой части уравнения (31.9) при различных значениях v_1 . Из сопоставления графиков на рис. 140 и 144 видно, что неопределенность в определении μ_1 при пространственном движении существенно меньше, чем при плоском, так как по мере увеличения v_1 граничные значения $\mu_1 \max$ и $\mu_1 \min$ очень быстро сближаются. На рис. 144 для тех же значений v_1 пунктирной линией нанесены значения $\mu_1^{(ac)}$, которые получаются при использовании неуточненной асимптотической формулы (31.5). С учетом (31.4) формула (31.5) записывается в виде

$$\mu_1^{(ac)} = \tilde{\mu}_1^2 \sqrt{1 + \frac{2v_1}{\tilde{\mu}_1^2}}, \quad (31.10)$$

где

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\alpha_{\max,0}}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{g_0 + \frac{r_0^2}{4}}}{k} - \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_0'} f_z(\tau) d\tau}$$

Из графиков, приведенных на рис. 140 и 144, видно, что формула (31.10) может быть использована для определения $\mu_1 \max$ с достаточно высокой степенью точности. Заметим, что при пространственном движении, когда $v_1 > 0$, значения $\mu_1 \max$ несколько больше, чем при плоском. Это следует из формулы (31.10), а также из сопоставления графиков на рис. 140 и 144.

При известных ω_1 и r_1 нетрудно вычислить

$$G_1 = r_1 \cos \Delta \theta - \omega_1 \cos \delta_0 \sin \Delta \theta$$

и затем с помощью результатов, полученных в предыдущих главах, исследовать движение летательного аппарата вне атмосферы и при входе в атмосферу. Относительно угла δ_0 ничего более определенного, чем то, что $0 \leq \delta_0 \leq 360^\circ$, сказать нельзя, так как при выходе из атмосферы плоскость угла атаки вращается. Заметим, что вследствие этого движение, бывшее плоским при выходе из атмосферы, при входе в атмосферу в подавляющем большинстве случаев окажется пространственным.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С МАЛЫМИ УГЛАМИ АТАКИ

§ 32. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ПЕРЕХОДА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ

В настоящем и следующем параграфах будут рассмотрены случаи движения, когда уравнение для угла атаки на участке траектории EE' (рис. 1), непосредственно примыкающем к границе атмосферы, имеет точное решение, выражающееся через функции Бесселя. Чтобы это было возможно, необходимо, чтобы движение происходило с малыми углами атаки. Это предполагает выполнение определенных требований к условиям подхода летательного аппарата к границе атмосферы. Самые первые работы [40, 41, 54 и 51], в которых исследовалось неуправляемое движение летательных аппаратов относительно центра масс, были выполнены именно в такой постановке. Эти работы сохранили свое значение до настоящего времени, так как решения, выраженные через функции Бесселя, позволяют выяснить ряд деталей, касающихся особенностей движения в случаях, когда вне атмосферы угловая скорость летательного аппарата очень мала.

В настоящем параграфе будет рассмотрено плоское движение. Основное внимание будет уделено исследованию движения на участке траектории EE' , непосредственно примыкающем к границе атмосферы, на котором можно считать выполняющимися условия (12.1). При таких условиях уравнение, описывающее плоское движение с малыми углами атаки, записывается в виде

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + g(t) \alpha = 0, \quad (32.1)$$

где

$$g(t) = g_0 e^{kt}, \quad k = \lambda_1 V_1 |\sin \theta_1|, \quad g_0 > 0.$$

Переменность коэффициента $g(t)$ связана с возрастанием плотности в процессе снижения. Чтобы при плоском движении угол атаки при снижении был малой величиной, необходимо, чтобы на границе атмосферы при $t = t_1$ как угол атаки $\alpha = \alpha_1$, так и угловая скорость $\omega_{z0} = \omega_1$ были малыми величинами. Особенно жестким является условие, налагаемое на угловую скорость: она должна быть настолько малой, чтобы в процессе подхода к плотным слоям атмосферы летательный аппарат не успел повернуться на сколько-нибудь значительный угол.

Таким образом, теория, которая будет изложена ниже, относится к случаю очень малых значений параметра $\mu_1 = \omega_1/k$. Введем новую независимую переменную x с помощью формулы

$$x = \frac{2 \sqrt{g(t)}}{k} = \frac{2 \sqrt{g_0} e^{\frac{k}{2} t}}{k}. \quad (32.2)$$

Эта переменная представляет собой удвоенное отношение мгновенной частоты колебаний $\omega = \sqrt{g(t)}$ к величине, обратной интервалу времени, в течение которого плотность изменяется в e раз, и в известной степени напоминает безразмерный параметр μ_1 . Очевидно, что асимптотический метод может быть применен для решения этого уравнения только при больших значениях x . Дифференцируя формулу (32.2), получаем:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dx} \sqrt{g(t)} = \frac{kx}{2} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{k}{2} \frac{d\alpha}{d \ln x}, \quad (32.3)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = g(t) \frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{g(t)}{x} \frac{d\alpha}{dx}. \quad (32.4)$$

С учетом равенства (32.4) исходное уравнение (32.1) может быть записано в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\alpha}{dx} + \alpha = 0. \quad (32.5)$$

Это уравнение представляет собой уравнение Бесселя нулевого порядка. Его общее решение записывается так:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x), \\ \frac{d\alpha}{dx} &= C_1 \frac{dJ_0}{dx} + C_2 \frac{dY_0}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (32.6)$$

где $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В начальный момент при $x = x_1$ имеют место равенства

$$\alpha|_{x=x_1} = \alpha_1, \quad \frac{d\alpha}{dx}\bigg|_{x=x_1} = \frac{2\mu_1}{x_1} \quad (32.7)$$

(индексом «1» здесь, так же как и ранее, обозначаются параметры движения на границе атмосферы). Полагая в (32.6) $x = x_1$ и пользуясь равенствами (32.7), получаем следующие выражения для констант C_1 и C_2 :

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \left(\frac{\alpha_1 \frac{dY_0}{dx} - \frac{2\mu_1}{x} Y_0}{J_0 \frac{dY_0}{dx} - \frac{dJ_0}{dx} Y_0} \right) \bigg|_{x=x_1}, \\ C_2 &= \left(\frac{\frac{2\mu_1}{x} J_0 - \alpha_1 \frac{dJ_0}{dx}}{J_0 \frac{dY_0}{dx} - \frac{dJ_0}{dx} Y_0} \right) \bigg|_{x=x_1} \end{aligned} \right\} \quad (32.8)$$

Для стоящего в знаменателях этих равенств вронскиана функций J_0 и Y_0 имеет место следующее выражение:

$$J_0 \frac{dY_0}{dx} - \frac{dJ_0}{dx} Y_0 = \frac{2}{\pi x}. \quad (32.9)$$

С учетом этого выражения для констант C_1 и C_2 записываются в более простой форме:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi x}{2} \left(\alpha_1 \frac{dY_0}{dx} - \frac{2\mu_1}{x} Y_0 \right) \bigg|_{x=x_1}, \\ C_2 &= \frac{\pi x}{2} \left(\frac{2\mu_1}{x} J_0 - \alpha_1 \frac{dJ_0}{dx} \right) \bigg|_{x=x_1} \end{aligned} \right\} \quad (32.10)$$

Так как обычно начальные условия задаются на достаточно большой высоте, где $x \ll 1$, то для функции Бесселя и их производных, входящих в равенства (32.10), можно использовать следующие приближенные

выражения:

$$\left. \begin{aligned} J_0(x_0) &\approx 1, \\ \frac{dJ_0}{dx} &\approx -\frac{x}{2}, \\ Y_0(x) &\approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{1,124}, \\ \frac{dY_0}{dx} &\approx \frac{2}{\pi x}. \end{aligned} \right\} \quad (32.11)$$

Эти выражения представляют собой первые члены разложений функций Бесселя и их производных в ряды. С помощью этих приближенных формул выражения для констант C_1 и C_2 могут быть еще более упрощены:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &\approx \alpha_1 + 2\mu_1 \ln \frac{1,124}{x_1}, \\ C_2 &\approx \pi\mu_1. \end{aligned} \right\} \quad (32.12)$$

Получим, далее, выражение для угла атаки α для случая движения в плотных слоях атмосферы. При движении в плотных слоях атмосферы значения переменной x являются достаточно большими и для вычисления функций Бесселя можно использовать разложения их в асимптотические ряды. Первые члены этих разложений записываются так:

$$\left. \begin{aligned} J_0(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \\ Y_0(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \right\} \quad (32.13)$$

С помощью этих формул выражение (32.6) для угла атаки в плотных слоях атмосферы записывается в виде

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[C_1 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (32.14)$$

Замечая, что в соответствии с (32.2)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{g(t)}, \quad (32.15)$$

выражение (32.14) можно переписать в форме

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{g(t)}} V \sqrt{\frac{k}{\pi} (C_1^2 + C_2^2)} \cos \left[\int \sqrt{g(t)} dt + \text{const} \right]. \quad (32.16)$$

Сопрягая выражение для амплитуды колебаний, содержащееся в этой формуле, с выражением для амплитуды колебаний, полученным с учетом демпфирования и переменности скорости и угла наклона траектории путем применения асимптотического метода к уравнению (10.4), будем иметь:

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} V \sqrt{\frac{k}{\pi} (C_1^2 + C_2^2)}. \quad (32.17)$$

Здесь вместо t всюду написано медленное время τ , так как при движении в плотных слоях атмосферы функции $f_z(t)$ и $g(t)$ мало изменяются на интервалах времени порядка периода колебаний. Эта формула, так же как и формула (12.20), связывает амплитуду колебаний угла атаки при движении в плотных слоях атмосферы с параметрами движения на границе атмосферы. Ранее аналогичная формула (12.20) была получена с помощью уточненного асимптотического метода. При решении же задачи в линейной постановке сомножитель в выражении для $\alpha_{\max}(\tau)$, учитывающий зависимость от α_1 и μ_1 , удалось вычислить аналитически. В формуле (32.17) зависимость от α_1 и μ_1 входит через коэффициенты C_1 и C_2 . Однако помимо зависимости этих коэффициентов от α_1 и μ_1 они также зависят от значения переменной $x = x_1$ на границе атмосферы. В § 12 для определения границы атмосферы была получена формула (12.6). Выразим эту формулу через параметры x_1 и μ_1 . Пользуясь выражениями (32.2) для x_1 и (12.9) для μ_1 , формулу (12.6) можно записать так:

$$x_1 = 2 \sqrt{\bar{g}_1} \sqrt{1 + \mu_1^2} \quad (\bar{g}_1 = 0,01). \quad (32.18)$$

Сопоставляя между собой формулы (12.20) и (32.17), получаем следующее выражение для $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$, определен-

ное с помощью точного решения линейного уравнения (32.1):

$$N_{\max}(\alpha_1, \mu_1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{\pi \sqrt{1 + \mu_1^2}}}.$$

Входящий в выражения для C_1 и C_2 параметр x_1 должен быть выражен через μ_1 с помощью формулы (32.18). Если воспользоваться приближенными выражениями (32.12) для C_1 и C_2 и формулой (32.18) для x_1 при $\bar{g}_1 = 0,01$, то для $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$ получается следующее приближенное выражение:

$$N_{\max}(\alpha_1, \mu_1) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\alpha_1 + \mu_1 \ln \frac{31,58}{1 + \mu_1^2}\right)^2 + \pi \mu_1^2}{\pi \sqrt{1 + \mu_1^2}}}. \quad (32.19)$$

Это выражение может быть использовано для того, чтобы определить область применимости линейной теории, рассматриваемой в настоящем параграфе. С этой целью с помощью формулы (32.19) были рассчитаны зависимости $N_{\max}(\alpha_1, \mu_1)$ для $\mu_1 = 0$, $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_1 = 0,5$. Результаты этих расчетов изображены на рис. 23 пунктирными кривыми. Из сопоставления пунктирных кривых с результатами точных расчетов, изображенными на этом же рисунке, видно, что погрешность линейной теории не превосходит 10% при $\mu_1 \leq 0,5$ и для такого диапазона значений α_1 , на котором угловая скорость уменьшает абсолютное значение угла атаки на верхнем участке траектории.

Рассмотрим, далее, вопрос об определении высоты, на которой вращательное движение летательного аппарата переходит в колебательное. Эта задача рассматривалась в § 10 для случая не малых значений параметра μ_1 . Там для определения высоты перехода вращательного движения в колебательное была получена формула (10.29). Если экспоненциальный множитель в этой формуле, учитывающий влияние демпфирования, положить равным единице, что, как показали расчеты, проведенные в § 15, вполне допустимо, то формулу (10.29) с учетом равенств

32.2) и (12.9) можно записать в виде

$$\mu_1 = \frac{2}{\pi} x_* \quad (32.20)$$

(звездочкой здесь и далее будут обозначаться параметры, соответствующие моменту перехода вращательного движения в колебательное). Для малых значений μ_1 эта формула, очевидно, неверна, так как при $\mu_1 = 0$ из нее следует, что $x_* = 0$, то есть вращение переходит в колебания при нулевом восстанавливающем моменте. Теория, изложенная выше, позволяет решить эту задачу для сколько угодно малых значений μ_1 и, наоборот, неприменима при больших значениях μ_1 .

Таким образом, формулы настоящего параграфа можно использовать для того, чтобы выяснить вид зависимости x_* от μ_1 для случая малых значений μ_1 .

Будем, далее, считать, что вращение переходит в колебания тогда, когда производная $d\alpha/dx$ первый раз при возрастании x обращается в нуль. Обозначим через α_* значение угла атаки, при котором это происходит. Определим произвольные постоянные C_1 и C_2 в равенствах (32.6) из условий

$$\alpha|_{x=x_*} = \alpha_*, \quad \left. \frac{d\alpha}{dx} \right|_{x=x_*} = 0. \quad (32.21)$$

Тогда для C_1 и C_2 получаются следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\pi\alpha_*}{2} \left(x \frac{dY_0}{dx} \right) \Big|_{x=x_*} = -\frac{\pi\alpha_*x_*}{2} Y_1(x_*), \\ C_2 &= -\frac{\pi\alpha_*}{2} \left(x \frac{dJ_0}{dx} \right) \Big|_{x=x_*} = \frac{\pi\alpha_*x_*}{2} J_1(x_*) \end{aligned} \right\} \quad (32.22)$$

[через $J_1(x)$ и $Y_1(x)$ здесь обозначены функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго рода]. Через эти функции выражаются производные dJ_0/dx и dY_0/dx .

Выясним, далее, каким значениям параметра μ_1 , представляющего собой безразмерную скорость вращения летательного аппарата вне атмосферы, соответствуют эти значения произвольных постоянных. С помощью равенств

(32.3) и (32.6) выражение для $d\alpha/dt$ можно записать в виде

$$\frac{1}{k} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{x}{2} \left(C_1 \frac{dJ_0}{dx} + C_2 \frac{dY_0}{dx} \right).$$

Устремляя в этом равенстве x к нулю и используя при этом приближенные равенства (32.11), получаем искомую связь между x_* , α_* и параметром μ_1 :

$$\frac{\alpha_*}{\mu_1} = \frac{2}{x_* J_*(x_*)}. \quad (32.23)$$

Эта зависимость изображена на рис. 145. Она имеет разрывы в нулях функции $J_1(x)$ и вследствие этого состоит

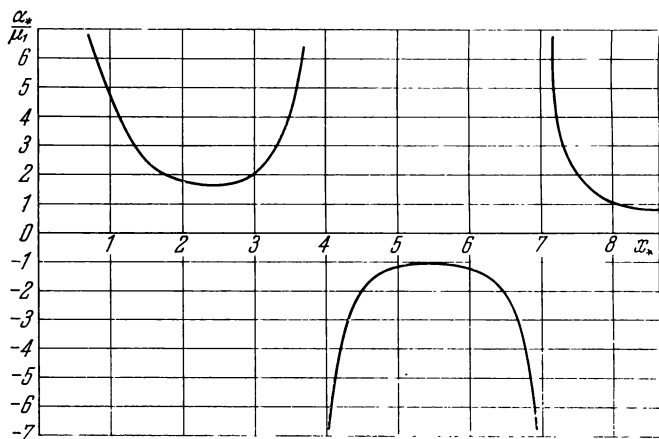


Рис. 145.

из нескольких частей. Чтобы понять, чему соответствуют различные части этой зависимости, на рис. 146 построено несколько решений уравнения (32.5), соответствующих одному и тому же значению μ_1 , вместе с зависимостью (32.23). Из взаимного расположения этих решений и кривой (32.23) видно, что самая левая часть этой зависимости соответствует первому обращению в нуль производной $d\alpha/dx$, следующая часть зависимости (32.23) соответствует

обращению в нуль производной $d\alpha/dx$ второй раз и т. д. Отсюда ясно, что переход вращения в колебания всегда происходит на самой левой части кривой (32.23), то есть при

$$x_* < \bar{x}_* \approx 3,83, \quad (32.24)$$

где $\bar{x}_*$ — наименьший отличный от нуля корень функции $J_1(x)$. При таких значениях x_* момент перехода существенно зависит от величины угла атаки α_* в этот момент

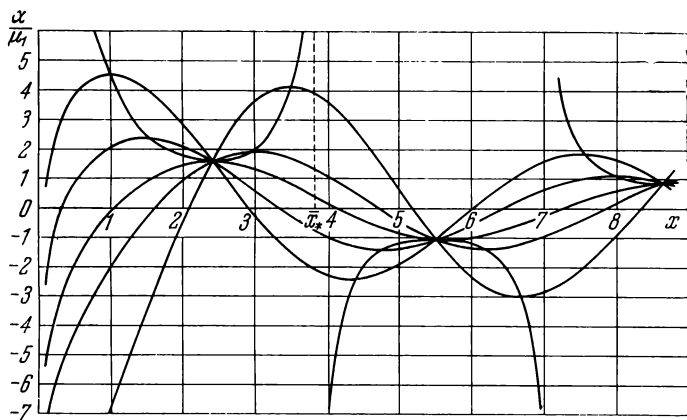


Рис. 146.

времени. При $x \geq 3,83$ движение всегда является колебательным.

Разумеется, этот результат верен только для случая малых углов атаки. При больших углах атаки хотя и маловероятны, но все же возможны движения с зависаниями, у которых переход вращения в колебания происходит в окрестности $\alpha = \pm 180^\circ$ и может быть при сколько угодно больших значениях x_* . Интересно то, что граничное значение $x_* = 3,83$ не зависит от параметра μ_1 , что, очевидно, справедливо также лишь при малых значениях μ_1 .

Полученное условие вместе с условием (32.20) позволяет в плоскости параметров $\mu_1 x_*$ наметить границы области, в которой движение с достаточно высокой вероятно-

стью будет колебательным. Из сказанного следует, что при не малых значениях μ_1 ее граница описывается уравнением (32.20), а при малых μ_1 начинается из точки $\bar{x}_* = 3,83$ и имеет в этой точке вертикальную касательную. Область «колебательности» изображена на рис. 147 штриховкой. Пунктиром здесь ориентировочно изображена линия, сопрягающая эти две зависимости. Из графика, приведенного на этом рисунке, видно, что формула (32.20),

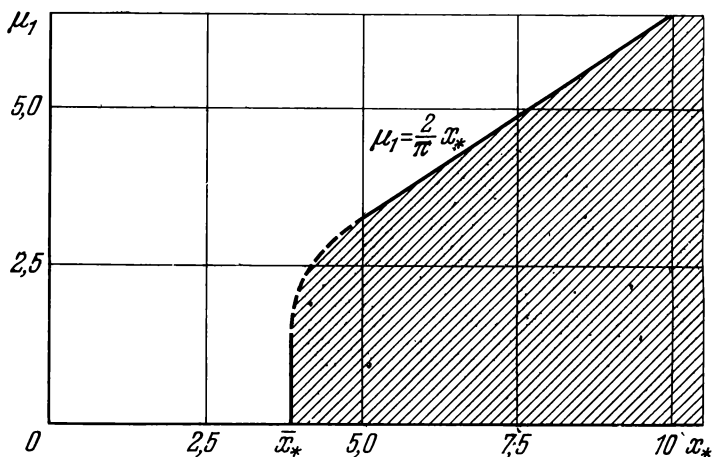


Рис. 147.

полученная с помощью асимптотических решений, применяемых на всей траектории снижения, дает удовлетворительную точность, начиная со значений $\mu_1 \approx 3$. Этот результат находится в соответствии с результатами расчетов, представленными на рис. 23—29, где сопоставлены точные значения коэффициента $N_{\max}$ и его значения, полученные с помощью асимптотического метода (пунктирные кривые).

Следует отметить, что переход вращения в колебания всегда происходит при значениях угла атаки, больших некоторого наименьшего значения. Из графика, приведенного на рис. 145, видно, что значения угла атаки в момент

перехода удовлетворяют неравенству

$$\alpha_* \geq 1,6\mu_1. \quad (32.25)$$

Это, очевидно, является следствием того, что для прекращения вращательного движения необходимо иметь конечное значение восстанавливающего момента, что может быть лишь при значениях угла атаки, отличающихся от нуля.

§ 33. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим пространственное движение летательного аппарата при малых углах атаки. Как и в предыдущем параграфе, основное внимание будет уделено движению на участке траектории EE' (рис. 4), непосредственно примыкающем к границе атмосферы. Следует отметить, что исследование пространственного движения при малых углах атаки представляет значительно больший **практический** интерес, чем исследование плоского движения с **малыми** углами атаки, так как при пространственном движении гораздо проще организовать движение с малыми углами атаки, чем при плоском. Линейная теория пространственного движения была предложена в работе [51] и затем развивалась В. А. Ярошевским в работе [48].

Преобразуем прежде всего уравнения движения (2.9) к более удобному для целей настоящего параграфа виду. На участке траектории EE' выполняются предположения (12.1); можно пренебречь всеми компонентами демпфирующего момента и подъемной силой и вследствие малости угла атаки считать, что восстанавливающий аэродинамический момент $M_z(\tau, \alpha)$ линейно зависит от угла атаки, а также считать, что $\cos \alpha \approx 1$ и $\sin \alpha \approx \alpha$. При таких предположениях уравнения движения (2.9) и формулы (2.5) и (2.6) для компонент угловой скорости можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} + \omega_z \tilde{\omega}_y - \omega_y \tilde{\omega}_z &= 0, \\ \frac{d\omega_y}{dt} + r \tilde{\omega}_z - \omega_z \tilde{\omega}_x &= 0, \\ \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_y \tilde{\omega}_x - r \tilde{\omega}_y + g(t) \alpha &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (33.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_z &= \tilde{\omega}_z = \frac{d\chi}{dt}, \\ \omega_y &= \tilde{\omega}_y = -\lambda \sin \alpha \approx -\alpha \frac{d\gamma}{dt}, \\ \tilde{\omega}_x &= \lambda \cos \alpha \approx \frac{d\gamma}{dt}, \\ r &= \frac{J_x \omega_x}{J_z}, \quad g(t) = g_0 e^{kt}, \quad k = \lambda_1 V_1 |\sin \theta_1|. \end{aligned} \right\} \quad (33.2)$$

С учетом равенств (33.2) уравнения движения (33.1) можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} r &\equiv r_1, \\ \frac{d\omega_y}{dt} + (r - \tilde{\omega}_x) \omega_z &= 0, \\ \frac{d\omega_z}{dt} - (r - \tilde{\omega}_x) \omega_y + g(t) \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33.3)$$

(индексом «1» здесь, так же как и ранее, обозначаются параметры движения на границе атмосферы).

Умножая второе уравнение этой системы на мнимую единицу i и складывая его затем с третьим уравнением, а также учитывая, что $\tilde{\omega}_x = d\gamma/dt$, получаем:

$$\frac{d}{dt}(\omega_z + i\omega_y) + i\left(r_1 - \frac{d\gamma}{dt}\right)(\omega_z + i\omega_y) + g(t)\alpha = 0. \quad (33.4)$$

Из равенств (33.2) имеем:

$$\omega_z + i\omega_y = \frac{d\chi}{dt} - i\alpha \frac{d\gamma}{dt} = e^{i\gamma} \frac{d}{dt}(e^{-i\gamma}\alpha). \quad (33.5)$$

Введем в рассмотрение комплексный угол атаки σ :

$$\sigma = \alpha e^{-i\gamma}. \quad (33.6)$$

С учетом двух последних равенств уравнение (33.4) может быть записано так:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{i\gamma} \frac{d\sigma}{dt}\right) + i\left(r_1 - \frac{d\gamma}{dt}\right)e^{i\gamma} \frac{d\sigma}{dt} + g(t)\alpha = 0. \quad (33.7)$$

Выполняя дифференцирование в первом слагаемом и приводя подобные члены, получаем уравнение для σ :

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + ir_1 \frac{d\sigma}{dt} + g(t)\sigma = 0. \quad (33.8)$$

Чтобы избавиться от члена с первой производной, введем новую зависимую переменную

$$\beta = \sigma e^{i\frac{r_1}{2}t} = \alpha e^{i\left(\frac{r_1}{2}t - \gamma\right)}. \quad (33.9)$$

Всюду далее будем предполагать, что время t отсчитывается от момента попадания на границу атмосферы. Отметим, что в силу того, что γ и r_1 — действительные величины,

$$\alpha = |\beta|. \quad (33.10)$$

После подстановки равенства (33.9) в уравнение (33.8) получим:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \left[g(t) + \frac{r_1^2}{4}\right]\beta = 0. \quad (33.11)$$

Вводя, так же как и в предыдущем параграфе, новую независимую переменную x с помощью формулы (32.2), преобразуем уравнение (33.11) к следующему виду:

$$\frac{d\beta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\beta}{dx} + \left(1 + \frac{v_1^2}{x^2}\right)\beta = 0, \quad (33.12)$$

где через $v_1 = r_1/k$ обозначен безразмерный параметр, введенный в § 22 и представляющий собой отношение интервала времени $1/k$, характерного для движения центра масс аппарата, к интервалу времени $1/r_1$, характерному для движения относительно центра масс. Асимптотический метод применим для решения этого уравнения при всех значениях x в случае не малых значений параметра v_1 . Полученное уравнение (33.12) представляет собой уравнение Бесселя чисто мнимого порядка iv_1 . Следовательно, его общее решение можно искать в виде

$$\beta = C_1 J_{iv_1}(x) + C_2 J_{-iv_1}(x), \quad (33.13)$$

где C_1 и C_2 — комплексные произвольные постоянные.

Для определения произвольных постоянных рассмотрим сначала участок подхода к границе атмосферы, соответствующий малым значениям x . При малых значениях x для функций $J_{iv_1}(x)$ и $J_{-iv_1}(x)$ имеют место следующие приближенные выражения:

$$\left. \begin{aligned} J_{iv_1}(x) &\approx \left(\frac{x}{2}\right)^{iv_1} \frac{1}{\Gamma(1+iv_1)}, \\ J_{-iv_1}(x) &\approx \left(\frac{x}{2}\right)^{-iv_1} \frac{1}{\Gamma(1-iv_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (33.14)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет равенству

$$\Gamma(1+iv_1)\Gamma(1-iv_1) = \frac{i\pi v_1}{\operatorname{sh} \pi v_1}. \quad (33.15)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(1+iv_1) &= \sqrt{\frac{\pi v_1}{\operatorname{sh} \pi v_1}} e^{i \arg \Gamma(1+iv_1)}, \\ \Gamma(1-iv_1) &= \sqrt{\frac{\pi v_1}{\operatorname{sh} \pi v_1}} e^{-i \arg \Gamma(1+iv_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (33.16)$$

С учетом этих равенств выражение (33.13) для β можно переписать в виде

$$\beta = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \pi v_1}{\pi v_1}} \left\{ C_1 e^{i \left[v_1 \ln \frac{x}{2} - \arg \Gamma(1+iv_1) \right]} + C_2 e^{-i \left[v_1 \ln \frac{x}{2} - \arg \Gamma(1+iv_1) \right]} \right\}. \quad (33.17)$$

Замечая, что в силу (32.2)

$$v_1 \ln \frac{x}{2} = v_1 \ln \frac{x_1}{2} + \frac{r_1 t}{2},$$

где x_1 — значение переменной x в момент $t=0$, соответствующий попаданию на границу атмосферы, из (33.17) получается следующее выражение для комплексного угла атаки σ :

$$\begin{aligned} \sigma = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \pi v_1}{\pi v_1}} \left\{ C_1 e^{i \left[v_1 \ln \frac{x_1}{2} - \arg \Gamma(1+iv_1) \right]} + \right. \\ \left. + C_2 e^{-i \left[r_1 t + v_1 \ln \frac{x_1}{2} - \arg \Gamma(1+iv_1) \right]} \right\}. \quad (33.18) \end{aligned}$$

Рассмотрим, далее, уравнение (33.8) при $g(t) \equiv 0$. Его общее решение при $g(t) \equiv 0$ может быть записано в виде

$$\sigma = \psi_v e^{-i\chi} + \psi_x e^{-i(r_1 t + \varphi)}, \quad (33.19)$$

где ψ_v , ψ_x , χ и φ — действительные константы, а момент $t = 0$ соответствует попаданию летательного аппарата на границу атмосферы.

При движении в пустоте ось летательного аппарата описывает круговой конус относительно неизменного в пространстве вектора кинетического момента (см. рис. 80). Отсюда ясно, что первый член формулы (33.19) определяет положение вектора кинетического момента, а второй член описывает движение относительно вектора кинетического момента. Соответственно ψ_v и ψ_x представляют собой углы, изображенные на рис. 80: ψ_v — угол между вектором скорости центра масс аппарата и вектором кинетического момента, а ψ_x — угол полураствора конуса, описываемого осью аппарата. Через χ обозначен угол между плоскостью траектории и плоскостью, проходящей через вектор скорости и вектор кинетического момента, а φ есть угол, определяющий положение оси летательного аппарата на поверхности конуса в начальный момент.

Как уже указывалось, угол φ является случайной величиной, все значения которой в интервале от $-\pi$ до π можно считать равновероятными. Случайными величинами являются также углы ψ_v и χ , определяющие положение вектора кинетического момента. Это связано с неопределенностью угла δ_0 , определяющего направление экваториальной компоненты вектора кинетического момента. Из схемы на рис. 80 видно, что вектор кинетического момента с одинаковой вероятностью может занимать любое положение на поверхности конуса, ось которого совпадает с осью летательного аппарата в момент отделения, а угол полураствора равен углу ψ_x . Вследствие этого угол ψ_v может иметь любое значение из интервала (см. рис. 80)

$$|\Delta\theta - \psi_x| \leq \psi_v \leq \Delta\theta + \psi_x. \quad (33.20)$$

Граничные значения угла χ также могут быть определены, однако они не нужны для дальнейшего анализа,

Выражения (33.19) и (33.18) описывают одно и то же движение при малых значениях t , когда влияние атмосферы еще не успело проявиться, и, следовательно, должны совпадать друг с другом. Из этого условия получаются следующие выражения для констант C_1 и C_2 :

$$C_1 = Ae^{i\xi}, \quad C_2 = Be^{i\eta}, \quad (33.21)$$

где

$$A = \Psi_v \sqrt{\frac{\pi v_1}{\operatorname{sh} \pi v_1}}, \quad \xi = -\chi - \left[v_1 \ln \frac{x_1}{2} - \arg \Gamma(1 + iv_1) \right],$$

$$B = \Psi_x \sqrt{\frac{\pi v_1}{\operatorname{sh} \pi v_1}}, \quad \eta = -\varphi + \left[v_1 \ln \frac{x_1}{2} - \arg \Gamma(1 + iv_1) \right].$$

В силу неопределенности значений углов χ и φ константы ξ и η также являются неопределенными величинами, причем константа η может иметь любое значение из интервала длиной 2π .

Получим, далее, формулы, описывающие изменение угла атаки аппарата в плотных слоях атмосферы. Воспользуемся для этого главными членами асимптотических разложений функций Бесселя при больших значениях x

$$\left. \begin{aligned} J_{iv_1}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{iv_1}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \\ J_{-iv_1}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x + \frac{iv_1}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (33.22)$$

Подставляя эти равенства в выражение (33.13) и учитывая формулы (33.21), получаем:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} [D_1 e^{i(x - \frac{\pi}{4})} + D_2 e^{-i(x - \frac{\pi}{4})}], \quad (33.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= C_1 e^{\frac{\pi v_1}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi v_1}{2}} = A e^{\frac{\pi v_1}{2}} e^{i\xi} + B e^{-\frac{\pi v_1}{2}} e^{i\eta}, \\ D_2 &= C_1 e^{-\frac{\pi v_1}{2}} + C_2 e^{\frac{\pi v_1}{2}} = A e^{-\frac{\pi v_1}{2}} e^{i\xi} + B e^{\frac{\pi v_1}{2}} e^{i\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (33.24)$$

Выражение (33.23) представляет собой сумму двух комплексных чисел, каждое из которых при изменении

x описывает окружности радиусов, соответственно равных $|D_1|$ и $|D_2|$, причем при увеличении x эти окружности обходятся в противоположных направлениях (рис. 148).

Вследствие этого при каждом увеличении x на 2π находятся такие значения x , при которых векторы, изображающие комплексные числа

$$D_1 e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \text{ и } D_2 e^{-i(x - \frac{\pi}{4})},$$

либо совпадают по направлению, либо направлены противоположно друг другу. Вслучае, когда эти векторы имеют одинаковое направление, модуль β , равный α , равняется $\alpha_{\max}$, в случаях же,

когда они противоположны, модуль β равняется $\alpha_{\min}$. Таким образом, выражения для $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} (|D_1| + |D_2|), \\ \alpha_{\min} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} ||D_1| - |D_2||. \end{aligned} \right\} \quad (33.25)$$

Определим $|D_1|$ и $|D_2|$. Из формул (33.24) видно, что каждая из величин D_1 и D_2 представляет собой сумму двух комплексных чисел, разность аргументов которых равняется $\eta - \xi$. Комплексные числа, входящие в равенства (33.24), изображены на рис. 149. Применяя теорему косинусов к заштрихованному на этом рисунке треугольнику, получаем выражения для $|D_1|$ и $|D_2|$ в виде

$$\left. \begin{aligned} |D_1| &= \sqrt{A^2 e^{\pi \nu_1} + B^2 e^{-\pi \nu_1} + 2AB \cos(\eta - \xi)}, \\ |D_2| &= \sqrt{A^2 e^{-\pi \nu_1} + B^2 e^{\pi \nu_1} + 2AB \cos(\eta - \xi)}. \end{aligned} \right\} \quad (33.26)$$

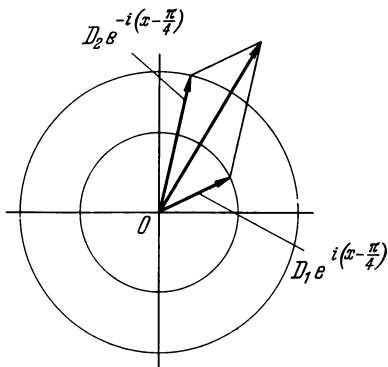


Рис. 148.

Из-за зависимости $|D_1|$ и $|D_2|$ от случайных параметров η и ξ , или, что то же самое, от случайных начальных условий φ и χ , минимальное $\alpha_{\min}$ и максимальное $\alpha_{\max}$ значения угла атаки за время

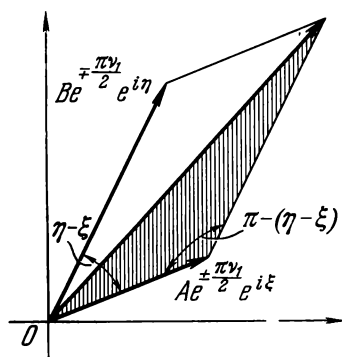


Рис. 149.

каждого колебания при фиксированном значении x изменяются в некоторых пределах. Найдем эти пределы. Так как A и B — положительные числа, то наибольшее значение $\alpha_{\max}$ достигается при $\cos(\eta - \xi) = 1$, а наименьшее — при $\cos(\eta - \xi) = -1$. При таких значениях косинуса выражения, стоящие под знаком корня в равенствах (33.26), превращаются в полный квадрат и после несложных преобразо-

ваний позволяют получить следующие формулы для предельных значений $\alpha_{\max}$ при случайном изменении φ и χ :

$$\left. \begin{aligned} \max_{\{\varphi, \chi\}} \alpha_{\max} &= (\psi_v + \psi_x) \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}}, \\ \min_{\{\varphi, \chi\}} \alpha_{\max} &= \max \left\{ \begin{aligned} &(\psi_v + \psi_x) \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi v_1}{2}}, \\ &|\psi_v - \psi_x| \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (33.27) \end{aligned} \right\}$$

При больших значениях параметра v_1 эти формулы переходят в формулу, которая может быть получена с помощью применения асимптотического метода на всей траектории снижения:

$$\alpha_{\max}^{(ac)} = (\psi_v + \psi_x) \sqrt{\frac{v_1}{x}}. \quad (33.28)$$

Этот результат позволяет предельные выражения для $\alpha_{\max}$

записать в более компактной форме:

$$\left. \begin{aligned} \max_{\{\varphi, x\}} \frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\max}^{(ac)}} &= \sqrt{\operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}}, \\ \min_{\{\varphi, x\}} \frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\max}^{(ac)}} &= \max \left\{ \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi v_1}{2}}, \frac{|\psi_v - \psi_x|}{\psi_v + \psi_x} \sqrt{\operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (33.29)$$

Предельные значения $\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\max}^{(ac)}}$ построены на рис. 150 в зависимости от v_1 для различных значений отношения $\frac{|\psi_v - \psi_x|}{\psi_v + \psi_x}$.

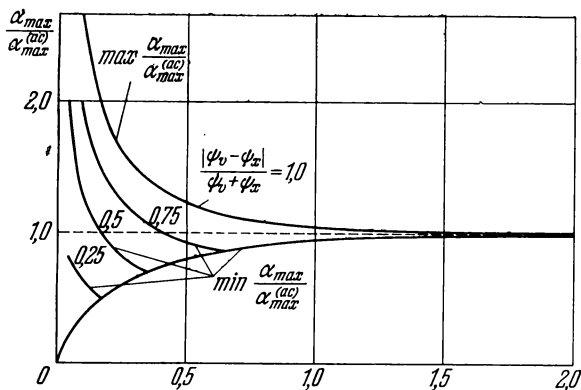


Рис. 150.

Чтобы получить предельные значения для $\alpha_{\min}$, перепишем второе выражение (33.25) следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \frac{||D_1|^2 - |D_2|^2|}{|D_1| + |D_2|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \frac{|A^2 - B^2| 2\operatorname{sh} \pi v_1}{(|D_1| + |D_2|)}. \end{aligned} \quad (33.30)$$

Из этой формулы и из формул (33.26) видно, что наибольшее значение $\alpha_{\min}$ достигается при $\cos(\eta - \xi) = -1$,

а наименьшее — при $\cos(\eta - \xi) = 1$. Пользуясь этим и подставляя выражения (33.26) для $|D_1|$ и $|D_2|$ и выражения (33.21) для A и B в последнюю формулу, после простых вычислений получаем искомые выражения для наибольшего и наименьшего значений $\alpha_{\min}$ при изменении случайных начальных условий φ и χ :

$$\begin{aligned} \max_{\{\varphi, \chi\}} \alpha_{\min} &= \min \left\{ (\psi_v + \psi_x) \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi v_1}{2}}, \right. \\ &\quad \left. |\psi_v - \psi_x| \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}}, \right\} \quad (33.31) \\ \min_{\{\varphi, \chi\}} \alpha_{\min} &= |\psi_v - \psi_x| \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi v_1}{2}}. \end{aligned}$$

При увеличении параметра v_1 наибольшее и наименьшее значения $\alpha_{\min}$ стремятся друг к другу и определяются формулой, которая может быть получена с помощью применения асимптотического метода на всей траектории снижения:

$$\alpha_{\min}^{(ac)} = |\psi_v - \psi_x| \sqrt{\frac{v_1}{x}}. \quad (33.32)$$

С использованием этого выражения формулы (33.31) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \max_{\{\varphi, \chi\}} \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\min}^{(ac)}} &= \min \left\{ \frac{(\psi_v + \psi_x) \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi v_1}{2}}}{|\psi_v - \psi_x| \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi v_1}{2}}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{|\psi_v - \psi_x| \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}}}{|\psi_v - \psi_x| \sqrt{\frac{v_1}{x}} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi v_1}{2}}}, \right\} \quad (33.33) \\ \min_{\{\varphi, \chi\}} \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\min}^{(ac)}} &= \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi v_1}{2}}. \end{aligned}$$

Предельные значения $\alpha_{\min}/\alpha_{\min}^{(ac)}$ построены на рис. 151.

Из графиков, приведенных на рис. 150 и 151, видно, что наибольшее влияние случайных начальных условий φ и χ (в основном φ) проявляется при малых значениях параметра v_1 . Это объясняется тем, что в этом случае основное влияние на изменение угла атаки оказывает его

значение в момент входа летательного аппарата в плотные слои атмосферы. При малых значениях v_1 начальная кинетическая энергия аппарата очень мала и не может сколько-нибудь существенно влиять на движение.

Результаты, получающиеся с помощью применения асимптотического метода на всей траектории снижения, изображены пунктирными линиями на рис. 150 и 151 и

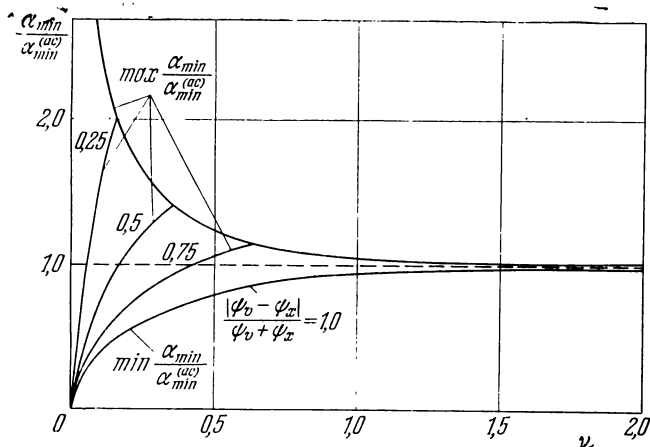


Рис. 151.

при малых значениях v_1 располагаются внутри возможного диапазона изменения предельных значений $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$. При увеличении параметра v_1 предельные значения $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ сближаются и, начиная с $v_1 \approx 1,5$, практически совпадают между собой и с результатами расчета по асимптотическому методу. Наибольший диапазон изменения предельных значений $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ получается при $\psi_v = \psi_x$, а наименьший — либо при $\psi_x = 0$, либо при $\psi_v = 0$. Первый случай соответствует такому движению летательного аппарата вне атмосферы, при котором вектор скорости его центра масс на границе атмосферы расположен на поверхности конуса, описываемого осью аппарата, а второй случай соответствует либо входу в атмосферу аппарата, стабилизированного вне атмосферы с помощью вращения относительно продольной оси, либо случаю, ког-

да ось конуса, описываемого вне атмосферы осью аппарата, совпадает с вектором скорости.

Из графиков, приведенных на рис. 151, видно, что при значении параметра v_1 , стремящемся в нулю, одновременно стремятся к нулю и значения $\alpha_{\min}$. В этом случае отношение $\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}}$ существенным образом изменяется в процессе снижения. Вне атмосферы оно может иметь конечные значения; в плотных же слоях атмосферы это отношение становится очень большим. При больших значениях параметра v_1 , когда справедливы формулы (33.28) и (33.32), имеет место равенство

$$\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}} = \frac{\psi_v + \psi_x}{|\psi_v - \psi_x|} = \frac{\alpha_{\max, 1}}{\alpha_{\min, 1}} \quad (33.34)$$

(индексом «1» здесь, так же как и ранее, обозначены значения $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ при движении летательного аппарата вне атмосферы). Таким образом, при больших значениях параметра v_1 в противоположность случаю малых значений этого параметра отношение $\alpha_{\max}/\alpha_{\min}$ при снижении не изменяется.

Сосредоточим, далее, основное внимание на выражении (33.27) для наибольшего значения $\alpha_{\max}$. Эта величина определяет действующую на летательный аппарат максимальную поперечную перегрузку. В предыдущей главе было выяснено, что выражение $\alpha_{\max}$, учитывающее изменение всех параметров траектории и демпфирование при движении в плотных слоях атмосферы на участке траектории $E'F$ (см. рис. 1), может быть записано в следующем виде:

$$\alpha_{\max}(\tau) = e^{\frac{-1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau} \frac{\text{const.}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} \quad (33.35)$$

Определяя константу в этом равенстве путем сопряжения этого выражения с первым выражением (33.27), получаем формулу для $\max_{\{\varphi, x\}} \alpha_{\max}$, связывающую параметры движе-

ния вне атмосферы с параметрами движения в плотных слоях атмосферы и учитывающую изменение всех параметров

траектории и демпфирование:

$$\max_{\{\varphi, \chi\}} \alpha_{\max} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} (\psi_v + \psi_x) \sqrt{\frac{kv_1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}}. \quad (33.36)$$

Вспомним, далее, что угол ψ_v также является случайной величиной, максимальное значение которой согласно неравенству (33.20) равняется $\Delta\theta + \psi_x$. Учитывая это, из формулы (33.36) можно получить выражение для введенного в предыдущей главе практического максимума $\alpha_{\max}$, обозначаемого через $\bar{\alpha}_{\max}$ и представляющего наибольшее значение $\alpha_{\max}$ при всех возможных значениях φ , χ и ψ_v :

$$\bar{\alpha}_{\max} = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt[4]{g(\tau)}} (\Delta\theta + 2\psi_x) \sqrt{\frac{kv_1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}}, \quad (33.37)$$

где

$$\psi_x \approx \frac{1}{\rho_1}, \quad \rho_1 = \frac{r_1}{\omega_1} = \frac{v_1}{\mu_1}.$$

Сопоставляя это выражение с выражением (29.2) для $\bar{\alpha}_{\max}$, получаем определенное по линейной теории аналитическое выражение для коэффициента $\bar{N}_{\max, \rho_1}$, позволяющее проанализировать влияние компонент вектора кинетического момента, приобретаемого при отделении, на движение летательного аппарата в плотных слоях атмосферы:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\max, \rho_1} &= (\Delta\theta + 2\psi_x) \sqrt{\frac{v_1}{8} \operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}} = \\ &= \left(\Delta\theta + 2 \frac{\mu_1}{v_1} \right) \sqrt{\frac{v_1}{8} \operatorname{cth} \frac{\pi v_1}{2}} = \left(\Delta\theta + \frac{2}{\rho_1} \right) \sqrt{\frac{\rho_1 \mu_1}{8} \operatorname{cth} \frac{\pi \rho_1 \mu_1}{2}} \end{aligned} \quad (33.38)$$

Второе из этих равенств показывает, что наибольшее значение коэффициента $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ достигается при наибольшем значении параметра μ_1 , пропорционального экваториальной компоненте вектора кинетического момента. Это находится в соответствии с результатами § 29.

Результаты расчета коэффициента $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ по последнему равенству (33.38) представлены при $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_1 = 0,5$ в зависимости от ρ_1 для различных значений $\Delta\theta$ на рис. 152 и 153. Точками для сравнения нанесены результаты расчетов по уточненному асимптотическому методу. Видно, что линейная теория движения, изложенная

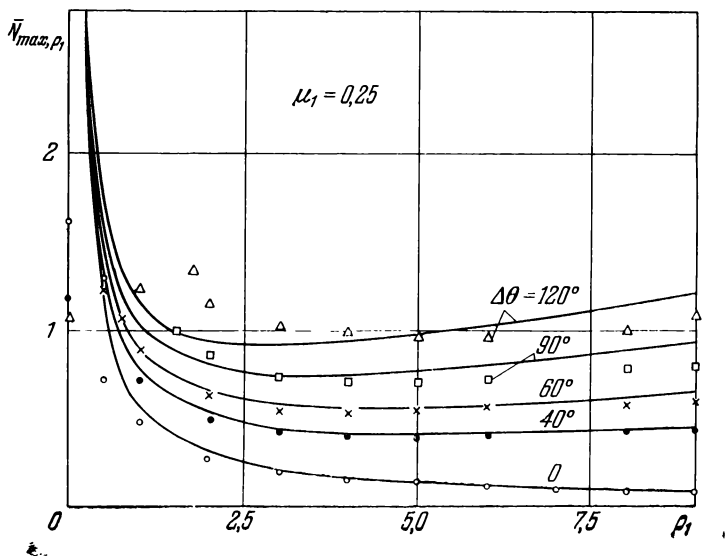


Рис. 152.

выше, имеет погрешность, не превышающую 10% при значениях углов $\Delta\theta$ и $\psi_x \approx 1/\rho_1$, не превышающих 60° и 45° . Таким образом, в случае пространственного движения линейная теория имеет довольно широкую область применимости.

Зависимость $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ от ρ_1 имеет минимум, объясняющийся противоположным влиянием вращения аппарата относительно продольной оси на максимальные значения угла атаки вне атмосферы и при движении в плотных слоях атмосферы. При движении вне атмосферы придание летательному аппарату вращения относительно продольной оси приводит к уменьшению угла ψ_x и соответственно к умень-

шению максимальных значений угла атаки. В то же время придание вращения создает у аппарата гироскопический момент, противодействующий стабилизирующему действию атмосферы. Вследствие этого придание вращения аппарату относительно продольной оси является эффективным

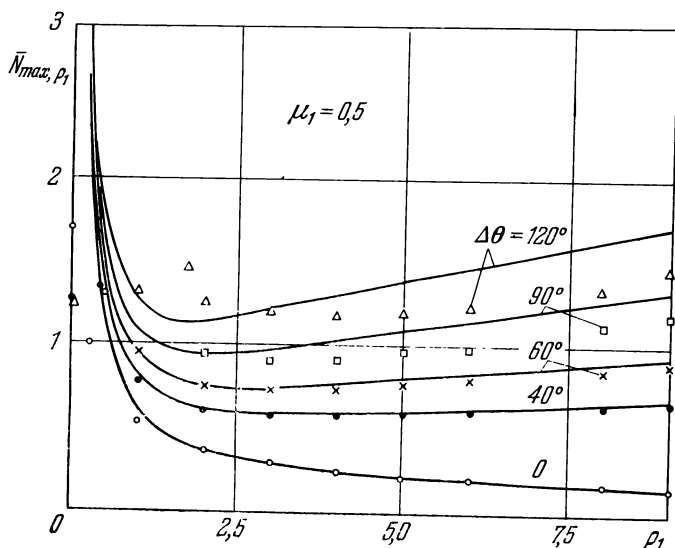


Рис. 153.

средством уменьшения $\bar{\alpha}_{\max}$ лишь при сравнительно малых значениях $\Delta\theta$.

В заключение заметим, что если аппарат специально не «закручивается» относительно продольной оси, то значения параметра ν_1 также являются случайными, но не превосходят значения $\nu_{1\max}$, которое можно считать известным. В связи с указанным характером зависимости коэффициента $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ от ν_1 при определении наибольшего значения этого коэффициента при всех возможных значениях параметра ν_1 коэффициент $N_{\max, \rho_1}$ следует рассчитывать при $\nu_1 = 0$ при $\nu_1 = \nu_{1\max}$. Больше из этих значений и будет являться наибольшим значением этого коэффициента.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАССЕИВАНИЯ ТОЧЕК ПРИЗЕМЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ВХОДЕ В АТМОСФЕРУ

§ 34. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТЫ РАССЕИВАНИЯ, СВЯЗАННОЙ С КОЛЕБАНИЯМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Во всех предыдущих главах движение летательных аппаратов при входе в атмосферу исследовалось без учета влияния взаимодействия движения относительно центра масс и движения центра масс. Это предположение основывается на том, что атмосфера начинает влиять на движение относительно центра масс со значительно больших высот, чем на движение центра масс. Другими словами, оно всегда хорошо выполняется на больших высотах, а не в особых случаях движения, когда при подходе к плотным слоям атмосферы колебания угла атаки в значительной степени затухают, и на всей остальной части траектории снижения. В особых же случаях движения, когда реализуются движения с зависаниями и движения близкие к ним, колебания угла атаки в плотных слоях атмосферы могут происходить со значительными амплитудами и учет взаимодействия колебаний угла атаки с движением центра масс летательного аппарата становится существенным. В частности, важным является определение компоненты рассеивания точек приземления по дальности, вызванной колебаниями угла атаки и связанным с этим изменением коэффициента сопротивления c_x . Без учета взаимодействия движения относительно центра масс и движения центра масс аппарата эта величина вообще определена быть не может.

Чтобы получить простую приближенную методику, позволяющую учесть взаимодействие колебаний угла атаки аппарата с движением его центра масс, разобьем траекторию снижения на два участка: участок траектории, расположенный в разреженных слоях атмосферы при $H \gg H_{гр}$, и участок траектории, расположенный при $H \leq H_{гр}$,

где $H_{\text{гр}}$ — некоторая граничная высота, об определении которой будет сказано ниже. При $H \geq H_{\text{гр}}$ учет взаимодействия между движением центра масс и движением относительно центра масс несуществен, и здесь применимы все результаты, полученные в предыдущих главах. При движении на этом участке траектории ее параметры могут рассчитываться при значении коэффициента c_x , соответствующем некоторому среднему значению угла атаки из интервала, заключенного между нулем и максимальными значениями угла атаки, которые достигаются на участке подхода к границе атмосферы, так как здесь величина коэффициента c_x мало влияет на траекторию. Движение относительно центра масс на этом участке траектории может быть изучено с помощью уточненного асимптотического метода. Для подавляющего большинства случаев можно считать, что к концу этого участка траектории летательный аппарат разворачивается носовой частью вперед и, следовательно, величина угла атаки не превосходит одного радиана. Поэтому для определения α_{max} или практического максимума этой величины $\bar{\alpha}_{\text{max}}$ при $H = H_{\text{гр}}$ можно воспользоваться формулами (27.22) или (29.2), полученными с помощью уточненного асимптотического метода. Одновременно можно считать, что тот диапазон высот, на котором могут нарушаться условия применимости асимптотического метода, располагается на высотах, превышающих высоту $H_{\text{гр}}$. Таким образом, в качестве высоты $H_{\text{гр}}$ выбирается такая высота, ниже которой всегда применим асимптотический метод и значения угла атаки не превосходят одного радиана. Расчеты, проведенные для ряда типичных случаев, показывают, что в качестве высоты $H_{\text{гр}}$ можно принять высоту порядка $70 \div 80$ км.

На участке траектории, расположенном при $H \leq H_{\text{гр}}$, взаимодействие между движением относительно центра масс и движением центра масс аппарата в ряде случаев необходимо учитывать. Более того, это всегда необходимо делать, когда требуется оценить долю рассеивания точек приземления по дальности, связанную с колебаниями аппарата относительно центра масс. Непосредственное решение этой задачи с помощью численного интегрирования полных уравнений движения (6.1) требует чрезмерно большого количества машинного времени, так как именно на

этом участке траектории решение содержит высокочастотные компоненты. Поэтому эффективным средством решения этой задачи является использование асимптотического метода, позволяющего составить осредненные уравнения для асимптотических решений, описывающие изменение медленно изменяющихся компонент решения $\alpha_{\max}(\tau)$, $\alpha_{\min}(\tau)$, $T(\tau)$ и всех осредненных компонент траектории центра масс аппарата.

Рассмотрим прежде всего группу уравнений системы (6.1) для функций x_i ($i = 1, \dots, 6$), производные которых представляют собой величины порядка ε . В случае осесимметричного летательного аппарата правые части этих уравнений представляют собой четные функции угла атаки. При $0 \leq \alpha \leq 1$ можно с достаточной точностью аппроксимировать эти функции следующим образом:

$$X_i(x_1, \dots, x_6, \alpha) = X_{i0}(x_1, \dots, x_6) + X_{i2}(x_1, \dots, x_6) \alpha^2 \Big\} \\ (i = 1, \dots, 6), \quad (34.1)$$

где функции X_{i0} и X_{i2} определяются из условий наилучшего приближения функций (6.2) этим выражением.

Далее, в соответствии с результатами сравнений точных и приближенных представлений решения эталонного уравнения (6.6), проведенных в § 11 для плоского движения и в § 21 для регулярных прецессий с медленно изменяющимися параметрами, можно при $0 \leq \alpha \leq 1$ эталонное уравнение взять в упрощенной форме, оставив в нем лишь главные члены при малых α :

$$\omega^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} - \frac{(G-r)^2}{\alpha^3} + g_r \alpha = 0, \quad (34.2)$$

где

$$g_r = g(\tau) + \frac{G' + r'}{15} + \frac{7}{60} Gr, \\ g(\tau) = -m_z^\alpha \Big|_{\alpha=0} \frac{qSL}{J_z}.$$

Решение этого уравнения можно искать в следующем виде:

$$\alpha = \sqrt{A + B \sin^2 \varphi}, \quad (34.3)$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — функции, не зависящие от φ и подлежащие определению. Эти функции можно считать неотрицательными. Заметим, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max}(\tau) &= \sqrt{\tilde{A} + \tilde{B}}, \\ \alpha_{\min}(\tau) &= \sqrt{\tilde{A}}. \end{aligned} \right\} \quad (34.4)$$

Чтобы получить соотношения для функций $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, будем исходить из интеграла энергии для уравнения (34.2). Этот интеграл записывается в виде

$$\omega^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{(G - r)^2}{\alpha^2} + g_r x^2 = 2E, \quad (34.5)$$

где E — новая произвольная функция, также как $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, не зависящая от φ . Из (34.3) имеем:

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \tilde{B} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (34.6)$$

Подставляя равенства (34.3) и (34.6) в уравнение (34.5), после простых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \omega^2 \tilde{B}^2 \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) + (G - r)^2 + \\ + [g_r (\tilde{A} + \tilde{B} \sin^2 \varphi) - 2E] (\tilde{A} + \tilde{B} \sin^2 \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (34.7)$$

Это выражение представляет собой полином второй степени относительно $\sin^2 \varphi$. Чтобы он тождественно был равен нулю, достаточно потребовать, чтобы он был равен нулю при некоторых трех значениях аргумента, например при $\sin^2 \varphi = \infty$, $\sin^2 \varphi = 0$ и $\sin^2 \varphi = 1$. Подставляя эти значения в равенство (34.7), получаем:

$$\omega = \sqrt{g_r}, \quad (34.8)$$

$$\tilde{A} (g_r \tilde{A} - 2E) + (G - r)^2 = 0, \quad (34.9)$$

$$(\tilde{A} + \tilde{B}) [g_r (\tilde{A} + \tilde{B}) - 2E] + (G - r)^2 = 0. \quad (34.10)$$

Из последних двух равенств видно, что функции $\tilde{A} = \alpha_{\min}^2$ и $\tilde{A} + \tilde{B} = \alpha_{\max}^2$ являются корнями следующего уравнения:

$$g_r v^2 - 2Ev + (G - r)^2 = 0. \quad (34.11)$$

Из свойств корней этого уравнения следуют равенства

$$\alpha_{\max}^2 + \alpha_{\min}^2 = 2\tilde{A} + \tilde{B} = \frac{2E}{g_r}, \quad (34.12)$$

$$\alpha_{\max}^2 \alpha_{\min}^2 = \tilde{A}(\tilde{A} + \tilde{B}) = \frac{(G-r)^2}{g_r}. \quad (34.13)$$

Из последнего равенства видно, что функция $\alpha_{\min}$ обращается в нуль одновременно с обращением в нуль разности $G - r$, то есть функция $\alpha_{\min}$ является малой величиной в двух случаях: либо при малых значениях функций G и r , которые при этом могут быть и не равны друг другу, либо же когда G приблизительно равняется r , если эти величины не малы. Первый из этих случаев достигается при малых значениях параметра ν_1 и был рассмотрен в предыдущем параграфе. Решая уравнение (34.11), получаем выражение для $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max}^2 &= \frac{E}{g_r} + \sqrt{\left(\frac{E}{g_r}\right)^2 - \frac{(G-r)^2}{g_r}} = \tilde{A} + \tilde{B}, \\ \alpha_{\min}^2 &= \frac{E}{g_r} - \sqrt{\left(\frac{E}{g_r}\right)^2 - \frac{(G-r)^2}{g_r}} = \tilde{A}. \end{aligned} \right\} \quad (34.14)$$

Установленные свойства решений эталонного уравнения (34.2) потребуются при составлении системы осредненных уравнений. Составим прежде всего осредненные уравнения для определения осредненных значений функций X_i ($i = 1, \dots, 6$). Этими уравнениями являются условия периодичности (6.17). Чтобы их записать в компактной форме, необходимо вычислить входящие в них интегралы. Пользуясь равенствами (34.1), (34.3) и (34.4), можем написать:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{T_\varphi} \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} X_i d\varphi &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [X_{i0} + X_{i2}(\tilde{A} + \tilde{B} \sin^2 \varphi)] d\varphi = \\ &= X_{i0} + X_{i2} \left(\frac{2\tilde{A} + \tilde{B}}{2} \right) = X_{i0} + X_{i2} \left(\frac{\alpha_{\max}^2 + \alpha_{\min}^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (34.15)$$

Из последней формулы видно, что осредненное значение функций X_i представляет собой значение этой функции,

вычисленное при α , равном корню квадратному из полусуммы квадратов $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$. Таким образом, система осредненных уравнений для функций X_i записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_i}{d\tau} + X_i \left(x_1, x_2, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_{\max}^2 + \alpha_{\min}^2}{2}} \right) &= 0 \\ (i = 1, \dots, 6). \end{aligned} \right\} \quad (34.16)$$

Напомним, что функции $X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ определяются равенствами (6.2).

Следует отметить, что из равенств (34.1) следует тождество

$$\begin{aligned} X_i \left(x_1, x_2, \dots, \sqrt{\frac{\alpha_{\max}^2 + \alpha_{\min}^2}{2}} \right) &\equiv \\ &\equiv \frac{X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha_{\min}) + X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha_{\max})}{2} \quad (i = 1, \dots, 6). \end{aligned}$$

Таким образом, осредненное значение функций $X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ одновременно равняется среднему арифметическому из значений этих функций при $\alpha = \alpha_{\min}$ и $\alpha = \alpha_{\max}$.

Входящие сюда функции $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ должны быть определены из свойств решений первого уравнения системы (6.1), определяющего изменение угла атаки. Формула (34.13) представляет собой одну связь между функциями $\alpha_{\max}$, $\alpha_{\min}$ и функциями X_i . Следовательно, чтобы решить задачу, необходимо составить еще только одно уравнение. Таким уравнением является условие периодичности, соответствующее уравнению для угла атаки. Возьмем его в форме, данной равенством (6.16). Вычислим последовательно интегралы, входящие в равенство (6.16). Определим прежде всего выражение для адиабатического инварианта D . Из равенств (34.3), (34.4), (34.6) и (34.8) имеем:

$$\begin{aligned} D &= \omega \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi = \sqrt{g_r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tilde{B} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\tilde{A} + \tilde{B} \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{4} \sqrt{g_r} [2\tilde{A} + \tilde{B} - 2\sqrt{\tilde{A}(\tilde{A} + \tilde{B})}]. \end{aligned} \quad (34.17)$$

Используя формулы (34.12) и (34.13), последнее равенство нетрудно преобразовать к одной из следующих форм:

$$D = \frac{\pi}{2 \sqrt{g_r}} (E - |G - r| \sqrt{g_r}) = \quad (34.18)$$

$$= \frac{\pi \sqrt{g_r}}{4} (\alpha_{\max} - \alpha_{\min})^2. \quad (34.19)$$

Вычислим, далее, второй интеграл в равенстве (6.16). Аналогично предположению, сделанному при вычислении средних значений функций X_i , будем считать, что при $0 \leq \alpha \leq 1$ функция $f_z(x_1, \dots, x_6, \alpha)$ может быть аппроксимирована формулой

$$f_z(x_1, \dots, x_6, \alpha) = f_{z_0}(x_1, \dots, x_6) + f_{z_2}(x_1, \dots, x_6) \alpha^2. \quad (34.20)$$

Из формул (34.20), (34.8) и (34.6) следуют равенства

$$\begin{aligned} \omega \int_0^{\frac{T_\Phi}{2}} f_z \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \Phi} \right)^2 d\Phi &= f_{z0} D + \frac{\pi}{16} f_{z2} \sqrt{g_r} B^2 = \\ &= f_{z0} D + \frac{\pi}{16} f_{z2} \sqrt{g_r} (\alpha_{\max}^2 - \alpha_{\min}^2)^2. \end{aligned}$$

Используя выражение (34.19), для D окончательно получаем:

$$\omega \int_0^{\frac{T_\Phi}{2}} f_z \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \Phi} \right)^2 d\Phi = D f_z \left(x_1, x_2, \dots, \frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2} \right). \quad (34.21)$$

Таким образом, осредненное значение функции $f_z(x_1, x_2, \dots, \alpha)$ равняется ее значению, вычисленному при α , равном среднему арифметическому из значений $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$.

Перейдем, далее, к вычислению слагаемых в условии периодичности (6.16), учитывающих работу вариаций суммарного восстанавливающего момента за половину периода колебаний. Вычислим прежде всего x_{i1} — колебательные поправки к асимптотическим решениям, определяемые формулами (6.14). Входящие в формулы (6.14) главные члены асимптотических решений x'_{i0} определяются

формулами (6.17). С учетом равенств (34.1), (34.3), (34.8) и (34.15) выражения для x_{i1} преобразуются к следующему виду:

$$x_{i1} = \frac{X_{i2}\tilde{B}}{4\sqrt{g_r}} \sin 2\varphi \quad (i = 1, \dots, 6). \quad (34.22)$$

Из этой формулы видно, что в тех случаях, когда правые части уравнений для x_i системы (6.1) не зависят от α , то X_{i2} и одновременно x_{i1} равняются нулю. Из выражений (6.2) видно, что от α зависят только правые части уравнений для G , r и V . Вследствие этого от нуля отличны функции x_{i1} только при $i = 1, 2, 3$.

Введем более наглядные обозначения:

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &= G_1, & x_{21} &= r_1, & x_{31} &= V_1, \\ \bar{X}_{12} &= X_G^{(2)}, & X_{22} &= X_r^{(2)}, & X_{32} &= X_V^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (34.23)$$

С помощью этих обозначений и формул (34.22) интересующие нас слагаемые в условии периодичности (6.16) могут быть записаны в виде

$$\sum_{k=1}^6 \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\tilde{B}}{4\sqrt{g_r}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\partial M_\Sigma}{\partial G} X_G^{(2)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial M_\Sigma}{\partial r} X_r^{(2)} + \frac{\partial M_\Sigma}{\partial V} X_V^{(2)} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \sin 2\varphi d\varphi. \quad (34.24)$$

Входящие сюда производные от M_Σ для случая эталонного уравнения (34.2), записанного с учетом лишь главных членов при малых α , определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_\Sigma}{\partial G} &= -\frac{2(G-r)}{\alpha^3} + \frac{\partial g_r}{\partial G} \alpha, \\ \frac{\partial M_\Sigma}{\partial r} &= \frac{2(G-r)}{\alpha^3} + \frac{\partial g_r}{\partial r} \alpha, \\ \frac{\partial M_\Sigma}{\partial V} &= \frac{\partial g_r}{\partial V} \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (34.25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_r}{\partial G} &= \frac{2}{15} \left(G + \frac{7}{8} r \right), \\ \frac{\partial g_r}{\partial r} &= \frac{2}{15} \left(r + \frac{7}{8} G \right), \\ \frac{\partial g_r}{\partial V} &= \frac{2g}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (34.26)$$

Подставляя равенства (34.25) в правую часть выражения (34.24), получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi &= \frac{\tilde{B}}{4 \sqrt{g_r}} \left\{ 2 (G - r) [X_r^{(2)} - X_G^{(2)}] \times \right. \\ &\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{\alpha^3} \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \left[\frac{\partial g_r}{\partial G} X_G^{(2)} + \frac{\partial g_r}{\partial r} X_r^{(2)} + \frac{\partial g_r}{\partial V} X_V^{(2)} \right] \times \\ &\times \left. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \sin 2\varphi d\varphi \right\}. \quad (34.27) \end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы с учетом равенств (34.3), (34.6), (34.12), (34.13), (34.17) и (34.19) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{\alpha^3} \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \frac{\partial \frac{1}{\alpha^2}}{\partial \varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi}{\alpha^2} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi}{\tilde{A} + \tilde{B} \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \pi \left[\frac{2\tilde{A} + \tilde{B} - 2 \sqrt{\tilde{A}(\tilde{A} + \tilde{B})}}{2\tilde{B} \sqrt{\tilde{A}(\tilde{A} + \tilde{B})}} \right] = \frac{2D}{\tilde{B} |G - r|}, \quad (34.28) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\tilde{B}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi \tilde{B}}{8}. \quad (34.29)$$

Подставляя эти выражения в формулу (34.27), окончательно получаем:

$$\sum_{k=1}^6 \int_0^{\frac{T_\varphi}{2}} M_{\Sigma, x_k} x_{k1} \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = D \left\{ \frac{(G-r) [X_r^{(2)} - X_G^{(2)}]}{|G-r| \sqrt{g_r}} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial g_r}{\partial G} X_G^{(2)} + \frac{\partial g_r}{\partial r} X_r^{(2)} + \frac{\partial g_r}{\partial V} X_V^{(2)} \right] \left(\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2} \right)^2 \frac{1}{2g_r} \right\}. \quad (34.30)$$

Теперь все слагаемые, входящие в условие периодичности (6.16), вычислены и можно выписать это условие. Используя выражения (34.21) и (34.30), условие периодичности (6.16) для рассматриваемого случая можно записать в виде

$$\frac{dD}{d\tau} + F_z(x_1, x_2, \dots, \alpha_{\max}, \alpha_{\min}) D = 0, \quad (34.31)$$

где

$$F_z(x_1, x_2, \dots, \alpha_{\max}, \alpha_{\min}) = \\ = f_z \left(x_1, x_2, \dots, \frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2} \right) + \frac{(G-r) [X_r^{(2)} - X_G^{(2)}]}{|G-r| \sqrt{g_r}} + \\ + \left[\frac{\partial g_r}{\partial G} X_G^{(2)} + \frac{\partial g_r}{\partial r} X_r^{(2)} + \frac{\partial g_r}{\partial V} X_V^{(2)} \right] \left(\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2} \right)^2 \frac{1}{2g_r}.$$

Система уравнений, состоящая из уравнений (34.16) и (34.31), представляет собой искомую систему уравнений для медленно изменяющихся компонент решения при движении летательного аппарата при $H \leq H_{\text{гр}}$. Входящие в эту систему функции $\alpha_{\max}$ и $\alpha_{\min}$ выражаются через D с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\max} &= \sqrt{\frac{1}{V g_r} \left\{ \frac{2D}{\pi} + |G-r| + \sqrt{\frac{4D}{\pi} \left(\frac{D}{\pi} + |G-r| \right)} \right\}}, \\ \alpha_{\min} &= \frac{|G-r|}{\alpha_{\max} \sqrt{g_r}}. \end{aligned} \right\} \quad (34.32)$$

Эти формулы являются простым следствием формул (34.13), (34.18) и (34.14).

Начальные условия для системы осредненных уравнений (34.16) и (34.31) определяются по результатам решения задачи для участка траектории, расположенного при $H \geq H_{\text{гр}}$. Значения параметров траектории в конце этого участка определяются в результате интегрирования уравнений движения центра масс при некотором среднем значении s_x . Значения функций G и r можно считать равными их значениям на границе атмосферы, определяемым формулами (24.2). Величина α_{max} при $H = H_{\text{гр}}$ определяется по формуле (27.22), полученной с помощью уточненного асимптотического метода. При известном значении α_{max} при $H = H_{\text{гр}}$ можно определить значение адиабатического инварианта D в этот момент с помощью формулы

$$D = \frac{\pi \sqrt{g r}}{4} \left(\alpha_{\text{max}} - \frac{|G - r|}{\alpha_{\text{max}} \sqrt{g r}} \right)^2. \quad (34.33)$$

Эта формула представляет собой результат комбинации формулы (34.19) и второй из формул (34.32). Таким образом, все начальные условия для системы осредненных уравнений (34.16) и (34.31) можно считать известными и эта система уравнений может быть проинтегрирована. Интегрирование этой системы уравнений требует столько же машинного времени, сколько необходимо для интегрирования обычной системы уравнений движения центра масс аппарата. Вследствие этого использование осредненной системы уравнений позволяет сократить необходимое для расчетов машинное время в несколько десятков раз.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим вопрос об определении компоненты рассеивания точек приземления, обусловленной движением летательного аппарата относительно центра масс. В результате интегрирования уравнений движения значения дальности $L^{(0)}$ в момент приземления летательного аппарата является величиной, зависящей от введенных ранее случайных параметров φ и δ_0 , первый из которых определяет положение оси летательного аппарата на поверхности конуса, который ось аппарата описывает при движении вне атмосферы, а второй — направление поперечной компоненты вектора кинетического момента. Вследствие этого значения $L^{(0)}$

будут заключены внутри некоторого интервала:

$$L_{\min}^{(0)} \leq L^{(0)}(\varphi, \delta_0) \leq L_{\max}^{(0)}. \quad (34.34)$$

Однако в тех случаях, когда возможны движения с зависаниями, нижняя граница этого интервала может

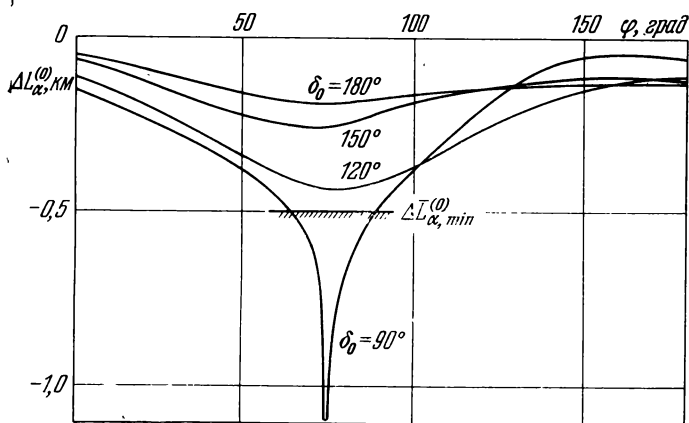


Рис. 154.

реализовываться сочень малой вероятностью. Для иллюстрации этого на рис. 154 приведен примерный вид зависимости функции

$$\Delta L_{\alpha}^{(0)}(\varphi, \delta_0) = L^{(0)}(\varphi, \delta_0) - L^{(0)}|_{\alpha=0}, \quad (34.35)$$

определяющей отклонение точки падения от номинального значения, рассчитываемого при $\alpha = 0$. На кривой, соответствующей $\delta_0 = 90^\circ$, имеются значения φ , при которых возможны движения с зависанием и близкие к ним. Этим движениям соответствуют точки, лежащие в окрестности весьма острого минимума этой зависимости.

В связи с этим аналогично тому, как это было сделано в § 12, 23 и 28 при определении максимальных значений угла атаки, целесообразно введение понятия *практического минимума* величины $\Delta L_{\alpha}^{(0)}$ или величины $L^{(0)}$, который можно определить как такую величину, значения меньше

которой могут быть лишь с вероятностью, равной одному проценту. Обозначим практический минимум величин $L^{(0)}$ и $\Delta L_x^{(0)}$ чертой сверху. Значение $\Delta \bar{L}_{\alpha, \min}^{(0)}$ также указано на рис. 154. Видно, что оно довольно заметно отличается от минимально возможных значений $\Delta L_x^{(0)}$. Определение практического максимума зависимости $\Delta L_x^{(0)}(\varphi, \delta_0)$ производится аналогично, однако во введении этого понятия нет особой необходимости, так как практический максимум зависимости $\Delta L_x^{(0)}(\varphi, \delta_0)$ весьма близок к максимально возможному значению этой величины.

В общем случае при не малых значениях скорости вращения летательного аппарата вне атмосферы для определения $\Delta L_{\alpha, \max}^{(0)}$ и $\Delta \bar{L}_{\alpha, \min}^{(0)}$ надо производить расчеты зависимостей $\Delta L_x^{(0)}$ от φ и δ_0 и определять практические граничные значения этой величины точно так же, как это описано в § 28 в задаче определения практического максимума коэффициента $N_{\max}$. Это требует довольно большого количества расчетов, что делает особенно оправданным использование осредненной системы уравнений. В случае же малых значений скорости вращения летательного аппарата вне атмосферы задача существенно упрощается вследствие того, что можно непосредственно использовать аналитические и численные результаты, полученные в § 28.

Как было указано в предыдущей главе, при малых скоростях вращения летательного аппарата вне атмосферы значения $\alpha_{\min}$ при входе в плотные слои атмосферы оказываются близкими к нулю. Вследствие этого значения $\Delta \bar{L}_{\alpha, \min}^{(0)}$ достигаются в тех случаях, когда при снижении колебания угла атаки происходят с наибольшими амплитудами, то есть в случаях, когда достигается практический максимум $\alpha_{\max} = \bar{\alpha}_{\max}$.

Таким образом, при малых скоростях вращения летательного аппарата вне атмосферы значение $\Delta \bar{L}_{\alpha, \min}^{(0)}$ определяется с помощью одного просчета системы уравнений (34.16) и (34.31) при начальном значении для $\alpha_{\max} = \bar{\alpha}_{\max}$, определяемом с помощью формулы (29.2) и графиков для значений коэффициента $\bar{N}_{\max, \rho_1}$, приведенных на рис. 126—132. Существенно упрощается также и определение $\Delta L_{x, \max}^{(0)}$. В случае малых скоростей вращения

летательного аппарата вне атмосферы номинальный режим, соответствующий $\alpha = 0$, реализуется с достаточно большой вероятностью, вследствие чего величина $\Delta L_{\alpha, \max}^{(0)}$ может быть приближенно принята равной нулю. Таким образом, в этом случае в качестве величины, определяющей отклонение точки падения от номинального значения за счет колебаний угла атаки, является величина $\Delta \bar{L}_{\alpha, \min}^{(0)}$. Эта величина зависит от компонент угловой скорости аппарата при движении его вне атмосферы. В том случае, когда эти величины также являются случайными, определение наибольшего по модулю значения $\Delta \bar{L}_{\alpha, \min}^{(0)}$ следует производить при таких значениях этих компонент, при которых достигается наибольшее значение коэффициента $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ в формуле (29.2) для $\bar{x}_{\max}$.

Полученные в настоящем параграфе осредненные уравнения, учитывающие движение летательного аппарата относительно центра масс, позволяют определить ту долю рассеивания точек приземления, расчет которой наиболее трудоемок.

К найденной таким образом величине рассеивания точек приземления следует добавить рассеивание, вызываемое неточностью вычисления начальных условий, параметров летательного аппарата, а также нестандартностью атмосферы. Эти компоненты рассеивания обычно определяются с помощью численного решения уравнений движения центра масс летательного аппарата.

Наконец, для полного решения задачи о рассеивании точек приземления следует определить смещение точек входа в атмосферу, которое возникает из-за возмущений, действующих на ракету-носитель на активном участке, методика расчета которого изложена в работе [1].

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ УГЛА АТАКИ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Рассматриваемое уравнение имеет вид [см. первое уравнение (27.9)]

$$\frac{d^3\alpha}{dv^3} + \bar{\omega}_1^2 \frac{(\rho_1 - \eta_1 \cos \alpha)(\eta_1 - \rho_1 \cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} + \bar{g}_1 e^{\frac{v}{\sqrt{1+\mu_1^2 + v_1^2}}} F(\alpha) = 0. \quad (1)$$

Численное интегрирование производилось методом Рунге—Кутты. Если (1) записать в виде

$$\frac{d^3\alpha}{dv^3} = \psi(v, \alpha), \quad (2)$$

о формулы этого метода можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n + h_\alpha \dot{\alpha}_n + \frac{h_\alpha^2}{2} \frac{k_1 + 2k_2}{3}, \\ \dot{\alpha}_{n+1} &= \dot{\alpha}_n + h_\alpha \frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \psi(v_n, \alpha_n), \\ k_2 &= \psi\left[v_n + \frac{h_\alpha}{2}, \alpha_n + \frac{h_\alpha}{2} \dot{\alpha}_n + \frac{1}{2} \left(\frac{h_\alpha}{2}\right)^2 k_1\right], \\ k_3 &= \psi\left(v_n + h_\alpha, \alpha_n + h_\alpha \dot{\alpha}_n + \frac{h_\alpha^2}{2} k_2\right), \end{aligned}$$

h_α — шаг интегрирования (точками обозначены производные по v).

Трудности, возникающие при численном интегрировании уравнения (1), связаны, во-первых, с уменьшением мгновенного периода колебаний по мере возрастания v и, во-вторых, с наличием особенностей при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$,

в окрестности которых производная $\frac{d^2\alpha}{dv^2}$ может иметь сколько угодно большое значение.

Первая и частично вторая трудности преодолевались с помощью проведения интегрирования с переменным шагом. Величина шага h_α определялась с помощью формулы

$$h_\alpha = \frac{k_\alpha}{\sqrt{\frac{\kappa}{V \sin \alpha_n} \left| \frac{d\alpha}{dv^2} \right|_n + \frac{v_n}{g_1 e} \sqrt{1 + \mu_1^2 + v_1^2} + \frac{v_1^2 + \mu_1^2}{4(1 + v_1^2 + \mu_1^2)}}, \quad (4)$$

где $\kappa \approx 1$, $k_\alpha \approx 0,1 \div 0,15$.

Такая сложная формула для h_α была взята для того, чтобы учесть изменение мгновенного периода колебаний при возрастании v .

Последнее слагаемое под знаком корня в (4) определяет период колебаний при малых v , второе слагаемое — при больших v , а первое слагаемое введено для того, чтобы автоматически уменьшить шаг интегрирования при подходе к особым точкам $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$. Однако с помощью одного лишь уменьшения шага интегрирования не удастся эффективно находить решения в случаях, когда α подходит слишком близко к $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, так как потребная величина шага оказывается слишком малой, вследствие чего потребное для численного интегрирования время оказывается чрезмерно большим. В связи с этим интегрирование с помощью формул (3) велось лишь до тех пор, пока все величины

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n, \quad \alpha_n + \frac{h_\alpha}{2} \dot{\alpha}_n + \frac{1}{2} \left(\frac{h_\alpha}{2} \right)^2 k_1, \\ \alpha_n + h_\alpha \dot{\alpha}_n + \frac{h_\alpha^2}{2} k_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

находились внутри интервала $\alpha_* < \alpha < \pi - \alpha_*$, где $\alpha_* \approx 0,001$. Если же значения величин (5) оказывались вне этого интервала, то использовались формулы, описывающие изменение $\alpha(v)$ в малой окрестности особых точек $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$. Такие формулы были получены с помощью предположения о том, что с момента попадания α в окрест-

ность особой точки до момента выхода из этой окрестности значение v при малых α_* изменяется на величину столь малую, что в уравнении (1) можно пренебречь изменением коэффициента, зависящего от v , и определить зависимость $\alpha(v)$, решив уравнение (1) при $v = v_n$. При $v = v_n$ уравнение (1) можно заменить следующим:

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{\bar{\omega}_1^2}{2} \left(\frac{\eta_1 - \rho_1 \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 + \bar{g}_1 e^{\frac{v_n}{\sqrt{1+\mu_1^2+v_1^2}}} \int F(\alpha) d\alpha = E, \quad (6)$$

где E — константа.

При значениях α , близких к нулю, это уравнение можно записать в виде

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{a_0}{\alpha^2} + a_2 \alpha^2 + \bar{g}_1 e^{\frac{v_n}{\sqrt{1+\mu_1^2+v_1^2}}} \alpha^2 = 2E, \quad (7)$$

где a_0 и a_2 определяются с помощью (12).

Аналогично при значениях α , близких к 180° , уравнение (6) можно привести к виду

$$\Delta^2 + \frac{a'_0}{\Delta^2} + a'_2 \Delta^2 + F_\alpha(180^\circ) \bar{g}_1 e^{\frac{v_n}{\sqrt{1+\mu_1^2+v_1^2}}} \Delta^2 = 2E, \quad (8)$$

где $\Delta = \pi - \alpha$, а константы a'_0 и a'_2 определяются по формулам (14).

В § 25 и 34 было показано, что решение уравнений (7) и (8) можно искать в виде

$$\alpha = \sqrt{m_0 + n \sin^2 k(v + \text{const})}, \quad (9)$$

где m_0 , n и k — постоянные величины.

Так как при малом α_* изменение v также мало, то вместо (9) можно взять более простое выражение

$$\alpha = \sqrt{m_0 + m_1(v + \text{const})^2}, \quad (10)$$

где $m_1 = nk^2$.

Если воспользоваться равенством (10), то для обхода особых точек получаются следующие формулы.

В случае, когда какая-либо из величин (5) попадает в окрестность $\alpha = 0$, то

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n, \\ \dot{\alpha}_{n+1} &= -\dot{\alpha}_n, \\ v_{n+1} &= v_n + 2 \sqrt{\frac{\alpha_n^2 - m_0}{m_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где m_0 и m_1 определяются с помощью последовательных вычислений по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \bar{\omega}_1^2 (\eta_1 - \rho_1)^2, \\ a_2 &= \bar{\omega}_1^2 \left(\frac{\eta_1^2 + \rho_1^2}{15} + \frac{7}{60} \eta_1 \rho_1 \right), \\ g_{n,1} &= a_2 + \bar{g}_1 e^{\frac{v_n}{\sqrt{1+\rho_1^2+v_1^2}}}, \\ e_n &= \dot{\alpha}_n^2 + \frac{a_0}{\alpha_n^2} + g_{n,1} \alpha_n^2, \\ m_1 &= \sqrt{e_n^2 - 4g_{n,1}a_0}, \\ m_0 &= \frac{2a_0}{e_n + m_1}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если же какая-либо из величин (5) попадает в окрестность $\alpha = \pi$, то формулы перехода от величин $\alpha_n, \dot{\alpha}_n, v_n$ к величинам $\alpha_{n+1}, \dot{\alpha}_{n+1}, v_{n+1}$ записываются в несколько измененном виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n, \\ \dot{\alpha}_{n+1} &= -\dot{\alpha}_n, \\ v_{n+1} &= v_n + 2 \sqrt{\frac{\Delta_n^2 - m'_0}{m'_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a'_0 &= \bar{\omega}_1^2 (\eta_1 + \rho_1)^2, \quad a'_2 = \bar{\omega}_1^2 \left(\frac{\eta_1^2 + \rho_1^2}{15} - \frac{7}{60} \eta_1 \rho_1 \right), \\ g'_{n,1} &= a'_2 + F_\alpha(\pi) \bar{g}_1 e^{\frac{v_n}{\sqrt{1+\mu_1^2+v_1^2}}}, \\ e'_n &= \alpha_n^2 + \frac{a'_0}{\Delta_n^2} + g'_{n,1} \Delta_n^2, \quad \Delta_n = \pi - \alpha_n, \\ m'_1 &= \sqrt{e'^2_n - 4\bar{g}'_{n,1} a'_0}, \quad m'_0 = \frac{2a'_0}{e'_n + m'_1}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Формулы (11) — (14) применимы при условиях

$$\sqrt{\frac{\alpha_n^2 - m_0}{m_1}} \ll 1, \quad \sqrt{\frac{\Delta_n^2 - m'_0}{m'_1}} \ll 1,$$

которые обычно выполняются при малом α_* .

Уравнение (1) можно также преобразовать к виду, не содержащему особенностей при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$, если ввести новую независимую переменную

$$u = \frac{\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{3}. \quad (15)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\alpha = \arccos \left\{ 2 \cos \left[\frac{\pi + \arccos(-3/u)}{3} \right] \right\}.$$

Из (15) получаем:

$$\frac{du}{dv} = \sin^3 \alpha \frac{d\alpha}{dv}.$$

После дифференцирования этого равенства получается выражение для $\frac{d^2 u}{dv^2}$, с учетом которого уравнение (1) записывается в форме, не содержащей особенностей при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u}{dv^2} - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \left(\frac{d\alpha}{dv} \right)^2 + \bar{\omega}_1^2 (\rho_1 - \eta_1 \cos \alpha) \times \\ & \times (\eta_1 - \rho_1 \cos \alpha) + \bar{g}_1 e^{\frac{v}{\sqrt{1+\mu_1^2+v_1^2}}} F(\alpha) \sin^3 \alpha = 0. \end{aligned}$$

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

D — адиабатический инвариант;

$$E(v) = \int_0^1 V \sqrt{\frac{1 - v\xi^2}{1 - \xi^2}} d\xi;$$

G_1 — значение функции G при подходе летательного аппарата к границе атмосферы;

$g(\tau) = -\frac{M_z^a|_{x=0}}{J_z}$, где M_z — размерный аэродинамический момент;

g_T — ускорение силы тяжести;

$$g_r = g(\tau) + \frac{1}{16} \left[(G+r)^2 + \frac{(G-r)^2}{15} \right];$$

H — высота полета;

I_x — момент инерции относительно продольной оси;

I_z — момент инерции относительно поперечной оси;

$I_z E$ — энергия летательного аппарата при его движении вокруг центра масс;

$I_z G$ — проекция вектора кинетического момента на направление касательной к траектории;

$I_z r$ — проекция вектора кинетического момента на ось летательного аппарата;

$J_{iv}(x)$ — функция Бесселя первого рода мнимого порядка;

$J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

$J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка;

$$k = \lambda_1 V_1 |\sin \theta_1|;$$

$$K(v) = \int_0^1 \frac{d\xi}{V(1 - \xi^2)(1 - v\xi^2)};$$

$L^{(0)}$ — значение продольной дальности в момент приземления летательного аппарата;

- $\bar{N}_{\max, \rho_1}$ — коэффициент в формуле для $\bar{\alpha}_{\max}$, учитывающий зависимость $\bar{\alpha}_{\max}$ от ρ_1, μ_1 и $\Delta\theta$ [см. формулу (29.2)];
 $Q_{\theta 0}$ — экваториальная компонента вектора начального кинетического момента;
 $Q_{x 0}$ — продольная компонента вектора начального кинетического момента;
 q — скоростной напор;
 r_1 — значение функции r при подходе летательного аппарата к границе атмосферы;
 T — мгновенный период колебаний;
 t — время;
 t_0 — момент отделения летательного аппарата, предназначенного для спуска, от носителя;
 t_1 — момент попадания летательного аппарата на границу атмосферы;
 t_2 — момент времени, начиная с которого значение угла атаки не превосходит одного радиана;
 t'_2 — момент времени, начиная с которого асимптотические решения становятся точными;
 V — скорость полета;
 x_* — значение переменной x в момент перехода вращательного движения в колебательное;
 $Y_0(x)$ — функция Бесселя второго рода нулевого порядка;
 $Y_1(x)$ — функция Бесселя второго рода первого порядка;
 α — угол атаки;
 $\alpha_{\max}$ — максимальное значение угла атаки за время каждого колебания;
 $\bar{\alpha}_{\max}$ — практически максимальное значение $\alpha_{\max}$;
 $\alpha_{\max, 1}$ — значение функции $\alpha_{\max}$ при подходе летательного аппарата к границе атмосферы;
 $\alpha_{\min}$ — минимальное значение угла атаки за время каждого колебания;
 $\alpha_{\min, 1}$ — значение функции $\alpha_{\min}$ при подходе летательного аппарата к границе атмосферы;
 α_* — значение угла атаки в момент перехода вращательного движения в колебательное;
 γ — угол между плоскостью траектории и плоскостью угла атаки;
 $\Delta L_{\alpha}^{(0)}$ — компонента рассеивания, связанная с колебаниями угла атаки;
 $\Delta\theta$ — полное изменение угла наклона траектории с момента отделения до момента входа в атмосферу;
 ε — малый параметр;
 θ — угол наклона траектории;
 λ — скорость прецессии;
 μ — скорость собственного вращения;

$$\mu_1 = \frac{Q_{\theta 0}}{J_z k} = \frac{\omega_1}{k};$$

ν — к квадрат модуля эллиптических функций Якоби;

$$\nu_1 = \frac{Q_{x0}}{J_z k} = \frac{r_1}{k};$$

$\rho(H)$ — плотность;

$$\rho_1 = \frac{Q_{x0}}{Q_{y0}};$$

$\tau = \varepsilon t$ — медленное время;

φ — фаза колебаний;

ψ_v, ψ_x, χ — углы, определяющие конус, описываемый осью летательного аппарата при его движении вне атмосферы (см. рис. 80);

Ω_0 — скорость вращения летательного аппарата вне атмосферы;

ω — мгновенная частота колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П., Баллистика управляемых ракет дальнего действия, Изд-во «Наука», 1966.
2. Аппель П., Теоретическая механика, т. I и II, Физматгиз, 1960.
3. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс, В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 1, Изд-во АН СССР, 1958.
4. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, Изд-во «Наука», 1965.
5. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, Гостехиздат, 1941.
6. Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1955.
7. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле, Украинский математический журнал, № 1, 1955.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1955.
9. Бриллюэн Л., Атом Бора, ОНТИ, 1935.
10. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В., Динамика пространственного движения самолета, Изд-во «Машиностроение», 1967.
11. Волосов В. М., Дифференциальные уравнения движения, содержащие параметры медленности, Доклады АН СССР, т. 106, № 1, 1956.
12. Волосов В. М., Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, Успехи математических наук, т. XVII, № 6, 1962.
13. Волосов В. М., Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением, Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 3, № 1, 1963.
14. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М., Теория полета неуправляемых ракет, Физматгиз, 1959.
15. Граммель Р., Гироскоп, его теория и применения, ИЛ, 1952.

16. Д о р о д н и ц ы н А. А., Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, Успехи математических наук, т. III, № 6, 1952.
17. Ж у р а в с к и й А. М., Справочник по эллиптическим функциям, Изд-во АН СССР, 1941.
18. К р ы л о в Н. М., Б о г о л ь о в Н. Н., Исследование продольной устойчивости аэроплана, Государственное авиационное и автотранспортное издательство, 1932.
19. К у з м а к Г. Е., Асимптотические решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, Труды III Всесоюзного математического съезда, т. 1, Изд-во АН СССР, 1956.
20. К у з м а к Г. Е., Асимптотические решения уравнения движения нелинейной колебательной системы с одной степенью свободы с медленно изменяющимися параметрами, Доклады АН СССР, т. 120, № 3, 1958.
21. К у з м а к Г. Е., Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, Прикладная математика и механика, т. XXIII, № 3, 1959.
22. К у з м а к Г. Е., О вычислении асимптотических решений, соответствующих незамкнутым интегральным кривым «эталонного уравнения», Доклады АН СССР, т. 125, № 5, 1959.
23. К у з м а к Г. Е., К вопросу о пространственном движении осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени, Доклады АН СССР, т. 132, № 3, 1960.
24. К у з м а к Г. Е., Движение осесимметричного твердого тела около неподвижной точки под воздействием моментов, медленно изменяющихся во времени, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1961.
25. К у з м а к Г. Е., К о п н и н Ю. М., Новая форма уравнений движения спутника и приложение ее к исследованию движений, близких к кеплеровым, Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 3, № 4, 1963.
26. Л у р ь е А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.
27. Л ы к о в а О. Б., О поведении решений дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит, Украинский математический журнал, № 4, 1957.
28. М а л к и н И. Г., Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949.
29. М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд-во АН УССР, 1955.
30. П о н т р я г и н Л. С., Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Изв. АН СССР, серия математическая, т. 21, № 5, 1957.
31. П о н т р я г и н Л. С., Р о д ы г и н Л. В., Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравне-

- ний с малым параметром при производных, Доклады АН СССР, т. 131, № 2, 1960.
32. Проблемы движения головной части ракет дальнего действия, Сборник переводов, ИЛ, 1959.
 33. Пугачев В. С., Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе, Труды ВВИА им. Жуковского, № 70, 1940.
 34. Пугачев В. С., Приближенный метод исследования плоских нелинейных колебаний опсрненного снаряда, Прикладная математика и механика, т. 1, № 1, 1946.
 35. Седов Л. И., Динамические эффекты в движении искусственных спутников Земли, В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 2, Изд-во АН СССР, 1958.
 36. Тихонов А. Н., О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Математический сборник, № 22/64, Изд-во АН СССР, 1948.
 37. Четаев Н. Г., О достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда, Прикладная математика и механика, т. VII, № 2, 1943.
 38. Ярошевский В. А., Применение асимптотического метода к некоторым задачам динамики летательных аппаратов, Инженерный журнал, № 2, 1962.
 39. Ярошевский В. А., Воейков В. В., Метод ускорения расчета быстрых квазипериодических движений на цифровых вычислительных машинах, Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 4, № 4, 1964.
 40. Allen H. J., Hypersonic flight and the re-entry problem, IAS, vol. 25, No. 4, 1958.
 41. Allen H. J., Eggers A., A study of the motion and aerodynamic heating of missiles entering the earth's atmosphere at high supersonic speeds, NACA TN, 4047, 1957.
 42. Auelman R. R., Angle of attack envelope for a spinning re-entry body, AIAA, vol. 3, No. 3, pp. 465—469, 1965.
 43. Campbell G. S., Analysis of large amplitude re-entry oscillations, ARS J., XI, vol. 31, No. 11, pp. 1590—1592, 1961.
 44. Dayman B., Brayshaw J. M. and Nelson D. A., The influence of shape on aerodynamic damping of oscillatory motion during planet atmosphere entry and measurement of pitch damping at large oscillation amplitudes, Advances in the Astronautical Sciences, vol. 13, Proc. of Ninth Annual Meeting of the Amer. Astronaut. Soc., 15—17, January 1963, Los Angeles, California, North Hollywood, 1963.
 45. Etkin B., Theoretical investigations of the dynamics of bodies entering the atmosphere, 5 p., Inst. of Aerophysics University of Toronto, UTIA, Rep. No. 80, 1962.
 46. Glover L. S., Effects on roll rate of mass and aerodynamic asymmetries for ballistic re-entry bodies, J. of Spacecraft and Rockets, III — IV, vol. 2, No. 2, p. 220—225, 1965.
 47. Greensite A. L., A closed-form solution for the oscillations of a vehicle entering a planetary atmosphere, IASS, VI, vol. 29, No. 6, p. 745—746, 1962.

48. K u z m a k G. E. and J a r o s h e v s k y V. A., Application of the asymptotic methods to some problems of the re-entry vehicles dynamics, Proceedings of the XIV-th International Astronautical Congress, Paris, 1963.
49. L a i t o n e E. V., Dynamic longitudinal stability equations for the re-entry ballistic missile, IAS, No. 2, 1959.
50. L a i t o n e E. V. and C o a k l e y T. J., Nonlinear dynamic stability of space vehicles entering or leaving an atmosphere, 48 p. (IAS, Raper No. 20), New York, 1962.
51. L e o n H., Angle of attack convergence of a spinning missile descending through the atmosphere, IAS, vol. 25, No. 8, 1958.
52. L o h H. T., Dynamics and thermodynamics of planetary entry, 1963.
53. M u r p h y C. H., Angular motion of a re-entering symmetric missile, AIAA, VIII, vol. 3, No. 7, pp. 1775—1882, 1965.
54. N o r l i n g R. A., Altitude of stabilisation for slowly tumbling re-entry vehicles, ARS I, XII, No. 12, pp. 1867—1870, 1962.
55. P e t e r s o n V. L. and T o b a c M., Theory of the tumbling and subsequent large-amplitude oscillations of vehicles entering planetary atmospheres, Pros. of the Aerospace Forum I session Presented of the IAS 31—27 Annual Meeting, New York, January 21—23, 1963.
56. P e t t u s J. J., Persistent re-entry vehicle roll resonance, 19 p. (AIAA, Paper No. 66-490), New York, 1966.
57. P o w e l l R. B. and S m i t h R. L., Dynamics of spinning re-entry bodies, 22 p. (AIAA, Paper No. 64-470), New York, 1964.
58. R e m m l e r K. L., Tumbling bodies entering the atmosphere, ARS J., vol. 32, No. 1, p. 92—95, 1962.
59. R o u x D., Etude a petites incidences de la stabilité d'une ogive animée d'une rotation moyenne onelevce, Tech. et Science Aéronautiques, VII—VIII, No. 4, pp. 285—293, 1961.
60. T o b a c M. and P e t e r s o n V. L., Correlation of angle-of-attack envelopes for spinning entry bodies, AIAA, XI, vol. 3, No. 11, p. 2166—2167, 1965.
61. W i e S. K., Stability of longitudinal dynamic motion of space vehicles entering the earth atmosphere, The Fourth Internat. Symposium on Space Technology and Science, Tokyo, 1962.

Георгий Евсеевич Кузмак

Динамика неуправляемого движения
летательных аппаратов при входе
в атмосферу

М., 1970 г., 348 стр. с илл.

Редактор Ю. Г. Гуревич

Техн. редактор В. Н. Кондакова

Корректоры С. Н. Емельянова, И. Б. Румянцев

Сдано в набор 4/XII 1969 г.

Подписано к печати 28/IV 1970 г. Бумага 84×108¹/₃₂.

Физ.-печ. л. 10,875. Условн. печ. л. 18,27.

Уч.-изд. л. 16,23. Тираж 2550 экз. Т-07828.

Цена книги 1 р. 58 к. Заказ № 3135.

Издательство «Наука»

Главная редакция

Физико-математической литературы

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука».

Москва, Шубинский пер., д. 16.