НЕЛИНЕЙНЫЙ
АНАЛИЗ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ,
В. Ш. БУРД,
Ю. С. КОЛЕСОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.2
К 78
УДК 517

Серия «Нелинейный анализ и его приложения»
выпускается под общей редакцией
Н. Н. Боголюбова, М. А. Красносельского, Ю. А. Митропольского.

Нелинейные почти периодические колебания. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов.

Настоящей монографией открывается новая серия, посвященная проблемам нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений, нелинейным колебаниям, современным методам их исследования, приложениям к задачам механики, физики и т. д.

В монографии развивается основанный на идеях функционального анализа метод интегральных уравнений исследования почти периодических (пп) решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первая часть книги (главы 1 и 2) посвящена линейным дифференциальным уравнениям с пп-коэффициентами. Устанавливаются эффективные критерии экспоненциальной дихотомии решений однородных уравнений Конструктируются и изучаются функции Грина дифференциальных операторов с пп-коэффициентами. Описываются классы операторов со знакопостоянными функциями Грина.

Во второй части книги (главы 3 и 4) рассматриваются нелинейные уравнения. Доказываются нелокальные теоремы существования пп-решений, дается оценка их числа, развиваются методы исследования их устойчивости. Подробно анализируется процесс рождения пп-решений из состояния равновесия. Указаны приложения к уравнениям автоматического регулирования, колебаниям различных маятников с вибрирующей точкой подвеса, с нитями переменной длины и др.

Книга предназначена специалистам в области дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа, теории колебаний.

2-2-3
40-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

Глава 1. **Линейные дифференциальные операторы с почти периодическими коэффициентами** 9

§ 1. Почти периодические функции 9

1.1. Пространства пп-функций (9). 1.2. Теорема об аппроксимации (11). 1.3. Дифференцирование и интегрирование пп-функций (12). 1.4. Оператор суперпозиции (13).

§ 2. Регулярные пп-операторы 14

2.1. Постановка задачи (14). 2.2. Теорема Е. Эсклангона (17). 2.3. Существование ограниченных решений при ограниченных правых частях (20). 2.4. Теорема единственности (22). 2.5. Теорема об эквивалентности (26).

§ 3. Поведение решений однородного уравнения 29

3.1. Первая теорема о дихотомии (29). 3.2. Экспоненциальная дихотомия (31). 3.3. Равномерность дихотомии (33).

§ 4. Функция Грина 36

4.1. Описание функции Грина (36). 4.2. Построение функции Грина (37). 4.3. Зависимость функции Грина от параметра (39). 4.4. Примеры (43). 4.5. Функция Грина периодической краевой задачи (46).

§ 5. Положительность функции Грина 47

5.1. Конусы и клинья (47). 5.2. Функционалы, выделяющие конус (48). 5.3. Пространство конусов (51). 5.4. Конусы $\widetilde{K}(t)$ (53). 5.5. Функционалы, выделяющие $K(t)$ (57). 5.6. Линейные положительные операторы (59). 5.7. Знакопостоянные функции Грина (60). 5.8. Обращение теорем о положительности интегрального оператора (65).

Глава 2. **Анализ конкретных классов пп-операторов** 67

§ 6. Системы уравнений первого порядка 67

6.1. Общие условия положительности функции Грина (67). 6.2. Производные Гато (69). 6.3. Положительность оператора сдвига (74). 6.4. Положительность оператора сдвига относительно граненого конуса (79). 6.5. О построении конусной функции $K(t)$ (81). 6.6. Об устойчивости решений однородного уравнения (84).

§ 7. Системы уравнений второго порядка 87

7.1. Уравнения с постоянными коэффициентами (87). 7.2. Мажорантный признак (88). 7.3. Использование систем первого порядка (91). 7.4. Сильная положительность (99). 7.5. Снова о системах с постоянными коэффициентами (104). 7.6. Замечание о системах первого порядка (106).

§ 8. Скалярные уравнения высших порядков 106

8.1. Постановка задачи (106). 8.2. Одно необходимое условие знакопостоянства функции Грина пп-оператора (8.10) (109). 8.3. Достаточные условия знакопостоянства функции Грина пп-оператора (8.10) (113). 8.4. Частные классы операторов с постоянными коэффициентами (120). 8.5. Операторы с переменными коэффициентами (121).

§ 9. Скалярные пп-операторы второго порядка 128

9.1. Связь с осцилляционными свойствами решений однородного уравнения (128). 9.2. Уравнение Риккати (130). 9.3. Теоремы о дифференциальных неравенствах для уравнения Риккати (134). 9.4. Почти периодические решения уравнения Риккати (137). 9.5. Устойчивость решений уравнения (9.2) (142). 9.6. Необходимые и достаточные условия существования и знакопостоянства функции Грина (145). 9.7. Завершение доказательства теоремы 9.1 (147). 9.8. Интегральный критерий неосцилляционности (147).

Глава 3. **Нелокальные теоремы о почти периодических решениях нелинейных уравнений** 150

§ 10. Общие теоремы существования 150

10.1. Переход к интегральному уравнению (150). 10.2. Принцип обобщенного сжатия (153). 10.3. Уравнения с монотонными операторами (154). 10.4. Равномерно вогнутые операторы (156). 10.5. Уравнения с монотонными нелинейностями (159). 10.6. Уравнения с равномерно вогнутыми нелинейностями (161). 10.7. Использование мажорант и минорант (163). 10.8 Примеры (167).

§ 11. Устойчивость пп-решений уравнений с монотонными и вогнутыми нелинейностями 172

11.1. Теорема об устойчивости нулевого решения (172). 11.2. Теорема о неустойчивости (175). 11.3. Устойчивость оператора L и знак его функции Грина (176). 11.4. Устойчивость пп-решений уравнений с монотонными нелинейностями (176). 11.5. Лемма о вогнутых операторах (179). 11.6. Устойчивость пп-решений уравнений с вогнутыми нелинейностями (180). 11.7. Устойчивость в конусе решений систем первого порядка с вогнутыми нелинейностями (182). 11.8. Устойчивость в конусе решений систем высших порядков с вогнутыми нелинейностями (191). 11.9. Устойчивость пп-решения относительно малых возмущений правой части уравнения (197). 11.10. Примеры (198).

§ 12. Почти периодические колебания в системах автоматического регулирования 199

12.1. Вводные замечания (199). 12.2. Невозмущенная система автоматического регулирования (199). 12.3. Существование устойчивого пп-решения у возмущенной системы (208). 12.4. Существование неустойчивого пп-решения у возмущенной системы (213). 12.5. Приложения к скалярным уравнениям высших порядков (221). 12.6. Существование трех пп-решений (227).

§ 13. Положительные почти периодические решения уравнений второго порядка 233

13.1. Формулировка результатов (233). 13.2. Доказательство теоремы 13.1 (237). 13.3. Лемма о положительной разрешимости дифференциального неравенства (238). 13.4. Доказательство теоремы 13.2 (241). 13.5. Доказательство теоремы 13.3 (243). 13.6. Регулярность вспомогательных пп-операторов (247). 13.7. Доказательство теоремы 13.4 (250).

Глава 4. **Уравнения с малым параметром** 255

§ 14. Линейные уравнения 255

14.1. Лемма Н. Н. Боголюбова (255). 14.2. Зависимость функции Грина от параметра (258). 14.3. Замены Н. Н. Боголюбова — И. З. Штокало (261). 14.4. Формулы теории возмущений (263). 14.5. Теорема И. З. Штокало (265).

§ 15. Бифуркация почти периодических решений 268

15.1. Постановка задачи (268). 15.2. Переход к уравнению специального вида (271). 15.3. Основная теорема (273). 15.4. Доказательство существования пп-решений (274). 15.5. Инвариантные конусы (280). 15.6. Единственность пп-решения в конусе (285). 15.7. Завершение доказательства теоремы 15.1 (288). 15.8. Маятник с вибрирующей точкой подвеса (290). 15.9. Дополнительные замечания (293).

§ 16. Бифуркация пп-решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка 293

16.1. Постановка задачи. Необходимое условие (293). 16.2. Основная теорема (295). 16.3. Доказательство утверждения 1° (296). 16.4. Существование ненулевых пп-решений в утверждениях 2° и 3° (298). 16.5. Завершение доказательства теоремы 16.1 (300). 16.6. Знакопостоянные $a(t)$ (303). 16.7. Общее уравнение (303). 16.8. Пример (305).

Краткое содержание глав 1 — 4 307

Литература 346

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена методу интегральных уравнений в задачах, связанных с исследованием почти периодических решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Интегральные уравнения теории почти периодических решений по сравнению, например, с интегральными уравнениями периодических колебаний обладают двумя принципиальными особенностями. Эти особенности (независимо от того, в явной или в неявной форме они себя проявляют) и объясняют основные трудности, возникающие при исследовании почти периодических колебаний.

Во-первых, интегральные операторы нелинейных почти периодических колебаний даже в простейших случаях не обладают свойством полной непрерывности в пространствах почти периодических функций. Это исключает возможность непосредственного применения мощных и хорошо разработанных в настоящее время топологических методов (принцип Шаудера, вращение векторных полей и др.).

Во-вторых, спектр интегральных операторов линейных задач о почти периодических колебаниях не имеет изолированных точек. Поэтому в задачах о бифуркации и о ветвлении почти периодических колебаний линеаризация приводит к уравнениям с операторами, не обладающими даже свойством нормальной разрешимости. Это исключает возможность непосредственного применения в теории ветвления, например, методов Ляпунова — Шмидта — Пуанкаре.

Поэтому для исследования нелокальных задач о нелинейных почти периодических колебаниях и при изучении ветвления почти периодических колебаний приходится применять специальные приемы. Излагаемые в книге приемы существенно опираются на развитую в последние годы теорию уравнений с монотонными и вогнутыми операторами.

Книга состоит из четырех глав. Первая носит вводный характер. Во второй для широких классов линейных дифференциальных операторов с почти периодическими коэффициентами ищутся эффективные условия регулярности, условия существования функции Грина, ее знакопостоянства и т. д. Третья глава посвящена нелокальным теоремам о нелинейных почти периодических колебаниях (существование и оценка их количества, устойчивость в условиях существования нескольких почти периодических колебаний, зоны притяжения и т. д.). В качестве примера приложений детально рассмотрены вынужденные почти периодические колебания в некоторых системах автоматического регулирования, имеющих несколько состояний равновесия. В четвертой главе основное внимание уделено проблеме рождения почти периодических колебаний из состояния равновесия. В качестве примеров рассматриваются близкие к верхнему состоянию равновесия почти периодические колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса и колебания маятника с меняющейся длиной нити.

Авторам кажется, что труд читателя существенно облегчит помещенное в конце книги дополнение — краткое ее содержание. В этом дополнении дано общее описание применяемых и развиваемых в книге идей и методов.

Развитые в книге методы без существенных модификаций применимы к исследованию почти периодических

решений широких классов дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, дифференциальных уравнений в функциональных пространствах, интегро-дифференциальных уравнений и др. В случае, когда все члены дифференциальных уравнений периодичны (а не почти периодичны) по времени, основные построения книги существенно упрощаются и приводят к более сильным результатам. На всех этих вопросах авторы не имели возможности остановиться с должной полнотой.

Ряд важных результатов качественной теории нелинейных почти периодических колебаний (полученных Л. Америо, В. А. Арнольдом, Н. Н. Боголюбовым, Б. П. Демидовичем, В. И. Зубовым, Н. Левинсоном, И. Г. Малкиным, Ю. А. Митропольским, Ю. Мозером, А. Халанаем, Дж. Хейлом и другими авторами) не изложен здесь либо по той причине, что изучавшиеся вопросы и применявшиеся методы лежат в стороне от общего плана книги, либо потому, что они подробно освещены в других монографиях и руководствах.

Предполагается, что читатель знаком с обычным общим курсом дифференциальных уравнений, основами линейной алгебры и первыми понятиями функционального анализа. Выходящие за эти рамки необходимые понятия и утверждения в книге излагаются подробно.

С рукописью (или частями рукописи) познакомились В. В. Жиков, П. П. Забрейко, А. Ю. Левин, А. Д. Мышкис, А. В. Покровский и Я. З. Цыпкин; их замечания и вдохновляющие советы содействовали ее улучшению. Авторы благодарны также Козьме Пруткову, чьи мысли послужили руководящими соображениями при написании каждого параграфа книги.

Авторы

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Глядя на мир, нельзя не удивляться.

Козьма Прутков

§ 1. Почти периодические функции

В этом параграфе мы приведем основные свойства почти периодических функций. Систематическая теория скалярных почти периодических функций изложена в монографии Б. М. Левитана [1]. Ниже будут использованы почти периодические функции со значениями в n-мерном евклидовом пространстве R^n; иногда будут применяться и почти периодические функции со значениями в банаховом или метрическом пространстве; при переходе к почти периодическим функциям со значениями в более общих пространствах основные определения сохраняются без изменений; сохраняется и большинство свойств почти периодических функций (подчеркнем, что большинство, а не все!). Ниже вместо «почти периодическая функция» используется обозначение «пп-функция».

1.1. Пространства пп-функций. Пусть $\mathfrak{R}$ — метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y)$. Непрерывную функцию $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в $\mathfrak{R}$ называют, следуя Г. Бору, *пп-функцией*, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $l = l(\varepsilon) > 0$, что в любом промежутке $[t_0, t_0 + l(\varepsilon)]$ найдется по крайней мере одно число τ, при котором

$$\rho[x(t), x(t+\tau)] < \varepsilon \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{1.1}$$

Читатель без труда покажет, что каждая пп-функция ограничена и равномерно непрерывна на всей оси и что множество ее значений компактно в $\mathfrak{R}$.

Определение Г. Бора при исследовании решений дифференциальных уравнений неудобно. Чаще применяется эквивалентное определение, принадлежащее С. Бохнеру.

Через $C(\mathfrak{R})$ будем обозначать пространство непрерывных и ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций со значениями в $\mathfrak{R}$. Метрика в $C(\mathfrak{R})$ определяется формулой

$$\rho_*(x, y) = \sup_{-\infty < t < \infty} \rho[x(t), y(t)] \qquad (x, y \in C(\mathfrak{R})). \quad (1.2)$$

Пространство $C(\mathfrak{R})$ полно в том и только том случае, когда полно $\mathfrak{R}$; если пространство $\mathfrak{R}$ линейно (например, $\mathfrak{R}$ — конечномерное или бесконечномерное банахово пространство), то $C(\mathfrak{R})$ — также линейное пространство.

Функцию

$$x_h(t) = x(t + h) \qquad (-\infty < t < \infty) \quad (1.3)$$

называют *сдвигом* функции $x(t)$. Если функция $x(t)$ принадлежит $C(\mathfrak{R})$, то и все ее сдвиги принадлежат $C(\mathfrak{R})$.

Функцию $x(t) \in C(\mathfrak{R})$ называют, следуя С. Бохнеру, *пп-функцией*, если множество всех ее сдвигов компактно в $C(\mathfrak{R})$. Иначе говоря, непрерывная и ограниченная функция со значениями в $\mathfrak{R}$ почти периодична, если из каждой последовательности $h_k \in (-\infty, \infty)$ можно выбрать такую подпоследовательность $h_{k(i)}$, что

$$\lim_{i, j \to \infty} \sup_{-\infty < t < \infty} \rho[x(t + h_{k(i)}), x(t + h_{k(j)})] = 0. \quad (1.4)$$

Как мы уже говорили, почти периодичность по С. Бохнеру совпадает с почти периодичностью по Г. Бору.

Простейшим примером пп-функций являются периодические функции. Из определения С. Бохнера немедленно вытекает, что линейная комбинация пп-функций (когда говорят о линейных комбинациях пп-функций, то подразумевается, что $\mathfrak{R}$ линейно) является пп-функцией. Отсюда следует почти периодичность тригонометрических многочленов

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t. \quad (1.5)$$

Заметим, что тригонометрические многочлены (1.5) при несоизмеримых λ_i не обладают свойством периодичности.

В качестве последнего примера рассмотрим вектор-функцию $x(t)$ со значениями в R^n:

$$x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}; \tag{1.6}$$

она почти периодична в том и только том случае, если каждая ее компонента $x_i(t)$ — скалярная пп-функция.

Через $B(\mathfrak{R})$ будем обозначать пространство всех пп-функций с метрикой (1.2). Если $\mathfrak{R}$ — банахово пространство (например, $\mathfrak{R} = R^n$), то $B(\mathfrak{R})$ (как и $C(\mathfrak{R})$) также является банаховым пространством с нормой

$$\| x(t) \|_{B(\mathfrak{R})} = \| x(t) \|_{C(\mathfrak{R})} = \sup_{-\infty < t < \infty} \| x(t) \|_{\mathfrak{R}}. \tag{1.7}$$

Пространство $B(\mathfrak{R})$ содержит все функции вида $a \cos \lambda t$, $b \sin \lambda t$ при любых $a, b \in \mathfrak{R}$, $-\infty < \lambda < \infty$; если λ_1 и λ_2 несоизмеримы, то

$$\| a \sin \lambda_1 t - a \sin \lambda_2 t \|_{C(\mathfrak{R})} = 2 \| a \|_{\mathfrak{R}},$$

отсюда вытекает несепарабельность $B(\mathfrak{R})$. Отметим, что единичный шар пространства $B(\mathfrak{R})$ не обладает ни свойством слабой полноты, ни свойством слабой компактности.

1.2. Теорема об аппроксимации. Формула (1.5) дает примеры пп-функций со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{R}$, если $a_i, b_i \in \mathfrak{R}$. Как оказывается, множество функций (1.5) плотно в $B(\mathfrak{R})$, т. е. каждую пп-функцию с любой точностью можно аппроксимировать тригонометрическим многочленом. Эта замечательная теорема впервые была доказана (для скалярного случая) Г. Бором [1, 2]; существенное упрощение доказательства Г. Бора предложил Ш. Ж. Валле-Пуссен [1]. Различные доказательства, основанные на новых идеях, были предложены С. Бохнером [1], Н. Винером [1], Г. Вейлем [1], Н. Н. Боголюбовым [1]. Все эти доказательства изложены в монографии Б. М. Левитана [1]. В книге К. Кордуняну [1] предложено доказательство теоремы об аппроксимации тригонометрическими многочленами пп-функций со значениями в банаховом пространстве.

Укажем один простой прием, который позволяет свести доказательство теоремы об аппроксимации пп-функции $x(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{R}$ к скалярному случаю или, что то же, к конечномерному случаю. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как множество $\mathfrak{M}$ значений пп-функции $x(t)$ компактно в $\mathfrak{R}$, то в нем может

быть построена конечная ε-сеть $y_1, \ldots, y_k$. Положим

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \mu_i(t) y_i}{\sum_{i=1}^{k} \mu_i(t)} \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{1.8}$$

где

$$\mu_i(t) = \begin{cases} 2\varepsilon - \| x(t) - y_i \|_{\mathfrak{R}}, & \text{если } \| x(t) - y_i \|_{\mathfrak{R}} < 2\varepsilon, \\ 0, & \text{если } \| x(t) - y_i \|_{\mathfrak{R}} \geqslant 2\varepsilon. \end{cases}$$

Легко проверить (используя определение С. Бохнера), что каждая функция $\mu_i(t)$ почти периодична. Поэтому почти периодична и функция $y(t)$. Из (1.8) вытекает, что при каждом фиксированном t значение функции $y(t)$ принадлежит выпуклой оболочке тех элементов ε-сети, расстояние от которых до $x(t)$ не превышает 2ε. Следовательно,

$$\| x(t) - y(t) \|_{\mathfrak{R}} \leqslant 2\varepsilon \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Мы показали, что каждую пп-функцию со значениями в $\mathfrak{R}$ можно с любой точностью аппроксимировать пп-функцией $y(t)$ со значениями в конечномерном подпространстве (линейной оболочке ε-сети).

1.3. Дифференцирование и интегрирование пп-функций. Операции дифференцирования и интегрирования, вообще говоря, выводят из класса пп-функций. Представляем читателю построить соответствующие примеры. Ниже используется простое утверждение: *производная $x'(t)$ пп-функции $x(t)$ почти периодична в том и только том случае, если она равномерно непрерывна.* Производную $x'(t)$ мы понимаем в сильном смысле, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| x'(t) - \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right\|_{\mathfrak{R}} = 0.$$

Необходимость указанного условия очевидна, достаточность вытекает из тождества

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} - x'(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} [x'(t + \theta) - x'(t)]\, d\theta. \tag{1.9}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что из равномерной непрерывности производной $x^{(m)}(t)$ пп-функции $x(t)$ вытекает, что все производные $x'(t), x''(t), \ldots, x^{(m)}(t)$ являются пп-функциями.

Важной характеристикой пп-функции $x(t)$ является ее *среднее значение*

$$M(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(s)\, ds. \tag{1.10}$$

Предел в правой части всегда существует и конечен. Равенство нулю среднего значения является необходимым условием того, чтобы интеграл

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(s)\, ds \tag{1.11}$$

от пп-функции $x(t)$ был пп-функцией. Следует помнить, что это условие не достаточно даже в случае скалярных пп-функций (постройте пример).

Для скалярных пп-функций П. Боль [1] показал, что из ограниченности функции (1.11) вытекает ее почти периодичность, если $x(t)$ — пп-функция.

1.4. Оператор суперпозиции. Рассмотрим непрерывную функцию $f(t, x)$ двух переменных $t \in (-\infty, \infty)$, $x \in E$ (где E — некоторое банахово пространство) со значениями в некотором метрическом пространстве $\mathfrak{R}$.

Функцию $f(t, x)$ называют *равномерно почти периодической*, если каждому $\varepsilon > 0$ и каждому $r > 0$ соответствует такое $l = l(\varepsilon, r) > 0$, что в любом промежутке $[t_0, t_0 + l(\varepsilon, r)]$ найдется по крайней мере одно τ, при котором

$$\rho[f(t, x), f(t + \tau, x)] < \varepsilon \qquad (-\infty < t < \infty,\ \|x\| \leqslant r). \tag{1.12}$$

Ниже мы будем встречаться с равномерно пп-функциями в случае, когда $E = \mathfrak{R} = R^n$. В этом случае равномерная почти периодичность равносильна тому, что $f(t, x)$ почти периодична по t при каждом фиксированном x и равномерно непрерывна по x на каждом шаре $\|x\| \leqslant r$. В частности, почти периодическая по t функция $f(t, x)$ равномерно почти периодична, если она удовлетворяет условию Липшица по переменной x.

Каждая функция $f(t, x)$ двух переменных порождает оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}x(t) = f[t, x(t)]. \tag{1.13}$$

Лемма 1.1. *Если $f(t, x)$ равномерно почти периодична, то оператор* (1.13) *действует в $B(R^n)$, непрерывен и ограничен.*

Доказательство предоставляем читателю. Напомним лишь, что нелинейный оператор называется *ограниченным*, если ограничено множество его значений на каждом шаре, и что для нелинейных операторов ни ограниченность не вытекает из непрерывности, ни непрерывность не вытекает из ограниченности.

Утверждение леммы 1.1 хорошо известно; в явном или неявном виде оно содержится, например, в книгах В. И. Зубова [1], К. Кордуняну [1], работах Л. Амеро [1], А. И. Перова [1] и др.

Верно и обратное лемме 1.1 утверждение. Более того, если оператор (1.13) действует в $B(R^n)$, то $f(t, x)$ равномерно почти периодична.

Отыщи всему начало, и ты многое поймешь.

Козьма Прутков

§ 2. Регулярные пп-операторы

2.1. Постановка задачи. Ниже систематически используется ряд функциональных пространств. Через $C(R^n)$ обозначается пространство непрерывных и ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций со значениями в вещественном евклидовом n-мерном пространстве R^n; норма в $C(R^n)$ определяется равенством

$$\| x(t) \|_{C(R^n)} = \sup_{-\infty < t < \infty} | x(t) |,$$

где $|x|$ — евклидова норма элемента x. Через $C^m(R^n)$ обозначается множество функций $x(t) \in C(R^n)$, для которых $x'(t), \ldots, x^{(m)}(t) \in C(R^n)$; множество $C^m(R^n)$ превращается в банахово пространство, если положить, например,

$$\| x(t) \|_{C^m(R^n)} = \\ = \| x(t) \|_{C(R^n)} + \| x'(t) \|_{C(R^n)} + \ldots + \| x^{(m)}(t) \|_{C(R^n)}.$$

Через $B(R^n)$ обозначается подпространство пространства $C(R^n)$, состоящее из пп-функций. Аналогично, че-

рез $B^m(R^n)$ обозначается подпространство пространства $C^m(R^n)$, состоящее из пп-функций $x(t)$, у которых производные $x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)$ также почти периодичны.

Матрицы $A(t)$ с пп-элементами $a_{ij}(t)$ $(i, j=1, \ldots, n)$ будем называть *пп-матрицами*. Норму пп-матрицы определим равенством

$$\| A(t) \|_{C(R^n)} = \sup_{-\infty < t < \infty} | A(t) |,$$

где

$$| A | = \max_{x \in R^n,\ |x|=1} | Ax |.$$

Пусть $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — квадратные матрицы порядка n с пп-элементами. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t) \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t) x. \qquad (2.1)$$

Дифференциальное выражение (2.1) определяет дифференциальный оператор L (как мы будем говорить, *пп-оператор*), который можно рассматривать в различных пространствах функций. Как правило, мы будем рассматривать его в пространстве $C(R^n)$, считая, что он определен на таких функциях $x(t) \in C(R^n)$, для которых $Lx(t) \in C(R^n)$. Как будет показано ниже, область определения оператора L совпадает с $C^m(R^n)$.

Основной интерес для нас будут представлять пп-операторы, обладающие рядом специальных свойств.

Пп-оператор L называется *регулярным*, если уравнение

$$Lx = f(t) \qquad (2.2)$$

имеет единственное решение $x(t) \in C^m(R^n)$ при любой правой части $f(t) \in C(R^n)$, причем $x(t) \in B^m(R^n)$, если $f(t) \in B(R^n)$.

Пп-оператор L назовем *слабо регулярным*, если уравнение (2.2) имеет по крайней мере одно решение $x(t) \in C(R^n)$ при любой правой части $f(t) \in B(R^n)$.

На первый взгляд класс слабо регулярных операторов шире класса регулярных операторов. Оказывается,

что это не так. Ниже будет показано, что *из слабой регулярности пп-оператора вытекает* (!) *его регулярность.* Чтобы проникнуться уважением к последнему утверждению, полезно иметь в виду, что для уравнений (2.2) с ограниченными матрицами-коэффициентами $A_i(t)$ из существования у уравнения (2.2) ограниченных решений при любой ограниченной правой части не вытекает единственность таких решений. Примером может служить скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + a(t)\,x = f(t),$$

где

$$a(t) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad -\infty < t \leqslant -1, \\ t, & \text{если} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & \text{если} \quad 1 \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

В общем случае пп-оператор не обладает свойством нормальной разрешимости, т. е. множество значений пп-оператора на $C^m(R^n)$ (или на $B^m(R^n)$) может не быть замкнутым подпространством пространства $C(R^n)$. Примером может служить оператор $Lx = \frac{dx}{dt}$, множество значений которого состоит из ограниченных функций, интегралы от которых также являются ограниченными функциями; множество таких функций незамкнуто.

При изучении уравнения (2.2) часто удобно записывать его в виде уравнения первого порядка в фазовом пространстве R^{mn}.

Пусть

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Положим

$$u = \{u_1, \ldots, u_m\},$$

где

$$u_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad u_2 = \{x_1', \ldots, x_n'\}, \ldots$$
$$\ldots, u_m = \{x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}\}.$$

Тогда уравнение (2.2) запишется в виде

$$\tilde{L}u = \tilde{f}(t), \tag{2.3}$$

где

$$\tilde{L}u = \frac{du}{dt} + Q(t)\,u, \tag{2.4}$$

$$\tilde{f}(t) = \{0, \ldots, 0, f(t)\}, \tag{2.5}$$

а

$$Q(t) = \begin{Vmatrix} 0 & -I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -I \\ A_m(t) & A_{m-1}(t) & A_{m-2}(t) & \ldots & A_1(t) \end{Vmatrix}. \tag{2.6}$$

Возникает естественный вопрос: как связана регулярность пп-оператора (2.4) с регулярностью пп-оператора (2.2)? Как будет показано ниже, *пп-оператор* (2.2) *регулярен тогда и только тогда, когда регулярен пп-оператор* (2.4).

Фундаментальные результаты по теории пп-операторов принадлежат Ж. Фавару [1]; они изложены в монографии Б. М. Левитана [1]. Приводимые ниже теоремы о регулярности пп-операторов восходят к Д. Л. Массера и И. И. Шефферу [1, 2]; изложенные доказательства используют их идеи.

Примеры регулярных пп-операторов будут приведены ниже.

Свойство пп-оператора быть регулярным устойчиво по отношению к малым возмущениям матриц $A_i(t)$. Иначе говоря, регулярные пп-операторы порядка m образуют открытое (в естественной топологии) множество в множестве всех пп-операторов порядка m. Замкнутое множество нерегулярных пп-операторов, по-видимому, нигде не плотно. Легко показать справедливость этого утверждения в случае скалярных уравнений первого порядка. В дальнейшем будут указаны некоторые классы нерегулярных операторов высших порядков, которые сколь угодно малым возмущением можно сделать регулярными.

2.2. Теорема Е. Эсклангона. Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} &\mu_0(T) = \max_{|t|\leqslant T} |\xi(t)|, \quad \mu_1(T) = \max_{|t|\leqslant T} |\xi'(t)|, \\ &\mu_2(T) = \max_{|t|\leqslant T} |\xi''(t)|, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

где $\xi(t)$ — определенная и дважды непрерывно дифференцируемая на $(-\infty, \infty)$ скалярная функция. Приведем одну известную лемму Э. Ландау — Ж. Адамара (доказательство см., например, в монографии Г. Х. Харди, Дж. Литтльвуда и Г. Полиа [1], стр. 388—391).

Лемма 2.1. *Если*

$$T < \sqrt{\frac{\mu_0(T)}{\mu_2(T)}}, \tag{2.8}$$

то

$$\mu_1(T) \leqslant \frac{1}{T}\mu_0(T) + T\mu_2(T). \tag{2.9}$$

Если же

$$T \geqslant \sqrt{\frac{\mu_0(T)}{\mu_2(T)}}, \tag{2.10}$$

то

$$\mu_1(T) \leqslant 2\sqrt{\mu_0(T)\mu_2(T)}. \tag{2.11}$$

Из приведенных оценок почти непосредственно вытекает

Лемма 2.2. *Пусть задана последовательность чисел T_k; пусть $T_k \to \infty$ и*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu_1(T_k)}{\mu_0(T_k)} = \infty. \tag{2.12}$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu_2(T_k)}{\mu_1(T_k)} = \infty. \tag{2.13}$$

Доказательство. Если числа T_k при больших k удовлетворяют неравенствам (2.10), то (2.13) вытекает из (2.12) и (2.11). Поэтому мы покажем, что при всех достаточно больших k выполнено (2.10).

Предположим противное. Тогда найдется такая последовательность индексов $k(i)$, что

$$T_{k(i)} < \sqrt{\frac{\mu_0(T_{k(i)})}{\mu_2(T_{k(i)})}}.$$

Из (2.9) вытекают неравенства

$$\mu_1(T_{k(i)}) \leqslant \frac{1}{T_{k(i)}}\mu_0(T_{k(i)}) + T_{k(i)}\mu_2(T_{k(i)}),$$

откуда

$$\frac{\mu_1(T_{k(i)})}{\mu_0(T_{k(i)})} \leqslant \frac{1}{T_{k(i)}}\left[1 + T^2_{k(i)}\frac{\mu_2(T_{k(i)})}{\mu_0(T_{k(i)})}\right] < \frac{2}{T_{k(i)}},$$

что противоречит (2.12).

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть уравнение* (2.2) *с некоторой ограниченной на всей оси правой частью* $f(t)$ *имеет ограниченное на всей оси решение* $x(t)$.

Тогда все производные $x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)$ *также ограничены на всей оси.*

Доказательство. Рассмотрим вначале ограниченную на всей оси m раз непрерывно дифференцируемую скалярную функцию $\xi(t)$. Если не все ее производные $\xi'(t), \ldots, \xi^{(m)}(t)$ равномерно ограничены, то в силу леммы 2.2

$$\lim_{T\to\infty} \max_{|t|\leqslant T} |\xi^{(m)}(t)| = \infty. \tag{2.14}$$

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда некоторые компоненты решения $x(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ удовлетворяют условию (2.14). Для определенности будем считать, что этому условию удовлетворяют компоненты $x_1(t), \ldots, x_l(t)$. Из леммы 2.2 вытекает существование такой последовательности $T_k \to \infty$, что каждая компонента $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, l)$ удовлетворяет равенствам

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i(t)|}{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i^{(m)}(t)|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i'(t)|}{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i^{(m)}(t)|} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{k\to\infty} \frac{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i^{(m-1)}(t)|}{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i^{(m)}(t)|} = 0$$

и, тем более, равенствам

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i(t)|}{\varphi(T_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i'(t)|}{\varphi(T_k)} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{k\to\infty} \frac{\max\limits_{|t|\leqslant T_k} |x_i^{(m-1)}(t)|}{\varphi(T_k)} = 0, \tag{2.15}$$

где

$$\varphi(T) = \max_{|t| \leqslant T} |x^{(m)}(t)|.$$

Равенствам (2.15) удовлетворяют и компоненты $x_{l+1}(t), \ldots, x_n(t)$, так как они ограничены вместе с соответствующими производными, а $\varphi(T) \to \infty$ при $T \to \infty$.

Очевидно, из равенства

$$\frac{d^m x}{dt^m} = -\sum_{j=1}^{m} A_{m+1-j}(t) \frac{d^{j-1}x}{dt^{j-1}} + f(t)$$

и из ограниченности элементов матриц $A_j(t)$ и компонент функции $f(t)$ вытекает, что

$$|x^{(m)}(t)| \leqslant a \left[1 + \sum_{j=1}^{m} |x^{(j-1)}(t)|\right],$$

и, следовательно,

$$1 \leqslant a \frac{1 + \sum_{j=1}^{m} \max_{|t| \leqslant T} |x^{(j-1)}(t)|}{\varphi(T)}.$$

Это неравенство противоречит (2.15).

Теорема доказана.

Теорема 2.1 принадлежит Е. Эсклангону [1]; приведенное здесь доказательство близко к доказательству Э. Ландау [1].

Отметим, что при доказательстве теоремы 2.1 почти периодичность матриц $A_i(t)$ не была использована — играла роль лишь их ограниченность.

2.3. Существование ограниченных решений при ограниченных правых частях. Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает, что область определения пп-оператора L совпадает с $C^m(R^n)$. Обозначим через $C_0^m(R^n)$ множество функций $x(t) \in C^m(R^n)$, для которых $Lx(t) \in B(R^n)$. Так как L, рассматриваемый как оператор из $C^m(R^n)$ в $C(R^n)$, очевидным образом непрерывен, то $C_0^m(R^n)$ является подпространством пространства $C^m(R^n)$. Обозначим через E_0 подпространство нулей оператора L; его размерность не превышает mn (E_0 со-

стоит из ограниченных на $(-\infty, \infty)$ решений однородного уравнения $Lx = 0$). Конечномерность E_0 позволяет (см., например, Н. Данфорд и Дж. Шварц [1]) представить $C_0^m(R^n)$ в виде прямой суммы

$$C_0^m(R^n) = E_0 \dotplus E_1$$

подпространства E_0 и некоторого бесконечномерного подпространства E_1. По определению $LE_1 = LC_0^m(R^n)$; через L_1 обозначим сужение оператора L на E_1. Оператор L_1 имеет определенный на $LC_0^m(R^n)$ обратный, который обозначим через L_1^{-1}.

Допустим, что L слабо регулярен. Тогда $LC_0^m(R^n) = B(R^n)$. Из известной теоремы Банаха (см. Н. Данфорд и Дж. Шварц [1]) вытекает тогда, что L_1^{-1} непрерывен как оператор из $B(R^n)$ в E_1. Отсюда вытекает

Лемма 2.3. *Пусть пп-оператор L слабо регулярен. Тогда существует такая постоянная γ, что для любой $f(t) \in B(R^n)$ уравнение* (2.2) *имеет решение $x(t) = L_1^{-1} f(t) \in C^m(R^n)$, причем*

$$\| x(t) \|_{C^m(R^n)} \leqslant \gamma \| f(t) \|_{C(R^n)}. \tag{2.16}$$

Применим лемму 2.3 для доказательства следующего важного факта:

Теорема 2.2. *Пусть пп-оператор L слабо регулярен.*

Тогда уравнение (2.2) *имеет при любой правой части $f(t) \in C(R^n)$ по крайней мере одно решение $x(t) \in C^m(R^n)$, удовлетворяющее оценке* (2.16).

Доказательство. Пусть $f(t) \in C(R^n)$. Построим последовательность пп-функций $f_k(t)$, равномерно сходящуюся на каждом конечном промежутке к $f(t)$ и такую, что

$$\| f_k(t) \|_{C(R^n)} \leqslant \| f(t) \|_{C(R^n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через $x_k(t)$ те решения $x_k(t) = L_1^{-1} f_k(t)$ уравнений

$$Lx = f_k(t),$$

для которых справедливо неравенство (2.16). Очевидно,

$$\| x_k(t) \|_{C^m(R^n)} \leqslant \gamma \| f(t) \|_{C(R^n)}. \tag{2.17}$$

Из этих оценок и теоремы Арцела о компактности семейств непрерывных функций следует существование такой последовательности $x_{k(i)}(t)$, которая сходится к некоторой функции $x(t)$ вместе со своими производными до порядка $m-1$ равномерно на каждом конечном промежутке. Из равенств

$$\frac{d^m x_{k(i)}(t)}{dt^m} = f_{k(i)}(t) - A_1(t)\frac{d^{m-1}x_{k(i)}(t)}{dt^{m-1}} - \ldots - A_m(t)x_{k(i)}(t)$$

вытекает, что и производные $x^{(m)}_{k(i)}(t)$ сходятся к $x^{(m)}(t)$ равномерно на каждом конечном промежутке. Следовательно, $Lx = f(t)$. Из (2.17) вытекает, что $x(t)$ удовлетворяет оценке (2.16).

Теорема доказана.

2.4. Теорема единственности. Продолжим изучение слабо регулярных пп-операторов

$$Lx(t) = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x. \tag{2.18}$$

Введем обозначение

$$L_h x(t) = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t+h)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t+h)x. \tag{2.19}$$

Все пп-операторы L_h слабо регулярны, они непрерывны как операторы из $C^m(R^n)$ в $C(R^n)$. Из бохнеровского определения пп-функции вытекает, что операторы L_h $(-\infty < h < \infty)$ образуют компактное множество в пространстве $\mathfrak{L}$ непрерывных операторов, действующих из $C^m(R^n)$ в $C(R^n)$; замыкание этого множества будем обозначать через $H(L)$.

Пусть $h(j)$ такая последовательность, что матрицы $A_i[t+h(j)]$ равномерно сходятся к некоторым матрицам $A_i^*(t)$. Тогда операторы $L_{h(j)}$ сходятся по норме пространства $\mathfrak{L}$ к оператору

$$L_* x(t) = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1^*(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m^*(t)x. \tag{2.20}$$

Пп-оператор (2.20) также слабо регулярен. Пусть действительно $f(t) \in C(R^n)$. В силу леммы 2.3 существуют такие решения $x_j(t) = L_1^{-1} f[t - h(j)]$ уравнений

$$Lx = f[t - h(j)],$$

которые удовлетворяют неравенствам

$$\| x_j(t) \|_{C^m(R^n)} \leqslant \gamma \| f(t) \|_{C(R^n)} \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

значит, решения

$$y_j(t) = x_j[t + h(j)]$$

уравнений

$$L_{h(j)} x = f(t)$$

удовлетворяют неравенствам

$$\| y_j(t) \|_{C^m(R^n)} \leqslant \gamma \| f(t) \|_{C(R^n)} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому (см. доказательство теоремы 2.2) можно выбрать такую последовательность $y_{j(k)}(t)$, которая на каждом конечном промежутке вместе со своими производными до порядка m сходится к некоторой функции $z(t)$. Функция $z(t)$ является решением уравнения $L_* z(t) = f(t)$ и ограничена вместе с производными до порядка m — это и означает, что L_* слабо регулярен.

Лемма 2.4. *Пусть пп-оператор L слабо регулярен и $f(t) \in B(R^n)$.*

Тогда каждое ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение уравнения $Lx = f(t)$ принадлежит $B^m(R^n)$.

Доказательство. Пусть $x(t) \in C^m(R^n)$ и $Lx(t) = f(t)$. Для доказательства теоремы нужно показать, что семейство сдвигов $x(t + h)$ $(-\infty < h < \infty)$ компактно в $C^m(R^n)$.

Предположим противное. Пусть $h(i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — такая последовательность, что при $i \neq j$

$$\| x[t + h(i)] - x[t + h(j)] \|_{C^m(R^n)} \geqslant \varepsilon_0 > 0. \qquad (2.21)$$

При этом без ограничения общности можно считать, что операторы $L_{h(i)}$ сходятся по норме пространства $\mathfrak{L}$ к оператору (2.20) и функции $f[t + h(i)]$ сходятся в $B(R^n)$ к некоторой функции $f^*(t)$ Из тождеств

$$L_* x[t + h(i)] = [L_* - L_{h(i)}] x[t + h(i)] + f[t + h(i)]$$

вытекает тогда равенство

$$\lim_{i\to\infty} \| L_* x[t+h(i)] - f^*(t) \|_{C(R^n)} = 0. \tag{2.22}$$

Через E_0^* обозначим подпространство нулей оператора L_* в пространстве $C^m(R^n)$. Подпространство E_0^* конечномерно; поэтому существует оператор P_0^* проектирования на E_0^*. Положим $P_1^* = I - P_0^*$ и $E_1^* = P_1^* C^m(R^n)$. Очевидно,

$$L_* P_0^* x[t+h(i)] \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому из (2.22) вытекает равенство

$$\lim_{i\to\infty} \| L_* P_1^* x[t+h(i)] - f^*(t) \|_{C(R^n)} = 0. \tag{2.23}$$

Сужение оператора L_* на E_1^* является оператором, который имеет на $B(R^n)$ непрерывный обратный L_*^{-1} (см. начало п. 2.3). Следовательно, из (2.23) вытекает равенство

$$\lim_{i\to\infty} \| P_1^* x[t+h(i)] - L_*^{-1} f^*(t) \|_{C^m(R^n)} = 0,$$

т. е. найдется такое i_0, что при $i \geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\| P_1^* x[t+h(i)] - L_*^{-1} f^*(t) \|_{C^m(R^n)} < \frac{\varepsilon_0}{3}. \tag{2.24}$$

Пусть $i, j \geqslant i_0$ и $i \neq j$. Из (2.21) и (2.24) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \| P_0^* x[t+h(i)] - P_0^* x[t+h(j)] \|_{C^m(R^n)} \geqslant \\ \geqslant \| x[t+h(i)] - x[t+h(j)] \|_{C^m(R^n)} - \\ - \| P_1^* x[t+h(i)] - L_*^{-1} f^*(t) \|_{C^m(R^n)} - \\ - \| P_1^* x[t+h(j)] - L_*^{-1} f^*(t) \|_{C^m(R^n)} > \frac{\varepsilon_0}{3}. \end{aligned}$$

Значит, последовательность $P_0^* x[t+h(i)]$ некомпактна,

С другой стороны, последовательность $P_0^* x[t+h(i)]$ принадлежит конечномерному пространству E_0^* и ограничена:

$$\|P_0^* x[t+h(i)]\|_{C^m(R^n)} \leqslant \|P_0^*\| \cdot \|x(t)\|_{C^m(R^n)} \qquad (i=1, 2, \ldots),$$

откуда вытекает ее компактность. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть пп-оператор L слабо регулярен. Тогда однородное уравнение $Lx=0$ не имеет нетривиальных ограниченных на $(-\infty, \infty)$ решений.*

Доказательство. Пусть E_0 — множество ограниченных на $(-\infty, \infty)$ решений уравнения $Lx=0$. Очевидно, E_0 — подпространство пространства $C^m(R^n)$. Начальные значения (значения при $t=0$) этих решений образуют в фазовом пространстве R^{mn} некоторое подпространство E^0. Пусть E^1 — какое-либо фиксированное прямое дополнение в R^{mn} к E^0. Через E_1 обозначим подпространство таких функций $x(t)$ из $C^m(R^n)$, для которых $\{x(0), x'(0), \ldots, x^{(m-1)}(0)\} \in E^1$. Легко видеть, что подпространства E_0 и E_1 не имеют ненулевых общих точек и что прямая сумма $E_0 \dotplus E_1$ дает все $C^m(R^n)$.

В силу теоремы 2.2 $LE_1 = C(R^n)$. Из теоремы Банаха, которой мы неоднократно пользовались, вытекает, что сужение L_1 оператора L на E_1 имеет непрерывный обратный L_1^{-1}, определенный на $C(R^n)$.

Пусть $x(t)$ — некоторое ограниченное решение уравнения $Lx=0$. Положим

$$y_\tau(t) = x(t) \int_{-\infty}^{t} \varkappa_\tau(s)\, ds \qquad (\tau \geqslant 2),$$

где

$$\varkappa_\tau(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < t \leqslant 1, \\ (t-1)^m [1+(2-t)^m], & \text{если } 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 1, & \text{если } 2 \leqslant t \leqslant \tau, \\ [1+(t-\tau)^m](\tau+1-t)^m, & \text{если } \tau \leqslant t \leqslant \tau+1, \\ 0, & \text{если } \tau+1 \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $y_\tau(t) \in C^m(R^n)$; так как $y_\tau(t) = 0$ при $t \leqslant 1$, то $y_\tau(t) \in E_1$.

Очевидно,

$$Ly_\tau(t) \equiv [Lx(t)] \int_{-\infty}^{t} \varkappa_\tau(s)\, ds + f_\tau(t),$$

где $f_\tau(t)$ — функции, которые лежат в некотором шаре пространства $C(R^n)$:

$$\| f_\tau(t) \|_{C(R^n)} \leqslant M \qquad (\tau \geqslant 2).$$

Так как $Lx(t) \equiv 0$, то

$$Ly_\tau(t) = f_\tau(t) \quad \text{и} \quad y_\tau(t) = L_1^{-1} f_\tau(t),$$

откуда

$$\| y_\tau(t) \|_{C^m(R^n)} \leqslant \| L_1^{-1} \| \cdot M \qquad (\tau \geqslant 2).$$

В частности,

$$| y_\tau(\tau) | \leqslant \| L_1^{-1} \| \cdot M.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$| x(\tau) | \leqslant \frac{M \| L_1^{-1} \|}{\tau - 2} \qquad (\tau > 2). \tag{2.25}$$

Функция $x(t)$ в силу леммы 2.4 почти периодическая. Поэтому из (2.25) вытекает, что $x(t) \equiv 0$.

Лемма доказана.

Непосредственно из лемм 2.4 и 2.5 следует

Теорема 2.3. *Пусть пп-оператор L слабо регулярен. Тогда пп-оператор L регулярен.*

2.5. Теорема об эквивалентности.

Теорема 2.4. *Пп-оператор* (2.2) *регулярен в том и только том случае, если регулярен пп-оператор* (2.4).

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы очевидно. В доказательстве нуждается лишь тот факт, что из регулярности пп-оператора L вытекает регулярность пп-оператора $\tilde{L}$.

Будем считать, что оператор L регулярен. В силу теоремы 2.3 достаточно доказать, что система

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= u_2 + f_1(t),\\
\frac{du_2}{dt} &= u_3 + f_2(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\frac{du_{m-1}}{dt} &= u_m + f_{m-1}(t),\\
\frac{du_m}{dt} &= -A_m(t)u_1 - \dots - A_1(t)u_m + f_m(t)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

имеет решение $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\} \in C(R^{mn})$ при любой правой части

$$f(t) = \{f_1(t), \dots, f_m(t)\} \in B(R^{mn}). \qquad (2.27)$$

Единственность такого решения вытекает из леммы 2.5.

Покажем вначале, как построить решение системы (2.26) в предположении, что

$$f_1(t) \in B^{m-1}(R^n),\ f_2(t) \in B^{m-2}(R^n), \dots, f_m(t) \in B(R^n). \qquad (2.28)$$

Для этого мы рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}
Lx = {} & \{f_1^{(m-1)}(t) + A_1(t) f_1^{(m-2)}(t) + \dots\\
& \dots + A_{m-2}(t) f_1'(t) + A_{m-1}(t) f_1(t)\} +\\
& + \{f_2^{(m-2)}(t) + A_1(t) f_2^{(m-3)}(t) + \dots\\
& \dots + A_{m-3}(t) f_2'(t) + A_{m-2}(t) f_2(t)\} + \dots\\
& \dots + \{f_{m-1}'(t) + A_1(t) f_{m-1}(t)\} + f_m(t).
\end{aligned}$$

В силу (2.28) правая часть этого уравнения принадлежит $B(R^n)$. Поэтому существует (единственное в силу леммы 2.5) решение $x(t) \in B^m(R^n)$.

Положим

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= x(t),\\
u_2(t) &= x'(t) - f_1(t),\\
u_3(t) &= x''(t) - f_1'(t) - f_2(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
u_{m-1}(t) &= x^{(m-2)}(t) - f_1^{(m-3)}(t) - \dots - f_{m-3}'(t) - f_{m-2}(t),\\
u_m(t) &= x^{(m-1)}(t) - f_1^{(m-2)}(t) - \dots - f_{m-2}'(t) - f_{m-1}(t).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что выписанные функции удовлетворяют системе (2.26).

Множество $\mathfrak{F}$ функций (2.27), удовлетворяющих условию (2.28), плотно в пространстве $B(R^{mn})$, так как оно содержит все тригонометрические многочлены. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что решения $u(t) \in C(R^{mn})$ системы (2.26) удовлетворяют неравенству

$$\| u(t) \|_{C(R^{mn})} \leqslant \gamma \| f(t) \|_{B(R^{mn})} \qquad (f \in \mathfrak{F}), \tag{2.29}$$

где γ — некоторая постоянная.

В предположении противного найдется такая последовательность $f_j(t) \in \mathfrak{F}$, что

$$\lim_{j \to \infty} \| f_j(t) \|_{C(R^{mn})} = 0,$$

а решения $v_j(t)$ уравнений

$$\frac{dv}{dt} + Q(t) v = f_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

нормированы:

$$\| v_j(t) \|_{C(R^{mn})} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Выберем числа t_j так, чтобы были выполнены неравенства

$$| v_j(t_j) | > 1/2 \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{2.30}$$

и чтобы пп-матрицы $Q(t + t_j)$ равномерно сходились к некоторой пп-матрице $Q^*(t)$. Из равенств

$$\frac{dv_j(t + t_j)}{dt} + Q(t + t_j) v_j(t + t_j) = f_j(t + t_j) \tag{2.31}$$

вытекает, что последовательность $v_j(t + t_j)$ компактна в смысле равномерной сходимости на каждом конечном промежутке. Поэтому без ограничения общности можно считать, что сама последовательность $v_j(t + t_j)$ сходится к некоторой ограниченной на $(-\infty, \infty)$ функции $w(t)$ равномерно на каждом конечном промежутке. Из (2.31) вытекает, что последовательность $v_j'(t + t_j)$ равномерно на каждом конечном промежутке сходится

к $w'(t)$. Переходя в (2.31) к пределу, получим равенство

$$\frac{dw(t)}{dt} + Q^*(t)\,w(t) = 0. \tag{2.32}$$

Уравнению (2.32) соответствует однородное уравнение

$$L_* x \equiv \frac{d^m x}{dt^m} + A_1^*(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m^*(t)\,x = 0, \tag{2.33}$$

коэффициенты которого являются пределами соответствующих последовательностей $A_i(t + t_j)$. Из леммы 2.5 вытекает, что у уравнения (2.33) нет нетривиальных решений в пространстве $C^m(R^n)$. Поэтому $w(t) \equiv 0$ и, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} |v_j(t_j)| = w(0) = 0,$$

что противоречит (2.30).

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы 2.4 мы использовали неявно простой факт: *из регулярности пп-оператора L вытекает регулярность всех операторов из $H(L)$.*

Самый отдаленный пункт земного шара к чему-нибудь да близок, а самый близкий от чего-нибудь да отдален.

Козьма Прутков

§ 3. Поведение решений однородного уравнения

3.1. Первая теорема о дихотомии. Рассмотрим в R^n однородное уравнение

$$Lx = 0 \tag{3.1}$$

с регулярным пп-оператором первого порядка

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)\,x. \tag{3.2}$$

Обозначим через E_+ множество тех начальных (при $t = 0$) значений $x \in R^n$, которым соответствуют решения, ограниченные при $t \in (0, \infty)$; через E_- — множество тех начальных значений, которым соответствуют

решения, ограниченные при $t \in (-\infty, 0)$. В силу регулярности оператора (3.2) подпространства E_+ и E_- не имеют ненулевых общих точек.

Теорема 3.1. *Прямая сумма подпространств E_+ и E_- совпадает с R^n.*

Доказательство. Обозначим через $U(t)$ фундаментальную матрицу решений уравнения (3.1), удовлетворяющую условию $U(0) = I$, где I — единичная матрица. Тогда, как известно, решение $x(t)$ уравнения

$$Lx = f(t), \tag{3.3}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = x_0, \tag{3.4}$$

определяется формулой

$$x(t) = U(t)\left[x_0 + \int_0^t U^{-1}(s) f(s)\, ds\right]. \tag{3.5}$$

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Пусть $e_0 \in E_+ \dotplus E_-$. Положим

$$f(t) = \xi(t)\, U(t)\, e_0,$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -\infty < t \leqslant 0, \\ t(1-t), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad 1 \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Тогда

$$x(t) = U(t)\left[x_0 + \int_0^t \xi(s)\, ds\, e_0\right]. \tag{3.6}$$

Так как L регулярен, то существует единственное $x_0 \in R^n$, при котором функция (3.6) ограничена на $(-\infty, \infty)$. Очевидно,

$$x(t) = U(t) x_0 \qquad (t \leqslant 0),$$

поэтому $x_0 \in E_-$. С другой стороны,

$$x(t) = U(t)\left[x_0 + \frac{1}{6} e_0\right] \qquad (t \geqslant 1),$$

и поэтому $x_0+\frac{1}{6}e_0\in E_+$, т. е. $e_0\in E_+\dotplus E_-$. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Возможность расщепления множества всех решений однородного уравнения (3.1) в прямую сумму подпространства решений, ограниченных при $t\to-\infty$, и подпространства решений, ограниченных при $t\to\infty$, называют *дихотомией* решений.

3.2. Экспоненциальная дихотомия. Расщеплению пространства R^n в прямую сумму $E_+\dotplus E_-$ соответствует расщепление n-мерного пространства X решений однородного уравнения (3.1) в прямую сумму $X_+\dotplus X_-$ подпространств решений, начальные значения которых принадлежат соответственно E_+ и E_-.

Дихотомия решений называется *экспоненциальной*, если найдутся такие положительные постоянные M_+, M_-, γ_+, γ_-, что при $x(t)\in X_+$

$$|x(t)|\leqslant M_+e^{-\gamma_+(t-s)}|x(s)| \qquad (-\infty<s\leqslant t<\infty), \tag{3.7}$$

а при $x(t)\in X_-$

$$|x(t)|\geqslant M_-e^{\gamma_-(t-s)}|x(s)| \qquad (-\infty<s\leqslant t<\infty). \tag{3.8}$$

Теорема 3.2. *Пусть пп-оператор* (3.2) *регулярен. Тогда дихотомия* $X=X_+\dotplus X_-$ *экспоненциальна.*

Доказательство. Пусть вначале $x(t)\in X_-$ и $x(0)\neq 0$. Положим

$$\varkappa(t;\tau_1,\tau_2)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad -\infty<t\leqslant\tau_1-1,\\ t-\tau_1+1, & \text{если} \quad \tau_1-1\leqslant t\leqslant\tau_1,\\ 1, & \text{если} \quad \tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2,\\ 1-t+\tau_2, & \text{если} \quad \tau_2\leqslant t\leqslant\tau_2+1,\\ 0, & \text{если} \quad \tau_2+1\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

Тогда функция

$$y(t;\tau_1,\tau_2)=x(t)\int_0^\infty \varkappa(\sigma;\tau_1,\tau_2)\,|x(\sigma)|^{-1}d\sigma \tag{3.9}$$

является ограниченным на $(-\infty, \infty)$ решением уравнения

$$Ly = -\varkappa(t; \tau_1, \tau_2)\,|x(t)|^{-1}x(t).$$

Очевидно,

$$\|-\varkappa(t; \tau_1, \tau_2)\,|x(t)|^{-1}x(t)\|_{C(R^n)} \leqslant 1 \qquad (-\infty < \tau_1 \leqslant \tau_2 < \infty).$$

Поэтому из регулярности L вытекает равномерная ограниченность функций (3.9):

$$|y(t; \tau_1, \tau_2)| \leqslant b \qquad (-\infty < t < \infty;\ -\infty < \tau_1 \leqslant \tau_2 < \infty).$$

Если в этих неравенствах перейти к пределу при $\tau_1 \to -\infty$, $\tau_2 \to \infty$, то мы получим соотношения

$$|x(t)| \int_t^\infty |x(\sigma)|^{-1} d\sigma \leqslant b \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (3.10)$$

Так как матрица $A(t)$ ограничена, то решение $x(t)$ однородного уравнения (3.1) удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leqslant e^{a(t-s)}|x(s)| \qquad (-\infty < s \leqslant t < \infty), \quad (3.11)$$

где a — норма матрицы-функции $A(t)$. Из этого неравенства вытекает, что

$$|x(t)| \int_t^\infty |x(\sigma)|^{-1} d\sigma \geqslant \int_t^\infty e^{-a(\sigma-t)} d\sigma = \frac{1}{a} \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (3.12)$$

Введем в рассмотрение скалярную функцию

$$\varphi(t) = \int_t^\infty |x(\sigma)|^{-1} d\sigma.$$

Неравенство (3.10) означает, что

$$\varphi'(t) \leqslant -\frac{1}{b}\varphi(t) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

откуда

$$\varphi(t) \leqslant e^{-(t-s)/b}\varphi(s) \qquad (-\infty < s \leqslant t < \infty). \quad (3.13)$$

Пусть $s \leqslant t$. Тогда в силу (3.12) и (3.13)

$$|x(t)| \geqslant \frac{1}{a\varphi(t)} \geqslant e^{(t-s)/b} \frac{1}{a\varphi(s)}$$

и, далее, в силу (3.10)

$$|x(t)| \geqslant \frac{1}{ab} e^{(t-s)/b} |x(s)| \qquad (-\infty < s \leqslant t < \infty).$$

Эта оценка совпадает с неравенством (3.8).

Для исследования решений, принадлежащих X_+, рассмотрим вспомогательное уравнение

$$L_1 y = 0, \tag{3.14}$$

где

$$L_1 y = \frac{dy}{dt} - A(-t)y.$$

Очевидно, пп-оператор L_1 регулярен вместе с пп-оператором L. По уже доказанному, решения $y(t)$ уравнения (3.14), ограниченные при $t \to -\infty$, удовлетворяют неравенству (3.8). Отсюда вытекает, что функции $x(t) = y(-t)$ удовлетворяют неравенствам (3.7). Остается заметить, что каждая функция $x(t) \in X_+$ представима в виде $x(t) = y(-t)$, где $y(t)$ — ограниченное при $t \to -\infty$ решение уравнения (3.14).

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 3.2 видно, что *постоянные* M_+, M_-, γ_+, γ_- *в оценках* (3.7) *и* (3.8) *можно определить лишь по величинам нормы* b *оператора* L^{-1} (*как оператора из* $C(R^n)$ *в* $C(R^n)$) *и нормы* a *матрицы-функции* $A(t)$.

Приведенное доказательство аналогично рассуждениям, которые проводили Д. Л. Массера и И. И. Шеффер [1, 2] при исследовании дихотомии решений, рассматриваемых на полуоси. Близкие построения проводились М. Г. Крейном [1] при исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

3.3. Равномерность дихотомии. Пусть E_1 и E_2 — подпространства пространства R^n. *Углом* между E_1 и E_2 назовем величину

$$\alpha(E_1, E_2) = \min_{x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2,\ |x_1| = |x_2| = 1} |x_1 - x_2|. \tag{3.15}$$

Продолжим изучение решений однородного уравнения (3.1). Ввведем обозначения

$$E_+(t) = U(t)E_+, \quad E_-(t) = U(t)E_- \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (3.16)$$

Теорема 3.3. *Справедливо неравенство*

$$\alpha[E_+(t), \quad E_-(t)] \geqslant \alpha_0 > 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (3.17)$$

Доказательство. Пусть

$$x_+(t) \in X_+, \quad x_-(t) \in X_- \qquad (x_+(0) \neq 0, \quad x_-(0) \neq 0).$$

При любом $m \geqslant 0$ и при всех $t \in (-\infty, \infty)$ в силу (3.11)

$$\left| \frac{x_+(t+m)}{|x_+(t)|} - \frac{x_-(t+m)}{|x_-(t)|} \right| \leqslant e^{am} \left| \frac{x_+(t)}{|x_+(t)|} - \frac{x_-(t)}{|x_-(t)|} \right|, \quad (3.18)$$

а в силу (3.7) и (3.8)

$$|x_+(t+m)| \leqslant M_+ e^{-\nu_+ m} |x_+(t)| \qquad (-\infty < t < \infty), \quad (3.19)$$

$$|x_-(t+m)| \geqslant M_- e^{\nu_- m} |x_-(t)| \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (3.20)$$

Выберем число m так, чтобы выполнялось неравенство

$$M_- e^{\nu_- m} > M_+ e^{-\nu_+ m}. \quad (3.21)$$

Из (3.18)—(3.21) вытекает тогда, что

$$\left| \frac{x_+(t)}{|x_+(t)|} - \frac{x_-(t)}{|x_-(t)|} \right| \geqslant e^{-am} \left\{ \frac{|x_-(t+m)|}{|x_-(t)|} - \frac{|x_+(t+m)|}{|x_+(t)|} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant e^{-am} \left(M_- e^{\nu_- m} - M_+ e^{-\nu_+ m} \right) = \alpha_0 > 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Из этого неравенства вытекает (3.17).

Теорема доказана.

Свойство дихотомии, выражаемое неравенством (3.17), естественно называть ее *равномерностью*.

Расщепление пространства R^n в прямую сумму $E_+(t) \dotplus E_-(t)$ означает, что каждый элемент $x \in R^n$ единственным образом представим в виде

$$x = x_+ + x_- \qquad (x_+ \in E_+(t), \; x_- \in E_-(t)).$$

Это представление определяет операторы

$$P_+(t)x = x_+, \quad P_-(t)x = x_- \qquad (x \in R^n, \; -\infty < t < \infty) \quad (3.22)$$

проектирования соответственно на подпространство $E_+(t)$ (по направлению подпространства $E_-(t)$) и на подпространство $E_-(t)$ (по направлению подпространства $E_+(t)$). Для сокращения записи вместо $P_+(0)$ и $P_-(0)$ в дальнейшем будем писать P_+ и P_-. Легко видеть, что

$$P_+(t) = U(t)P_+U^{-1}(t), P_-(t) = U(t)P_-U^{-1}(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (3.23)$$

Теорема 3.4. *Пусть пп-оператор* (3.2) *регулярен. Тогда нормы операторов* $P_+(t)$ *и* $P_-(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ *ограничены в совокупности.*

Доказательство. Для любых ненулевых элементов x, $y \in R^n$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}\right| \cdot \max\{|x|, |y|\} \leqslant 2|x+y| \quad (3.24)$$

(доказательство предоставляем читателю). Отсюда и из теоремы 3.3 вытекает, что при любом x, для которого

$$P_+(t)x \neq 0, \qquad P_-(t)x \neq 0, \quad (3.25)$$

выполнено неравенство

$$\max\{|P_+(t)x|, |P_-(t)x|\} \leqslant \leqslant \frac{2}{\alpha_0}|P_+(t)x + P_-(t)x| = \frac{2}{\alpha_0}|x|.$$

Утверждение теоремы очевидно, если один из операторов P_+, P_- равен нулю. В противном случае удовлетворяющие условиям (3.25) элементы образуют плотное в R^n множество и из последнего неравенства вытекают оценки

$$|P_+(t)x| \leqslant \frac{2}{\alpha_0}|x|, \ |P_-(t)x| \leqslant \frac{2}{\alpha_0}|x| \quad (3.26)$$
$$(x \in R^n, \ -\infty < t < \infty).$$

Теорема доказана.

Утверждения, аналогичные теоремам этого пункта, получены Д. Л. Массера и И. И. Шеффером [1, 2] в несколько другой ситуации.

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

Козьма Прутков

§ 4. Функция Грина

4.1. Описание функции Грина. Пусть пп-оператор

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x \tag{4.1}$$

регулярен

Функцией Грина пп-оператора (4.1) называется матрица-функция $G(t, s)$ $(-\infty < t, s < \infty)$, обладающая следующими свойствами.

1. При $t \neq s$ справедливо тождество

$$\frac{\partial^m G(t, s)}{\partial t^m} + A_1(t)\frac{\partial^{m-1} G(t, s)}{\partial t^{m-1}} + \ldots + A_m(t)\, G(t, s) \equiv 0. \tag{4.2}$$

2. Матрицы-функции

$$G(t, s), \quad \frac{\partial G(t, s)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{m-2} G(t, s)}{\partial t^{m-2}} \tag{4.3}$$

непрерывны по совокупности переменных $t, s \in (-\infty, \infty)$, производная $\dfrac{\partial^{m-1} G(t, s)}{\partial t^{m-1}}$ непрерывна по совокупности переменных при $t \neq s$ и

$$\frac{\partial^{m-1} G(t+0, t)}{\partial t^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} G(t-0, t)}{\partial t^{m-1}} = I. \tag{4.4}$$

3. Справедливы оценки

$$|G(t, s)|, \left|\frac{\partial G(t, s)}{\partial t}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^{m-1} G(t, s)}{\partial t^{m-1}}\right| \leqslant M e^{-\gamma|t-s|} \tag{4.5}$$

$$(-\infty < t, s < \infty;\ t \neq s),$$

где $M, \gamma > 0$.

Матрица-функция, обладающая свойствами 1—3, единственна (так как разность двух таких функций при фиксированных s является ограниченным на $(-\infty, \infty)$

решением однородного уравнения $Lx = 0$ и поэтому равна нулю). Легко видеть, что интегральный оператор

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds \qquad (f \in C(R^n)), \tag{4.6}$$

ядром которого является функция Грина, дает ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение неоднородного уравнения

$$Lx = f(t). \tag{4.7}$$

Поэтому оператор T совпадает с оператором L^{-1}, который действует из $C(R^n)$ в $C^m(R^n)$.

Основной целью настоящего параграфа является построение функции Грина.

4.2. Построение функции Грина. Пусть

$$\tilde{L}u = \frac{du}{dt} + Q(t)u \tag{4.8}$$

— пп-оператор (2.4). Этот оператор в силу теоремы 2.4 регулярен вместе с оператором L.

Построим вначале функцию Грина $\tilde{G}(t, s)$ для пп-оператора (4.8).

В силу теоремы 3.1 пространство R^{mn} представимо в виде прямой суммы $E_+ \dotplus E_-$ подпространств, первое из которых состоит из начальных значений (при $t = 0$) ограниченных при $t \to \infty$ решений однородного уравнения $\tilde{L}u = 0$, а второе — из начальных значений решений, ограниченных при $t \to -\infty$; как обычно, через P_+ и P_- обозначим соответственно операторы проектирования на E_+ (по направлению E_-) и проектирования на E_- (по направлению E_+); тогда $P_+ + P_- = I$. Пусть $U(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $\tilde{L}u = 0$, удовлетворяющая условию $U(0) = I$.

Положим

$$\tilde{G}(t, s) = \begin{cases} U(t) P_+ U^{-1}(s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -U(t) P_- U^{-1}(s), & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{4.9}$$

Функция $\tilde{G}(t, s)$ очевидным образом обладает свойствами 1 и 2. Покажем, что она удовлетворяет оценкам (4.5).

Иначе говоря, покажем, что

$$|U(t)P_+U^{-1}(s)| \leqslant Me^{-\gamma(t-s)} \quad (-\infty < s \leqslant t < \infty), \tag{4.10}$$

$$|U(t)P_-U^{-1}(s)| \leqslant Me^{\gamma(t-s)} \quad (-\infty < t \leqslant s < \infty), \tag{4.11}$$

где M, $\gamma > 0$.

Пусть $t \geqslant s$. Положим

$$x_+(t) = U(t)P_+U^{-1}(s)x.$$

Очевидно, $x_+(0) \in E_+$ и, в силу теоремы 3.2 (оценка (3.7)),

$$|x_+(t)| \leqslant M_+e^{-\gamma_+(t-s)}|x_+(s)| = \\ = M_+e^{-\gamma_+(t-s)}|U(s)P_+U^{-1}(s)x|.$$

Из последней оценки и теоремы 3.4 вытекает (4.10).

Пусть $t \leqslant s$. Положим тогда

$$x_-(t) = U(t)P_-U^{-1}(s)x.$$

Так как $x_-(0) \in E_-$, то из теоремы 3.2 (оценка (3.8)) вытекает неравенство

$$|x_-(t)| \leqslant \frac{1}{M_-}e^{\gamma_-(t-s)}|x_-(s)| = \\ = \frac{1}{M_-}e^{\gamma_-(t-s)}|U(s)P_-U^{-1}(s)x|,$$

и для доказательства справедливости оценки (4.11) снова нужно сослаться на теорему 3.4.

Таким образом, верна

Теорема 4.1. *Формула* (4.9) *определяет функцию Грина оператора* (4.8).

Из доказательства ясно (см. замечание в конце пункта 3.2), что постоянные M и γ в оценках (4.5) можно определить так, чтобы они зависели лишь от норм оператора $\tilde{L}^{-1}$ и матрицы-функции $Q(t)$.

Запишем матрицу-функцию (4.9) в виде

$$\tilde{G}(t, s) = \begin{Vmatrix} g_{11}(t, s) & g_{12}(t, s) & \dots & g_{1m}(t, s) \\ g_{21}(t, s) & g_{22}(t, s) & \dots & g_{2m}(t, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(t, s) & g_{m2}(t, s) & \dots & g_{mm}(t, s) \end{Vmatrix}, \tag{4.12}$$

где $g_{ij}(t, s)$ — квадратные матрицы-функции порядка n. Рассмотрим при фиксированных s вектор-функции $\tilde{G}(t, s)u$, где $u = \{0, \ldots, 0, x\}$; очевидно,

$$\tilde{G}(t, s)u = \{g_{1m}(t, s)x, \ldots, g_{mm}(t, s)x\}.$$

Введенные функции при $t \neq s$ являются решениями однородного уравнения $\tilde{L}x = 0$. Поэтому при $t \neq s$

$$g_{im}(t, s) = \frac{\partial^{i-1} g_{1m}(t, s)}{\partial t^{i-1}} \qquad (i = 2, \ldots, m). \tag{4.13}$$

Равенства (4.13) при $i = 2, \ldots, m-1$ верны и при $t = s$.

Положим

$$G(t, s) = g_{1m}(t, s). \tag{4.14}$$

Так как $\tilde{G}(t, s)$ является функцией Грина, то она удовлетворяет условиям 1—3. Из равенств (4.13) вытекает тогда, что и функция (4.14) удовлетворяет условиям 1—3. Нами доказана

Теорема 4.2. *Матрица-функция* (4.14) *является функцией Грина регулярного пп-оператора* (4.1).

4.3. Зависимость функции Грина от параметра. Рассмотрим два регулярных пп-оператора

$$L_1 x = \frac{dx}{dt} + A_1(t)x, \tag{4.15}$$

$$L_2 x = \frac{dx}{dt} + A_2(t)x; \tag{4.16}$$

их функции Грина обозначим соответственно через $G_1(t, s)$ и $G_2(t, s)$. Из свойств функции Грина вытекает существование таких M, $\gamma > 0$, что

$$|G_1(t, s)|, \ |G_2(t, s)| \leqslant Me^{-\gamma|t-s|} \tag{4.17}$$
$$(-\infty < t, s < \infty).$$

Лемма 4.1. *Существуют такие положительные* M_0 *и* γ_0, *зависящие только от* M *и* γ, *что*

$$|G_1(t, s) - G_2(t, s)| \leqslant M_0 e^{-\gamma_0|t-s|} \| A_1(\tau) - A_2(\tau) \|_{C(R^n)}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Пусть $f(t)$ — произвольная функция из $C(R^n)$, а $x_1(t)$, $x_2(t)$ — ограниченные решения уравнений

$$L_1x = f(t), \quad L_2x = f(t).$$

Очевидно, $L_1[x_1(t) - x_2(t)] = [A_2(t) - A_1(t)]x_2(t)$, поэтому

$$x_1(t) - x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t, s)[A_2(s) - A_1(s)]\, x_2(s)\, ds. \quad (4.19)$$

Введем в рассмотрение матрицу-функцию

$$V(t, s) = G_1(t, s) - G_2(t, s) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t, \sigma)[A_1(\sigma) - A_2(\sigma)]\, G_2(\sigma, s)\, d\sigma.$$

Легко видеть, что $V(t, s)$ непрерывна по совокупности переменных $-\infty < t, s < \infty$ и что

$$|V(t, s)| \leqslant M_1 e^{-\gamma_1|t-s|} \qquad (-\infty < t, s < \infty), \quad (4.20)$$

где M_1 и γ_1 положительны. Оценка (4.20) позволяет определить функцию

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t, s) f(s)\, ds.$$

Очевидно,

$$v(t) = x_1(t) - x_2(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t, \sigma)[A_1(\sigma) - A_2(\sigma)]\, x_2(\sigma)\, d\sigma.$$

Из последнего равенства и из (4.19) вытекает тождество $v(t) \equiv 0$

Так как $f(t)$ была призвольной функцией из $C(R^n)$, то $V(t, s) \equiv 0$. Таким образом, установлено тождество

$$G_1(t, s) - G_2(t, s) = \\ = -\int_{-\infty}^{\infty} G_1(t, \sigma)[A_1(\sigma) - A_2(\sigma)]\, G_2(\sigma, s)\, d\sigma. \quad (4.21)$$

Из (4.21) вытекает неравенство

$$|G_1(t, s) - G_2(t, s)| \leqslant$$
$$\leqslant M^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma[|t-\sigma|+|\sigma-s|]} d\sigma \cdot \| A_1(\tau) - A_2(\tau) \|_{C(R^n)},$$

откуда следует (4.18).

Лемма доказана.

Перейдем к изучению семейств пп-операторов

$$L_\mu x = \frac{dx}{dt} + A(t; \mu) x, \tag{4.22}$$

где μ принадлежит некоторому метрическому компакту M.

Теорема 4.3. *Пусть пп-матрицы $A(t; \mu)$ непрерывны по μ равномерно относительно t. Пусть при всех $\mu \in M$ пп-операторы (4.22) регулярны.*

Тогда функция Грина $G(t, s; \mu)$ операторов (4.22) непрерывно зависит от μ и, более того, найдутся такие положительные M_0 и γ_0, что при любых $\mu_1, \mu_2 \in M$

$$|G(t, s; \mu_1) - G(t, s; \mu_2)| \leqslant$$
$$\leqslant M_0 e^{-\gamma_0|t-s|} \| A(\tau; \mu_1) - A(\tau; \mu_2) \|_{C(R^n)}. \tag{4.23}$$

Доказательство. Так как матрицы $A(t; \mu)$ непрерывно зависят от $\mu \in M$ равномерно относительно $t \in (-\infty, \infty)$ и так как M компактно, то нормы матриц-функций $A(t; \mu)$ и операторов L_μ^{-1} ограничены в совокупности. Поэтому справедливы неравенства

$$|G(t, s; \mu)| \leqslant M e^{-\gamma|t-s|} \qquad (\mu \in M; \ -\infty < t, \ s < \infty),$$

где положительные постоянные M и γ не зависят от μ. Для доказательства неравенства (4.23) теперь остается применить лемму 4.1

Теорема доказана.

Определим для операторов (4.22) проекционные операторы (3.22) и обозначим их через $P_+(t; \mu)$, $P_-(t; \mu)$; далее, пусть

$$E_+(t; \mu) = P_+(t; \mu) R^n, \qquad E_-(t; \mu) = P_-(t; \mu) R^n. \tag{4.24}$$

Из формулы (4.9) вытекают равенства

$$P_+(t;\mu)=\lim_{h\to+0} G(t+h,t;\mu), \tag{4.25}$$

$$P_-(t;\mu)=-\lim_{h\to-0} G(t+h,t;\mu). \tag{4.26}$$

Поэтому в условиях теоремы 4.3 операторы $P_+(t;\mu)$ и $P_-(t;\mu)$ непрерывно зависят от μ (равномерно относительно значений t). Отсюда вытекает, что *размерности подпространств* $E_+(t;\mu)$ *и* $E_-(t;\mu)$ *не зависят от* μ. Сделанные замечания дополняют доказанные в § 3 теоремы о дихотомии.

Исследование зависимости функции Грина пп-операторов от параметров будет продолжено в гл. 4.

Пусть $A(t)$ — пп-матрица. Через $H(A)$ обозначим множество всех сдвигов матрицы $A(t)$, т. е. множество, состоящее из матриц $A(t+h)$ $(-\infty<h<\infty)$ и всех таких пп-матриц $A_*(t)$, которые являются пределами (равномерными по t) последовательностей вида $A(t+h_k)$. Множество $H(A)$ компактно в равномерной норме. Нетрудно показать, что $H(A)=H(A_*)$ при любой $A_*(t)\in H(A)$. В п. 2.4 было показано, что из регулярности оператора

$$Lx=\frac{dx}{dt}+A(t)x \tag{4.27}$$

вытекает регулярность всех операторов

$$L_*x=\frac{dx}{dt}+A_*(t)x \qquad (A_*(t)\in H(A)). \tag{4.28}$$

Теорема 4.4. *Пусть последовательность пп-матриц* $A(t+h_k)$ *равномерно сходится к* $A_*(t)$. *Пусть оператор* (4.27) *регулярен.*

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{-\infty<t,s<\infty}|G(t+h_k,s+h_k)-G_*(t,s)|e^{\gamma_0|t-s|}=0, \tag{4.29}$$

где $G(t,s)$, $G_*(t,s)$ — *функции Грина операторов* (4.27), (4.28), *а* γ_0 — *некоторое положительное число.*

Для доказательства достаточно заметить, что $G(t+h,s+h)$ является при любом h функцией Грина

оператора

$$L_h x = \frac{dx}{dt} + A(t+h)x,$$

и сослаться на теорему 4.3.

Без труда можно сформулировать аналоги утверждений этого пункта для пп-операторов порядка m. Обратим лишь внимание на то, что соответствующим оценкам удовлетворяют не только сами функции Грина, но и их производные по t до порядка $m-1$.

Из теоремы 4.4 немедленно вытекает, что *матрицы-функции $P_+(t)$ и $P_-(t)$ почти периодичны по t.*

4.4. Примеры. В качестве первого примера рассмотрим оператор

$$Lx = \frac{dx}{dt} + a(t)x, \tag{4.30}$$

где $a(t)$ — скалярная пп-функция, а $x(t)$ — скалярная функция. Условия регулярности этого оператора дает теорема Д. Л. Массера [1].

Теорема 4.5. *Оператор* (4.30) *регулярен в том и только том случае, если*

$$M(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} a(t)\,dt \neq 0. \tag{4.31}$$

Доказательство. Проще устанавливается достаточность условия (4.31).

Пусть вначале $M(a) < 0$. Тогда положим

$$G(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \geqslant s, \\ -e^{-\int_s^t a(\tau)\,d\tau}, & \text{если } t < s. \end{cases} \tag{4.32}$$

Функция $G(t, s)$ является функцией Грина оператора (4.30), так как формула

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\,ds = -\int_t^{\infty} e^{-\int_s^t a(\tau)\,d\tau} f(s)\,ds \tag{4.33}$$

определяет при любой $f(t) \in C(R^1)$ ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t). \tag{4.34}$$

Пусть теперь $M(a) > 0$. Тогда функция Грина оператора (4.30) определяется равенством

$$G(t, s) = \begin{cases} e^{-\int_s^t a(\tau)\,d\tau}, & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ 0, & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{4.35}$$

Перейдем к доказательству необходимости условия (4.31). Обозначим через $x_0(t)$ пп-решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = 1.$$

Положим $a_0 = \sup\limits_{-\infty < t < \infty} |a(t)|$ и покажем, что

$$|x_0(t)| \geqslant \frac{1}{2a_0} \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{4.36}$$

В предположении противного найдется такое t_0, что $|x_0(t_0)| < 1/(2a_0)$. Тогда при тех $t > t_0$, при которых $|x_0(t)| \leqslant 1/(2a_0)$, выполнено неравенство $\dot{x}_0(t) \geqslant 1/2$. Следовательно, $x_0(t) \geqslant 1/(2a_0)$ при всех $t \geqslant t_0 + 2/a_0$. Отсюда вытекает, что функция $x_0(t)$ не обладает свойством почти периодичности.

В силу (4.36) $1/x_0(t)$ является пп-функцией, причем

$$M\left[\frac{1}{x_0(t)}\right] \neq 0.$$

Из равенства

$$a(t) = \frac{1}{x_0(t)} - \frac{\dot{x}_0(t)}{x_0(t)}$$

вытекает, что

$$M(a) = M\left(\frac{1}{x_0}\right) + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{\dot{x}_0(t)}{x_0(t)}\,dt = M\left(\frac{1}{x_0}\right).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 4.5 вытекает, что *множество нерегулярных пп-операторов нигде не плотно в пространстве пп-операторов* (4.30).

В качестве второго примера рассмотрим оператор

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m x \tag{4.37}$$

с постоянными коэффициентами. Очевидно, оператор (4.37) регулярен в том и только том случае, когда характеристический многочлен

$$\det \left\| \lambda^m I + \lambda^{m-1} A_1 + \ldots + A_m \right\| = 0 \tag{4.38}$$

не имеет корней на мнимой оси.

Исследование операторов (4.37) с переменными коэффициентами требует преодоления значительных трудностей. Ряд результатов, связанных с этой задачей, будет изложен в последующих главах.

В заключение сделаем несколько общих замечаний о пп-операторе

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)\, x \tag{4.39}$$

в случае, когда $x \in R^n$ и

$$A(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{Vmatrix}. \tag{4.40}$$

Матрицу (4.40) называют треугольной, если $a_{ij} \equiv 0$ при $i > j$. Из теоремы 4.5 вытекает, что *оператор* (4.39) *с треугольной матрицей* (4.40) *регулярен в том и только том случае, если все средние* $M(a_{ii})$ $(i = 1, \ldots, n)$ *отличны от нуля.*

Важный класс образуют операторы (4.39) с периодическими матрицами $A(t)$. Для регулярности таких операторов необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $Lx = 0$ не имело нетривиальных ограниченных на $(-\infty, \infty)$ решений.

Недавно Э. Мухамадиев перенес последнее утверждение на пп-операторы. Его теорема гласит, что *пп-оператор* (4.39) *регулярен в том и только том случае, если у всех однородных уравнений*

$$\frac{dx}{dt} + A_*(t)\, x = 0 \qquad (A_*(t) \in H(A)) \tag{4.41}$$

нет отличных от тождественного нуля решений, ограниченных на всей оси $(-\infty, \infty)$.

Основную роль в доказательстве Э. Мухамадиева играет справедливость для всех решений $x(t)$ уравнений (4.41) оценки

$$|x(t)| \leqslant \delta \max\{|x(T_1)|, \ |x(T_2)|\} \qquad (T_1 \leqslant t \leqslant T_2) \tag{4.42}$$

с общей постоянной $\delta > 0$, не зависящей от T_1 и T_2.

Отметим, что теорема Э. Мухамадиева существенно усиливает известную первую теорему Ж. Фавара (см. Б. М. Левитан [1]) о решениях неоднородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t) \tag{4.43}$$

с почти периодической правой частью.

4.5. Функция Грина периодической краевой задачи. Предположим, что коэффициенты $A_i(t)$ регулярного оператора (4.1) являются ω-*периодическими матрицами-функциями*. Рассмотрим уравнение

$$Lx = f(t) \tag{4.44}$$

с ω-периодической правой частью $f(t)$. Если $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (4.44), то функция $x(t+\omega)$ также будет ограниченным решением этого уравнения. Но из регулярности оператора L вытекает единственность ограниченного решения и поэтому

$$x(t+\omega) \equiv x(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Мы показали, что оператор (4.6) преобразует каждую ω-периодическую функцию $f(t)$ также в ω-периодическую функцию.

Для отыскания ω-периодических решений уравнений (4.44) формулу (4.6) удобно переписать в виде

$$x(t) = Tf(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{\omega} G(t, s+j\omega) f(s)\, ds$$

или, что то же, в виде

$$Tf(t) = \int_0^{\omega} G_{\omega}(t, s) f(s)\, ds, \tag{4.45}$$

где

$$G_{\omega}(t, s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G(t, s+j\omega) \qquad (-\infty < t < \infty;\ 0 \leqslant s \leqslant \omega). \tag{4.46}$$

Матрицу-функцию (4.46) называют *функцией Грина* ω-*периодической краевой задачи*. Нетрудно показать, что функция Грина $G_{\omega}(t, s)$ ω-периодична по t:

$$G_{\omega}(t+\omega, s) \equiv G_{\omega}(t, s). \tag{4.47}$$

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.

Козьма Прутков

§ 5. Положительность функции Грина

5.1. Конусы и клинья. Пусть E — вещественное банахово пространство. Множество $K \subset E$ называют *клином*, если оно выпукло, замкнуто и если из $x \in K$ вытекает, что $\alpha x \in K$ при всех $\alpha \geqslant 0$. Клин K называется *конусом*, если из x, $-x \in K$ вытекает равенство $x = 0$.

Простейшими примерами конусов в $C(R^1)$ и $B(R^1)$ являются множества K неотрицательных функций. В пространстве R^n — множество элементов с неотрицательными компонентами (в некотором базисе).

Каждый конус $K \subset E$ порождает в E *полуупорядоченность*: пишут $x \leqslant y$, если $y - x \in K$. Легко видеть, что неравенства можно почленно складывать, умножать на неотрицательные числа, переходить в них к пределу; из $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ следует $x \leqslant z$.

Линейный функционал $l \in E^*$ называют *положительным*, если $l(x) \geqslant 0$ при $x \in K$. Множество положительных функционалов образует клин, который обозначают через K^*.

Конус K называют *телесным*, если он содержит внутренние элементы. Если $y - x$ является внутренним элементом K, то пишут $x \ll y$. Непосредственно из определения вытекают следующие утверждения:

1°. Если $x \leqslant y$, $u \ll v$, то $x + u \ll y + v$,

2°. Если $x \ll y$, $\alpha > 0$, то $\alpha x \ll \alpha y$,

3°. Если $x \leqslant y$, $y \ll z$ или $x \ll y$, $y \leqslant z$, то $x \ll z$.

В приведенных выше примерах конус K телесен. Ниже, как правило, будут применяться телесные конусы.

Конус K называется *нормальным*, если из $0 \leqslant x \leqslant y$ вытекает неравенство

$$\|x\| \leqslant N\|y\|, \tag{5.1}$$

где N не зависит от x, y. В приведенных выше примерах конус K нормален; в конечномерных (но не в бесконечномерных!) пространствах любой конус нормален.

Конус K называется *миниедральным*, если для каждых двух элементов $x, y \in E$ найдется такой элемент u, что, с одной стороны, $x \leqslant u$ и $y \leqslant u$, а с другой стороны, из $x \leqslant v$ и $y \leqslant v$ вытекает неравенство $u \leqslant v$. Элемент u называют supremum'ом элементов x, y и пишут $u = \sup\{x, y\}$. Используют обозначения

$$x_+ = \sup\{0, x\}, \qquad x_- = \sup\{0, -x\}.$$

Очевидно, $x = x_+ - x_-$. Отметим, что в приведенных выше примерах конус K миниедрален.

В случае конечномерных пространств R^n конусами векторов с неотрицательными компонентами в некотором базисе исчерпывается класс миниедральных конусов. Иначе говоря, конус $K \subset R^n$ миниедрален в том и только в том случае, если он является пересечением n полупространств. Легко указать примеры неминиедральных конусов.

Общие определения, приведенные в этом пункте, принадлежат М. Г. Крейну (М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]; М. А. Красносельский [1]).

5.2. Функционалы, выделяющие конус. Непрерывный функционал $q(x)$, определенный на E, называется *сублинейным*, если

$$q(\alpha x) \equiv \alpha q(x) \qquad (\alpha \geqslant 0, \quad x \in E) \tag{5.2}$$

и

$$q(x+y) \leqslant q(x) + q(y) \qquad (x, y \in E). \tag{5.3}$$

Простейшими примерами сублинейных функционалов являются линейные функционалы $l(x)$ и норма $\|x\|$.

Пусть $\{q_\gamma(x)\}$ — некоторое семейство сублинейных функционалов и

$$q_*(x) = \sup_\gamma q_\gamma(x) < \infty \qquad (x \in E). \tag{5.4}$$

Легко видеть, что $q_*(x)$ также сублинеен.

Пусть $q(x)$ — сублинейный функционал. Обозначим через F множество таких линейных функционалов $l \in E^*$, которые удовлетворяют неравенству

$$l(x) \leqslant q(x) \qquad (x \in E). \tag{5.5}$$

Лемма 5.1. *Имеет место формула*

$$q(x) = \max_{l \in F} l(x) \qquad (x \in E). \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in E$. Достаточно построить по элементу x_0 такой функционал $l \in F$, что $l(x_0) = q(x_0)$. Определим вначале функционал l на прямой $x = \alpha x_0 (-\infty < \alpha < \infty)$ формулой

$$l(x) = \alpha q(x_0).$$

Очевидно,

$$l(\alpha x_0) \leqslant q(\alpha x_0) \qquad (-\infty < \alpha < \infty).$$

Из теоремы Хана — Банаха (см., например, Н. Данфорд и Дж. Шварц [1], стр. 74) вытекает, что $l(x)$ может быть продолжен до непрерывного на всем E функционала из F.

Лемма доказана.

Отметим, что множество F бикомпактно в E-топологии (см. Н. Данфорд и Дж. Шварц [1], гл. 5) пространства E^*.

Пусть $q(x)$ — сублинейный функционал. Введем обозначения

$$K = \{x\colon\ q(x) \leqslant 0\} \tag{5.7}$$

и

$$K_{\text{вн}} = \{x\colon\ q(x) < 0\}. \tag{5.8}$$

Нетрудно проверить, что множество K является клином. Оно будет конусом в том и только том случае, если множество F в формуле (5.6) тотально.

Нас будут интересовать такие сублинейные функционалы $q(x)$, что множество K является телесным конусом, а $K_{\text{вн}}$ — множеством его внутренних точек. О таких функционалах $q(x)$ будем говорить, что они *выделяют конус* K.

Каждый телесный конус K можно выделить различными сублинейными функционалами. Приведем две основные конструкции.

Пусть u_0 — фиксированный внутренний элемент конуса K. Тогда конус K выделяется функционалом

$$q_0(x) = \min_{x + ru_0 \in K} r \qquad (x \in E). \tag{5.9}$$

Функционал (5.9) можно определить эквивалентной формулой

$$q_0(x) = -\min_{l \in S} l(x) \qquad (x \in E), \tag{5.10}$$

где S — множество таких функционалов $l \in K^*$, что $l(u_0) = 1$. Доказательство тождества

$$\min_{x+ru_0 \in K} r = -\min_{l \in S} l(x) \qquad (x \in E)$$

предоставляем читателю. Из (5.10) вытекает сублинейность $q_0(x)$. Функционал (5.9) можно описать еще одним способом.

Пусть Π — произвольная двумерная плоскость, проходящая через прямую αu_0 $(-\infty < \alpha < \infty)$; указанная прямая разбивает Π на две полуплоскости; легко видеть, что функционал (5.9) на каждой такой полуплоскости линеен; его значения легко определяются, так как $q_0(\alpha u_0) = -\alpha$ и $q_0(x)$ принимает нулевые значения на пересечении Π с границей конуса K.

Функционал (5.9) удовлетворяет неравенству

$$|q_0(x)| \leqslant \frac{1}{r_0} \|x\| \qquad (x \in E),$$

где r_0 — радиус максимального шара с центром в u_0, лежащего в K. Отсюда вытекает, что

$$|q_0(x) - q_0(y)| \leqslant \frac{1}{r_0} \|x - y\| \qquad (x,\ y \in E).$$

Второй пример сублинейного функционала $q_1(x)$, выделяющего телесный конус K, дает формула

$$q_1(x) = -\min_{l \in K^*,\ \|l\|=1} l(x) \qquad (x \in E). \tag{5.11}$$

Легко видеть, что

$$q_1(x) = \begin{cases} \rho(x,\ K), & \text{если} \quad x \overline{\in} K, \\ -\rho(x,\ E \setminus K), & \text{если} \quad x \in K. \end{cases}$$

Пусть $q(x)$ — произвольный сублинейный функционал, выделяющий телесный конус K. Так как элемент $q_0(x)u_0 + x$ (где $q_0(x)$ — функционал (5.9), а $x \in E$) лежит на границе конуса K, то

$$q[q_0(x)u_0 + x] \equiv 0 \qquad (x \in E).$$

Отсюда и из неравенства (5.3) вытекают оценки

$$q(-u_0)\, q_0(x) \leqslant q(x) \leqslant -q(u_0)\, q_0(x) \qquad (x \in K), \tag{5.12}$$

$$-q(u_0)\, q_0(x) \leqslant q(x) \leqslant q(-u_0)\, q_0(x) \qquad (x \overline{\in} K). \tag{5.13}$$

Выпишем функционалы, выделяющие некоторые телесные конусы.

Пусть K— конус неотрицательных функций в $B(R^1)$. Этот конус выделяется функционалом

$$q(x) = -\inf_{-\infty < t < \infty} x(t) \qquad (x \in B(R^1)).$$

Пусть в R^n задан базис $e_1, \ldots, e_n$ и конус

$$K = \{x\colon\ x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n;\ \xi_j \geqslant 0\}.$$

Этот конус выделяется функционалом

$$q(x) = -\min_j \xi_j \qquad (x \in R^n). \tag{5.14}$$

Наконец, пусть в евклидовом пространстве R^n конус K задан равенством

$$K = \{x\colon\ \sqrt{(Hx,\ x)} \leqslant (x,\ a)\}, \tag{5.15}$$

где a — фиксированный вектор, из $(x, a) = 0$ и $(Hx, x) = 0$ следует $x = 0$ и $(Hx, x) \geqslant 0$. Конус (5.15) выделяется функционалом

$$q(x) = -(x,\ a) + \sqrt{(Hx,\ x)} \qquad (x \in R^n) \tag{5.16}$$

Функционалы, выделяющие конус, позволят в дальнейшем применить аналитические приемы для описания некоторых геометрических построений. Этот метод, повидимому, впервые развит Ю. С. Колесовым [1].

5.3. Пространство конусов. Через $\mathfrak{K}$ обозначим множество всех клиньев K в пространстве E. Множество $\mathfrak{K}$ превращается в метрическое пространство, если расстояние между элементами $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}$ определить при помощи метрики Хаусдорфа (см. Ф. Хаусдорф [1]):

$$\rho(K_1,\ K_2) = \max\left\{\sup_{x \in \Omega_1} \rho(x,\ \Omega_2),\ \sup_{y \in \Omega_2} \rho(y,\ \Omega_1)\right\}, \tag{5.17}$$

где

$$\Omega_1 = \{x\colon\ x \in K_1,\ \|x\| \leqslant 1\}, \quad \Omega_2 = \{y\colon\ y \in K_2,\ \|y\| \leqslant 1\}.$$

Формула (5.17) эквивалентна формуле

$$\rho(K_1,\ K_2) = \max\left\{\inf_{\Omega_1 \subset S_\delta(\Omega_2)} \delta,\ \inf_{\Omega_2 \subset S_\delta(\Omega_1)} \delta\right\}, \tag{5.18}$$

где через $S_\delta(\Omega)$ обозначено множество

$$S_\delta(\Omega) = \{x: \rho(x, \Omega) < \delta\}. \tag{5.19}$$

Покажем, что $\mathfrak{K}$ — полное пространство. Пусть последовательность клиньев K_n фундаментальна в $\mathfrak{K}$ и

$$\Omega_n = \{x:\ x \in K_n,\ \|x\| \leqslant 1\}.$$

Через Ω обозначим множество пределов фундаментальных последовательностей $x_{n_i} \in \Omega_{n_i}$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$. Очевидна замкнутость Ω. Пусть задано $\varepsilon > 0$, и пусть при n, $m \geqslant N(\varepsilon)$

$$\rho(\Omega_n, \Omega_m) < \varepsilon.$$

Пусть $x \in \Omega$, $x_{n_i} \in \Omega_{n_i}$ и $\rho(x_{n_i}, x) \to 0$; тогда при $m \geqslant N(\varepsilon)$

$$\rho(x, \Omega_m) = \lim_{i \to \infty} \rho(x_{n_i}, \Omega_m) \leqslant \varepsilon. \tag{5.20}$$

Положим теперь $n_j = N(\varepsilon/2^{j+1})$. Из определения чисел n_j вытекает, что при любом фиксированном $x \in \Omega_n$, $n \geqslant N(\varepsilon/2)$ можно построить такую последовательность точек $x_{n_j} \in \Omega_{n_j}$, что $\rho(x, x_{n_1}) < \varepsilon/2$ и $\rho(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}) < \varepsilon/2^{j+1}$. Очевидно, $\rho(x_{n_j}, x_{n_{j+l}}) < \varepsilon/2^j$ при любом $l > 0$; поэтому последовательность x_{n_j} фундаментальна. Пусть, далее, $x_{n_j} \to x_* \in \Omega$. Из неравенства $\rho(x, x_{n_j}) < \varepsilon$ следует, что

$$\rho(x, \Omega) \leqslant \rho(x, x_*) = \lim_{j \to \infty} \rho(x, x_{n_j}) \leqslant \varepsilon.$$

Из этого неравенства и из (5.20) вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} \max\left\{ \sup_{x \in \Omega} \rho(x, \Omega_n),\ \sup_{y \in \Omega_n} \rho(y, \Omega) \right\} = 0.$$

Для завершения доказательства полноты пространства $\mathfrak{K}$ остается показать, что построенное множество Ω является пересечением некоторого клина K с единичным шаром. Иначе говоря, нужно показать, что Ω выпукло и что из $x \in \Omega$, $x \neq 0$ вытекает $x/\|x\| \in \Omega$. Оба эти свойства вытекают из того, что ими обладают множества Ω_n.

Отметим, что пространство $\mathfrak{K}$ имеет конечный диаметр: из (5.17) вытекает неравенство

$$\rho(K_1, K_2) \leqslant 1 \qquad (K_1, K_2 \in \mathfrak{K}).$$

Через $C(\mathfrak{K})$ будем обозначать пространство непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций $K(t)$ со значениями в $\mathfrak{K}$ с обычной метрикой

$$\rho_{C(\mathfrak{K})}[K_1(t), K_2(t)] = \sup_{-\infty < t < \infty} \rho_{\mathfrak{K}}[K_1(t), K_2(t)]. \qquad (5.21)$$

Как обычно, функция $K(t) \in C(\mathfrak{K})$ называется почти периодической функцией, если множество функций $K(t+h)$ $(-\infty < h < \infty)$ компактно в $C(K)$.

5.4. Конусы $\hat{K}(t)$. Ограничимся случаем, когда $E = R^n$ (хотя многие построения почти без изменений сохраняют силу в случае любого банахова пространства E).

Пусть $K(t)$ — некоторая фиксированная функция из $C(\mathfrak{K})$. Обозначим через $\hat{K}(t)$ множество функций $x(t) \in B(R^n)$, удовлетворяющих условию

$$x(t) \in K(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (5.22)$$

Множество $\hat{K}(t)$ является клином в пространстве $B(R^n)$. Легко видеть, что $\hat{K}(t)$ — конус, если при плотном на $(-\infty, \infty)$ множестве значений t клинья $K(t)$ являются конусами в R^n.

Клин $\hat{K}(t)$ может оказаться состоящим лишь из одной точки — нулевой функции. В общем случае исследование клина $\hat{K}(t)$ является сложной задачей. Более просто она изучается, если функция $K(t)$ почти периодическая.

Через $\mathfrak{N}$ будем обозначать замыкание в $\mathfrak{K}$ множества значений пп-функции $K(t)$.

Лемма 5.2. *Пусть функция $K(t)$ почти периодическая. Пусть все элементы из $\mathfrak{N}$ являются телесными конусами в R^n.*

Тогда $\hat{K}(t)$ — телесный конус в $B(R^n)$.

Доказательство. Воспользуемся обозначением

$$\Omega(t) = \{x\colon\ x \in K(t),\ |x| \leqslant 1\} \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (5.23)$$

Каждое множество $\Omega(t)$ выпукло, замкнуто, ограничено и телесно (содержат внутренние точки). Через $x_0(t)$ обозначим геометрический центр тяжести множества $\Omega(t)$; очевидно,

$$x_0(t) = \left[\int\limits_{\Omega(t)} dm(x)\right]^{-1} \int\limits_{\Omega(t)} x\, dm(x), \tag{5.24}$$

где $m(x)$ — лебегова мера в R^n.

Из (5.24) вытекает, что $x_0(t) \in C(R^n)$. Покажем, что $x_0(t)$ почти периодична.

Пусть задана некоторая последовательность сдвигов h_i. Без ограничения общности можно считать, что последовательность пп-функций $K(t+h_i)$ сходится в $C(\mathfrak{K})$ к пп-функции, которую мы обозначим через $K_*(t)$. Тогда функции $x(t+h_i)$ очевидным образом равномерно сходятся к пп-функции

$$x_*(t) = \left[\int\limits_{\Omega_*(t)} dm(x)\right]^{-1} \int\limits_{\Omega_*(t)} x\, dm(x).$$

Таким образом, $x_0(t) \in B(R^n)$.

Из (5.24) вытекает, что значения функции $x_0(t)$ являются внутренними точками соответствующих конусов $K(t)$. Более того, найдется такое $r_0 > 0$, что при каждом t из $|x - x_0(t)| \leqslant r_0$ вытекает $x \in K(t)$. Для доказательства нужно установить ограниченность снизу положительным числом радиусов $r_0(t)$ максимальных шаров с центрами в $x_0(t)$, лежащих в $K(t)$. В предположении противного найдется такая последовательность h_i, что $r_0(h_i) \to 0$. Без ограничения общности можно считать при этом, что конусы $K(h_i)$ сходятся в $\mathfrak{K}$ к некоторому конусу $K_* \in \mathfrak{K}$. Точки $x_0(h_i)$ при этом сходятся к точке

$$x_* = \left[\int\limits_{\Omega_*} dm(x)\right]^{-1} \int\limits_{\Omega_*} x\, dm(x),$$

которая является внутренней точкой телесного (по условию леммы!) конуса K_*. С другой стороны, из $r_0(h_i) \to 0$ вытекает, что x_* — граничная точка конуса K_*. Мы пришли к противоречию.

Остается заметить, что каждая функция $x(t) \in B(R^n)$, удовлетворяющая неравенству

$$\| x(t) - x_0(t) \|_{B(R^n)} \leqslant r_0,$$

принадлежит $\hat{K}(t)$.

Лемма доказана.

Допустим, что все значения пп-функции $K(t)$ являются конусами и пусть из x, $y - x \in K(t)$ вытекает неравенство

$$|x| \leqslant N|y|, \tag{5.25}$$

где N не зависит от t. Тогда $\hat{K}(t)$ будет нормальным конусом, так как из $x(t)$, $y(t) - x(t) \in \hat{K}(t)$ очевидным образом вытекает неравенство

$$\| x(t) \|_{B(R^n)} \leqslant N \| y(t) \|_{B(R^n)}. \tag{5.26}$$

Легко показать, что предположение о существовании не зависящей от t постоянной N в неравенствах (5.25) равносильно тому, что все элементы множества $\mathfrak{N}$ являются конусами.

Перейдем к вопросу об условиях миниедральности конуса $\hat{K}(t)$.

Лемма 5.3. *Пусть последовательность миниедральных конусов K_i сходится в $\mathfrak{K}$ к телесному конусу K. Пусть последовательность x_i сходится в R^n к некоторой точке x. Пусть*

$$(x_i)_+ = \sup\{0, x_i\}, \tag{5.27}$$

где supremum *берется в смысле полуупорядоченности, порождаемой конусом K_i.*

Тогда конус K миниедрален и последовательность (5.27) *сходится в R^n к точке*

$$x_+ = \sup\{0, x\}, \tag{5.28}$$

где supremum *взят в смысле полуупорядоченности по конусу K.*

Доказательство. Как мы уже отмечали, каждый миниедральный конус в R^n является конусом векторов с неотрицательными компонентами в некотором базисе.

Поэтому можно указать такую последовательность нормированных базисов

$$g_1^i,\ g_2^i,\ \ldots,\ g_n^i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots),$$

что

$$K_i=\{x\colon\ x=\xi_1 g_1^i+\ \ldots\ +\xi_n g_n^i, \qquad \xi_j\geqslant 0\}. \tag{5.29}$$

Так как последовательность конусов (5.29) сходится к телесному конусу K, то без ограничения общности можно считать, что каждая последовательность единичных элементов g_j^i $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ сходится в R^n к элементу g_j. Очевидно, векторы $g_1,\ \ldots,\ g_n$ линейно независимы и

$$K=\{x\colon\ x=\xi_1 g_1+\ \ldots\ +\xi_n g_n,\quad \xi_j\geqslant 0\}.$$

Поэтому конус K миниедрален.

Перейдем ко второму утверждению леммы.

Пусть

$$x_i=\xi_1^i g_1^i+\ \ldots\ +\xi_n^i g_n^i, \qquad x=\xi_1 g_1+\ \ldots\ +\xi_n g_n.$$

Векторы $g_1,\ \ldots,\ g_n$ были построены так, что из $|x_i-x|\to 0$ вытекают равенства

$$\lim_{i\to\infty}\xi_j^i=\xi_j \qquad (j=1,\ \ldots,\ n).$$

Следовательно, из соотношений

$$(x_i)_+=\sum_{\xi_j^i\geqslant 0}\xi_j^i g_j^i, \qquad x_+=\sum_{\xi_j\geqslant 0}\xi_j g_j$$

вытекает, что $(x_i)_+\to x_+$.

Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Пусть $K(t)$ удовлетворяет условиям леммы 5.2. Пусть каждый конус $K(t)$ миниедрален.*

Тогда конус $\hat{K}(t)$ миниедрален.

Доказательство. Пусть $x(t)\in B(R^n)$. При каждом фиксированном t определим элемент

$$x_+(t)=\sup\{0,x(t)\}, \tag{5.30}$$

где supremum берется в смысле полуупорядоченности, порожденной конусом $K(t)$. Очевидно, утверждение лем-

мы будет доказано, если мы установим почти периодичность функции $x_+(t)$.

Непрерывность функции $x_+(t)$ непосредственно вытекает из леммы 5.3.

Из каждой последовательности сдвигов h_k можно выбрать такую подпоследовательность $h_{k(i)}$, что функции $K(t+h_{k(i)})$ сходятся в $C(\mathfrak{K})$ к некоторой функции $K_*(t)$ и функции $x(t+h_{k(i)})$ сходятся в $C(R^n)$ к некоторой функции $x_*(t)$. Почти периодичность функции $x_+(t)$ будет установлена, если мы докажем, что последовательность функций $x_+(t+h_{k(i)})$ сходится в $C(R^n)$ к функции

$$[x_*(t)]_+ = \sup\{0, x_*(t)\} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

В предположении противного можно указать такую последовательность t_j и такую подпоследовательность s_j последовательности $h_{k(i)}$, что

$$|x_+(t_j+s_j) - [x_*(t_j)]_+| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (j=1,2,\ldots), \tag{5.31}$$

где ε_0 — некоторое положительное число. В силу почти периодичности функций $K(t)$ и $x(t)$ можно считать, что последовательности $K(t+t_j+s_j)$ и $K_*(t+t_j)$ сходятся в $C(\mathfrak{K})$ к одной и той же функции $K_{**}(t)$, а последовательности функций $x(t+t_j+s_j)$ и $x(t+t_j)$ сходятся в $C(R^n)$ к одной и той же функции $x_{**}(t)$. В частности, миниедральные конусы $K(t_j+s_j)$ и $K_*(t_j)$ сходятся в $\mathfrak{K}$ к конусу $K_{**}(0)$, а последовательности элементов $x(t_j+s_j)$ и $x_*(t_j)$ сходятся в R^n к точке $x_{**}(0)$. Из леммы 5.4 тогда вытекает, что $x_+(t_j+s_j) \to [x_{**}(0)]_+$ и $[x_*(t_j)]_+ \to [x_{**}(0)]_+$, а это противоречит (5.31).

Лемма доказана.

5.5. Функционалы, выделяющие $K(t)$. Пусть конусная пп-функция $K(t)$ удовлетворяет условиям леммы 5.2. Из этой леммы вытекает существование такой пп-функции $x_0(t) \in B(R^n)$ и такого $r_0 > 0$, что при каждом t точка $x_0(t)$ входит в $K(t)$ вместе со своей шаровой окрестностью радиуса r_0.

Положим

$$q_0(t, x) = \min_{x + r x_0(t) \in K(t)} r. \tag{5.32}$$

При каждом фиксированном t сублинейный функционал (5.32) совпадает с рассмотренным в п. 5.2

функционалом (5.9). Как нам уже известно, функционал (5.32) удовлетворяет условию Липшица

$$|q_0(t, x) - q_0(t, y)| \leqslant \frac{1}{r_0}|x - y| \quad (x, y \in R^n). \tag{5.33}$$

При каждой функции $x(t) \in B(R^n)$ скалярная функция $q_0[t, x(t)]$ $(-\infty < t < \infty)$ почти периодична (см. п. 1.4), так как по t почти периодичны все функции $q_0(t, x)$ $(x \in R^n)$.

Отметим еще два свойства функционала (5.32). Во-первых,

$$q_0[t, x_0(t)] = -1 \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{5.34}$$

Во-вторых,

$$\max\{q_0(t, x);\ q_0(t, -x)\} \geqslant \varepsilon_0 > 0 \qquad (x \in R^n,\ |x| = 1). \tag{5.35}$$

В доказательстве нуждается лишь неравенство (5.35). Предположим, что оно неверно. Тогда найдутся такие последовательности t_i, x_i, что $|x_i| = 1$ и

$$q_0(t_i, x_i),\ q_0(t_i, -x_i) < \frac{1}{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{5.36}$$

При этом можно считать, что элементы x_i сходятся в R^n к некоторой точке x_*, последовательность конусов $K(t_i)$ сходится в $\mathfrak{K}$ к некоторому конусу K_*, а числа $q_0(t_i, x_i)$ и $q_0(t_i, -x_i)$ сходятся к некоторым числам a и b. Из (5.36) вытекает неположительность чисел a и b; с другой стороны, из неравенств

$$q_0(t_i, x_i) + q_0(t_i, -x_i) \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

вытекает, что $a + b \geqslant 0$. Поэтому $a = b = 0$. Из определения функционала $q_0(t, x)$ вытекает, что

$$q_0(t_i, x_i)\, x_0(t_i) + x_i,\ q_0(t_i, -x_i)\, x_0(t_i) - x_i \in K(t_i).$$

Поэтому и элемент x_* и элемент $-x_*$ принадлежат K_*, т. е. $x_* = 0$. Это противоречит равенству

$$|x_*| = \lim_{i \to \infty} |x_i| = 1.$$

Рассмотрим такую ситуацию: задан некоторый сублинейный по $x \in R^n$ почти периодический по t

функционал $q(t, x)$ и нужно знать, будет ли функция

$$K(t) = \{x\colon\ q(t, x) \leqslant 0\} \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad (5.37)$$

удовлетворять условиям леммы 5.2.

Лемма 5.5. *Пусть почти периодический по t и сублинейный по $x \in R^n$ функционал $q(t, x)$ удовлетворяет условиям:*

1°. *Выполнено условие Липшица*

$$|q(t, x) - q(t, y)| \leqslant a|x - y| \qquad (x, y \in R^n), \quad (5.38)$$

где a не зависит от t.

2°. *Существует такая функция $x_0(t) \in B(R^n)$, что*

$$q[t, x_0(t)] \leqslant -\varepsilon_0 < 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (5.39)$$

3°. *Справедливо неравенство*

$$\max\{q(t, x),\ q(t, -x)\} \geqslant \varepsilon_1 > 0 \qquad (-\infty < t < \infty,\ |x| = 1). \qquad (5.40)$$

Тогда формула (5.37) *определяет конусную пп-функцию $K(t)$, удовлетворяющую условиям леммы* 5.2.

Доказательство не содержит существенных трудностей, и мы предоставляем его читателю.

5.6. Линейные положительные операторы. Пусть E — банахово пространство с телесным конусом K. Пусть A — оператор, действующий в E.

Говорят, что оператор A *положителен* (по отношению к конусу K), если $AK \subset K$, и *сильно положителен*, если из $x \in K$ и $x \neq 0$ вытекает, что $Ax \gg 0$ (т. е. Ax является внутренним элементом конуса K). Оператор A называют *монотонным*, если из $x \leqslant y$ следует $Ax \leqslant Ay$. Линейный оператор A монотонен в том и только том случае, если он положителен.

При изучении положительных операторов существенную роль играет так называемая *u_0-норма* $\|x\|_{u_0}$, где u_0 — фиксированный внутренний элемент конуса K. Эта норма определяется формулой

$$\|x\|_{u_0} = \inf\{\alpha\colon\ -\alpha u_0 \leqslant x \leqslant \alpha u_0\} \qquad (x \in E). \qquad (5.41)$$

Легко доказывается, что норма (5.41) эквивалентна основной норме $\|x\|$, если конус K нормален.

Важной характеристикой линейного оператора A является его *спектральный радиус* $r(A)$:

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \| A^n \|^{\frac{1}{n}}. \tag{5.42}$$

Очевидно,

$$r(A) \leqslant \|A\|. \tag{5.43}$$

В отличие от нормы $\|A\|$ оператора A, спектральный радиус не меняется при переходе к эквивалентным нормам. Для оценок спектрального радиуса полезна следующая хорошо известная теорема, восходящая к Г. Фробениусу и П. С. Урысону.

Теорема 5.1. *Пусть A — линейный положительный оператор. Пусть u_0 — такой внутренний элемент нормального конуса K, что*

$$Au_0 \ll u_0. \tag{5.44}$$

Тогда

$$r(A) < 1. \tag{5.45}$$

Доказательство. Из (5.44) вытекает существование такого $\eta > 0$, что

$$Au_0 \leqslant (1-\eta)\, u_0. \tag{5.46}$$

Пусть $\| x \|_{u_0} \leqslant 1$, т. е. $-u_0 \leqslant x \leqslant u_0$. Тогда из положительности оператора A вытекают неравенства

$$-Au_0 \leqslant Ax \leqslant Au_0,$$

откуда в силу (5.46)

$$-(1-\eta)\, u_0 \leqslant Ax \leqslant (1-\eta)\, u_0.$$

Следовательно,

$$\| Ax \|_u \leqslant (1-\eta) \| x \|_{u_0} \qquad (x \in E).$$

Из (5.43) вытекает оценка $r(A) \leqslant 1-\eta$.

Теорема доказана.

5.7. Знакопостоянные функции Грина. Вернемся к изучению дифференциального пп-оператора

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t) \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)\, x. \tag{5.47}$$

Будем предполагать, что оператор (5.47) регулярен (см. п. 2.1). Тогда L имеет определенный на $C(R^n)$ обратный оператор L^{-1} со значениями в $C^m(R^n)$, причем $L^{-1}B(R^n)=B^m(R^n)$. В § 4 было показано, что L^{-1} можно представить в виде

$$L^{-1}f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\ s)f(s)\,ds, \tag{5.48}$$

где $G(t, s)$ — функция Грина.

Для построения функции Грина мы предварительно переходили к эквивалентному пп-оператору (4.8):

$$\tilde{L}u=\frac{du}{dt}+Q(t)u, \tag{5.49}$$

затем определяли его функцию Грина $\tilde{G}(t, s)$ формулой (4.9):

$$\tilde{G}(t,\ s)=\begin{cases} U(t)P_+U^{-1}(s), & \text{если} \quad t\geqslant s, \\ -U(t)P_-U^{-1}(s), & \text{если} \quad t<s, \end{cases} \tag{5.50}$$

где $U(t)$ — действующий в R^{mn} оператор сдвига по траекториям уравнения $\tilde{L}u=0$ за время от 0 до t, P_+ и $P_-(P_++P_-=I)$ — проекции соответственно на подпространства E_+ и E_- $(E_+\dotplus E_-=R^{mn})$ начальных значений решений, убывающих при $t\to\infty$ и при $t\to-\infty$; после этого функция Грина $G(t, s)$ определялась как минор порядка n, стоящий в правом верхнем углу матрицы $\tilde{G}(t, s)$ (см. формулу (4.12)).

Пусть $K(t)$ — некоторая функция со значениями в пространстве $\mathfrak{K}$. Напомним (см. п. 5.4), что через $\hat{K}(t)$ обозначалось множество функций $x(t)\in B(R^n)$, удовлетворяющих условию $x(t)\in K(t)$ $(-\infty<t<\infty)$. В п. 5.4 детально обсуждался вопрос о том, при каких условиях $\hat{K}(t)$ является конусом; когда этот конус телесен, нормален и миниедрален.

Будем говорить, что функция Грина $G(t, s)$ *неотрицательна по отношению к конусной функции* $K(t)$, если

$$G(t,\ s)K(s)\subset K(t) \qquad (-\infty<t,\ s<\infty). \tag{5.51}$$

Аналогично, функция Грина $G(t, s)$ *неположительна*, если

$$-G(t, s)K(s) \subset K(t) \qquad (-\infty < t, s < \infty). \quad (5.52)$$

Очевидно, верна

Теорема 5.2. *Пусть функция Грина $G(t, s)$ неотрицательна по отношению к конусной функции $K(t)$.*

Тогда оператор (5.48) *положителен относительно $\hat{K}(t)$.*

Во многих случаях одновременно с оператором (5.47) приходится рассматривать операторы

$$L_h x = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t+h)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t+h)x, \quad (5.53)$$

где h — произвольное число. Как мы уже отмечали (см. п. 2.4), операторы (5.53) образуют компактное множество в пространстве непрерывных операторов, действующих из $C^m(R^n)$ в $C(R^n)$. Замыкание этого множества мы обозначали через $H(L)$. Легко видеть, что $H(L)$ состоит из регулярных пп-операторов

$$L_* x = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1^*(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m^*(t)x, \quad (5.54)$$

для каждого из которых можно указать такую последовательность h_j, что

$$\lim_{j\to\infty} \| A_i(t+h_j) - A_i^*(t) \|_{C(R^n)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \quad (5.55)$$

Простой подсчет показывает, что функция Грина $G_h(t, s)$ оператора (5.53) определяется по функции Грина $G(t, s)$ оператора (5.47) равенством

$$G_h(t, s) = G(t+h, s+h). \quad (5.56)$$

Из теоремы 4.4 вытекает, что функция Грина $G_*(t, s)$ оператора (5.54) при условии (5.55) определяется равенством

$$G_*(t, s) = \lim_{j\to\infty} G(t+h_j, s+h_j), \quad (5.57)$$

причем предел равномерен относительно t и s. Множество функций Грина всех операторов из $H(L)$ обозначим через $H[G(t, s)]$.

Пусть задана некоторая пп-функция $K(t) \in B(\mathfrak{K})$. Через $H[K(t)]$ обозначим замыкание в $B(\mathfrak{K})$ компактного множества пп-функций $K(t+h)$ $(-\infty < h < \infty)$.

Допустим, что функция Грина $G(t, s)$ оператора (5.47) неотрицательна по отношению к конусной пп-функции $K(t)$. Тогда функции Грина $G(t+h, s+h)$ неотрицательны по отношению к $K(t+h)$; функция Грина $G_*(t, s)$ оператора (5.54) неотрицательна по отношению к пп-функции

$$K_*(t) = \lim_{j \to \infty} K(t + h_j),$$

если справедливо (5.55).

Конусную пп-функцию $K(t)$ назовем *телесной*, если значения всех функций из $H[K(t)]$ являются телесными конусами. Как было показано в п. 5.4, из телесности пп-функции $K(t)$ вытекает, что $\widehat{K}(t)$ является телесным и нормальным конусом в $B(R^n)$.

Будем говорить, что функция Грина $G(t, s)$ регулярного пп-оператора (5.47) *сильно положительна по отношению к телесной пп-функции* $K(t)$, если она неотрицательна и если для каждой функции Грина $G_*(t, s) \in H[G(t, s)]$ и для каждого t можно указать такое плотное на некотором бесконечном промежутке множество $\mathfrak{M}(t, G_*)$, что при ненулевых $x \in K_*(s)$ и при $s \in \mathfrak{M}(t, G_*)$ элементы $G_*(t, s)x$ являются внутренними точками конуса $K_*(t)$.

Аналогично определяется *сильная отрицательность* функции Грина.

Теорема 5.3. *Пусть функция Грина $G(t, s)$ регулярного пп-оператора* (5.47) *сильно положительна по отношению к телесной конусной пп-функции $K(t)$.*

Тогда оператор (5.48) *сильно положителен на конусе $\widehat{K}(t)$.*

Доказательство. Пусть $f(t)$ — ненулевая функция из $\widehat{K}(t)$. Нам нужно показать, что функция

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds$$

является внутренней точкой конуса $\hat{K}(t)$, или, что то же, нужно доказать, что при каждом t элемент $x(t)$ входит в $K(t)$ вместе с шаровой окрестностью некоторого радиуса $r > 0$, где r не зависит от t.

В предположении противного найдется такая последовательность h_j и такая последовательность элементов y_j, лежащих на границах $\Gamma(h_j)$ конусов $K(h_j)$, что

$$\lim_{j\to\infty} |x(h_j) - y_j| = 0. \tag{5.58}$$

Без ограничения общности можно считать, что операторы L_{h_j}, пп-функции $f(t+h_j)$ и $K(t+h_j)$ сходятся соответственно к некоторому регулярному пп-оператору L_* и пп-функциям $f_*(t)$ и $K_*(t)$. Из теоремы 4.4 вытекает, что пп-функции $x(t+h_j)$ сходятся равномерно к функции

$$x_*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_*(t, s) f_*(s)\, ds,$$

где $G_*(t, s)$ — функция Грина оператора L_*. При этом из (5.58) вытекает, что $x_*(0)$ лежит на границе конуса $K_*(0)$.

С другой стороны, из сильной положительности функции Грина $G(t, s)$ вытекает существование такого s_*, что элемент $G_*(0, s_*) f_*(s_*)$ является внутренней точкой конуса $K_*(0)$. Из непрерывности $G_*(0, s) f_*(s)$ в окрестности точки s_* вытекает, что $x_*(0)$ также является внутренней точкой конуса $K_*(0)$. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

В гл. 2 будут указаны условия положительности и сильной положительности функций Грина различных классов регулярных пп-операторов.

Предоставляем читателю доказать следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть для пп-функции $K(t)$, значениями которой являются телесные конусы, можно указать такой регулярный пп-оператор L, функция Грина $G(t, s)$ которого неотрицательна по отношению к $K(t)$.*

Тогда пп-функция $K(t)$ телесная.

5.8. Обращение теорем о положительности интегрального оператора. Теорема 5.2. допускает естественное обращение.

Теорема 5.5. *Пусть $K(t)$ — почти периодическая телесная конусная функция. Пусть оператор* (5.48) *положителен относительно конуса $\widehat{K}(t)$.*

Тогда функция Грина $G(t, s)$ неотрицательна по отношению к конусной функции $K(t)$, т. е. $G(t, s)$ удовлетворяет условию (5.51).

Доказательство. Пусть u_0 — фиксированный внутренний элемент конуса $K(s_0)$. Построим такую пп-функцию $x(t) \in \widehat{K}(t)$, что

$$x(s_0) = u_0. \tag{5.59}$$

Эту функцию можно определить, например, аналогичной (5.24) формулой

$$x(t) = \left[\int\limits_{\Omega(t)} \rho(x)\, dm(x)\right]^{-1} \int\limits_{\Omega(t)} x\rho(x)\, dm(x), \tag{5.60}$$

где плотность $\rho(x)$ выбрана так, чтобы выполнялось равенство (5.59). Далее, определим последовательность функций $z_n(t)$ следующим образом: функция $z_n(t)$ периодична с периодом n и определена на промежутке $[s_0 - \delta - 1/n,\ s_0 - \delta - 1/n + n]$ равенством

$$z_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |t - s_0| \leqslant \delta, \\ nt - ns_0 + n\delta + 1, & \text{если} \quad -\delta - 1/n \leqslant t - s_0 \leqslant -\delta, \\ -nt + ns_0 + n\delta + 1, & \text{если} \quad \delta \leqslant t - s_0 \leqslant \delta + 1/n, \\ 0, & \text{если} \quad \delta + 1/n \leqslant t - s_0 \leqslant n - \delta - 1/n, \end{cases}$$

где δ — некоторое положительное число. Функции

$$x_n(t) = z_n(t)\, x(t)$$

также почти периодичны, они равномерно ограничены и поточечно сходятся к функции

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad |t - s_0| \leqslant \delta, \\ 0, & \text{если} \quad |t - s_0| > \delta. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} G(t, s)\, x(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\, x_n(s)\, ds,$$

и из положительности оператора (5.48) вытекает, что

$$\int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} G(t, s)\, x(s)\, ds \in K(t) \qquad (-\infty < t < \infty;\ \delta > 0). \quad (5.61)$$

Так как функция $x(t)$ непрерывна, то при каждом фиксированном $t \neq s_0$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} G(t, s)\, x(s)\, ds = G(t, s_0)\, x(s_0) = G(t, s_0)\, u_0,$$

и из (5.61) вытекает, что

$$G(t, s_0)\, u_0 \in K(t) \qquad (t \neq s_0).$$

Теорема доказана.

Утверждение теоремы, разумеется, неверно, если конусная функция $K(t)$ не обладает свойством почти периодичности.

Использованная выше конструкция пп-функций из $\hat{K}(t)$ при помощи равенств типа (5.60) не переносится на пп-функции со значениями в бесконечномерных пространствах. Метод построения пп-функций из $\hat{K}(t)$ для этого более сложного случая разработан А. В. Покровским [1].

Глава 2

АНАЛИЗ КОНКРЕТНЫХ КЛАССОВ ПП-ОПЕРАТОРОВ*)

Плюнь тому в глаза, кто скажет, что можно объять необъятное.

Козьма Прутков

§ 6. Системы уравнений первого порядка

6.1. Общие условия положительности функции Грина. В этом параграфе мы изучим пп-оператор

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)x. \tag{6.1}$$

Его функцию Грина, как обычно, будем обозначать через $G(t, s)$. Напомним (см. (4.9)), что

$$G(t, s) = \begin{cases} U(t)P_+U^{-1}(s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -U(t)P_-U^{-1}(s), & \text{если} \quad t < s, \end{cases} \tag{6.2}$$

где $U(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = 0, \tag{6.3}$$

удовлетворяющая начальному условию

$$U(0) = I, \tag{6.4}$$

P_+ и P_- — операторы проектирования на подпространства E_+ и E_- (пространства R^n) начальных значений убывающих соответственно при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$ решений системы (6.3) (см. § 3).

---

*) Основные результаты этой главы опубликованы в работах В. Ш. Бурда, Ю. С. Колесова и М. А. Красносельского [1, 2].

Лемма 6.1. *Пусть функция Грина $G(t, s)$ оператора* (6.1) *существует и неотрицательна относительно некоторой конусной функции $K(t) \in C(\mathfrak{K})$, значение $K(0)$ которой является телесным конусом.*

Тогда нулевое решение системы (6.3) *экспоненциально устойчиво по Ляпунову, т. е. $P_- = 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда в конусе $K(0)$ можно найти такой элемент $x_0 + y_0$, что $x_0 \in E_+$, $y_0 \in E_-$ и $y_0 \neq 0$. Из неотрицательности функции Грина вытекает, что

$$-U(t) P_- K(0) \subset K(t) \qquad (t < 0).$$

Переходя к пределу при $t \to -0$, убедимся в том, что $-P_- K(0) \subset K(0)$. В частности, $-y_0 = -P_-(x_0 + y_0) \in \in K(0)$. Отсюда вытекает, что $x_0 \in K(0)$ и, следовательно, $x_0 - y_0 \in K(0)$. Но тогда $y_0 = -P_-(x_0 - y_0) \in K(0)$. Поэтому $y_0 = 0$, и мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 6.1 сохраняет силу, если телесен не конус $K(0)$, а некоторый конус $K(t_0)$. Если все конусы $K(t)$ нетелесны, то утверждение леммы в общем случае неверно.

Из леммы 6.1 немедленно вытекает, что функция Грина $G(t, s)$ оператора (6.1) может быть неположительной относительно некоторой конусной функции $K(t)$ (одно из значений которой является телесным конусом) лишь в том случае, если $P_+ = 0$.

Нас будут интересовать неотрицательные функции Грина. Из леммы 6.1 и из (6.2) вытекает, что их можно записать в виде

$$G(t, s) = \begin{cases} U(t) U^{-1}(s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ 0, & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{6.5}$$

Оператор

$$U(t, s) = U(t) U^{-1}(s) \qquad (-\infty < t, s < \infty) \tag{6.6}$$

имеет простой геометрический смысл: при движении по траекториям уравнения (6.3) за время от s до t точка $x_0 \in R^n$ переходит в точку $U(t, s) x_0$. Поэтому оператор (6.6) называют *оператором сдвига по траекториям системы* (6.3).

В случае систем с постоянными коэффициентами, т. е. когда $A(t) \equiv A$, оператор сдвига определяется равенством

$$U(t, s) = e^{-(t-s)A} \qquad (-\infty < t, s < \infty).$$

В общем случае оператор $U(t, s)$ (как часто говорят, *матрицант* системы (6.3)) можно определить рядом

$$U(t, s) = I - \int_s^t A(\tau)\, d\tau + \int_s^t \int_s^\tau A(\tau) A(\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau - \ldots$$

Оператор сдвига $U(t, s)$ называют *положительным относительно конусной функции* $K(t)$, если

$$U(t, s) K(s) \subset K(t) \qquad (t > s).$$

Поэтому из леммы 6.1 вытекает

Теорема 6.1. *Для того чтобы функция Грина $G(t, s)$ пп-оператора* (6.1) *существовала и была неотрицательна по отношению к некоторой конусной функции $K(t) \in C(\mathfrak{K})$, одно из значений $K(t_0)$ которой является телесным конусом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия*:

1°. *Оператор сдвига $U(t, s)$ положителен по отношению к конусной функции $K(t)$.*

2°. *Оператор сдвига $U(t, s)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|U(t, s)| \leqslant M e^{-\gamma(t-s)} \qquad (-\infty < s < t < \infty),$$

где M, $\gamma > 0$.

Аналогично формулируются условия неположительности функции Грина.

Ниже изучается оператор сдвига $U(t, s)$. Отметим, что основные построения не связаны с предположением о почти периодичности матрицы $A(t)$.

6.2. Производные Гато. Пусть $q(x)$ —сублинейный функционал (см. п. 5.2) Тогда каждая функция

$$\varphi(t) = q(x + th) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{6.7}$$

где x и h — фиксированные элементы из банахова пространства E, выпукла, так как

$$\varphi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=q\left[\frac{1}{2}(x+t_1h)+\frac{1}{2}(x+t_2h)\right]\leqslant$$
$$\leqslant q\left[\frac{1}{2}(x+t_1h)\right]+q\left[\frac{1}{2}(x+t_2h)\right]=\frac{1}{2}[\varphi(t_1)+\varphi(t_2)].$$

Поэтому функция (6.7) в каждой точке имеет левую и правую производные. Иначе говоря, существуют пределы

$$q'_+(x,\ h)=\lim_{t\to+0}\frac{q(x+th)-q(x)}{t}\qquad (x,\ h\in E)\qquad (6.8)$$

и

$$q'_-(x,\ h)=\lim_{t\to-0}\frac{q(x+th)-q(x)}{t}\qquad (x,\ h\in E).\qquad (6.9)$$

Эти пределы будем называть соответственно *правой* и *левой производными Гато* сублинейного функционала $q(x)$.

Очевидно, при каждом фиксированном x функционал $q'_+(x,\ h)$ $(h\in E)$ сублинеен. Для него справедлива оценка

$$-q(-h)\leqslant q'_+(x,\ h)\leqslant q(h)\qquad (x,\ h\in E);\qquad (6.10)$$

при любом $\alpha\in(-\infty,\ \infty)$ имеет место тождество

$$q'_+(x,\ \alpha x+h)=\alpha q(x)+q'_+(x,\ h)\qquad (x,\ h\in E).\ (6.11)$$

Правая и левая производные Гато связаны равенством

$$q'_-(x,\ h)=-q'_+(x,\ -h)\qquad (x,\ h\in E).\qquad (6.12)$$

Отметим еще, что из выпуклости функции (6.7) вытекает неравенство

$$q'_-(x,\ h)\leqslant q'_+(x,\ h)\qquad (x,\ h\in E).\qquad (6.13)$$

Для вычисления производных Гато полезна следующая лемма.

Лемма 6.2. *Обозначим через $J(x)$ совокупность таких линейных функционалов l, что*

$$l(x) = q(x), \quad l(y) \leqslant q(y) \qquad (y \in E). \tag{6.14}$$

Тогда

$$q'_+(x, h) = \max_{l \in J(x)} l(h) \qquad (h \in E). \tag{6.15}$$

Доказательство. Пусть $l \in J(x)$. В силу леммы 5.1 при $t > 0$

$$l(h) = \frac{l(x+th) - l(x)}{t} = \frac{l(x+th) - q(x)}{t} \leqslant \frac{q(x+th) - q(x)}{t},$$

откуда вытекает неравенство

$$l(h) \leqslant q'_+(x, h) \qquad (l \in J(x),\ h \in E). \tag{6.16}$$

Для завершения доказательства нужно уметь по каждому ненулевому $h \in E$ построить такой функционал $l_1 \in J(x)$, что $l_1(h) = q'_+(x, h)$.

Определим на элементах вида $y = \gamma_1 x + \gamma_2 h$ $(-\infty < \gamma_1, \gamma_2 < \infty)$ функционал l_0 с помощью равенства

$$l_0(y) = \gamma_1 q(x) + \gamma_2 q'_+(x, h). \tag{6.17}$$

Формула (6.17) сохраняет смысл и в том случае, когда элементы x и h коллинеарны — это вытекает из (6.11). Нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$l_0(y) \leqslant q'_+(x, y) \qquad (y = \gamma_1 x + \gamma_2 h).$$

По теореме Хана—Банаха (см. Н. Данфорд и Дж. Шварц [1]) l_0 можно продолжить до определенного на всем E непрерывного линейного функционала l_1, который удовлетворяет неравенству

$$l_1(y) \leqslant q'_+(x, y) \qquad (y \in E).$$

По построению $l_1(h) = q'_+(x, h)$ и $l_1(x) = q(x)$.

Лемма доказана.

Как было показано в п. 5.2 (лемма 5.1), каждый сублинейный функционал $q(x)$ может быть представлен в виде

$$q(x) = \max_{l \in F} l(x) \qquad (x \in E), \tag{6.18}$$

где F — множество всех таких линейных функционалов $l \in E^*$, что

$$l(x) \leqslant q(x) \qquad (x \in E). \tag{6.19}$$

Непосредственно из определения вытекает, что F выпукло и бикомпактно в E-топологии пространства E^*. Обозначим через $F_{\text{кр}}$ множество крайних точек (см. Н. Данфорд и Дж. Шварц [1]) множества F. Введенные выше множества $J(x)$ также являются выпуклыми и бикомпактными в E-топологии множествами в E^*. Каждое из них является крайним подмножеством множества F и, следовательно, его крайние точки лежат в $F_{\text{кр}}$ (такие крайние точки существуют в силу теоремы М. Г. Крейна — Д. П. Мильмана). Поэтому из (6.18) вытекает, что

$$q(x) = \max_{x \in F_{\text{кр}}} l(x) \qquad (x \in E). \tag{6.20}$$

Аналогично, из (6.15) вытекает формула

$$q'_+(x, h) = \max_{l \in J_{\text{кр}}(x)} l(h) \qquad (h \in E), \tag{6.21}$$

где $J_{\text{кр}}(x)$ — множество крайних точек множества $J(x)$.

Допустим теперь, что сублинейный функционал $q(x)$ задан формулой

$$q(x) = \max_{i=1, \ldots, k} q_i(x) \qquad (x \in E), \tag{6.22}$$

где функционалы $q_i(x)$ сублинейны (но не обязательно линейны!). Обозначим через $i(x)$ множество таких индексов i, при которых $q_i(x) = q(x)$. Очевидно,

$$q'_+(x, h) = \max_{i \in i(x)} (q_i)'_+(x, h) \qquad (h \in E). \tag{6.23}$$

Если функционал $q(x)$ задан равенством

$$q(x) = \sum_{i=1}^{k} q_i(x) \qquad (x \in E), \tag{6.24}$$

то

$$q'_+(x, h) = \sum_{i=1}^{k} (q_i)'_+(x, h) \qquad (h \in E). \tag{6.25}$$

Мы выписали ряд формул, позволяющих вычислять правую производную Гато $q'_+(x, h)$. Эти формулы можно применять и для вычисления левой производной $q'_-(x, h)$, если воспользоваться тождеством (6.12).

Приведем несколько примеров вычисления $q'_+(x, h)$.

а) Пусть $E = R^n$,

$$q(x) = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \qquad (x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in R^n). \tag{6.26}$$

Тогда из (6.25) вытекает формула

$$q'_+(x, h) = s(\xi_1, h_1) + \ldots + s(\xi_n, h_n) \qquad \left(h = \{h_1, \ldots, h_n\} \in R^n\right), \tag{6.27}$$

где

$$s(\xi_i, h_i) = \begin{cases} h_i \operatorname{sign} \xi_i, & \text{если} \quad \xi_i \neq 0, \\ |h_i|, & \text{если} \quad \xi_i = 0. \end{cases} \tag{6.28}$$

б) Пусть $E = R^n$,

$$q(x) = \max_{i=1, \ldots, n} |\xi_i| \qquad (x \in R^n). \tag{6.29}$$

Тогда из (6.23) вытекает формула

$$q'_+(x, h) = \max_{i \in i(x)} s(\xi_i, h_i). \tag{6.30}$$

в) Пусть E — пространство C непрерывных на $[0,1]$ скалярных функций,

$$q(x) = \|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \qquad (x \in C). \tag{6.31}$$

Функционал (6.31) можно записать в виде (6.18), где F — единичный шар в C^*. Множество $F_{\text{кр}}$ крайних точек состоит (см. Н. Данфорд и Дж. Шварц [1], стр. 478) из функционалов l вида $l(x) = x(\tau)$, где $\tau \in [0, 1]$. Поэтому из формулы (6.21) вытекает равенство

$$q'_+(x, h) = \max\{\max_{\tau \in \Omega_+} h(\tau), -\min_{\tau \in \Omega_-} h(\tau)\} \qquad (h \in C), \tag{6.32}$$

где

$$\Omega_+ = \{\tau\colon \tau \in [0, 1], \quad x(\tau) = \|x\|\} \tag{6.33}$$

и

$$\Omega_- = \{\tau\colon \tau \in [0, 1], \quad x(\tau) = -\|x\|\}. \tag{6.34}$$

г) Сублинейный функционал

$$q(x) = -\min_{i=1, \ldots, n} \xi_i \qquad (x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in R^n) \tag{6.35}$$

выделяет в R^n конус векторов с неотрицательными компонентами. Из (6.23) вытекает формула

$$q'_+(x, h) = -\min_{i \in i(x)} h_i \qquad (h = \{h_1, \ldots, h_n\} \in R^n), \tag{6.36}$$

где $i(x)$ — множество индексов i, при которых $q(x) = -\xi_i$.

д) В качестве последнего примера рассмотрим функционал (5.9). Для вычисления его производных Гато нужно воспользоваться представлением (5.10) и формулой (6.21).

6.3. Положительность оператора сдвига. Для изучения расположения кривых $x = x(t)$ в пространстве E удобно рассматривать скалярные функции

$$q(t) = q[x(t)], \tag{6.37}$$

где $q(x)$ — некоторый функционал, определенный на E. По характеру зависимости скалярных функций (6.37) от t часто удается сделать важные выводы о поведении вектор-функции $x(t)$. Как хорошо известно, на этой идее основан метод функций Ляпунова в теории устойчивости, методы изучения диссипативности и конвергентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений, методы доказательства теорем единственности и нелокальной продолжимости, метод направляющих функций в теории периодических решений и т. д.

Нас будут интересовать функции (6.37) для случаев, когда $q(x)$ сублинеен.

Функция $x(t)$ со значениями в пространстве E называется *дифференцируемой* (сильно) в точке t_0, если существует такой элемент $x'(t_0) \in E$, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} - x'(t_0) \right\| = 0.$$

В случае, когда $E = R^n$, дифференцируемость функции

$$x(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$$

совпадает с дифференцируемостью всех компонент $\xi_i(t)$.

Лемма 6.3. *Пусть функция $x(t)$ дифференцируема в точке t_0. Пусть функционал $q(x)$ сублинеен.*

Тогда скалярная функция (6.37) *имеет в точке t_0 левую и правую производные $q'_+(t_0)$ и $q'_-(t_0)$, причем*

$$q'_+(t_0) = q'_+[x(t_0), x'(t_0)] \tag{6.38}$$

и

$$q'_-(t_0) = q'_-[x(t_0), x'(t_0)]. \tag{6.39}$$

Доказательство. Ограничимся доказательством формулы (6.38). Пусть

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + x'(t_0)\Delta t + \omega \Delta t,$$

где $\|\omega\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Из сублинейности $q(x)$ вытекает справедливость при $\Delta t > 0$ оценок

$$q[x(t_0) + x'(t_0)\Delta t] - \Delta t\, q(-\omega) \leqslant q[x(t_0) + x'(t_0)\Delta t + \omega\Delta t] \leqslant \\ \leqslant q[x(t_0) + x'(t_0)\Delta t] + \Delta t\, q(\omega),$$

откуда

$$\frac{q[x(t_0) + x'(t_0)\Delta t] - q[x(t_0)]}{\Delta t} - q(-\omega) \leqslant \frac{q[x(t_0+\Delta t)] - q[x(t_0)]}{\Delta t} \leqslant \\ \leqslant \frac{q[x(t_0) + x'(t_0)\Delta t] - q[x(t_0)]}{\Delta t} + q(\omega).$$

Из этих неравенств вытекает (6.38).

Лемма доказана.

Иногда удобно вектор-функции $x(t)$ характеризовать скалярными функциями вида

$$q(t) = q[t, x(t)], \tag{6.40}$$

где функционал $q(t, x)$ $(-\infty < t < \infty,\ x \in E)$ при фиксированных t сублинеен по x. Если $q(t, x)$ дифференцируем по t и производная $q'_t(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных, то, очевидно, функция (6.40) имеет правые и левые производные $q'_+(t)$ и $q'_-(t)$, которые определяются равенствами

$$q'_+(t_0) = b'_t[t_0, x(t_0)] + (q'_x)_+[t_0;\ x(t_0);\ x'(t_0)] \tag{6.41}$$

и

$$q'_-(t_0) = q'_t[t_0, x(t_0)] + (q'_x)_-[t_0;\ x(t_0);\ x'(t_0)]. \tag{6.42}$$

Вернемся к изучению уравнения (6.3) в пространстве R^n. Оператор сдвига по траекториям уравнения (6.3) будем, как выше, обозначать через $U(t, s)$.

Пусть K — некоторый телесный конус в R^n. Напомним, что оператор сдвига называется положительным, если $U(t, s)K \subset K$ при $t \geqslant s$. Оператор сдвига называется *сильно положительным*, если $U(t, s)x \gg 0$ при $t > s$, $x \in K$, $x \neq 0$. При исследовании условий положительности и сильной положительности оператора сдвига по траекториям уравнения

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = 0 \tag{6.43}$$

будут использованы условия следующих типов:

$$q'_-[x, -A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma, -\infty < t < \infty), \tag{6.44}$$

$$q'_+[x, -A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma, -\infty < t < \infty), \tag{6.45}$$

$$q'_-[x, -A(t)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma;\ t \in \mathfrak{M};\ x \neq 0), \tag{6.46}$$

где $q(x)$ — сублинейный функционал, выделяющий конус $K \subset R^n$, Γ — граница конуса K, $\mathfrak{M}$ — некоторое плотное на $(-\infty, \infty)$ множество значений t.

Лемма 6.4. *Для того чтобы было выполнено одно из условий* (6.44)—(6.46), *необходимо и достаточно, чтобы соответствующему условию удовлетворял функционал* $q_0(x)$, *определенный формулой* (5.9):

$$q_0(x) = \min_{x+ru_0 \in K} r \qquad (x \in R^n). \tag{6.47}$$

Доказательство. Покажем, что условие (6.45) равносильно условию

$$(q_0)'_+[x, -A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma, -\infty < t < \infty). \tag{6.48}$$

Из (5.12) и (5.13) вытекает справедливость при всех $x, h \in R^n$ $(-\infty < t < \infty)$ неравенств

$$-q[q_0(x+th)u_0] \leqslant q(x+th) \leqslant q[-q_0(x+th)u_0].$$

Пусть $x \in \Gamma$; тогда при любом $h \in R^n$ и $t > 0$

$$-q\left[\frac{q_0(x+th)-q_0(x)}{t}u_0\right] \leqslant \frac{q(x+th)-q(x)}{t} \leqslant$$
$$\leqslant q\left[-\frac{q_0(x+th)-q_0(x)}{t}u_0\right].$$

Переходя к пределу при $t \to 0$, получим неравенства

$$-q[(q_0)'_+(x, h)u_0] \leqslant q'_+(x, h) \leqslant q[-(q_0)'_+(x, h)u_0].$$

В частности,

$$-q\{(q_0)'_+[x, -A(t)x]u_0\} \leqslant q'_+[x, -A(t)x] \leqslant$$
$$\leqslant q\{-(q_0)'_+[x, -A(t)x]u_0\}. \tag{6.49}$$

Допустим, что неравенство (6.48) не выполнено при некоторых t^* и $x^* \in \Gamma$. Тогда элемент $(q_0)'_+ [x^*, -A(t^*)x^*] u_0$ является внутренней точкой конуса K, и поэтому из левого неравенства (6.49) вытекает, что $q'_+ [x^*, -A(t^*)x^*] > 0$. Поэтому из (6.45) вытекает (6.48).

Если выполнено (6.48), то (6.45) непосредственно вытекает из правого неравенства (6.49).

Аналогично доказывается эквивалентность условий (6.44) и (6.46) соответственно неравенствам

$$(q_0)'_- [x, -A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma; \ -\infty < t < \infty) \quad (6.50)$$

и

$$(q_0)'_- [x, -A(t)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma; \ x \neq 0; \ t \in \mathfrak{M}). \quad (6.51)$$

Лемма доказана.

Теорема 6.2. *Пусть сублинейный функционал $q(x)$ выделяет телесный конус K с границей Γ.*

Тогда для положительности оператора сдвига $U(t, s)$ необходимо, чтобы было выполнено условие (6.45), *и достаточно, чтобы было выполнено условие* (6.44). *Для сильной положительности оператора $U(t, s)$ достаточно, чтобы было выполнено условие* (6.46).

Доказательство. Первое утверждение теоремы тривиально: если $U(t, s)$ положителен, то $q[U(t, s)x] \leqslant 0$ при $t \geqslant s$ и $x \in \Gamma$; следовательно,

$$q'_+ [x, -A(t)x] = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{q[U(t+\Delta t, t)x] - q(x)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to +0} \frac{q[U(t+\Delta t, t)x]}{\Delta t} \leqslant 0.$$

Перейдем ко второму утверждению теоремы. Пусть выполнено условие (6.44). Тогда в силу леммы 6.3 выполнено условие (6.50).

Введем в рассмотрение оператор

$$Px = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \in K, \\ x + q_0(x) u_0, & \text{если} \quad x \notin K. \end{cases}$$

Очевидно, оператор P «проектирует» все элементы $x \notin K$ на границу Γ конуса K. Простой подсчет показывает, что

$$(q_0)'_- (x, h) = (q_0)'_- (Px, h) \qquad (x, h \in R^n). \quad (6.52)$$

Так как функционал $q_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то уравнение

$$\frac{dy}{dt}+A(t)Py=0 \tag{6.53}$$

имеет при каждом начальном значении $y(s)=y_0$ единственное решение $y(t;s,y_0)$, определенное при всех $t\in(-\infty,\infty)$. Очевидно, второе утверждение теоремы будет доказано, если мы установим, что $y(t;s,y_0)\in K$ при $t\geqslant s$, $y_0\in K$. Предположим противное. Тогда найдутся два таких момента времени t_1 и t_2 и такой элемент $y_0\in\Gamma$, что $t_1<t_2$ и $y(t;t_1,y_0)\overline{\in}K$ при $t_1<t\leqslant t_2$. Рассмотрим скалярную функцию

$$\varphi(t)=q_0[y(t;\ t_1,\ y_0)] \qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2).$$

В силу леммы 6.3 левая производная $\varphi'_-(t)$ определится равенством

$$\varphi'_-(t)=(q_0)'_-[y(t;\ t_1,\ y_0),\ y'_t(t;\ t_1,\ y_0)]$$

и, следовательно,

$$\varphi'_-(t)=(q_0)'_-[y(t;\ t_1,\ y_0),\quad -A(t)Py(t;\ t_1,\ y_0)],$$

откуда в силу (6.52)

$$\varphi'_-(t)=(q_0)'_-[Py(t;\ t_1,\ y_0),\quad -A(t)Py(t;\ t_1,\ y_0)].$$

Элементы $Py(t;\ t_1,\ y_0)$ принадлежат Γ. Поэтому из (6.50) вытекает неравенство $\varphi'_-(t)\leqslant 0$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$.

Так как $\varphi(t_1)=0$, то из последнего неравенства вытекает, что $\varphi(t)\leqslant 0$ при $t\in[t_1,t_2]$. Следовательно, $y(t;t_1,y_0)\in K$ при $t\in[t_1,t_2]$ — мы пришли к противоречию.

Перед тем, как перейти к третьему утверждению теоремы, отметим один общий факт, доказательство которого предоставим читателю. Если оператор сдвига положителен, то все точки $U(t,s)x$ являются внутренними точками конуса K, если $x\gg 0$ и если $t\geqslant s$.

Пусть выполнено условие (6.46). Тогда выполнено и условие (6.45). Следовательно, оператор сдвига $U(t,s)$ положителен. Остается показать, что $U(t,s)x\gg 0$, если

$x \in K$, $x \neq 0$ и $t > s$. В предположении противного $U(\tau, s)x \in \Gamma$ при $s \leqslant \tau \leqslant t$ и, следовательно,

$$\varphi(\tau) = q[U(\tau, s)x] \equiv 0 \qquad (s \leqslant \tau \leqslant t),$$

откуда вытекает тождество

$$\varphi'_-(\tau) = q'_-[U(\tau, s)x, \ -A(\tau)U(\tau, s)x] \equiv 0 \qquad (s \leqslant \tau \leqslant t),$$

которое противоречит (6.46).

Теорема доказана.

Теорема 6.2 естественным образом переносится на случай, когда рассматриваются условия положительности и сильной положительности оператора сдвига $U(t, s)$ не относительно постоянного конуса K, а относительно переменного конуса $K(t)$. Допустим, что функция $K(t)$ выделена зависящим от t (и гладким по t) функционалом (см. п. 5.5, лемма 5.5). Тогда утверждения теоремы 6.2 сохраняют силу, если условия (6.44)—(6.46) заменить соответственно условиями

$$q'_t(t, x) + (q'_x)_-[t, x, -A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma(t); \ -\infty < t < \infty), \tag{6.54}$$

$$q'_t(t, x) + (q'_x)_+[t, x, -A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma(t); \ -\infty < t < \infty) \tag{6.55}$$

и

$$q'_t(t, x) + (q'_x)_-[t, x, -A(t)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma(t); \ x \neq 0; \ t \in \mathfrak{M}); \tag{6.56}$$

здесь через $\Gamma(t)$ обозначена граница конуса $K(t)$.

6.4. Положительность оператора сдвига относительно граненого конуса. Конус $K \subset R^n$ называется *граненым*, если он является пересечением конечного числа полупространств $l_i(x) = (x, y_i) \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Такой конус можно выделить сублинейным функционалом

$$q(x) = -\min_{i=1, \ldots, k} (x, y_i) \qquad (x \in R^n). \tag{6.57}$$

Очевидно, из векторов $y_1, \ldots, y_k$ можно выбрать n линейно независимых. Мы ниже предполагаем, что рассматриваемые граненые конусы телесны.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} + Ax = 0, \tag{6.58}$$

где A — постоянная матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{6.59}$$

Полезно иметь в виду, что достаточные условия (6.46) сильной положительности оператора сдвига по траекториям системы (6.43) (относительно граненого конуса K) в случае системы (6.58) с постоянными коэффициентами превращаются в необходимые и достаточные. Мы не останавливаемся на доказательстве.

Приведем еще одну форму условий сильной положительности оператора сдвига по траекториям уравнения (6.58) — для этого необходимо и достаточно, чтобы он был положителен и чтобы матрица (6.59) имела в K единственный с точностью до нормы собственный вектор, который является внутренним элементом K. Последнее утверждение, разумеется, неверно, если конус K нераненый.

Подробнее остановимся на случае, когда конус K миниедрален, т. е. K — граненый конус, являющийся пересечением ровно n полупространств. Без ограничения общности в этом случае можно считать, что K совпадает с конусом векторов $x = \{\xi_1 \dots, \xi_n\}$ с неотрицательными компонентами. Легко видеть, что оператор сдвига по траекториям уравнения (6.58) положителен в том и только том случае, когда внедиагональные элементы a_{ij} $(i \neq j)$ матрицы (6.9) неположительны:

$$a_{ij} \leqslant 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \dots, n). \tag{6.60}$$

Знак диагональных элементов a_{ii} при этом не играет роли. Условие сильной положительности оператора сдвига удобно формулировать при помощи дополнительного понятия.

Последовательность

$$a_{i_1 i_2},\ a_{i_2 i_3},\ \dots,\ a_{i_{m-1} i_m},\ a_{i_m i_1} \tag{6.61}$$

называется *дорожкой невырожденности* матрицы (6.59), если все ее элементы отличны от нуля, если

$$i_1 \neq i_2,\ i_2 \neq i_3,\ \dots,\ i_{m-1} \neq i_m,\ i_m \neq i_1 \tag{6.62}$$

и, наконец, если среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_m$ есть все числа $1, \ldots, n$ (некоторые из них могут встречаться несколько раз).

Оказывается, что *оператор сдвига сильно положителен по отношению к конусу векторов с неотрицательными компонентами в том и только том случае, если выполнено условие* (6.60) *и если матрица* (6.59) *имеет хотя бы одну дорожку невырожденности.*

Последние условия в случае переменной матрицы

$$A(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{Vmatrix} \tag{6.63}$$

становятся лишь достаточным признаком сильной положительности оператора сдвига. При этом условия (6.60) не меняются — они должны быть выполнены при всех $t \in (-\infty, \infty)$; предположение о существовании дорожки невырожденности нужно понимать в том смысле, что матрица (6.63) при всех t имеет дорожки невырожденности (возможно, при различных t различные).

6.5. О построении конусной функции $K(t)$. Выше обсуждался вопрос об условиях, при выполнении которых оператор сдвига положителен или сильно положителен относительно заданной конусной функции $K(t)$. Эти условия выделяют классы систем дифференциальных уравнений, для изучения которых может быть применена заданная конусная функция $K(t)$.

Более важна задача описания и построения таких конусных функций $K(t)$, относительно которых положителен или сильно положителен оператор сдвига по траекториям заданной конкретной системы. При этом конусная функция $K(t)$ должна быть такой, чтобы построенный по ней конус $\widehat{K}(t)$ был телесным конусом в $B(R^n)$. Поэтому при построении конусных функций $K(t)$, относительно которых положителен или сильно положителен оператор сдвига, нужно стараться обеспечить их периодичность или почти периодичность.

Пусть в пространстве R^n изучается уравнение

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = 0. \tag{6.64}$$

Выберем в R^n произвольный конус K и положим

$$K(t) = U(t, 0)K \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{6.65}$$

где $U(t, s)$ — оператор сдвига по траекториям уравнения (6.64). Простая проверка показывает, что

$$U(t, s)K(s) = K(t) \qquad (-\infty < t, s < \infty).$$

Значит, оператор $U(t, s)$ положителен относительно конусной функции (6.65). К сожалению, конусная функция (6.65) в общем случае не обладает свойством почти периодичности даже тогда, когда матрица $A(t)$ не зависит от t. Однако если $A(t)$ не зависит от t, то при специальном подборе конуса K конусная функция (6.65) будет почти периодична. Соответствующие построения не представляют труда, и мы предоставляем их читателю. Ниже будут построены конусные функции для важных частных классов систем.

В заключение этого пункта остановимся на одном специальном вопросе. Рассмотрим в пространстве R^n уравнение

$$\frac{dy}{dt} + By = 0 \tag{6.66}$$

с постоянными коэффициентами. Пусть в пространстве R^n задан некоторый телесный конус K, и пусть оператор e^{-Bt} $(t > 0)$ сильно положителен относительно этого конуса. Отсюда вытекает (см. М. А. Красносельский [1]), что матрица B имеет такое простое собственное число λ_0, что

$$\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda, \tag{6.67}$$

где λ — любое другое собственное число матрицы B. Оказывается, справедливо и обратное утверждение, т. е. *оператор* e^{-Bt} $(t > 0)$ *сильно положителен относительно некоторого телесного конуса* K, *если только выполнено*

неравенство (6.67). Для доказательства преобразуем уравнение (6.66) с помощью линейной замены к виду

$$\frac{dy_1}{dt}+\lambda_0 y_1=0 \qquad (y_1 - \text{скаляр}),$$

$$\frac{dy_2}{dt}+Cy_2=0 \qquad (y_2\in R^{n-1}),$$

где C — матрица, все собственные значения которой удовлетворяют неравенству (6.67). Поэтому собственные значения матрицы $D=\lambda_0 I - C$ лежат в левой полуплоскости и, следовательно, (см., например, А. М. Ляпунов [1], И. Г. Малкин [1]), существует такая положительно определенная матрица H, что матрица $HD+D^*H$ отрицательно определенная. Положим теперь

$$K=\{y\colon\ y=\{y_1, y_2\}\in R^n,\ -y_1+\sqrt{(Hy_2, y_2)}\leqslant 0\}.$$

Из способа выбора матрицы H и из теоремы 6.2 следует наше утверждение.

Допустим теперь, что система (6.64) приводима. Тогда существует такая непрерывно дифференцируемая невырожденная пп-матрица $W(t)$, обратная к которой почти периодична, что матрица

$$B=W^{-1}(t)\,A(t)\,W(t)+W^{-1}(t)\,W'(t) \tag{6.68}$$

не зависит от t. Замена

$$x(t)=W(t)\,y(t) \tag{6.69}$$

переводит уравнение (6.64) в уравнение (6.66). Очевидно, оператор сдвига $U(t, s)$ по траекториям уравнения (6.64) можно записать в виде

$$U(t, s)=W(t)\,e^{-B(t-s)}W^{-1}(s) \qquad (-\infty<t,\ s<\infty). \tag{6.70}$$

Поэтому *оператор* $U(t, s)$ *положителен* (*сильно положителен*) *относительно почти периодической конусной функции*

$$K(t)=W(t)\,K, \tag{6.71}$$

если оператор сдвига $e^{-B(t-s)}$ *по траекториям уравнения* (6.66) *положителен* (*сильно положителен*) *по отношению к постоянному конусу* K.

6.6. Об устойчивости решений однородного уравнения. Продолжим изучение уравнения

$$Lx \equiv \frac{dx}{dt} + A(t)\,x = 0, \tag{6.72}$$

где $A(t)$ — матрица с пп-элементами. Будем предполагать, что оператор сдвига $U(t, s)$ по траекториям уравнения (6.72) положителен относительно некоторой конусной функции $K(t)$.

Лемма 6.5. *Пусть $y_0(t)$ — такая непрерывно дифференцируемая на всей оси вектор-функция, что*

$$Ly_0(t) \geqslant 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{6.73}$$

Тогда

$$U(t,\ s)\,x \leqslant y_0(t) \qquad (t \geqslant s), \tag{6.74}$$

если только $x \leqslant y_0(s)$.

Доказательство. Положим

$$f(t) = Ly_0(t), \quad h(t) = y_0(t) - U(t,\ s)\,x. \tag{6.75}$$

Функция $h(t)$ является решением уравнения $Lh = f(t)$ с начальным условием $h(s) = y_0(s) - x \geqslant 0$. Очевидно,

$$h(t) \equiv U(t,\ s)\,h(s) + \int_s^t U(t,\ \tau)\,f(\tau)\,d\tau. \tag{6.76}$$

Отсюда вытекает (6.74).

Лемма доказана.

Предположим, что конусная функция $K(t)$ почти периодична и телесна. Тогда (см. п. 5.7) замыкание $\mathfrak{N}$ множества значений конусной функции $K(t)$ состоит из телесных конусов. При этом (см. стр. 55) существует такая постоянная N, что для любого конуса $K \in \mathfrak{N}$ из $x, y - x \in K$ вытекает неравенство

$$|x| \leqslant N|y|. \tag{6.77}$$

Будем писать $x_0(t) \gg 0$, если при каждом t вектор $x_0(t)$ принадлежит $K(t)$ вместе с некоторым шаром радиуса r_0, не зависящего от t.

Теорема 6.3. *Пусть функция $x_0(t)$ ограничена и имеет ограниченную и непрерывную на всей оси производную. Пусть*

$$x_0(t) \gg 0, \quad Lx_0(t) \gg 0. \tag{6.78}$$

Тогда нулевое решение уравнения (6.72) *экспоненциально устойчиво по Ляпунову, т. е.*

$$|U(t, s)| \leqslant Me^{-\gamma(t-s)} \qquad (t \geqslant s), \tag{6.79}$$

где M, $\gamma > 0$.

Доказательство. Введем в пространстве R^n семейство норм (см. (5.41))

$$|x|_t = \inf\{\alpha\colon -\alpha x_0(t) \leqslant x \leqslant \alpha x_0(t)\} \quad (-\infty < t < \infty;\ x \in R^n). \tag{6.80}$$

Здесь и всюду в доказательстве теоремы 6.3 знак $\leqslant$ в каждом неравенстве с элементами, зависящими от t, определяется полуупорядоченностью по соответствующему конусу $K(t)$.

Очевидно,

$$-|x|_t x_0(t) \leqslant x \leqslant |x|_t x_0(t) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

откуда

$$0 \leqslant x + |x|_t x_0(t) \leqslant 2|x|_t x_0(t) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

и из (6.77) вытекает оценка

$$|x| \leqslant (1 + 2N) \sup_{\tau} |x_0(\tau)| \cdot |x|_t \qquad (-\infty < t < \infty).$$

С другой стороны, так как $x_0(t)$ входит в $K(t)$ вместе с шаром радиуса r_0, то элементы

$$x_0(t) + r_0 \frac{x}{|x|}, \qquad x_0(t) - r_0 \frac{x}{|x|}$$

принадлежат $K(t)$, т. е.

$$-\frac{|x|}{r_0} x_0(t) \leqslant x \leqslant \frac{|x|}{r_0} x_0(t) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

откуда вытекает, что

$$|x| \geqslant r_0 |x|_t \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Из установленных неравенств вытекает, что

$$m_1 |x| \leqslant |x|_t \leqslant m_2 |x| \qquad (x \in R^n,\ -\infty < t < \infty), \tag{6.81}$$

где m_1 и m_2 — положительные постоянные.

Из второго условия (6.78) вытекает существование такого положительного γ, при котором

$$Lx_0(t) \gg \gamma x_0(t). \tag{6.82}$$

Положим

$$y_0(t) = e^{-\gamma(t-s)} x_0(t), \tag{6.83}$$

где $-\infty < t < \infty$, а s — некоторое фиксированное число. Очевидно,

$$Ly_0(t) = e^{-\gamma(t-s)} [Lx_0(t) - \gamma x_0(t)] \geqslant 0. \tag{6.84}$$

Обозначим через $T(s)$ шар $|x|_s \leqslant 1$, т. е. множество таких $x \in R^n$, что

$$-x_0(s) \leqslant x \leqslant x_0(s).$$

Так как $y_0(s) = x_0(s)$, то из леммы 6.5 вытекают оценки

$$-y_0(t) \leqslant U(t, s)\, x \leqslant y_0(t) \qquad (t \geqslant s,\ x \in T(s))$$

или, что то же, оценки

$$-e^{-\gamma(t-s)} x_0(t) \leqslant U(t, s)\, x \leqslant e^{-\gamma(t-s)} x_0(t) \quad (t \geqslant s,\ x \in T(s)).$$

Из этих неравенств вытекает, что

$$|U(t, s)\, x|_t \leqslant e^{-\gamma(t-s)} \qquad (t \geqslant s, \quad x \in T(s))$$

и в силу (6.81)

$$|U(t, s)\, x| \leqslant \frac{1}{m_1} e^{-\gamma(t-s)} \qquad (t \geqslant s,\ x \in T(s)),$$

откуда вытекает (6.79) при $M = m_1^{-1} m_2$.

Теорема доказана.

Теорема 6.3 обратима в том смысле, что из неотрицательности функции Грина $G(t, s)$ пп-оператора L вытекает существование пп-функции $x_0(t)$, удовлетворяющей условиям (6.78). Эта функция $x_0(t)$ может быть определена как пп-решение уравнения $Lx = f(t)$, где $f(t) \in B(R^n)$ и $f(t) \gg 0$.

Теорема 6.3 приводит, с одной стороны, к разнообразным достаточным признакам экспоненциальной устойчивости и, с другой стороны, к эффективным условиям существования положительной функции Грина. Ряд конкретных применений этой теоремы будет указан ниже.

Продолжать смеяться легче,
чем окончить смех.

Козьма Прутков

§ 7. Системы уравнений второго порядка

7.1. Уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим пп-оператор

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + Ax, \tag{7.1}$$

где A — постоянная матрица. *Необходимым и достаточным условием существования функции Грина пп-оператора* (7.1) *является отсутствие неотрицательных вещественных собственных значений у матрицы* A. Действительно, в силу теоремы 2.4 функция Грина $G(t, s)$ оператора (7.1) существует в том и только том случае, если регулярен пп-оператор

$$\tilde{L}u = \frac{du}{dt} + Qu, \tag{7.2}$$

где

$$Q = \begin{Vmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{Vmatrix}. \tag{7.3}$$

Регулярность оператора (7.2) равносильна тому, что у матрицы (7.3) нет собственных значений, лежащих на мнимой оси, т. е. тому, что у матрицы A нет неотрицательных собственных значений.

Если у матрицы A нет неотрицательных собственных значений, то (см. Ф. Р. Гантмахер [1], гл. 8) ее можно единственным образом представить в виде

$$A = -B^2, \tag{7.4}$$

где B — вещественная матрица, все собственные значения которой лежат в левой полуплоскости. Предоставляем читателю показать, что в этом случае функцию Грина $G(t, s)$ пп-оператора (7.1) можно записать в виде

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{2} B^{-1} e^{B(t-s)}, & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ \frac{1}{2} B^{-1} e^{-B(t-s)}, & \text{если} \quad t \leqslant s. \end{cases} \tag{7.5}$$

Функция Грина (7.5) не может быть неотрицательной относительно постоянного телесного конуса $K \subset R^n$. Действительно, в противном случае при каждом $f_0 \in K$ уравнение $Lx = f_0$ имеет принадлежащее K решение $A^{-1}f_0$, т. е. $A^{-1}K \subset K$, и в силу известных теорем о собственных векторах линейных положительных операторов (см. М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1], М. А. Красносельский [1]) матрица A имеет положительное собственное значение — мы пришли к противоречию.

Из формулы (7.5) вытекает, что функция Грина $G(t, s)$ неположительна относительно постоянного конуса K в том и только том случае, если

$$e^{B\tau}K_0 \subset K \qquad (\tau \geqslant 0), \tag{7.6}$$

где $K_0 = -B^{-1}K$. Проверка условия (7.6) является трудной задачей; даже построение матрицы B по матрице A вызывает значительные затруднения. Поэтому нас будут интересовать в дальнейшем признаки отрицательности функции Грина, выраженные в терминах, относящихся непосредственно к матрице A. Здесь удалось получить лишь частные результаты. Ситуация еще более сложна в случае пп-операторов с переменными коэффициентами.

7.2. Мажорантный признак. Нам в дальнейшем понадобится одно элементарное общее утверждение, которое в различных формах применялось многими авторами.

Пусть K — нормальный телесный конус в банаховом пространстве E. Из положительности относительно такого конуса K аддитивного и однородного оператора вытекает его непрерывность *).

Лемма 7.1. *Пусть действующий в E аддитивный и однородный с плотной в E областью определения оператор D_0 имеет положительный относительно конуса K обратный D_0^{-1}. Пусть B — такой непрерывный линейный оператор, что $D_0^{-1}B$ положителен (например, B положителен). Пусть, наконец,*

$$D_0x_0 - Bx_0 \gg 0, \tag{7.7}$$

где x_0 — некоторый внутренний элемент конуса K.

---

*) И. А. Бахтин, М. А. Красносельский и В. Я. Стеценко [1].

Тогда оператор

$$D_1 = D_0 - B \tag{7.8}$$

имеет определенный на E непрерывный обратный D_1^{-1}, причем оператор D_1^{-1} положителен и, более того,

$$D_1^{-1} f \geqslant D_0^{-1} f \qquad (f \in K). \tag{7.9}$$

Доказательство. В силу (7.7)

$$D_0^{-1} B x_0 \ll x_0.$$

Поэтому из теоремы 5.1 вытекает, что спектральный радиус $r(D_0^{-1}B)$ оператора $D_0^{-1}B$ меньше 1. Следовательно, существует оператор $(I - D_0^{-1}B)^{-1}$ и

$$(I - D_0^{-1}B)^{-1} = I + D_0^{-1}B + (D_0^{-1}B)^2 + \ldots \tag{7.10}$$

Из (7.10) вытекает, что

$$(I - D_0^{-1}B)^{-1} f \geqslant f \qquad (f \in K). \tag{7.11}$$

Так как $D_1 = D_0(I - D_0^{-1}B)$, то оператор D_1 непрерывно обратим; при этом из (7.11) вытекает справедливость оценок (7.9).

Лемма доказана.

Близкие леммы доказаны Л. Коллатцом [1].

Из оценок (7.9) вытекает, что в условиях леммы 7.1 оператор D_1^{-1} сильно положителен, если сильно положителен оператор D_0^{-1}. Лемма 7.1 сохраняет силу, если условие (7.7) заменить неравенством $r(D_0^{-1}B) < 1$.

Рассмотрим пп-операторы

$$L_0 x = \frac{d^2x}{dt^2} + A_0(t)\, x \tag{7.12}$$

и

$$L_1 x = \frac{d^2x}{dt^2} + A_1(t)\, x. \tag{7.13}$$

Пусть $K(t)$ — некоторая телесная почти периодическая конусная функция, а $\hat{K}(t)$ — определенный по ней (см. п. 5.4) телесный конус в пространстве $B(R^n)$.

Теорема 7.1. *Пусть функция Грина $G_0(t, s)$ пп-оператора* (7.12) *неположительна относительно конусной функции $K(t)$. Пусть*

$$A_1(t)x \geqslant A_0(t)x \qquad (x \in K(t),\ -\infty < t < \infty). \quad (7.14)$$

Пусть, наконец, существует такая пп-функция $x_0(t) \gg 0$, $x_0(t) \in B^2(R^n)$, что

$$L_1 x_0(t) \ll 0. \quad (7.15)$$

Тогда пп-оператор (7.13) *регулярен, его функция Грина $G_1(t, s)$ также неположительна относительно конусной функции $K(t)$ и, более того,*

$$G_0(t, s)x - G_1(t, s)x \in K(t) \qquad (x \in K(s)). \quad (7.16)$$

Доказательство. Положим

$$D_0 x = -L_0 x, \quad D_1 x = -L_1 x \qquad (x \in B^2(R^n)).$$

Операторы D_0 и D_1 удовлетворяют условиям леммы 7.1. Поэтому пп-оператор L_1 регулярен. Неравенства (7.9) можно записать в нашем случае в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, s) f(s)\, ds \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t, s) f(s)\, ds \qquad (f(t) \in \hat{K}(t))$$

или, что то же, в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} [G_0(t, s) - G_1(t, s)] f(s)\, ds \in K(t) \qquad (f(t) \in \hat{K}(t)). \quad (7.17)$$

Из (7.17) вытекает (7.16) — достаточно повторить рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 5.5.

Теорема доказана.

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.1. *Пусть дополнительно функция Грина $G_0(t, s)$ сильно отрицательна.*

Тогда функция Грина $G_1(t, s)$ пп-оператора (7.13) *сильно отрицательна.*

Утверждение этой теоремы вытекает из (7.16).

При анализе конкретных пп-операторов L_1 удобно в качестве L_0 выбирать пп-операторы с постоянными коэффициентами.

7.3. Использование систем первого порядка. В этом пункте будут установлены достаточно общие признаки положительности и сильной положительности интегрального оператора

$$Tf(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds, \tag{7.18}$$

где $G(t, s)$ — функция Грина пп-оператора

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + A(t)\, x. \tag{7.19}$$

Для простоты рассуждений мы ограничимся конусом $\hat{K} \subset B(R^n)$, построенным по постоянному телесному конусу $K \subset R^n$. При исследовании пп-оператора (7.19) нам понадобится оператор $U(t, s)$ сдвига по траекториям линейной системы

$$\frac{dx}{dt} - A(t)\, x = 0 \tag{7.20}$$

первого порядка.

Теорема 7.3. *Пусть существует такая пп-функция* $x_0(t) \in B^2(R^n)$, что

$$x_0(t) \gg 0, \qquad Lx_0(t) \ll 0. \tag{7.21}$$

Пусть оператор $U(t, s)$ *положителен*:

$$U(t, s)\, K \subset K \qquad (t \geqslant s). \tag{7.22}$$

Тогда оператор (7.19) *регулярен и его функция Грина* $G(t, s)$ *неположительна относительно конуса* K.

Перед тем, как перейти к доказательству теоремы, установим вспомогательные леммы.

Лемма 7.2. *Для каждого телесного конуса* K *в* R^n *можно указать такую матрицу* B, *что*

$$Bx \gg 0 \qquad (x \in K,\ x \neq 0). \tag{7.23}$$

Матрицу B, удовлетворяющую условию (7.23), можно определить, например, формулой

$$Bx = l_0(x)\, u_0 \qquad (x \in R^n),$$

где $u_0 \gg 0$, а $l_0(x)$ — такой линейный на R^n функционал, что

$$l_0(x) \geqslant m\,|x| \qquad (x \in K;\ m > 0).$$

Существование указанных функционалов l_0 геометрически очевидно (полное доказательство см. в монографии М. А. Красносельского [1]).

Лемма 7.3. *Пусть выполнено* (7.22). *Пусть матрица B удовлетворяет условию* (7.23).

Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ найдется такое $a = a(\varepsilon) > 0$, что

$$[A(t) + a^2 I + \varepsilon B]\, x \gg 0 \qquad (x \in K,\ x \neq 0,\ -\infty < t < \infty). \tag{7.24}$$

Доказательство. Пусть вначале x — фиксированный нормированный элемент границы Γ конуса K. Установим существование такого $a_0 = a_0(x) > 0$, что при $a \geqslant a_0$

$$q\left[A(t)\, x + a^2 x + \frac{\varepsilon}{2} Bx\right] < 0 \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{7.25}$$

где $q(x)$ — некоторый сублинейный функционал, выделяющий конус K. В предположении противного найдется такая последовательность t_k, что

$$q\left[A(t_k)\, x + k^2 x + \frac{\varepsilon}{2} Bx\right] \geqslant 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{7.26}$$

При этом без ограничения общности можно считать, что последовательность матриц $A(t_k)$ сходится к некоторой матрице A_0. Так как $x \in \Gamma$, то $q(x) = 0$ и в силу (7.22) (по теореме 6.2)

$$q'_+[x,\ A(t_k)\, x] \leqslant 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

откуда вытекает неравенство

$$q'_+(x,\ A_0 x) \leqslant 0.$$

Следовательно, в силу (6.10)

$$q'_+\left(x,\ A_0 x + \frac{\varepsilon}{2} Bx\right) \leqslant q'_+(x,\ A_0 x) + \frac{\varepsilon}{2} q'_+(x,\ Bx) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} q(Bx),$$

и поэтому

$$q'_+\left(x,\ A_0 x + \frac{\varepsilon}{2} Bx\right) < 0. \tag{7.27}$$

По определению

$$q'_+\left(x,\ A_0x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right)=\lim_{\tau\to+0}\frac{q\left(x+\tau A_0x+\frac{\tau\varepsilon}{2}Bx\right)-q(x)}{\tau}=$$
$$=\lim_{\tau\to+0}q\left(A_0x+\frac{1}{\tau}x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right),$$

и из (7.27) вытекает существование такого $k_0>0$, что

$$q\left(A_0x+k_0^2x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right)<0.$$

Очевидно, при $k\geqslant k_0$

$$q\left[A(t_k)x+k^2x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right]\leqslant q\left[A(t_k)x+k_0^2x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right],$$

и поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,q\left[A(t_k)x+k^2x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right]\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{k\to\infty}q\left[A(t_k)x+k_0^2x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right]=q\left(A_0x+k_0^2x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right)<0,$$

что противоречит (7.26).

Пусть снова x — фиксированный нормированный элемент границы Γ конуса K. Тогда для любого $y\in K$ при $a\geqslant a_0(x)$ выполнены неравенства

$$q[A(t)y+a^2y+\varepsilon By]\leqslant q[A(t)y+a_0^2(x)y+\varepsilon By]\leqslant$$
$$\leqslant q\left[A(t)x+a_0^2(x)x+\frac{\varepsilon}{2}Bx\right]+\frac{\varepsilon}{2}q(Bx)+$$
$$+q[A(t)(y-x)+a_0^2(x)(y-x)+\varepsilon B(y-x)],$$

и из (7.25) следует, что

$$q[A(t)y+a^2y+\varepsilon By]\leqslant\frac{\varepsilon}{2}q(Bx)+b|y-x|\quad(-\infty<t<\infty),\tag{7.28}$$

где

$$b=[\sup_{-\infty<t<\infty}|A(t)|+a_0^2(x)+\varepsilon|B|]\max_{|z|\leqslant1}|q(z)|.$$

Из (7.28) вытекает неравенство

$$q[A(t)y+a^2y+\varepsilon By]<0\tag{7.29}$$

при $a \geqslant a_0(x)$, $y \in K$ и при

$$|y - x| \leqslant r(x) = \frac{\varepsilon}{4b} |q(Bx)|$$

(напомним, что $q(Bx) < 0$). Неравенство (7.29) означает, что

$$A(t)y + a^2y + \varepsilon By \gg 0 \quad (y \in K, |y - x| \leqslant r(x), \ a \geqslant a_0(x)). \tag{7.30}$$

Пусть Γ_0 — пересечение Γ и единичной сферы $|x| = 1$. Выберем такие точки $x_1, \ldots, x_s \in \Gamma_0$, что шары $|x - x_i| < r(x_i)$ покрывают Γ_0. Тогда из (7.30) вытекает, что

$$A(t)y + a^2y + \varepsilon By \gg 0 \quad (y \in \Gamma_0, -\infty < t < \infty)$$

при

$$a \geqslant \max_i a_0(x_i).$$

Следовательно, при указанных значениях a операторы $A(t) + a^2I + \varepsilon B$ сильно положительны на всем K. Отсюда вытекает утверждение леммы 7.3.

Лемма 7.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.3. *Пусть существует такая матрица B, что при достаточно малых положительных ε пп-операторы*

$$L_\varepsilon x = \frac{d^2x}{dt^2} + A(t)x + \varepsilon Bx \tag{7.31}$$

регулярны.

Тогда пп-оператор (7.19) *регулярен.*

В силу теоремы 2.3 достаточно показать, что уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(t)x = f(t) \tag{7.32}$$

при любой функции $f(t) \in B(R^n)$ имеет в $C(R^n)$ по крайней мере одно решение.

Пусть $\varepsilon_k \to 0$. Обозначим через $x_k(t)$ пп-решения уравнений

$$L_{\varepsilon_k} x = f(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\frac{d^2x_k(t)}{dt^2} + A(t)x_k(t) + \varepsilon_k Bx_k(t) = f(t) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7.33}$$

Покажем, что пп-функции $x_k(t)$ равномерно ограничены. В предположении противного можно считать, что найдется такая последовательность t_k, что

$$|x_k(t_k)| \geqslant \frac{1}{2}\|x_k(t)\|_{C(R^n)} \to \infty,$$

матрицы-функции $A(t+t_k)$ равномерно сходятся к пп-матрице $A_*(t)$, а пп-функции $x_0(t+t_k)$ и $Lx_0(t+t_k)$ соответственно к пп-функциям $x_*(t)$ и

$$L_*x_*(t) = \frac{d^2x_*(t)}{dt^2} + A_*(t)\,x_*(t).$$

Положим

$$y_k(t) = \frac{x_k(t+t_k)}{\|x_k(\tau)\|_{C(R^n)}} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7.34}$$

Очевидно,

$$\frac{d^2y_k(t)}{dt^2} + A(t+t_k)\,y_k(t) + \varepsilon_k B y_k(t) = \frac{f(t+t_k)}{\|x_k(\tau)\|_{C(R^n)}}, \tag{7.35}$$

и поэтому вторые производные функций (7.34) равномерно ограничены. Следовательно, функции (7.34) образуют последовательность, компактную в смысле равномерной сходимости на каждом конечном промежутке. Без ограничения общности можно считать, что сама последовательность (7.34) сходится равномерно на каждом конечном промежутке к некоторой функции $y_0(t)$ $(-\infty < t < \infty)$.

Переходя к пределу (детали предоставляем читателю) в равенствах (7.35), получим

$$\frac{d^2y_0(t)}{dt^2} + A_*(t)\,y_0(t) = 0. \tag{7.36}$$

Так как $|y_0(0)| \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $y_0(0) \in K$. Очевидно, $x_*(t) \gg 0$. Поэтому найдется такое максимальное α_0, при котором функция

$$z_*(t) = x_*(t) + \alpha_0 y_0(t)$$

принадлежит конусу $\hat{K} \subset C(R^n)$ вектор-функций со значениями в K.

Так как $L_* x_*(t) \ll 0$, то функция $z_*(t)$ является ограниченным на всей оси решением уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A_*(t)\,x = -f_*(t),$$

где $f_*(t) \gg 0$.

Пусть $q(x)$ — сублинейный функционал, выделяющий конус K. Очевидно,

$$\sup_{-\infty < t < \infty} q\,[z_*(t)] = 0.$$

Выберем последовательность чисел t_j так, чтобы последовательность точек $z_*(t_j)$ сходилась к некоторой точке $x_{**} \in \Gamma$. Без ограничения общности можно считать, что почти периодические функции $f_*(t + t_j)$ и матрицы $A_*(t + t_j)$ при этом равномерно сходятся соответственно к пп-функции $f_{**}(t)$ и пп-матрице $A_{**}(t)$, а функции $z_{**}(t + t_j)$ равномерно на каждом конечном промежутке к некоторой функции $z_{**}(t)$. Функция $z_{**}(t)$ является ограниченным на всей оси решением уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A_{**}(t)\,(x) = -f_{**}(t), \tag{7.37}$$

где $f_{**}(t) \gg 0$, и удовлетворяет условию

$$0 = q\,[z_{**}(0)] = \sup_{-\infty < t < \infty} q\,[z_{**}(t)].$$

В силу теоремы 6.2 из условия (7.22) вытекает, что

$$q'_+\,[x_{**},\ A_{**}(0)\,x_{**}] \leqslant 0.$$

Поэтому из (6.15) вытекает неравенство

$$\max_{l \in J(x_{**})} l\,[A_{**}(0)\,x_{**}] \leqslant 0, \tag{7.38}$$

где $J(x_{**})$ — совокупность таких линейных функционалов l, что

$$l(x_{**}) = 0, \quad l(x) \leqslant q(x) \quad (x \in R^n). \tag{7.39}$$

Из (7.39) вытекает, что

$$l\,[z_{**}(0)] = 0, \quad l\,[z_{**}(t)] \leqslant 0 \qquad (-\infty < t < \infty,\ l \in J(x_{**})).$$

Поэтому

$$q'_+\left[x_{**}, \frac{d^2z_{**}(0)}{dt^2}\right] = \max_{l \in J(x_{**})} l\left[\frac{d^2z_{**}(0)}{dt^2}\right] =$$

$$= \max_{l \in J(x_{**})} \frac{d^2 l\,[z_{**}(0)]}{dt^2} \leqslant 0. \quad (7.40)$$

Так как производная $q'_+(x_{**}, h)$ по переменной h является сублинейным функционалом, то из (7.37) вытекает оценка

$$q'_+\left[x_{**}, \frac{d^2z_{**}(0)}{dt^2}\right] + q'_+[x_{**}, A_{**}(0)\,x_{**}] + q'_+[x_{**}, f_{**}(0)] \geqslant 0.$$

Из (7.38) и (7.40) вытекает неположительность первых двух слагаемых, и поэтому

$$q'_+[x_{**}, f_{**}(0)] \geqslant 0.$$

С другой стороны, в силу (6.10)

$$q'_+[x_{**}, f_{**}(0)] \leqslant q[f_{**}(0)],$$

и так как $f_{**}(0)$ — внутренний элемент конуса K, то

$$q'_+[x_{**}, f_{**}(0)] < 0.$$

Мы пришли к противоречию.

Таким образом, удовлетворяющие равенствам (7.33) пп-функции $x_k(t)$ равномерно ограничены. Из (7.33) вытекает, что последовательность $x_k(t)$ компактна в смысле равномерной сходимости на каждом конечном промежутке.

Пусть некоторая подпоследовательность $x_{k(i)}(t)$ равномерно на каждом конечном промежутке сходится к некоторой функции $x(t)$. Очевидно, эта функция является ограниченным на всей оси решением уравнения (7.32).

Лемма 7.4 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 7.3.

Пусть B — матрица, удовлетворяющая условию (7.23). Такая матрица существует в силу леммы 7.2.

Пусть ε_0 — такое положительное число, что

$$L_\varepsilon x_0(t) \ll 0 \qquad (0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0), \qquad (7.41)$$

где $x_0(t)$ — пп-функция из условия (7.21), а L_ε — операторы (7.31). В силу леммы 7.3 при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ можно определить такое $a = a(\varepsilon) > 0$, при котором выполнено условие (7.24).

Положим

$$G_a(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2a} e^{-a(t-s)} I, & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -\frac{1}{2a} e^{a(t-s)} I, & \text{если} \quad t \leqslant s. \end{cases} \tag{7.42}$$

Очевидно, пп-решения уравнений

$$L_\varepsilon x(t) = f(t) \qquad (f \in B(R^n))$$

совпадают с пп-решениями линейного интегрального уравнения

$$x(t) = T_a x(t) + g(t),$$

где

$$T_a x(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G_a(t, s)[A(s) + a^2 I + \varepsilon B]\, x(s)\, ds$$

и

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_a(t, s) f(s)\, ds.$$

Из (7.24) вытекает, что оператор T_a положителен относительно конуса $\hat{K}$. При этом из (7.41) следует, что

$$x_0(t) - T_a x_0(t) \gg 0.$$

Из леммы 7.1 (роль D_0 играет единичный оператор I, а роль B — оператор T_a) вытекает, что оператор $I - T_a$ имеет положительный обратный $(I - T_a)^{-1}$. Отсюда вытекает, что операторы L_ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ регулярны и их функции Грина $G(t, s; \varepsilon)$ неположительны относительно конуса K.

Из леммы 7.4 вытекает тогда регулярность оператора (7.19). Его функция Грина $G(t, s)$ в силу теоремы 4.3 неположительна вместе с функциями Грина $G(t, s; \varepsilon)$.

Теорема 7.3 полностью доказана.

7.4. Сильная положительность. Обозначим через $\mathfrak{A}$ замыкание множества значений пп-матрицы $A(t)$.

Теорема 7.4. *Пусть существует пп-функция $x_0(t)$, удовлетворяющая условиям* (7.21). *Пусть*

$$q'_-(x, Ax) < 0 \qquad (x \in \Gamma,\ x \neq 0,\ A \in \mathfrak{A}), \tag{7.43}$$

где $q(x)$ — функционал, выделяющий конус K, Γ — граница K.

Тогда оператор (7.18) *сильно положителен относительно конуса $\hat{K}$.*

Доказательство. Положительность оператора (7.18) вытекает из теоремы 7.3, так как в силу теоремы 6.2 из (7.43) следует (7.22).

Предположим, что оператор (7.18) не обладает свойством сильной положительности, т. е. существует такая ненулевая пп-функция $f(t) \in \hat{K}$, что пп-функция $x(t) = Tf(t)$ лежит на границе $\hat{\Gamma}$ конуса $\hat{K}$. Без ограничения общности (см. доказательство леммы 7.4) можно считать, что $z_0 = x(0) \in \Gamma$. Покажем, что $z_0 \neq 0$.

Очевидно, при любом $a > 0$

$$x(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} G_a(0, s)[A(s) + a^2 I]\, x(s)\, ds + \int_{-\infty}^{\infty} G_a(0, s) f(s)\, ds. \tag{7.44}$$

Пусть $l(x)$ — такой линейный функционал, что $l(x) \geqslant |x|$ $(x \in K)$. Тогда при достаточно больших a выполнено неравенство

$$l[A(s)x + a^2 x] \geqslant [a^2 - |A(s)| \cdot |l|]|x| \geqslant 0 \qquad (x \in K).$$

Поэтому из (7.44) вытекает, что

$$l[x(0)] \geqslant -\int_{-\infty}^{\infty} G_a(0, s)\, l[A(s)x(s) + a^2 x(s)]\, ds \geqslant 0,$$

и если $x(0) = 0$, то

$$l[A(s)x(s) + a^2 x(s)] \equiv 0 \qquad (-\infty < s < \infty).$$

Из последнего тождества вытекает, что $x(s) \equiv 0$. Но тогда

$$f(t) = -Lx(t) \equiv 0,$$

и мы пришли к противоречию.

Из (6.12) и (6.15) вытекает, что

$$q'_-[z_0, A(0)z_0] = \min_{l \in J(z_0)} l[A(0)z_0],$$

где $J(z_0)$ — совокупность линейных функционалов, удовлетворяющих условиям

$$l(z_0) = 0, \quad l(x) \leqslant q(x) \qquad (x \in R^n).$$

Пусть l_0 — такой функционал из $J(z_0)$, что

$$q'_-[z_0, A(0)z_0] = l_0[A(0)z_0].$$

Тогда

$$l_0[x''(0)] \leqslant 0, \quad l_0[f(0)] \leqslant 0, \quad l_0[A(0)z_0] < 0,$$

и поэтому

$$l_0[x''(0) + A(0)x(0) + f(0)] < 0.$$

С другой стороны,

$$l_0\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} + A(t)x(t) + f(t)\right] \equiv 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Напомним, что через $H[A(t)]$ обозначается совокупность пп-матриц $A_*(t)$, являющихся равномерными пределами последовательностей вида $A(t + \tau_j)$. |

Лемма 7.5. *Пусть пп-матрица $A(t)$ удовлетворяет условиям*

$$q'_+[x, A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma, -\infty < t < \infty)$$

и

$$q'_-[x, A(t_0)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma, x \neq 0), \tag{7.45}$$

где t_0 — некоторое фиксированное число, а $q(x)$ — сублинейный функционал, выделяющий телесный граненый конус K с границей Γ.

Тогда для любой пп-матрицы $A_*(t) \in H[A(t)]$ *найдется такое* t_*, *что*

$$q'_-[x, A_*(t_*)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma,\ x \neq 0). \tag{7.46}$$

Доказательство. Пусть $A_*(t)$ является равномерным пределом последовательности $A(t+\tau_j)$. Тогда пп-матрица $A(t)$ является равномерным пределом последовательности $A_*(t-\tau_j)$. В частности, $A(t_0)$ является пределом последовательности матриц $A_*(t_0-\tau_j)$, откуда вытекает, что

$$e^{A(t_0)} = \lim_{j\to\infty} e^{A_*(t_0-\tau_j)}.$$

Из (7.45) в силу теоремы 6.2 вытекает, что матрица $e^{A(t_0)}$ сильно положительна. Поэтому и матрицы $e^{A_*(t_0-\tau_j)}$ при больших j также сильно положительны.

Так как конус K граненый, то из сильной положительности $e^{A_*(t_0-\tau_j)}$ вытекает сильная положительность всех матриц $e^{A_*(t_0-\tau_j)t}$ при $t>0$ или, что то же, сильная положительность оператора сдвига по траекториям уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A_*(t_0-\tau_j)x$$

с постоянными коэффициентами. Отсюда (см. п. 6.4) вытекает, что неравенство (7.46) выполнено при $t_* = t_0 - \tau_j$.

Лемма доказана.

Лемма 7.6. *Пусть оператор сдвига* $U(t,s)$ *по траекториям уравнения*

$$\frac{dx}{dt} - A(t)x = 0 \tag{7.47}$$

удовлетворяет условию

$$U(t,s)K \subset K \qquad (t \geqslant s), \tag{7.48}$$

где K — граненый конус.

Тогда найдется такое $a>0$, *что*

$$A(t)x + a^2x \in K \qquad (x \in K,\ -\infty < t < \infty). \tag{7.49}$$

Доказательство. Существование для каждой фиксированной точки $x \in K$ такого $a = a(x) > 0$, при котором выполнено (7.49), очевидно. Поэтому для любого конечного набора точек $x_1, \ldots, x_m \in K$ найдется такое общее $a > 0$, что

$$A(t)x_i + a^2 x_i \in K \qquad (i = 1, \ldots, m;\ -\infty < t < \infty). \tag{7.50}$$

В качестве $x_1, \ldots, x_m$ выберем нормированные ($|x_i| = 1$) точки, лежащие на одномерных ребрах конуса K. Тогда каждую точку $x \in K$ можно представить в виде

$$x = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_m x_m,$$

где $\xi_i \geqslant 0$. Поэтому из (7.50) вытекает (7.49).

Лемма доказана.

Леммы 7.5 и 7.6 позволяют существенно ослабить ограничительное условие (7.43) для случая граненых конусов.

Теорема 7.5. *Пусть выполнены условия теоремы 7.3. Пусть конус K граненый. Пусть существует такое t_0, что*

$$q'_-[x, A(t_0)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma,\ x \neq 0). \tag{7.51}$$

Тогда оператор (7.18) *сильно положителен относительно конуса $\hat{K}$.*

Доказательство. Из теоремы 7.3 вытекает положительность относительно $\hat{K}$ всех операторов $-L_*^{-1}$, где

$$L_* x = \frac{d^2x}{dt^2} + A_*(t)x \qquad (A_*(t) \in H[A(t)]).$$

Покажем, что все операторы $-L_*^{-1}$ сильно положительны.

В предположении противного найдутся такие пп-матрица $A_*(t)$ и ненулевая пп-функция $f(t) \in \hat{K}$, что $x_*(0) \in \Gamma$, где $x_*(t)$ — пп-решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A_*(t)x + f(t) = 0. \tag{7.52}$$

Из (7.52) вытекает, что

$$x_*(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G_a(t, s)[A_*(s)x_*(s) + a^2x_*(s)]\,ds - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} G_a(t, s) f(s)\,ds, \qquad (7.53)$$

где $G_a(t, s)$ — функция (7.42).

Пусть l_0 — такой положительный на K линейный функционал, что $l_0[x_0(0)] = 0$. Тогда из (7.53) и леммы 7.6 вытекает, что при достаточно больших a справедливо тождество

$$l_0[A_*(s)x_*(s) + a^2x_*(s)] \equiv 0 \qquad (-\infty < s < \infty),$$

откуда следует, что

$$l_0[x_*(s)] \equiv 0 \qquad (-\infty < s < \infty) \qquad (7.54)$$

и

$$l_0[A_*(s)x_*(s)] \equiv 0 \qquad (-\infty < s < \infty). \qquad (7.55)$$

Как и при доказательстве теоремы 7.4, легко показать, что пп-функция $x_*(s)$ не принимает нулевых значений. В силу (7.54) все эти значения лежат на границе конуса K. Поэтому из леммы 7.5 вытекает существование такого t_*, что

$$q'_-[x_*(t_*),\ A_*(t_*)x_*(t_*)] < 0. \qquad (7.56)$$

Обозначим через J_* множество таких положительных на K нормированных линейных функционалов, что $l[x_*(t_*)] = 0$. С одной стороны, из леммы 6.2 и из (7.56) вытекает, что

$$\max_{l \in J_*} l[A_*(t_*)x_*(t_*)] > 0.$$

Пусть $l_* \in J_*$ и $l_*[A_*(t_*)x_*(t_*)] > 0$. С другой стороны, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве тождества (7.55), легко получить равенство

$$l_*[A_*(t_*)x_*(t_*)] = 0.$$

Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Утверждение теоремы 7.5 переносится на случай неграненых конусов, если априори считать, что существует такое a, при котором выполнено условие (7.49), и если условие (7.51) заменить более жестким неравенством

$$q'_-[x, A_*(t_*)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma,\ x \neq 0;\ A_*(t) \in H(A)),$$

где t_* определяется по пп-матрице $A_*(t)$.

Отметим еще, что утверждения лемм 7.5 и 7.6 для неграненых конусов неверны.

7.5. Снова о системах с постоянными коэффициентами. В случае пп-операторов

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + Ax \tag{7.57}$$

с постоянными коэффициентами теоремы предыдущих пунктов этого параграфа удобно формулировать в других терминах.

Теорема 7.6. *Пусть вещественные части собственных значений матрицы A отрицательны. Пусть*

$$e^{At}K \subset K \qquad (t > 0), \tag{7.58}$$

где K — телесный конус в R^n.

Тогда функция Грина $G(t, s)$ пп-оператора (7.57) *существует и неположительна относительно конуса K.*

Теорема 7.7. *Пусть вещественные части собственных значений матрицы A отрицательны. Пусть*

$$q'_-(x, Ax) < 0 \qquad (x \in \Gamma,\ x \neq 0), \tag{7.59}$$

где Γ — граница телесного конуса K в R^n.

Тогда функция Грина $G(t, s)$ пп-оператора (7.57) *существует и оператор*

$$Tf(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds \tag{7.60}$$

сильно положителен относительно конуса $\hat{K}$.

Теорема 7.8. *Пусть вещественные части собственных значений матрицы A отрицательны. Пусть K — телесный граненый конус. Пусть*

$$e^{At}x \gg 0 \qquad (x \in K,\ \ x \neq 0,\ \ t > 0). \tag{7.61}$$

Тогда функция Грина $G(t, s)$ оператора (7.57) *существует и оператор* (7.60) *сильно положителен относительно конуса $\widehat{K}$.*

Интересно отметить, что при $n = 2$ (R^2 — плоскость) условия теорем 7.6 и 7.8 не только достаточны, но и необходимы соответственно для положительности и сильной положительности оператора (7.60). Докажем это утверждение.

Выберем в R^2 базис так, чтобы K совпадал с множеством векторов с неотрицательными компонентами. Пусть в этом базисе

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \tag{7.62}$$

Если оператор $-L^{-1}$ положителен, то $-A^{-1}K \subset K$. Поэтому у матрицы $-A^{-1}$ есть положительное собственное значение. Следовательно, у матрицы A есть отрицательное собственное значение λ_1. Из существования функции Грина у оператора (7.57) вытекает, что и второе собственное значение матрицы отрицательно. Таким образом, первое условие теорем 7.6 и 7.8 выполнено.

Очевидно,

$$-A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{Vmatrix}, \tag{7.63}$$

где

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \lambda_1\lambda_2 > 0, \tag{7.64}$$

поэтому

$$a_{12} \geqslant 0, \quad a_{21} \geqslant 0. \tag{7.65}$$

Последние неравенства означают (см. п. 6.4), что выполнено условие (7.58).

Если оператор $-L^{-1}$ сильно положителен, то и оператор $-A^{-1}$ сильно положителен. Отсюда вытекает, что

$$a_{12} > 0, \quad a_{21} > 0,$$

и поэтому выполнено (7.61).

При $n \geqslant 3$ условия теорем 7.6—7.8 уже не необходимы.

Отметим в заключение, что в условиях теоремы 7.8 не только оператор (7.60) сильно положителен относительно конуса $\widehat{K}$, но и функция Грина $G(t, s)$ сильно отрицательна относительно конуса K.

7.6. Замечание о системах первого порядка. Пусть пп-оператор первого порядка

$$L_1 x = \frac{dx}{dt} - A(t)\, x$$

регулярен и его функция Грина $G(t, s)$ неотрицательна по отношению к некоторому телесному граненому конусу K. Далее, пусть выполнено неравенство (7.51). Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 7.5, легко убедиться, что интегральный оператор

$$T_1 f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds$$

сильно положителен по отношению к конусу $\widehat{K}$.

Опять скажу: никто не обнимет необъятного.

Козьма Прутков

§ 8. Скалярные уравнения высших порядков

8.1. Постановка задачи. В этом параграфе мы изучим пп-оператор

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1(t) \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m(t)\, x, \qquad (8.1)$$

где $a_i(t)$ — скалярные пп-функции. Функция Грина $G(t, s)$ регулярного пп-оператора (8.1) — это скалярная функция. Нас будут интересовать условия, при которых эта функция Грина неотрицательна или неположительна.

При исследовании оператора (8.1) нам будет удобно пользоваться терминологией и обозначениями, введенными в предыдущих параграфах. Через K_+ будет обозначаться луч неотрицательных чисел в R^1; тогда $\widehat{K}_+$ — конус неотрицательных пп-функций в $B(R^1)$. Неотрицательность $G(t, s)$ как скалярной функции совпадает с

неотрицательностью $G(t, s)$ относительно конуса K_+. Сильная положительность $G(t, s)$ относительно конуса K_+ означает, что $G(t, s)$ неотрицательна и что при каждом фиксированном t на одном из бесконечных промежутков $(-\infty, t)$ или (t, ∞) нет интервала $\alpha < s < \beta$, на котором $G(t, s) \equiv 0$.

При изучении оператора (8.1) удобно (см. п. 2.1) наряду с ним рассматривать оператор

$$\tilde{L}u = \frac{du}{dt} + Q(t)\,u, \tag{8.2}$$

где $u \in R^m$, а

$$Q(t) = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_m(t) & a_{m-1}(t) & a_{m-2}(t) & \dots & a_1(t) \end{Vmatrix}. \tag{8.3}$$

В силу теоремы 2.4 оператор (8.1) регулярен в том и только том случае, если регулярен оператор (8.2).

Если оператор (8.2) регулярен, то (см. п. 4.2) его функция Грина $\tilde{G}(t, s)$ может быть записана в виде

$$\tilde{G}(t, s) = \begin{cases} U(t)\,P_+U^{-1}(s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -U(t)\,P_-U^{-1}(s), & \text{если} \quad t < s, \end{cases} \tag{8.4}$$

где $U(t)$ $(U(0) = I)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\tilde{L}u = 0, \tag{8.5}$$

а P_+, P_- — операторы проектирования на подпространства E_+, $E_- \subset R^m$ начальных значений решений уравнения (8.5), убывающих соответственно при $t \to -\infty$ и при $t \to \infty$ (см. п. 3.2). Положим

$$e_1 = \{1, 0, \dots, 0\},\ e_2 = \{0, 1, \dots, 0\},\ \dots$$
$$\dots,\ e_m = \{0, 0, \dots, 1\}. \tag{8.6}$$

Векторы (8.6) образуют базис в пространстве R^m. Из теоремы 4.2 и из (8.4) вытекает, что функция Грина

$G(t, s)$ оператора (8.1) имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} (U(t) P_+ U^{-1}(s) e_m, e_1), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -(U(t) P_- U^{-1}(s) e_m, e_1), & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{8.7}$$

Теорема 8.1. *Если функция Грина $G(t, s)$ регулярного пп-оператора* (8.1) *неотрицательна относительно конуса $K_+ \subset R^1$, то она сильно положительна относительно K_+.*

Доказательство. В предположении противного можно указать такие числа $\alpha_1 < \beta_1 < t_0 < \alpha_2 < \beta_2$, что функция $G(t_0, s)$ обращается в нуль при $s \in (\alpha_1, \beta_1)$ и при $s \in (\alpha_2, \beta_2)$. В силу (8.7) это значит, что

$$(U(t_0) P_+ U^{-1}(s) e_m, e_1) = 0 \qquad (\alpha_1 < s < \beta_1) \tag{8.8}$$

и

$$(U(t_0) P_- U^{-1}(s) e_m, e_1) = 0 \qquad (\alpha_2 < s < \beta_2). \tag{8.9}$$

Очевидно,

$$\frac{d}{ds} U^{-1}(s) = U^{-1}(s) Q(s),$$

поэтому

$$(U(t_0) P_+ U^{-1}(s) Q(s) e_m, e_1) = 0 \qquad (\alpha_1 < s < \beta_1)$$

и

$$(U(t_0) P_- U^{-1}(s) Q(s) e_m, e_1) = 0 \qquad (\alpha_2 < s < \beta_2)$$

или, что то же,

$$-(U(t_0) P_+ U^{-1}(s) e_{m-1}, e_1) + \\ + a_1(s)(U(t_0) P_+ U^{-1}(s) e_m, e_1) = 0 \qquad (\alpha_1 < s < \beta_1)$$

и

$$-(U(t_0) P_- U^{-1}(s) e_{m-1}, e_1) + \\ + a_1(s)(U(t_0) P_- U^{-1}(s) e_m, e_1) = 0 \qquad (\alpha_2 < s < \beta_2),$$

откуда в силу (8.8) и (8.9)

$$(U(t_0) P_+ U^{-1}(s) e_{m-1}, e_1) = 0 \qquad (\alpha_1 < s < \beta_1)$$

и

$$(U(t_0) P_- U^{-1}(s) e_{m-1}, e_1) = 0 \qquad (\alpha_2 < s < \beta_2).$$

Повторяя это рассуждение, получим равенства

$$(U(t_0)P_+U^{-1}(s)e_i, e_1) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ \alpha_1 < s < \beta_1)$$

и

$$(U(t_0)P_-U^{-1}(s)e_i, e_1) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m;\ \alpha_2 < s < \beta_2).$$

Так как при любом s векторы $U^{-1}(s)e_1, \ldots, U^{-1}(s)e_m$ образуют базис в R^m, то из последних равенств вытекает, что при любом $u \in R^m$

$$(U(t_0)P_+u, e_1) = (U(t_0)P_-u, e_1) = 0,$$

поэтому

$$(U(t_0)u, e_1) = 0 \qquad (u \in R^m).$$

С другой стороны, $(U(t_0)u, e_1) = 1$, если $u = U^{-1}(t_0)e_1$. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается, что из неположительности относительно $K_+ \subset R^1$ функции Грина $G(t, s)$ пп-оператора (8.1) вытекает ее сильная отрицательность относительно K_+.

В связи с теоремой 8.1 в этом параграфе обсуждаются только условия существования и неотрицательности или неположительности функции Грина. Для операторов (8.1) с переменными коэффициентами получены лишь частные результаты. Более полно эту задачу удалось изучить для операторов

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m x \tag{8.10}$$

с постоянными коэффициентами.

8.2. Одно необходимое условие знакопостоянства функции Грина пп-оператора (8.10). Как легко видеть, *пп-оператор* (8.10) *регулярен в том и только том случае, если характеристическое уравнение*

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \tag{8.11}$$

не имеет нулевых и чисто мнимых корней. Ниже будем считать, что это условие выполнено.

Корни уравнения (8.11) естественным образом разбиваются на две группы — корни, лежащие в левой полуплоскости, и корни, лежащие в правой полуплоскости.

Пусть α_- — наибольшая вещественная часть корней первой группы, а α_+ — наименьшая вещественная часть корней второй группы. Если первая группа пуста, то будем считать, что $\alpha_- = -\infty$; если вторая группа пуста, то будем считать, что $\alpha_+ = \infty$. В полосе $\alpha_- < \operatorname{Re}\lambda < \alpha_+$ уравнение (8.11) не имеет корней. Через Λ_- и Λ_+ обозначим множество тех корней λ, у которых соответственно $\operatorname{Re}\lambda = \alpha_-$, $\operatorname{Re}\lambda = \alpha_+$. Если все корни уравнения (8.11) лежат в одной полуплоскости, то одно из множеств Λ_- или Λ_+ пусто.

Пусть $\alpha_- \in \Lambda_-$, если α_- конечно, и $\alpha_+ \in \Lambda_+$, если α_+ конечно. Тогда будем говорить, что характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ *правильный.*

Теорема 8.2. *Пусть функция Грина $G(t, s)$ регулярного пп-оператора* (8.10) *знакопостоянна.*

Тогда характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ правильный.

Доказательство. Предварительно отметим, что в случае пп-операторов с постоянными коэффициентами формула (8.7) для функции Грина может быть записана в виде

$$G(t, s) = \begin{cases} (e^{-Q(t-s)}P_+e_m, e_1), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -(e^{-Q(t-s)}P_-e_m, e_1), & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{8.12}$$

Здесь

$$Q = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_1 \end{Vmatrix}. \tag{8.13}$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ $(k \leqslant m)$ — различные корни характеристического уравнения (8.11). Их кратности обозначим через $r_1, \dots, r_k$ $(r_1 + \dots + r_k = m)$. Рассмотрим вектор-функцию

$$g(z) = \{1, z, \dots, z^{m-1}\}$$

комплексной переменной z и определим векторы

$$g_i^j = \frac{d^{j-1}g(\lambda_i)}{dz^{j-1}} \qquad (i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, r_i). \tag{8.14}$$

Простой подсчет показывает, что при каждом фиксированном i

$$-Qg_i^1 = \lambda_i g_i^1, \quad -Qg_i^2 = \lambda_i g_i^2 + g_i^1, \ldots, \quad -Qg_i^{r_i} = \lambda_i g_i^{r_i} + g_i^{r_i-1}.$$

Это означает, что векторы g_i^1 собственные для матрицы $-Q$, отвечающие соответствующим собственным значениям λ_i, а векторы $g_i^2, \ldots, g_i^{r_i}$ присоединенные, отвечающие тем же собственным значениям. Из общих теорем линейной алгебры вытекает, что векторы (8.14) образуют базис в m-мерном комплексном пространстве E. Поэтому вектор $e_m = \{0, 0, \ldots, 1\}$ можно представить в виде

$$e_m = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_i^j g_i^j. \tag{8.15}$$

Линейная оболочка E_i векторов $g_i^1, \ldots, g_i^{r_i}$ образует корневое подпространство матрицы $-Q$, отвечающее собственному значению λ_i. Каждый вектор $x \in E$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1 + \ldots + x_k \qquad (x_i \in E_i; \quad i = 1, \ldots, k).$$

Это представление определяет проекторы

$$P(\lambda_i)x = x_i \qquad (x \in E; \ i = 1, \ldots, k)$$

на корневые подпространства E_i. Очевидно,

$$P(\lambda_i)\, e_m = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_i^j g_i^j \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Покажем, что все векторы $P(\lambda_i)e_m$ $(i = 1, \ldots, k)$ отличны от нуля. В предположении противного при некотором i

$$e^{-Qt}P(\lambda_i)e_m = 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Дифференцируя это тождество, получаем тождества

$$e^{-Qt}Q^l P(\lambda_i)e_m = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, m-1),$$

откуда (так как Q и $P(\lambda_i)$ коммутируют)

$$P(\lambda_i)Q^l e_m = 0 \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

и поэтому

$$P(\lambda_i)\,e_1 = P(\lambda_i)\,e_2 = \ldots = P(\lambda_i)\,e_m = 0,$$

т. е.

$$P(\lambda_i)\,x = 0 \qquad (x \in E).$$

Мы пришли к противоречию.

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений (см. например, Е. Л. Коддингтон и Н. Левинсон [1]) вытекает, что

$$\left(e^{-Qt}P(\lambda_i)\,e_m,\ e_1\right) = M(t, \lambda_i)\,e^{\lambda_i t}, \tag{8.16}$$

где

$$M(t, \lambda_i) = \alpha_i^1 + \alpha_i^2 t + \ldots + \frac{\alpha_i^{r_i}}{(r_i - 1)!}\,t^{r_i - 1}. \tag{8.17}$$

Левая часть (8.16) — решение уравнения $Lx = 0$ при начальном условии $P(\lambda_i)\,e_m \neq 0$. Поэтому $M(t, \lambda_i)$ — ненулевые многочлены. Очевидно,

$$M(t, \bar{\lambda}) = \overline{M(t, \lambda)}$$

при любом комплексном собственном значении λ матрицы $-Q$.

Очевидно,

$$P_+ = \sum_{\operatorname{Re}\lambda_i < 0} P(\lambda_i), \qquad P_- = \sum_{\operatorname{Re}\lambda_i > 0} P(\lambda_i).$$

Поэтому из (8.16) и (8.12) вытекает, что

$$G(t, s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\operatorname{Re}\lambda_i < 0} M(t-s, \lambda_i)\,e^{\lambda_i (t-s)}, & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ \displaystyle -\sum_{\operatorname{Re}\lambda_i > 0} M(t-s, \lambda_i)\,e^{\lambda_i (t-s)}, & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{8.18}$$

Допустим, что множество Λ_- непусто и $\alpha_- \Subset \Lambda_-$. Тогда при больших значениях t функция $G(t, 0)$ знакопеременна. Аналогично, если непусто Λ_+ и $\alpha_+ \Subset \Lambda_+$, то знакопеременна при больших s функция $G(0, s)$. Следовательно, из знакопостоянства функции Грина пп-оператора (8.10) вытекает, что его характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ правилен.

Теорема доказана.

8.3. Достаточные условия знакопостоянства функции Грина пп-оператора (8.10). Функцией Коши $K(t, s)$ дифференциального оператора (8.1) называют решение уравнения $Lx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$K(s, s) = \ldots = K^{(m-2)}(s, s) = 0, \quad K^{(m-1)}(s, s) = 1. \tag{8.19}$$

В случае дифференциальных операторов (8.10) с постоянными коэффициентами функция Коши $K(t, s)$ зависит от разности аргументов t, s и

$$K(t, s) = k(t - s) = (e^{-Q(t-s)}e_m, e_1), \tag{8.20}$$

где Q — матрица (8.13).

Если все корни многочлена (8.11) имеют отрицательные вещественные части, то в силу (8.12) функция Грина $G(t, s)$ оператора (8.10) определяется равенством

$$G(t, s) = \begin{cases} k(t - s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ 0, & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{8.21}$$

Если же все корни многочлена (8.11) имеют положительные вещественные части, то

$$G(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -k(t - s), & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{8.22}$$

Таким образом, если корни многочлена (8.11) лежат в одной полуплоскости, то функция Грина $G(t, s)$ оператора (8.10) знакопостоянна в том и только том случае, если знакопостоянна его функция Коши $k(t)$ на соответствующем промежутке $(0, \infty)$ или $(-\infty, 0)$. Из (8.19) вытекает, что *функция Коши $k(t)$ знакопостоянна на $(0, \infty)$, если она неотрицательна на этом промежутке, и знакопостоянна на $(-\infty, 0)$, если при нечетном m она неотрицательна на этом промежутке и при четном m — неположительна.*

Каждый регулярный пп-оператор (8.10) с постоянными коэффициентами можно разложить в суперпозицию

$$L = L_1 L_2 \tag{8.23}$$

двух регулярных пп-операторов L_1 и L_2 с постоянными коэффициентами, все корни характеристических многочленов которых лежат соответственно только в левой и только в правой полуплоскостях комплексной плоскости. Очевидно,

$$L^{-1} = L_2^{-1} L_1^{-1} = L_1^{-1} L_2^{-1},$$

откуда вытекает, что функция Грина $G(t, s)$ оператора (8.10) является суперпозицией функцией Грина $G_1(t, s)$, $G_2(t, s)$ операторов L_1 и L_2:

$$G(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(t, \sigma) G_1(\sigma, s)\, d\sigma. \tag{8.24}$$

Поэтому для знакопостоянства функции Грина $G(t, s)$ достаточно, чтобы были знакопостоянны функции Грина операторов L_1 и L_2. Как мы уже отмечали, исследование знакопостоянства функции Грина операторов L_1 и L_2, все корни характеристических многочленов которых лежат в одной полуплоскости, сводятся к установлению знакопостоянства (при $t \geqslant 0$ или при $t \leqslant 0$) их функций Коши.

Если все корни многочлена лежат в левой полуплоскости, то такой многочлен называют *гурвицевым*.

Мы ограничимся в этом пункте анализом оператора L_1, характеристический многочлен которого гурвицев. Если все корни характеристического многочлена некоторого пп-оператора лежат в правой полуплоскости, то для исследования знакопостоянства его функции Грина можно изменить направление времени на противоположное — тогда характеристический многочлен нового оператора будет гурвицев.

Вместо анализа оператора L_1 будем временно считать, что у самого оператора (8.10) характеристический многочлен (8.11) гурвицев.

Телесный конус $K \subset R^m$ будем называть *допустимым*, если он расположен в полупространстве $(u, e_1) \geqslant 0$ и если $e_m \in K$. Дальнейшее исследование основано на следующей теореме.

Теорема 8.3. *Функция Коши $k(t)$ дифференциального оператора* (8.10) *неотрицательна при $t \geqslant 0$ в том и*

только том случае, если существует такой допустимый конус K, что

$$e^{-Qt}K \subset K \qquad (0 \leqslant t < \infty). \tag{8.25}$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы вытекает из формулы (8.20).

Для доказательства необходимости нужно рассмотреть множество

$$K = \{u : (e^{-Qt}u, e_1) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0\}$$

и проверить (см. доказательство теоремы (8.1)), что оно является допустимым конусом, удовлетворяющим условию (8.25).

Теорема доказана.

Для применения теоремы 8.3 нужно уметь строить допустимые конусы в фазовом пространстве R^m. В этом пункте будет указан один достаточно общий способ построения таких конусов. В основе этого способа лежит следующая теорема, принадлежащая В. А. Якубовичу [1] и Р. Э. Калману [1].

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть задана матрица A, характеристический многочлен которой гурвицев, и два ненулевых вектора a и b. Требуется указать условия, при которых существует симметрическая положительно определенная матрица H, удовлетворяющая двум условиям:

$$HA + A^*H < 0 \tag{8.26}$$

и

$$Ha + b = 0. \tag{8.27}$$

Здесь неравенство (8.26) означает, что матрица $HA + A^*H$ отрицательно определенная.

Теорема 8.4. *Для того чтобы существовала симметрическая положительно определенная матрица H, удовлетворяющая неравенству* (8.26) *и равенству* (8.27), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$(a, b) < 0, \qquad (Aa, b) > 0 \tag{8.28}$$

и чтобы при всех вещественных ω *было выполнено неравенство*

$$\operatorname{Re}(A_{i\omega}^{-1}a, b) < 0, \tag{8.29}$$

где $A_{i\omega} = i\omega I - A$, *а* $i = \sqrt{-1}$.

Пусть гурвицев многочлен (8.11) правильный, и пусть λ_0 — его наибольший вещественный корень. Будем говорить, что многочлен (8.11) *вполне правильный*, если выполнены условия:

1°. Корень λ_0 простой, а остальные корни λ характеристического многочлена (8.11) удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$.

2°. Существует такой многочлен

$$\varkappa(\lambda) = (t_1 + \lambda) \ldots (t_{m-2} + \lambda)$$

порядка $m - 2$, что

$$t_1, t_2, \ldots, t_{m-2} > 0 \tag{8.30}$$

и

$$\operatorname{Re}\frac{\varkappa(i\omega)}{\chi(\lambda_0 + i\omega)} < 0 \qquad (-\infty < \omega < \infty). \tag{8.31}$$

Положим

$$\chi_0(\lambda) = \frac{\chi(\lambda_0 + \lambda)}{\lambda}. \tag{8.32}$$

Тогда

$$\frac{\varkappa(i\omega)}{\chi(\lambda_0 + i\omega)} = \frac{S_1(\omega^2) + i\omega S_2(\omega^2)}{i\omega\,|\chi_0(i\omega)|^2},$$

где

$$S_1(\omega^2) = \operatorname{Re}[\varkappa(i\omega)\chi_0(-i\omega)]$$

и

$$\omega S_2(\omega^2) = \operatorname{Im}[\varkappa(i\omega)\chi_0(-i\omega)],$$

поэтому неравенство (8.31) эквивалентно неравенству

$$S_2(\lambda) < 0 \qquad (0 \leqslant \lambda < \infty).$$

Отметим, что $S_2(\lambda)$ — многочлен порядка $m - 2$.

Лемма 8.1. *Пусть характеристический многочлен* (8.11) *вполне правильный.*

Тогда функция Коши $k(t)$ *пп-оператора* (8.10) *неотрицательна при* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим пп-оператор

$$L_0 x = \frac{d}{dt}\chi_0\left(\frac{d}{dt}\right)x, \tag{8.33}$$

где

$$\chi_0(\lambda) = \lambda^{m-1} + b_1\lambda^{m-2} + \ldots + b_{m-1}$$

— многочлен (8.32). Отметим, что $\chi_0(\lambda)$ — гурвицев многочлен и поэтому $b_{m-1} > 0$.

Простой подсчет показывает, что функция Коши $k(t)$ пп-оператора (8.10) связана с функцией Коши $k_0(t)$ пп-оператора (8.33) формулой

$$k(t) = e^{\lambda_0 t}k_0(t).$$

Поэтому для доказательства утверждения леммы достаточно установить неотрицательность (при $t \geqslant 0$) функции $k_0(t)$.

В силу теоремы 8.3 для доказательства неотрицательности (при $t \geqslant 0$) функции Коши $k_0(t)$ пп-оператора (8.33) нужно построить в фазовом пространстве R^m такой допустимый конус K, что оператор сдвига $e^{-Q_0 t}$ $(t \geqslant 0)$ по траекториям уравнения

$$\frac{du}{dt} + Q_0 u = 0 \tag{8.34}$$

положителен по отношению к этому конусу. Здесь

$$Q_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & b_1 \end{Vmatrix}.$$

Для построения конуса K удобно перейти к новому базису.

Многочлен $\lambda\chi_0(\lambda)$ является характеристическим многочленом матрицы $-Q_0$. Следовательно, нуль является собственным числом этой матрицы, а соответствующий собственый вектор совпадает с вектором e_1. Через

$$g_0 = \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$$

обозначим собственный вектор матрицы $-Q_0^*$, отвечающий нулевому собственному значению. Будем считать g_0 нормированным таким образом, что $(g_0, e_1) = \eta_1 = 1$. Тогда каждый элемент $u \in R^m$ можно единственным образом представить в виде

$$u = (u, g_0)e_1 + u_1.$$

Совокупность всех векторов u_1 образует некоторое подпространство E_0 размерности $m-1$. Выберем в E_0 базис $f_1, \ldots, f_{m-1}$ и обозначим через B матрицу, вектор-столбцами которой являются векторы $e_1, f_1, \ldots, f_{m-1}$ соответственно.

В уравнении (8.34) сделаем замену

$$u = Bv.$$

Тогда это уравнение преобразуется в систему двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} &= 0, \\ \frac{dv_1}{dt} &= C_1 v_1, \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

где v_1 — вектор размерности $m-1$, а v_0 — скаляр.

Положим

$$a = B^{-1}e_m = \{a_0, a_1\}, \qquad b = B^* e_1 = \{b_0, b_1\},$$

где a_1 и b_1 — векторы размерности $m-1$. Очевидно,

$$a_0 = (a, e_1) = (e_m, g_0) = \eta_m = \frac{1}{b_{m-1}} > 0$$

и

$$b_0 = (b, e_1) = (e_1, e_1) = 1.$$

Пусть

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{Vmatrix}.$$

Имеем

$$(a, \varkappa(C^*)b) = (e_m, \varkappa(-Q_0^*)e_1) = 0.$$

Поэтому из (8.30) и неравенства $a_0 > 0$ вытекает, что

$$(a_1, \varkappa(C_1^*)b_1) < 0.$$

Как легко видеть,

$$(C_1 a_1, \varkappa(C_1^*) b_1) = (e_m, -Q_0^* \varkappa(-Q_0^*) e_1) = 1.$$

Поэтому из неравенства (8.31) и из теоремы 8.4 следует существование такой положительно определенной матрицы H, что

$$Ha_1 + \varkappa(C_1^*) b_1 = 0 \tag{8.36}$$

и

$$HC_1 + C_1^* H < 0.$$

Положим

$$q(v) = -\min\{v_0 - \sqrt{(H_1 v_1, v_1)}, \quad v_0 + (b_1, v_1),$$
$$t_1 v_0 + ((C_1^* + t_1 I) b_1, v_1), \ldots, t_1 \ldots t_{m-3} v_0 +$$
$$+ ((C_1^* + t_1 I) \ldots (C_1^* + t_{m-3}) b_1, v_1)\},$$

где

$$v = \{v_0, v_1\}, \qquad H_1 = \frac{a_0 \varkappa(0)}{(Ha_1, a_1)} H.$$

Функционал $q(v)$ построен так, что конус, выделяемый этим функционалом, допустимый в старом базисе. При этом оператор сдвига по траекториям системы (8.34) положителен по отношению к этому конусу, если линейный функционал

$$l(v) = \varkappa(0) v_0 + (\varkappa(C_1^*) b_1, v_1)$$

опорный в точке a к круглому конусу

$$K_0 = \{v\colon v_0 \geqslant \sqrt{(H_1 v_1, v_1)}\}.$$

Но последнее условие эквивалентно равенству (8.36).

Лемма доказана.

Вернемся к оператору

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m x, \tag{8.37}$$

характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ которого может иметь корни в разных полуплоскостях комплексной плоскости.

Нас будут интересовать условия знакопостоянства функции Грина $G(t, s)$ этого оператора. В силу теоремы 8.2 необходимо предполагать, что многочлен $\chi(\lambda)$ правильный. Следовательно, $\chi(\lambda)$ можно представить в виде

$$\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda)\chi_2(-\lambda), \tag{8.38}$$

где $\chi_1(\lambda)$, $\chi_2(\lambda)$ — гурвицевы правильные многочлены. Разложению (8.38) соответствует расщепление оператора (8.37) в суперпозицию (8.23) двух операторов. Если функции Грина этих операторов знакопостоянны, то знакопостоянна и функция Грина $G(t, s)$. Ее знак совпадает при этом со знаком числа $(-1)^{m_2}$, где m_2 — порядок многочлена $\chi_2(\lambda)$. Поэтому *если функция Грина $G(t, s)$ знакопостоянна, то*

$$a_m G(t, s) \geqslant 0. \tag{8.39}$$

Гурвицев многочлен $\chi(\lambda)$ назовем *предельно вполне правильным*, если существует последовательность вполне правильных многочленов, сходящаяся к $\chi(\lambda)$. Из леммы 8.1 вытекает

Теорема 8.5. *Пусть характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ оператора* (8.37) *представим в виде* (8.38), *где $\chi_1(\lambda)$ и $\chi_2(\lambda)$ — предельно вполне правильные гурвицевы многочлены.*

Тогда функция Грина оператора (8.37) *знакопостоянна и выполнено неравенство* (8.39).

8.4. Частные классы операторов с постоянными коэффициентами. Из теоремы 8.5 вытекает, что функция Грина пп-оператора (8.37) знакопостоянна, если в представлении (8.38) каждый из правильных гурвицевых многочленов $\chi_1(\lambda)$ и $\chi_2(\lambda)$, имеет не более одной пары простых комплексных корней λ и $\bar{\lambda}$. Отсюда следует, что условия теоремы 8.2 являются не только необходимыми, но и достаточными, если порядок каждого из многочленов $\chi_1(\lambda)$ и $\chi_2(\lambda)$ не превышает четырех. К сожалению, в общем случае условия теоремы 8.2 только необходимы для знакопостоянства функции Грина. Знакопеременной, например, будет функция Грина оператора пятого порядка с правильным характеристическим многочленом $(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2$.

В простых случаях условие правильности характеристического многочлена может быть выражено непосредственно в терминах его коэффициентов. Например, для операторов третьего порядка характеристический многочлен

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c \tag{8.40}$$

правилен, если выполнено по крайней мере одно из условий

$$c \neq 0, \qquad (2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(3b - a^2)^3 \leqslant 0 \tag{8.41}$$

или

$$ac > 0, \qquad a(2a^3 - 9ab + 27c) \leqslant 0. \tag{8.42}$$

Первое из них означает, что все корни многочлена (8.40) вещественны и отличны от нуля. Второе — что все корни λ_1, λ_2, λ_3 лежат в одной полуплоскости, причем

$$0 < |\lambda_1| \leqslant |\operatorname{Re}\lambda_2| = |\operatorname{Re}\lambda_3|,$$

если λ_1 вещественен, а λ_2 и λ_3 — комплексные сопряженные.

Интересно было бы выписать аналогичные условия для правильности характеристического многочлена операторов четвертого порядка.

8.5. Операторы с переменными коэффициентами. В этом пункте мы изучим вопрос о существовании и знакопостоянстве функции Грина пп-оператора

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m(t)\,x \tag{8.43}$$

с переменными коэффициентами. При этом одновременно будут установлены и теоремы сравнения функции Грина пп-оператора (8.43) с функцией Грина некоторого регулярного пп-оператора

$$L_0 x = \frac{d^m x}{dt^m} + b_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m(t)\,x. \tag{8.44}$$

Идея, лежащая в основе доказываемых ниже утверждений, была известна еще А. М. Ляпунову. В различных формах она использовалась многими авторами при исследовании вопроса о существовании и знакопостоянстве функции Грина краевых задач.

Теорема 8.6. *Пусть функция Грина $G_0(t, s)$ регулярного пп-оператора* (8.44) *знакопостоянна. Пусть существует такая пп-функция $u_0(t) \in B^m(R^1)$, что*

$$u_0(t) \gg 0, \quad \varepsilon L_0 u_0(t) \gg 0, \quad \varepsilon L u_0(t) \gg 0, \tag{8.45}$$

где $\varepsilon = 1$, если $G_0(t, s) \geqslant 0$, и *$\varepsilon = -1$, если $G_0(t, s) \leqslant 0$. Наконец, пусть при $t \neq s$ выполнено неравенство*

$$LG_0(t, s) \leqslant 0. \tag{8.46}$$

Тогда пп-оператор (8.43) *регулярен и его функция Грина $G(t, s)$ удовлетворяет неравенству*

$$\varepsilon G(t, s) \geqslant \varepsilon G_0(t, s) \qquad (-\infty < t, s < \infty). \tag{8.47}$$

Доказательство. Для определенности будем считать, что $G_0(t, s) \geqslant 0$. В случае, когда $G_0(t, s) \leqslant 0$, рассуждения проводятся аналогично.

Уравнение

$$Lx = f(t) \qquad (f(t) \in B(R^1)) \tag{8.48}$$

запишем в виде

$$L_0 x - Dx = f(t), \tag{8.49}$$

где

$$Dx = \sum_{k=1}^{m} [b_k(t) - a_k(t)] \frac{d^{m-k}x}{dt^{m-k}}. \tag{8.50}$$

При помощи замены

$$x = L_0^{-1} y \tag{8.51}$$

уравнение (8.49) преобразуем к виду

$$y - DL_0^{-1} y = f(t). \tag{8.52}$$

Оператор DL_0^{-1} — это непрерывный оператор в пространстве пп-функций. Кроме того, в силу неравенства (8.46) оператор DL_0^{-1} положителен по отношению к конусу $\hat{K}_+$ неотрицательных функций в $B(R^1)$. Положим, далее,

$$y_0(t) = L_0 u_0(t).$$

Из неравенств (8.45) следует, что

$$DL_0^{-1} y_0(t) \ll y_0(t).$$

Поэтому (см. теорему 5.1) спектральный радиус оператора DL_0^{-1} меньше единицы и, следовательно,

$$y(t) = f(t) + DL_0^{-1}f(t) + (DL_0^{-1})^2 f(t) + \ldots \qquad (8.53)$$

Отсюда и из (8.51) следует регулярность пп-оператора (8.43).

Для завершения доказательства заметим, что из формул (8.51) и (8.53) вытекает неравенство

$$L_0 x(t) \geqslant f(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (8.54)$$

Это неравенство можно записать в виде

$$L^{-1}f(t) \geqslant L_0^{-1}f(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (8.55)$$

Последнее неравенство означает, что

$$G(t, s) \geqslant G_0(t, s) \qquad (-\infty < t, s < \infty).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим семейство операторов

$$L(\mu)x = \frac{d^m x}{dt^m} + [\mu a_1(t) + (1-\mu) b_1(t)] \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots$$
$$\ldots + [\mu a_m(t) + (1-\mu) b_m(t)]\, x, \qquad (8.56)$$

зависящих от скалярного параметра $\mu \in [0, 1]$. Очевидно,

$$L(\mu)x = L_0 x - \mu D x. \qquad (8.57)$$

Поэтому в условиях теоремы 8.6 каждый из операторов $L(\mu)$ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$ регулярен. Функцию Грина пп-оператора (8.56) обозначим через $G(t, s; \mu)$. Из формулы (8.7) следует, что

$$G(t, s; \mu) = \begin{cases} (U(t; \mu) P_+(\mu) U^{-1}(s; \mu) e_m, e_1), & \text{если } t \geqslant s, \\ -(U(t; \mu) P_-(\mu) U^{-1}(s; \mu) e_m, e_1), & \text{если } t < s. \end{cases}$$

В силу теоремы 4.3 проекторы $P_+(\mu)$ и $P_-(\mu)$ непрерывно зависят от значений $\mu \in [0, 1]$ и, следовательно, размерности подпространств $P_+(\mu)R^m$ и $P_-(\mu)R^m$ не меняются при изменении $\mu \in [0, 1]$. Отсюда, в частности,

следует, что *нулевое решение уравнения* $Lx = 0$ *экспоненциально устойчиво, если экспоненциально устойчиво нулевое решение уравнения* $L_0x = 0$.

Приведем некоторые утверждения, вытекающие из общей теоремы 8.6.

Положим

$$L_0x = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_m\right) x, \tag{8.58}$$

где

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \ldots > \lambda_m. \tag{8.59}$$

Пп-оператор (8.58) *регулярен и его функция Грина* $G_0(t, s)$ *неотрицательна, если* k *четно, и неположительна, если* k *нечетно.* Эту функцию можно выписать в явном виде:

$$G_0(t, s) = \begin{cases} \sum\limits_{j=k+1}^{m} \dfrac{e^{\lambda_j(t-s)}}{\chi_0'(\lambda_j)}, & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -\sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{e^{\lambda_j(t-s)}}{\chi_0'(\lambda_j)}, & \text{если} \quad t < s, \end{cases} \tag{8.60}$$

где

$$\chi_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_m). \tag{8.61}$$

Положим

$$H(t, s) = \begin{cases} -\sum\limits_{j=k+1}^{m} \dfrac{\chi(t; \lambda_j)}{\chi_0'(\lambda_j)} e^{\lambda_j(t-s)}, & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\chi(t; \lambda_j)}{\chi_0'(\lambda_j)} e^{\lambda_j(t-s)}, & \text{если} \quad t < s. \end{cases}$$

Здесь $\chi(t; \lambda)$ — «характеристический многочлен»

$$\chi(t; \lambda) = \lambda^m + a_1(t)\lambda^{m-1} + \ldots + a_m(t) \tag{8.62}$$

пп-оператора (8.43).

Отметим, что

$$DL_0^{-1}x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, s)\, x(s)\, ds.$$

Теорема 8.7. *Пусть выполнены неравенства*

$$H(t, s) \geqslant 0 \qquad (-\infty < t,\ s < \infty) \tag{8.63}$$

и

$$(-1)^k a_m(t) \gg 0. \tag{8.64}$$

Тогда пп-оператор (8.43) *регулярен и его функция Грина* $G(t, s)$ *удовлетворяет неравенству*

$$a_m(t)\, G(t, s) \geqslant 0 \qquad (-\infty < t,\ s < \infty). \tag{8.65}$$

Доказательство. Из (8.63) следует неравенство (8.46). Далее, (8.64) означает, что выполнены неравенства (8.45), если положить $u_0(t) \equiv 1$. Поэтому в силу теоремы 8.6 пп-оператор (8.43) регулярен и его функция Грина $G(t, s)$ удовлетворяет неравенству (8.65).

Теорема доказана.

Для применений теоремы 8.7 нужно уметь так выбирать числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, удовлетворяющие неравенствам (8.59), чтобы выполнялось неравенство (8.63). Общего рецепта выбора таких чисел мы указать не можем. Однако в некоторых простых случаях способ выбора этих чисел ясен.

Обозначим через $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)$ корни уравнения

$$\chi(t;\ \lambda) = 0. \tag{8.66}$$

Будем считать, что эти корни простые, вещественные и

$$\alpha_j \leqslant \lambda_j(t) \leqslant \beta_j \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{8.67}$$

где $\beta_1 > \alpha_1 > \ldots > \beta_k > \alpha_k > 0 > \beta_{k+1} > \alpha_{k+1} > \ldots$ $\ldots > \beta_m > \alpha_m$.

Очевидно, выполнено неравенство (8.64); неравенство (8.63) также будет выполнено, если положить

$$\lambda_1 = \beta_1, \ldots, \lambda_k = \beta_k;\ \lambda_{k+1} = \alpha_{k+1}, \ldots, \lambda_m = \alpha_m.$$

Таким образом, доказана

Теорема 8.8. *Пусть корни* $\lambda_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ *уравнения* (8.66) *простые, вещественные и удовлетворяют неравенствам* (8.67).

Тогда пп-оператор (8.43) *регулярен и его функция Грина* $G(t, s)$ *удовлетворяет неравенству*

$$(-1)^k G(t, s) \geqslant 0 \qquad (-\infty < t, s < \infty). \tag{8.68}$$

Роль условий (8.67) при исследовании осцилляционных свойств решений уравнений с переменными коэффициентами в другой ситуации была указана А. Ю. Левиным [2].

В заключение укажем еще один признак регулярности пп-оператора (8.43), выраженный в терминах свойств «характеристического многочлена» (8.62).

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — произвольные числа. Введем в рассмотрение конечноразностные отношения

$$\Delta^0(t; \lambda_1) = \chi(t; \lambda_1),$$

$$\Delta^1(t; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\Delta^0(t; \lambda_1) - \Delta^0(t; \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

. . . . . .

$$\Delta^{m-1}(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{\Delta^{m-2}(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) - \Delta^{m-2}(t; \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\lambda_1 - \lambda_m},$$

построенные по «характеристическому многочлену» $\chi(t; \lambda)$. Если при этом среди чисел λ_j имеются равные, то приведенные формулы нужно понимать в предельном смысле, т. е. нужно мало возмутить числа λ_j и затем перейти к пределу.

Ниже через L_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ будем обозначать пп-операторы $L_0 = I$ и

$$L_j = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right).$$

Соответствующие характеристические многочлены будем обозначать через $\chi_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$.

Установим одну вспомогательную лемму.

Лемма 8.2. *Пусть $\chi(\lambda)$ — произвольный многочлен порядка m $(m \geqslant 2)$.*

Тогда справедливо тождество

$$\chi(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \Delta^j(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j+1})\, \chi_j(\lambda) + \chi_m(\lambda), \qquad (8.69)$$

где $\Delta^j(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j+1})$ — конечно-разностные отношения, построенные для многочлена $\chi(\lambda)$.

Доказательство. Тождество (8.69) будем доказывать индукцией по m.

При $m = 2$ тождество (8.69) просто проверяется. Пусть тождество (8.69) справедливо для любого многочлена порядка $m - 1$ $(m > 2)$, и покажем, что оно справедливо и для многочленов порядка m.

Положим

$$\theta(\lambda) = \frac{\chi(\lambda) - \chi(\lambda_1)}{\lambda - \lambda_1}, \qquad \theta_j(\lambda) = \frac{\chi_{j+1}(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} \quad (j = 0, 1, \ldots, m-2).$$

В этих обозначениях тождество (8.69) эквивалентно тождеству

$$\theta(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-2} \Delta^j(\lambda_2, \ldots, \lambda_{j+2})\, \theta_j(\lambda) + \theta_{m-1}(\lambda), \qquad (8.70)$$

где $\Delta^j(\lambda_2, \ldots, \lambda_{j+2})$ — конечно-разностные отношения, построенные в точках $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ для многочлена $\theta(\lambda)$. По предположению тождество (8.70) справедливо и, тем самым, справедливо тождество (8.69).

Лемма доказана.

Теорема 8.9. *Пусть существуют такие постоянные* $\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_{m-1} < 0$, *что выполнены неравенства*

$$\Delta^j(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_{j+1}) \leqslant 0$$

$$(j = 0, 1, \ldots, m-2; \ -\infty < t < \infty). \qquad (8.71)$$

Пусть существует такая пп-функция $u_0(t) \in B^m(R^1)$, *что*

$$u_0(t) \gg 0, \qquad Lu_0(t) \gg 0 \qquad (8.72)$$

и

$$L_{m-1}u_0(t) \gg 0. \qquad (8.73)$$

Тогда пп-оператор (8.43) *регулярен*; *его функция Грина неотрицательна*; *нулевое решение уравнения* $Lx = 0$ *устойчиво.*

Доказательство. Индукцией по m можно показать, что

$$\Delta^{m-1}(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = a_1(t) + \lambda_1 + \ldots + \lambda_m. \qquad (8.74)$$

На деталях доказательства этого простого факта мы останавливаться не будем.

В дальнейшем отрицательное число λ_m будем считать настолько большим по абсолютной величине, что выполняются неравенства

$$\Delta^{m-1}(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \leqslant 0 \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad (8.75)$$

и

$$L_m u_0(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_m\right) L_{m-1} u_0(t) \gg 0.$$

Из леммы 8.2 вытекает, что пп-оператор (8.43) можно записать в виде

$$Lx = \sum_{j=0}^{m-1} \Delta^j(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_{j+1}) L_j x + L_m x. \qquad (8.76)$$

Следовательно, при помощи замены $x = L_m^{-1} y$ уравнение

$$Lx = f(t)$$

преобразуется к виду

$$y - Dy = f(t),$$

где

$$Dy(t) = -\sum_{j=0}^{m-1} \Delta^j(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_{j+1}) L_j L_m^{-1}.$$

Из неравенств (8.71) и из неравенства (8.75) вытекает, что непрерывный оператор D положителен по отношению к конусу $\hat{K}_+$ неотрицательных функций в пространстве $B(R^1)$. Теперь доказательство теоремы завершается так же, как и доказательство теоремы 8.6 (поскольку оператор L_m играет здесь ту же роль, что и оператор L_0 в условиях упомянутой теоремы).

Теорема доказана.

Близкое к теореме 8.9 утверждение содержится в работе В. Н. Бережного и Ю. С. Колесова [1].

Во всех частях земного шара имеются свои, даже иногда очень любопытные, другие части.

Козьма Прутков

§ 9. Скалярные пп-операторы второго порядка

9.1. Связь с осцилляционными свойствами решений однородного уравнения. Этот параграф посвящен исследованию функции Грина пп-оператора

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x. \qquad (9.1)$$

Оператор (9.1) является частным случаем изученных в § 8 скалярных пп-операторов. Поэтому все результаты из § 8 применимы и к оператору (9.1). В частности, в силу теоремы 8.1 из неотрицательности функции Грина $G(t, s)$ оператора (9.1) вытекает ее сильная положительность, а из неположительности — сильная отрицательность.

Ниже будет установлен ряд теорем о существовании и знакопостоянстве функции Грина $G(t, s)$ пп-оператора (9.1), не вытекающих из результатов предыдущего параграфа.

Говорят, что решения однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0 \tag{9.2}$$

неосциллируют на $(-\infty, \infty)$, если каждое нетривиальное решение $x(t)$ этого уравнения не более одного раза обращается в нуль.

Теорема 9.1. *Пусть оператор* (9.1) *регулярен.*

Тогда его функция Грина $G(t, s)$ знакопостоянна в том и только том случае, когда решения однородного уравнения (9.2) *неосциллируют.*

В этом пункте мы приведем лишь часть доказательства этой теоремы. Покажем вначале, что неосцилляция решений является необходимым условием знакопостоянства функции Грина. Действительно, если некоторое нетривиальное решение $x_*(t)$ уравнения (9.2) обращается в нуль в точках t_1 и t_2 $(t_1 < t_2)$, то по известной теореме Штурма (см., например, И. Г. Петровский [1]) каждое отличное от $x_*(t)$ решение $x(t)$ уравнения (9.2) принимает на промежутке (t_1, t_2) значения разных знаков. В частности, функция Грина $G(t, s)$ принимает на (t_1, t_2) значения разных знаков либо при $s < t_1$, либо при $s > t_2$, а это противоречит ее знакопостоянству.

В обратную сторону теорема 9.1 совсем проста, если нулевое решение уравнения (9.2) устойчиво по Ляпунову либо в сторону возрастания, либо в сторону убывания времени t. Пусть, для определенности, нулевое решение устойчиво при $t \to \infty$. Тогда

$$G(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ 0, & \text{если} \quad t < s, \end{cases} \tag{9.3}$$

где $K(t, s)$ — функция Коши уравнения (9.2), а функция Коши положительна при $t > s$.

Случай, когда нулевое решение уравнения (9.2) неустойчиво и при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$, будет рассмотрен в п. 9.7.

Ниже будут подробно изучаться свойства решений уравнения (9.2). Теорема 9 1 позволяет нам ограничиться лишь тем случаем, когда решения уравнения (9.2) неосциллируют.

В дальнейших построениях будем считать, что

$$M(p) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} p(t)\, dt \geqslant 0. \tag{9.4}$$

Это предположение не ограничивает общности, так как к этому случаю всегда можно прийти, сделав в уравнении (9.2) замену $t = -\tau$.

9.2. Уравнение Риккати. Свойства решений уравнения (9.2) тесно связаны со свойствами решений *уравнения Риккати*

$$\frac{dz}{dt} = z^2 - p(t) z + q(t), \tag{9.5}$$

которое получается из (9.2) с помощью замены

$$z = -x'/x. \tag{9.6}$$

Поэтому здесь, а также в пп. 9.3—9.5 мы подробно изучим свойства решений уравнения (9.5) в предположении, что решения уравнения (9.2) неосциллируют на $(-\infty, \infty)$.

Очевидно, существует такое число $m > 0$, что каждое решение $z(t)$ уравнения (9.5) с начальным условием $z(t_0) \geqslant m$ при возрастании времени уходит за конечное время в ∞, а каждое решение $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) \leqslant -m$ при убывании времени уходит за конечное время в $-\infty$. С другой стороны, так как решения уравнения (9.2) неосциллируют на $(-\infty, \infty)$, то для любого момента времени t_0 можно указать такие $z(t_0)$, что решения с этими начальными условиями нелокально продолжимы в сторону возрастания времени, и можно указать такие $z(t_0)$, что решения с этими начальными

условиями нелокально продолжимы в сторону убывания времени. Множество значений при $t = t_0$ решений первой группы обозначим через Z^+, а множество значений при $t = t_0$ решений второй группы обозначим через Z^-. Пусть $z_1(t)$ — решение уравнения (9.5) с начальным условием

$$z_1(t_0) = \inf\{z : z \in Z^-\},$$

а $z_2(t)$ — решение этого уравнения с начальным условием

$$z_2(t_0) = \sup\{z : z \in Z^+\}.$$

Тогда $z_1(t)$ определено при всех $t \leqslant t_0$, а $z_2(t)$ — при всех $t \geqslant t_0$.

Покажем, что

$$z_1(t_0) \leqslant z_2(t_0). \tag{9.7}$$

В предположении противного решение $z(t)$ уравнения (9.5) с начальным условием $z(t_0)$, удовлетворяющим неравенствам

$$z_1(t_0) > z(t_0) > z_2(t_0),$$

при возрастании времени уходит за конечное время в ∞, а при убывании времени уходит за конечное время в $-\infty$. Это означает, что решение $x(t)$ уравнения (9.2) с начальными условиями

$$x(t_0) = 1, \quad x'(t_0) = -z(t_0)$$

имеет не менее двух нулей. Последнее противоречит предположению о неосцилляции на $(-\infty, \infty)$ решений уравнения (9.2).

Из неравенства (9.7) вытекает, что $z_1(t)$ и $z_2(t)$ являются ограниченными на всей оси решениями уравнения (9.5). Решения $z_1(t)$ и $z_2(t)$ не зависят от выбора начального момента времени t_0.

В дальнейшем будем называть функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ *граничными решениями уравнения Риккати* (9.5). Граничные решения могут, конечно, совпадать.

Лемма 9.1. *Пусть уравнение* (9.5) *имеет два различных граничных решения* $z_1(t) < z_2(t)$.

Тогда для каждого решения $z(t)$ с начальным значением $z(t_0)$, удовлетворяющим неравенствам

$$z_1(t_0) < z(t_0) < z_2(t_0),$$

выполнены следующие предельные равенства:

$$\lim_{t\to\infty} [z(t) - z_1(t)] = 0 \tag{9.8}$$

и

$$\lim_{t\to-\infty} [z_2(t) - z(t)] = 0. \tag{9.9}$$

Доказательство. Предельные равенства (9.8) и (9.9) доказываются с помощью однотипных рассуждений. Поэтому мы остановимся на доказательстве лишь (9.8).

Положим

$$h(t) = z(t) - z_1(t) \qquad (t \geqslant t_0).$$

Легко видеть, что

$$h'(t) = h^2(t) - [p(t) - 2z_1(t)]\,h(t),$$

и поэтому

$$h(t) = \frac{h(t_0)\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} [p(\tau) - 2z_1(\tau)]\,d\tau\right\}}{1 - h(t_0)\int\limits_{t_0}^{t}\left\{\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{s} [p(\tau) - 2z_1(\tau)]\,d\tau\right]\right\}ds}.$$

Функция $h(t)$ определена и положительна при всех $t \geqslant t_0$. Поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left\{\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{s} [p(\tau) - 2z_1(\tau)]\,d\tau\right]\right\}ds \leqslant \frac{1}{z(t_0) - z_1(t_0)} \qquad (t \geqslant t_0),$$

и так как $z(t_0)$ может быть сколь угодно близко к $z_2(t_0)$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t}\left\{\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{s} [p(\tau) - 2z_1(\tau)]\,d\tau\right]\right\}ds \leqslant \frac{1}{z_2(t_0) - z_1(t_0)} \qquad (t \geqslant t_0).$$

Из последних неравенств вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} [p(\tau) - 2z_1(\tau)]\, d\tau\right\} = 0.$$

Теперь (9.8) следует из неравенств

$$0 < h(t) \leqslant \frac{h(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} [p(\tau) - 2z_1(\tau)]\, d\tau\right\}}{[z_2(t_0) - z(t_0)]\int_{t_0}^{t}\left\{\exp\left[-\int_{t_0}^{s} [p(\tau) - 2z_1(\tau)]\, d\tau\right]\right\} ds}.$$

Лемма доказана.

Утверждения типа леммы 9.1 впервые, по-видимому, были указаны в работе И. М. Соболя [1].

Ниже будут полезны следующие простые неравенства*):

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} z_1(t)\, dt + \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} z(t)\, dt \leqslant M(p), \qquad (9.10)$$

$$\varlimsup_{T\to-\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} z_2(t)\, dt + \varlimsup_{T\to-\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} z(t)\, dt \geqslant M(p), \qquad (9.11)$$

где в неравенстве (9.10) через $z(t)$ обозначено какое-либо решение уравнения (9.5) с начальным условием $z(t_0) < z_1(t_0)$, а в неравенстве (9.11) — какое-либо решение уравнения (9.5) с начальным условием $z(t_0) > z_2(t_0)$.

Пусть уравнение (9.5) имеет два различных граничных решения, которые являются пп-функциями. Предоставляем читателю показать, что в этом случае

$$\inf_{-\infty < t < \infty} [z_2(t) - z_1(t)] > 0, \qquad (9.12)$$

---

*) Для их доказательства нужно выразить суммы $z_1(t) + z(t)$ и $z_2(t) + z(t)$ через соответствующие решения уравнения (9.2), а затем воспользоваться известной формулой Лиувилля для определителей Вронского.

откуда вытекает равенство

$$M(z_1) + M(z_2) = M(p). \tag{9.13}$$

9.3. Теоремы о дифференциальных неравенствах для уравнения Риккати. Дальнейшее исследование будет существенно опираться на следующие теоремы о дифференциальных неравенствах.

Теорема 9.2. *Пусть определенная на всей оси непрерывная функция $z_0(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$D^*z_0(t) \geqslant z_0^2(t) - p(t)z_0(t) + q(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{9.14}$$

где $D^*z_0(t)$ — правое верхнее производное число функции $z_0(t)$.

Тогда решения уравнения (9.2) *неосциллируют на* $(-\infty, \infty)$ *и справедливы неравенства*

$$z_1(t) \leqslant z_0(t) \leqslant z_2(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{9.15}$$

Доказательство. Из (9.14) вытекает неравенство

$$z(t) \leqslant z_0(t) \qquad (t_0 \leqslant t < \infty),$$

где $z(t)$ — решение уравнения (9.5) с начальным условием $z(t_0) = z_0(t_0)$. Поэтому решение

$$x(t) = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} z(\tau)\,d\tau\right]$$

уравнения (9.2) определено и положительно при всех $t \geqslant t_0$. Из теоремы Штурма вытекает тогда, что каждое нетривиальное решение уравнения (9.2) не может иметь двух нулей на интервале (t_0, ∞). Так как t_0 произвольно, то решения уравнения (9.2) неосциллируют на всей оси.

Перейдем к доказательству неравенств (9.15).

Покажем, например, что справедливо неравенство

$$z_0(t) \leqslant z_2(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Предположим противное. Пусть в некоторый момент времени t_0 выполнено неравенство

$$z_0(t_0) > z_2(t_0). \tag{9.16}$$

Тогда из (9.14) и из неравенства (9.16) вытекает, что

$$z_0(t) \geqslant z(t) \qquad (t \geqslant t_0), \tag{9.17}$$

где $z(t)$ — решение уравнения (9.5) с начальным условием $z(t_0) > z_2(t_0)$. Из (9.17) следует, что решение $z(t)$ с начальным условием $z(t_0)$, которое больше чем $z_2(t_0)$, нелокально продолжимо в сторону возрастания времени. Мы пришли к противоречию.

Неравенство

$$z_0(t) \geqslant z_1(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Утверждение, содержащееся в теореме 9.2, отмечалось многими авторами.

Теорема 9.3. *Пусть пп-функция* $\varphi(t)$, *имеющая равномерно непрерывную производную* $\varphi'(t)$, *удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$\varphi'(t) \leqslant \varphi^2(t) - p(t)\varphi(t) + q(t), \tag{9.18}$$

причем $\varphi(t)$ *не является решением уравнения* (9.5).

Тогда справедливо одно из неравенств

$$\inf_{-\infty < t < \infty} [\varphi(t) - z_2(t)] > 0 \tag{9.19}$$

или

$$\inf_{-\infty < t < \infty} [z_1(t) - \varphi(t)] > 0. \tag{9.20}$$

Доказательство. Пусть в некоторый момент времени t_0 выполнены неравенства

$$z_1(t_0) \leqslant \varphi(t_0) \leqslant z_2(t_0). \tag{9.21}$$

Покажем, что неравенство

$$\varphi(t) \leqslant z_2(t) \tag{9.22}$$

не может иметь места при всех $t \leqslant t_0$.

Предположим противное. Тогда в силу леммы 9.1

$$\lim_{t \to -\infty} [z_2(t) - \varphi(t)] = 0. \tag{9.23}$$

Выберем затем последовательность $t_n \to -\infty$ таким образом, чтобы равномерно относительно $t \in (-\infty, \infty)$ существовали пределы

$$\varphi_*(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t+t_n), \qquad \varphi'_*(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi'(t+t_n),$$

$$p^*(t) = \lim_{n\to\infty} p(t+t_n), \qquad q^*(t) = \lim_{n\to\infty} q(t+t_n)$$

и чтобы последовательность функций $z_2(t+t_n)$ равномерно на каждом конечном промежутке сходилась к некоторой функции $z_2^*(t)$. Очевидно, $z_2^*(t)$ является ограниченным на всей оси решением уравнения

$$z' = z^2 - p^*(t)z + q^*(t). \tag{9.24}$$

Функция $\varphi_*(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\varphi'_*(t) \leqslant \varphi_*^2(t) - p^*(t)\varphi_*(t) + q^*(t) \tag{9.25}$$

и не является решением уравнения (9.24). Далее, из неравенства (9.22) вытекает, что

$$\varphi_*(t) \leqslant z_2^*(t) \tag{9.26}$$

при всех $t \in (-\infty, \infty)$, а из (9.23) следует, что

$$\varphi_*(0) = z_2^*(0). \tag{9.27}$$

Из соотношений (9.25)—(9.27) вытекает, что функция $\varphi_*(t)$ удовлетворяет уравнению (9.24) при $-\infty < t \leqslant 0$, а из почти периодичности функции $\varphi_*(t)$ вытекает, что она является решением уравнения (9.24) и при $0 \leqslant t < \infty$. Мы пришли к противоречию.

Точно так же показывается, что неравенство

$$\varphi(t) \geqslant z_1(t)$$

не может быть справедливым для всех $t \geqslant t_0$. Поэтому найдутся такие моменты времени t_1 и t_2, что выполнены неравенства

$$\varphi(t_1) > z_2(t_1) \tag{9.28}$$

и

$$\varphi(t_2) < z_1(t_2). \tag{9.29}$$

Из (9.28), (9.29) и из (9.18) вытекают неравенства

$$\varphi(t) > z_2(t) \qquad (-\infty < t \leqslant t_1)$$

и

$$\varphi(t) < z_1(t) \qquad (t_2 \leqslant t < \infty).$$

Рассуждая теперь, как и при доказательстве невозможности неравенства (9 22), убеждаемся, что на самом деле

$$\varphi(t) \geqslant z_2(t) + \delta \qquad (-\infty < t \leqslant t_1) \tag{9.30}$$

и

$$\varphi(t) \leqslant z_1(t) - \delta \qquad (t_2 \leqslant t < \infty), \tag{9.31}$$

где δ — некоторое положительное число. Из (9.30), (9.31) и из неравенств (9.10), (9.11) следуют неравенства

$$2M(\varphi) \geqslant M(p) + \delta$$

и

$$2M(\varphi) \leqslant M(p) - \delta,$$

которые противоречивы.

Таким образом, неравенства (9.21) невозможны ни при каком t_0, и, следовательно, имеет место одно из неравенств

$$\varphi(t) < z_1(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

или

$$\varphi(t) > z_2(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Отсюда (и из рассуждений, аналогичных тем, которые мы проводили при доказательстве невозможности неравенства (9.22)) вытекают неравенства (9.19) и (9.20).

Теорема доказана.

9.4. Почти периодические решения уравнения Риккати. Будем говорить, что уравнение (9.2) *грубо неосцилляционное* на $(-\infty, \infty)$, если существует такая неотрицательная и отличная от тождественного нуля пп-функция $b(t)$, что решения уравнения

$$Lx + b(t)x = 0 \tag{9.32}$$

неосциллируют.

Теорема 9.4. *Уравнение Риккати* (9.5) *имеет два различных граничных решения* $z_1(t)$ *и* $z_2(t)$, *которые являются пп-функциями в том и только том случае, если уравнение* (9.2) *грубо неосцилляционное на* $(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$u'(t) = u^2(t) - p(t)u(t) + q(t) + b(t), \tag{9.33}$$

где $b(t)$ — такая неотрицательная ненулевая пп-функция, что решения уравнения (9.32) неосциллируют на $(-\infty, \infty)$. Граничные решения уравнения Риккати (9.33) обозначим через $u_1(t)$ и $u_2(t)$ соответственно. Функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам

$$\begin{aligned} u_1'(t) &\geqslant u_1^2(t) - p(t)u_1(t) + q(t), \\ u_2'(t) &\geqslant u_2^2(t) - p(t)u_2(t) + q(t). \end{aligned} \tag{9.34}$$

Из дифференциальных неравенств (9.34) и теоремы 9.2 вытекают неравенства

$$z_1(t) \leqslant u_1(t) \leqslant u_2(t) \leqslant z_2(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{9.35}$$

и так как $b(t)$ — ненулевая функция, то

$$z_1(t) < z_2(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{9.36}$$

Покажем, что на самом деле справедливо более сильное неравенство

$$\inf_{-\infty < t < \infty} [z_2(t) - z_1(t)] > 0. \tag{9.37}$$

Неравенство (9.37) будем доказывать от противного. Пусть найдется такая последовательность t_j $(j = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{j \to \infty} [z_2(t_j) - z_1(t_j)] = 0. \tag{9.38}$$

Без ограничения общности можно при этом считать, что последовательности пп-функций $p(t + t_j)$, $q(t + t_j)$ и $b(t + t_j)$ равномерно на всей оси сходятся к пп-функциям $p^*(t)$, $q^*(t)$ и $b^*(t)$, а последовательности функций $z_1(t + t_j)$, $z_2(t + t_j)$, $u_1(t + t_j)$, $u_2(t + t_j)$ равномерно на каждом конечном промежутке сходятся соответственно к функциям $z_1^*(t)$, $z_2^*(t)$, $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$.

Функции $z_1^*(t)$, $z_2^*(t)$ и $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ являются ограниченными на всей оси решениями уравнений

$$\frac{dz}{dt} = z^2 - p^*(t)z + q^*(t) \tag{9.39}$$

и

$$\frac{du}{dt} = u^2 - p^*(t)u + q^*(t) + b^*(t) \tag{9.40}$$

соответственно. Неравенства (9.35) влекут за собой неравенства

$$z_1^*(t) \leqslant u_1^*(t) \leqslant u_2^*(t) \leqslant z_2^*(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Отсюда и из (9.38) получаем

$$z_1^*(t) \equiv u_1^*(t) \equiv u_2^*(t) \equiv z_2^*(t).$$

Последнее невозможно, так как функция $b^*(t)$ не равна тождественно нулю. Отметим, что функции $z_1^*(t)$ и $z_2^*(t)$ являются граничными решениями уравнения (9.39). Для доказательства нужно воспользоваться леммой 9.1 и повторить рассуждения, проведенные выше.

Пусть последовательность t_j $(j = 1, 2, \ldots)$ такова, что последовательности пп-функций $p(t + t_j)$ и $q(t + t_j)$ равномерно на всей оси сходятся к пп-функциям $p^*(t)$ и $q^*(t)$, а последовательность функций $z_1(t + t_j)$ равномерно на каждом конечном промежутке сходится к функции $z_1^*(t)$, являющейся граничным решением уравнения (9.39). Покажем, что последовательность функций $z_1(t + t_j)$ равномерно на всей оси сходится к функции $z_1^*(t)$. В предположении противного найдутся такие последовательность чисел s_k, последовательность индексов j_k и положительное число ε_0, что

$$\left| z_1\left(t_{j_k} + s_k\right) - z_1^*(s_k) \right| > \varepsilon_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9.41}$$

Будем при этом считать, что равномерно относительно $t \in (-\infty, \infty)$ существуют пределы

$$p^{**}(t) = \lim_{k\to\infty} p\left(t + t_{j_k} + s_k\right) = \lim_{k\to\infty} p^*(t + s_k),$$

$$q^{**}(t) = \lim_{k\to\infty} q\left(t + t_{j_k} + s_k\right) = \lim_{k\to\infty} q^*(t + s_k).$$

Далее, будем считать, что последовательности функций $z_1(t+t_{l_k}+s_k)$ и $z_1^*(t+s_k)$ равномерно на каждом конечном промежутке сходятся к некоторым ограниченным на всей оси решениям уравнения

$$\frac{dz}{dt}=z^2-p^{**}(t)z+q^{**}(t).$$

Как мы уже отметили выше, при таких предельных переходах граничные решения могут переходить только в граничные, причем верхнее граничное решение переходит в верхнее, а нижнее — в нижнее. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} z_1(t_{l_k}+s_k)=\lim_{k\to\infty} z_1^*(s_k).$$

Полученное равенство противоречит неравенству (9.41).

Таким образом, нами показано, что верхнее граничное решение $z_1(t)$ является пп-функцией. Аналогично показывается, что и нижнее граничное решение $z_2(t)$ является пп-функцией.

Необходимость. Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — различные граничные решения уравнения (9.5), которые являются пп-функциями. Покажем, что решения уравнения

$$Lx+\mu x=0 \tag{9.42}$$

при достаточно малых μ неосциллируют на $(-\infty, \infty)$. Этим доказательство будет завершено.

Положим $z=h+z_2(t)$ и преобразуем уравнение Риккати

$$\frac{dz}{dt}=z^2-p(t)z+q(t)+\mu \tag{9.43}$$

к виду

$$\frac{dh}{dt}=h^2+[2z_2(t)-p(t)]h+\mu. \tag{9.44}$$

Из формулы (9.13) вытекает, что $2M(z_2)-M(p)>0$. Поэтому вопрос о пп-решениях уравнения (9.44) эквива-

лентен задаче о разрешимости интегрального уравнения

$$h(t) = -\int_t^\infty \exp\left\{\int_s^t [2z_2(\tau) - p(\tau)]\,d\tau\right\} h^2(s)\,ds -$$

$$-\mu\int_t^\infty \exp\left\{\int_s^t [2z_2(\tau) - p(\tau)]\,d\tau\right\} ds \qquad (9.45)$$

в пространстве $B(R^1)$. При малых μ оператор в правой части формулы (9.45) преобразует шар достаточно малого радиуса в себя и является на нем оператором сжатия.

Таким образом, уравнение Риккати (9.43) имеет при малых μ ограниченные на всей оси решения. Из теоремы 9.2 тогда вытекает, что решения уравнения (9.42) неосциллируют на $(-\infty, \infty)$.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы непосредственно следует, *что уравнение* (9.2) *грубо неосцилляционное на* $(-\infty, \infty)$ *в том и только том случае, если решения этого уравнения неосциллируют на* $(-\infty, \infty)$ *и если граничные решения* $z_1(t)$ *и* $z_2(t)$ *уравнения Риккати* (9.5) *удовлетворяют неравенству* (9.37).

Отметим еще один результат.

Теорема 9.5. *Пусть существует такая пп-функция* $\varphi(t)$ *с равномерно непрерывной производной, что*

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \geqslant \varphi^2(t) - p(t)\varphi(t) + q(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \quad (9.46)$$

причем $\varphi(t)$ *не является решением уравнения* (9.5).

Тогда уравнение Риккати (9.5) *имеет два различных граничных решения* $z_1(t)$ *и* $z_2(t)$, *которые являются пп-функциями, и справедливы неравенства*

$$z_1(t) < \varphi(t) < z_2(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (9.47)$$

Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно заметить, что решения уравнения (9.32) неосциллируют на $(-\infty, \infty)$, если положить

$$b(t) = \varphi'(t) - \varphi^2(t) + p(t)\varphi(t) - q(t).$$

Неравенства (9.47) следуют из теоремы 9.2 и того факта, что функция $\varphi(t)$ не является решением уравнения (9.5).

Утверждения, близкие к теоремам 9.4 и 9.5, содержатся в работах А. Халаная [1], Л. Маркуса и Р. А. Мура [1].

9.5. Устойчивость решений уравнения (9.2). Уравнение второго порядка (9.2) эквивалентно системе двух дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= -q(t)u_1 - p(t)u_2. \end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

Фундаментальную матрицу этой системы будем обозначать через $U(t, s)$. В этом пункте нас будут интересовать условия, при выполнении которых справедлива оценка

$$|U(t, s)| \leqslant Me^{-\gamma(t-s)} \qquad (\gamma > 0;\ t \geqslant s). \tag{9.49}$$

Теорема 9.6. *Пусть решения уравнения* (9.2) *неосциллируют на* $(-\infty, \infty)$.

Тогда неравенство (9.49) *справедливо в том и только том случае, если существует такая пп-функция* $\varphi(t)$ *с равномерно непрерывной производной, что*

1°. $$\frac{d\varphi(t)}{dt} \leqslant \varphi^2(t) - p(t)\varphi(t) + q(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{9.50}$$

причем $\varphi(t)$ *не является решением уравнения Риккати* (9.5);

2°. $$0 \leqslant M(\varphi) \leqslant \frac{1}{2} M(p). \tag{9.51}$$

Доказательство. Достаточность. Из неравенств (9.11), (9.51) и из теоремы 9.3 следует, что выполнено неравенство

$$z_1(t) \geqslant \varphi(t) + \delta \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{9.52}$$

где δ — некоторое положительное число.

Обозначим через $z(t)$ решение уравнения (9.5) с начальным условием

$$z(s) = z_1(s) - \delta/2.$$

Функции

$$x_1(t, s) = \exp\left[-\int_s^t z_1(\tau)\,d\tau\right]$$

и

$$x_2(t, s) = \exp\left[-\int_s^t z(\tau)\,d\tau\right]$$

являются решениями уравнения (9.2). Матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -z_1(s) & -z_1(s)+\delta/2 \end{Vmatrix}$$

и обратная к ней равномерно ограничены по норме при всех $s \in (-\infty, \infty)$. Отсюда и из неравенства (9.52) вытекает достаточность условий теоремы.

Необходимость. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$Lx - \mu x = 0, \tag{9.53}$$

где μ — некоторое положительное число. Из регулярности оператора L вытекает, что при достаточно малых μ норма фундаментальной матрицы $U(t, s;\ \mu)$ системы

$$\frac{du_1}{dt} = u_2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = -[q(t) - \mu]\,u_1 - p(t)\,u_2$$

удовлетворяет неравенству

$$|U(t, s;\ \mu)| \leqslant M_1 e^{-\gamma_1(t-s)} \qquad (\gamma_1 > 0;\ t \geqslant s). \tag{9.54}$$

Из теоремы 9.4 вытекает, что граничные решения $z_1(t;\ \mu)$ и $z_2(t;\ \mu)$ уравнения Риккати

$$\frac{dz}{dt} = z^2 - p(t)\,z + q(t) - \mu$$

являются пп-функциями. Далее, из неравенства (9.54) следует, что

$$0 < M[z_1(t;\ \mu)] < M[z_2(t;\ \mu)].$$

Наконец, из формулы (9.13) получаем

$$M[z_1(t;\mu)] < \frac{1}{2} M(p).$$

Поэтому в качестве $\varphi(t)$ можно взять функцию $z_1(t;\mu)$.

Теорема полностью доказана.

Отметим одно следствие из теоремы 9.6.

Пусть решения уравнения (9.2) *неосциллируют на* $(-\infty, \infty)$. *Пусть существует пп-функция* $x_0(t)$ *с равномерно непрерывной второй производной, которая удовлетворяет неравенствам*

$$x_0(t) \gg 0, \quad Lx_0(t) \geqslant 0 \qquad (Lx_0(t) \not\equiv 0). \tag{9.55}$$

Тогда справедливо неравенство (9.49).

Это утверждение получается из теоремы 9.6, если положить

$$\varphi(t) = -\frac{x_0'(t)}{x_0(t)}.$$

Приведем еще один признак устойчивости решений уравнения (9.2).

Теорема 9.7. *Пусть решения уравнения* (9.2) *неосциллируют на* $(-\infty, \infty)$. *Пусть выполнены неравенства*

$$M(p) > 0 \tag{9.56}$$

и

$$M\left\{\int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\int_{s}^{t} p(\tau)\,d\tau\right] q(s)\,ds\right\} \geqslant 0, \qquad q(t) \not\equiv 0. \tag{9.57}$$

Тогда справедливо неравенство (9.49).

Доказательство. Функция

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\int_{s}^{t} p(\tau)\,d\tau\right] q(s)\,ds,$$

являющаяся пп-решением линейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -p(t)x + q(t), \tag{9.58}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству (9.50). Отсюда и из теоремы 9.3 вытекает справедливость одного из неравенств (9.19) или (9.20). Если мы покажем, что выполнено неравенство (9.20), то тем самым наше утверждение будет доказано.

Предположим противное. Пусть выполнено неравенство (9.19). Тогда существует такое число $\delta > 0$, что

$$\varphi(t) - z_2(t) \geqslant \delta \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{9.59}$$

Обозначим через $x_1(t)$ решение уравнения (9.58) с начальным условием $x_1(0) = z_2(0)$. Из дифференциального неравенства

$$\frac{dx_1(t)}{dt} \leqslant x_1^2(t) - p(t)\,x_1(t) + q(t) \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

вытекает, что

$$x_1(t) \leqslant z_2(t) \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Отсюда и из (9.59) получаем неравенство

$$\varphi(t) - x_1(t) \geqslant \delta \qquad (0 \leqslant t < \infty). \tag{9.60}$$

С другой стороны, из неравенства (9.56) следует, что пп-решение $\varphi(t)$ асимптотически устойчиво в целом. Это означает, что неравенство (9.60) невозможно.

Теорема доказана.

9.6. Необходимые и достаточные условия существования и знакопостоянства функции Грина. В предыдущих пунктах были подробно изучены свойства решений линейного однородного уравнения (9.2) и уравнения Риккати (9.5). Полученные результаты позволяют указать необходимые и достаточные условия существования и знакопостоянства функции Грина пп-оператора (9.1).

Теорема 9.8. *Пп-оператор* (9.1) *регулярен и его функция Грина* $G(t, s)$ *неотрицательна в том и только том случае, если*

1°. *решения уравнения* (9.2) *неосциллируют на* $(-\infty, \infty)$,

2°. *существует пп-функция* $x_0(t)$ *с равномерно непрерывной второй производной, удовлетворяющая неравенствам* (9.55).

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна.

Для доказательства достаточности заметим, что в силу следствия из теоремы 9.6 фундаментальная матрица $U(t, s)$ системы (9.48) удовлетворяет неравенству (9.49). Поэтому пп-оператор (9.1) регулярен и справедлива формула

$$G(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ 0, & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{9.61}$$

Из формулы (9.61) и предположения о неосцилляции на $(-\infty, \infty)$ решений уравнения (9.2) вытекает неотрицательность функции Грина $G(t, s)$.

Теорема доказана.

Теорема 9.9. *Пп-оператор* (9.1) *регулярен и его функция Грина* $G(t, s)$ *неположительна в том и только том случае, если существует пп-функция* $x_0(t)$ *с равномерно непрерывной второй производной, удовлетворяющая неравенствам*

$$x_0(t) \gg 0, \quad Lx_0(t) \leqslant 0 \qquad (Lx_0(t) \not\equiv 0). \tag{9.62}$$

Для доказательства достаточности положим $\varphi(t) = -\dfrac{x_0'(t)}{x_0(t)}$. Тогда второе из неравенств (9.62) преобразуется в неравенство (9.46). Отсюда и из теоремы 9.5 вытекает, что уравнение Риккати (9.5) имеет два различных граничных решения $z_1(t)$ и $z_2(t)$, которые являются пп-функциями. Далее, из неравенств (9.47) получаем

$$M(z_2) > 0 \tag{9.63}$$

и

$$M(z_1) < 0. \tag{9.64}$$

Из неравенств (9.63) и (9.64) следует регулярность пп-оператора (9.1); его функция Грина определяется формулой

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{z_1(s) - z_2(s)} \exp\left[-\displaystyle\int_s^t z_2(\tau)\, d\tau\right] & \text{при} \quad t \geqslant s, \\ \dfrac{1}{z_1(s) - z_2(s)} \exp\left[-\displaystyle\int_s^t z_1(\tau)\, d\tau\right] & \text{при} \quad t < s. \end{cases} \tag{9.65}$$

Из этой формулы вытекает одновременно и неположительность $G(t, s)$.

Необходимость условий теоремы очевидна.

Теорема доказана.

9.7. Завершение доказательства теоремы 9.1. Пусть пп-оператор (9.1) регулярен и решения уравнения (9.2) неосциллируют на $(-\infty, \infty)$. Так как свойство дихотомии решений устойчиво по отношению к малым возмущениям, то при всех достаточно малых положительных μ регулярен пп-оператор

$$L(\mu)x = Lx - \mu x. \tag{9.66}$$

Из теоремы 9.4 вытекает, что уравнение Риккати

$$\frac{dz}{dt} = z^2 - p(t)z + q(t) - \mu$$

имеет два различных граничных решения $z_1(t; \mu)$ и $z_2(t; \mu)$, которые являются пп-функциями. Далее, так как нулевое решение уравнения $L(\mu)x = 0$ неустойчиво и так как имеет место экспоненциальная дихотомия решений, то

$$M[z_1(t; \mu)] < 0, \text{ а } M[z_2(t; \mu)] > 0.$$

Отсюда и из формулы (9.65) следует, что функция Грина $G(t, s; \mu)$ пп-оператора (9.66) неположительна. Остается заметить, что равномерно относительно $t, s \in (-\infty, \infty)$

$$G(t, s) = \lim_{\mu \to 0} G(t, s; \mu).$$

Теорема 9.1 полностью доказана.

9.8. Интегральный критерий неосцилляционности. Согласно теореме 9.1 функция Грина регулярного пп-оператора (9.1) знакопостоянна в том и только том случае, если решения уравнения (9.2) неосциллируют на $(-\infty, \infty)$. Поэтому представляют интерес различные критерии неосцилляционности. Такой критерий содержится в теореме 9.2. Однако подбор функции, удовлетворяющей дифференциальному неравенству (9.14), затруднителен. Здесь мы изложим еще один интегральный признак неосцилляции на $(-\infty, \infty)$ решений уравнения (9.2), принадлежащий А. Ю. Левину [1].

Теорема 9.10. *Пусть существует такая положительная при* $-\infty < t < \infty$ *функция* $x_1(t)$, *что*

$$\int_t^\infty \frac{1}{x_1^2(s)} \exp\left[-\int_0^s p(\tau)\,d\tau\right] ds < \infty.$$

Пусть при любых $-\infty < t_1 \leqslant t_2 < \infty$ *справедливо неравенство*

$$\int_{t_1}^{t_2} x_2(t)\,Lx_1(t)\,dt \leqslant 1, \tag{9.67}$$

где

$$x_2(t) = x_1(t) \int_t^\infty \frac{1}{x_1^2(s)} \exp\left[\int_s^t p(\tau)\,d\tau\right] ds.$$

Тогда решения уравнения (9.2) *неосциллируют на* $(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$w(t) = x_1'(t)\,x_2(t) + x_1(t)\,x_2(t)\,z(t), \tag{9.68}$$

где $z(t)$ — какое-либо решение уравнения Риккати (9.5). Предположим, что

$$w(t_0) \leqslant 0. \tag{9.69}$$

Покажем, что тогда при всех $t \geqslant t_0$

$$w(t) \leqslant 1. \tag{9.70}$$

В предположении противного найдутся такие моменты времени t_1 и t_2, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2$ и

$$w(t_1) = 0, \qquad w(t_2) = 1, \tag{9.71}$$

причем

$$0 < w(t) < 1 \qquad (t_1 < t < t_2). \tag{9.72}$$

Очевидно,

$$w'(t) = \frac{w^2(t) - w(t)}{x_1(t)\,x_2(t)} + x_2(t)\,Lx_1(t). \tag{9.73}$$

Интегрируя тождество (9.73) в пределах от t_1 до t_2 и используя (9.71), получаем

$$1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{w^2(t) - w(t)}{x_1(t)\, x_2(t)}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} x_2(t)\, Lx_1(t)\, dt. \qquad (9.74)$$

Отсюда и из (9.72) следует, что

$$\int_{t_1}^{t_2} x_2(t)\, Lx_1(t)\, dt > 1. \qquad (9.75)$$

Неравенство (9.75) противоречит неравенству (9.67).

Таким образом, для любого момента времени $t_0 \in (-\infty, \infty)$ уравнение Риккати (9.5) имеет определенное на (t_0, ∞) решение. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Нетрудно показать, что в условиях теоремы 9.10 уравнение Риккати (9.5) имеет два различных граничных решения. Справедливо и обратное утверждение: *если уравнение Риккати* (9.5) *имеет два различных граничных решения, то существует функция* $x_1(t)$, *удовлетворяющая условиям теоремы* 9.10.

Отметим еще, что в условиях теоремы 9.10 уравнение (9.2) грубо неосцилляционное на $(-\infty, \infty)$, если вместо неравенства (9.67) выполнено более сильное неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} x_2(t)\, Lx_1(t)\, dt \leqslant 1 - \varepsilon \qquad (-\infty < t_1 \leqslant t_2 < \infty),$$

где ε — какое-либо положительное число, и если, кроме того,

$$\sup_{-\infty < t < \infty} [x_1(t)\, x_2(t)] < \infty.$$

Исследованию осцилляционных свойств решений линейных дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. Ограничимся ссылкой на интересный обзор А. Ю. Левина [2], в котором приведена достаточно полная библиография.

Глава 3

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ *)

В этой и следующей главах исследуются пп-решения нелинейных дифференциальных уравнений: устанавливаются теоремы существования, даются оценки числа таких решений, изучается их устойчивость. Для исследования пп-решений применяются методы интегральных уравнений. Существенно используются методы теории конусов.

Пояснительные выражения объясняют темные мысли.

Козьма Прутков

§ 10. Общие теоремы существования

10.1. Переход к интегральному уравнению. В первых двух главах книги мы изучали линейные дифференциальные операторы с пп-коэффициентами. В этой главе развитая выше теория будет применена для исследования пп-решений нелинейных уравнений.

Пусть

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x \qquad (10.1)$$

— регулярный пп-оператор. Это значит (см. § 2), что каждое линейное уравнение

$$Lx = f(t) \qquad (10.2)$$

с почти периодической правой частью $f(t)$ имеет единственное пп-решение

$$x(t) = Tf(t). \qquad (10.3)$$

*) Основные результаты главы были доложены авторами на Третьем всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, январь 1968 г.).

Здесь T — интегральный оператор

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds, \tag{10.4}$$

ядром которого является функция Грина пп-оператора (10.1).

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение

$$Lx = f(t, x), \tag{10.5}$$

где вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных и почти периодична по t равномерно относительно значений x из каждого шара $|x| \leqslant r$.

Как легко видеть, пп-функция $x(t)$ является решением уравнения (10.5) в том и только том случае, если она является решением интегрального уравнения

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f[s, x(s)]\, ds. \tag{10.6}$$

Правая часть уравнения (10.6) определяет нелинейный интегральный оператор

$$\Pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f[s, x(s)]\, ds, \tag{10.7}$$

который можно записать в виде

$$\Pi = T\mathfrak{f}, \tag{10.8}$$

где T — оператор (10.4), а $\mathfrak{f}$ — оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}x(t) = f[t, x(t)]. \tag{10.9}$$

Из свойств функции $f(t, x)$ вытекает (см. § 1), что нелинейный оператор $\mathfrak{f}$ действует, непрерывен и ограничен в пространстве $B(R^n)$. Так как линейный оператор T также действует и непрерывен в $B(R^n)$, то оператор Π действует, непрерывен и ограничен в пространстве $B(R^n)$.

Напомним, что ограниченность нелинейного оператора означает, что ограничены нормы его значений на каждом шаре.

Первый вопрос, который возникает при изучении уравнения (10.5), — это вопрос о существовании у него пп-решений. Здесь естественно пытаться применять различные принципы неподвижной точки.

Наиболее элементарный принцип неподвижной точки — это принцип сжатых отображений. Этот принцип удается, например, применить в случае, когда $f(t, x)$ по пространственным переменным удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x)-f(t, y)| \leqslant a(r)|x-y|$$
$$(-\infty<t<\infty;\ |x|, |y| \leqslant r). \qquad (10.10)$$

Тогда оператор Π на каждом шаре $\|x\|_{B(R^n)} \leqslant r$ пространства $B(R^n)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\Pi x-\Pi y\|_{B(R^n)} \leqslant \|T\| a(r) \cdot \|x-y\|_{B(R^n)}.$$

Очевидна оценка

$$\|\Pi x\|_{B(R^n)} \leqslant \|T\| \cdot \|fx\|_{B(R^n)} \leqslant$$
$$\leqslant \|T\|\left[\|f(t, 0)\|_{B(R^n)}+ra(r)\right](\|x\|_{B(R^n)} \leqslant r).$$

Поэтому уравнение (10.5) имеет в шаре $\|x\|_{B(R^n)} \leqslant r$ единственное решение, если выполнены неравенства

$$a(r)\|T\|<1, \qquad \|T\|\left[\|f(t, 0)\|_{B(R^n)}+ra(r)\right] \leqslant r. \quad (10.11)$$

Неравенства (10.11) — это простейшие и грубые условия существования пп-решений. Их фактическое применение затруднено тем, что нет хороших способов вычислять (и даже оценивать) в общем случае норму линейного оператора T.

Теоремы существования пп-решений, вытекающие из принципа сжатых отображений, указаны К. О. Фридрихсом, Дж. Стокером, Б. П. Демидовичем, К. Кордуняну и др.

Ряд принципов неподвижной точки (принцип Шаудера, принцип Браудера, теория вполне непрерывных векторных полей и др.) использует полную непрерывность соответствующих операторов. Эту теорию, к сожалению, нельзя применить в задачах о пп-решениях в общем случае. Дело в том, что оператор суперпозиции (10.9) впол-

не непрерывен в $B(R^n)$ лишь в том случае, когда $f(t, x)$ не зависит от x, а линейный оператор T также не обладает свойством полной непрерывности.

Поэтому для изучения уравнения (10.6) приходится применять лишь те принципы неподвижной точки, которые не используют полную непрерывность операторов. Ниже будет применяться обобщенный принцип сжатых отображений и некоторые принципы неподвижной точки, приспособленные для изучения операторов, оставляющих инвариантным конус в банаховом пространстве.

10.2. Принцип обобщенного сжатия. Пусть $\mathfrak{R}$ — полное метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y)$. Действующий в $\mathfrak{R}$ оператор Π называют *обобщенным сжатием*, если

$$\rho(\Pi x, \Pi y) \leqslant q(\alpha, \beta)\rho(x, y) \qquad (\alpha \leqslant \rho(x, y) \leqslant \beta), \quad (10.12)$$

причем при $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$

$$q(\alpha, \beta) < 1. \qquad (10.13)$$

Оператор Π будет обобщенным сжатием, если, например,

$$\rho(\Pi x, \Pi y) \leqslant \rho(x, y) - \gamma[\rho(x, y)],$$

где $\gamma(u)$ — непрерывная положительная при $u > 0$ функция.

Теорема 10.1. *Пусть оператор Π преобразует в себя полное метрическое пространство $\mathfrak{R}$ и является обобщенным сжатием.*

Тогда уравнение

$$x = \Pi x \qquad (10.14)$$

имеет в $\mathfrak{R}$ единственное решение x^*. К этому решению сходятся последовательные приближения

$$x_{n+1} = \Pi x_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (10.15)$$

при любом начальном приближении $x_0 \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Рассмотрим числовую последовательность

$$\alpha_n = \rho(x_n, x_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу (10.12) эта последовательность не возрастает; пусть α^* — ее предел.

Если $\alpha^* > 0$, то при достаточно больших k и при всех $m = 1, 2, \ldots$ в силу (10.12) выполнено неравенство

$$\alpha_{k+m} \leqslant [q(\alpha^*, \alpha^* + 1)]^m (\alpha^* + 1),$$

и мы пришли к противоречию. Таким образом, $\alpha^* = 0$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое n, что

$$\alpha_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left[1 - q\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)\right],$$

и покажем, что оператор Π преобразует в себя шар $\rho(x, x_n) \leqslant \varepsilon$. Действительно, если $\rho(x, x_n) < \varepsilon/2$, то

$$\rho(\Pi x, x_n) \leqslant \rho(\Pi x, \Pi x_n) + \rho(\Pi x_n, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x, x_n) + \alpha_n \leqslant \varepsilon/2 + \alpha_n < \varepsilon.$$

Если же $\varepsilon/2 \leqslant \rho(x, x_n) \leqslant \varepsilon$, то снова

$$\rho(\Pi x, x_n) \leqslant \rho(\Pi x, \Pi x_n) + \rho(\Pi x_n, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant q(\varepsilon/2, \varepsilon)\, \rho(x, x_n) + \alpha_n < \varepsilon.$$

Инвариантность шара $\rho(x, x_n) \leqslant \varepsilon$ означает, что

$$\rho(x_{n+m}, x_n) \leqslant \varepsilon \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, последовательность (10.15) фундаментальна. Ее предел x^* будет решением уравнения (10.14).

Единственность решения очевидна.

Заметим, что в условиях теоремы 10.1 последовательные приближения сходятся равномерно относительно начальных значений из каждого шара. Теорема 10.1 указана М. А. Красносельским.

Следует отметить, что в условиях принципа обобщенного сжатия в пространстве $\mathfrak{R}$ можно ввести такую эквивалентную метрику, в которой Π удовлетворяет условиям обычного принципа сжатых отображений. Этот факт вытекает из интересной теоремы Ф. Р. Мейерса [1] об обращении принципа сжатых отображений.

10.3. Уравнения с монотонными операторами. Пусть K — конус в банаховом пространстве E.

Нелинейный оператор Π, действующий в E, называют *положительным*, если $\Pi K \subset K$. Оператор Π *монотонен* на множестве $\mathfrak{M} \subset E$, если из $x \leqslant y$ $(x, y \in \mathfrak{M})$ вытекает неравенство $\Pi x \leqslant \Pi y$ (т. е. из $y - x \in K$ вытекает, что $\Pi y - \Pi x \in K$). Отметим, что, в отличие от линейных опе-

раторов, *свойства положительности и монотонности для нелинейных операторов независимы.*

Ниже часто будут рассматриваться специальные множества в пространстве E — «конусные отрезки». Если $u, v \in E$ и $u \leqslant v$, то *конусным отрезком* $\langle u, v\rangle$ называется совокупность таких $x \in E$, что $u \leqslant x \leqslant v$.

Напомним, что конус K называется нормальным, если из $0 \leqslant x \leqslant y$ вытекает неравенство $\|x\| \leqslant N\|y\|$, где N — некоторая постоянная. Пусть K нормален; тогда из $x \in \langle u, v\rangle$ вытекает, что

$$\| x \| \leqslant \| u \| + \| x - u \| \leqslant \| u \| + N \| v - u \|.$$

Таким образом, *конусный отрезок является ограниченным множеством, если K нормален.*

Теорема 10.2. *Пусть конус K нормален. Пусть монотонный на конусном отрезке $\langle u, v\rangle$ оператор Π оставляет инвариантным этот отрезок. Пусть, наконец, Π удовлетворяет условию*

$$\Pi y - \Pi x \leqslant S(y - x) \qquad (u \leqslant x \leqslant y \leqslant v), \qquad (10.16)$$

где S — линейный положительный оператор, спектральный радиус которого меньше 1.

Тогда уравнение (10.14) *имеет на $\langle u, v\rangle$ единственное решение x^*, причем последовательные приближения* (10.15) *сходятся к x^* при любом начальном приближении $x_0 \in \langle u, v\rangle$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение две последовательности элементов

$$u_n = \Pi u_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ u_0 = u),$$
$$v_n = \Pi v_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ v_0 = v).$$

Из монотонности оператора Π и из инвариантности конусного отрезка вытекает, что

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant v_1 \leqslant v_0. \qquad (10.17)$$

В силу (10.16)

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant S^n (v - u) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

и так как конус K нормален, то

$$\| v_n - u_n \| \leqslant N \| S^n \| \cdot \| v - u \|.$$

По предположению $\|S^n\| \to 0$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \| v_n - u_n \| = 0.$$

Из (10.17) и снова из нормальности K вытекает, что последовательности u_n и v_n фундаментальны. Их общий предел x^* будет решением уравнения (10.14).

Перейдем ко второму утверждению теоремы. В силу монотонности оператора П элементы x_n последовательности (10.15) удовлетворяют неравенствам

$$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

поэтому

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \| x_n - u_n \| + \| u_n - x^* \| \leqslant N \| v_n - u_n \| + \| u_n - x^* \|,$$

откуда вытекает, что $\| x_n - x^* \| \to 0$.

Теорема доказана.

10.4. Равномерно вогнутые операторы. Пусть K — телесный нормальный конус в банаховом пространстве E. Обозначим через $K_{\text{вн}}$ множество внутренних элементов конуса K и определим на $K_{\text{вн}}$ метрику равенством

$$\rho(x, y) = \min\{\alpha\colon\ x \leqslant e^{\alpha} y,\ y \leqslant e^{\alpha} x\}. \tag{10.18}$$

Аксиомы метрики проверяются без труда. Можно показать, что $K_{\text{вн}}$ полно по метрике (10.18).

Рассмотрим конусный отрезок $\langle u, v\rangle$, где $u, v \in K_{\text{вн}}$. Очевидно,

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(u, v) \qquad (u \leqslant x,\ y \leqslant v), \tag{10.19}$$

т. е. $\langle u, v\rangle$ — ограниченное по метрике (10.18) множество.

Из неравенств

$$x \leqslant e^{\rho(x, y)} y, \quad y \leqslant e^{\rho(x, y)} x$$

вытекает, что

$$-[e^{\rho(x, y)} - 1]\, x \leqslant x - y \leqslant [e^{\rho(x, y)} - 1]\, y$$

и, далее,

$$-[e^{\rho(x, y)} - 1]\, v \leqslant x - y \leqslant [e^{\rho(x, y)} - 1]\, v.$$

В силу (10.19)

$$e^{\rho(x, y)} - 1 \leqslant e^{\rho(u, v)} \rho(x, y) \qquad (u \leqslant x,\ y \leqslant v),$$

поэтому

$$-e^{\rho(u,\,v)}\rho(x,\,y)\,v \leqslant x-y \leqslant e^{\rho(u,\,v)}\rho(x,\,y)\,v.$$

Отсюда и из нормальности конуса K вытекает, что

$$\|x-y\| \leqslant m_1\rho(x,\,y) \qquad (u \leqslant x,\ y \leqslant v), \tag{10.20}$$

где $m_1 = (1+2N)\,e^{\rho(u,\,v)}\|v\|$.

Оказывается, что справедливо и обратное неравенство

$$m_2\rho(x,\,y) \leqslant \|x-y\| \qquad (u \leqslant x,\ y \leqslant v), \tag{10.21}$$

где m_2 — положительная постоянная.

Действительно, так как u — внутренний элемент конуса K, то он входит в K вместе с шаровой окрестностью некоторого радиуса δ. Тогда и каждый элемент конусного отрезка $\langle u, v\rangle$ входит в K вместе со своей шаровой окрестностью того же радиуса δ.

Пусть $u \leqslant x$, $y \leqslant v$; $x \neq y$. Тогда

$$y-\delta\frac{x-y}{\|x-y\|}, \quad x-\delta\frac{y-x}{\|y-x\|} \in K,$$

т. е.

$$x \leqslant \left(1+\frac{\|x-y\|}{\delta}\right)y, \qquad y \leqslant \left(1+\frac{\|x-y\|}{\delta}\right)x.$$

Следовательно,

$$\rho(x,\,y) \leqslant \ln\left(1+\frac{\|x-y\|}{\delta}\right),$$

откуда вытекает (10.21).

Неравенства (10.20) и (10.21) означают, что метрика (10.18) на каждом конусном отрезке $\langle u, v\rangle$ $(u,\ v \in K_{\text{вн}})$ эквивалентна метрике $\|x-y\|$. Поэтому каждый такой конусный отрезок является полным метрическим пространством.

Оператор Π назовем *равномерно вогнутым на конусном отрезке* $\langle u, v\rangle$ $(u,\ v \in K_{\text{вн}})$, если он монотонен на $\langle 0, v\rangle$, если $\Pi u \in K_{\text{вн}}$ и если каждому сегменту $[a,\ b] \subset (0,\ 1)$ отвечает такое $\eta = \eta(a, b) > 0$, что

$$\Pi(\tau x) \geqslant (1+\eta)\,\tau\Pi x \qquad (a \leqslant \tau \leqslant b,\ x \in \langle u, v\rangle). \tag{10.22}$$

Пусть Π равномерно вогнут на $\langle u, v\rangle$, и пусть $x, y \in \langle u, v\rangle$, $x \neq y$. Из неравенств

$$e^{-\rho(x,\,y)}x \leqslant y, \quad e^{-\rho(x,\,y)}y \leqslant x$$

и монотонности оператора Π вытекает, что

$$\Pi[e^{-\rho(x,y)}x] \leqslant \Pi y, \quad \Pi[e^{-\rho(x,y)}y] \leqslant \Pi x.$$

Отсюда и из (10.22) следуют неравенства

$$(1+\eta)\, e^{-\rho(x,y)}\Pi x \leqslant \Pi y, \quad (1+\eta)\, e^{-\rho(x,y)}\Pi y \leqslant \Pi x,$$

где $\eta = \eta[e^{-\rho(u,v)}, e^{-\rho(x,y)}]$. Следовательно,

$$\rho(\Pi x, \Pi y) \leqslant \rho(x, y) - \ln\{1 + \eta[e^{-\rho(u,v)}, e^{-\rho(x,y)}]\}.$$

Значит, Π является оператором обобщенного сжатия на отрезке $\langle u, v\rangle$.

Из теоремы 10.1 и из неравенств (10.20) и (10.21) вытекает

Теорема 10.3. *Пусть Π оставляет инвариантным конусной отрезок $\langle u, v\rangle$ $(u,\ v \in K_{\text{вп}})$ и равномерно вогнут на нем.*

Тогда уравнение (10.14) *имеет на $\langle u, v\rangle$ единственное решение x^*. Последовательные приближения* (10.15) *сходятся к x^* при любом начальном приближении $x_0 \in \langle u, v\rangle$.*

Нелинейный оператор Π называется (как и в случае линейного оператора) *сильно положительным*, если при любом ненулевом $x \in K$ элемент Πx является внутренней точкой конуса K. Если Π равномерно вогнут на каждом конусном отрезке $\langle u, v\rangle$ $(u,\ v \in K_{\text{вн}})$, то будем говорить, что Π *равномерно вогнут на K*.

Теорема 10.4. *Пусть Π сильно положителен и равномерно вогнут на конусе K. Пусть u и v — такие ненулевые элементы из K, что*

$$\Pi u \geqslant u, \quad \Pi v \leqslant v. \tag{10.23}$$

Тогда уравнение (10.14) *имеет на K единственное ненулевое решение x^* и последовательные приближения* (10.15) *сходятся к x^* при любом ненулевом начальном приближении x_0 из K.*

Для доказательства в первую очередь нужно заметить (см. М. А. Красносельский [1], стр. 211), что из (10.23) вытекает неравенство $u \leqslant v$. Затем нужно заметить, что Π оставляет инвариантным каждый отрезок $\langle \alpha^{-1}u, \alpha v\rangle$ $(\alpha > 1)$. Наконец, нужно воспользоваться тем, что в силу сильной положительности оператора Π

элементы u и v без ограничения общности можно считать внутренними точками K. После этого остается применить теорему 10.3.

Первые теоремы о вогнутых операторах получены в работе М. А. Красносельского и Л. А. Ладыженского [1]. Ряд дальнейших результатов указан в монографии М. А. Красносельского [1]. Равномерно вогнутые операторы выделены и изучены в работе И. А. Бахтина [1]. Изложенное выше доказательство в основном следует статье М. А. Красносельского и В. Я. Стеценко [1].

10.5. Уравнения с монотонными нелинейностями. Вернемся к исследованию уравнения (10.5).

Будем предполагать, что пп-оператор L регулярен и его функция Грина $G(t,s)$ знакопостоянна (см. гл. 2) по отношению к некоторой телесной конусной пп-функции $K(t)$. Пусть m — порядок дифференциального оператора L. Нам удобно уравнение (10.5) записать в виде

$$\alpha Lx = g(t, x), \tag{10.24}$$

где $\alpha = 1$, если $G(t, s)$ неотрицательна, и $\alpha = -1$, если $G(t, s)$ неположительна.

Относительно функции $g(t,x)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условию: при каждом t

$$0 \leqslant g(t, y) - g(t, x) \leqslant A(t)(y - x) \qquad (u(t) \leqslant x \leqslant y \leqslant v(t)), \tag{10.25}$$

где $u(t)$, $v(t)$ — некоторые фиксированные пп-функции, имеющие непрерывные и ограниченные на всей оси $(-\infty, \infty)$ производные до порядка m включительно, $A(t)$ — некоторая пп-матрица, при каждом t неотрицательная по отношению к конусу $K(t)$ $(A(t)K(t) \subset K(t))$.

В случае, когда $g(t,x)$ — скалярная функция, условие (10.25) означает, что $g(t,x)$ на промежутке $u(t) \leqslant x \leqslant v(t)$ не убывает по переменной x и удовлетворяет по этой переменной условию Липшица с коэффициентом $A(t)$. Если R^n многомерно и конус $K(t)$ при всех t совпадает с конусом векторов с неотрицательными компонентами, то условие (10.25) также означает, что $g(t,x)$ удовлетворяет по пространственным переменным условию Липшица. В общем случае условие (10.25) менее

обозримо, но, разумеется, в конкретных случаях проверяется без особых трудностей.

Теорема 10.5. *Пусть правая часть уравнения* (10.24) *удовлетворяет условию* (10.25), *причем спектральный радиус линейного оператора*

$$Sx(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) A(s) x(s) ds \tag{10.26}$$

меньше 1. *Пусть* $u(t)$ *и* $v(t)$ *удовлетворяют дифференциальным неравенствам*

$$\alpha Lu(t) \leqslant g[t, u(t)] \tag{10.27}$$

и

$$\alpha Lv(t) \geqslant g[t, v(t)]. \tag{10.28}$$

Тогда уравнение (10.24) *имеет на конусном отрезке* $\langle u, v\rangle$ *единственное пп-решение* $x^*(t)$.

Для доказательства рассмотрим в пространстве $B(R^n)$ интегральный оператор

$$\Pi x(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) g[s, x(s)] ds. \tag{10.29}$$

Из дифференциальных неравенств (10.27), (10.28) и из монотонности на $\langle u, v\rangle$ оператора П вытекает, что он преобразует $\langle u, v\rangle$ в себя. Из (10.25) следует, что П удовлетворяет условию (10.16). Остается сослаться на теорему 10.2.

Применения теоремы 10.5 требуют, с одной стороны, построения функций $u(t)$ и $v(t)$, удовлетворяющих дифференциальным неравенствам (10.27), (10.28), и, с другой стороны, оценки спектрального радиуса оператора (10.26). Первая из этих задач частично будет обсуждена ниже. Для оценки спектрального радиуса оператора (10.26) можно применить метод пробной функции (см. теорему 5.1) — спектральный радиус оператора (10.26) меньше чем 1, если найдется такая пп-функция $x_0(t) \in B^m(R^n)$, что

$$x_0(t) \gtrsim 0, \qquad \alpha Lx_0(t) \gg A(t) x_0(t). \tag{10.30}$$

10.6. Уравнения с равномерно вогнутыми нелинейностями. Продолжим изучение уравнения (10.24).

Будем говорить, что функция $g(t, x)$ *равномерно вогнута* на $K(t)$, если она:

1°. при каждом t монотонна: $g(t, y) - g(t, x) \in K(t)$ при $x, y, y - x \in K(t)$;

2°. равномерно относительно t вогнута: для каждого $\tau \in (0, 1)$ можно указать такое положительное $\eta = \eta(\tau; r, r_1)$ $(r, r_1 > 0)$, что

$$g(t, \tau x) - (1 + \eta)\tau g(t, x) \in K(t) \qquad (10.31)$$

при всех таких x, которые лежат в $K(t)$ вместе с шаровой окрестностью радиуса r и норма которых удовлетворяет неравенству $\|x\| \leqslant r_1$. Простой подсчет показывает, что для значений τ из каждого фиксированного промежутка $[a, b] \subset (0, 1)$ можно выбрать общее $\eta = \eta(a, b; r, r_1)$. Из условия (10.31) вытекает, что $g(t, 0) \in K(t)$. Поэтому равномерно вогнутая функция $g(t, x)$ положительна на $K(t)$.

Ниже равномерно вогнутую функцию $g(t, x)$ будем называть *правильно вогнутой на конусе* $K(t)$, если $g(t, x) \neq 0$ при $x \neq 0$ $(x \in K(t))$ для значений t из некоторого плотного на $(-\infty, \infty)$ множества.

Теорема 10.6. *Пусть функция Грина $G(t, s)$ оператора L сильно положительна или сильно отрицательна относительно конусной функции $K(t)$. Пусть $g(t, x)$ правильно вогнута на конусе $K(t)$. Пусть, наконец, найдутся ненулевые пп-функции $u(t)$, $v(t) \in K(t)$ из пространства $B^m(R^n)$, удовлетворяющие дифференциальным неравенствам* (10.27)—(10.28).

Тогда уравнение (10.24) *имеет в $\hat{K}(t)$ единственное ненулевое пп-решение $x^*(t)$, которое удовлетворяет неравенствам*

$$u(t) \leqslant x^*(t) \leqslant v(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (10.32)$$

Для доказательства нужно построить оператор (10.29), заметить, что он сильно положителен и равномерно вогнут на конусе $\hat{K}(t)$, и воспользоваться теоремой 10.4.

Пусть условия 1°—2° выполнены при каждом t лишь для элементов x, удовлетворяющих неравенствам

$0 \leqslant x \leqslant v(t)$. Кроме того, пусть $g(t, x) \neq 0$ при $x \neq 0$ $(0 \leqslant x \leqslant v(t))$ для значений t из некоторого плотного на $(-\infty, \infty)$ множества. В этом случае функцию $g(t, x)$ будем называть *правильно вогнутой на переменном конусном отрезке* $\langle 0, v(t)\rangle$.

Из теоремы 10.3 вытекает

Теорема 10.7. *Пусть функция Грина $G(t, s)$ оператора L сильно положительна или сильно отрицательна относительно конусной функции $K(t)$. Пусть существуют ненулевые пп-функции $u(t)$, $v(t) \in \hat{K}(t)$, $v(t) - u(t) \in \in \hat{K}(t)$ из пространства $B^m(R^n)$, удовлетворяющие дифференциальным неравенствам* (10.27), (10.28). *Пусть, наконец, $g(t, x)$ правильно вогнута на переменном отрезке* $\langle 0, v(t)\rangle$.

Тогда уравнение (10.24) *имеет на отрезке $\langle u(t), v(t)\rangle$ единственное решение $x^*(t) \in B^m(R^n)$.*

Естественно, что утверждения теорем 10.6 и 10.7 остаются в силе, если вместо сильной положительности или сильной отрицательности функции Грина $G(t, s)$ предполагать, что сильно положителен линейный интегральный оператор

$$T_\alpha f(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds.$$

Теорема 10.7 удобна в приложениях к исследованию уравнений

$$Lx = f(t, x) \tag{10.33}$$

с выпуклыми по x нелинейностями. По аналогии с понятием вогнутости *равномерная выпуклость* функции $f(t, x)$ определяется как объединение двух свойств:

1°. при каждом t функция $f(t, x)$ монотонна по x;

2°. для каждого сегмента $[a, b] \subset (0, 1)$ можно указать такое

$$\xi = \xi(a, b; r, r_1) \qquad (r, r_1 > 0),$$

что при $a \leqslant \tau \leqslant b$

$$(1 - \xi)\tau f(t, x) - f(t, \tau x) \in K(t) \tag{10.34}$$

для всех таких x, которые лежат в $K(t)$ вместе с шаровой окрестностью радиуса r и норма которых удовлетворяет неравенству $|x| \leqslant r_1$.

Если $f(t, x)$ равномерно выпукла, то иногда удобно перейти от уравнения (10.33) к уравнению

$$L_1 x = g(t, x), \tag{10.35}$$

где

$$L_1 x = A(t)\, x - Lx, \tag{10.36}$$

а

$$g(t, x) = A(t)\, x - f(t, x). \tag{10.37}$$

Функция (10.37), вообще говоря, правильно вогнута на некотором переменном конусном отрезке. Если окажется, что оператор (10.36) имеет сильно положительный обратный, то можно пытаться применять теорему 10.7.

10.7. Использование мажорант и минорант. Для применения теоремы 10.6 не нужно уметь строить функции $u(t)$, $v(t) \in \widehat{K}(t)$, удовлетворяющие дифференциальным неравенствам (10.27), (10.28), а нужно лишь знать, что такие функции существуют. Здесь удобно пользоваться методом линейных мажорант и минорант — см., например, М. А. Красносельский [1, 2], где этот метод применяется при изучении периодических решений. Однако по сравнению с периодическим случаем возникают дополнительные трудности, связанные с тем, что линейный оператор (10.26), вообще говоря, не имеет собственных функций. Примером может служить интегральный оператор

$$Sx(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)+\int_s^t a(\tau)\,d\tau}\, x(s)\, ds, \tag{10.38}$$

где $a(t)$ — пп-функция с нулевым средним и неограниченным неопределенным интегралом.

Предположим сначала, что $g(t, 0) \not\equiv 0$. В этом случае дифференциальному неравенству (10.27) удовлетворяет ненулевая пп-функция

$$u(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\, g(s, 0)\, ds \in K(t).$$

Далее, пусть при всех $t \in (-\infty, \infty)$ и $x \in K(t)$ выполнено неравенство

$$g(t, x) \leqslant A(t)x + a(t), \tag{10.39}$$

где $a(t)$ — некоторая пп-функция, а $A(t)$ — такая пп-матрица, что спектральный радиус интегрального оператора

$$Sx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) A(s) x(s) ds \tag{10.40}$$

меньше 1. Тогда пп-оператор

$$L_1 x = \alpha L x - A(t) x \tag{10.41}$$

положительно обратим. Поэтому существует пп-функция $v(t) \gg 0$ $(v(t) \in B^m(R^n))$, удовлетворяющая дифференциальному неравенству

$$\alpha L v(t) - A(t) v(t) \gg 0 \tag{10.42}$$

(в качестве $v(t)$ можно взять пп-решение любого линейного уравнения $\alpha L x - A(t) x = f(t)$, где $f(t) \gg 0$). Поскольку неравенство (10.42) однородно, то без ограничения общности можно считать, что

$$\alpha L v(t) - A(t) v(t) \geqslant a(t). \tag{10.43}$$

Из неравенств (10.39) и (10.43) получаем, что пп-функция $v(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству (10.28).

Отметим, что пп-оператор (10.41) положительно обратим тогда и только тогда, когда при каждом $\mu \in [0, 1]$ регулярен пп-оператор $\alpha L x - \mu A(t) x = L_\mu x$.

Пусть теперь $g(t, 0) \equiv 0$. И пусть существует такое $r_0 > 0$, что при $x \in K(t)$ и $|x| \leqslant r_0$ выполнены неравенства

$$g(t, x) \geqslant B(t) x \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{10.44}$$

где $B(t)$ — некоторая неотрицательная на $K(t)$ пп-матрица. Предположим, далее, что существует такая ненулевая пп-функция $u(t) \in \hat{K}(t)$ $(u(t) \in B^m(R^n)$; $|u(t)| \leqslant r_0$; $-\infty < t < \infty)$, что

$$\alpha L u(t) - B(t) u(t) \leqslant 0. \tag{10.45}$$

В силу (10.44) функция $u(t)$ удовлетворяет и неравенству (10.27).

Для миниедральных конусов условие (10.45) можно существенно ослабить.

Пусть значениями пп-функции $K(t)$ являются миниедральные конусы. Из леммы 5.4 тогда следует, что миниедрален конус $\hat{K}(t)$.

Лемма 10.1. *Пусть существует такая пп-функция* $x_0(t) \in B^m(R^n)$, *что* $x_0(t) \overline{\in} -\hat{K}(t)$ *и*

$$\alpha L x_0(t) - B(t) x_0(t) \leqslant 0. \tag{10.46}$$

Тогда существует ненулевая пп-функция $u(t) \in B^m(R^n)$, $u(t) \in \hat{K}(t)$, *удовлетворяющая дифференциальному неравенству* (10.45).

Доказательство. Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$S_1 x(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) B(s) x(s) ds. \tag{10.47}$$

Из дифференциального неравенства (10.46) вытекает, что

$$S_1 x_0(t) \geqslant x_0(t). \tag{10.48}$$

Далее, положим $u_0(t) = [x_0(t)]_+$. Из условий леммы вытекает, что $u_0(t)$ — ненулевая пп-функция. Имеем

$$S_1 u_0(t) \geqslant [S_1 x_0(t)]_+ \geqslant u_0(t).$$

Остается положить $u(t) = S_1 u_0(t)$.

Лемма доказана.

В одномерном случае дифференциальные неравенства (10.27), (10.28) заведомо выполнены, если $g(t, x)$ есть функция типа $\sqrt{x}$, т. е. $g(t, x)$ «медленно» растет при больших x и «быстро» растет при малых x. Аналогичные свойства легко описать и для функций $g(t, x)$ в многомерном случае.

Лемма 10.2. *Пусть существуют такие последовательности положительных чисел* $\varkappa_i \to \infty$, $\delta_i \to 0$, $r_i \to 0$, *что*

$$g(t, x) \geqslant \varkappa_i B(t) x \qquad (x \in K(t),\ |x| \leqslant r_i) \tag{10.49}$$

и

$$g(t, x) \leqslant \delta_i A(t) x + a_i(t) \qquad (x \in K(t)), \tag{10.50}$$

где $a_i(t)$ — какая-либо последовательность пп-функций, $A(t)$ и $B(t)$ — какие-либо ненулевые неотрицательные пп-матрицы.

Тогда существуют ненулевые пп-функции $u(t)$, $v(t) \in \widehat{K}(t)$, удовлетворяющие дифференциальным неравенствам (10.27) *и* (10.28).

Доказательство. Так как матрица $B(t)$ ненулевая, а оператор αL^{-1} сильно положителен, то найдутся такой ненулевой элемент $u_1(t) \in \widehat{K}(t)$ и такое число $\beta > 0$, что будет выполнено неравенство

$$S_1 u_1(t) \geqslant \beta u_1(t). \tag{10.51}$$

Выберем число i_0 так, чтобы $\beta \varkappa_{i_0} > 1$. Тогда из неравенства (10.51) следует неравенство

$$\varkappa_{i_0} S_1 u_1(t) \geqslant u_1(t).$$

Поэтому функция $u(t) = \varkappa_{i_0} S_1 u_1(t)$, умноженная на достаточно малое положительное число, будет удовлетворять дифференциальному неравенству (10.27).

Пусть, далее, $v_1(t)$ — некоторый внутренний элемент конуса $\widehat{K}(t)$. Тогда при некотором $\gamma > 0$ будет выполняться неравенство

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)[A(s) + I]\, v_1(s)\, ds \ll \gamma v_1(t). \tag{10.52}$$

Левую часть этого неравенства обозначим через $v_2(t)$. Очевидно,

$$[A(t) + I]\, v_2(t) \ll \gamma \cdot \alpha L v_2(t) \tag{10.53}$$

и $v_2(t) \gg 0$. Выберем вначале i_0 так, чтобы выполнялось неравенство $\gamma \delta_{i_0} < 1$; а затем выберем такое k, что $k v_2(t) \gg \gamma a_{i_0}(t)$. Тогда из (10.53) вытекает соотношение

$$\alpha L[k v_2(t)] \gg \delta_{i_0} A(t)[k v_2(t)] + a_{i_0}(t),$$

которое означает, что функция $v(t) = k v_2(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству (10.28).

Лемма доказана.

10.8. Примеры. а) Рассмотрим задачу о пп-решениях системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j + f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.54}$$

Через $A(t)$ обозначим пп-матрицу, элементами которой являются пп-функции $a_{ij}(t)$. Ниже предполагается, что при всех $t \in (-\infty, \infty)$ внедиагональные элементы матрицы $A(t)$ неотрицательны и при некотором $t_0 \in (-\infty, \infty)$ она имеет дорожку невырожденности (см. п. 6.4). Относительно функций $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ будем предполагать, что они монотонны по пространственным переменным при неотрицательных значениях $x_1, \ldots, x_n$, что они равномерно почти периодичны по t и что

$$f_i(t, 0, \ldots, 0) \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.55}$$

Кроме этого будем предполагать, что для любого $\tau \in (0, 1)$ можно указать такое число $\eta = \eta(\tau; r, r_1) > 0$ $(r, r_1 > 0)$, что выполнены неравенства

$$f_i(t, \tau x_1, \ldots, \tau x_n) \geqslant (1 + \eta)\, \tau f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{10.56}$$

где $r \leqslant x_1, \ldots, x_n \leqslant r_1$. Тогда вектор-функция

$$f(t, x) = \{f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)\}$$

равномерно вогнута на конусе K векторов с неотрицательными координатами.

Теорема 10.8. *Пусть по крайней мере одно из неравенств* (10.55) *не обращается в тождество. Пусть при неотрицательных значениях* $x_1, \ldots, x_n$ *выполнены неравенства*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\, x_j + b_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{10.57}$$

где $b_{ij}(t)$ *и* $b_i(t)$ — *некоторые пп-функции. Наконец, пусть существует такой вектор* a *с положительными компонентами* $a_1, \ldots, a_n$, *что выполнены неравенства*

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t) + b_{ij}(t)]\, a_j < 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.58}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (10.54) *имеет в конусе* $\widehat{K}$ *единственное пп-решение.*

Доказательство. Из неравенств (10.58) вытекает, что $A(t)a \ll 0$, и поэтому в силу теоремы 6.3 пп-оператор $Lx = dx/dt - A(t)x$ регулярен и его функция Грина определяется формулой (6.5), где $U(t, s) = U(t)U^{-1}(s)$ — оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} - A(t)\, x = 0.$$

При этом (см. п. 7.6) линейный интегральный оператор

$$Sx(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t, s)\, x(s)\, ds$$

сильно положителен по отношению к конусу $\widehat{K}$.

Рассмотрим теперь нелинейный интегральный оператор

$$\Pi x(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t, s)\, f[s, x(s)]\, ds.$$

Пусть $x(t) \in \widehat{K}$. Тогда из неравенства

$$\Pi x(t) \geqslant \int_{-\infty}^{t} U(t, s)\, f(s, 0)\, ds \gg 0$$

вытекает сильная положительность оператора Π.

Из неравенств (10.56) вытекает, что Π равномерно вогнут на $\widehat{K}$.

Утверждение теоремы теперь следует из теоремы 10.4, если заметить, что в силу (10.58) спектральный радиус оператора

$$S_1 x(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t, s)\, B(s)\, x(s)\, ds$$

меньше единицы (см. п. 10.7). Здесь $B(t)$ — пп-матрица, элементами которой являются пп-функции $b_{ij}(t)$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда система дифференциальных уравнений (10.54) имеет нулевое решение, т. е.

$$f_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.59}$$

В этом случае будем дополнительно предполагать, что $f(t, x) \neq 0$ при ненулевых x из K и при значениях t из некоторого плотного на $(-\infty, \infty)$ множества.

Теорема 10.9. *Пусть выполнены неравенства* (10.57) *и* (10.58). *Пусть при* $x \in K$ *и* $|x| \leqslant r_0$ *выполнены неравенства*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{10.60}$$

где $c_{ij}(t)$ — *неотрицательные пп-функции. Наконец, пусть существует такой вектор* $d = \{d_1, \ldots, d_n\}$, *что выполнены неравенства*

$$\inf_{-\infty < t < \infty} \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}(t) + c_{ij}(t)]\, d_j > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{10.61}$$

причем хотя бы одна координата вектора d *положительна.*

Тогда система уравнений (10.54) *имеет в конусе* $\widehat{K}$ *единственное ненулевое пп-решение.*

Это утверждение вытекает из теоремы 10.6 и леммы 10.1.

б) В качестве следующего примера рассмотрим задачу о пп-решениях системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\,x_j+f_i(t,x_1,\ldots,x_n)=0 \qquad (i=1,\ldots,n). \quad (10.62)$$

Теорема 10.10. *Пусть функции* $a_{ij}(t)$, $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 10.8.

Тогда система дифференциальных уравнений (10.62) *имеет в конусе* $\widehat{K}$ *единственное пп-решение.*

Теорема 10.11. *Пусть функции* $a_{ij}(t)$, $f_i(t,x_1,\ldots,x_n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 10.9.

Тогда уравнение (10.62) *имеет в конусе* $\widehat{K}$ *единственное ненулевое пп-решение.*

Доказательство обеих теорем аналогично доказательству теорем 10.8 и 10.9, только сильная положительность соответствующего нелинейного интегрального оператора устанавливается с помощью теоремы 7.5.

в) Теоремы 10.8—10.11 являются, конечно, лишь примерами — они охватывают узкие и достаточно специальные классы систем. Некоторые более интересные примеры будут приведены в последующих параграфах этой и следующей глав.

Здесь мы приведем простой пример системы двух дифференциальных уравнений, пп-решения которой удобно исследовать при помощи переменных конусов.

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= [a(t)+2\sin t]\,x_1-b_0x_2+f_1(t,x_1,x_2),\\ x_2' &= x_1+a(t)\,x_2+f_2(t,x_1,x_2). \end{aligned}\right\} \quad (10.63)$$

Здесь $a(t)$ — произвольная пп-функция, b_0 — положительное число.

Как и выше, будем предполагать, что функции $f_1(t,x_1,x_2)$ и $f_2(t,x_1,x_2)$ неотрицательны при неотрицательных x_1, x_2, монотонны и равномерно вогнуты.

Из результатов п. 6.4 вытекает, что оператор сдвига $U(t,s)$ по траекториям системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= [a(t)+2\sin t]\,x_1-b_0x_2,\\ x_2' &= x_1+a(t)\,x_2 \end{aligned}\right\} \quad (10.64)$$

не может быть положительным по отношению к конусу векторов с неотрицательными компонентами. Далее, предположим, что оператор сдвига по траекториям этой системы положителен относительно конусной пп-функции $K(t)$. Нетрудно видеть, что тогда он будет положительным и по отношению к конусной функции $K_\alpha(t)$, выделенной неравенствами

$$x_1+\alpha(t)\,x_2\geqslant 0, \qquad x_2\geqslant 0, \quad (10.65)$$

где $\alpha(t)$ — некоторая пп-функция. Покажем, что при $b_0 < 0{,}48$ такой конус действительно существует.

Легко проверить, что оператор сдвига $U(t, s)$ по траекториям системы (10.64) будет положительным по отношению к конусу (10.65) в том и только том случае, если функция $\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$D^*\alpha(t) \geqslant \alpha^2(t) + 2\alpha(t)\sin t + b_0 \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{10.66}$$

где $D^*\alpha(t)$ — правое верхнее производное число функции $\alpha(t)$.

Из результатов п. 9.8 вытекает, что при $b_0 < 0{,}48$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\sin t\,\frac{dx}{dt} + b_0 x = 0$$

грубо неосцилляционное на $(-\infty, \infty)$. Поэтому существует пп-функция $\alpha(t)$, удовлетворяющая дифференциальному неравенству (10.66); в качестве $\alpha(t)$ можно взять, например, (2π)-периодическое решение уравнения Риккати

$$\frac{dz}{dt} = z^2 + 2z\sin t + b_0. \tag{10.67}$$

Следует отметить, что если в качестве $\alpha(t)$ взять верхнее граничное решение уравнения Риккати (10.67), то, как легко убедиться, $\alpha(t) \geqslant 0$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Ясно, что константа не может удовлетворять дифференциальному неравенству (10.66), и поэтому оператор сдвига $U(t, s)$ системы дифференциальных уравнений (10.64) не может быть положительным по отношению к постоянному конусу.

Используя теперь результаты пунктов 10.5—10.7, можно указать условия, при которых система дифференциальных уравнений (10.63) имеет в переменном конусе (10.65) единственное ненулевое пп-решение.

г) В качестве последнего примера рассмотрим задачу о пп-решениях скалярного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a_1(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_2(t)\frac{dx}{dt} + a_3(t)x = f(t, x). \tag{10.68}$$

Введем в рассмотрение функции

$$q_1(t) = \frac{-a_1(t) - \sqrt{a_1^2(t) - 3a_2(t)}}{3}$$

и

$$q_2(t) = \frac{-a_1(t) + \sqrt{a_1^2(t) - 3a_2(t)}}{3}.$$

Ниже будем предполагать, что

$$a_1^2(t) \geqslant 3a_2(t), \tag{10.69}$$

и, следовательно, функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ вещественны.

Положим

$$q_1^0 = \sup_{-\infty < t < \infty} q_1(t) \quad \text{и} \quad q_2^0 = \inf_{-\infty < t < \infty} q_2(t).$$

Будем считать, что $q_1^0 \leqslant q_2^0$ и что

$$(q_2^0)^3 + a_1(t)(q_2^0)^2 + a_2(t)\, q_2^0 + a_3(t) \leqslant 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Наконец, будем считать, что

$$a_3^0 = \inf_{-\infty < t < \infty} a_3(t) > 0.$$

Из теоремы 8.9 тогда вытекает, что пп-оператор

$$Lx = \frac{d^3x}{dt^3} + a_1(t)\frac{d^2x}{dt^2} + a_2(t)\frac{dx}{dt} + a_3(t)\,x$$

регулярен и его функция Грина $G(t, s)$ неотрицательна.

Теорема 10.12. *Пусть существуют такие постоянные* α *и* β $(\alpha < \beta)$, *что*

$$\alpha a_3(t) \leqslant f(t, \alpha) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

и

$$\beta a_3(t) \geqslant f(t, \beta) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Пусть функция $f(t, x)$ *непрерывно дифференцируема по* x *при значениях* $x \in [\alpha, \beta]$ *и ее производная* $f'_x(t, x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqslant f'_x(t, x) \leqslant a(t) \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta;\ -\infty < t < \infty),$$

где $a(t)$ — *такая пп-функция, что выполнено неравенство*

$$\inf_{-\infty < t < \infty} [a_3(t) - a(t)] > 0.$$

Тогда уравнение (10.68) *имеет единственное пп-решение* $x^*(t)$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$\alpha \leqslant x^*(t) \leqslant \beta \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Это утверждение вытекает из теоремы 10.5.

К скалярным уравнениям высших порядков мы вернемся в § 12.

Человек раздвоен снизу, а не сверху — для того, что две опоры надежнее одной.

Козьма Прутков

§ 11. Устойчивость пп-решений уравнений с монотонными и вогнутыми нелинейностями

11.1. Теорема об устойчивости нулевого решения. В этом пункте нам понадобится хорошо известная теорема об интегральных неравенствах.

Лемма 11.1. *Пусть неотрицательная непрерывная скалярная функция $v(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству*

$$v(t) \leqslant e^{-\gamma t} v_0 + \beta \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} v(s)\, ds \qquad (t \geqslant 0), \quad (11.1)$$

где v_0, $\beta \geqslant 0$.

Тогда

$$v(t) \leqslant e^{-(\gamma-\beta)t} v_0 \qquad (t \geqslant 0). \quad (11.2)$$

Рассмотрим уравнение

$$Lx = \omega(t, x), \quad (11.3)$$

где L — регулярный пп-оператор порядка m, а функция $\omega(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных $x \in R^n$, $-\infty < t < \infty$ и почти периодична по t равномерно относительно значений x из некоторого шара $|x| \leqslant r_0$ достаточно малого радиуса r_0.

Будем считать, что $\omega(t, x)$ содержит лишь члены высшего, чем 1, порядка малости по пространственным переменным. Это значит, что $\omega(t, 0) \equiv 0$ и

$$|\omega(t, x)| \leqslant q(r)|x| \qquad (|x| \leqslant r), \quad (11.4)$$

где $q(r)$ монотонна и

$$\lim_{r \to 0} q(r) = 0. \quad (11.5)$$

Уравнение (11.3) имеет нулевое решение. Нас будет интересовать устойчивость по Ляпунову этого нулевого решения.

Напомним соответствующие определения.

Уравнение (11.3) можно (см. стр. 17) записать в виде уравнения

$$\tilde{L}u \equiv \frac{du}{dt} + Q(t)\,u = \tilde{\omega}(t, u) \tag{11.6}$$

первого порядка в фазовом пространстве R^{mn}. Здесь

$$u = \{x,\ x',\ \ldots,\ x^{(m-1)}\},$$
$$\tilde{\omega}(t, u) = \{0,\ 0,\ \ldots,\ \omega(t, x)\},$$

а $Q(t)$ — матрица (2.6).

Нулевое решение уравнения (11.3) называется *устойчивым по Ляпунову*, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что для каждого решения $u(t)$ уравнения (11.6) из $|u(0)| < \delta$ вытекает неравенство $|u(t)| < \varepsilon$ $(0 \leqslant t < \infty)$. Если найдутся такие δ_0, γ_0, $M_0 > 0$, что из $|u(0)| < \delta_0$ вытекает неравенство

$$|u(t)| \leqslant M_0 e^{-\gamma_0 t}\,|u(0)| \qquad (t \geqslant 0), \tag{11.7}$$

то нулевое решение уравнения (11.3) называется *экспоненциально устойчивым.*

Если нулевое решение уравнения (11.3) не обладает свойством устойчивости, то его называют *неустойчивым.*

Напомним еще (см. п. 3.2), что из регулярности пп-оператора L вытекает экспоненциальная дихотомия решений уравнения $\tilde{L}u = 0$, т. е. вытекает существование проекторов P_+ и P_- $(P_+ + P_- = I)$ на подпространства E_+ и E_- — начальных условий, при которых решения уравнения $\tilde{L}u = 0$ экспоненциально убывают соответственно при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$. Если $P_- = 0$, то нулевое решение уравнения $Lx = 0$ экспоненциально устойчиво, если $P_- \neq 0$ — неустойчиво. В соответствии с этим оператор L назовем *устойчивым*, если $P_- = 0$, и *неустойчивым*, если $P_- \neq 0$.

Теорема 11.1. *Пусть регулярный пп-оператор L устойчив.*

Тогда нулевое решение уравнения (11.3) *экспоненциально устойчиво.*

Эта теорема, как и теорема 11.2 (в более общих условиях — для уравнений с произвольными ограниченными коэффициентами), установлена по существу еще

А. М. Ляпуновым, а в окончательной форме О. Перроном [1]. Приведем доказательство теоремы 11.1.

Каждое решение $u(t)$ уравнения (11.6) является одновременно решением интегрального уравнения

$$u(t) = U(t)\,u(0) + \int_0^t U(t, s)\,\tilde{\omega}[s, u(s)]\,ds, \qquad (11.8)$$

где $U(t,s) = U(t)\,U^{-1}(s)$, а $U(t)$ $(U(0) = I)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения $\tilde{L}u=0$. Из регулярности и устойчивости пп-оператора L вытекает (см. (4.10)) оценка

$$|U(t, s)| \leqslant Me^{-\gamma(t-s)} \qquad (t \geqslant s), \qquad (11.9)$$

где M и γ положительны. Поэтому при $t \geqslant 0$

$$|u(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}|u(0)| + \int_0^t Me^{-\gamma(t-s)}|\tilde{\omega}[s, u(s)]|\,ds. \qquad (11.10)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$; число ε можно считать настолько малым, что $\beta = Mq(\varepsilon) \leqslant \gamma/2$.

Положим $\delta = \varepsilon/(1 + M)$. Покажем вначале, что из $|u(0)| < \delta$ вытекает неравенство $|u(t)| < \varepsilon$ при $t > 0$. Действительно, если t_0 — первый момент времени, при котором $|u(t)| = \varepsilon$, то из (11.10) вытекает, что при $0 \leqslant t \leqslant t_0$

$$|u(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}|u(0)| + \beta \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|u(s)|\,ds, \qquad (11.11)$$

и в силу леммы 11.1

$$\varepsilon = |u(t_0)| \leqslant Me^{-(\gamma-\beta)t_0}|u(0)|,$$

откуда

$$\varepsilon < Me^{-\gamma t_0/2} \cdot \frac{\varepsilon}{M} < \varepsilon.$$

Мы пришли к противоречию.

Следовательно, неравенство (11.11) верно при всех $t \geqslant 0$, и из той же леммы 11.1 вытекает, что

$$|u(t)| \leqslant Me^{-\gamma t/2}|u(0)| \qquad (t \geqslant 0,\ |u(0)| \leqslant \delta).$$

Теорема доказана.

11.2. Теорема о неустойчивости. Продолжим изучение уравнения (11.3). Предположим дополнительно, что $\omega(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица в форме

$$|\omega(t, x) - \omega(t, y)| \leqslant p(r)|x - y| \quad (|x|, |y| \leqslant r), \tag{11.12}$$

где $p(r) \to 0$ при $r \to 0$.

Теорема 11.2. *Пусть регулярный пп-оператор L неустойчив.*

Тогда нулевое решение уравнения (11.3) *неустойчиво.*

Для доказательства достаточно установить существование такого $r_0 > 0$, что в любой окрестности начала координат есть начальное значение $u(0)$ некоторого решения $u(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ уравнения (11.6), не лежащего полностью в шаре $|u| \leqslant r_0$.

Непосредственная проверка показывает, что ограниченные на $[0, \infty)$ решения $u(t)$ уравнения (11.6) совпадают с решениями нелинейного интегрального уравнения

$$u(t) = Tu(t), \tag{11.13}$$

где

$$Tu(t) = U(t)P_+u(0) + \int_0^t U(t)P_+U^{-1}(s)\tilde{\omega}[s, u(s)]\,ds - \int_t^\infty U(t)P_-U^{-1}(s)\tilde{\omega}[s, u(s)]\,ds. \tag{11.14}$$

Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два таких ограниченных на $[0, \infty)$ решения уравнения (11.13), что $P_+u_1(0) = P_+u_2(0)$ и $|u_1(t)|, |u_2(t)| \leqslant r_0$ при $t \geqslant 0$. Тогда

$$|u_1(t) - u_2(t)| = |Tu_1(t) - Tu_2(t)| \leqslant Mp(r_0)\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|u_1(s) - u_2(s)|\,ds + Mp(r_0)\int_t^\infty e^{\gamma(t-s)}|u_1(s) - u_2(s)|\,ds$$

и, следовательно,

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant Mp(r_0)\cdot\frac{1}{\gamma}(2 - e^{-\gamma t})\sup_{0 \leqslant s < \infty}|u_1(s) - u_2(s)|. \tag{11.15}$$

Выберем r_0 так, чтобы выполнялось неравенство $2Mp(r_0)<\gamma$. Тогда из (11.15) вытекает, что $u_1(t)\equiv u_2(t)$.

Мы показали, что на пересечении шара $|u(0)|\leqslant r_0$ с каждой гиперплоскостью $u=P_+u(0)+v$ $(v\in E_-)$ есть не более одной точки, из которой вытекают решения, лежащие в этом шаре. Иначе говоря, «почти всем» начальным значениям из любой окрестности начала координат отвечают решения, выходящие при некоторых $t>0$ из шара $|u|\leqslant r_0$. Значит, нулевое решение уравнения (11.3) неустойчиво.

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 11.2, как известно, верно и без предположения (11.12); однако это упрощающее предположение мало ограничительно.

11.3. Устойчивость оператора L и знак его функции Грина. Рассмотренные в § 8 примеры показывают, что функция Грина $G(t,s)$ регулярного пп-оператора L может быть неотрицательной по отношению к некоторой телесной почти периодической конусной функции $K(t)$ и в случае устойчивого L и в случае неустойчивого L. Интересно отметить, что если L устойчив и функция Грина $G(t,s)$ знакопостоянна, то она обязательно неотрицательна.

Для доказательства достаточно вспомнить, что в случае устойчивого L

$$G(t,s)=\begin{cases} K(t,s), & \text{если} \quad t\geqslant s,\\ 0, & \text{если} \quad t<s,\end{cases} \tag{11.16}$$

где $K(t,s)$ — функция Коши оператора L. Функция Коши определяется как решение матричного уравнения $LX=0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$K(s,s)=K'_t(s,s)=\ \ldots\ =K^{(m-2)}_{t^{m-2}}(s,s)=0$$

и

$$K^{(m-1)}_{t^{m-1}}(s,s)=I.$$

11.4. Устойчивость пп-решений уравнений с монотонными нелинейностями. Перейдем к исследованию устойчивости ненулевых пп-решений уравнения

$$\alpha Lx=g(t,x). \tag{11.17}$$

По определению решение $x^*(t)$ уравнения (11.17) *устойчиво*, если устойчиво нулевое решение возмущенного уравнения

$$\alpha Lx = g[t, x^*(t) + x] - g[t, x^*(t)]. \qquad (11.18)$$

Естественным образом определяются понятия *экспоненциальной устойчивости решения* $x^*(t)$ и понятия его *неустойчивости*.

Предположим, что выполнены условия теоремы 10.5.

В этом пункте мы будем дополнительно предполагать, что в некоторой окрестности Ω значений существующего в силу теоремы 10.5 пп-решения $x^*(t)$ функция $g(t, x)$ дифференцируема по пространственной векторной переменной x, причем $g'_x(t, x)$ равномерно непрерывно зависит от t, x и почти периодична по t.

Теорема 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.5, *и пусть оператор* L *устойчив.*

Тогда пп-решение $x^*(t) \in \langle u, v \rangle$ *уравнения* (11.17) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Положим

$$\omega(t, x, h) = g(t, x + h) - g(t, x) - g'_x(t, x)\, h. \qquad (11.19)$$

Очевидно,

$$g(t, x + h) - g(t, x) = \int_0^1 g'_x(t, x + \theta h)\, h\, d\theta,$$

поэтому

$$\omega(t, x, h) = \int_0^1 [g'_x(t, x + \theta h) - g'_x(t, x)]\, h\, d\theta.$$

Следовательно,

$$|\omega(t, x, h)| \leqslant q(r)\, |h| \qquad (|h| \leqslant r),$$

где

$$q(r) = \sup_{-\infty < t < \infty} \sup_{|x-y| \leqslant r;\, x,\, y \in \Omega} |g'_x(t, x) - g'_x(t, y)|, \qquad (11.20)$$

и в силу равномерной непрерывности $g'_x(t, x)$ по x

$$\lim_{r \to 0} q(r) = 0.$$

В силу теоремы 11.1 достаточно показать, что пп-оператор

$$L_* x = Lx - \alpha g'_x[t, x^*(t)]\, x \tag{11.21}$$

регулярен и устойчив.

Введем в рассмотрение вспомогательное семейство пп-операторов

$$L(\mu)\, x = \alpha Lx - \mu g'_x[t, x^*(t)]\, x, \tag{11.22}$$

где $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Из неравенства (10.25) вытекает, что

$$0 \leqslant g'_x[t, x^*(t)]\, x \leqslant A(t)\, x \quad (x \in K(t),\ -\infty < t < \infty). \tag{11.23}$$

Далее, поскольку спектральный радиус оператора (10.26) меньше 1, то существует такая пп-функция $x_0(t) \in B^m(R^n)$, что

$$x_0(t) \gg 0,\ \alpha L x_0(t) - A(t)\, x_0(t) \gg 0. \tag{11.24}$$

Сравнивая неравенства (11.23) и (11.24), получаем

$$L(\mu)\, x_0(t) \gg 0 \qquad (0 \leqslant \mu \leqslant 1). \tag{11.25}$$

Из неравенства (11.25) и из леммы 7.1 вытекает, что оператор $L(\mu)$ при всех $\mu \in [0, 1]$ положительно обратим. Регулярность и устойчивость пп-оператора (11.21) теперь следует из результатов п. 4.3.

Теорема доказана.

Теорема 11.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.5, *и пусть оператор* L *неустойчив.*

Тогда пп-решение $x^*(t) \in \langle u, v\rangle$ *уравнения* (11.17) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $\omega(t, x, h)$ — функция (11.19). Очевидно,

$$\omega(t, x, h_1) - \omega(t, x, h_2) = \\ = \int_0^1 \{g'_x[t, x + h_2 + \theta(h_1 - h_2)] - g'_x(t, x)\}(h_1 - h_2)\, d\theta.$$

Поэтому

$$|\omega(t, x, h_1) - \omega(t, x, h_2)| \leqslant q(r)\, |h_1 - h_2| \quad (|h_1|,\ |h_2| \leqslant r),$$

где $q(r)$ — функция (11.20). Последнее неравенство можно рассматривать как условие (11.12) теоремы 11.2.

Теперь остается повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 11.3.

Теорема доказана.

В силу рассуждений п. 11.3 в условиях теоремы 11.3 всегда $\alpha = 1$; в условиях теоремы 11.4 множитель α может быть равен как 1, так и -1.

11.5. Лемма о вогнутых операторах. Пусть K — некоторый телесный конус в банаховом пространстве E. Через W обозначим непрерывный оператор, определенный на K и дифференцируемый на внутренних элементах конуса K.

Оператор W назовем *вогнутым*, если неравенство

$$W(\tau x) \geqslant \tau W x \tag{11.26}$$

справедливо для всех $x \in K$ и $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Лемма 11.2. *Оператор W вогнут в том и только том случае, если*

$$Wx \geqslant W'(x)\,x \tag{11.27}$$

для всех $x \gg 0$.

Доказательство. Достаточность. Так как оператор W непрерывен, то неравенство (11.26) достаточно доказать для всех внутренних элементов x конуса K при $0 < \tau < 1$. Предположим, что неравенство (11.26) не выполнено для некоторого внутреннего элемента x_0 конуса K при некотором $\tau_0 \in (0, 1)$. Это значит, что элемент $y_0 = W(\tau_0 x_0) - \tau_0 W(x_0)$ не является точкой конуса K. Поэтому (см., например, Н. Данфорд и Дж. Шварц [1]) существует непрерывный линейный функционал l такой, что $l(y_0) < 0$ и $l(x) \geqslant 0$ при любом $x \in K$. Составим вспомогательную скалярную функцию

$$\gamma(\tau) = l\left[\frac{1}{\tau} W(\tau x_0) - W(x_0)\right] \qquad (0 < \tau \leqslant 1).$$

Эта функция очевидным образом дифференцируема и

$$\gamma'(\tau) = -\frac{l\,[W(\tau x_0) - W'(\tau x_0)\,\tau x_0]}{\tau^2}.$$

Из неравенства (11.27) получаем $\gamma'(\tau) \leqslant 0$ $(0 < \tau \leqslant 1)$. Следовательно,

$$\gamma(\tau_0) \geqslant \gamma(1) = 0.$$

С другой стороны, $\gamma(\tau_0)=\frac{1}{\tau_0}l(y_0)<0$, и мы пришли к противоречию.

Необходимость. Допустим, что при некотором $x_0 \gg 0$ элемент

$$z_0 = Wx_0 - W'(x_0)x_0$$

не принадлежит K и в то же время выполнены неравенства

$$W(\tau x_0) \geqslant \tau W x_0 \qquad (0<\tau\leqslant 1). \tag{11.28}$$

Как и выше, определим такой линейный функционал l_1, который на элементе z_0 принимает отрицательное значение, а на всем K — неотрицательные значения. Неравенство $l_1(z_0)<0$ означает, что производная функции

$$\gamma_1(\tau)=l_1\left[\frac{1}{\tau}W(\tau x_0)-Wx_0\right]$$

при $\tau=1$ положительна. Следовательно, при значениях τ, близких к 1 и меньших 1, функция $\gamma_1(\tau)$ принимает значения меньшие, чем $\gamma_1(1)$, т. е. принимает отрицательные значения. Это противоречит неравенствам (11.28).

Лемма доказана.

11.6. Устойчивость пп-решений уравнений с вогнутыми нелинейностями. Изучим вопрос об устойчивости положительного пп-решения $x^*(t)$ уравнения (11.17) в условиях теорем 10.6 и 10.7. Как и в п. 11.4, будем дополнительно предполагать, что функция $g(t, x)$ непрерывно дифференцируема по x в некоторой окрестности Ω значений пп-решения $x^*(t)$ и что ее производная $g'_x(t, x)$ равномерно непрерывна по $x\in\Omega$ относительно $t\in(-\infty, \infty)$. Из леммы 11.2 тогда вытекает, что

$$g(t, x)-g'_x(t, x)x\in K(t) \quad (x\in\Omega,\ -\infty<t<\infty). \tag{11.29}$$

Ниже мы будем считать, что при некотором t_0 и всех $x\in\Omega$

$$g(t_0, x)-g'_x(t_0, x)x\neq 0. \tag{11.30}$$

Теорема 11.5. *Пусть выполнены условия одной из теорем* 10.6 *или* 10.7. *Пусть оператор L устойчив.*

Тогда положительное пп-решение $x^*(t)$ уравнения (11.17) экспоненциально устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Поскольку пп-оператор L устойчив и его функция Грина $G(t, s)$ сильно положительна по отношению к телесной конусной пп-функции $K(t)$, то (см. п. 11.3) $\alpha = 1$. Поэтому для доказательства нам достаточно установить (см. теорему 11.1), что оператор

$$\underset{*}{L}x = Lx - g'_x[t, x^*(t)]\,x \tag{11.31}$$

регулярен и устойчив.

Пусть $f(t)$ — произвольная функция из $B(R^n)$. Рассмотрим задачу о пп-решениях для дифференциального уравнения

$$Lx - g'_x[t, x^*(t)]\,x = f(t). \tag{11.32}$$

Очевидно, эта задача эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$x - S_0 x = f_0 \tag{11.33}$$

в пространстве $B(R^n)$, где

$$S_0 x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\, g'_x[s, x^*(s)]\, x(s)\, ds$$

и

$$f_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds.$$

Положим

$$f^*(t) = Lx^*(t) - g'_x[t, x^*(t)]\,x^*(t) = \\ = g[t, x^*(t)] - g'_x[t, x^*(t)]\,x^*(t).$$

Из условий (11.29) и (11.30) вытекает, что $f^*(t)$ — ненулевая пп-функция из конуса $\widehat{K}(t)$. Поэтому

$$x^*(t) - S_0 x^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f^*(s)\, ds \gg 0. \tag{11.34}$$

Отметим еще, что $x^*(t) \gg 0$ и что оператор S_0 положителен на $\widehat{K}(t)$. Следовательно (см. теорему 5.1), спектральный радиус оператора S_0 меньше единицы.

Таким образом, операторное уравнение (11.33) однозначно разрешимо, и поэтому пп-оператор (11.31) регулярен.

Из предыдущих рассуждений очевидным образом вытекает регулярность всех пп-операторов

$$L(\mu)x = Lx - \mu g'_x[t, x^*(t)]x \qquad (0 \leqslant \mu \leqslant 1).$$

Отсюда и из результатов п. 4.3 следует устойчивость оператора (11.31).

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 11.6. *Пусть выполнены условия одной из теорем* 10.6 *или* 10.7. *Пусть оператор* L *неустойчив.*

Тогда положительное пп-решение $x^*(t)$ *уравнения* (11.17) *неустойчиво.*

11.7. Устойчивость в конусе решений систем первого порядка с вогнутыми нелинейностями. В теории устойчивости (см., например, А. И. Лурье [1], Н. Н. Красовский [1], Е. А. Барбашин [1], В. А. Плисс [1], С. Лефшец [1], М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер [1] и др.) решений дифференциальных уравнений важную роль играет оценка той области в фазовом пространстве, при начальных значениях из которой решения асимптотически приближаются к изучаемому решению $x^*(t)$. Если упомянутая область совпадает со всем пространством, то решение $x^*(t)$ называют *устойчивым в целом.*

Целью настоящего пункта является доказательство того факта, что для систем

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = g(t, x) \tag{11.35}$$

первого порядка в условиях теоремы 10.6 к положительному пп-решению $x^*(t)$ асимптотически приближаются при $t \to \infty$ все решения $x(t)$, начальные значения которых принадлежат $K_{\text{вп}}(0)$. Если указанный факт имеет место, то решение $x^*(t)$ будем называть *устойчивым в конусе* $K(0)$.

Установим сначала одну общую лемму, относящуюся к уравнению

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t, x), \tag{11.36}$$

где в правой части стоит произвольная непрерывная по совокупности переменных функция, положительная на $K(t)$: $f(t,x) \in K(t)$ при $x \in K(t)$ $(-\infty < t < \infty)$.

Лемма 11.3. *Пусть оператор $U(t,s)$ сдвига по траекториям уравнения*

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = 0 \tag{11.37}$$

положителен относительно телесной конусной пп-функции $K(t)$.

Тогда при любом начальном условии $x(s) = x \in K(s)$ уравнение (11.36) *имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее условию*

$$x(t) \in K(t) \tag{11.38}$$

для всех $t \geqslant s$, при которых оно определено.

Доказательство. Положим

$$P(t)x = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \in K(t), \\ q_0(t, x)x_0(t) + x, & \text{если} \quad x \notin K(t), \end{cases}$$

где $q_0(t, x)$ — функционал (5.32):

$$q_0(t, x) = \min_{x + r x_0(t) \in K(t)} r.$$

Здесь $x_0(t)$ — некоторая пп-функция, принадлежащая внутренности конуса $\hat{K}(t)$. Напомним (см. п. 5.5), что функционал $q_0(t, x)$ удовлетворяет по x условию Липшица с постоянной, не зависящей от t, и при каждом фиксированном x почти периодичен по t.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} + A(t)y = f[t, P(t)y]. \tag{11.39}$$

Пусть x — некоторый элемент конуса $K(s)$. Обозначим через $y(t)$ какое-либо решение уравнения (11.39) с начальным условием $y(s) = x$. Имеем

$$y(t) = U(t, s)x + \int_s^t U(t, \sigma) f[\sigma, P(\sigma)y(\sigma)]\, d\sigma. \tag{11.40}$$

Поскольку $P(t)y(t) \in K(t)$, то из (11.40) вытекает, что $y(t) \in K(t)$ при $t \geqslant s$. Но тогда $y(t)$ является решением уравнения (11.36), удовлетворяющим начальному значению $y(s) = x$.

Лемма доказана.

Вернемся к изучению уравнения (11.35). Ниже предполагается, что выполнены условия теоремы 10.6.

Для простоты будем считать, что каждому начальному условию из $K_{\text{вн}}(s)$ отвечает единственное (на некотором промежутке) решение уравнения (11.35).

Лемма 11.4. *Пусть $x(t)$ — решение уравнения* (11.35), *и пусть $x(s) \in K_{\text{вн}}(s)$.*

Тогда при всех тех $t > s$, при которых $x(t)$ определено, $x(t) \in K_{\text{вн}}(t)$.

Доказательство. При близких к s значениях t включение $x(t) \in K_{\text{вн}}(t)$ очевидно.

Если утверждение леммы неверно, то найдется такое первое значение $t_0 > s$, что $x(t_0) \in K(t_0)$, но $x(t_0) \overline{\in} K_{\text{вн}}(t_0)$. Из равенства

$$x(t) = U(t, s)\, x(s) + \int_s^t U(t, \sigma)\, g[\sigma, x(\sigma)]\, d\sigma$$

вытекает неравенство

$$x(t) \geqslant U(t, s)\, x(s) \qquad (s \leqslant t \leqslant t_0).$$

Но положительный при $t > s$ оператор $U(t, s)$ преобразует внутренние точки конуса $K(s)$ во внутренние точки конуса $K(t)$. Поэтому $x(t_0) \in K_{\text{вн}}(t_0)$. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Из леммы 11.4 вытекает, что каждому начальному значению из $K_{\text{вн}}(s)$ отвечает единственное при всех тех $t \geqslant s$, при которых оно определено, решение уравнения (11.35).

Лемма 11.5. *Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два решения уравнения* (11.35), *удовлетворяющие условиям*

$$x_1(s),\ x_2(s) \in K_{\text{вн}}(s), \quad x_2(s) - x_1(s) \in K(s).$$

Тогда при тех $t > s$, при которых определены оба решения, выполнено неравенство $x_1(t) \leqslant x_2(t)$, т. е.

$$x_2(t) - x_1(t) \in K(t) \qquad (t \geqslant s).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$y(t) = x_2(t) - x_1(t) \qquad (t \geqslant s).$$

Она будет решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} + A(t)\,y = g[t, x_1(t) + y] - g[t, x_1(t)], \qquad (11.41)$$

удовлетворяющим начальному условию

$$y(s) = x_2(s) - x_1(s).$$

В силу леммы 11.3 у уравнения (11.41) есть решение $y_0(t)$, удовлетворяющее тому же начальному условию

$$y_0(s) = x_2(s) - x_1(s)$$

и такое, что

$$y_0(t) \in K(t) \qquad (t \geqslant s).$$

Тогда функция

$$x_0(t) = y_0(t) + x_1(t)$$

будет решением уравнения (11.35), удовлетворяющим начальному условию $x_0(s) = x_2(s)$. Из единственности решений уравнения (11.35), удовлетворяющих начальным условиям из $K_{\text{вн}}(s)$, вытекает, что $x_0(t) \equiv x_2(t)$, откуда $y_0(t) \equiv y(t)$. Следовательно,

$$y(t) \in K(t) \qquad (t \geqslant s).$$

Лемма доказана.

Лемма 11.6. *Пусть $x_1(t)$ — решение уравнения (11.35) с начальным условием $x_1(s)$ из $K_{\text{вн}}(s)$. Пусть $x_2(t)$ — решение этого же уравнения с начальным условием $x_2(s) = \tau x_1(s)$, где $\tau \in (0, 1)$.*

Тогда при тех $t \geqslant s$, при которых оба решения определены, выполнено неравенство $x_2(t) \geqslant \tau x_1(t)$, т. е.

$$x_2(t) - \tau x_1(t) \in K(t) \qquad (t \geqslant s).$$

Для доказательства нужно ввести в рассмотрение функцию

$$y(t) = x_2(t) - \tau x_1(t) \qquad (t \geqslant s)$$

и заметить, что она является решением уравнения

$$\frac{dy}{dt} + A(t)\,y = \{g[t, \tau x_1(t) + y] - g[t, \tau x_1(t)]\} + \\ + \{g[t, \tau x_1(t)] - \tau g[t, x_1(t)]\}, \qquad (11.42)$$

удовлетворяющим нулевому начальному условию при $t = s$. Правая часть уравнения (11.42) в силу монотонности и вогнутости по x функции $g(t, x)$ является положительной функцией. Поэтому интересующее нас утверждение вытекает из леммы 11.3.

Пусть $x^*(t)$ — существующее в силу теоремы 10.6 строго положительное пп-решение уравнения (11.35). Для каждой точки $x \in K_{\text{вн}}(s)$ найдутся такие положительные постоянные α и β, что

$$\alpha x^*(s) \leqslant x \leqslant \beta x^*(s). \tag{11.43}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha < 1$ и $\beta > 1$. Обозначим через $x(t)$ решение уравнения (11.35), удовлетворяющее начальному значению $x(s) = x$.

Из леммы 11.5 вытекают неравенства

$$x_1(t) \leqslant x(t) \leqslant x_2(t) \qquad (t \geqslant s),$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — решения уравнения (11.35), удовлетворяющие соответственно начальным условиям

$$x_1(s) = \alpha x^*(s), \qquad x_2(s) = \beta x^*(s).$$

Из леммы 11.6 вытекают неравенства

$$\alpha x^*(t) \leqslant x_1(t), \qquad x_2(t) \leqslant \beta x^*(t) \qquad (t \geqslant s),$$

поэтому

$$\alpha x^*(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta x^*(t) \qquad (t \geqslant s). \tag{11.44}$$

Нам понадобится в этом пункте семейство норм $|x|_t$ $(-\infty < t < \infty)$ в R^n, определенных формулой (6.80). Напомним, что норма $|x|_t$ определялась равенством

$$|x|_t = \inf\{\mu\colon -\mu x^*(t) \leqslant x \leqslant \mu x^*(t)\} \quad (-\infty < t < \infty). \tag{11.45}$$

Из строгой положительности пп-функции $x^*(t)$ вытекает (см. (6.81)) существование таких положительных постоянных m_1 и m_2, что

$$m_1|x| \leqslant |x|_t \leqslant m_2|x| \qquad (x \in R^n,\ -\infty < t < \infty). \tag{11.46}$$

Из оценок (11.44) и из (11.46) вытекает, что решение $x(t)$ равномерно ограничено по норме при $t \geqslant s$. Тогда (см., например, М. А. Красносельский [2]) решение $x(t)$ можно считать определенным при всех $t \in [s, \infty)$.

Оператором сдвига $V(t, s)$ $(t \geqslant s)$ *по траекториям нелинейного уравнения* (11.35) называют оператор, который ставит в соответствие каждой точке x точку $x(t)$, где $x(t)$ — решение уравнения при начальном условии $x(s) = x$:

$$V(t, s)x = x(t) \qquad (t \geqslant s). \tag{11.47}$$

Оператор сдвига определен при всех $t \geqslant s$ в тех точках x, через которые проходит единственная траектория уравнения (11.35), определенная при всех $t \geqslant s$.

Из проведенных выше рассуждений вытекает, что в наших условиях оператор сдвига $V(t, s)$ $(t \geqslant s)$ определен на $K_{\text{вн}}(s)$. При этом оператор сдвига положителен на $K_{\text{вн}}(s)$ $(V(t, s)K_{\text{вн}}(s) \subset K_{\text{вн}}(t)$ при $t > s)$, в силу леммы 11.5 он монотонен (из $x_1, x_2 \in K_{\text{вн}}(s)$ и $x_2 - x_1 \in K(s)$ вытекает, что $V(t, s)x_2 - V(t, s)x_1 \in K(t)$ при $t \geqslant s)$, в силу леммы 11.6 он вогнут (при $x \in K_{\text{вн}}(s)$ и $0 < \tau < 1$ справедливо включение $V(t, s)(\tau x) - \tau V(t, s)x \in K(t)$, если $t \geqslant s)$. Из обычных теорем о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных значений и от параметров вытекает, что $V(t, s)x$ $(-\infty < s \leqslant t < \infty,\ x \in K_{\text{вн}}(s))$ непрерывно зависит от всех переменных.

Лемма 11.7. *Оператор* $V(t, s)$ *равномерно вогнут в следующем смысле: существует такое положительное число* Δ, *что при любых* α, β $(0 < \alpha < \beta)$ *и любых* a, b $(0 < a < b < 1)$ *из*

$$\alpha x^*(s) \leqslant x \leqslant \beta x^*(s) \tag{11.48}$$

и из

$$a \leqslant \tau \leqslant b \tag{11.49}$$

вытекает справедливость при $t - s \geqslant \Delta$ *неравенств*

$$V(t, s)(\tau x) \geqslant (1 + \xi)\tau V(t, s)x, \tag{11.50}$$

где

$$\xi = \xi(\alpha, \beta;\ a, b) > 0. \tag{11.51}$$

Доказательство. Пусть x и τ удовлетворяют условиям (11.48) и (11.49). Положим

$$h(t, s) = V(t, s)(\tau x) - \tau V(t, s)x.$$

Функция $h(t, s)$ является (см. доказательство леммы 11.6) решением интегрального уравнения

$$h(t, s) = \\ = \int_s^t U(t, \sigma)\{g[\sigma, \tau V(\sigma, s)x + h(\sigma, s)] - g[\sigma, \tau V(\sigma, s)x]\}\, d\sigma + \\ + \int_s^t U(t, \sigma)\{g[\sigma, \tau V(\sigma, s)x] - \tau g[\sigma, V(\sigma, s)x]\}\, d\sigma.$$

Из монотонности функции $g(t, x)$ тогда вытекает, что при $t \geqslant s$

$$h(t, s) \geqslant \int_s^t U(t, \sigma)\{g[\sigma, \tau V(\sigma, s)x] - \tau g[\sigma, V(\sigma, s)x]\}\, d\sigma. \tag{11.52}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha < 1$ и $\beta > 1$. Тогда из лемм 11.5 и 11.6 вытекают неравенства

$$\alpha x^*(t) \leqslant V(t, s)x \leqslant \beta x^*(t). \tag{11.53}$$

Поэтому из равномерной относительно t вогнутости по переменной x функции $g(t, x)$ вытекает существование такого положительного $\eta = \eta(\alpha, \beta; a, b)$, что

$$g[t, \tau V(t, s)x] \geqslant (1 + \eta)\tau g[t, V(t, s)x] \qquad (t \geqslant s).$$

Следовательно, из (11.52) вытекает неравенство

$$h(t, s) \geqslant \eta\tau \int_s^t U(t, \sigma)\, g[\sigma, V(\sigma, s)x]\, d\sigma$$

и в силу (11.53)

$$h(t, s) \geqslant \alpha\eta\tau \int_s^t U(t, \sigma)\, g[\sigma, x^*(\sigma)]\, d\sigma. \tag{11.54}$$

Так как в условиях доказываемой леммы функция Грина $G(t, s)$ оператора

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)x$$

неотрицательна, то в силу леммы 6.1

$$G(t, s) = \begin{cases} U(t, s) & \text{при} \quad t \geqslant s, \\ 0 & \text{при} \quad t < s. \end{cases}$$

Поэтому

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t, \sigma)\, g[\sigma, x^*(\sigma)]\, d\sigma$$

и из (11.54) вытекает, что при $t \geqslant s$

$$h(t, s) \geqslant \alpha\eta\tau \left\{ x^*(t) - \int_{-\infty}^{s} U(t, \sigma)\, g[\sigma, x^*(\sigma)]\, d\sigma \right\}. \qquad (11.55)$$

Так как

$$|U(t, \sigma)| \leqslant M e^{-\gamma(t-\sigma)} \qquad (t \geqslant \sigma),$$

где M, $\gamma > 0$, то при $t - s \geqslant \Delta$

$$\left| \int_{-\infty}^{s} U(t, \sigma)\, g[\sigma, x^*(\sigma)]\, d\sigma \right| \leqslant M_1 e^{-\gamma\Delta}, \qquad (11.56)$$

где

$$M_1 = \frac{M}{\gamma} \sup_{-\infty < t < \infty} |g[t, x^*(t)]|.$$

Из (11.56) вытекает, что при достаточно большом Δ выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^{s} U(t, \sigma)\, g[\sigma, x^*(\sigma)]\, d\sigma \leqslant \delta x^*(t) \qquad (t \geqslant s + \Delta),$$

где $\delta < 1$. Тогда из (11.55) вытекает, что при $t - s \geqslant \Delta$

$$h(t, s) \geqslant \alpha\eta\tau(1 - \delta)\, x^*(t).$$

Отсюда и из (11.53) вытекает справедливость (11.50) при

$$\xi = \frac{\alpha\eta(1 + \delta)}{\beta}.$$

Лемма доказана.

Перейдем к основному результату пункта.

Теорема 11.7. *Пусть для уравнения* (11.35) *выполнены условия теоремы* 10.6.

Тогда существующее в условиях этой теоремы положительное пп-решение $x^*(t)$ уравнения (11.35) *устойчиво в конусе* $K(0)$.

Доказательство. Обозначим через $x_1(t)$ решение уравнения (11.35), удовлетворяющее начальному условию

$$x_1(0) = \alpha_0 x^*(0),$$

где $0 < \alpha_0 < 1$. Из лемм 11.5 и 11.6 вытекает, что

$$\alpha_0 x^*(t) \leqslant x_1(t) \leqslant x^*(t) \qquad (t \geqslant 0).$$

Обозначим через $\alpha(t)$ наибольшее α, при котором выполнено неравенство $\alpha x^*(t) \leqslant x_1(t)$. Тогда

$$\alpha(t)\, x^*(t) \leqslant x_1(t) \leqslant x^*(t) \qquad (t \geqslant 0). \tag{11.57}$$

Функция $\alpha(t)$ не убывает (можно показать, что она непрерывна и строго возрастает, но эти ее свойства использованы не будут).

Положим

$$\alpha_1 = \lim_{t \to \infty} \alpha(t)$$

и покажем, что $\alpha_1 = 1$. В предположении противного из леммы 11.7 вытекает, что при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$x^*(k\Delta) \geqslant x_1(k\Delta) \geqslant (1 + \xi_0)^k \cdot \alpha_0 x^*(k\Delta),$$

где $\xi_0 = \xi(\alpha_0, 1; \alpha_0, \alpha_1) > 0$ и, следовательно, при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$(1 + \xi_0)^k \alpha_0 \leqslant \alpha_1.$$

Мы пришли к противоречию.

Итак, $\alpha_1 = 1$. Тогда из (11.57) вытекает, что

$$\lim_{t \to \infty} | x_1(t) - x^*(t) | = 0. \tag{11.58}$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{t \to \infty} | x_2(t) - x^*(t) | = 0, \tag{11.59}$$

где $x_2(t)$ — решение уравнения (11.35), удовлетворяющее начальному условию

$$x_2(0) = \beta_0 x^*(0),$$

где $\beta_0 > 1$.

Рассмотрим теперь произвольное решение $x(t)$ уравнения (11.35) с начальным условием из $K_{\text{вн}}(0)$. Выберем α_0 и β_0 $(0<\alpha_0<1<\beta_0)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha_0 x^*(0) \leqslant x(0) \leqslant \beta_0 x^*(0). \tag{11.60}$$

Тогда из монотонности оператора $V(t, s)$ будет вытекать, что

$$x_1(t) \leqslant x(t) \leqslant x_2(t) \qquad (t \geqslant 0),$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — соответствующие решения уравнения (11.35), для которых доказаны равенства (11.58) и (11.59), поэтому

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*(t)| = 0. \tag{11.61}$$

Теорема доказана.

Отметим, что предел (11.61) равномерен относительно начальных условий $x(0)$, удовлетворяющих неравенствам (11.60).

11.8. Устойчивость в конусе решений систем высших порядков с вогнутыми нелинейностями. Рассмотрим уравнение

$$Lx \equiv \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x = g(t, x). \tag{11.62}$$

Ниже предполагается, что выполнены условия теоремы 10.6 и что оператор L устойчив. Напомним, что тогда функция Грина оператора L определяется формулой (11.16) и что она положительна относительно телесной конусной пп-функции $K(t)$, участвующей в формулировке теоремы 10.6.

Как обычно, запишем уравнение (11.62) в виде системы

$$\tilde{L}u \equiv \frac{du}{dt} + Q(t)u = \tilde{g}(t, u), \tag{11.63}$$

где

$$u = \{x, x', \ldots, x^{(m-1)}\},$$
$$\tilde{g}(t, u) = \{0, 0, \ldots, 0, g(t, x)\},$$

а

$$Q(t)=\begin{Vmatrix} 0 & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I \\ A_m(t) & A_{m-1}(t) & A_{m-2}(t) & \dots & A_1(t) \end{Vmatrix}.$$

Система (11.63) — это уравнение первого порядка в фазовом пространстве R^{mn}.

Обозначим через $U(t, s)$ действующий в R^{mn} оператор сдвига по траекториям однородного уравнения

$$\frac{du}{dt}+Q(t)u=0.$$

При изучении уравнения (11.63) нам будут удобны конусные функции $\tilde{K}(t)$, значениями которых являются телесные конусы в R^{mn}, обладающие следующими тремя свойствами:

1°. $U(t, s)\tilde{K}(s)\subset\tilde{K}(t)$ $(-\infty<s\leqslant t<\infty)$.

2°. Если $x\in K(t)$, то $\{0, 0, \dots, 0, x\}\in\tilde{K}(t)$.

3°. Если $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}\in\tilde{K}(t)$, то $u_1\in K(t)$.

Подчеркнем, что перечисленные свойства не содержат предположения о почти периодичности конусной функции $\tilde{K}(t)$.

Конусные функции $\tilde{K}(t)$, обладающие свойствами 1°—3°, можно конструировать различными способами. Приведем два основных.

Обозначим при каждом t через $\tilde{K}_{\max}(t)$ множество

$$\tilde{K}_{\max}(t)=\{u\colon\ [U(\sigma, t)u]_1\in K(\sigma)\quad\text{при}\quad\sigma\geqslant t\},\qquad(11.64)$$

где через $[v]_1$ обозначен вектор из R^n, образующий первую группу компонент у вектора $v\in R^{mn}$.

Через $\tilde{K}_{\min}(t)$ будем обозначать*) замыкание выпуклой оболочки конусов $U(t, \sigma)K_0(\sigma)$ $(-\infty<\sigma\leqslant t)$, где через $K_0(\sigma)$ обозначен конус в R^{mn}, состоящий из точек вида $u=\{0, 0, \dots, x\}$ $(x\in K(\sigma))$.

---

*) Аналогичные конусы для периодического случая введены в статье Ю. С. Колесова [2].

Легко проверить, что $\tilde{K}_{\min}(t)$ и $\tilde{K}_{\max}(t)$ являются телесными конусами, обладающими свойствами 1°—3°, и что

$$\tilde{K}_{\min}(t) \subset \tilde{K}_{\max}(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{11.65}$$

Более того, для любого другого конуса $\tilde{K}(t)$, обладающего свойствами 1°—3°, справедливы включения

$$\tilde{K}_{\min}(t) \subset \tilde{K}(t) \subset \tilde{K}_{\max}(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{11.66}$$

Ниже будет использован тот факт, что конусы $\tilde{K}_{\max}(t)$ *равномерно нормальны* в том смысле, что при каждом t из

$$u,\ v,\ v-u \in \tilde{K}_{\max}(t)$$

вытекает неравенство $|u| \leqslant N|v|$, где N не зависит от t.

В предположении противного найдутся такие последовательности чисел t_j и элементов $u_j,\ v_j \in \tilde{K}_{\max}(t_j)$, что $|u_j| = 1$, $|v_j| \to 0$, $v_j - u_j \in \tilde{K}_{\max}(t_j)$. Из определения конуса (11.64) вытекает, что при всех $t \geqslant 0$

$$[U(t+t_j,\ t_j)\,u_j]_1 \in K(t+t_j) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots) \tag{11.67}$$

и

$$[U(t+t_j,\ t_j)(v_j-u_j)]_1 \in K(t+t_j),\ (j=1,\ 2,\ \ldots). \tag{11.68}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность u_j сходится к некоторой точке u^* ($|u^*| = 1$), последовательности $A_i(t+t_j)$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$ равномерно сходятся к пп-матрицам $A_i^*(t)$, последовательность конусных пп-функций $K(t+t_j)$ сходится к конусной пп-функции $K^*(t)$. Из теоремы 4.4. вытекает, что последовательность $U(t+t_j,\ t_j)$ при $t \geqslant 0$ сходится к $U^*(t, 0)$, где $U^*(t, s)$ — оператор сдвига по траекториям уравнения

$$\frac{du}{dt} + Q^*(t)\,u = 0,$$

соответствующего уравнению

$$L^*x \equiv \frac{d^m x}{dt^m} + A_1^*(t)\,\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ \ldots\ + A_m^*(t)\,x = 0. \tag{11.69}$$

Переходя в (11.67) и (11.68) к пределу, получаем тождество

$$[U^*(t, 0)u^*]_1 = 0 \qquad (t \geqslant 0).$$

Но функция

$$x(t) = [U^*(t, 0)w]_1$$

является решением однородного уравнения (11.69) при любом $w \in R^{mn}$. Из теоремы единственности вытекает, что $u^* = 0$. Мы пришли к противоречию.

Нас будет интересовать устойчивость положительного пп-решения $x^*(t)$ уравнения (11.62), существование которого вытекает из теоремы 10.6. Иначе говоря, нас будет интересовать устойчивость пп-решения

$$u^*(t) = \{x^*(t), [x^*(t)]', \ldots, [x^*(t)]^{(m-1)}\}$$

уравнения (11.63). Отметим, что $u^*(t) \in K_{\min}(t)$ $(-\infty < t < \infty)$.

Теорема 11.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.6, *и пусть пп-оператор* L *устойчив. Пусть функция* $g(t, x)$ *удовлетворяет дополнительному ограничению: существует такое* t_0, *что*

$$g(t_0, x) \in K_{\text{вн}}(t_0) \qquad (x \in K_{\text{вн}}(t_0)). \qquad (11.70)$$

Тогда решение $u^*(t)$ *уравнения* (11.63) *устойчиво в конусе* $\tilde{K}_{\max}(0)$.

Для доказательства можно применить метод, которым мы доказали выше теорему 11.7. Нужно лишь заметить, что этот метод не использует почти периодичность соответствующей конусной функции. Свойства нелинейной функции $\tilde{g}(t, u)$ (положительность, монотонность и равномерная вогнутость) и общие свойства решений уравнения (11.63) устанавливаются так же, как в п.10. При завершении доказательства нужно лишь использовать равномерную нормальность конусов $\tilde{K}_{\max}(t)$ и тот факт, что исследуемое решение $u^*(t)$ при каждом t входит в конус $\tilde{K}_{\max}(t)$ с шаровой окрестностью некоторого фиксированного радиуса $r_0 > 0$.

Мы докажем более общий факт — что $u^*(t)$ при каждом t входит в конус $\tilde{K}_{\min}(t)$ с шаровой окрестностью некоторого фиксированного радиуса.

Допустим, что это не так. Тогда найдутся такие последовательности моментов времени t_j и элементов u_j, что

$$|u_j| \to 0, \quad u^*(t_j) + u_j \overline{\in} \tilde{K}_{\min}(t_j). \tag{11.71}$$

Поэтому можно построить такие векторы c_j, $|c_j| = 1$, что

$$(c_j, u^*(t_j) + u_j) < 0 \tag{11.72}$$

и

$$(c_j, u) \geqslant 0 \qquad (u \in \tilde{K}_{\min}(t_j)). \tag{11.73}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность c_j сходится:

$$\lim_{j \to \infty} c_j = c;$$

что последовательность пп-матриц $Q(t + t_j)$ равномерно сходится:

$$\lim_{j \to \infty} Q(t + t_j) = Q^*(t); \tag{11.74}$$

что последовательность пп-функций $\tilde{g}(t + t_j; u)$ равномерно относительно $t \in (-\infty, \infty)$ и относительно значений u из каждого шара сходится.

$$\lim_{j \to \infty} \tilde{g}(t + t_j, u) = \tilde{g}^*(t, u), \tag{11.75}$$

и что последовательность телесных конусных пп-функций $K(t + t_j)$ равномерно сходится к некоторой телесной конусной пп-функции $K^*(t)$.

Обозначим через $U^*(t, s)$ оператор сдвига по траекториям уравнения

$$\frac{du}{dt} + Q^*(t)\, u = 0.$$

Очевидно, при каждом $\sigma \leqslant 0$ последовательность конусов $U(t_j, t_j + \sigma) K_0(t_j + \sigma)$ сходится к конусу $U^*(0, \sigma) K_0^*(\sigma)$. Поэтому из неравенств (11.73) вытекает, что при $\sigma \leqslant 0$

$$(c, u) \geqslant 0 \qquad \big(u \in U^*(0, \sigma) K_0^*(\sigma)\big) \tag{11.76}$$

и, следовательно,

$$(c, u) \geqslant 0 \qquad \big(u \in K_{\min}^*(0)\big). \tag{11.77}$$

Из (11.74) и (11.75) вытекает, что последовательность пп-функций $u^*(t+t_j)$ равномерно сходится к пп-решению $u^{**}(t)$ уравнения

$$\frac{du}{dt}+Q^*(t)u=\tilde{g}^*(t,u). \tag{11.78}$$

Поэтому из равенства

$$u^{**}(t)=\int_{-\infty}^{t}U^*(t,\sigma)\tilde{g}(\sigma)\,d\sigma, \tag{11.79}$$

где

$$\tilde{g}(t)=\{0,\ldots,0,\ g^*[t,x^{**}(t)]\}$$

и

$$x^{**}(t)=\lim_{j\to\infty}x^*(t+t_j)\qquad(-\infty<t<\infty),$$

вытекает, что

$$u^{**}(t)\in\tilde{K}^*_{\min}(t)\qquad(-\infty<t<\infty).$$

Но тогда из (11.77) получаем

$$(c,\ u^{**}(0))\geqslant 0.$$

С другой стороны, из неравенств (11.72) следует, что

$$(c,\ u^{**}(0))\leqslant 0.$$

Поэтому

$$(c,\ u^{**}(0))=0,$$

откуда в силу (11.76) и (11.79) вытекает, что

$$(c,\ U^*(0,\sigma)\tilde{g}(\sigma))=0\qquad(\sigma\leqslant 0). \tag{11.80}$$

По предположению

$$g[t_0,\ x^*(t_0)]\in K_{\text{вн}}(t_0).$$

Из почти периодичности телесной конусной функции $K(t)$ и почти периодичности $g[t,x^*(t)]$ вытекает существование такого $t^*<0$, что

$$g^*[t^*,\ x^{**}(t^*)]\in K^*_{\text{вн}}(t^*).$$

Пусть Δ — достаточно малая окрестность точки t^*. Тогда найдется такое δ, что при всех $\sigma\in\Delta$

$$g^*[\sigma,\ x^{**}(\sigma)]+\delta x\in K^*_{\text{вн}}(\sigma)\qquad(x\in R^n,\ |x|\leqslant 1).$$

В силу (11.77) и (11.80)

$$(c,\ U^*(0,\ \sigma)\,\tilde{x}) = 0 \qquad (\sigma \in \Delta), \tag{11.81}$$

где

$$\tilde{x} = \{0,\ \ldots,\ 0,\ x\} \qquad (x \in R^n).$$

Тождество (11.81) перепишем в виде

$$(b,\ U^*(t^*,\ \sigma)\,\tilde{x}) \equiv 0 \qquad (\sigma \in \Delta,\ x \in R^n), \tag{11.82}$$

где

$$b = [U^*(0,\ t^*)]^*\, c = \{b_1,\ \ldots,\ b_m\}.$$

Полагая в (11.82) $\sigma = t^*$, получаем равенство

$$(b_m,\ x) \equiv 0 \qquad (x \in R^n), \tag{11.83}$$

откуда следует, что $b_m = 0$. Дифференцируя (11.82) по σ и полагая снова $\sigma = t^*$, получаем (с учетом (11.83)) равенство

$$(b_{m-1},\ x) \equiv 0 \qquad (x \in R^n),$$

откуда следует, что $b_{m-1} = 0$. Продолжая этот процесс, устанавливаем, что $b = 0$. Отсюда вытекает, что $c = 0$. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

В ряде случаев удается показать, что конусные функции $\tilde{K}_{\min}(t)$ и $\tilde{K}_{\max}(t)$ почти периодичны. Интересно было бы выяснить, имеет ли место этот факт в общем случае.

11.9. Устойчивость пп-решения относительно малых возмущений правой части уравнения. В заключение рассмотрим вкратце вопрос об устойчивости относительно малых возмущений правой части пп-решения $x^*(t)$ уравнения

$$\alpha L x = g(t, x)$$

с монотонной или вогнутой нелинейностью. При этом будем предполагать, что выполнены условия теорем

одного из пунктов 11.4 или 11.6. Напомним, что тогда пп-оператор

$$L_1 x = Lx - \alpha g'_x [t, x^*(t)] x \tag{11.84}$$

регулярен.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha Lx = g(t, x) + \mu f(t, x, x', \ldots, x^{(m-1)}), \tag{11.85}$$

где функция $f(t, x, y_1, \ldots, y_{m-1})$ почти периодична по t при фиксированных $x, y_1, \ldots, y_{m-1}$ и удовлетворяет условию Липшица (с независящей от t постоянной) по $x, y_1, \ldots, y_{m-1}$ в некоторой области пространства R^{mn}, содержащей значения вектор-функции $u^*(t) = \{x^*(t), [x^*(t)]', \ldots, [x^*(t)]^{(m-1)}\}$. Очевидно, при всех достаточно малых μ уравнение (11.85) имеет пп-решение $x^*(t; \mu)$, которое непрерывно по μ равномерно относительно $t \in (-\infty, \infty)$ и $x^*(t, 0) = x^*(t)$. Для доказательства можно, например, сначала перейти от уравнения (11.85) к соответствующему уравнению первого порядка в фазовом пространстве R^{mn}, а затем, пользуясь регулярностью пп-оператора первого порядка, который соответствует пп-оператору (11.84), перейти от него к интегральному уравнению и применить принцип сжатых отображений.

11.10. Примеры. В § 11 изучалась устойчивость пп-решений, существование которых было установлено в § 10. Полученные результаты позволяют провести более полный анализ примеров из п. 10.8.

В теоремах 10.8 и 10.9 без дополнительных предположений можно утверждать (в силу теоремы 11.7), что положительное пп-решение устойчиво в конусе K. Если предположить дополнительно, что правые части системы (10.54) достаточно гладкие, то (в силу теоремы 11.5) положительное пп-решение экспоненциально устойчиво.

Существующее в условиях теорем 10.10 и 10.11 положительное пп-решение в силу теоремы 11.6 неустойчиво в обе стороны изменения времени (для применения теоремы 11.6 нужно предположить, что нелинейности в уравнениях (10.62) достаточно гладкие).

Существующее в условиях теоремы 10.12 пп-решение $x^*(t)$ уравнения (10.68) экспоненциально устойчиво — для доказательства достаточно применить теорему 11.3.

Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.

Козьма Прутков

§ 12. Почти периодические колебания в системах автоматического регулирования

12.1. Вводные замечания. Исследованию колебаний в системах автоматического регулирования посвящена большая литература. Наибольшее внимание при этом было уделено вопросу об устойчивости в целом систем с единственным состоянием равновесия; здесь известны классические результаты А. И. Лурье, В. А. Плисса, Р. Калмана, В. М. Попова, В. А. Якубовича и др. (см., например, монографии М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [1], С. Лефшеца [1], обзорную статью Е. С. Пятницкого [1]). Вынужденным периодическим и почти периодическим колебаниям таких систем посвящено меньшее число работ; ограничимся ссылкой на важные работы Б. Н. Наумова и Я. З. Цыпкина [1], В. А. Якубовича [2, 3], М. А. Айзермана и В. А. Якубовича [1].

Изучение систем автоматического регулирования с несколькими состояниями равновесия только начинается; здесь можно отметить работы Р. К. Брэйтона и Ю. Мозера [1], Ю. Мозера [3].

В этом параграфе рассматриваются вынужденные пп-колебания некоторых систем автоматического регулирования с двумя или тремя состояниями равновесия: указываются условия существования таких колебаний, оценивается их число, изучается их устойчивость. Метод исследования основан на применениях развитой выше общей теории и на специальных конструкциях «конусного» характера.

12.2. Невозмущенная система автоматического регулирования. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_0\xi + d_1\varphi(\sigma), \\ \frac{dx}{dt} &= Bx + d\varphi(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

где

$$\sigma = c_1\xi + (c, x), \tag{12.2}$$

ξ — скалярная, а x — векторная переменные. В уравнениях (12.1) коэффициенты λ_0, d_1, c_1 — скаляры, B — постоянная квадратная матрица порядка m, d и c — векторы. Скалярную функцию $\varphi(\sigma)$ называют *характеристикой системы регулирования.* Как правило, функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию

$$\sigma\varphi(\sigma) \geqslant 0 \qquad (-\infty < \sigma < \infty). \tag{12.3}$$

Мы будем считать, что $\varphi(\sigma)$ непрерывна; поэтому $\varphi(0) = 0$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\lambda_0 < 0$ и что собственные значения λ матрицы B удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0. \tag{12.4}$$

Кроме этого будем предполагать выполненными неравенства

$$d_1 > 0, \qquad c_1 > 0, \tag{12.5}$$

$$(d, c) < 0, \tag{12.6}$$

$$(d, c) + d_1 c_1 \geqslant 0, \tag{12.7}$$

$$(Bd, c) - \lambda_0 (d, c) > 0 \tag{12.8}$$

и, наконец,

$$\operatorname{Re}\left(B^{-1}_{\lambda_0 + i\omega} d,\ c\right) < 0 \qquad (-\infty < \omega < \infty), \tag{12.9}$$

где

$$B_\mu = \mu I - B.$$

Предположения (12.4)—(12.9) выделяют частный (но достаточно широкий) класс систем автоматического регулирования; ниже будут рассмотрены и другие классы.

Из неравенств (12.6), (12.8) и (12.9) вытекает в силу теоремы 8.4 существование такой положительно определенной матрицы H, что

$$H(B - \lambda_0 I) + (B^* - \lambda_0 I) H < 0 \tag{12.10}$$

и

$$Hd + c = 0. \tag{12.11}$$

Положим

$$\rho = \sqrt{\frac{c_1}{d_1}} \tag{12.12}$$

и обозначим через K телесный конус в пространстве R^{m+1}, выделенный функционалом

$$q(\xi, x) = -\rho\xi + \sqrt{(Hx, x)}. \tag{12.13}$$

Сопряженный конус K^* по определению состоит из таких векторов $\{\eta, y\}$, что

$$\xi\eta + (x, y) \geqslant 0$$

при любых $\{\xi, x\}$, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{(Hx, x)} \leqslant \rho\xi.$$

Иначе говоря, $\{\eta, y\} \in K^*$ в том и только том случае, если

$$\xi\eta + \min_{\sqrt{(Hx, x)} \leqslant \rho\xi} (x, y) \geqslant 0.$$

Так как

$$\min_{\sqrt{(Hx, x)} \leqslant \rho\xi} (x, y) = \rho\xi \sqrt{(H^{-1}y, y)},$$

то $\{\eta, y\} \in K^*$ в том и только том случае, если

$$\xi\eta - \rho\xi \sqrt{(H^{-1}y, y)} \geqslant 0.$$

Следовательно, сопряженный конус K^* выделяется функционалом

$$q^*(\eta, y) = -\frac{1}{\rho}\eta + \sqrt{(H^{-1}y, y)}. \tag{12.14}$$

Для сокращения записи будем пользоваться обозначениями

$$\bar{B} = \begin{Vmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}, \qquad \bar{c} = \{c_1, c\}, \qquad \bar{d} = \{d_1, d\}. \tag{12.15}$$

Покажем, что $\bar{d} \in K$ и $\bar{c} \in K^*$. Для этого нужно доказать неравенства

$$\rho d_1 \geqslant \sqrt{(Hd, d)}, \qquad \frac{1}{\rho} c_1 \geqslant \sqrt{(H^{-1}c, c)},$$

которые в силу (12.12) можно переписать в виде

$$d_1 c_1 \geqslant (Hd, d), \qquad d_1 c_1 \geqslant (H^{-1}c, c).$$

Оба последних неравенства в силу (12.11) совпадают с неравенством (12.7).

Будем считать, что по каждому начальному значению

$$z(s) = z = \{\xi(s), x(s)\}$$

однозначно определяется решение

$$z(t) = \{\xi(t), x(t)\} = W(t, s)z \qquad (t \geqslant s)$$

системы (12.1). Так как нелинейная характеристика $\varphi(\sigma)$ может быть быстро растущей функцией, то мы не предполагаем, что все решения системы (12.1) нелокально продолжимы. В соответствии с этим оператор сдвига $W(t, s)$ по траекториям системы может быть определен не при всех $t > s$.

Для исследования сдвигов по траекториям системы (12.1) удобна

Лемма 12.1. *Пусть* $\{\xi(t), x(t)\}$ — *решение системы* (12.1).

Тогда функция

$$v(t) = \rho^2\xi^2(t) - (Hx(t), x(t)) \tag{12.16}$$

удовлетворяет при тех t, *при которых* $v(t) \leqslant 0$, *дифференциальному неравенству*

$$\frac{dv(t)}{dt} \geqslant 2\sigma(t)\varphi[\sigma(t)] + \varepsilon(x(t), x(t)), \tag{12.17}$$

где ε — *некоторое положительное число.*

Доказательство. Очевидно,

$$\frac{dv(t)}{dt} = 2\lambda_0\rho^2\xi^2(t) - ((B^*H + HB)x(t), x(t)) + 2\sigma(t)\varphi[\sigma(t)].$$

Если $v(t) \leqslant 0$, то

$$\lambda_0\rho^2\xi^2(t) \geqslant \lambda_0(Hx(t), x(t)).$$

Следовательно, при этих значениях t

$$\frac{dv(t)}{dt} \geqslant -([H(B - \lambda_0 I) + (B^* - \lambda_0 I)H]x(t), x(t)) + \\ + 2\sigma(t)\varphi[\sigma(t)].$$

Остается воспользоваться свойством (12.10) матрицы H.

Лемма доказана.

Из леммы 12.1 вытекает, что $W(t, s)z$ является при $t > s$ внутренней точкой конуса K, если $z \in K$ и $z \neq 0$.

Аналогично, операторы $W(t, s)$ при $t > s$ сильно положительны и относительно конуса $-K$, выделяемого функционалом

$$q_-(\xi, x) = \rho\xi + \sqrt{(Hx, x)}. \tag{12.18}$$

Очевидно, $W(t, s) = e^{\overline{B}(t-is)}$ при $\varphi(\sigma) \equiv 0$; поэтому линейные операторы $e^{\overline{B}t}$ $(t > 0)$ сильно положительны как относительно конуса K, так и относительно конуса $-K$.

Так как $\varphi(0) = 0$, то система (12.1) имеет нулевое состояние равновесия. Для исследования устойчивости этого состояния равновесия можно применить обычный метод Ляпунова — анализ устойчивости по первому приближению (см., например, Н. Н. Красовский [1]). Уравнения первого приближения также являются системами вида (12.1), в которых

$$\varphi(\sigma) = h\sigma; \tag{12.19}$$

из (12.3) вытекает, что $h \geqslant 0$. Если $\varphi(\sigma)$ имеет вид (12.19), то система (12.1) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_0\xi + d_1 h\sigma, \\ \frac{dx}{dt} &= Bx + dh\sigma \end{aligned}\right\} \tag{12.20}$$

или, что то же,

$$\frac{dz}{dt} = \overline{B}z + \bar{d}h(\bar{c}, z). \tag{12.21}$$

Обозначим через $D(h)$ $(h \geqslant 0)$ матрицу системы (12.21). Как нам известно, операторы $e^{D(h)t}$ при $t > 0$ сильно положительны относительно конуса K. Из известных теорем о сильно положительных линейных операторах (см., например, М. А. Красносельский [1]) вытекает, что *у каждой матрицы $D(h)$ есть такое простое вещественное собственное значение $\lambda_0(h)$, которое строго больше вещественных частей остальных ее собственных значений.*

Покажем, что

$$\lambda_0(h_1) < \lambda_0(h_2) \tag{12.22}$$

при $0 \leqslant h_1 < h_2$. Для этого вначале покажем, что при $t > 0$

$$e^{D(h_1)t}z \ll e^{D(h_2)t}z \qquad (h_1 < h_2;\ z \in K,\ z \neq 0). \tag{12.23}$$

Введем обозначения

$$z_1(t) = e^{D(h_1)t}z, \quad z_2(t) = e^{D(h_2)t}z, \quad u(t) = z_2(t) - z_1(t).$$

Очевидно,

$$\frac{du(t)}{dt} = D(h_2)u(t) + \bar{d}(h_2 - h_1)(\bar{c}, z_1(t)).$$

Поскольку $u(0) = 0$, то

$$u(t) = \int_0^t e^{D(h_2)(t-s)}\bar{d}(h_2 - h_1)(\bar{c}, z_1(s))\,ds,$$

откуда вытекает (12.23).

Обозначим через $g_0(h)$ лежащий в K собственный вектор матрицы $D(h)$, отвечающий собственному значению $\lambda_0(h)$. Из (12.23) вытекает неравенство

$$e^{D(h_1)t}g_0(h_2) \ll e^{\lambda_0(h_2)t}g_0(h_2) \qquad (t > 0).$$

Отсюда и из теоремы 5.1 вытекает, что спектральный радиус оператора $e^{D(h_1)t}$, который равен $e^{\lambda_0(h_1)t}$, строго меньше $e^{\lambda_0(h_2)t}$. Неравенство (12.22) доказано.

Положим

$$\alpha_0 = -(\overline{B}^{-1}\bar{d}, \bar{c}) = -(B^{-1}d, c) - \frac{d_1c_1}{\lambda_0}. \tag{12.24}$$

Так как

$$-\overline{B}^{-1} = \int_0^\infty e^{\overline{B}s}\,ds$$

и операторы $e^{\overline{B}s}$ $(s > 0)$ сильно положительны, то оператор $-\overline{B}^{-1}$ сильно положителен относительно конуса K; поэтому $\alpha_0 > 0$.

Легко проверить, что

$$\lambda_0(\alpha_0^{-1}) = 0. \tag{12.25}$$

Из строгой монотонности функции $\lambda_0(h)$ вытекает, что при $0 \leqslant h < \alpha_0^{-1}$ все собственные значения матрицы $D(h)$ лежат в левой полуплоскости, а при $h > \alpha_0^{-1}$ матрица $D(h)$ имеет одно положительное собственное значение, а остальные ее собственные значения лежат в левой полуплоскости.

Из проведенных рассуждений и из общих теорем Ляпунова (см., например, И. Г. Малкин [1]) вытекает

Теорема 12.1. *Пусть нелинейная характеристика* $\varphi(\sigma)$ *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности нуля.*

Если

$$\alpha_0\varphi'(0) < 1, \tag{12.26}$$

то нулевое решение системы (12.1) *экспоненциально устойчиво.*

Если

$$\alpha_0\varphi'(0) > 1 \tag{12.27}$$

или

$$\alpha_0\varphi'(0) = 1, \qquad \varphi''(0) \neq 0, \tag{12.28}$$

то нулевое решение системы (12.1) *неустойчиво.*

У системы (12.1) могут быть и ненулевые состояния равновесия. Для отыскания таких состояний равновесия нужно найти решения системы

$$\begin{gathered}\lambda_0\xi + d_1\varphi(\sigma) = 0,\\ Bx + d\varphi(\sigma) = 0,\\ \sigma = c_1\xi + (c, x),\end{gathered}$$

которую можно записать в виде

$$\begin{gathered}\overline{B}z + \bar{d}\varphi(\sigma) = 0,\\ \sigma = (\bar{c}, z).\end{gathered}$$

Для определения σ мы получаем скалярное уравнение

$$\sigma = \alpha_0\varphi(\sigma), \tag{12.29}$$

где α_0 определено равенством (12.24).

Если уравнение (12.29) имеет ненулевое решение σ_0, то система (12.1) имеет ненулевое состояние равновесия

$$z_0 = -\varphi(\sigma_0)\overline{B}^{-1}\bar{d} \tag{12.30}$$

или, что то же, состояние равновесия

$$\xi_0 = -\frac{d_1}{\lambda_0}\varphi(\sigma_0), \qquad x_0 = -\varphi(\sigma_0)B^{-1}d. \qquad (12.31)$$

Как уже отмечалось, оператор $-\overline{B}^{-1}$ сильно положителен относительно конуса K, а $\bar{d} \in K$. Поэтому каждое ненулевое состояние равновесия системы (12.1) лежит либо в K, либо в $-K$.

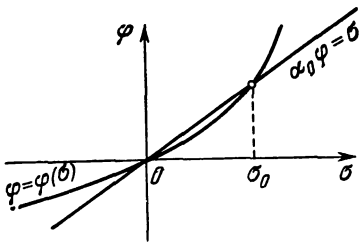

Рис. 12.1.

Исследование устойчивости ненулевого состояния равновесия (12.31) не представляет трудностей, если функция $\varphi(\sigma)$ монотонна. В этом случае можно применить теорему 12.1.

Проведем более подробно анализ системы (12.1) в случае, когда функция $\varphi(\sigma)$ выпукла. Для простоты будем считать (рис. 12.1), что $\varphi(\sigma)$ дважды непрерывно дифференцируема и

$$\varphi''(\sigma) > 0 \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \qquad (12.32)$$

причем

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} = \infty, \qquad \lim_{\sigma\to-\infty}\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} = 0. \qquad (12.33)$$

Примерами такой $\varphi(\sigma)$ могут служить функции $e^{\gamma\sigma} - 1$ $(\gamma > 0)$.

Будем предполагать, что нулевое состояние равновесия системы (12.1) устойчиво. Тогда в силу теоремы 12.1 выполнено неравенство (12.26). Отсюда и из (12.33) вытекает существование положительного решения σ_0 у уравнения (12.29). Ненулевое решение единственно в силу (12.32).

Из выпуклости $\varphi(\sigma)$ вытекает, что

$$\alpha_0\varphi'(\sigma_0) > 1.$$

Поэтому *стационарное состояние* (12.31) *неустойчиво.*

Можно дать общее описание расположения (рис. 12.2) интегральных кривых системы (12.1) в фазовом пространстве R^{m+1}. Существует состоящая из интегральных

кривых m-мерная поверхность Г, разделяющая R^{m+1} на две части R_1 и R_2. Все решения системы (12.1) с начальными значениями из R_1 при возрастании t стремятся к нулевому состоянию равновесия; все решения с начальными условиями из R_2 при возрастании t «уходят в бесконечность». Решения системы (12.1) с начальными условиями из Г полностью лежат на Г и при $t \to \infty$ асимптотически приближаются к ненулевому состоянию равновесия z_0.

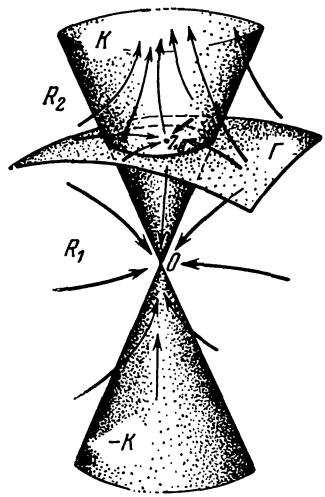

Рис. 12.2.

Мы не останавливаемся на доказательствах, так как они по существу содержатся в построениях следующих пунктов.

Если нулевое решение неустойчиво, причем выполнено неравенство (12.27), *то у системы* (12.1) *есть лежащее в* $-K$ *устойчивое состояние равновесия* z_0. При помощи замены $u = z - z_0$ можно перейти к уже рассмотренному случаю.

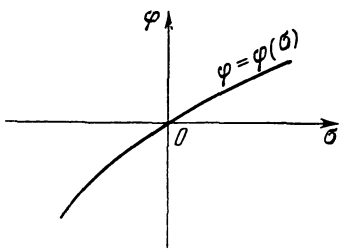

Рис. 12.3.

Если нелинейная характеристика $\varphi(\sigma)$ вогнута (см. рис. 12.3) в том смысле, что $\varphi'(\sigma) > 0$ и $\varphi''(\sigma) < 0$, то снова можно перейти к рассматриваемым случаям, если воспользоваться заменой $u = -z$.

В заключение заметим, что аналогично можно было бы изучить и системы с характеристиками такого вида, как на рис. 12.4.

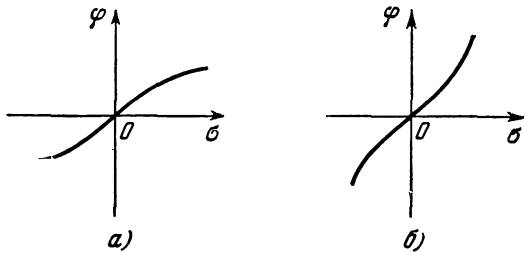

Рис. 12.4.

12.3. Существование устойчивого пп-решения у возмущенной системы. Рассмотрим возмущенную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_0\xi + d_1\varphi(\sigma) + f_1(t), \\ \frac{dx}{dt} &= Bx + d\varphi(\sigma) + f(t), \end{aligned}\right\} \tag{12.34}$$

где $f_1(t)$ и $f(t)$ — пп-функции (первая — скалярная и вторая — со значениями в R^m). Систему (12.34) удобно записывать в векторной форме

$$\frac{dz}{dt} = \overline{B}z + \bar{d}\varphi(\sigma) + \overline{f}(t), \tag{12.35}$$

где

$$\overline{f}(t) = \{f_1(t),\ f(t)\}. \tag{12.36}$$

В этом пункте нас будет интересовать существование у системы (12.34) устойчивого пп-решения. Этот вопрос для случая, когда невозмущенная система устойчива в целом, детально изучен в уже упоминавшихся работах В. А. Якубовича [2, 3].

Мы будем изучать систему (12.34) в предположении, что невозмущенная система удовлетворяет условиям п. 12.2. Иначе говоря, будем считать, что выполнены неравенства (12.4)—(12.9), что нелинейная характеристика $\varphi(\sigma)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям (12.3), (12.32) и (12.33). Кроме

этого будем предполагать, что нулевое состояние равновесия системы (12.1) устойчиво, т. е. выполнено неравенство (12.26).

Ясно, что при малых почти периодических возмущениях (12.36) у системы (12.34) есть устойчивое пп-решение. С другой стороны, легко привести такие возмущения (12.36), при которых у системы (12.34) нет пп-решений. Ниже мы укажем односторонние оценки возмущений (12.36), при которых у системы существует устойчивое пп-решение.

Рассмотрим функцию

$$\psi(\sigma) = \sigma - \alpha_0\varphi(\sigma)$$
$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

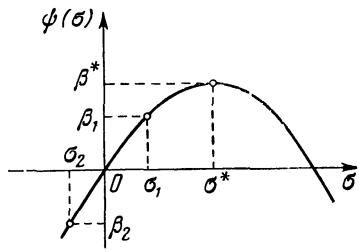

Рис. 12.5.

В силу (12.32) эта функция вогнута. Из (12.26) вытекает положительность ее значений при малых положительных σ, а из (12.33) вытекает равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty} \psi(\sigma) = -\infty.$$

Поэтому $\psi(\sigma)$ имеет единственную точку максимума (рис. 12.5); обозначим эту точку через σ^* и положим

$$\beta^* = \psi(\sigma^*) = \sigma^* - \alpha_0\varphi(\sigma^*).$$

Введем обозначение

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} (e^{\bar{B}(t-s)}\bar{f}(s), \bar{c})\, ds. \tag{12.37}$$

Теорема 12.2. *Пусть функция* (12.37) *удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{-\infty < t < \infty} g(t) < \beta^*. \tag{12.38}$$

Тогда возмущенная система (12.34) *имеет единственное пп-решение*

$$z^*(t) = \{\xi^*(t), x^*(t)\}, \tag{12.39}$$

удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \sigma^*(t) = \sup_{-\infty<t<\infty} (z^*(t), \bar{c}) < \sigma^*. \qquad (12.40)$$

Это пп-решение экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $B(R^1)$ скалярных пп-функций нелинейный интегральный оператор

$$\Pi\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} (e^{\bar{B}(t-s)}\bar{d}, \bar{c})\, \varphi[\sigma(s)]\, ds + g(t). \qquad (12.41)$$

Пусть $\sigma_1 < \sigma^*$ и σ_1 настолько близко к σ^* (см. рис. 12.5), что

$$\sup_{-\infty<t<\infty} g(t) < \beta_1, \qquad (12.42)$$

где

$$\beta_1 = \sigma_1 - \alpha_0\varphi(\sigma_1).$$

Тогда

$$\Pi\sigma_1 = \alpha_0\varphi(\sigma_1) + g(t) < \alpha_0\varphi(\sigma_1) + \beta_1 = \sigma_1 \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (12.43)$$

Пусть σ_2 — отрицательное настолько большое по абсолютной величине число, что

$$g(t) \geqslant \beta_2 \qquad (-\infty < t < \infty), \qquad (12.44)$$

где

$$\beta_2 = \sigma_2 - \alpha_0\varphi(\sigma_2).$$

Очевидно,

$$\Pi\sigma_2 = \alpha_0\varphi(\sigma_2) + g(t) \geqslant \alpha_0\varphi(\sigma_2) + \beta_2 = \sigma_2 \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (12.45)$$

Ядро $(e^{\bar{B}(t-s)}\bar{d}, \bar{c})$ интегрального оператора (12.41) положительно при $t > s$. Поэтому из монотонности $\varphi(\sigma)$ следует, что оператор (12.41) монотонен в $B(R^1)$ при полуупорядоченности по конусу неотрицательных функций. Из (12.43) и (12.45) вытекает, что этот оператор преобразует в себя конусный отрезок $\langle\sigma_2, \sigma_1\rangle$.

Покажем, что оператор (12.41) удовлетворяет условиям теоремы 10.2.

Пусть $\eta_1(t), \eta_2(t) \in B(R^1)$ и $\eta_1(t) \leqslant \eta_2(t) \leqslant \sigma_1$.

Тогда из выпуклости функции $\varphi(\sigma)$ вытекает, что

$$0 \leqslant \Pi\eta_2(t) - \Pi\eta_1(t) \leqslant S[\eta_2(t) - \eta_1(t)],$$

где

$$S\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} (e^{\bar{B}(t-s)}\bar{d}, \bar{c})\varphi'(\sigma_1)\eta(s)\,ds.$$

Линейный интегральный оператор S положителен, причем

$$\|S\|_{B(R^1)} = \alpha_0\varphi'(\sigma_1).$$

Так как $\sigma_1 < \sigma^*$ и $\alpha_0\varphi'(\sigma^*) = 1$, то

$$\alpha_0\varphi'(\sigma_1) < 1.$$

Следовательно, оператор Π удовлетворяет условиям теоремы 10.2. Из этой теоремы вытекает, что оператор Π имеет на конусном отрезке $\langle\sigma_2, \sigma_1\rangle$ единственную неподвижную точку $\sigma^*(t)$.

Из наших рассуждений вытекает, что $\sigma^*(t)$ — это единственная неподвижная точка оператора Π в множестве всех пп-функций $\sigma(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \sigma(t) < \sigma^*.$$

Построим по функции $\sigma^*(t)$ пп-решение уравнения (12.35). Для этого рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \bar{B}z + \bar{d}\varphi[\sigma^*(t)] + \bar{f}(t).$$

Оно имеет единственное пп-решение

$$z^*(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\bar{B}(t-s)}\{\bar{d}\varphi[\sigma^*(s)] + \bar{f}(s)\}\,ds.$$

Очевидно, $(z^*(t), \bar{c}) = \Pi\sigma^*(t)$, и поэтому

$$(z^*(t), \bar{c}) = \sigma^*(t).$$

Отсюда вытекает, что $z^*(t)$ — пп-решение уравнения (12.35).

Нам осталось показать, что решение $z^*(t)$ экспоненциально устойчиво. В силу теоремы 11.1 для этого достаточно показать, что пп-оператор

$$Lz = \frac{dz}{dt} - \overline{B}z - \bar{d}\varphi'[\sigma^*(t)](\bar{c}, z)$$

регулярен и устойчив. Для этого, в свою очередь (см. п. 4.3), достаточно установить регулярность всех пп-операторов

$$L(\mu)z = \frac{dz}{dt} - \overline{B}z - \mu\,\bar{d}\varphi'[\sigma^*(t)](\bar{c}, z) \quad (0 \leqslant \mu \leqslant 1), \tag{12.46}$$

так как оператор $L(0)$ устойчив очевидным образом.

Регулярность каждого оператора (12.46) означает, что уравнение

$$\frac{dz}{dt} - \overline{B}z = \mu\bar{d}\varphi'[\sigma^*(t)](\bar{c}, z) + \overline{f}(t) \tag{12.47}$$

имеет пп-решение при любой пп-функции $\overline{f}(t)$. Для построения этого решения перейдем к интегральному уравнению

$$z(t) = \mu \int_{-\infty}^{t} e^{\overline{B}(t-s)}\bar{d}\varphi'[\sigma^*(s)](\bar{c}, z(s))\,ds + \int_{-\infty}^{t} e^{\overline{B}(t-s)}\overline{f}(s)\,ds. \tag{12.48}$$

Чтобы найти решение уравнения (12.48), удобно вначале найти функцию $\sigma(t) = (z(t), \bar{c})$ из уравнения

$$\sigma(t) = \mu \int_{-\infty}^{t} (e^{\overline{B}(t-s)}\bar{d}, \bar{c})\,\varphi'[\sigma^*(s)]\,\sigma(s)\,ds + \int_{-\infty}^{t} (e^{\overline{B}(t-s)}\overline{f}(s), \bar{c})\,ds, \tag{12.49}$$

а затем определить $z(t)$ правой частью уравнения (12.48).

Чтобы установить разрешимость всех уравнений (12.49), достаточно показать, что норма линейного интегрального оператора

$$S_0\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} (e^{\overline{B}(t-s)}\bar{d}, \bar{c})\, \varphi'[\sigma^*(s)]\, \sigma(s)\, ds$$

меньше 1.

Оператор S_0 положителен относительно конуса неотрицательных функций и поэтому

$$\| S_0 \|_{B(R^1)} \leqslant \alpha_0 \varphi'(\sigma_1) < 1.$$

Теорема доказана.

12.4. Существование неустойчивого пп-решения у возмущенной системы. Продолжим изучение возмущенной системы (12.35).

Теорема 12.2 означала, что устойчивое состояние равновесия системы (12.1) при возмущениях, удовлетворяющих условию (12.38), переходит в устойчивое пп-решение системы (12.35). Как оказывается, неустойчивое состояние равновесия системы (12.1) при тех же возмущениях переходит в неустойчивое пп-решение возмущенной системы. Более того, оказывается, что у возмущенной системы нет других пп-решений. Соответствующие утверждения составляют содержание теоремы, доказываемой в настоящем пункте.

Теорема 12.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 12.2.

Тогда возмущенная система имеет кроме существующего в силу теоремы 12.2 *устойчивого пп-решения еще ровно одно пп-решение. Это второе пп-решение неустойчиво.*

Доказательство будет состоять из нескольких этапов.

Первый этап. При помощи замены

$$u = z - z^*(t), \tag{12.50}$$

где $z^*(t)$ — существующее в силу теоремы 12.2 устойчивое пп-решение возмущенной системы, перейдем от уравнения (12.35) к новому уравнению

$$\frac{du}{dt} = \overline{B}u + \bar{d}\chi(t, \sigma), \tag{12.51}$$

в котором

$$\chi(t, \sigma) = \varphi[\sigma + \sigma^*(t)] - \varphi[\sigma^*(t)] \tag{12.52}$$

и

$$\sigma = (u, \bar{c}). \tag{12.53}$$

Очевидно, для доказательства теоремы 12.3 достаточно показать, что у системы (12.51) есть одно и только одно ненулевое пп-решение и что это ненулевое пп-решение неустойчиво.

Второй этап. Покажем, что уравнение (12.51) имеет ограниченное на всей оси $(-\infty, \infty)$ решение $u^*(t)$, целиком лежащее в конусе K и удовлетворяющее неравенствам

$$r_0 \leqslant |u^*(t)| \leqslant r_1 \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{12.54}$$

где r_0 и r_1 — некоторые положительные числа.

Положим

$$\sigma_{\max} = \sup_{-\infty < t < \infty} \sigma^*(t).$$

В силу (12.40) $\sigma_{\max} < \sigma^*$, и поэтому

$$\alpha_0 \varphi'(\sigma_{\max}) < 1.$$

Выберем такое $\delta_0 > 0$, что $\delta_0 + \sigma_{\max} < \sigma^*$. Тогда при $-\infty < t < \infty$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \delta_0$ по формуле конечных приращений

$$\chi(t, \sigma) = \varphi'[\theta(t)\sigma + \sigma^*(t)]\sigma \leqslant \varphi'[\sigma + \sigma_{\max}]\sigma \leqslant \\ \leqslant \varphi'(\delta_0 + \sigma_{\max})\sigma,$$

откуда следует неравенство

$$\chi(t, \sigma) \leqslant (\alpha_0^{-1} - \varepsilon_0)\sigma \qquad (-\infty < t < \infty, \\ 0 \leqslant \sigma \leqslant \delta_0), \tag{12.55}$$

где ε_0 — некоторое положительное число.

Из (12.33) вытекает, что по любому $\varepsilon_1 > 0$ можно указать такое $\eta_1 > 0$, при котором

$$\chi(t, \sigma) \geqslant (\alpha_0^{-1} + \varepsilon_1)\sigma - \eta_1 \qquad (-\infty < t < \infty,\ \sigma \geqslant 0). \tag{12.56}$$

Рассмотрим теперь два линейных уравнения вида (12.21):

$$\frac{du}{dt} = \overline{B}u + \bar{d}(\alpha_0^{-1} - \varepsilon_0)\sigma \tag{12.57}$$

и

$$\frac{du}{dt} = \overline{B}u + \bar{d}(\alpha_0^{-1} + \varepsilon_1)\sigma. \tag{12.58}$$

Нулевое решение первого из них экспоненциально устойчиво, а второе имеет экспоненциально растущее решение.

Из неравенства (12.55) вытекает, что при $u \in K$ и $|\bar{c}| \cdot |u| \leqslant \delta_0$ выполнено конусное неравенство

$$\overline{B}u + \bar{d}\chi(t, \sigma) \leqslant \overline{B}u + \bar{d}(\alpha_0^{-1} - \varepsilon_0)\sigma \qquad (-\infty < t < \infty),$$

а из неравенства (12.56) — что при всех $u \in K$

$$\overline{B}u + \bar{d}\chi(t, \sigma) \geqslant \overline{B}u + \bar{d}(\alpha_0^{-1} + \varepsilon_1)\sigma - \bar{d}\eta_1 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Последние два неравенства являются условиями общего принципа существования положительного и отделенного от нуля ограниченного на всей оси решения $u^*(t)$, установленного в монографии М. А. Красносельского [2] (см. стр. 191, теорема 8.5). Правда, в указанной книге построения проведены для случая, когда K — конус векторов с неотрицательными координатами, но это обстоятельство нигде в доказательстве теоремы не использовалось. Из этого общего принципа вытекает существование ограниченного решения, удовлетворяющего неравенствам (12.54).

Третий этап. Пусть

$$u_1(t) = \{\xi_1(t), x_1(t)\}, \qquad u_2(t) = \{\xi_2(t), x_2(t)\}$$

— два ограниченных на всей оси решения системы (12.51). Покажем, что точки $u_1(0)$ и $u_2(0)$ сравнимы по конусу K, т. е. покажем, что либо $u_2(0) - u_1(0) \in K$, либо $u_1(0) - u_2(0) \in K$.

Предположим противное.

Введем обозначения

$$\eta(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t), \quad y(t) = x_1(t) - x_2(t),$$
$$\sigma_1(t) = (u_1(t), \bar{c}), \quad \sigma_2(t) = (u_2(t), \bar{c}), \quad \sigma(t) = \sigma_1(t) - \sigma_2(t),$$
$$\chi_0(t, \sigma) = \chi[t, \sigma_2(t) + \sigma] - \chi[t, \sigma_2(t)].$$

Тогда

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_0\eta + d_1\chi_0(t, \sigma),$$

$$\frac{dy}{dt} = By + d\chi_0(t, \sigma).$$

Рассмотрим скалярную функцию

$$w(t) = \rho^2\eta^2(-t) - (Hy(-t),\ y(-t)) \qquad (0 \leqslant t < \infty),$$

где постоянная ρ определена равенством (12.12), а симметрическая положительно определенная матрица H удовлетворяет условиям (12.10) и (12.11).

Очевидно,

$$\frac{dw}{dt} = -2\rho^2\lambda_0\eta^2(-t) + ((HB + B^*H)y(-t),\ y(-t)) - \\ - 2\{\rho^2\eta(-t)d_1 + (Hd,\ y(-t))\}\chi_0[-t,\ \sigma(-t)],$$

откуда в силу (12.12) и (12.11)

$$\frac{dw}{dt} = -2\rho^2\lambda_0\eta^2(-t) + ((HB + B^*H)y(-t),\ y(-t)) - \\ - 2\sigma(-t)\chi_0[-t,\ \sigma(-t)]. \qquad (12.59)$$

Допустим, что $w(t) < 0$ при некотором $t \geqslant 0$. Тогда из (12.59) вытекает, что при этом значении t

$$\frac{dw}{dt} < ([H(B + \lambda_0 I) + (B^* + \lambda_0 I)H]y(-t),\ y(-t)) - \\ - 2\sigma(-t)\chi_0[-t,\ \sigma(-t)] \qquad (12.60)$$

и в силу (12.10) при этом значении t

$$\frac{dw}{dt} < 0.$$

Так как по предположению $w(0) < 0$, то из проведенных рассуждений вытекает, что $w(t) < 0$ при всех $t \geqslant 0$ и что неравенство (12.60) выполнено также при всех $t \geqslant 0$. Отсюда следует, что $w'(t) < 0$ при всех $t \geqslant 0$. Поэтому функция $w(t)$ убывает. В частности,

$$w(t) \leqslant w(0) < 0 \qquad (t \geqslant 0).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$(Hy(-t),\ y(-t)) \geqslant -w(0) > 0,$$

поэтому

$$|y(-t)| \geqslant r > 0 \qquad (t \geqslant 0).$$

Следовательно, из (12.60) (в силу (12.10)) вытекает существование такого $k > 0$, что

$$\frac{dw}{dt} \leqslant -k \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Это неравенство противоречит тому, что функция $w(t)$ ограничена.

Четвертый этап. Этот этап вспомогательный. В нем мы рассмотрим оператор сдвига $W(t, s)$ по траекториям системы (12.51) и отметим некоторые его свойства. Напомним, что оператор сдвига на некоторых точках $u \in R^{m+1}$ может быть определен не при всех $t > s$.

Оператор сдвига сильно положителен при $t > s$ как относительно конуса K, так и относительно конуса $-K$. На всем пространстве R^{m+1} оператор сдвига *усиленно монотонен* в том смысле, что из $u_1 \leqslant u_2$ и $u_1 \neq u_2$ вытекает, что

$$W(t, s)u_2 - W(t, s)u_1 \gg 0 \qquad (t > s). \qquad (12.61)$$

На доказательстве этих свойств мы не останавливаемся — достаточно повторить рассуждения п. 12.2, использованные при доказательстве сильной положительности оператора сдвига по траекториям системы (12.1).

Ниже будет использовано еще одно свойство оператора сдвига. Оказывается, что он выпуклый в следующем смысле: при любых $u \gg 0$ и $\tau \in (0, 1)$

$$\tau W(t, s)u \gg W(t, s)(\tau u) \qquad (t > s). \qquad (12.62)$$

Так как $\chi(t, 0) \equiv 0$, то

$$\tau\chi(t, \sigma) - \chi(t, \tau\sigma) =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \varphi''[\sigma^*(t) + s\tau\sigma + ss_1(1-\tau)\sigma]\, s\tau(1-\tau)\sigma^2\, ds\, ds_1$$

и в силу (12.32) при каждом $\sigma > 0$

$$\tau\chi(t, \sigma) - \chi(t, \tau\sigma) > 0 \quad (0 < \tau < 1, \quad -\infty < t < \infty). \quad (12.63)$$

Пусть $u \gg 0$, $\tau \in (0, 1)$. Введем обозначения

$$p(t) = \tau W(t, s) u - W(t, s)(\tau u) \qquad (t \geqslant s)$$

и

$$\sigma(t) = (W(t, s) u, \bar{c}), \qquad \sigma_\tau(t) = (W(t, s)(\tau u), \bar{c}).$$

Функция $p(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dp}{dt} = \bar{B} p + \bar{d}\{\chi[t, (\bar{c}, p) + \sigma_\tau(t)] - \chi[t, \sigma_\tau(t)]\} + \\ + \bar{d}\{\tau\chi[t, \sigma(t)] - \chi[t, \tau\sigma(t)]\}, \qquad (12.64)$$

удовлетворяющим начальному условию $p(s) = 0$. Из монотонности $\chi(t, \sigma)$ по второй переменной и из неравенства (12.63) вытекает, что уравнение (12.64) удовлетворяет условиям леммы 11.3. В силу этой леммы

$$p(t) \geqslant 0 \qquad (t \geqslant s). \qquad (12.65)$$

Из (12.64) вытекает, что

$$p(t) = \int_s^t e^{\bar{B}(t-\theta)} \bar{d}\{\chi[\theta, (\bar{c}, p(\theta)) + \sigma_\tau(\theta)] - \chi[\theta, \sigma_\tau(\theta)]\} d\theta + \\ + \int_s^t e^{\bar{B}(t-\theta)} \bar{d}\{\tau\chi[\theta, \sigma(\theta)] - \chi[\theta, \tau\sigma(\theta)]\} d\theta,$$

откуда в силу (12.65)

$$p(t) \geqslant \int_s^t e^{\bar{B}(t-\theta)} \bar{d}\{\tau\chi[\theta, \sigma(\theta)] - \chi[\theta, \tau\sigma(\theta)]\} d\theta. \qquad (12.66)$$

Так как оператор $W(t, s)$ сильно положителен при $t > s$, то $\sigma(t) > 0$ при $t > s$. Поэтому из (12.66) и из (12.63) следует (12.62).

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество скалярных пп-функций, являющихся равномерными пределами последовательностей вида $\sigma^*(t + t_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Каждой функции $\sigma^{**} \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие уравнение

$$\frac{du}{dt} = \bar{B} u + \bar{d}\chi^*(t, \sigma), \qquad (12.67)$$

где

$$\chi^*(t, \sigma) = \varphi[\sigma^{**}(t) + \sigma] - \varphi[\sigma^{**}(t)].$$

Оператор сдвига по траекториям уравнения (12.67) обозначим через $W^*(t, s)$.

Очевидно, каждое уравнение (12.67) обладает всеми использованными при изучении оператора $W(t, s)$ свойствами. Поэтому каждый оператор $W^*(t, s)$ (как и оператор $W(t, s)$) сильно положителен как относительно конуса K, так и относительно конуса $-K$, усиленно монотонен на всем R^{m+1} и выпуклый.

Пятый этап. Пусть $u^*(t)$ — ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение со значениями в K уравнения (12.51), существование которого было установлено во втором этапе доказательства. Напомним, что $u^*(t)$ удовлетворяет неравенствам (12.54). Из сильной положительности операторов $W(t, s)$ $(t > s)$ следует, что

$$u^*(t) \gg 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{12.68}$$

В этом этапе мы покажем, что каждое отличное от $u^*(t)$ ненулевое решение $u(t)$ уравнения (12.51) стремится к нулю при $t \to \infty$, если

$$0 \leqslant u(0) \leqslant u^*(0).$$

Отметим сразу же, что поскольку операторы $W(t, s)$ $(t > s)$ усиленно монотонны, то

$$u^*(t) \gg u(t) \qquad (t > 0). \tag{12.69}$$

Определим скалярную функцию

$$\alpha(t) = \inf\{\alpha\colon\ \alpha u^*(t) \geqslant u(t)\}.$$

В силу (12.69)

$$0 < \alpha(t) < 1 \qquad (t > 0). \tag{12.70}$$

Покажем, что функция $\alpha(t)$ строго убывает: из $0 < t_1 < t_2$ следует неравенство $\alpha(t_1) > \alpha(t_2)$. Действительно, в силу монотонности оператора $W(t_2, t_1)$

$$W(t_2, t_1)[\alpha(t_1) u^*(t_1)] \geqslant W(t_2, t_1) u(t_1).$$

Поэтому из (12.70) в силу (12.62) вытекает, что

$$\alpha(t_1) W(t_2, t_1) u^*(t_1) \gg W(t_2, t_1) u(t_1),$$

т. е.

$$\alpha(t_1) u^*(t_2) \gg u(t_2).$$

Но тогда $\alpha(t_2) < \alpha(t_1)$.

Из монотонности $\alpha(t)$ вытекает существование предела

$$\alpha_0 = \lim_{t\to\infty} \alpha(t).$$

Интересующее нас утверждение будет доказано, если мы установим равенство $\alpha_0 = 0$.

Допустим, что $\alpha_0 > 0$.

Выберем последовательность $h_j \to \infty$ так, чтобы последовательность пп-функций $\sigma^*(t + h_j)$ равномерно сходилась к некоторой пп-функции $\sigma^{**}(t) \in \mathfrak{M}$ и чтобы последовательности функций $u^*(t + h_j)$ и $u(t + h_j)$ сходились равномерно на каждом конечном промежутке соответственно к некоторым функциям $v^*(t)$ и $v(t)$. Функции $v^*(t)$ и $v(t)$ будут ограниченными на $(-\infty, \infty)$ решениями уравнения (12.67). При этом функция $v^*(t)$ принимает (в силу сильной положительности оператора $W^*(t, s)$ сдвига по траекториям уравнения (12.67) значения из $K_{\text{вн}}$.

Так как при каждом $t \in (-\infty, \infty)$ и достаточно больших j

$$\alpha(t + h_j)\, u^*(t + h_j) \geqslant u(t + h_j),$$

то

$$\alpha_0 v^*(t) \geqslant v(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

и в силу выпуклости и монотонности $W^*(t, s)$

$$\alpha_0 v^*(t) \gg v(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{12.71}$$

Пусть

$$\beta_0 = \inf\{\beta : \beta v^*(0) - v(0) \in K\}.$$

Из (12.71) вытекает неравенство $\beta_0 < \alpha_0$.

Включение $\beta_0 v^*(0) - v(0) \in K$ можно записать в виде

$$\beta_0 u^*(h_j) - u(h_j) + \omega_j \in K \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{12.72}$$

где

$$\omega_j = \beta_0 [v^*(0) - u^*(h_j)] - v(0) + u(h_j).$$

По построению

$$\lim_{j\to\infty} \omega_j = 0. \tag{12.73}$$

Так как $v^*(0) \gg 0$ и $u(h_j) \to v^*(0)$, то при всех достаточно больших j элементы $u^*(h_j)$ входят в K вместе с

шаровой окрестностью некоторого фиксированного радиуса. Поэтому из (12.73) вытекает, что при достаточно больших j

$$\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}u^*(h_j)-\omega_j\in K. \tag{12.74}$$

Следовательно, из (12.72) вытекает, что

$$\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}u^*(h_j)-u(h_j)\in K, \tag{12.75}$$

откуда

$$\alpha(h_j)\leqslant\frac{\alpha_0+\beta_0}{2},$$

и поэтому $\alpha(h_j)<\alpha_0$. Мы пришли к противоречию.

Шестой этап. Завершение доказательства теоремы. Из результатов, полученных в третьем, четвертом и пятом этапах доказательства, вытекает, что у каждого из уравнений (12.67) есть лишь одно ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение со значениями в K, удовлетворяющее неравенствам (12.54). Отсюда вытекает (см., например, Б. П. Демидович [1], стр. 441), что ограниченные решения, о которых идет речь, почти периодичны.

Из результатов, полученных на третьем этапе доказательства, вытекает, что любые два пп-решения уравнения (12.51) сравнимы друг с другом по конусу K. Отсюда следует, что либо все значения ненулевого пп-решения лежат в K, либо в $-K$. Из результатов пятого этапа вытекает единственность и неустойчивость пп-решения со значениями в K.

Ненулевых пп-решений со значениями в конусе $-K$ у уравнения (12.51) нет — это вытекает из первого утверждения теоремы 12.2.

Теорема 12.3 полностью доказана.

12.5. Приложения к скалярным уравнениям высших порядков. Важные классы невозмущенных систем (12.1) автоматического регулирования — это так называемые *полностью управляемые* (Р. Э. Калман [1]) системы. Условие полной управляемости заключается в том, что векторы

$$\bar{d},\ \bar{B}\bar{d},\ \ldots,\ \bar{B}^m\bar{d}$$

образуют базис в R^{m+1}. Каждая полностью управляемая система может быть описана (см., например, С. Лефшец [1], стр. 139) скалярным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}}+a_1\frac{d^m x}{dt^m}+\ldots+a_{m+1}x=\varphi(\sigma), \qquad (12.76)$$

где

$$\sigma=b_{m+1}x+b_m x'+\ldots+b_1 x^{(m)}, \qquad (12.77)$$

$a_1, \ldots, a_{m+1}, b_1, \ldots, b_{m+1}$ — постоянные числа, $\varphi(\sigma)$ — нелинейная характеристика, участвующая в уравнениях (12.1).

В п. 12.1 предполагалось, что система (12.1) удовлетворяет ограничениям (12.4)—(12.9). Выясним, что означают в терминах коэффициентов $a_1, \ldots, a_{m+1}$, $b_1, \ldots, b_{m+1}$ эти ограничения в случае уравнения (12.76).

Перепишем вначале уравнение (12.76) в виде дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt}+Qu=e_{m+1}\varphi[(b, u)], \qquad (12.78)$$

где Q — матрица (8.13):

$$Q=\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \\ a_{m+1} & a_m & a_{m-1} & \ldots & a_1 \end{Vmatrix} \qquad (12.79)$$

и

$$e_{m+1}=\{0, \ldots, 0, 1\}, \qquad b=\{b_{m+1}, \ldots, b_1\}.$$

Условие (12.4) соответствует тому, что характеристический многочлен

$$\chi(\lambda)=\lambda^{m+1}+a_1\lambda^m+\ldots+a_{m+1} \qquad (12.80)$$

дифференциального уравнения

$$\frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}}+a_1\frac{d^m x}{dt^m}+\ldots+a_{m+1}x=0 \qquad (12.81)$$

гурвицев и имеем ведущий корень λ_0. Иначе говоря, у уравнения $\chi(\lambda) = 0$ есть такой простой отрицательный корень λ_0, что все остальные корни λ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$.

Наличие ведущего корня λ_0 у характеристического многочлена позволяет (см., например Ф. Р. Гантмахер [1]) выбрать в фазовом пространстве R^{m+1} такой базис, в котором матрица $-Q$ имеет вид матрицы $\overline{B}$ из (12.15). В этом базисе система (12.78) имеет вид (12.1).

Фактическое построение всего нового базиса для дальнейших рассуждений роли не играет. Нужно лишь помнить, что в качестве первого базисного вектора e_0 нужно выбрать собственный вектор матрицы $-Q$, отвечающий собственному значению λ_0, а в качестве остальных — произвольные линейно независимые m векторов, ортогональных собственному вектору g_0 сопряженной матрицы $-Q^*$, отвечающему тому же собственному значению λ_0. Векторы e_0 и g_0 должны быть нормированы условием

$$(e_0, g_0) = 1. \tag{12.82}$$

В качестве e_0 выберем вектор

$$e_0 = \{1, \lambda_0, \ldots, \lambda_0^m\}.$$

Оказывается, что условие (12.82) будет выполнено, если собственный вектор

$$g_0 = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}\}$$

матрицы $-Q^*$ нормировать равенством

$$\eta_{m+1} = \frac{1}{\chi'(\lambda_0)} \tag{12.83}$$

(здесь знаменатель положителен, поскольку λ_0 — наибольший и простой вещественный корень многочлена (12.80)). Действительно, по определению компоненты η_i вектора g_0 удовлетворяют системе равенств

$$\begin{aligned}
\eta_1 - a_m\eta_{m+1} &= \lambda_0\eta_2,\\
\eta_2 - a_{m-1}\eta_{m+1} &= \lambda_0\eta_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_m - a_1\eta_{m+1} &= \lambda_0\eta_{m+1}.
\end{aligned}$$

Умножая второе из этих равенств на $2\lambda_0$, третье на $3\lambda_0^2, \ldots$, последнее на $m\lambda_0^{m-1}$ и складывая новые равенства, получаем

$$\eta_1 + 2\lambda_0\eta_2 + \ldots + m\lambda_0^{m-1}\eta_m - \left[\chi'(\lambda_0) - (m+1)\lambda_0^m\right]\eta_{m+1} = \\ = \lambda_0\eta_2 + 2\lambda_0^2\eta_3 + \ldots + m\lambda_0^m\eta_{m+1},$$

откуда

$$(e_0, g_0) = \eta_1 + \lambda_0\eta_2 + \ldots + \lambda_0^m\eta_{m+1} = \chi'(\lambda_0)\eta_{m+1} = 1.$$

Очевидно,

$$d_1 = (e_{m+1}, g_0)$$

и в силу (12.83)

$$d_1 = \frac{1}{\chi'(\lambda_0)}.$$

Поэтому первое из неравенств (12.5) всегда выполнено.

Введем обозначение

$$\varkappa(\lambda) = b_1\lambda^m + \ldots + b_m\lambda + b_{m+1}. \tag{12.84}$$

Так как $c_1 = (e_0, b)$, то $c_1 = \varkappa(\lambda_0)$. Поэтому второе из неравенств (12.5) в нашем случае записывается в виде

$$\varkappa(\lambda_0) > 0. \tag{12.85}$$

Неравенство (12.7) означает, что $(e_{m+1}, b) \geqslant 0$, т. е.

$$b_1 \geqslant 0. \tag{12.86}$$

Для анализа условия (12.8) выпишем вначале очевидное тождество

$$(Bd, c) - \lambda_0(d, c) = (\bar{B}\bar{d}, \bar{c}) - \lambda_0(\bar{d}, \bar{c}),$$

из которого вытекает равенство

$$(Bd, c) - \lambda_0(d, c) = -(Qe_{m+1}, b) - \lambda_0(e_{m+1}, b) = \\ = b_2 - (a_1 + \lambda_0)b_1.$$

Поэтому условие (12.8) в нашем случае имеет вид неравенства

$$b_2 > (a_1 + \lambda_0)b_1. \tag{12.87}$$

Перейдем к наиболее сложному условию (12.9). Очевидно, при вещественных ненулевых ω

$$\operatorname{Re}\left(B^{-1}_{\lambda_0+i\omega}d,\ c\right)\equiv\operatorname{Re}\left(\bar{B}^{-1}_{\lambda_0+i\omega}\bar{d},\ \bar{c}\right),$$

откуда (в нашем случае)

$$\operatorname{Re}\left(B^{-1}_{\lambda_0+i\omega}d,\ c\right)=\operatorname{Re}\left([(\lambda_0+i\omega)I+Q]^{-1}e_{m+1},\ b\right). \quad (12.88)$$

Воспользуемся простым и известным равенством (см., например, С. Лефшец [1], стр. 140)

$$\left([\mu I+Q]^{-1}e_{m+1},\ b\right)=\frac{\varkappa(\mu)}{\chi(\mu)}.$$

Из него и из (12.88) вытекает, что условие (12.9) при ненулевых ω может быть записано в виде неравенства

$$\operatorname{Re}\frac{\varkappa(\lambda_0+i\omega)}{\chi(\lambda_0+i\omega)}<0. \quad (12.89)$$

Легко видеть, что функция $\varkappa(\lambda_0+i\omega)/\chi(\lambda_0+i\omega)$ непрерывна в точке $\omega=0$, причем

$$\lim_{\omega\to 0}\operatorname{Re}\frac{\varkappa(\lambda_0+i\omega)}{\chi(\lambda_0+i\omega)}=\frac{\varkappa'(\lambda_0)}{\chi'(\lambda_0)}-\frac{1}{2}\frac{\chi''(\lambda_0)\varkappa(\lambda_0)}{[\chi'(\lambda_0)]^2}. \quad (12.90)$$

Поэтому неравенство (12.9) в нашем случае заменяется двумя: условием (12.89) и неравенством

$$2\varkappa'(\lambda_0)\chi'(\lambda_0)<\varkappa(\lambda_0)\chi''(\lambda_0). \quad (12.91)$$

Условие (12.6) в общем случае является следствием условия (12.9) (для доказательства достаточно проинтегрировать (12.9) по промежутку $[0,\infty)$).

Итак, нами доказана

Лемма 12.2. *Условия* (12.4)—(12.9) *в случае уравнения* (12.76) *означают, что:*

1°. *Характеристический многочлен* (12.80) *имеет ведущий отрицательный корень* λ_0.

2°. *Выполнены неравенства*

$$\varkappa(\lambda_0)>0,\quad b_1\geqslant 0,\quad b_2>(a_1+\lambda_0)b_1.$$

3°. *Выполнены неравенства* (12.89) *и* (12.91).

Предоставляем читателю показать, что условия 1°—3° в случае уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=\varphi(\sigma),$$

где

$$\sigma=b_1\frac{dx}{dt}+b_2x,$$

сводятся к следующим неравенствам:

$$0<a_2<\frac{1}{4}a_1^2;\quad a_1>0;\quad b_2>\frac{1}{2}\left(a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2}\right)b_1\geqslant 0.$$

В случае уравнения третьего порядка

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_2\frac{dx}{dt}+a_3x=\varphi(\sigma), \tag{12.92}$$

где

$$\sigma=b_1\frac{d^2x}{dt^2}+b_2\frac{dx}{dt}+b_3x, \tag{12.93}$$

условия 1°—3°, естественно, несколько более сложные. Условие 1° требует непосредственной проверки. Если это условие выполнено и λ_0 — ведущий корень многочлена

$$\chi(\lambda)=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3,$$

то условие 2° можно записать в виде неравенств

$$\varkappa(\lambda_0)>0,\ \ b_1\geqslant 0,\ \ b_2>(a_1+\lambda_0)b_1.$$

Условие 3° является при этом следствием условия 2°.

Перейдем теперь от уравнения (12.76) к возмущенному уравнению

$$\frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}}+a_1\frac{d^mx}{dt^m}+\ \ldots\ +a_{m+1}x=\varphi(\sigma)+h(t), \tag{12.94}$$

где $h(t)$ — скалярная пп-функция. От уравнения (12.94) можно перейти к возмущению

$$\frac{du}{dt}+Qu=e_{m+1}\varphi(\sigma)+e_{m+1}h(t),\qquad \sigma=(b,\ u) \tag{12.95}$$

системы (12.78).

Будем считать, что нелинейная характеристика $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет ограничениям, при которых выше доказы-

вались теоремы 12.1—12.3. Тогда для исследования пп-решений уравнения (12.95) можно применить теорему 12.3.

Перед тем как формулировать соответствующее утверждение, заметим, что в случае уравнения (12.95) число (12.24) определяется равенством

$$\alpha_0 = (Q^{-1}e_{m+1}, b) = \frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}.$$

Так как $a_{m+1} > 0$ и число α_0 для всех рассматривавшихся систем (12.1) положительно, то $b_{m+1} > 0$.

Сформулируем основной результат пункта.

Теорема 12.4. *Пусть выполнены условия* 1°—3° *из леммы* 12.2. *Пусть*

$$b_{m+1}\varphi'(0) < a_{m+1}.$$

Пусть, наконец, $h(t)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{-\infty < t < \infty} h(t) < \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\sigma^* - \varphi(\sigma^*),$$

где σ^* — *корень уравнения*

$$b_{m+1}\varphi'(\sigma) = a_{m+1}.$$

Тогда уравнение (12.94) *имеет два пп-решения, одно из которых устойчиво, а второе неустойчиво.*

12.6. Существование трех пп-решений. Рассмотрим здесь уравнение (12.94) частного вида

$$Lx = \varphi(x) + h(t), \tag{12.96}$$

где L — дифференциальный оператор

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m x \tag{12.97}$$

с постоянными коэффициентами.

Предположим, что нелинейная характеристика $\varphi(x)$ является функцией типа x^3, т. е. $\varphi(x)$ монотонно возрастает, $\varphi(0) = 0$, $x\varphi''(x) > 0$ при $x \neq 0$ и, наконец,

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty \tag{12.98}$$

(см. рис. 12.4, *б*). Если

$$\varphi'(0) < a_m, \tag{12.99}$$

то невозмущенное уравнение

$$Lx = \varphi(x) \tag{12.100}$$

имеет в силу (12.98) ровно три состояния равновесия. Отсюда вытекает, вообще говоря, что при малых $h(t)$ возмущенное уравнение (12.96) имеет по крайней мере три различных пп-решения.

Здесь мы покажем, как при помощи результатов из §§ 10 и 11 получить нелокальные теоремы существования трех пп-решений и исследовать их устойчивость.

Во всем пункте предполагается, что характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ дифференциального оператора (12.97) гурвицев и что его функция Грина $G(t, s)$ неотрицательна (см. § 8). Кроме этого предполагается, что при некотором $\gamma > 0$ дифференциальный пп-оператор

$$L(\gamma)x = Lx - \gamma x \tag{12.101}$$

регулярен и его функция Грина $G(t, s; \gamma)$ неположительна.

Отметим, что для пп-операторов (12.97) второго порядка такими γ, при которых неположительна функция Грина пп-операторов (12.101), будут все достаточно большие числа. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно отметить очевидное равенство $L(\gamma)u_0(t) = a_m - \gamma$, где $u_0(t) \equiv 1$, и сослаться на теорему 9.9.

Для операторов (12.97) более высоких порядков предположение о существовании соответствующих γ является ограничительным предположением.

Рассмотрим вначале пп-операторы третьего порядка. Предположение о гурвицевости характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ и о неотрицательности функции Грина $G(t, s)$ означает (см. п. 8.4) наличие у $\chi(\lambda)$ такого отрицательного корня λ_0, что остальные два корня λ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_0$. Из предположения о неположительности функции Грина $G(t, s; \gamma)$ вытекает, что все три корня многочлена $\chi(\lambda)$ вещественны, причем уравнение $\chi(\lambda) - \gamma = 0$ имеет два отрицательных и один положительный корень. Иначе говоря, многочлен $\chi(\lambda)$ имеет график такого типа, как на рис. 12.6. Указанным выше условиям будут удовлетворять значения γ из отмеченного на рис. 12.6 промежутка $(\gamma_1, \gamma_0]$.

Из приведенного описания вытекает также, что функция Грина $G(t, s; \gamma)$ пп-оператора третьего порядка ни при каких γ не будет неположительной, если график характеристического многочлена имеет вид а) или б) на рис. 12.7.

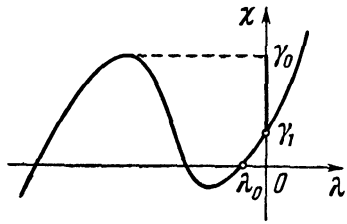

Рис. 12.6.

В случае пп-операторов четвертого порядка анализ также сводится (см. п. 8.4) к рассмотрению графика характеристического многочлена. Если, например, $\chi(\lambda)$ имеет такой вид, как на рис. 12.8, то многочлен $\chi(\lambda)$ гурвицев, функция Грина $G(t, s)$ неотрицательна и функции Грина $G(t, s; \gamma)$ неположительны при значениях γ из отмеченного на рис. 12.8 промежутка $(\gamma_1, \gamma_0]$.

Тот факт, что для операторов третьего и четвертого порядков соответствующие значения γ образовывали конечный промежуток, не случаен. Можно показать, что

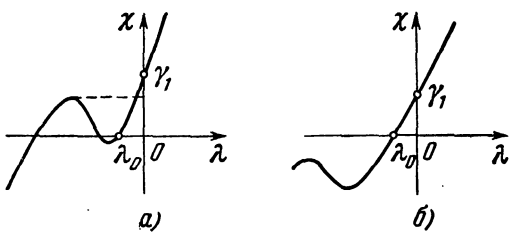

Рис. 12.7.

и для операторов всех более высоких порядков соответствующие γ образуют аналогичный конечный промежуток $(\gamma_1, \gamma_0]$ (если, конечно, такие γ существуют!).

Введем некоторые обозначения. Пусть x_1 и x_2 — решения уравнения

$$\varphi'(x) = a_m$$

(рис. 12.9). Пусть $\gamma > a_m$, а $y_1(\gamma)$, $y_2(\gamma)$ — решения уравнения

$$\varphi'(x) = \gamma$$

(см. рис. 12.9). Положим

$$m(\gamma) = \max\{a_m x_1 - \varphi(x_1),\ a_m y_2(\gamma) - \varphi[y_2(\gamma)]\}$$

и

$$M(\gamma) = \min\{a_m x_2 - \varphi(x_2),\ a_m y_1(\gamma) - \varphi[y_1(\gamma)]\}.$$

Ниже рассматриваются такие γ, при которых $m(\gamma) < M(\gamma)$.

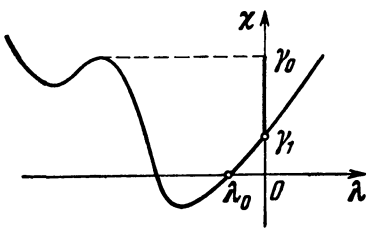

Рис. 12.8.

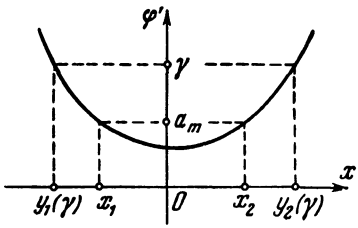

Рис. 12.9.

Теорема 12.5. *Пусть пп-функция $h(t)$ удовлетворяет неравенствам*

$$m(\gamma) < h(t) < M(\gamma) \qquad (-\infty < t < \infty), \quad (12.102)$$

где γ — такое число, при котором $G(t, s; \gamma)$ неположительна.

Тогда уравнение (12.96) *имеет по крайней мере одно устойчивое и по крайней мере два неустойчивых пп-решения.*

Приведем схему доказательства. Задача о пп-решениях уравнения (12.96) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\{\varphi[x(s)] + h(s)\}\, ds.$$

Оператор П, определяемый правой частью этого уравнения, оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle x_1, x_2\rangle$, монотонен на нем и удовлетворяет на конусном отрезке $\langle \Pi x_1, \Pi x_2\rangle$ всем условиям теоремы 10.2. Поэтому урав-

нение (12.96) имеет единственное пп-решение $x^*(t)$, удовлетворяющее неравенствам

$$x_1 < x^*(t) < x_2 \qquad (-\infty < t < \infty). \qquad (12.103)$$

Это решение устойчиво в силу теоремы 11.3.

Для доказательства существования неустойчивых пп-решений удобно от уравнения (12.96) перейти к интегральному уравнению

$$x(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t, s; \gamma)\{\gamma x(s) - \varphi[x(s)] - h(s)\}\, ds.$$

Определенный правой частью этого уравнения оператор $\Pi(\gamma)$ оставляет инвариантными каждый из конусных отрезков $\langle y_1(\gamma), x_1\rangle$ и $\langle x_2, y_2(\gamma)\rangle$, причем на каждом из отрезков $\langle \Pi(\gamma) y_1(\gamma), \Pi(\gamma) x_1\rangle$ и $\langle \Pi(\gamma) x_2, \Pi(\gamma) y_2(\gamma)\rangle$ он удовлетворяет условиям теоремы 10.2. Из этой теоремы вытекает существование пп-решений $x^{**}(t)$ и $x^{***}(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$y_1(\gamma) \leqslant x^{**}(t) \leqslant x_1, \; x_2 \leqslant x^{***}(t) \leqslant y_2(\gamma) \qquad (-\infty < t < \infty), \qquad (12.104)$$

причем каждое из этих пп-решений единственно на соответствующем конусном отрезке. Из теоремы 11.4 вытекает, что решения $x^{**}(t)$ и $x^{***}(t)$ неустойчивы.

Теорема доказана.

Очевидно, условие (12.102) будет тем менее ограничительным, чем большими могут быть выбраны γ, при которых $G(t, s; \gamma)$ неположительна. Для уравнений второго порядка, как было указано выше, можно выбирать сколь угодно большие γ; поэтому для уравнений второго порядка условие (12.102) может быть заменено неравенствами

$$a_m x_1 - \varphi(x_1) < h(t) < a_m x_2 - \varphi(x_2) \quad (-\infty < t < \infty). \quad (12.105)$$

Полезно заметить, что ограничения (12.105) не зависят от γ.

В качестве примера рассмотрим известное уравнение Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + x = \beta x^3 + h(t), \qquad (12.106)$$

где $\beta > 0$, а $h(t)$ — скалярная пп-функция. Предположим, что

$$c \geqslant 2; \tag{12.107}$$

тогда пп-оператор

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + x$$

удовлетворяет условиям этого пункта. Неравенства (12.105) в случае уравнения Дуффинга (12.106) имеют вид

$$|h(t)| < \frac{2}{3\sqrt{3\beta}} \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{12.108}$$

Если выполнены условия (12.107) и (12.108), то из теоремы 12.5 вытекает, что *уравнение Дуффинга имеет три пп-решения* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *и* $x_3(t)$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$x_1(t) < -\frac{1}{\sqrt{3\beta}} < x_2(t) < \frac{1}{\sqrt{3\beta}} < x_3(t) \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{12.109}$$

При этом решения $x_1(t)$ *и* $x_3(t)$ *неустойчивы, а решение* $x_2(t)$ *устойчиво.* Оказывается, что *отличных от* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *и* $x_3(t)$ *пп-решений* (если выполнены условия (12.107) и (12.108)) *уравнение Дуффинга не имеет.*

Докажем этот факт.

Допустим, что у уравнения (12.106) есть пп-решение $x_0(t)$, отличное от $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Из доказательства теоремы 12.5 вытекает тогда, что по крайней мере одна из функций

$$g_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3\beta}} - x_0(t) \tag{12.110}$$

или

$$g_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{3\beta}} - x_0(t) \tag{12.111}$$

знакопеременна. Пусть для определенности знакопеременна $g_1(t)$. Обозначим через t_1 и t_2 такие моменты времени, что

$$g_1(t) > 0 \qquad (t_1 < t < t_2) \tag{12.112}$$

и

$$g_1(t_1) = g_1(t_2) = 0. \tag{12.113}$$

Положим

$$h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{3\beta}} - \beta x_0^3(t) - h(t) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2).$$

Из (12.108) и (12.112) вытекает, что

$$h_0(t) > 0 \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2). \tag{12.114}$$

Очевидно, $Lg_1(t) = h_0(t)$. Поэтому

$$g_1(t) = K(t, t_1)\frac{dg_1(t_1)}{dt} + \int_{t_1}^{t} K(t, s)\, h_0(s)\, ds,$$

где $K(t, s)$ — функция Коши уравнения $Lx = 0$. Следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} K(t_2, s)\, h_0(s)\, ds = -K(t_2, t_1)\frac{dg_1(t_1)}{dt}.$$

Левая часть этого равенства в силу (12.11) строго положительна, так как функция $K(t, s)$ положительна при $t > s$ (напомним, что в наших условиях решения уравнения $Lx = 0$ не осциллируют на всей оси). С другой стороны, правая часть последнего равенства не может быть положительной, так как из (12.112) и (12.113) вытекает, что $g_1'(t_1) \geqslant 0$. Мы пришли к противоречию.

Чем скорее поедешь, тем скорее приедешь.

Козьма Прутков

§ 13. Положительные почти периодические решения уравнений второго порядка

13.1. Формулировка результатов. В § 12 был установлен ряд теорем о пп-решениях скалярных дифференциальных уравнений второго порядка. В этих теоремах изучались пп-колебания в автономных системах, возникающие под влиянием внешней пп-силы.

В этом параграфе изучаются дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t,\ x) \tag{13.1}$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t,\ \sigma), \tag{13.2}$$

где

$$\sigma=\alpha(t)x+\frac{dx}{dt}, \tag{13.3}$$

а $\alpha(t)$ — функция из $B^1(R^1)$. Основное отличие уравнений (13.1) и (13.2) от уравнений, изученных в § 12, заключается в том, что коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ пп-оператора

$$Lx=\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x \tag{13.4}$$

не предполагаются постоянными.

Во всем параграфе считается, что функции $f(t,u)$ $(-\infty<t<\infty,\ \ u\geqslant 0)$, определяющие правые части уравнений (13.1) и (13.2), обладают следующими свойствами:

1°. Функция $f(t,u)$ непрерывна по совокупности переменных $-\infty<t<\infty,\ \ u\geqslant 0$ и почти периодична по t равномерно относительно значений u из каждого промежутка $[a,b]\subset[0,\infty)$.

2°. При $u>0$ существует непрерывная производная $f'_u(t,u)$, которая почти периодична по t равномерно относительно значений u из каждого промежутка $[a,\ b]\subset(0,\infty)$.

3°. $f(t,0)\equiv 0$ и $f(t,u)$ не убывает по u при неотрицательных u.

Для формулировки результатов параграфа нам удобно выделить два более узких класса $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ функций, обладающих свойствами 1°—3°.

Будем говорить, что $f(t,u)\in\mathfrak{F}_1$, если:

4°. $f(t,u)$ вогнута равномерно относительно t, т. е. для каждого $\tau\in(0,\ 1)$ и каждого $u>0$:

$$f(t,\ \tau u)-\tau(1+\eta)f(t,\ u)\geqslant 0 \qquad (-\infty<t<\infty), \tag{13.5}$$

где $\eta=\eta(\tau,u)>0$.

5°. Существует такое $t_0 \in (-\infty, \infty)$, что при всех $u > 0$

$$uf'_u(t_0, u) - f(t_0, u) < 0. \tag{13.6}$$

6°. Справедливы равенства

$$\lim_{u \to +0} \inf_{-\infty < t < \infty} \frac{f(t, u)}{u} = \infty \tag{13.7}$$

и

$$\lim_{u \to \infty} \sup_{-\infty < t < \infty} \frac{f(t, u)}{u} = 0. \tag{13.8}$$

Типичным примером функций из класса $\mathfrak{F}_1$ могут служить функции u^ν, где $0 < \nu < 1$.

Будем говорить, что $f(t, u) \in \mathfrak{F}_2$, если:

4°°. $f(t, u)$ выпукла равномерно относительно t, т. е. для каждого $\tau \in (0, 1)$ и каждого $u > 0$

$$f(t, \tau u) - \tau(1 - \eta) f(t, u) \leqslant 0 \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{13.9}$$

где $\eta = \eta(\tau, u) > 0$.

5°°. Существует такое $t_0 \in (-\infty, \infty)$, что при всех $u > 0$

$$uf'_u(t_0, u) - f(t_0, u) > 0. \tag{13.10}$$

6°°. Справедливы соотношения $\inf\limits_{-\infty < t < \infty} f(t, u) > 0$ $(u > 0)$,

$$\lim_{u \to +0} \sup_{-\infty < t < \infty} \frac{f(t, u)}{u} = 0 \tag{13.11}$$

и

$$\lim_{u \to \infty} \inf_{-\infty < t < \infty} \frac{f(t, u)}{u} = \infty. \tag{13.12}$$

Типичным примером функций из класса $\mathfrak{F}_2$ могут служить функции u^ν $(\nu > 1)$, $e^u - u - 1$, $u \ln(1 + u)$ и т. д.

Полезно иметь в виду, что условия 5° и 5°° являются лишь несущественными дополнениями к условиям 4° и 4°° — из этих последних условий в силу леммы 11.2 вытекает справедливость при всех $u > 0$, $-\infty < t < \infty$ неравенств

$$uf'_u(t, u) - f(t, u) \leqslant 0 \tag{13.13}$$

и соответственно

$$uf'_u(t, u) - f(t, u) \geqslant 0. \tag{13.14}$$

Во всем параграфе предполагается, что

$$M(p) \geqslant 0. \tag{13.15}$$

Напомним (см. § 9), что (13.15) не является ограничением.

Сформулируем вначале теоремы, относящиеся к уравнению (13.1).

Теорема 13.1. *Пусть пп-оператор* (13.4) *регулярен и его функция Грина неотрицательна. Пусть* $f(t, u) \in \mathfrak{F}_1$.

Тогда уравнение (13.1) *имеет единственное ненулевое неотрицательное пп-решение. Это решение строго положительно и экспоненциально устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 13.2. *Пусть коэффициенты* $p(t)$, $q(t)$ *пп-оператора* (13.4) *удовлетворяют неравенству*

$$M^2(p) - M(p^2) + 4M(q) > 0. \tag{13.16}$$

Пусть $f(t, u) \in \mathfrak{F}_2$.

Тогда уравнение (13.1) *имеет единственное ненулевое неотрицательное пп-решение. Это решение строго положительно и неустойчиво в обе стороны изменения времени.*

Перейдем к уравнению (13.2).

Теорема 13.3. *Пусть пп-оператор* (13.4) *регулярен и его функция Грина неотрицательна. Пусть коэффициент* $\alpha(t)$ *из* (13.3) *удовлетворяет неравенству*

$$M(\alpha) \geqslant \frac{1}{2} M(p) \tag{13.17}$$

и дифференциальному неравенству

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} \leqslant \alpha^2(t) - p(t)\alpha(t) + q(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{13.18}$$

причем хотя бы при одном $t_0 \in (-\infty, \infty)$

$$\frac{d\alpha(t_0)}{dt} < \alpha^2(t_0) - p(t_0)\alpha(t_0) + q(t_0). \tag{13.19}$$

Пусть, наконец, $f(t, u) \in \mathfrak{F}_1$.

Тогда уравнение (13.2) *имеет единственное решение в классе ненулевых пп-функций из* $B^1(R^1)$, *удовлетво-*

ряющих неравенствам

$$x(t) \geqslant 0, \quad \alpha(t)\, x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \geqslant 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (13.20)$$

Это пп-решение строго положительно и экспоненциально устойчиво по Ляпунову.

Теорема 13.4. *Пусть выполнено неравенство* (13.16). *Пусть коэффициент* $\alpha(t)$ *удовлетворяет неравенству* $M(\alpha) > 0$ *и условиям* (13.18)—(13.19). *Пусть* $f(t, u) \in \mathfrak{F}_2$.

Тогда уравнение (13.2) *имеет единственное решение в классе ненулевых пп-функций из* $B^1(R^1)$, *удовлетворяющих неравенствам* (13.20). *Это пп-решение строго положительно и неустойчиво в обе стороны изменения времени.*

13.2. Доказательство теоремы 13.1. Обозначим через $G(t, s)$ функцию Грина пп-оператора (13.3). Пп-решения уравнения (13.1) совпадают с неподвижными точками нелинейного интегрального оператора

$$\Pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f[s, x(s)]\, ds \qquad (13.21)$$

в пространстве $B(R^1)$.

Из предположения о неотрицательности $G(t, s)$ и из свойств функции $f(t, x)$ немедленно вытекает, что оператор (13.21) равномерно вогнут (см. стр. 157) на конусе $\widehat{K}$ неотрицательных функций в $B(R^1)$.

Из (13.7) и (13.8) вытекает, что при каждом достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства

$$\Pi\varepsilon \geqslant \varepsilon, \quad \Pi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Поэтому из теоремы 10.6 следует существование у уравнения (13.1) единственного ненулевого неотрицательного пп-решения $x^*(t)$. Это пп-решение $x^*(t)$ строго положительно — оно удовлетворяет неравенству $x^*(t) \geqslant \varepsilon$.

Из теорем 9.6 и 9.8 вытекает, что в условиях доказываемой теоремы пп-оператор (13.4) устойчив. Поэтому из теоремы 11.5 следует, что пп-решение $x^*(t)$ экспоненциально устойчиво.

Теорема 13.1 доказана.

Теорема 13.1 естественным образом дополняется оценкой области начальных значений, которым соответствуют решения, стремящиеся при $t \to \infty$ к $x^*(t)$.

В условиях теоремы 13.1 решения однородного уравнения

$$Lx = 0$$

неосциллируют на $(-\infty, \infty)$ (см. п. 9.1). Поэтому уравнение Риккати

$$\frac{dz}{dt} = z^2 - p(t)z + q(t) \tag{13.22}$$

имеет ограниченные на всей оси решения. Его граничные решения, как обычно (см. п. 9.2), обозначим через $z_1(t)$, $z_2(t)$. Можно показать, что построенный в п. 11.8 конус $\tilde{K}_{\max}(t)$ в случае уравнения (13.1) совпадает с переменным конусом в плоскости $\{x, x'\}$, который выделяется неравенствами

$$x \geqslant 0, \qquad z_2(t)x + x' \geqslant 0. \tag{13.23}$$

Поэтому из теоремы 11.8 вытекает, что все решения уравнения (13.1), начальные условия $\{x(0), x'(0)\}$ которых удовлетворяют неравенствам

$$x(0) > 0, \qquad z_2(0)x(0) + x'(0) > 0, \tag{13.24}$$

стремятся при $t \to \infty$ к пп-решению $x^*(t)$.

13.3. Лемма о положительной разрешимости дифференциального неравенства.

Лемма 13.1. *Пусть коэффициенты $p(t)$, $q(t)$ пп-оператора* (13.4) *удовлетворяют неравенству* (13.16).

Тогда существует такая пп-функция $u(t) \in B^2(R^1)$, что

$$u(t) \gg 0, \qquad Lu(t) \gtrsim 0. \tag{13.25}$$

Доказательство. Из (13.16) вытекает, что у уравнения

$$\lambda^2 - M(p)\lambda - M(q) + \frac{1}{4}M(p^2) = 0$$

есть два различных вещественных корня, причем больший корень в силу (13.15) положителен. Поэтому найдется

такое положительное λ_0, что

$$-\lambda_0^2 + M(p)\lambda_0 + M(q) - \frac{1}{4}M(p^2) > 0.$$

Выберем такое $\varepsilon_0 > 0$, что

$$a = -\lambda_0^2 + M(p)\lambda_0 + M(q) - \frac{1}{4}M(p^2) - \varepsilon_0 > 0.$$

Введем в рассмотрение пп-функцию

$$\nu(t) = \lambda_0^2 - \lambda_0 p(t) - q(t) + \frac{1}{4}p^2(t) + \varepsilon_0. \qquad (13.26)$$

Очевидно, $M(\nu) = -a$. Следовательно, функцию $\nu(t)$ можно представить в виде $\nu(t) = -a + \eta(t)$, где пп-функция $\eta(t)$ имеет нулевое среднее.

Каждую пп-функцию можно (см. п. 1.2) с любой точностью равномерно на $(-\infty, \infty)$ аппроксимировать тригонометрическим многочленом. В частности, если среднее пп-функции равно нулю, то ее можно аппроксимировать тригонометрическим многочленом, среднее которого также равно нулю. Значит, можно построить такой тригонометрический многочлен $\eta_0(t)$ с нулевым средним, что

$$\| \eta_0(t) - \eta(t) \|_{B(R^1)} < a. \qquad (13.27)$$

Определим функцию

$$\xi_0(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda_0(t-s)}\eta_0(s)\,ds. \qquad (13.28)$$

Ясно, что $\xi_0(t)$ также является тригонометрическим многочленом с нулевым средним. Поэтому существует такая постоянная c (которая, конечно, определяется не однозначно), что и тригонометрический многочлен

$$\xi_1(t) = \int_{c}^{t} \xi_0(\tau)\,d\tau$$

имеет нулевое среднее.

Покажем, что свойствами (13.25) обладает пп-функция

$$u(t) = e^{\xi_1(t)} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Первое из свойств (13.25) очевидно. Второе свойство вытекает из неравенства

$$Lu(t) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} u(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{13.29}$$

которое мы докажем.

Пусть $p_n(t)$ — последовательность тригонометрических многочленов, равномерно сходящаяся к $p(t)$. Тогда при всех достаточно больших n будет выполнено неравенство

$$\left\| [p(t) - p_n(t)] \frac{du(t)}{dt} \right\|_{B(R^1)} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \inf_{-\infty < t < \infty} u(t).$$

Следовательно, для доказательства (13.29) достаточно установить, что при некотором достаточно большом n выполнено неравенство

$$L_n u(t) \geqslant \varepsilon_0 u(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{13.30}$$

где

$$L_n x = \frac{d^2x}{dt^2} + p_n(t) \frac{dx}{dt} + q(t) x.$$

Положим

$$\nu_n(t) = \lambda_0^2 - \lambda_0 p_n(t) - q(t) + \frac{1}{4} p_n^2(t) + \varepsilon_0.$$

Запишем эти пп-функции в виде

$$\nu_n(t) = -a_n + \eta_n(t),$$

где $a_n = -M(\nu_n)$, а $\eta_n(t)$ — пп-функции с нулевым средним. Так как последовательность $\nu_n(t)$ равномерно сходится к функции (13.26), то $a_n \to a$ и в силу (13.28) при достаточно больших n выполнено неравенство

$$\| \eta_n(t) - \eta_0(t) \|_{B(R^1)} < a_n. \tag{13.31}$$

Введем обозначение

$$f_n(t) = a_n + \eta_0(t) - \eta_n(t);$$

функции $f_n(t)$ в силу (13.31) положительны.

Так как по определению

$$\eta_0(t) = f_n(t) + \nu_n(t),$$

то функцию (13.28) можно записать в виде

$$\xi_0(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda_0(t-s)}[f_n(s) + \nu_n(s)]\,ds.$$

Легко проверяется равенство

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda_0(t-s)}\nu_n(s)\,ds = \lambda_0 - \frac{1}{2}p_n(t) - \int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda_0(t-s)}q_n(s)\,ds,$$

где

$$q_n(t) = \lambda_0^2 + q(t) - \frac{1}{4}p_n^2(t) - \frac{1}{2}\frac{dp_n(t)}{dt} - \varepsilon_0.$$

Поэтому

$$\xi_0(t) = \lambda_0 - \frac{1}{2}p_n(t) - \int_{-\infty}^{t} e^{-2\lambda_0(t-s)}[q_n(s) - f_n(s)]\,ds$$

и, далее,

$$\xi_0(t) = \lambda_0 - \frac{1}{2}p_n(t) - z_n(t), \tag{13.32}$$

где $z_n(t)$ — пп-решение уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -2\lambda_0 z + q_n(t) - f_n(t).$$

Простая выкладка с использованием представления (13.32) приводит к тождеству

$$L_n u(t) \equiv [z_n^2(t) + f_n(t) + \varepsilon_0]\,u(t) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

из которого (и из положительности при больших n функций $f_n(t)$) вытекает справедливость при больших n оценки (13.30).

Лемма доказана.

13.4. Доказательство теоремы 13.2. Рассмотрим семейство пп-операторов

$$L(\beta)x = Lx - \beta x \qquad (0 < \beta < \infty). \tag{13.33}$$

Очевидно,

$$L(\beta)1 = q(t) - \beta.$$

Из теоремы 9.9 вытекает тогда, что при

$$\beta > \sup_{-\infty < t < \infty} q(t) \tag{13.34}$$

операторы $L(\beta)$ регулярны и их функции Грина $G(t, s; \beta)$ неположительны.

Задача о пп-решении уравнения (13.1) сводится к задаче о неподвижных точках операторов

$$\Pi(\beta)\, x(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\ s;\ \beta)\{\beta x(s) - f[s,\ x(s)]\}\, ds, \tag{13.35}$$

действующих в пространстве $B(R^1)$. Разумеется, рассматриваются лишь значения β, удовлетворяющие неравенству (13.34).

Пусть R_0 — такое положительное число, что при $R \geqslant R_0$

$$\frac{f(t,\ R)}{R} \geqslant q(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Существование R_0 вытекает из условия (13.12). Тогда при $R \geqslant R_0$

$$L(\beta) R \leqslant -[\beta R - f(t, R)] \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Умножая последнее неравенство на неположительную функцию $G(t,\ s; \beta)$ и интегрируя в пределах от $-\infty$ до ∞, получаем неравенство

$$R \geqslant \Pi(\beta) R \qquad (R \geqslant R_0,\ -\infty < t < \infty). \tag{13.36}$$

Пусть $u(t)$ — существующая в силу леммы 13.1 пп-функция, обладающая свойствами (13.25). Из условия (13.11) вытекает существование такого положительного числа r_0, что при $0 < r \leqslant r_0$

$$Lu(t) \geqslant \frac{f[t,\ ru(t)]}{r} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Из этого неравенства получаем

$$L(\beta)[ru(t)] \geqslant -\{\beta ru(t) - f[t,\ ru(t)]\} \qquad (-\infty < t < \infty),$$

откуда следует оценка

$$ru(t) \leqslant \Pi(\beta)[ru(t)] \qquad (0 < r \leqslant r_0,\ -\infty < t < \infty). \tag{13.36a}$$

Зафиксируем некоторые $r \in (0, r_0]$ и $R \in [R_0, \infty)$. Выберем настолько большое β, чтобы выполнялось неравенство

$$f'_x(t, x) < \beta \qquad (0 < x \leqslant R, \ -\infty < t < \infty).$$

При этом β оператор $\Pi(\beta)$ монотонен и равномерно вогнут на конусном отрезке $\langle ru(t), R\rangle$. Из оценок (13.36) и (13.36а) вытекает, что $\Pi(\beta)$ оставляет конусный отрезок $\langle ru(t), R\rangle$ инвариантным. Из теоремы 10.3 следует, что $\Pi(\beta)$ имеет на $\langle ru(t), R\rangle$ единственную неподвижную точку $x^*(t)$. Очевидно, $x^*(t) \gg 0$.

Допустим, что ненулевая неотрицательная пп-функция $y(t)$ также является решением уравнения (13.1), отличным от $x^*(t)$. Пусть β удовлетворяет условию (13.34), и пусть разность

$$g(t) = \beta y(t) - f[t, y(t)]$$

является ненулевой неотрицательной пп-функцией. Тогда из равенства

$$y(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t, s; \beta)\, g(s)\, ds$$

вытекает, что $y(t) \gg 0$.

Число r при построении конусного отрезка $\langle ru(t), R\rangle$ можно было выбрать сколь угодно малым, а число R — сколь угодно большим. Поэтому можно считать, что $y(t) \in \langle ru(t), R\rangle$. Следовательно, $y(t) \equiv x^*(t)$.

Мы показали, что в условиях теоремы 13.2 уравнение (13.1) имеет единственное ненулевое неотрицательное пп-решение $x^*(t)$. В силу теоремы 11.6 решение $x^*(t)$ неустойчиво в обе стороны изменения времени.

Теорема 13.2 полностью доказана.

13.5. Доказательство теоремы 13.3. Рассмотрим вначале линейное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0. \tag{13.37}$$

Это уравнение обычным путем сведем к системе

$$\frac{du}{dt} + Q(t)u = 0 \tag{13.38}$$

двух уравнений первого порядка. Здесь

$$u=\left\{x,\ \frac{dx}{dt}\right\},\qquad Q(t)=\begin{Vmatrix}0 & -1\\ q(t) & p(t)\end{Vmatrix}. \tag{13.39}$$

Обозначим через $U(t, s)$ оператор сдвига по траекториям системы (13.38).

По условиям теоремы 13.3 пп-оператор L регулярен и его функция Грина неотрицательна. Более того (см. п. 13.2),

$$U(t,\ s)\tilde{K}_{\max}(s)\subset\tilde{K}_{\max}(t)\qquad(t\geqslant s), \tag{13.40}$$

где $\tilde{K}_{\max}(t)$ — конус, выделяемый неравенствами (13.23):

$$\tilde{K}_{\max}(t)=\left\{u:\ x\geqslant 0,\ z_2(t)\,x+\frac{dx}{dt}\geqslant 0\right\}$$

(здесь $z_2(t)$ — бо́льшее граничное решение уравнения Риккати (13.22)).

Вектор $e_2=\{0,\ 1\}$ принадлежит конусу $\tilde{K}_{\max}(t)$ при всех $t\in(-\infty,\ \infty)$. Поэтому

$$U(t,\ s)\,e_2\in\tilde{K}_{\max}(t)\qquad(t\geqslant s).$$

Обозначим, как обычно, через $K(t, s)$ функцию Коши уравнения (13.37); тогда

$$U(t,\ s)\,e_2=\left\{K(t,\ s),\ \frac{\partial K(t,\ s)}{\partial t}\right\}.$$

Следовательно,

$$K(t,\ s)\geqslant 0,\quad z_2(t)\,K(t,\ s)+\frac{\partial K(t,\ s)}{\partial t}\geqslant 0\quad(t\geqslant s). \tag{13.41}$$

Из теоремы 9.3 вытекает в силу условий (13.17)—(13.19), что

$$\inf_{-\infty<t<\infty}[\alpha(t)-z_2(t)]>0. \tag{13.42}$$

Поэтому из (13.41) следует, что функция

$$K_\alpha(t,\ s)=\alpha(t)\,K(t,\ s)+\frac{\partial K(t,\ s)}{\partial t}$$

положительна при $t>s$,

Положим

$$\Pi_\alpha \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} K_\alpha(t, s) f[s, \sigma(s)]\, ds. \qquad (13.43)$$

Оператор (13.43) действует и непрерывен в $B(R^1)$. Из свойств функции $f(t, \sigma)$ вытекает, что оператор Π_α имеет в конусе $\tilde{K}$ единственную ненулевую неподвижную точку $\sigma^*(t)$ — достаточно повторить рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 13.1.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dx}{dt} + \alpha(t)\, x = \sigma^*(t). \qquad (13.44)$$

При доказательстве теоремы 9.3 было показано, что в условиях, когда решения уравнения (13.37) неосциллируют и когда пп-оператор L устойчив, существует пп-функция $\varphi(t)$ с неотрицательным средним, удовлетворяющая неравенству $\varphi(t) < z_1(t)$ и, тем более, неравенству

$$\varphi(t) < z_2(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Поэтому из (13.42) вытекает, что $M(\alpha) > 0$.

Из последней оценки вытекает, что уравнение (13.44) имеет единственное пп-решение $x^*(t)$. Это пп-решение строго положительно.

Покажем, что $x^*(t)$ — пп-решение уравнения (13.2). Для этого рассмотрим уравнение

$$Lx = f[t, \sigma^*(t)]$$

и обозначим через $y^*(t)$ его пп-решение. Очевидно,

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t, s) f[s, \sigma^*(s)]\, ds$$

и (так как $K(t, t) \equiv 0$)

$$\frac{dy^*(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial K(t, s)}{\partial t} f[s, \sigma^*(s)]\, ds.$$

Поэтому

$$\alpha(t)y^*(t)+\frac{dy^*(t)}{dt}=\int_{-\infty}^{t}K_\alpha(t,\ s)f[s,\ \sigma^*(s)]\,ds$$

и, следовательно,

$$\frac{dy^*(t)}{dt}+\alpha(t)y^*(t)=\sigma^*(t).$$

Значит,

$$y^*(t)\equiv x^*(t).$$

Нам осталось доказать, что пп-решение $x^*(t)$ уравнения (13.2) устойчиво. Для этого достаточно (см. п. 4.3) установить регулярность пп-операторов

$$L(\mu)x=Lx-\mu\left[\frac{dx}{dt}+\alpha(t)x\right]f'_\sigma[t,\ \sigma^*(t)]$$

при всех $\mu\in[0,1]$. Иначе говоря, достаточно показать, что при $\mu\in[0,\ 1]$ и при любой пп-функции $f(t)$ каждое из уравнений

$$L(\mu)x=f(t) \tag{13.45}$$

имеет единственное пп-решение. Уравнение (13.45) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t)=\mu\int_{-\infty}^{t}K(t,\ s)f'_\sigma[s,\ \sigma^*(s)]\left[\frac{dx(s)}{ds}+\alpha(s)x(s)\right]ds+g(t),$$

где

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}K(t,\ s)f(s)\,ds.$$

Пусть

$$\sigma(t)=\frac{dx(t)}{dt}+\alpha(t)x(t).$$

Тогда, очевидно, определение пп-решений $x(t)$ уравнений (13.45) эквивалентно отысканию пп-решений $\sigma(t)$ интегральных уравнений

$$\sigma(t)=\mu\int_{-\infty}^{t}K_\alpha(t,\ s)f'_\sigma[s,\ \sigma^*(s)]\,\sigma(s)\,ds+g_\alpha(t), \tag{13.46}$$

где

$$g_\alpha(t) = \frac{dg(t)}{dt} + \alpha(t)\, g(t).$$

Уравнение (13.46) при каждом $\mu \in [0, 1]$ имеет в $B(R^1)$ единственное решение, если спектральный радиус интегрального оператора

$$S\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} K_\alpha(t, s) f'_\sigma[s, \sigma^*(s)]\, \sigma(s)\, ds$$

меньше 1.

Для оценки спектрального радиуса оператора S воспользуемся тем, что S положителен относительно конуса неотрицательных функций и что в силу (13.6) и (13.13)

$$S\sigma^*(t) \ll \sigma^*(t).$$

Поэтому из теоремы 5.1 вытекает, что спектральный радиус оператора S меньше 1.

Теорема 13.3 полностью доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 13.3 все решения $x(t)$ уравнения (13.2), начальные условия которых удовлетворяют неравенствам (13.24), стремятся при $t \to \infty$ к пп-решению $x^*(t)$.

13.6. Регулярность вспомогательных пп-операторов. Рассмотрим семейство пп-операторов

$$L(\gamma)x = \frac{d^2x}{dt^2} + [p(t) - \gamma]\frac{dx}{dt} + [q(t) - \gamma\alpha(t)]\, x, \qquad (13.47)$$

где γ — положительный числовой параметр, а $\alpha(t)$ — некоторая пп-функция.

Лемма 13.2. *Пусть* $M(\alpha) > 0$.

Тогда существует такое $\gamma_0 > 0$, *что при* $\gamma \geqslant \gamma_0$ *пп-операторы* (13.47) *регулярны и их функции Грина* $G(t, s; \gamma)$ *неположительны.*

Ограничимся доказательством леммы для случая, когда $p(t) \in B^1(R^1)$. К общему случаю можно перейти построениями, примененными при доказательстве леммы 13.1.

Для доказательства воспользуемся теоремой 9.9. Согласно этой теореме утверждение леммы будет

установлено, если удастся построить такие пп-функции $\nu(t;\gamma)\in B^2(R^1)$ $(\gamma\geqslant\gamma_0)$, что

$$\nu(t;\ \gamma)\gg 0 \qquad (\gamma\geqslant\gamma_0) \tag{13.48}$$

и

$$L(\gamma)\nu(t;\ \gamma)<0 \qquad (-\infty<t<\infty,\ \gamma\geqslant\gamma_0). \tag{13.49}$$

Положим

$$p(t;\ \gamma)=p(t)-\gamma, \qquad q(t;\ \gamma)=q(t)-\gamma\alpha(t)$$

и

$$r(t;\ \gamma)=q(t;\ \gamma)-\frac{1}{4}p^2(t;\ \gamma)-\frac{1}{2}p(t;\ \gamma)M[p(t;\ \gamma)]+$$
$$+\frac{3}{4}M^2[p(t;\ \gamma)].$$

Легко проверить равенство

$$M[r(t;\ \gamma)]=M(q)-\frac{1}{4}M(p^2)+\frac{1}{4}M^2(p)-\gamma M(\alpha). \tag{13.50}$$

Так как по предположению $M(\alpha)>0$, то из (13.50) вытекает существование такого γ_1, что

$$M[r(t;\ \gamma)]<0 \qquad (\gamma\geqslant\gamma_1) \tag{13.51}$$

Число γ_1 можно считать настолько большим, что одновременно

$$M[p(t;\ \gamma)]=M(p)-\gamma<0 \qquad (\gamma\geqslant\gamma_1). \tag{13.52}$$

Пусть

$$\eta(t;\ \gamma)=r(t;\ \gamma)-M[r(t;\ \gamma)] \qquad (\gamma\geqslant\gamma_1). \tag{13.53}$$

Обозначим через $\eta_0(t;\gamma)$ такой тригонометрический многочлен с нулевым средним, который удовлетворяет неравенству

$$\|\eta_0(t;\ \gamma)-\eta(t;\ \gamma)\|_{B(R^1)}<-\frac{1}{2}M[r(t;\ \gamma)] \quad (\gamma\geqslant\gamma_1). \tag{13.54}$$

Введем обозначение

$$\xi_0(t;\ \gamma)=\int_t^\infty e^{-M[p(t;\ \gamma)](t-s)}\eta_0(s;\ \gamma)\,ds \qquad (\gamma\geqslant\gamma_1)$$

и положим

$$v(t;\ \gamma)=e^{\int\limits_{c(\gamma)}^{t}\xi_0(\tau;\ \gamma)\,d\tau}\qquad(\gamma\geqslant\gamma_1),\tag{13.55}$$

где $c(\gamma)$ — такие числа, что

$$M\left[\int\limits_{c(\gamma)}^{t}\xi_0(\tau;\ \gamma)\,d\tau\right]=0.$$

Функция (13.55) очевидным образом удовлетворяет неравенствам (13.48). Остается установить справедливость неравенства (13.49) при $\gamma\geqslant\gamma_0$, где γ_0 — некоторое число, большее γ_1.

Пусть

$$f(t;\ \gamma)=-r(t;\ \gamma)+\eta_0(t;\ \gamma)\qquad(\gamma\geqslant\gamma_1).$$

Тогда, очевидно,

$$\xi_0(t;\ \gamma)=\int\limits_{t}^{\infty}e^{-M[p(t,\ \gamma)](t-s)}[r(s;\ \gamma)+f(s;\ \gamma)]\,ds.$$

Далее, нетрудно проверить, что

$$\xi_0(t;\ \gamma)=\frac{1}{2}M[p(t;\ \gamma)]-\frac{1}{2}p(t;\ \gamma)-x(t;\ \gamma),\tag{13.56}$$

где через $x(t;\gamma)$ обозначено пп-решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}+M[p(t;\ \gamma)]\,x=\varphi(t;\ \gamma),\tag{13.57}$$

а

$$\varphi(t;\ \gamma)=q(t;\ \gamma)-\frac{1}{2}p^2(t;\ \gamma)-\frac{1}{2}\frac{dp(t)}{dt}+$$
$$+\frac{1}{4}M^2[p(t;\ \gamma)]+f(t;\ \gamma).$$

Из (13.56) следует тождество

$$L(\gamma)\,v(t;\ \gamma)\equiv[x^2(t;\ \gamma)-f(t;\ \gamma)]\,v(t;\ \gamma)\tag{13.58}$$
$$(\gamma\geqslant\gamma_1,\ -\infty<t<\infty).$$

Тождество (13.58) в силу неравенства (13.54) означает, что выполнено неравенство

$$L(\gamma)\,v(t;\ \gamma) \leqslant \left\{x^2(t;\ \gamma) + \frac{1}{2}M[r(t;\ \gamma)]\right\} v(t;\ \gamma)$$
$$(\gamma \geqslant \gamma_1,\ -\infty < t < \infty).$$

Поэтому для завершения доказательства леммы нужно установить существование такого $\gamma_0 \geqslant \gamma_1$, что

$$x^2(t;\ \gamma) + \frac{1}{2}M[r(t;\ \gamma)] < 0 \qquad (13.59)$$
$$(\gamma \geqslant \gamma_0,\ -\infty < t < \infty).$$

Так как в силу (13.50) $M[r(t;\gamma)] \to -\infty$ при $\gamma \to \infty$, то неравенства (13.59) будут доказаны, если установить равномерную (по $\gamma \geqslant \gamma_1$) ограниченность норм в $B(R^1)$ пп-решений $x(t;\gamma)$ уравнений (13.57).

Очевидно,

$$x(t;\ \gamma) = -\int_t^\infty e^{[\gamma - M(p)](t-s)}\varphi(s;\ \gamma)\,ds \qquad (\gamma \geqslant \gamma_1)$$

и поэтому

$$\|x(t;\ \gamma)\|_{B(R^1)} \leqslant \frac{1}{\gamma - M(p)}\|\varphi(t;\ \gamma)\|_{B(R^1)}.$$

Следовательно, из очевидной оценки

$$\|\varphi(t;\ \gamma)\|_{B(R^1)} \leqslant a + b\gamma,$$

где a, b — положительные постоянные, вытекают неравенства

$$\|x(t;\ \gamma)\|_{B(R^1)} \leqslant \frac{a + b\gamma}{\gamma - M(p)} \qquad (\gamma \geqslant \gamma_1).$$

Лемма 13.2 доказана.

13.7. Доказательство теоремы 13.4. В силу леммы 13.2 найдется такое $\gamma_0 > 0$, что при $\gamma \geqslant \gamma_0$ пп-операторы (13.47) регулярны и их функции Грина $G(t, s; \gamma)$ неположительны.

Рассмотрим семейство уравнений Риккати

$$\frac{dz}{dt} = z^2 - p(t;\ \gamma)z + q(t;\ \gamma) \qquad (\gamma \geqslant \gamma_0) \qquad (13.60)$$

и обозначим через $z_1(t;\gamma)$ и $z_2(t;\gamma)$ соответствующие граничные решения. Тогда согласно формуле (9.65)

$$G(t,\ s;\ \gamma)=\begin{cases}\dfrac{1}{z_1(t;\ \gamma)-z_2(t;\ \gamma)}e^{-\int\limits_s^t z_2(\tau;\ \gamma)\,d\tau}, & \text{если}\quad t\geqslant s,\\[2ex] \dfrac{1}{z_1(t;\ \gamma)-z_2(t;\ \gamma)}e^{-\int\limits_s^t z_1(\tau;\ \gamma)\,d\tau}, & \text{если}\quad t<s.\end{cases}$$

Из (13.18) и (13.19) вытекает, что

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}\leqslant\alpha^2(t)-p(t;\ \gamma)\,\alpha(t)+q(t;\ \gamma)\qquad(-\infty<t<\infty),$$

причем $\alpha(t)$ не является решением ни одного из уравнений (13.60). Поэтому из теоремы 9.3 следует, что либо

$$\inf_{-\infty<t<\infty}[\alpha(t)-z_2(t;\ \gamma)]>0, \tag{13.61}$$

либо

$$\inf_{-\infty<t<\infty}[z_1(t;\ \gamma)-\alpha(t)]>0. \tag{13.61a}$$

Второе из этих неравенств не может выполняться, так как из него вытекало бы, что

$$M[z_1(t;\gamma)]>M(\alpha)>0,$$

а при доказательстве теоремы 9.9 было установлено неравенство

$$M[z_1(t;\gamma)]<0.$$

Итак, выполнено неравенство (13.61).

Положим

$$G_\alpha(t,\ s;\ \gamma)=\alpha(t)\,G(t,\ s;\ \gamma)+\frac{\partial G(t,\ s;\ \gamma)}{\partial t}.$$

Из (13.61) следует, что

$$G_\alpha(t,s;\gamma)<0\qquad(-\infty<t,\ s<\infty). \tag{13.62}$$

Определим действующие и непрерывные в $B(R^1)$ интегральные операторы

$$\Pi_\alpha(\gamma)\,\sigma(t)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_\alpha(t,\ s;\ \gamma)\{\gamma\sigma(s)-f[s,\ \sigma(s)]\}\,ds. \tag{13.63}$$

Вопрос о существовании и единственности удовлетворяющего условиям (13.20) пп-решения уравнения (13.2) сводится (как в п. 13.5 при доказательстве теоремы 13.3) к вопросу о существовании и единственности в $\hat{K}$ ненулевой неподвижной точки любого из операторов (13.69) при $\gamma \geqslant \gamma_0$.

В силу леммы 13.1 существует пп-функция $u(t) \in B^2(R^1)$, удовлетворяющая неравенствам

$$u(t) \gg 0, \qquad Lu(t) \gg 0. \tag{13.64}$$

По функции $u(t)$ построим пп-функцию

$$\sigma^0(t) = \frac{du(t)}{dt} + \alpha(t)\, u(t). \tag{13.65}$$

Так как $M(\alpha) > 0$ и $u(t) \gg 0$, то функция (13.65) принимает в некоторых точках положительные значения и, следовательно, неотрицательная пп-функция

$$\sigma_+^0(t) = \begin{cases} \sigma^0(t), & \text{если} \quad \sigma^0(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad \sigma^0(t) \leqslant 0, \end{cases}$$

не равна тождественно нулю.

Из условия (13.11) и из неравенств (13.64) вытекает существование такого $\delta_0 > 0$, что

$$L(\gamma)[\delta u(t)] = L[\delta u(t)] - \gamma\delta\sigma^0(t) \geqslant$$
$$\geqslant -\{\gamma\delta\sigma^0(t) - f_0[t, \delta\sigma^0(t)]\} \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{13.66}$$

при всех γ и при $0 < \delta \leqslant \delta_0$. Здесь

$$f_0(t, \sigma) = \begin{cases} f(t, \sigma), & \text{если} \quad \sigma \geqslant 0, \\ 0 & \text{если} \quad \sigma < 0. \end{cases}$$

Из (13.66) вытекает, что

$$L(\gamma)[\delta u(t)] = -\{\gamma\delta\sigma^0(t) - f_0[t, \delta\sigma^0(t)]\} + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная пп-функция. Отсюда

$$\delta u(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t, s; \gamma)\{\gamma\delta\sigma^0(s) - f_0[s, \delta\sigma^0(s)]\}\, ds +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s; \gamma)\psi(s)\, ds.$$

Поэтому

$$\delta\sigma^0(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G_\alpha(t, s; \gamma)\{\gamma\delta\sigma^0(s) - f_0[s, \delta\sigma^0(s)]\}\,ds + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} G_\alpha(t, s; \gamma)\psi(s)\,ds,$$

откуда в силу (13.62) следует неравенство

$$\delta\sigma^0(t) \leqslant -\int_{-\infty}^{\infty} G_\alpha(t, s; \gamma)\{\gamma\delta\sigma^0(s) - f_0[s, \delta\sigma^0(s)]\}\,ds. \quad (13.67)$$

Из (13.11) вытекает, что

$$\frac{\partial f_0(t, 0)}{\partial\sigma} = \frac{\partial f(t, 0)}{\partial\sigma} = 0.$$

Следовательно, можно считать, что при $\gamma \geqslant \gamma_0$ функция $\gamma\sigma - f_0(t, \sigma)$ не убывает по σ при $\sigma \in (-\infty, \eta_0)$, где

$$\eta_0 = \delta_0 \sup_{-\infty < t < \infty} \sigma^0(t).$$

Но тогда (13.67) позволяет заключить, что при $\gamma \geqslant \gamma_0$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$

$$\delta\sigma^0(t) \leqslant \Pi_\alpha(\gamma)[\delta\sigma_+^0(t)],$$

и, далее,

$$\delta\sigma_+^0(t) \leqslant \Pi_\alpha(\gamma)[\delta\sigma_+^0(t)] \qquad (\gamma \geqslant \gamma_0;\ 0 < \delta \leqslant \delta_0). \quad (13.68)$$

Обозначим через $\nu_0(t)$ пп-решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + \alpha(t)x = 1.$$

Очевидно, $\nu_0(t) \gg 0$.

Из условия (13.12) вытекает существование такого $R_0 > 0$, что при $R \geqslant R_0$

$$L\nu_0(t) \leqslant \frac{f(t, R)}{R} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

или, что то же,

$$L(\gamma)[R\nu_0(t)] = -[\gamma R - f(t, R)] + x(t) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

где $x(t)$ — неположительная пп-функция. Последнее равенство перепишем в виде

$$R\nu_0(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t, s; \gamma)[\gamma R - f(s, R)]\,ds + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s; \gamma)\,x(s)\,ds$$

и поэтому

$$R = \Pi_\alpha(\gamma)\,R + \int_{-\infty}^{\infty} G_\alpha(t, s; \gamma)\,x(s)\,ds,$$

откуда в силу (13.62)

$$R \geqslant \Pi_\alpha(\gamma)\,R \qquad (R \geqslant R_0;\ \gamma \geqslant \gamma_0). \tag{13.69}$$

Из (13.68) и (13.69) вытекает, что операторы $\Pi_\alpha(\gamma)$ при достаточно больших γ оставляют инвариантными конусные отрезки $\langle \delta\sigma_+^0(t), R\rangle$. После этого доказательство можно завершить аналогично доказательству теорем 13.2 и 13.3.

Глава 4

УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Вещи бывают великими и малыми не токмо по воле судьбы и обстоятельств, но также и по понятиям каждого.

Козьма Прутков

§ 14. Линейные уравнения

14.1. Лемма Н. Н. Боголюбова. Рассмотрим в $B(R^n)$ регулярный пп-оператор

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)x \tag{14.1}$$

и обозначим через $G(t, s)$ его функцию Грина.

Пусть вектор-функция $f(t; \varepsilon)$ со значениями в R^n определена при $-\infty < t < \infty$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Пусть $f(t; \varepsilon)$ почти периодична по t при каждом фиксированном ε. Тогда линейное неоднородное уравнение

$$Lx = f(t; \varepsilon) \tag{14.2}$$

при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ будет иметь единственное пп-решение $x(t; \varepsilon)$. Нас в этом пункте будет интересовать вопрос об условиях, при которых

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| x(t; \varepsilon) \|_{B(R^n)} = 0. \tag{14.3}$$

Ясно, что равенство (14.3) выполняется, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| f(t; \varepsilon) \|_{B(R^n)} = 0. \tag{14.4}$$

Однако условие (14.4) слишком ограничительно. Например, оно не выполняется в ситуациях, когда применяют известный *принцип усреднения* *). Будем говорить, что

---

*) См., например, Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский [1].

$f(t;\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ *интегрально сходится к нулю*, если при каждом $T>0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|t-s|\leqslant T}\left|\int_s^t f(\tau;\ \varepsilon)\,d\tau\right|=0. \tag{14.5}$$

Если дополнительно к (14.5) выполнено условие

$$\|f(t;\ \varepsilon)\|_{B(R^n)}<m \qquad (0<\varepsilon<\varepsilon_0), \tag{14.6}$$

то будем говорить, что $f(t;\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ *сходится к нулю правильно.*

Лемма 14.1. *Для того чтобы было выполнено равенство* (14.3) *достаточно, чтобы* $f(t;\varepsilon)$ *при* $\varepsilon\to 0$ *сходилась к нулю правильно, и необходимо, чтобы она сходилась к нулю интегрально.*

Доказательство достаточности. Очевидно,

$$x(t;\ \varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\ s)f(s;\ \varepsilon)\,ds. \tag{14.7}$$

Производя в (14.7) замену $s=t+\tau$, получим

$$x(t;\ \varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\ t+\tau)f(t+\tau;\ \varepsilon)\,d\tau$$

или, что то же,

$$x(t;\ \varepsilon)=\int_{-\infty}^{0} G(t,\ t+\tau)\,d_\tau\left[\int_t^{t+\tau} f(\sigma;\ \varepsilon)\,d\sigma\right]+$$
$$+\int_0^{\infty} G(t,\ t+\tau)\,d_\tau\left[\int_t^{t+\tau} f(\sigma;\ \varepsilon)\,d\sigma\right].$$

Интегрируя по частям каждое слагаемое в правой части, получим

$$x(t;\ \varepsilon)=-\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial G(t,\ t+\tau)}{\partial\tau}\left[\int_t^{t+\tau} f(\sigma;\ \varepsilon)\,d\sigma\right]d\tau-$$
$$-\int_0^{\infty}\frac{\partial G(t,\ t+\tau)}{\partial\tau}\left[\int_t^{t+\tau} f(\sigma;\ \varepsilon)\,d\sigma\right]d\tau. \tag{14.8}$$

В п. 4.1 было показано, что

$$G(t, s) = \begin{cases} U(t) P_+ U^{-1}(s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -U(t) P_- U^{-1}(s), & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{14.9}$$

Поэтому при $\tau \neq 0$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial G(t, t+\tau)}{\partial \tau} \right| \leqslant m_1 e^{-\gamma_1 |\tau|} \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{14.10}$$

где m_1, γ_1 — положительные постоянные.

Из (14.6) и (14.10) вытекает, что при произвольном $T > 0$

$$|x(t; \varepsilon)| \leqslant m m_1 \int_{-\infty}^{-T} e^{-\gamma_1 |\tau|} |\tau| \, d\tau +$$

$$+ m_1 \int_{-T}^{T} e^{-\gamma_1 |\tau|} \left| \int_t^{t+\tau} f(\sigma; \varepsilon) \, d\sigma \right| d\tau + m m_1 \int_T^{\infty} e^{-\gamma_1 |\tau|} \tau \, d\tau.$$

Пусть задано $\eta > 0$. Из последнего неравенства вытекает существование такого $T > 0$, что

$$|x(t; \varepsilon)| < \frac{\eta}{2} + \frac{2m_1}{\gamma_1} \sup_{|\tau - s| \leqslant T} \left| \int_s^{\tau} f(\sigma; \varepsilon) \, d\sigma \right|. \tag{14.11}$$

Так как выполнено условие (14.5), то из (14.11) следует, что

$$|x(t; \varepsilon)| < \eta \qquad (-\infty < t < \infty)$$

при малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Достаточность доказана.

Необходимость доказывается совсем просто. Для этого нужно проинтегрировать в пределах от s до t тождество

$$\frac{dx(t; \varepsilon)}{dt} + A(t) x(t; \varepsilon) \equiv f(t; \varepsilon)$$

и заметить, что из получающихся равенств вытекает оценка

$$\left| \int_s^t f(\sigma; \varepsilon) \, d\sigma \right| \leqslant (2 + T \| A(t) \|_{B(R^n)}) \| x(t; \varepsilon) \|_{B(R^n)}.$$

Лемма доказана.

Важным примером функции, правильно сходящейся к нулю при $\varepsilon \to 0$, может служить функция

$$f(t;\ \varepsilon) = f_0(t/\varepsilon), \tag{14.12}$$

где $f_0(t)$ — пп-функция с нулевым средним.

14.2. Зависимость функции Грина от параметра. Рассмотрим семейство пп-операторов

$$L(\varepsilon)\,x = \frac{dx}{dt} + A(t;\ \varepsilon)\,x \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0). \tag{14.13}$$

Будем говорить, что пп-матрицы $A(t;\varepsilon)$ *правильно сходятся при* $\varepsilon \to 0$ *к пп-матрице* $A(t)$, если

$$\| A(t;\ \varepsilon) \|_{B(R^n)} \leqslant m \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0) \tag{14.14}$$

и при любом $T > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|t-s| \leqslant T} \left| \int_s^t [A(\tau;\ \varepsilon) - A(\tau)]\, d\tau \right| = 0. \tag{14.15}$$

Теорема 14.1. *Пусть оператор* (14.1) *регулярен. Пусть пп-матрицы* $A(t;\varepsilon)$ *правильно сходятся при* $\varepsilon \to 0$ *к пп-матрице* $A(t)$.

Тогда при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *пп-операторы* (14.13) *регулярны, причем*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{-\infty < s,\ t < \infty} e^{\gamma_0 |t-s|} |\, G(t,\ s;\ \varepsilon) - G(t,\ s)\,| = 0, \tag{14.16}$$

где $G(t, s; \varepsilon)$, $G(t, s)$ — *функции Грина соответственно операторов* (14.13) *и* (14.1), *а* γ_0 — *некоторое положительное число.*

Доказательство. Положим

$$H(t;\ \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\ s)\, B(s;\ \varepsilon)\, ds, \tag{14.17}$$

где $B(t;\varepsilon) = A(t) - A(t;\varepsilon)$. Из леммы 14.1 вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| H(t;\ \varepsilon) \|_{B(R^n)} = 0. \tag{14.18}$$

Пусть $f(t)$ — некоторая пп-функция. Почти периодическое решение $x(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} + A(t;\ \varepsilon)\,x = f(t)$$

будем искать в виде

$$x(t) = y(t) + H(t;\varepsilon)\,y(t). \tag{14.19}$$

Простой подсчет показывает, что $y(t)$ нужно определять как пп-решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} + A(t)\,y + D(t;\ \varepsilon)\,y = [I + H(t;\ \varepsilon)]^{-1} f(t), \tag{14.20}$$

где

$$D(t;\ \varepsilon) = -[I + H(t;\ \varepsilon)]^{-1}\{H(t;\ \varepsilon)\,A(t) + B(t;\ \varepsilon)\,H(t;\ \varepsilon)\}.$$

Из (14.18) вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \| D(t;\ \varepsilon) \|_{B(R^n)} = 0.$$

Поэтому при достаточно малых ε каждое уравнение (14.20) имеет единственное пп-решение. Следовательно, при достаточно малых ε пп-операторы $L(\varepsilon)$ регулярны.

Левые части уравнений (14.20) определяют регулярные (при малых ε) пп-операторы; их функции Грина обозначим через $G_0(t, s; \varepsilon)$. В силу теоремы 4.3

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{-\infty < t,\ s < \infty} e^{\gamma_0 |t-s|} |\, G(t,\ s) - G_0(t,\ s;\ \varepsilon)\,| = 0, \tag{14.21}$$

где γ_0 — положительное число.

Так как

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t,\ s;\ \varepsilon)\,[I + H(s;\ \varepsilon)]^{-1} f(s)\,ds,$$

то из (14.19) вытекает равенство

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [I + H(t;\ \varepsilon)]\,G_0(t,\ s;\ \varepsilon)\,[I + H(s;\ \varepsilon)]^{-1} f(s)\,ds,$$

и из единственности функции Грина вытекает, что

$$G(t,\ s;\ \varepsilon) = [I + H(t;\ \varepsilon)]\,G_0(t,\ s;\ \varepsilon)\,[I + H(s;\ \varepsilon)]^{-1}$$
$$(-\infty < t,\ s < \infty).$$

Из последнего равенства и из (14.21) вытекает (14.16).

Теорема доказана.

Единственным нетривиальным моментом доказательства теоремы 14.1 являлась замена (14.19). Эта замена предложена Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым; она широко применяется в различных вопросах теории колебаний.

Выпишем для функции Грина $G(t, s; \varepsilon)$ аналогичные (14.9) представления:

$$G(t, s; \varepsilon) = \begin{cases} U(t; \varepsilon) P_+(\varepsilon) U^{-1}(s; \varepsilon), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -U(t; \varepsilon) P_-(\varepsilon) U^{-1}(s; \varepsilon), & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{14.22}$$

Из этих представлений следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} | P_+(\varepsilon) - P_+ | = \lim_{\varepsilon \to 0} |P_-(\varepsilon) - P_-| = 0.$$

Поэтому верна

Теорема 14.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.1.

Тогда пп-операторы $L(\varepsilon)$ *при малых* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *устойчивы, если устойчив пп-оператор* L, *и неустойчивы, если* L *неустойчив.*

Пусть $A_1(t)$ — некоторая пп-матрица. Через A_0 обозначим ее среднее:

$$A_0 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A_1(\tau)\, d\tau. \tag{14.23}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1(t) x + \varepsilon B(t; \varepsilon) x \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0), \tag{14.24}$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| B(t; \varepsilon) \|_{B(R^n)} = 0. \tag{14.25}$$

Нас будет интересовать вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (14.24). Уравнение (14.24) после замены $\tau = \varepsilon t$ перепишется в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = A_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) x + B\left(\frac{\tau}{\varepsilon}; \varepsilon\right) x. \tag{14.26}$$

Очевидно, пп-матрицы $A_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)+B\left(\frac{\tau}{\varepsilon};\ \varepsilon\right)$ при $\varepsilon\to 0$ правильно сходятся к постоянной матрице (14.23). Поэтому из теоремы 14.2 вытекает простая, но важная

Теорема 14.3. *Если матрица A_0 гурвицева, то при достаточно малых $\varepsilon>0$ нулевое решение уравнения* (14.24) *экспоненциально устойчиво. Если же у матрицы A_0 есть по крайней мере одно собственное значение в правой полуплоскости, то при достаточно малых $\varepsilon>0$ нулевое решение уравнения* (14.24) *неустойчиво.*

Эта теорема принадлежит Н. Н. Боголюбову.

Допустим, что у матрицы A_0 нет собственных значений в правой полуплоскости, но есть собственные значения на мнимой оси. В этом случае исследование устойчивости нулевого решения уравнений (14.24) становится более сложной задачей. Исследованием этой задачи занимался ряд авторов (см., например, Б. П. Демидович [2], Дж. Хейл [1], И. З. Штокало [1], Н. П. Еругин [2]).

Нам понадобится лишь один из результатов И. З. Штокало; этот результат излагается ниже.

14.3. Замены Н. Н. Боголюбова — И. З. Штокало. Предположим, что уравнение (14.24) имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon A_1(t)\,x+\ \ldots\ +\varepsilon^k A_k(t)\,x+\varepsilon^{k+1}C(t;\ \varepsilon)\,x, \qquad (14.27)$$

где $A_1(t),\ \ldots,\ A_k(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, а $C(t;\varepsilon)$ — пп-матрицы, равномерно относительно $t\in(-\infty,\infty)$ непрерывные по $\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_0]$.

Для исследования устойчивости нулевого решения уравнения (14.27) естественно пытаться искать такую замену переменной x, после которой уравнение перепишется в виде

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon B_1 y+\ \ldots\ +\varepsilon^k B_k y+\varepsilon^{k+1}D(t;\ \varepsilon)\,y \qquad (14.28)$$

— уравнения с постоянными матрицами $B_1,\ \ldots,\ B_k$ и пп-матрицей $D(t;\varepsilon)$, обладающей теми же свойствами, что и матрица $C(t;\varepsilon)$.

Следуя Боголюбову — Штокало, замену будем искать в виде

$$x = [I + \varepsilon Y_1(t) + \ldots + \varepsilon^k Y_k(t)]y, \tag{14.29}$$

где $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ — пп-матрицы.

Постоянные матрицы $B_1, \ldots, B_k$ и пп-матрицы $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ ищутся одновременно из тождества

$$\left[I + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i Y_i(t)\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i B_i + \varepsilon^{k+1} D(t; \varepsilon)\right] + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \frac{dY_i(t)}{dt} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i A_i(t) + \varepsilon^{k+1} C(t; \varepsilon)\right] \cdot \left[I + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i Y_i(t)\right].$$

Раскрывая в левой и правой частях скобки и приравнивая коэффициенты при $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^k$, получаем систему матричных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dY_1(t)}{dt} &= A_1(t) - B_1, \\
\frac{dY_2(t)}{dt} &= A_2(t) + A_1(t) Y_1(t) - B_2 - Y_1(t) B_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dY_k(t)}{dt} &= A_k(t) + A_{k-1}(t) Y_1(t) + \ldots + A_1(t) Y_{k-1}(t) - \\
&\quad - B_k - Y_1(t) B_{k-1} - \ldots - Y_{k-1}(t) B_1.
\end{aligned}\right\} \tag{14.30}$$

Каждое из уравнений (14.30) имеет пп-решение $Y_i(t)$ в том и только том случае, если среднее правой части равно нулю. Поэтому для решения системы (14.30) может быть применена следующая процедура.

Матрица B_1 определяется как среднее пп-матрицы $A_1(t)$:

$$B_1 = M[A_1(t)] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A_1(\tau)\, d\tau.$$

Затем $Y_1(t)$ определяется как пп-решение первого уравнения системы (14.30) с нулевым средним. Очевидно, элементами матрицы $Y_1(t)$ будут тригонометрические многочлены с нулевым средним.

После того как найдены B_1 и $Y_1(t)$, можно найти матрицу B_2 из условия равенства нулю среднего правой части второго уравнения (14.30):

$$B_2 = M[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)].$$

Затем $Y_2(t)$ определяется как пп-решение с нулевым средним второго уравнения системы.

Последовательно продолжая этот процесс, найдем поочередно остальные матрицы $Y_3(t), \ldots, Y_k(t)$.

14.4. Формулы теории возмущений. Естественно ожидать, что в основных случаях решение уравнения (14.28) определяется расположением собственных значений матрицы

$$B(\varepsilon) = B_1 + \varepsilon B_2 + \ldots + \varepsilon^{k-1}B_k \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0). \quad (14.31)$$

Мы ограничимся анализом того случая, когда у матрицы B_1 есть простое нулевое собственное значение, а остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости. Как известно (см., например, И. М. Гельфанд [1]), у матрицы (14.31) при малых ε есть аналитически зависящее от ε простое вещественное собственное значение $\lambda(\varepsilon)$, которое обращается в нуль при $\varepsilon = 0$. Остальные собственные значения матрицы (14.31) при малых ε будут по-прежнему лежать в левой полуплоскости.

Собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ можно представить рядом

$$\lambda(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_j\varepsilon^j + \ldots \qquad (14.32)$$

Знак собственного значения $\lambda(\varepsilon)$ при малых ε определяется лишь знаком первого отличного от нуля коэффициента a_j; номер этого коэффициента обозначим через j_0. Значение j_0 в следующем пункте будет играть существенную роль.

Через e_0 и g_0 обозначим собственные векторы соответственно матрицы B_1 и сопряженной ей матрицы B_1^*, отвечающие нулевому собственному значению:

$$B_1 e_0 = 0, \qquad B_1^* g_0 = 0.$$

Будем считать векторы e_0 и g_0 нормированными равенством

$$(e_0, g_0) = 1.$$

Аналогично, обозначим через $e_0(\varepsilon)$ и $g_0(\varepsilon)$ собственные векторы матриц $B(\varepsilon)$ и $B^*(\varepsilon)$, отвечающие собственному значению $\lambda(\varepsilon)$:

$$B(\varepsilon)\, e_0(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\, e_0(\varepsilon), \quad B^*(\varepsilon)\, g_0(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\, g_0(\varepsilon) \tag{14.33}$$

и нормированные равенством

$$(e_0(\varepsilon),\, g_0(\varepsilon)) = 1. \tag{14.34}$$

Из теории возмущений (см. И. М. Гельфанд [1]) вытекает, что при малых ε справедливы представления

$$e_0(\varepsilon) = e_0 + \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \ldots + \varepsilon^i e_i + \ldots \tag{14.35}$$

и

$$g_0(\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots + \varepsilon^i g_i + \ldots, \tag{14.36}$$

где e_i, g_i — некоторые векторы, удовлетворяющие равенствам

$$(e_i, g_0) = (e_0, g_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{14.37}$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots$ и векторы $e_1, e_2, \ldots$; $g_1, g_2, \ldots$ можно определить методом неопределенных коэффициентов. Здесь нас будут интересовать лишь j_0 и a_{j_0}.

Подставляя (14.31), (14.32) и (14.35) в первое из равенств (14.33), получим

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^{i-1} B_i\right) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i e_i = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon^i\right) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i e_i. \tag{14.38}$$

Раскрывая скобки в левой и правой частях (14.38) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим бесконечную систему уравнений, из которой нужно будет определить числа $a_1, a_2, \ldots$ и векторы $e_1, e_2, \ldots$

Нас будет интересовать лишь тот случай, когда номер j_0 первого отличного от нуля коэффициента ряда (14.32) не превышает $k - 1$. Поэтому мы выпишем лишь те уравнения системы, которые используются при определении коэффициентов $a_1, \ldots, a_{k-1}$. Эти уравнения,

очевидно, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &B_1e_1 = a_1e_0 - B_2e_0,\\ &B_1e_2 = a_1e_1 + a_2e_0 - B_3e_0 - B_2e_1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &B_1e_{k-1} = a_1e_{k-2} + a_2e_{k-3} + \dots + a_{k-1}e_0 -\\ &\qquad - B_ke_0 - B_{k-1}e_1 - \dots - B_2e_{k-2}. \end{aligned}\right\} \quad (14.39)$$

Из условия разрешимости первого уравнения системы (14.39) следует, что

$$a_1 = (B_2e_0,\ g_0). \quad (14.40)$$

Если a_1 оказывается равным нулю, то нужно вычислять a_2. Для этого из первого уравнения системы нужно найти вектор e_1, удовлетворяющий условию (14.37), а затем из условия разрешимости второго уравнения системы определить a_2:

$$a_2 = (B_3e_0 + B_2e_1,\ g_0). \quad (14.41)$$

Если окажется, что и $a_2 = 0$, то переходим к третьему уравнению системы и т. д.

14.5. Теорема И. З. Штокало. Вернемся к изучению системы (14.27). Допустим, что при помощи замены (14.29) мы перешли к системе (14.28). Пусть у матрицы B_1 нуль является простым собственным значением, а остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости. Вычислим тогда собственное значение (14.32) матрицы (14.31) при помощи процедуры, изложенной в п. 14.4. Пусть a_{j_0} — первый отличный от нуля коэффициент ряда (14.32), причем $j_0 \leqslant k-1$.

Теорема 14.4. *Если*

$$a_{j_0} < 0, \quad (14.42)$$

то пп-операторы

$$L(\varepsilon)\,x = \frac{dx}{dt} - [\varepsilon A_1(t) + \varepsilon^2 A_2(t) + \dots + \varepsilon^k A_k(t) + \varepsilon^{k+1} C(t;\varepsilon)]\,x \quad (14.43)$$

при малых положительных ε *регулярны и устойчивы. Если же*

$$a_{j_0} > 0, \quad (14.44)$$

то пп-операторы (14.43) *при малых положительных* ε *регулярны и неустойчивы.*

Доказательство. Вопрос о регулярности и устойчивости пп-операторов (14.43) эквивалентен, очевидно, вопросу о регулярности и устойчивости пп-операторов

$$L_1(\varepsilon)\,x = \frac{dx}{dt} - \left[B_1 + \varepsilon B_2 + \ldots + \varepsilon^{k-1}B_k + \varepsilon^k D\left(\frac{t}{\varepsilon};\,\varepsilon\right)\right]x. \tag{14.45}$$

Рассмотрим вспомогательное семейство пп-операторов

$$L_1(\varepsilon;\,\mu)\,x = \frac{dx}{dt} - \left[B_1 + \varepsilon B_2 + \ldots + \varepsilon^{k-1}B_k + \mu\varepsilon^k D\left(\frac{t}{\varepsilon};\,\varepsilon\right)\right]x, \tag{14.46}$$

где μ принимает значения из промежутка [0, 1]. При $\mu = 1$ операторы (14.46) превращаются в пп-операторы (14.45), а при $\mu = 0$ в регулярные пп-операторы

$$L_1(\varepsilon;\,0)\,x = \frac{dx}{dt} - [B_1 + \varepsilon B_2 + \ldots + \varepsilon^{k-1}B_k]\,x, \tag{14.47}$$

устойчивость которых при малых положительных ε определяется знаком числа a_{j_0}.

Пусть при некотором фиксированном ε все пп-операторы (14.46) регулярны. Тогда из результатов п. 4.3 вытекает, что оператор (14.45) устойчив или неустойчив в зависимости от того, устойчив ли оператор (14.47). Следовательно, для доказательства теоремы достаточно установить существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ операторы (14.46) регулярны. Иначе говоря, достаточно показать, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и любой пп-функции $f(t)$ уравнение

$$L_1(\varepsilon;\,\mu)\,x = f(t) \tag{14.48}$$

имеет пп-решение.

Уравнение (14.48) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = \mu\varepsilon^k \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\,s;\,\varepsilon)\,D\left(\frac{s}{\varepsilon};\,\varepsilon\right)x(s)\,ds + \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\,s;\,\varepsilon)\,f(s)\,ds,$$

где $G(t, s; \varepsilon)$ — функция Грина пп-оператора (14.47). Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторое положительное число, норма интегрального оператора

$$S(\varepsilon)\, x(t) = \varepsilon^k \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s; \varepsilon)\, D\left(\frac{s}{\varepsilon}; \varepsilon\right) x(s)\, ds \qquad (14.49)$$

меньше 1.

Пусть $e_0(\varepsilon)$ и $g_0(\varepsilon)$ — собственные векторы (14.35) и (14.36) матриц $B(\varepsilon)$ и $B^*(\varepsilon)$. Каждый элемент $x \in R^n$ можно представить в виде

$$x = P(\varepsilon)x + Q(\varepsilon)x, \qquad (14.50)$$

где

$$P(\varepsilon)\, x = \frac{(x, g_0(\varepsilon))}{(e_0(\varepsilon), g_0(\varepsilon))}\, e_0(\varepsilon) = (x, g_0(\varepsilon))\, e_0(\varepsilon),$$

а $Q(\varepsilon)$ — оператор проектирования на инвариантное для матрицы $B(\varepsilon)$ подпространство $R^{n-1}(\varepsilon) \subset R^n$, ортогональное вектору $g_0(\varepsilon)$.

Введем в R^n семейство норм

$$|x|_\varepsilon = |P(\varepsilon)x| + |Q(\varepsilon)x|. \qquad (14.51)$$

Поскольку операторы $P(\varepsilon)$ и $Q(\varepsilon)$ непрерывно зависят от ε (при малых ε), то найдется такое $\varepsilon_0 > 0$ и такая положительная постоянная m_0, что при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$|x| \leqslant |x|_\varepsilon \leqslant m_0 |x| \qquad (x \in R^n). \qquad (14.52)$$

Для дальнейших оценок нам понадобится очевидное неравенство

$$|e^{B(\varepsilon)t} Q(\varepsilon)| \leqslant m e^{-\gamma_0 t} \qquad (t \geqslant 0), \qquad (14.53)$$

где m, $\gamma_0 > 0$, справедливое при достаточно малых ε.

Рассмотрим вначале случай, когда выполнено неравенство (14.42). В этом случае

$$G(t, s; \varepsilon) = \begin{cases} e^{B(\varepsilon)(t-s)}, & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ 0, & \text{если} \quad t < s. \end{cases}$$

Поэтому при любом $x \in R^n$ и $t \geqslant s$

$$|G(t, s; \varepsilon)x| \leqslant |e^{B(\varepsilon)(t-s)}P(\varepsilon)x| + |e^{B(\varepsilon)(t-s)}Q(\varepsilon)x| \leqslant \\ \leqslant e^{\lambda(\varepsilon)(t-s)}|P(\varepsilon)x| + me^{-\gamma_0(t-s)}|Q(\varepsilon)x|,$$

откуда вытекает справедливость при достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенств

$$|G(t, s; \varepsilon)x| \leqslant m_1 e^{\lambda(\varepsilon)(t-s)}|x|_\varepsilon \qquad (x \in R^n;\ t \geqslant s).$$

Из последнего неравенства вытекает простая оценка нормы оператора (14.49):

$$\|S(\varepsilon)\|_{B(R^n)} \leqslant \frac{m_0 m_1}{|\lambda(\varepsilon)|}\varepsilon^k \cdot \|D(t; \varepsilon)\|_{B(R^n)},$$

из которой следует предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|S(\varepsilon)\|_{B(R^n)} = 0. \tag{14.54}$$

Первое утверждение теоремы 14.4 доказано.

Пусть теперь выполнено неравенство (14.44). В этом случае

$$G(t, s; \varepsilon) = \begin{cases} e^{B(\varepsilon)(t-s)}Q(\varepsilon), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -e^{\lambda(\varepsilon)(t-s)}P(\varepsilon), & \text{если} \quad t < s. \end{cases}$$

Поэтому из (14.53) вытекает справедливость при малых $\varepsilon > 0$ оценки

$$|G(t, s; \varepsilon)x| \leqslant m_2 e^{-\lambda(\varepsilon)|t-s|}|x|,$$

из которой следует, что

$$\|S(\varepsilon)\|_{B(R^n)} \leqslant \frac{2m_0 m_2}{\lambda(\varepsilon)}\varepsilon^k \|D(t; \varepsilon)\|_{B(R^n)}.$$

Таким образом, и в этом случае выполнено предельное равенство (14.54).

Теорема 14.4 полностью доказана.

Принимаясь за дело, соберись с духом.

Козьма Прутков

§ 15. Бифуркация почти периодических решений

15.1. Постановка задачи. В этом параграфе рассматривается вопрос о рождении пп-решений из состояния равновесия при изменении параметров, от которых за-

висят дифференциальные уравнения. Предположим, что у изучаемой системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \mu) \tag{15.1}$$

с почти периодической по t правой частью есть при всех значениях параметра μ нулевое решение ($f(t, 0; \mu) \equiv 0$). Значение μ_0 параметра μ называется *точкой бифуркации*, если каждому $\eta > 0$ соответствует такое $\mu \in (\mu_0 - \eta, \mu_0 + \eta)$, при котором система (15.1) имеет ненулевое пп-решение $x(t; \mu)$, удовлетворяющее неравенству

$$\| x(t; \mu) \|_{B(R^n)} < \eta. \tag{15.2}$$

Допустим, что правая часть уравнения (15.1) достаточно гладкая по пространственным переменным. Рассмотрим тогда пп-операторы

$$L(\mu)\, x = \frac{dx}{dt} - f'_x(t, 0; \mu)\, x. \tag{15.3}$$

Пусть при некотором μ_0 оператор $L(\mu_0)$ регулярен, и пусть пп-матрицы $f'_x(t, 0; \mu)$ при $\mu \to \mu_0$ правильно сходятся к $f'_x(t, 0; \mu_0)$. Тогда у уравнения (15.1) при близких к μ_0 значениях μ нет малых ненулевых пп-решений — для доказательства достаточно применить принцип сжатых отображений к интегральному оператору

$$\Pi(\mu)\, x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, s; \mu) \{ f[s, x(s); \mu] - f'_x(s, 0; \mu)\, x(s) \}\, ds,$$

где $G_0(t, s; \mu)$ — функция Грина пп-оператора (15.3).

Из проведенного рассуждения вытекает, что точками бифуркации могут быть только такие значения параметра μ, при которых пп-оператор (15.3) не обладает свойством регулярности. Пусть μ_0 — одно из таких значений. Положим $\mu = \mu_0 + \varepsilon$. Тогда уравнение (15.1) запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x; \varepsilon). \tag{15.4}$$

Задача сводится к исследованию малых ненулевых пп-решений уравнения (15.4) при малых значениях ε.

Допустим, что у уравнения (15.4) есть непрерывно зависящее от ε пп-решение $x^*(t;\varepsilon)$, которое при $\varepsilon\to 0$ переходит в нулевое решение. Рассмотрим семейство пп-операторов

$$L(\varepsilon)x=\frac{dx}{dt}-g'_x[t,\ x^*(t;\ \varepsilon);\ \varepsilon]x. \tag{15.5}$$

Вообще говоря, при малых ненулевых ε эти операторы регулярны. Поэтому будут регулярны и пп-операторы

$$L_1(\varepsilon)x=\frac{dx}{dt}-g'_x[t,\ x_0(t;\ \varepsilon);\ \varepsilon]x, \tag{15.6}$$

если пп-функции $x_0(t;\varepsilon)$ достаточно «близки» к $x^*(t;\varepsilon)$.

Если известны пп-функции $x_0(t;\varepsilon)$, а пп-решения $x^*(t;\varepsilon)$ неизвестны, то для их отыскания можно перейти от дифференциального уравнения (15.4) к интегральному уравнению

$$x(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(t,\ s;\ \varepsilon)\left\{g[s,\ x(s);\ \varepsilon]-g'_x[s,\ x_0(s;\ \varepsilon);\ \varepsilon]x(s)\right\}ds, \tag{15.7}$$

а затем пытаться применить метод последовательных приближений.

Описанная схема хорошо известна. Ею можно пользоваться и для доказательства существования пп-решений $x^*(t;\varepsilon)$. В этом случае нужно суметь так подобрать пп-функции $x_0(t;\varepsilon)$, чтобы у уравнения (15.7) были решения при малых ε. В рассматриваемых ниже случаях у уравнения (15.4), как правило, есть несколько семейств пп-решений — каждое из этих семейств приходится «вылавливать» при помощи своей пп-функции $x_0(t;\varepsilon)$.

Будем считать, что уравнение (15.4) имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon A_1(t)x+\ \ldots\ +\varepsilon^k A_k(t)x+\varepsilon^{k+1}A(t;\ \varepsilon)x+ \\ +\varepsilon F(t,\ x;\ \varepsilon)+\varepsilon\omega(t,\ x;\ \varepsilon). \tag{15.8}$$

Здесь $A_1(t),\ \ldots,\ A_k(t)$ — квадратные матрицы порядка n, элементами которых являются тригонометрические многочлены; $A(t;\varepsilon)$ — почти периодическая по t матрица, непрерывная по ε равномерно относительно $t\in(-\infty,\infty)$; $F(t,x;\varepsilon)$ — форма m-го порядка ($m\geqslant 2$) по простран-

ственным переменным, коэффициенты которой являются тригонометрическими многочленами, непрерывными по ε равномерно относительно t; остаток $\omega(t, x; \varepsilon)$ содержит члены высшего чем m порядка малости по переменным x: $\omega(t, 0; \varepsilon) \equiv 0$ и

$$|\omega(t, x; \varepsilon) - \omega(t, y; \varepsilon)| \leqslant q(r)|x - y| \qquad (15.9)$$
$$(|x|, |y| \leqslant r; \ -\infty < t < \infty),$$

где

$$\lim_{r \to 0} r^{-m+1} q(r) = 0,$$

причем $\omega(t, x; \varepsilon)$ почти периодичен по t и непрерывен по ε равномерно относительно $t \in (-\infty, \infty)$.

Для простоты формулировок ниже рассматриваются только положительные значения параметра ε.

Излагаемые ниже результаты аннонсированы в заметке В. Ш. Бурда, П. П. Забрейко, Ю. С. Колесова, и М. А. Красносельского [1] и доложены на Пятой международной конференции по нелинейным колебаниям.

15.2. Переход к уравнению специального вида. Произведем в уравнении (15.8) замену (14.29). После этой замены, очевидно, уравнение примет вид

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon B_1 y + \ldots + \varepsilon^k B_k y + \varepsilon^{k+1} B(t; \varepsilon) y +$$
$$+ \varepsilon F(t, y; \varepsilon) + \varepsilon^2 F_1(t, y; \varepsilon) + \varepsilon \omega_1(t, y; \varepsilon), \qquad (15.10)$$

где $B_1, \ldots, B_k$ — постоянные матрицы; матрица $B(t; \varepsilon)$ обладает теми же свойствами, что и матрица $A(t; \varepsilon)$; $F_1(t, y; \varepsilon)$ — некоторая форма m-го порядка с теми же свойствами, что и форма $F(t, y; \varepsilon)$; остаток $\omega_1(t, y; \varepsilon)$ обладает теми же свойствами, что и остаток $\omega(t, y; \varepsilon)$. Из вида замены (14.29) ясно, что задача отыскания при малых ε пп-решений уравнения (15.8) полностью эквивалентна отысканию пп-решений уравнения (15.10).

Определим на множестве всех тригонометрических многочленов

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{l} a_i \sin \lambda_i t + b_i \cos \lambda_i t,$$

где $\lambda_i \neq 0$, оператор J равенством

$$J[f(t)] = \sum_{i=1}^{l} \frac{-a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t}{\lambda_i}. \qquad (15.11)$$

Произведем в уравнении (15.10) замену Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова

$$y = z + \varepsilon J[F(t, z; \varepsilon)], \qquad (15.12)$$

где $J[F(t, z; \varepsilon)]$ — форма, которая получается из формы $F(t, y; \varepsilon)$ применением оператора (15.11) к ее коэффициентам. Очевидно,

$$\frac{dz}{dt} + \varepsilon F(t, z; \varepsilon) - \varepsilon \overline{F}(z; \varepsilon) + \varepsilon J[F'_z(t, z; \varepsilon)] \frac{dz}{dt} =$$
$$= \varepsilon B_1 z + \ldots + \varepsilon^k B_k z + \varepsilon^{k+1} B(t; \varepsilon) z + \varepsilon F(t, z; \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon^2 F_2(t, z; \varepsilon) + \varepsilon \omega_2(t, z; \varepsilon),$$

где $F_2(t, z; \varepsilon)$ и $\omega_2(t, z; \varepsilon)$ обладают теми же свойствами, что и $F_1(t, z; \varepsilon)$, $\omega_1(t, z; \varepsilon)$, а

$$\overline{F}(z; \varepsilon) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s, z; \varepsilon)\, ds \qquad (z \in R^n). \quad (15.13)$$

Определяя из последнего уравнения dz/dt, получим

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon B_1 z + \ldots + \varepsilon^k B_k z + \varepsilon^{k+1} B(t; \varepsilon) z + \varepsilon \overline{F}(z; \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon^2 F_3(t, z; \varepsilon) + \varepsilon \omega_3(t, z; \varepsilon). \qquad (15.14)$$

Наконец, перейдем к новому времени $\tau = t\varepsilon$. Тогда уравнение (15.14) запишется в виде

$$\frac{dz}{d\tau} = B_1 z + \ldots + \varepsilon^{k-1} B_k z + \overline{F}(z; \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon^k B\left(\frac{\tau}{\varepsilon}; \varepsilon\right) z + \varepsilon F_3\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, z; \varepsilon\right) + \omega_3\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, z; \varepsilon\right). \qquad (15.15)$$

Проведенная серия замен позволила свести задачу о малых пп-решениях уравнения (15.8) к такой же задаче для уравнения (15.15). Уравнение (15.15) обладает той приятной особенностью, что «главные» слагаемые правой части не зависят от времени.

Уравнение (15.15) имеет смысл, конечно, лишь при $\varepsilon \neq 0$. Естественно считать (см., например, Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский [1]), что при $\varepsilon = 0$ оно переходит в уравнение

$$\frac{dz}{dt} = B_1 z + \bar{F}(z; 0) + \bar{\omega}_3(z; 0), \tag{15.16}$$

где

$$\bar{\omega}_3(z; \varepsilon) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega_3(s, z; \varepsilon)\, ds \qquad (z \in R^n).$$

Уравнение (15.16) называют *усредненным уравнением первого приближения.*

15.3. Основная теорема. Как было показано в п. 15.1, у уравнения (15.15) могут быть малые ненулевые пп-решения (при малых ε) лишь в том случае, если пп-оператор

$$Lz = \frac{dz}{dt} - B_1 z$$

не обладает свойством регулярности или, что то же, если у матрицы B_1 есть собственные значения на мнимой оси. Мы ограничимся для простоты анализом того случая, когда у матрицы B_1 нуль является простым собственным значением, а остальные ее собственные значения лежат в левой полуплоскости.

Пусть

$$\lambda(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots + a_j\varepsilon^j + \ldots \tag{15.17}$$

— собственное значение (14.32) матрицы

$$B(\varepsilon) = B_1 + \varepsilon B_2 + \ldots + \varepsilon^{k-1} B_k. \tag{15.18}$$

Пусть a_{j_0} — первый отличный от нуля коэффициент ряда (15.17). Как и в п. 14.5, будем считать, что

$$j_0 \leqslant k - 1. \tag{15.19}$$

Через e_0 и g_0 будем обозначать (как в п. 14.4) собственные векторы соответственно матриц B_1 и B_1^*, отвечающие нулевому собственному значению и нормированные равенством

$$(e_0, g_0) = 1.$$

Положим

$$\alpha_0 = (\bar{F}(e_0, 0), g_0) \tag{15.20}$$

и будем в дальнейшем считать, что

$$\alpha_0 \neq 0. \tag{15.21}$$

Обозначим через $V(r)$ шар $\|x(t)\| \leqslant r$ в пространстве $B(R^n)$.

Теорема 15.1. *Пусть выполнены условия* (15.19) *и* (15.21).

Тогда существуют такие ε_0, $r_0 > 0$, *что*

1°. *Уравнение* (15.16) *не имеет в шаре* $V(r_0)$ *ненулевых пп-решений.*

2°. *Если* m *четно, то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (15.15) *имеет в шаре* $V(r_0)$ *единственное ненулевое пп-решение; это решение экспоненциально устойчиво при* $a_{j_0} > 0$ *и неустойчиво при* $a_{j_0} < 0$.

3°. *Если* m *нечетно и* $\alpha_0 a_{j_0} < 0$, *то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (15.15) *имеет в шаре* $V(r_0)$ *ровно два ненулевых пп-решения, которые экспоненциально устойчивы при* $a_{j_0} > 0$ *и неустойчивы при* $a_{j_0} < 0$.

4°. *Если* m *нечетно и* $\alpha_0 a_{j_0} > 0$, *то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (15.15) *не имеет в шаре* $V(r_0)$ *ненулевых пп-решений.*

15.4. Доказательство существования пп-решений. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$B_1 z + \varepsilon B_2 z + \ldots + \varepsilon^{k-1} B_k z + \bar{F}(z; 0) = 0. \tag{15.22}$$

Приближенное его решение будем искать в виде

$$z_0(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) e_0(\varepsilon), \tag{15.23}$$

где $e_0(\varepsilon)$ — собственный вектор матрицы (14.31). Подставляя вектор (15.23) в (15.22) и умножая левую часть скалярно на g_0, получим для определения $\beta(\varepsilon)$ равенство

$$\lambda(\varepsilon) + [\beta(\varepsilon)]^{m-1} (\bar{F}[e_0(\varepsilon); 0], g_0) = 0,$$

откуда

$$\beta(\varepsilon) = \left\{ \frac{-\lambda(\varepsilon)}{(\bar{F}[e_0(\varepsilon); 0], g_0)} \right\}^{\frac{1}{m-1}}, \tag{15.24}$$

и, следовательно,

$$z_0(\varepsilon) = \left\{ \frac{-\lambda(\varepsilon)}{(\overline{F}[e_0(\varepsilon); 0], g_0)} \right\}^{\frac{1}{m-1}} e_0(\varepsilon). \qquad (15.25)$$

Знаменатель в (15.25) при малых ε не обращается в нуль, так как при $\varepsilon = 0$ он переходит в число (15.20). Ясно, что формула (15.24) определяет одну вещественную функцию, если m четно. Если же m нечетно, то формула (15.24) определяет в условиях утверждения 3° теоремы 15.1 две вещественные непрерывные функции $\beta(\varepsilon)$ и $-\beta(\varepsilon)$.

Будем искать пп-решения $z(\tau; \varepsilon)$ уравнения (15.15) в виде

$$z = u + z_0(\varepsilon). \qquad (15.26)$$

Дифференциальное уравнение для определения u нам удобно записать в виде

$$\frac{du}{d\tau} - B(\varepsilon)u - \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]u = D(\tau, u; \varepsilon), \qquad (15.27)$$

где

$$D(\tau, u; \varepsilon) = \lambda(\varepsilon) z_0(\varepsilon) + \varepsilon^k B\left(\frac{\tau}{\varepsilon}; \varepsilon\right)[u + z_0(\varepsilon)] + \\ + \overline{F}[u + z_0(\varepsilon); \varepsilon] - \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]u + \\ + \varepsilon F_3\left[\frac{\tau}{\varepsilon}, u + z_0(\varepsilon); \varepsilon\right] + \omega_3\left[\frac{\tau}{\varepsilon}, u + z_0(\varepsilon); \varepsilon\right].$$

Рассмотрим вначале пп-операторы

$$L(\varepsilon)u = \frac{du}{dt} - B(\varepsilon)u - \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]u \qquad (15.28)$$

и покажем, что при малых ненулевых ε они регулярны. Для этого вначале заметим, что матрицы $B(\varepsilon) + \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]$ аналитичны по ε и при $\varepsilon = 0$ обращаются в матрицу B_1, у которой по предположению нуль является простым собственным значением, а все остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости. Поэтому у матрицы $B(\varepsilon) + \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]$ при малых ε есть простое собственное значение $\eta(\varepsilon)$, обращающееся в нуль при $\varepsilon = 0$, причем остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости. Для доказательства

регулярности пп-операторов (15.28) нужно показать, что $\eta(\varepsilon) \neq 0$ при малых ненулевых ε.

Для вычисления $\eta(\varepsilon)$ можно применить процедуру теории возмущений, описанную в п. 14.4. Так как

$$\overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0] = \frac{-\lambda(\varepsilon)}{(\overline{F}[e_0(\varepsilon); 0], g_0)} \overline{F}'_z[e_0(\varepsilon); 0] =$$
$$= -\alpha_0^{-1} a_{j_0} \varepsilon^{j_0} \overline{F}'_z(e_0; 0) + o(\varepsilon^{j_0}),$$

то из формул (14.39) следует, что

$$\eta(\varepsilon) = \{a_{j_0} - \alpha_0^{-1} a_{j_0} (\overline{F}'_z(e_0; 0) e_0, g_0)\} \varepsilon^{j_0} + o(\varepsilon^{j_0}). \quad (15.29)$$

Из формулы Эйлера об однородных функциях:

$$\overline{F}'_z(e_0; 0) e_0 = m\overline{F}(e_0; 0)$$

вытекает, что (15.29) можно переписать в виде

$$\eta(\varepsilon) = -(m-1) a_{j_0} \varepsilon^{j_0} + o(\varepsilon^{j_0}). \quad (15.30)$$

В силу (15.30) $\eta(\varepsilon) \neq 0$ при малых ненулевых ε, и поэтому при этих ε операторы (15.28) регулярны. Их функция Грина $G(\tau, \sigma; \varepsilon)$, как было показано при доказательстве теоремы 14.4, удовлетворяет неравенству

$$|G(\tau, \sigma; \varepsilon)| \leqslant M_1 e^{-|\eta(\varepsilon)| \cdot |\tau - \sigma|} \qquad (-\infty < \tau, \sigma < \infty).$$

Из этого неравенства и из (15.30) вытекает справедливость при малых положительных ε оценки

$$|G(\tau, \sigma; \varepsilon)| \leqslant M_1 e^{-\gamma \varepsilon^{j_0} |\tau - \sigma|} \qquad (-\infty < \tau, \sigma < \infty), \quad (15.31)$$

где γ — некоторое положительное число.

Положим

$$S(\varepsilon) u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, \sigma; \varepsilon) u(\sigma) d\sigma. \quad (15.32)$$

Этот оператор действует в пространстве $B(R^n)$. Из (15.31) вытекает, что

$$\| S(\varepsilon) \|_{B(R^n)} \leqslant \frac{2M_1}{\gamma} \varepsilon^{-j_0}. \quad (15.33)$$

Рассмотрим теперь действующий в $B(R^n)$ нелинейный оператор

$$D(\varepsilon)u(\tau) = D[\tau, u(\tau); \varepsilon]. \tag{15.34}$$

Очевидно,

$$D(\varepsilon)0 = \lambda(\varepsilon)z_0(\varepsilon) + \overline{F}[z_0(\varepsilon); 0] + \varepsilon^k B\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \varepsilon\right)z_0(\varepsilon) + \\ + \{\overline{F}[z_0(\varepsilon); \varepsilon] - \overline{F}[z_0(\varepsilon); 0]\} + \varepsilon F_3\left[\frac{\tau}{\varepsilon}, z_0(\varepsilon); \varepsilon\right] + \\ + \omega_3\left[\frac{\tau}{\varepsilon}, z_0(\varepsilon); \varepsilon\right],$$

откуда

$$D(\varepsilon)0 = \lambda(\varepsilon)z_0(\varepsilon) + \overline{F}[z_0(\varepsilon); 0] + o(\varepsilon^{j_0+j_0/(m-1)}). \tag{15.35}$$

В силу (15.33) и (15.35)

$$S(\varepsilon)D(\varepsilon)0 = S(\varepsilon)\{\lambda(\varepsilon)z_0(\varepsilon) + \overline{F}[z_0(\varepsilon); 0]\} + o(\varepsilon^{j_0/(m-1)})$$

или, что то же,

$$S(\varepsilon)D(\varepsilon)0 = -\{B(\varepsilon) + \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]\}^{-1} \times \\ \times \{\lambda(\varepsilon)z_0(\varepsilon) + \overline{F}[z_0(\varepsilon); 0]\} + o(\varepsilon^{j_0/(m-1)}). \tag{15.36}$$

Обозначим через $e^*(\varepsilon)$ и $g^*(\varepsilon)$, отвечающие собственному значению $\eta(\varepsilon)$, собственные векторы матрицы $B(\varepsilon) + \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]$ и ее сопряженной, обращающиеся при $\varepsilon = 0$ в e_0 и g_0 и нормированные условием

$$(e^*(\varepsilon), g^*(\varepsilon)) = 1.$$

Каждый вектор $x \in R^n$ можно представить тогда в виде

$$x = (x, g^*(\varepsilon))e^*(\varepsilon) + Q_*(\varepsilon)x,$$

где $Q_*(\varepsilon)$ — оператор проектирования на инвариантное для $B(\varepsilon) + \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]$ подпространство, ортогональное $g^*(\varepsilon)$. Очевидно, при малых ε

$$\left|\{B(\varepsilon) + \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]\}^{-1}Q_*(\varepsilon)\right| \leqslant M_2,$$

где M_2 — некоторая постоянная. При этих ε

$$\left|\{B(\varepsilon) + \overline{F}'_z[z_0(\varepsilon); 0]\}^{-1}Q_*(\varepsilon)\{\lambda(\varepsilon)z_0(\varepsilon) + \overline{F}[z_0(\varepsilon); 0]\}\right| \leqslant \\ \leqslant M_2|\lambda(\varepsilon)z_0(\varepsilon) + \overline{F}[z_0(\varepsilon); 0]| \leqslant M_3\varepsilon^{j_0+j_0/(m-1)}. \tag{15.37}$$

Далее, из определения вектора $z_0(\varepsilon)$ вытекает оценка

$$\left|\{B(\varepsilon)+\overline{F}'_z[z_0(\varepsilon);0]\}^{-1}(\lambda(\varepsilon)z_0(\varepsilon)+\overline{F}[z_0(\varepsilon);0],g^*(\varepsilon))e^*(\varepsilon)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{|\eta(\varepsilon)|}|(\lambda(\varepsilon)z_0(\varepsilon)+\overline{F}[z_0(\varepsilon);0],g^*(\varepsilon)-g_0)||e^*(\varepsilon)|=$$
$$=o(\varepsilon^{j_0/(m-1)}). \qquad (15.38)$$

Из (15.36)—(15.38) следует окончательная оценка

$$\|S(\varepsilon)D(\varepsilon)0\|_{B(R^n)}\leqslant\alpha(\varepsilon)\cdot\varepsilon^{j_0/(m-1)}, \qquad (15.39)$$

где $\alpha(\varepsilon)$ — такая положительная при $\varepsilon>0$ функция, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(\varepsilon)=0.$$

Оператор $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$ на каждом шаре $V(r)=\{u(\tau):\|u\|_{B(R^n)}\leqslant r\}$ удовлетворяет условию Липшица. Покажем, что постоянная $q(\varepsilon)$ в этом условии стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, если радиус шара определить формулой

$$r=\varepsilon^{j_0/(m-1)}\sqrt{\alpha(\varepsilon)}. \qquad (15.40)$$

Пусть $u(\tau)$, $v(\tau)\in V(r)$. Тогда

$$D(\varepsilon)u(\tau)-D(\varepsilon)v(\tau)=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5, \qquad (15.41)$$

где

$$\Delta_1=\varepsilon^k B\left(\frac{\tau}{\varepsilon};\varepsilon\right)[u(\tau)-v(\tau)],$$

$$\Delta_2=\overline{F}[z_0(\varepsilon)+u(\tau);\varepsilon]-\overline{F}[z_0(\varepsilon)+v(\tau);\varepsilon]-$$
$$-\overline{F}'_z[z_0(\varepsilon);\varepsilon][u(\tau)-v(\tau)],$$

$$\Delta_3=\{\overline{F}'_z[z_0(\varepsilon);\varepsilon]-\overline{F}'_z[z_0(\varepsilon);0]\}[u(\tau)-v(\tau)],$$

$$\Delta_4=\varepsilon F_3\left[\frac{\tau}{\varepsilon},z_0(\varepsilon)+u(\tau);\varepsilon\right]-\varepsilon F_3\left[\frac{\tau}{\varepsilon},z_0(\varepsilon)+v(\tau);\varepsilon\right],$$

$$\Delta_5=\omega_3\left[\frac{\tau}{\varepsilon},z_0(\varepsilon)+u(\tau);\varepsilon\right]-\omega_3\left[\frac{\tau}{\varepsilon},z_0(\varepsilon)+v(\tau);\varepsilon\right].$$

Так как $k>j_0$, то

$$\|\Delta_1\|_{B(R^n)}\leqslant M\varepsilon^k\|u-v\|_{B(R^n)}=o(\varepsilon^{j_0})\|u-v\|_{B(R^n)}.$$

Из равенства

$$\Delta_2 = \int_0^1 \{\bar{F}'_z[z_0(\varepsilon) + \theta u(\tau) + (1-\theta) v(\tau); \varepsilon] - \bar{F}'_z[z_0(\varepsilon); \varepsilon]\} \times \times [u(\tau) - v(\tau)]\, d\theta$$

и из (15.40) вытекает оценка

$$\| \Delta_2 \|_{B(R^n)} \leqslant M(r^{m-1} + r\varepsilon^{j_0(m-2)/(m-1)}) \| u - v \|_{B(R^n)} = = o(\varepsilon^{j_0}) \| u - v \|_{B(R^n)}.$$

Из непрерывной зависимости формы $\bar{F}(z; \varepsilon)$ от ε вытекает, что

$$\| \Delta_3 \|_{B(R^n)} = o(\varepsilon^{j_0}) \| u - v \|_{B(R^n)}.$$

Наконец, очевидно,

$$\| \Delta_4 \|_{B(R^n)} = o(\varepsilon^{j_0}) \| u - v \|_{B(R^n)},$$

$$\| \Delta_5 \|_{B(R^n)} = o(\varepsilon^{j_0}) \| u - v \|_{B(R^n)}.$$

Таким образом,

$$\| D(\varepsilon) u(\tau) - D(\varepsilon) v(\tau) \|_{B(R^n)} = o(\varepsilon^{j_0}) \| u - v \|_{B(R^n)},$$

и из (15.33) вытекает оценка

$$\| S(\varepsilon) D(\varepsilon) u(\tau) - S(\varepsilon) D(\varepsilon) v(\tau) \|_{B(R^n)} \leqslant q(\varepsilon) \| u - v \|_{B(R^n)}$$

$$(u(\tau), v(\tau) \in V(r)),$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} q(\varepsilon) = 0.$$

Задача о пп-решениях уравнения (15.27) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(\tau) = S(\varepsilon) D(\varepsilon) u(\tau).$$

Как мы показали, оператор $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$ при малых положительных ε на шаре $V(r)$ радиуса (15.40) является сжимающим оператором ($q(\varepsilon) < 1$). Из (15.39) и (15.40)

вытекает, что при малых ε оператор $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$ преобразует шар $V(r)$ в себя: при $u(\tau)\in V(r)$

$$\|S(\varepsilon)D(\varepsilon)u(\tau)\|_{B(R^n)}\leqslant$$
$$\leqslant\|S(\varepsilon)D(\varepsilon)u(\tau)-S(\varepsilon)D(\varepsilon)0\|_{B(R^n)}+\|S(\varepsilon)D(\varepsilon)0\|_{B(R^n)}\leqslant$$
$$\leqslant q(\varepsilon)r+\varepsilon^{j_0/(m-1)}\alpha(\varepsilon)=r\left[q(\varepsilon)+\sqrt{\alpha(\varepsilon)}\right]<r.$$

Из принципа сжатых отображений следует, что оператор $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$ имеет в шаре $V(r)$ единственную неподвижную точку.

Мы доказали, что в условиях утверждений 2° и 3° уравнение (15.15) имеет по крайней мере соответственно одно или два ненулевых пп-решения. Исследование их устойчивости предоставляем читателю (укажем лишь, что здесь удобно воспользоваться теоремами 11.1 и 11.2).

В последующих пунктах будут установлены остальные утверждения теоремы 15.1.

15.5. Инвариантные конусы. Напомним, что через $e_0(\varepsilon)$ и $g_0(\varepsilon)$ обозначены обращающиеся при $\varepsilon=0$ в e_0 и g_0 собственные векторы соответственно матриц $B(\varepsilon)$ и $B^*(\varepsilon)$, нормированные условием $(e_0(\varepsilon), g_0(\varepsilon))=1$. Через $Q(\varepsilon)$ обозначим оператор проектирования на подпространство $R(\varepsilon)$ векторов, ортогональных $g_0(\varepsilon)$:

$$Q(\varepsilon)x=x-(x,g_0(\varepsilon))e_0(\varepsilon)\qquad(x\in R^n).$$

Обозначим через $U(\varepsilon)$ матрицу, столбцами которой являются векторы

$$e_0(\varepsilon),\ Q(\varepsilon)f_1,\ \ldots,\ Q(\varepsilon)f_{n-1},$$

где $f_1,\ldots,f_{n-1}$ — произвольный фиксированный базис в подпространстве $R(0)$. Очевидно, матрица $U(\varepsilon)$ непрерывна по ε при достаточно малых ε и не вырождена.

Положим

$$z=U(\varepsilon)w. \tag{15.42}$$

Тогда уравнение (15.15) перепишется в виде

$$\frac{dw}{d\tau}=C_0(\varepsilon)w+\varepsilon^kC\left(\frac{\tau}{\varepsilon};\varepsilon\right)w+\Phi_0(w;\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\Phi\left(\frac{\tau}{\varepsilon},w;\varepsilon\right)+\Omega\left(\frac{\tau}{\varepsilon},w;\varepsilon\right), \tag{15.43}$$

где

$$C_0(\varepsilon) = U^{-1}(\varepsilon) B(\varepsilon) U(\varepsilon), \qquad \Phi_0(w; \varepsilon) = U^{-1}(\varepsilon) \bar{F}[U(\varepsilon) w; \varepsilon],$$

а остальные слагаемые в правой части обладают такими же свойствами, какими обладают соответствующие слагаемые в правой части уравнения (15.15). Простой подсчет показывает, что матрица $C_0(\varepsilon)$ имеет вид

$$C_0(\varepsilon) = \begin{Vmatrix} \lambda(\varepsilon) & 0 \\ 0 & D_0(\varepsilon) \end{Vmatrix}, \tag{15.44}$$

где $D_0(\varepsilon)$ — квадратная матрица порядка $n-1$.

Так как собственные значения матрицы $C_0(\varepsilon)$ совпадают с собственными значениями матрицы $B(\varepsilon)$, то все собственные значения матрицы $D_0(\varepsilon)$ лежат в левой полуплоскости. Как известно (см., например, И. Г. Малкин [1]), тогда существует такая положительно определенная симметрическая матрица H порядка $n-1$, что

$$HD_0(0) + D_0^*(0) H = -I.$$

Ясно, что при достаточно малых ε будет выполнено матричное неравенство

$$HD_0(\varepsilon) + D_0^*(\varepsilon) H < -\frac{1}{2} I. \tag{15.45}$$

Напомним, что (15.45) — это условие

$$(HD_0(\varepsilon) x, x) \leqslant -\frac{1}{4}(x, x) \qquad (x \in R^{n-1}).$$

Нам удобно в дальнейшем каждый вектор $w = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \in R^n$ записывать в виде

$$w = \{\zeta, x\},$$

где $\zeta = \zeta_1$, а $x = \{\zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ — точка пространства R^{n-1}.

Обозначим через $K(\rho)$ конус в R^n, выделяемый функционалом

$$q(w) = -\rho\zeta + \sqrt{(Hx, x)}, \tag{15.46}$$

где ρ — положительное число, а через $K(\rho; r)$ — пересечение $K(\rho)$ и шара $V(r)$. Соответственно через $\Gamma(\rho)$ и $\Gamma(\rho, r)$ обозначим границу конуса $K(\rho)$ и ее пересечение с $V(r)$. Покажем, что каждому $\rho > 0$ соответствуют

такие положительные числа $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho)$ и $r_0 = r_0(\rho)$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ каждое решение $w(t) = \{\zeta(t), x(t)\}$ уравнения (15.43) с ненулевым начальным условием $w(t_0) \in \Gamma(\rho, r_0)$ при близких к t_0 и бо́льших t_0 значениях t лежит внутри $K(\rho)$. Для доказательства достаточно установить неравенство

$$\frac{dq(t_0)}{dt} < 0, \tag{15.47}$$

где

$$q(t) = q[w(t)] = -\rho\zeta(t) + \sqrt{(Hx(t), x(t))}.$$

Очевидно,

$$\frac{dq(t)}{dt} = (\operatorname{grad} q[w(t)], C_0(\varepsilon)\, w(t)) + \Delta(t),$$

где

$$\Delta(t) = \Big(\operatorname{grad} q[w(t)], \varepsilon^k C\left(\frac{\tau}{\varepsilon}; \varepsilon\right) w(t) + \Phi_0[w(t); \varepsilon] + \\ + \varepsilon\Phi\left[\frac{\tau}{\varepsilon}, w(t); \varepsilon\right] + \Omega\left[\frac{\tau}{\varepsilon}, w(t); \varepsilon\right]\Big).$$

Так как

$$(\operatorname{grad} q[w(t)], C_0(\varepsilon)\, w(t)) = \\ = \frac{\left(\left(HD_0(\varepsilon) + D_0^*(\varepsilon)\, H\right) x(t), x(t)\right)}{2\sqrt{(Hx(t), x(t))}} - \rho\lambda(\varepsilon)\zeta(t),$$

то из равенства

$$\rho\zeta(t_0) = \sqrt{(Hx(t_0), x(t_0))} \tag{15.48}$$

вытекает, что

$$(\operatorname{grad} q[w(t_0)], C_0(\varepsilon)\, w(t_0)) = \\ = \frac{\left(\left\{H\left[D_0(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon) I\right] + \left[D_0^*(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon) I\right] H\right\} x(t_0), x(t_0)\right)}{2\sqrt{(Hx(t_0), x(t_0))}}.$$

Поэтому из положительной определенности матрицы H и из (15.45) следует, что при малых ε

$$(\operatorname{grad} q[w(t_0)], C_0(\varepsilon)\, w(t_0)) \leqslant -a_0\sqrt{(x(t_0), x(t_0))} \qquad (a_0 > 0)$$

и в силу (15.48)

$$(\operatorname{grad} q[w(t_0)], C_0(\varepsilon)\, w(t_0)) \leqslant -b_0(\rho)\,|w(t_0)|, \tag{15.49}$$

где $b_0(\rho)$ — положительная постоянная. Так как все члены правой части уравнения (15.43), кроме $C_0(\varepsilon)w$, либо имеют по переменной w порядок малости выше первого, либо линейны по w и имеют множитель ε, то найдутся такие ε_0, $r_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $|w(t_0)| \leqslant r_0$

$$|\Delta(t_0)| \leqslant \frac{1}{2} b_0(\rho).$$

Таким образом, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $|w(t_0)| \leqslant r_0$

$$\frac{dq(t_0)}{dt} \leqslant -\frac{1}{2} b_0(\rho) |w(t_0)|,$$

откуда вытекает (15.47).

Допустим, что $w(t)$ — ненулевое пп-решение уравнения (15.43) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, полностью лежащее в шаре $V(r_0)$. Если найдется такое $t_0 \in (-\infty, \infty)$, что $w(t_0) \in K(\rho, r_0)$, то из проведенных выше рассуждений вытекает, что $w(t) \in K(\rho, r_0)$ при $t \geqslant t_0$ и, следовательно, при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Аналогично, если при некотором t_0 точка $w(t_0)$ лежит в $-K(\rho, r_0)$, то $w(t) \in -K(\rho, r_0)$ при всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Покажем, что у уравнений (15.43) при достаточно малых ε нет пп-решений, лежащих в шаре $V(r_0)$ и не лежащих в конусах $K(\rho)$ и $-K(\rho)$. В предположении противного найдется такая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел ε_j, что у уравнений

$$\frac{dw}{d\tau} = C_0(\varepsilon_j) w + \varepsilon_j^k C\left(\frac{\tau}{\varepsilon_j}; \varepsilon_j\right) w + \Phi_0(w; \varepsilon_j) + \\ + \varepsilon_j \Phi\left(\frac{\tau}{\varepsilon_j}, w; \varepsilon_j\right) + \Omega\left(\frac{\tau}{\varepsilon_j}, w; \varepsilon_j\right) \qquad (15.50)$$

есть ненулевые пп-решения $w_j(\tau)$, удовлетворяющие условию

$$\lim_{j \to \infty} \| w_j(\tau) \|_{B(R^n)} = 0$$

и лежащие полностью вне конусов $K(\rho)$ и $-K(\rho)$. Выберем такую последовательность чисел τ_j, что

$$|w_j(\tau_j)| \geqslant \frac{1}{2} \| w_j(\tau) \|_{B(R^n)}, \qquad (15.51)$$

и положим

$$h_j(\tau) = \frac{w_j(\tau + \tau_j)}{\| w_j(\tau) \|_{B(R^n)}} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно,

$$\frac{dh_j(\tau)}{d\tau} = C_0(\varepsilon_j)\, h_j(\tau) + \delta_j(\tau),$$

где

$$\lim_{j \to \infty} \| \delta_j(\tau) \|_{B(R^n)} = 0.$$

Поэтому функции $h_j(\tau)$ равностепенно непрерывны, и без ограничения общности можно считать, что они равномерно на каждом конечном промежутке сходятся к некоторой функции $h_0(\tau) \in C(R^n)$. Ясно, что $h_0(\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dh}{d\tau} = C_0(0)\, h. \tag{15.52}$$

У матрицы $C_0(0)$ есть нулевое собственное значение, которому соответствует собственный вектор $e_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}$, а остальные ее собственные значения лежат в левой полуплоскости. Отсюда вытекает, что все ограниченные на $(-\infty, \infty)$ решения уравнения (15.52) имеют вид $h(t) = \varkappa e_1$, где $\varkappa$ — некоторое число. Следовательно,

$$h_0(\tau) = \varkappa_1 e_1,$$

причем в силу (15.51) $\varkappa_1 \neq 0$. Так как e_1 является внутренней точкой конуса $K(\rho)$, то при всех достаточно больших j векторы $w_j(\tau_j)$ лежат либо в конусе $K(\rho)$, либо в конусе $-K(\rho)$ — мы пришли к противоречию.

Таким образом, при всех достаточно малых ε малые пп-решения уравнения (15.43) лежат либо в $K(\rho)$, либо в $-K(\rho)$.

Для дальнейшего важно, что при малых положительных ε каждые два малых пп-решения $w_1(t; \varepsilon)$ и $w_2(t; \varepsilon)$ уравнения (15.43) сравнимы в том смысле, что либо $w_1(t; \varepsilon) - w_2(t; \varepsilon) \in K(\rho)$, либо $w_2(t; \varepsilon) - w_1(t; \varepsilon) \in K(\rho)$. Для доказательства достаточно выписать уравнение, которому удовлетворяет разность $w_1(t; \varepsilon) - w_2(t; \varepsilon)$, и повторить рассуждения предыдущих абзацев.

Пусть для определенности $w_1(t;\varepsilon)-w_2(t;\varepsilon)\in K(\rho)$. Если пп-решения $w_1(t;\varepsilon)$ и $w_2(t;\varepsilon)$ различны, то более детальный анализ показывает, что при каждом $t\in(-\infty,\infty)$ разность $w_1(t;\varepsilon)-w_2(t;\varepsilon)$ входит в $K(\rho)$ вместе с некоторой шаровой окрестностью, радиус которой не зависит от t (но, разумеется, зависит от ε).

15.6. Единственность пп-решения в конусе. Пусть $K(\rho)$ — конус в фазовом пространстве R^n, введенный в п. 15.5. Как обычно, через $\hat{K}(\rho)$ обозначим конус в $B(R^n)$, состоящий из функций $w(t)$ со значениями в $K(\rho)$.

Рассмотрим пп-операторы

$$L(\varepsilon)w=\frac{dw}{d\tau}-C_0(\varepsilon)w-\varepsilon^k C\left(\frac{\tau}{\varepsilon};\varepsilon\right)w+(w,e_1)\varkappa e_1, \qquad (15.53)$$

где $\varkappa$ — некоторое положительное число. При каждом фиксированном $\varkappa$ операторы (15.53) очевидным образом регулярны и устойчивы, если ε достаточно мало. Через

$$G(\tau,\sigma;\varepsilon)=\begin{cases} U(\tau,\sigma;\varepsilon), & \text{если} \quad \tau\geqslant\sigma,\\ 0, & \text{если} \quad \tau<\sigma,\end{cases} \qquad (15.54)$$

где $U(\tau,\sigma;\varepsilon)$ — фундаментальная матрица уравнения $L(\varepsilon)w=0$, обозначим функцию Грина пп-операторов (15.53). Ниже будет использован тот факт, что функция Грина (15.54) при фиксированных малых $\varkappa$ и всех достаточно малых ε сильно положительна относительно всех конусов $K(\rho)$, где ρ принимает достаточно большие значения. Чтобы в этом убедиться, нужно лишь заметить, что в (15.49) положительную постоянную $b_0(\rho)$ можно выбрать общей для всех достаточно больших ρ. Ниже мы считаем, что $\varkappa$ уже выбрано и зафиксировано.

Условие (15.21) можно записать в виде

$$\alpha_0=(\Phi_0(e_1;0),e_1)\neq 0. \qquad (15.55)$$

Это условие позволяет выбрать число ρ_0 так, чтобы либо элемент $\Phi_0(e_1;0)$, либо элемент $-\Phi_0(e_1;0)$ (в зависимости от знака числа α_0) был внутренней точкой конуса $K(\rho_0)$. Во всех дальнейших построениях этого пункта предполагается, что в пространстве R^n введена полуупорядоченность при помощи конуса $K(\rho_0)$, а в пространстве $B(R^n)$ — при помощи конуса $\hat{K}(\rho_0)$.

Задачу о пп-решениях уравнения (15.43) сведем к интегральному уравнению

$$w(\tau) = S(\varepsilon) D(\varepsilon) w(\tau),$$

где

$$S(\varepsilon) w(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, \sigma; \varepsilon) w(\sigma) d\sigma,$$

а

$$D(\varepsilon) w(\tau) = (w(\tau), e_1) \varkappa e_1 + \Phi_0[w(\tau); \varepsilon] + \\ + \varepsilon\Phi\left[\frac{\tau}{\varepsilon}, w(\tau); \varepsilon\right] + \Omega\left[\frac{\tau}{\varepsilon}, w(\tau); \varepsilon\right].$$

Покажем, что оператор $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$ монотонен на шаре $V(r)$ пространства $B(R^n)$, если r достаточно мало.

Пусть $w_1(\tau) = \{\zeta_1(\tau), x_1(\tau)\}$, $w_2(\tau) = \{\zeta_2(\tau), x_2(\tau)\}$; $w_1(\tau)$, $w_2(\tau) \in V(r)$ и

$$w_1(\tau) \leqslant w_2(\tau).$$

Последнее соотношение означает, что

$$\zeta_1(\tau) \leqslant \zeta_2(\tau) \qquad (-\infty < \tau < \infty)$$

и

$$\sqrt{(H[x_2(\tau) - x_1(\tau)], x_2(\tau) - x_1(\tau))} \leqslant \rho_0[\zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau)] \\ (-\infty < \tau < \infty).$$

Составим разность

$$\Delta = D(\varepsilon) w_1(\tau) - D(\varepsilon) w_2(\tau).$$

Для сокращения записи нам удобно в R^n ввести проектор

$$Qw = w - (w, e_1) e_1. \tag{15.56}$$

Очевидно, при каждом $\tau \in (-\infty, \infty)$

$$|Q\Delta| \leqslant q(r) |w_1(\tau) - w(\tau)|,$$

где $q(r) \to 0$ при $r \to 0$, и поэтому

$$\sqrt{(HQ\Delta, Q\Delta)} \leqslant M_1 q(r) |w_1(\tau) - w_2(\tau)|. \tag{15.57}$$

С другой стороны,

$$|(\Delta, e_1)| \geqslant \varkappa[\zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau)] - q(r) |w_1(\tau) - w_2(\tau)|.$$

Так как операторы $S(\varepsilon)$ положительны, то монотонность оператора $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$ будет доказана, если мы установим, что при достаточно малых r равномерно относительно разностей $w_2 - w_1 \in K(\rho_0)$ выполнено неравенство

$$\rho_0 \varkappa (\zeta_2 - \zeta_1) \geqslant (M_1 + \rho_0)\, q(r)\, |w_2 - w_1|. \qquad (15.58)$$

Но для всех элементов $w \in K(\rho_0)$ верно неравенство $(w, e_1) \geqslant m(\rho_0)\,|w|$, где $m(\rho_0) > 0$. Поэтому (15.58) выполнено, если

$$\rho_0 \varkappa m(\rho_0) \geqslant (M_1 + \rho_0)\, q(r).$$

Итак, оператор $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$ монотонен на $V(r)$, если

$$q(r) \leqslant \frac{\rho_0 \varkappa m(\rho_0)}{M_1 + \rho_0}. \qquad (15.59)$$

Дальнейшие рассуждения проводятся раздельно для случая, когда $\alpha_0 > 0$ и когда $\alpha_0 < 0$.

Пусть $\alpha_0 > 0$. Тогда на множестве $\hat{K}(\rho_1, r)$, где ρ_1 и r достаточно малы, оператор $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$ обладает следующим свойством: если $w_0 \in \hat{K}_{\text{вн}}(\rho_1, r)$ и $\beta \in (0, 1)$, то найдется такое $\eta = \eta(w_0, \beta) > 0$, что

$$S(\varepsilon)\, D(\varepsilon)\, (\beta w_0) \leqslant \beta (1 - \eta)\, S(\varepsilon)\, D(\varepsilon)\, w_0. \qquad (15.60)$$

Чтобы установить последнее неравенство, достаточно показать, что элементы

$$w = \beta S(\varepsilon) D(\varepsilon) w_0 - S(\varepsilon) D(\varepsilon) (\beta w_0) \qquad (15.61)$$

являются внутренними точками конуса $\hat{K}(\rho_0)$. Соответствующие выкладки совершенно простые, но громоздкие, поэтому мы их здесь не приводим.

Допустим, что у уравнения (15.45) в конусе $\hat{K}(\rho_1)$ при достаточно малом ε есть два различных малых ненулевых пп-решения. Как было показано в п. 15.5, эти решения w_1 и w_2 можно считать сравнимыми. Пусть для определенности $w_1 \leqslant w_2$. Через β_0 обозначим такое наименьшее β, при котором $w_1 \leqslant \beta w_2$. Из того факта, что $w_2 - w_1$ является внутренней точкой конуса $\hat{K}(\rho_1)$, вытекает неравенство $\beta_0 < 1$. Поэтому из (15.60) следует неравенство

$$S(\varepsilon)\, D(\varepsilon)\, (\beta_0 w_2) \leqslant \beta_0 (1 - \eta)\, S(\varepsilon)\, D(\varepsilon)\, w_2 = \beta_0 (1 - \eta)\, w_2$$

и в силу монотонности $S(\varepsilon)D(\varepsilon)$

$$w_1 = S(\varepsilon)D(\varepsilon)w_1 \leqslant S(\varepsilon)D(\varepsilon)(\beta_0 w_2) \leqslant \beta_0(1-\eta)w_2.$$

Последнее соотношение противоречит минимальности β_0.

Следовательно, при малых ε уравнение (15.43) может иметь в конусе $\hat{K}(\rho_1)$ не больше одного ненулевого малого пп-решения,

Аналогично проводится доказательство единственности в случае, когда $\alpha_0 < 0$. В этом случае вместо (15.60) устанавливается неравенство

$$S(\varepsilon)D(\varepsilon)(\beta w_0) \geqslant \beta(1+\eta)S(\varepsilon)D(\varepsilon)w_0.$$

Затем, если $w_1 = S(\varepsilon)D(\varepsilon)w_1$ и $w_2 = S(\varepsilon)D(\varepsilon)w_2$, $w_1 \neq w_2$ и $w_1 \leqslant w_2$, то через β_0 обозначается наибольшее β, при котором $\beta w_2 \leqslant w_1$, после чего остается заметить, что цепочка соотношений

$$w_1 = S(\varepsilon)D(\varepsilon)w_1 \geqslant S(\varepsilon)D(\varepsilon)(\beta_0 w_2) \geqslant$$
$$\geqslant \beta_0(1+\eta)S(\varepsilon)D(\varepsilon)w_2 = \beta_0(1+\eta)w_2$$

противоречит максимальности β_0.

Отметим в заключение пункта, что и в конусах $-\hat{K}(\rho_1)$ также не может быть больше одного малого ненулевого пп-решения уравнения (15.43) при малых ε. Для доказательства достаточно, например, перейти от переменной w в (15.43) к новой переменной $v = -w$.

15.7. Завершение доказательства теоремы 15.1. Начнем с утверждения 1°. Уравнение (15.16) после замены (15.42) (при $\varepsilon = 0$) принимает вид

$$\frac{dw}{d\tau} = C_0(0)w + \Phi_0(w;\,0) + \overline{\Omega}(w;\,0), \qquad (15.62)$$

где

$$\overline{\Omega}(w;\,0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Omega(t,\,w;\,0)\,dt.$$

Повторяя рассуждения, проведенные в п. 15.5, легко по каждому $\rho > 0$ построить такое $r = r(\rho) > 0$, что малые ненулевые пп-решения уравнения (15.62) целиком лежат либо в $K(\rho)$, либо в $-K(\rho)$. Поэтому для доказательства утверждения 1° достаточно показать, что при малых ρ и r ни в множестве $K(\rho, r)$, ни в множестве $-K(\rho, r)$

не лежит полностью ни одно ненулевое пп-решение уравнения (15.62).

Предположим противное. Для определенности будем считать, что при малых ρ и r в $K(\rho, r)$ лежит по крайней мере одно ненулевое пп-решение $w(\tau)$. Рассмотрим тогда скалярную почти периодическую функцию

$$v(\tau) = (w(\tau), e_1) \qquad (-\infty < \tau < \infty). \tag{15.63}$$

Очевидно,

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = (\Phi_0[w(\tau); 0], e_1) + (\bar{\Omega}[w(\tau); 0], e_1).$$

Запишем $w(\tau)$ в виде $w(\tau) = \zeta(\tau) e_1 + x(\tau)$, где $(x(\tau), e_1) = 0$. Тогда

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = \alpha_0 \zeta^m(\tau) + (\Phi_0[\zeta(\tau) e_1 + x(\tau); 0] - \Phi_0[\zeta(\tau) e_1; 0], e_1) + \\ + (\bar{\Omega}[w(\tau); 0], e_1).$$

Так как $\alpha_0 \neq 0$, то при достаточно малых ρ и r

$$\operatorname{sign} \frac{dv(\tau)}{d\tau} = \operatorname{sign} \alpha_0 \qquad (-\infty < \tau < \infty).$$

Значит, функция $v(\tau)$ строго монотонна — это противоречит ее почти периодичности.

Перейдем к утверждению 2°. Пусть, для определенности,

$$\alpha_0 \cdot a_{j_0} > 0. \tag{15.64}$$

Утверждение 2° будет доказано, если мы установим, что при малых ρ и r в множествах $K(\rho, r)$ уравнения (15.41) при достаточно малых ε не имеют ненулевых пп-решений. Действительно, из результатов п. 15.5 вытекает тогда, что малые ненулевые пп-решения лежат только в $-K(\rho)$; из результатов п. 15.4 вытекает, что в $-K(\rho)$ есть по крайней мере одно такое пп-решение; из результатов п. 15.6 — что такое пп-решение единственно.

Если допустить, что у уравнений (15.43) есть малые ненулевые пп-решения $w(\tau; \varepsilon)$, лежащие в $K(\rho, r)$, то по каждому такому решению можно построить скалярную функцию

$$v(\tau; \varepsilon) = (w(\tau; \varepsilon), e_1) \qquad (-\infty < \tau < \infty).$$

С одной стороны, эта функция почти периодична. С другой стороны, легко установить ее монотонность (аналогично тому, как выше устанавливалась монотонность функции (15.63)), которая противоречит почти периодичности.

Если вместо (15.64) выполнено неравенство

$$\alpha_0 \cdot a_{j_0} < 0,$$

то у уравнений (15.43) нет малых ненулевых пп-решений в множествах $-K(\rho, r)$.

Перейдем к утверждению 3°. В условиях этого утверждения в п. 15.4 были построены два семейства пп-решений $w_1(\tau; \varepsilon)$ и $w_2(\tau; \varepsilon)$. Решения первого семейства лежат в шарах, радиус $r(\varepsilon)$ которых определяется формулой (15.40), с центрами в точках $\beta(\varepsilon)e(\varepsilon)$, где $\beta(\varepsilon)$ определяется формулой (15.24). Решения второго семейства лежат в шарах тех же радиусов с центрами в точках $-\beta(\varepsilon)e(\varepsilon)$. Легко видеть, что при малых ε указанные шары не пересекаются. Поэтому построенные в п. 15.4 пп-решения различны.

Для доказательства утверждения 4° нужно провести те же рассуждения, которыми в этом пункте было завершено доказательство утверждения 2°.

Теорема 15.1 полностью доказана.

15.8. Маятник с вибрирующей точкой подвеса. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\varepsilon\dot{\theta} + [\varepsilon^2 k^2 - \varepsilon p''(t)] \sin\theta = 0 \qquad (15.65)$$

колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса. Здесь $\alpha > 0$, $p(t)$ — тригонометрический многочлен с нулевым средним, ε — положительный параметр. При малых ε нижнее состояние равновесия ($\theta = 0$) всегда устойчиво. Верхнее состояние равновесия ($\theta = \pi$), как показали Н. Н. Боголюбов [3] и П. Л. Капица [1] (см. также Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [1]), может быть при малых ε как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от функции $p(t)$.

Нас будет интересовать вопрос о рождении пп-решений уравнения (15.65) из верхнего состояния равновесия.

Так как уравнение (15.65) не является уравнением вида (15.8), то для применения теоремы 15.1 следует предварительно преобразовать его к этому виду.

Для этого, следуя Н. Н. Боголюбову, введем вместо одной неизвестной функции времени θ две новые неизвестные функции x_1 и x_2 с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} \theta &= x_1 + \pi - \varepsilon p(t) \sin x_1, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon x_2 - \varepsilon p'(t) \sin x_1. \end{aligned}\right\} \tag{15.66}$$

Тогда уравнение (15.65) перейдет в систему двух уравнений

$$x_1' = \frac{\varepsilon x_2}{1 - \varepsilon p(t) \cos x_1}, \tag{15.67}$$

$$\begin{aligned} x_2' = {} & p''(t) \{\sin x_1 - \sin[x_1 - \varepsilon p(t) \sin x_1]\} + \\ & + \frac{\varepsilon p'(t) x_2 \cos x_1}{1 - \varepsilon p(t) \cos x_1} - 2\alpha\varepsilon x_2 + 2\alpha\varepsilon p'(t) \sin x_1 + \\ & + \varepsilon k^2 \sin[x_1 - \varepsilon p(t) \sin x_1]. \end{aligned} \tag{15.68}$$

Разлагая правые части в ряд по степеням ε и переходя к векторным обозначениям, получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1(t) x + \varepsilon^2 A_2(t) x + \ldots + \varepsilon F(t, x) + \ldots, \tag{15.69}$$

где

$$A_1(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ p(t) p''(t) + 2\alpha p'(t) + k^2 & p'(t) - 2\alpha \end{Vmatrix},$$

$$A_2(t) = \begin{Vmatrix} 0 & p(t) \\ -p(t) k^2 & p'(t) p(t) \end{Vmatrix},$$

$$F(t, x) = \left\{0, -\frac{1}{6}[k^2 + 4p(t) p''(t) + 2\alpha p'(t)] x_1^3 - \frac{1}{2} p'(t) x_1^2 x_2\right\}.$$

При помощи замен (14.29) и (15.12) от уравнения (15.69) можно перейти к уравнению

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon B_1 z + \varepsilon^2 B_2 z + \ldots + \varepsilon \bar{F}(z) + \ldots, \tag{15.70}$$

где

$$B_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ k^2 - M[(p')^2] & -2\alpha \end{Vmatrix}, \quad B_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 2M[p(p')^2] & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\bar{F}(z) = \left\{0,\ \frac{2}{3} M[(p')^2] z_1^3 - \frac{1}{6} k^2 z_1^3\right\}.$$

Очевидно, при $M[(p')^2] > k^2$ верхнее состояние равновесия устойчиво. Если же $M[(p')^2] < k^2$, то верхнее состояние равновесия неустойчиво. При этом в окрестности верхнего состояния равновесия при достаточно малых ε нет почти периодических колебаний.

Нас интересует случай, когда

$$M[(p')^2] = k^2. \tag{15.71}$$

В этом случае для определения устойчивости верхнего состояния равновесия нужно последовательно конструировать (см. п. 14.5) матрицы

$$B_1 + \varepsilon B_2, \quad B_1 + \varepsilon B_2 + \varepsilon^2 B_3, \quad B_1 + \varepsilon B_2 + \varepsilon^2 B_3 + \varepsilon^3 B_4, \ \ldots \tag{15.72}$$

до тех пор, пока одна из них окажется неособенной при малых ненулевых ε. Так, например, если $M[p(p')^2] \neq 0$, то неособенной будет матрица $B_1 + \varepsilon B_2$. По невырожденной матрице (15.72) определяется, будет ли нулевое решение устойчиво. Например, если

$$M[p(p')^2] < 0, \tag{15.73}$$

то верхнее состояние равновесия устойчиво, если же

$$M[p(p')^2] > 0, \tag{15.74}$$

то неустойчиво. В дальнейшем предполагается, что одна из матриц (15.72) при малых ненулевых ε не вырождена.

Из теоремы 15.1 вытекает

Теорема 15.2. *Пусть выполнено условие* (15.71). *Тогда*:

1°. *Если верхнее состояние равновесия маятника неустойчиво, то при малых положительных* ε *в его окрестности нет пп-колебаний.*

2°. *Если верхнее состояние равновесия маятника устойчиво, то в каждой его окрестности при малых* ε *есть ровно два пп-колебания, которые неустойчивы.*

Более детальный анализ показывает, что в условиях утверждения 2° у верхнего состояния равновесия существует круговая (в фазовой плоскости) окрестность $V(r_0)$, обладающая следующим свойством. Для любой другой окрестности $V(r)$ может быть указано такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r) > 0$, что у каждого уравнения (15.65) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ есть решения с начальным значением в $V(r)$, которые при возрастании t выходят из $V(r_0)$. Этот факт означает, что при выполнении условия (15.71) верхнее состояние равновесия практически всегда неустойчиво.

15.9. Дополнительные замечания. В теории уравнений с малым параметром значительно продвинута задача о продолжении по параметру пп-решения в случае, когда линеаризация приводит к уравнению с регулярным пп-оператором. Этот случай подробно описан в ряде книг — см., например, Б. П. Демидович [1], В. И. Зубов [1], Дж. Хейл [1]. С большой полнотой изучен также случай, когда предельное уравнение с регулярным пп-оператором получено методом усреднения — см. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский [1], Ю. А. Митропольский [1].

Ветвление пп-решений изучалось лишь для весьма частных классов уравнений. Укажем здесь тонкие исследования Ю. Мозера [1, 2, 4], статью В. Ш. Бурда [1] и статью В. Ш. Бурда и Т. Сабирова [1].

Бывает, что усердие превозмогает и рассудок.

Козьма Прутков

§ 16. Бифуркация пп-решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка *)

16.1. Постановка задачи. Необходимое условие. В этом параграфе рассматривается вопрос о малых ненулевых пп-решениях скалярного уравнения

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + q(t)\,x = a(t)\,x^n + \omega(t, x), \qquad (16.1)$$

где ε — малый положительный параметр, $q(t) \in B^2(R^1)$, $a(t) \in B^1(R^1)$, n — натуральное число и $n \geqslant 2$, $\omega(t, x)$

*) В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов и М. А. Красносельский [4].

почти периодична по t, $\omega(t, 0) \equiv 0$ и

$$|\omega(t, x_1) - \omega(t, x_2)| \leqslant \varkappa(r)|x_1 - x_2| \quad (|x_1|, |x_2| \leqslant r), \tag{16.2}$$

где

$$\lim_{r \to 0} r^{-n+1}\varkappa(r) = 0. \tag{16.3}$$

Уравнение (16.1) описывает, как известно, колебания груза малой массы на упругом элементе с нелинейной восстанавливающей силой. Укажем вначале необходимые условия существования малых ненулевых пп-решений у уравнения (16.1) при малых ε. Пусть такие решения $x(t; \varepsilon)$ существуют; функция $x(t; \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ стремится равномерно к нулю. Введем в рассмотрение функцию

$$y(t; \varepsilon) = \frac{x(t + t_\varepsilon; \varepsilon)}{\|x(t; \varepsilon)\|_{B(R^1)}},$$

где t_ε выбирается таким образом, что

$$|y(0; \varepsilon)| > 1/2. \tag{16.4}$$

Функция $y(t; \varepsilon)$ является решением уравнения

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -q(t + t_\varepsilon)y + f(t; \varepsilon), \tag{16.5}$$

где $f(t; \varepsilon)$ почти периодична по t и равномерно относительно t стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Из (16.5) вытекает, что

$$\frac{dy(t; \varepsilon)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)} [f(s; \varepsilon) - q(s + t_\varepsilon) y(s; \varepsilon)]\, ds,$$

откуда

$$\left\| \frac{dy(t; \varepsilon)}{dt} \right\|_{B(R^1)} \leqslant c, \tag{16.6}$$

где постоянная c не зависит от ε. В силу (16.6) можно указать такую последовательность $\varepsilon_j \to 0$, что пп-функции $y_j(t) = y(t; \varepsilon_j)$ равномерно на каждом конечном промежутке сходятся к некоторой ограниченной на всей оси и не равной тождественно нулю (в силу (16.4)) функции $u(t)$, а пп-функции $q(t + t_{\varepsilon_j})$ сходятся равно-

мерно на $(-\infty, \infty)$ к некоторой пп-функции $q^*(t)$. В равенстве

$$\frac{dy_j(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_j} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon_j}(t-s)} \left[f(s; \varepsilon_j) - q(s + t_{\varepsilon_j}) y_j(s)\right] ds,$$

очевидно, правая часть равномерно на каждом конечном промежутке сходится к $-q^*(t)u(t)$. Поэтому производные $y_j'(t)$ сходятся к $u'(t)$, и, следовательно, функция $u(t)$ является ограниченным на всей оси решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} + q^*(t)\, x = 0. \tag{16.7}$$

Следовательно, пп-оператор в левой части уравнения (16.7) не обладает свойством регулярности, откуда вытекает (см. п. 4.4), что $M(q^*) = 0$. Значит, и

$$M(q) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q(s)\, ds = 0. \tag{16.8}$$

Итак, *равенство* (16.8) *является необходимым условием существования ненулевых малых пп-решений у уравнения* (16.1) *при малых* ε.

16.2. Основная теорема. Ниже без дополнительных оговорок предполагается, что выполнено условие (16.8). Кроме этого будем считать, что $q(t) \not\equiv 0$. Далее, будем предполагать, что

$$\int_0^t q(s)\, ds \in B(R^1) \tag{16.9}$$

и

$$\int_0^t [q^2(s) - M(q^2)]\, ds \in B(R^1). \tag{16.10}$$

Положим

$$b(t) = a(t) \exp\left[-(n-1) \int_0^t q(s)\, ds\right]; \tag{16.11}$$

будем считать, что $M(b) \neq 0$ и

$$\int_0^t [b(s) - M(b)]\, ds \in B(R^1). \tag{16.12}$$

Если пп-функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют одному из неравенств $x_1(t) \geqslant x_2(t)$ или $x_1(t) \leqslant x_2(t)$, то будем говорить, что они *сравнимы*.

Теорема 16.1. *Существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $r_0 > 0$, *что*

1°. *При* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *нулевое решение уравнения* (16.1) *экспоненциально устойчиво.*

2°. *Если* n *четно, то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.1) *имеет по крайней мере одно ненулевое неустойчивое пп-решение в шаре* $V(r_0)$. *Все пп-решения* $x(t; \varepsilon)$ *из шара* $V(r_0)$ *сравнимы друг с другом; они удовлетворяют неравенству*

$$M(b)\, x(t; \varepsilon) > 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{16.13}$$

3°. *Если* n *нечетно и* $M(b) > 0$, *то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.1) *имеет в шаре* $V(r_0)$ *по крайней мере одно положительное и по крайней мере одно отрицательное неустойчивые решения. Все решения из* $V(r_0)$ *знакопостоянны и сравнимы друг с другом.*

4°. *Если* n *нечетно и* $M(b) < 0$, *то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.1) *не имеет в шаре* $V(r_0)$ *ненулевых пп-решений.*

Доказательство будет проведено в последующих пунктах.

16.3. Доказательство утверждения 1°. В силу теоремы 11.1 достаточно показать, что при малых ε пп-оператор

$$L(\varepsilon)\, x = \varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + q(t)\, x \tag{16.14}$$

регулярен и устойчив. Воспользуемся теоремой 9.8, для применения которой достаточно показать, что решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{dx}{dt} + \frac{q(t)}{\varepsilon}\, x = 0 \tag{16.15}$$

неосциллируют и что существует пп-функция $v(t;\varepsilon)\gg 0$, удовлетворяющая неравенству

$$L(\varepsilon)v(t;\varepsilon)\geqslant \gamma_0\varepsilon v(t;\varepsilon), \tag{16.16}$$

где $\gamma_0>0$.

Для исследования решений уравнения (16.15) произведем замену

$$x=e^{-t/2\varepsilon}y,$$

после которой уравнение перепишется в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left[\frac{q(t)}{\varepsilon}-\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]y=0.$$

Решения же этого уравнения не осциллируют при тех ε, при которых

$$\frac{q(t)}{\varepsilon}-\frac{1}{4\varepsilon^2}<0 \qquad (-\infty<t<\infty).$$

Функцию $v(t;\varepsilon)$ определим равенством

$$v(t;\varepsilon)=u_1(t)+\varepsilon u_2(t), \tag{16.17}$$

где

$$u_1(t)=\exp\left[-\int_0^t q(s)\,ds\right], \tag{16.18}$$

а $u_2(t)$ — некоторое фиксированное пп-решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}+q(t)x=M(q^2)u_1(t)-\frac{d^2u_1(t)}{dt^2}. \tag{16.19}$$

Из (16.9) вытекает почти периодичность $u_1(t)$, а из (16.10) — почти периодичность всех решений уравнения (16.19). Простой подсчет показывает, что

$$L(\varepsilon)v(t;\varepsilon)=\varepsilon M(q^2)u_1(t)+\varepsilon^2\frac{d^2u_2(t)}{dt^2}.$$

Из этого равенства следует справедливость при малых ε неравенства (16.16) — нужно лишь учесть, что $u_1(t)$ строго положительна, а функция $\frac{d^2u_2(t)}{dt^2}$ почти периодична.

16.4. Существование ненулевых пп-решений в утверждениях 2° и 3°. Ограничимся проведением доказательства существования малого ненулевого пп-решения в условиях утверждения 2°. Общая идея доказательства совпадает с той, которая была описана в п. 15.1.

Положим

$$\alpha = \left[\frac{M(q^2)}{M(b)}\right]^{1/(n-1)}$$

и обозначим через $v_1(t)$ какое-либо пп-решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + q(t)x = \alpha^n a(t) u_1^n(t) - \alpha \frac{d^2 u_1(t)}{dt^2},$$

где $u_1(t)$ определена равенством (16.18). Существование пп-решения $v_1(t)$ вытекает из условий (16.10) и (16.12).

После замены

$$x = \alpha\varepsilon^{1/(n-1)} u_1(t) + \varepsilon^{n/(n-1)} v_1(t) + y \tag{16.20}$$

уравнение (16.1) принимает вид

$$L_1(\varepsilon) y = D(t, y; \varepsilon), \tag{16.21}$$

где

$$\begin{aligned} D(t, y; \varepsilon) = {} & \varepsilon^{(2n-1)/(n-1)} \varphi_1(t; \varepsilon) + \varepsilon^{(n-2)/(n-1)} \varphi_2(t; \varepsilon) y^2 + \ldots \\ & \ldots + \varepsilon^{1/(n-1)} \varphi_{n-1}(t; \varepsilon) y^{n-1} + a(t) y^n + \\ & + \omega[t, \alpha\varepsilon^{1/(n-1)} u_1(t) + \varepsilon^{n/(n-1)} v_1(t) + y], \end{aligned} \tag{16.22}$$

а

$$\begin{aligned} L_1(\varepsilon) y = {} & \varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \\ & + \{q(t) - na(t)[\alpha\varepsilon^{1/(n-1)} u_1(t) + \varepsilon^{n/(n-1)} v_1(t)]^{n-1}\} y, \end{aligned} \tag{16.23}$$

функции $\varphi_i(t; \varepsilon)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ почти периодичны по t и непрерывны по ε $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ равномерно относительно t.

Покажем, что пп-операторы (16.23) при малых ненулевых ε регулярны и нормы обратных к ним допускают оценку

$$\| L_1^{-1}(\varepsilon) \|_{B(R^1)} \leqslant \frac{c}{\varepsilon}. \tag{16.24}$$

Положим $w(t;\varepsilon) = u_1(t) + \varepsilon w_1(t)$, где $u_1(t)$ определена формулой (16.18), а $w_1(t)$ — некоторое пп-решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + q(t)x =$$
$$= -(n-1)M(q^2)u_1(t) - \frac{d^2u_1(t)}{dt^2} + n\alpha^{n-1}a(t)u_1^{n-1}(t).$$

Существование пп-решения $w_1(t)$ вытекает из (16.10) и (16.12). Легко проверить, что

$$L_1(\varepsilon)w(t;\varepsilon) = -\varepsilon(n-1)M(q^2)u_1(t) + o(\varepsilon).$$

Поэтому при достаточно малых ε

$$L_1(\varepsilon)w(t;\varepsilon) \leqslant -\varepsilon\gamma w(t;\varepsilon) \qquad (-\infty < t < \infty), \quad (16.25)$$

где $\gamma > 0$. Так как $w(t;\varepsilon) \gg 0$ при малых ε, то из теоремы 9.9 вытекает, во-первых, регулярность операторов $L_1(\varepsilon)$ и, во-вторых, отрицательность их функций Грина. Поэтому из (16.25) следует неравенство

$$-L_1^{-1}(\varepsilon)w(t;\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon\gamma}w(t;\varepsilon) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

из которого вытекает оценка (16.24).

Так как операторы (16.23) регулярны, то от дифференциального уравнения (16.21) можно перейти к эквивалентному интегральному уравнению

$$y = \Pi(\varepsilon)y, \quad (16.26)$$

где

$$\Pi(\varepsilon)y(t) = L_1^{-1}(\varepsilon)D[t, y(t); \varepsilon]. \quad (16.27)$$

Простой подсчет показывает, что из (16.24) вытекает оценка

$$\|\Pi(\varepsilon)0\|_{B(R^1)} = o(\varepsilon^{1/(n-1)}).$$

Поэтому существует такая непрерывная при $\varepsilon \geqslant 0$ и положительная при $\varepsilon > 0$ функция $\beta(\varepsilon)$, что $\beta(0) = 0$ и

$$\|\Pi(\varepsilon)0\|_{B(R^1)} \leqslant \varepsilon^{1/(n-1)}\beta(\varepsilon).$$

Снова из (16.24) вытекает, что при малых ε оператор (16.27) удовлетворяет на шаре $V(r)$ радиуса

$$r = \varepsilon^{1/(n-1)}\sqrt{\beta(\varepsilon)}$$

условиям принципа сжатых отображений. Поэтому уравнение (16.21) имеет пп-решение $y(t;\varepsilon)$ в шаре $V(r)$. Этому пп-решению соответствует по формуле (16.20) знакопостоянное пп-решение уравнения (16.1), знак которого совпадает со знаком α или, что то же, со знаком $M(b)$.

Выше было показано, что функции Грина операторов $L_1(\varepsilon)$ отрицательны. Из теоремы 9.9 вытекает, что операторы $L_1(\varepsilon)$ неустойчивы. Это позволяет при помощи теоремы 11.2 показать, что решения, существование которых установлено, неустойчивы.

16.5. Завершение доказательства теоремы 16.1. Покажем сначала, что при малых $\varepsilon > 0$ каждое ненулевое малое пп-решение $x(t;\varepsilon)$ знакопостоянное. Для этого выделим в плоскости $\{x,x'\}$ конус $K(N)$ неравенствами $x \geqslant 0$ и $Nx + x' \geqslant 0$, где N выбрано так, что $\varepsilon_0 N^2 - N - q(t) \leqslant -c < 0$ (мы считаем, что $\varepsilon_0 < 1$). Можно считать, что $x(0;\varepsilon) = \sup\limits_t x(t;\varepsilon)$. Если $x(0;\varepsilon) > 0$, то $\{x(0;\varepsilon), x'(0;\varepsilon)\} \in K(N)$, и поэтому $\{x(t;\varepsilon), x'(t;\varepsilon)\} \in K(N)$ при всех t — значит, $x(t;\varepsilon) > 0$.

Для доказательства сравнимости двух малых пп-решений $x_1(t;\varepsilon)$ и $x_2(t;\varepsilon)$ достаточно в уравнении (16.1) произвести замену $x = x_1(t;\varepsilon) + y$ и повторить рассуждения предыдущего абзаца.

Нам осталось показать, что в условиях утверждения 2° у уравнения (16.1) нет неудовлетворяющих неравенству (16.13) пп-решений, а в условиях утверждения 4° нет ненулевых малых пп-решений. Для доказательства нужно провести однотипные рассуждения. Поэтому мы ограничимся доказательством утверждения 4°.

В силу (16.12) все решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} + q(t)\,x = [b(t) - M(b)]\,e^{-\int\limits_0^t q(s)\,ds}$$

почти периодичны. Пусть $g(t)$ — одно из пп-решений. Положим

$$z(t;\tau;\varepsilon) = \tau v(t;\varepsilon) + \tau^n g(t), \qquad (16.28)$$

где $v(t;\varepsilon)$ — строго положительная пп-функция (16.17), а τ — скалярная переменная. Очевидно,

$$L(\varepsilon)z(t;\tau;\varepsilon)=\tau L(\varepsilon)v(t;\varepsilon)+\tau^n L(\varepsilon)g(t),$$

и поэтому при положительных τ из (16.16) вытекает неравенство

$$L(\varepsilon)z(t;\tau;\varepsilon)\geqslant\tau\gamma_0\varepsilon v(t;\varepsilon)+$$
$$+\tau^n\frac{d^2g(t)}{dt^2}+\tau^n[b(t)-M(b)]\exp\left[-\int_0^t q(s)\,ds\right].$$

С другой стороны,

$$a(t)z^n(t;\tau;\varepsilon)+\omega[t,z(t;\tau;\varepsilon)]=$$
$$=\tau^n b(t)\exp\left[-\int_0^t q(s)\,ds\right]+o(\tau)[\varepsilon+o(\varepsilon)]+o(\tau^n).$$

Следовательно,

$$L(\varepsilon)z(t;\tau;\varepsilon)\geqslant$$
$$\geqslant a(t)z^n(t;\tau;\varepsilon)+\omega[t,z(t;\tau,\varepsilon)]+\tau\gamma_0\varepsilon v(t;\varepsilon)=$$
$$=\tau^n M(b)\exp\left[-\int_0^t q(s)\,ds\right]+o(\tau)[\varepsilon+o(\varepsilon)]+o(\tau^n).$$

Так как по предположению $M(b)<0$, то из последнего неравенства вытекает существование таких положительных ε_0 и τ_0, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $0<\tau\leqslant\tau_0$

$$L(\varepsilon)z(t;\tau;\varepsilon)\gg a(t)z^n(t;\tau;\varepsilon)+\omega[t,z(t;\tau;\varepsilon)]. \quad (16.29)$$

Пусть число r_0 настолько мало, что шар $V(r_0)$ содержится во всех конусных отрезках $\langle -z(t;\tau_0;\varepsilon),\ z(t;\tau_0;\varepsilon)\rangle$ при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$.

Допустим, что при некотором $\varepsilon^*\in(0,\varepsilon_0)$ у уравнения (16.1) есть пп-решение $x(t;\varepsilon^*)\in V(r_0)$, принимающее при некоторых t положительные значения. Обозначим через τ^* такое наименьшее τ, при котором

$$x(t;\varepsilon^*)\leqslant z(t;\tau;\varepsilon^*)\qquad(-\infty<t<\infty). \quad (16.30)$$

Очевидно, $0<\tau^*\leqslant\tau_0$.

Введем в рассмотрение пп-оператор

$$L_2(\varepsilon)x = L(\varepsilon)x + x. \tag{16.31}$$

Повторяя рассуждения п. 16.3, легко показать, что операторы (16.31) при малых ε удовлетворяют условиям теоремы 9.8. Поэтому они регулярны и их функции Грина положительны. Можно считать, что операторы (16.31) регулярны и их функции Грина положительны при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$\Pi_* x(t) = L_2^{-1}(\varepsilon^*)\{x(t) + a(t)x^n(t) + \omega[t, x(t)]\}.$$

Мы будем его рассматривать на шаре $V(r_*)$ радиуса

$$r_* = \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0;\ 0<\tau\leqslant\tau_0} \left[\sup_{-\infty<t<\infty} z(t; \tau; \varepsilon)\right].$$

Если ε_0 и τ_0 достаточно малы, то Π_* монотонен на $V(r_*)$.

Очевидно,

$$x(t; \varepsilon^*) = \Pi_* x(t; \varepsilon^*)$$

и в силу монотонности Π_*

$$x(t; \varepsilon^*) \leqslant \Pi_* z(t; \tau^*; \varepsilon^*).$$

Из (16.29) вытекает оценка

$$z(t; \tau^*; \varepsilon^*) \gg \Pi_* z(t; \tau^*; \varepsilon^*).$$

Поэтому

$$x(t; \varepsilon^*) \ll z(t; \tau^*; \varepsilon^*).$$

Последнее неравенство противоречит правилу выбора τ^*.

Мы показали, что в условиях утверждения 4° у уравнения (16.1) нет малых пп-решений, принимающих в некоторых точках положительные значения.

Если бы у уравнения (16.1) были ненулевые и неположительные малые пп-решения, то у уравнения

$$L(\varepsilon)x = a(t)x^n - \omega(t, -x)$$

были бы ненулевые и неотрицательные малые пп-решения. А этого по уже доказанному не может быть.

Теорема 16.1 полностью доказана.

16.6. Знакопостоянные $a(t)$. Если коэффициенты $q(t)$ и $a(t)$ и функция $\omega(t, x)$ периодичны по t с некоторым периодом T_0, то естественно искать не пп-решения уравнения (16.1), а его T_0-периодические решения. Построение таких периодических решений производится аналогично построению пп-решений. Интересно отметить, что при этом в условиях утверждения 2° теоремы 16.1 у уравнения (16.1) есть ровно одно ненулевое малое T_0-периодическое решение, а в условиях утверждения 3° — ровно два таких решения. Для общих уравнений подобное утверждение авторам удалось установить лишь при дополнительном предположении о том, что либо $a(t) \gg 0$, либо $a(t) \ll 0$ (для доказательства можно, например, использовать конструкции из § 13).

16.7. Общее уравнение. Развитая в этом параграфе методика позволяет изучить малые пп-решения более общих, чем (16.1), уравнений

$$\varepsilon[m_0(t) + m(t; \varepsilon)]\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + [q_0(t) + \varepsilon q_1(t) + \varepsilon q(t; \varepsilon)]x = \\ = [a_0(t) + a(t; \varepsilon)]x^n + \omega(t, x; \varepsilon). \qquad (16.32)$$

Будем предполагать, что все входящие в уравнение функции почти периодичны по t. Далее, пусть

$$m_0(t),\ q_1(t),\ a_0(t) \in B^1(R^1), \quad q_0(t) \in B^2(R^1). \qquad (16.33)$$

Относительно $m(t; \varepsilon)$, $q(t; \varepsilon)$ и $a(t; \varepsilon)$ будем предполагать, что они равномерно относительно t стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Остаток $\omega(t, x; \varepsilon)$ обладает теми же свойствами, какими обладает член $\omega(t, x)$ в уравнении (16.1). Наконец, будем предполагать, что

$$m_0(t) \gg 0. \qquad (16.34)$$

Аналогом необходимого условия (16.8) существования малых пп-решений у уравнения (16.1) в случае уравнения (16.32) является равенство

$$M(q_0) = 0. \qquad (16.35)$$

Ниже, конечно, предполагается, что это равенство выполнено.

Введем в рассмотрение функции

$$b_0(t) = a_0(t) \exp\left[-(n-1)\int_0^t q_0(s)\,ds\right] \tag{16.36}$$

и

$$\lambda_0(t) = q_1(t) - m_0(t)\frac{dq_0(t)}{dt} + m_0(t)\,q_0^2(t). \tag{16.37}$$

Будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^t q_0(s)\,ds \in B(R^1), \tag{16.38}$$

$$\int_0^t [b_0(s) - M(b_0)]\,ds \in B(R^1) \tag{16.39}$$

и

$$\int_0^t [\lambda_0(s) - M(\lambda_0)]\,ds \in B(R^1), \tag{16.40}$$

являющиеся аналогами условий (16.9), (16.10) и (16.12). При изучении уравнения (16.1) предполагалось, что $M(b) \neq 0$ и $q(t) \not\equiv 0$; аналогами этих предположений являются условия

$$M(b_0) \neq 0 \tag{16.41}$$

и

$$M(\lambda_0) \neq 0. \tag{16.42}$$

Тем же методом, каким была доказана теорема 16.1, можно доказать следующее более общее утверждение.

Теорема 16.2. *Существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $r_0 > 0$, *что*

1°. *При* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *нулевое решение уравнения* (16.32) *экспоненциально устойчиво, если*

$$M(\lambda_0) > 0, \tag{16.43}$$

и неустойчиво, если

$$M(\lambda_0) < 0. \tag{16.44}$$

2°. *Если* n *четно, то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.32) *имеет по крайней мере одно ненулевое пп-решение* (*экс-*

поненциально устойчивое, если $M(\lambda_0) < 0$, *и неустойчивое, если* $M(\lambda_0) > 0$) *в шаре* $V(r_0)$. *Все ненулевые решения из* $V(r_0)$ *сравнимы друг с другом и удовлетворяют неравенству*

$$M(\lambda_0)\, M(b_0)\, x(t;\, \varepsilon) > 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \quad (16.45)$$

3°. *Если* n *нечетно и*

$$M(\lambda_0)\, M(b_0) > 0, \qquad (16.46)$$

то при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.32) *имеет в шаре* $V(r_0)$ *по крайней мере одно положительное и по крайней мере одно отрицательное пп-решение. Эти пп-решения экспоненциально устойчивы, если* $M(\lambda_0) < 0$, *и неустойчивы, если* $M(\lambda_0) > 0$. *Все решения из* $V(r_0)$ *знакопостоянны и сравнимы друг с другом.*

4°. *Если* n *нечетно и*

$$M(\lambda_0)\, M(b_0) < 0, \qquad (16.47)$$

то при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.1) *не имеет в шаре* $V(r_0)$ *ненулевых пп-решений.*

16.8. Пример. Пусть маятник с медленно меняющейся длиной $l(\varepsilon t)$ нити совершает колебания в горизонтальной плоскости. Состояние маятника будем определять по углу θ с некоторым фиксированным направлением. Если масса маятника равна 1, то уравнение колебаний запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\left[l^2(\varepsilon t)\frac{d\theta}{dt}\right] + 2\chi\frac{d}{dt}\left[l(\varepsilon t)\,\theta\right] = 0,$$

причем характеризующий трение коэффициент χ положителен.

Допустим, что точка закрепления маятника вибрирует по закону $\frac{1}{\varepsilon}\,p(\varepsilon t)$ вдоль прямой, определяемой указанным выше фиксированным направлением. Тогда угол θ будет определяться (ср. Ю. А. Митропольский [1]) уравнением

$$\frac{d}{dt}\left[l^2(\varepsilon t)\frac{d\theta}{dt}\right] + 2\chi\frac{d}{dt}\left[l(\varepsilon t)\,\theta\right] + \varepsilon p''(\varepsilon t)\, l(\varepsilon t)\sin\theta = 0.$$

Полагая $\tau = \varepsilon t$, перепишем его в следующей форме:

$$\varepsilon \frac{d}{d\tau}\left[l^2(\tau)\frac{d\theta}{d\tau}\right] + 2\chi \frac{d}{d\tau}[l(\tau)\theta] + p''(\tau)\, l(\tau)\sin\theta = 0$$

или, что то же, в форме

$$\varepsilon \frac{l(\tau)}{2[\chi+\varepsilon l'(\tau)]}\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{2\chi l'(\tau) + l(\tau)\, p''(\tau)}{2[\chi+\varepsilon l'(\tau)]\, l(\tau)}\theta =$$
$$= \frac{p''(\tau)}{12[\chi+\varepsilon l'(\tau)]}\theta^3 + \omega(\tau, \theta; \varepsilon), \qquad (16.48)$$

где $\omega(\tau, \theta; \varepsilon)$ имеет 5-й порядок малости по θ.

Предположим, что функции $l(\tau)$ и $p(\tau)$ почти периодичны и достаточно гладкие. Тогда для исследования вопроса о малых ненулевых пп-колебаниях уравнения (16.48) можно применить теорему 16.2. При этом

$$m_0(\tau) = \frac{1}{2\chi}\, l(\tau), \qquad q_0(\tau) = \frac{l'(\tau)}{l(\tau)} + \frac{p''(\tau)}{2\chi},$$

$$q_1(\tau) = -\frac{[l'(\tau)]^2}{\chi l(\tau)} - \frac{l'(\tau)\, p''(\tau)}{2\chi^2}, \qquad a_0(\tau) = \frac{p''(\tau)}{12\chi}.$$

Условия (16.34), (16.35) и (16.38) выполняются очевидным образом. Функция (16.36) отличается положительным множителем от функции

$$b_{00}(\tau) = \frac{p''(\tau)}{l^2(\tau)}\, e^{-\frac{1}{\chi}p'(\tau)}, \qquad (16.49)$$

а функция (16.37) имеет вид

$$\lambda_0(\tau) = -\frac{l(\tau)}{4\chi^2}\, p'''(\tau) + \frac{l(\tau)}{8\chi^3}[p''(\tau)]^2 - \frac{l''(\tau)}{2\chi}. \qquad (16.50)$$

Будем считать, что эти функции удовлетворяют условиям (16.39)—(16.42).

Из вида функций (16.49) и (16.50) ясно, что числа $M(b_0)$ и $M(\lambda_0)$ могут иметь различные знаки (в любых комбинациях) в зависимости от $l(\tau)$ и $p(\tau)$. Поэтому в зависимости от них может иметь место любой факт, содержащийся в утверждениях 1°, 3° и 4° теоремы 16.2.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ГЛАВ 1—4 *)

У каждого свое разумение краткости.
Козьма Прутков, из неопубликованного.

Глава 1. Линейные дифференциальные операторы с почти периодическими коэффициентами.

§ 1. Почти периодические функции.

1.1. Начнем с основных определений.

Через R^n обозначается n-мерное евклидово пространство; $|x|$ — евклидова норма вектора $x \in R^n$.

Пространство непрерывных и равномерно ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций со значениями в R^n обозначается через $C(R^n)$. Норма в $C(R^n)$ определяется формулой

$$\|x(t)\|_{C(R^n)} = \sup_{-\infty < t < \infty} |x(t)| \qquad (x(t) \in C(R^n)).$$

Функции $x(t)$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|x(t)\|_{C^m(R^n)} = \|x(t)\|_{C(R^n)} + \|x'(t)\|_{C(R^n)} + \ldots + \|x^{(m)}(t)\|_{C(R^n)}$$

образуют пространство $C^m(R^n)$.

Функция $x(t) \in C(R^n)$ называется *почти периодической* (или, как мы будем все время писать, *пп-функцией*), если множество функций

$$x_h(t) = x(t+h) \qquad (-\infty < h < \infty)$$

компактно в $C(R^n)$. Пп-функции образуют пространство $B(R^n)$, являющееся подпространством пространства $C(R^n)$. Через $B^m(R^n)$ обозначается подпространство пространства $C^m(R^n)$, состоящее из пп-функций, производные которых порядка m почти периодичны.

Для каждой пп-функции $x(t)$ определено ее *среднее значение*

$$M[x] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(s)\,ds.$$

---

*) Во всем кратком содержании нумерация формул самостоятельная.

1.2. Важными примерами пп-функций являются *тригонометрические многочлены*

$$x(t)=\sum_{i=1}^{k} a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Здесь k — любое натуральное число, λ_i — произвольные вещественные числа, коэффициенты a_i и b_i — векторы из R^n.

Пространства $B(R^n)$ и $B^m(R^n)$ несепарабельны. В каждом из них плотно множество тригонометрических многочленов.

1.3. Функция $f(t, x)$ двух переменных $-\infty < t < \infty$, $x \in R^n$ называется *равномерно почти периодической*, если она почти периодична по t при каждом фиксированном x и непрерывна по x на каждом шаре $|x| \leqslant r$ равномерно относительно t.

По функции $f(t, x)$ определяется оператор суперпозиции

$$fx(t) = f[t, x(t)].$$

Если $f(t, x)$ равномерно почти периодична, то оператор суперпозиции действует в $B(R^n)$, непрерывен и ограничен в нем.

1.4. Понятие пп-функции переносится естественным образом на функции $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в произвольном метрическом пространстве $\mathfrak{R}$. Пространство $C(\mathfrak{R})$ непрерывных равномерно ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций и пространство пп-функций со значениями в $\mathfrak{R}$ будут метрическими пространствами с метрикой

$$\rho_{C(\mathfrak{R})}[x(t), y(t)] = \sup_{-\infty < t < \infty} \rho_{\mathfrak{R}}[x(t), y(t)].$$

§ 2. Регулярные пп-операторы.

2.1. Основные построения главы относятся к изучению линейного дифференциального оператора

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x, \tag{2.1}$$

где $x \in R^n$, $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — квадратные матрицы порядка n, элементами которых являются пп-функции. Операторы (2.1) будем называть *пп-операторами*.

Пп-оператор L называется *регулярным*, если уравнение

$$Lx = f(t) \tag{2.2}$$

имеет единственное решение $x(t) \in C^m(R^n)$ при любой правой части $f(t) \in C(R^n)$, причем решение принадлежит $B^m(R^n)$, если $f(t) \in B(R^n)$.

Свойство пп-оператора быть регулярным устойчиво относительно малых изменений его коэффициентов.

Пп-оператор L называется *слабо регулярным*, если уравнение (2.2) имеет по крайней мере одно решение в $C(R^n)$ при любой правой части из $B(R^n)$. Как оказывается, *из слабой регулярности пп-оператора вытекает его регулярность!*

2.2. При изучении уравнений (2.2) часто удобно записывать их в виде уравнений первого порядка в фазовом пространстве R^{mn}.

Пусть $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Положим $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$, где

$$u_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad u_2 = \{x_1', \ldots, x_n'\}, \ldots, u_m = \{x_1^{(m-1)}, \ldots, x_n^{(m-1)}\}.$$

Тогда уравнение (2.2) запишется в виде

$$\tilde{L}u = \tilde{f}(t),$$

где

$$\tilde{f}(t) = \{0, \ldots, 0, f(t)\}$$

и

$$\tilde{L}u = \frac{du}{dt} + Q(t)\,u, \tag{2.3}$$

а

$$Q(t) = \begin{Vmatrix} 0 & -I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & -I \\ A_m(t) & A_{m-1}(t) & A_{m-2}(t) & \ldots & A_1(t) \end{Vmatrix}. \tag{2.4}$$

Пп-оператор (2.3) *регулярен тогда и только тогда, когда регулярен пп-оператор* (2.1).

2.3. При исследовании пп-операторов существенно используется известная и важная во многих задачах *теорема Эсклангона*. Эта теорема гласит, что *ограниченное на всей оси решение* $x(t)$ *уравнения* (2.2) *с ограниченной на всей оси правой частью имеет равномерно ограниченные на всей оси* $(-\infty, \infty)$ *производные* $x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)$.

2.4. Рассмотрим пп-оператор (2.1). Через $H(L)$ обозначим множество таких пп-операторов

$$L_* x = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1^*(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m^*(t)\,x,$$

для каждого из которых можно указать числовую последовательность h_k, обладающую тем свойством, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{-\infty<t<\infty} \left| A_i(t+h_k) - A_i^*(t) \right| = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Из регулярности пп-оператора L вытекает регулярность всех пп-операторов L_* из $H(L)$. Более того, из регулярности одного из пп-операторов семейства $H(L)$ вытекает регулярность всех пп-операторов этого семейства.

§ 3. Поведение решений однородного уравнения.

3.1. Рассмотрим в R^n однородное уравнение

$$Lx = 0 \tag{3.1}$$

с регулярным пп-оператором первого порядка

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)\,x. \tag{3.2}$$

Пусть $U(t)$ — оператор сдвига по траекториям уравнения (3.1) ($U(t)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.1), удовлетворяющая начальному условию $U(0) = I$).

Обозначим через $E_+(s)$ множество тех начальных (при $t = s$) значений в R^n, которым соответствуют решения уравнения (3.1), ограниченные на $[s, \infty)$. Через $E_-(s)$ обозначим множество тех начальных значений, которым соответствуют решения, ограниченные на $(-\infty, s]$. Очевидно, при любых t и s

$$E_+(t) = U(t)\,E_+(0)\,U^{-1}(s), \qquad E_-(t) = U(t)\,E_-(0)\,U^{-1}(s).$$

Как оказывается, при каждом t пространство R^n представимо в виде прямой суммы $E_+(t) \dotplus E_-(t)$ подпространств $E_+(t)$ и $E_-(t)$.

Описанное представление пространства R^n равносильно расщеплению множества X всех решений однородного уравнения (3.1) в прямую сумму $X = X_+ \dotplus X_-$ подпространства X_+ решений, ограниченных при $t \to \infty$, и подпространства X_- решений, ограниченных при $t \to -\infty$. Это расщепление называют *дихотомией* решений.

3.2. Дихотомия решений уравнения (3.1) называется *экспоненциальной*, если найдутся такие положительные постоянные M_+, M_-, γ_+ и γ_-, что при $x(t) \in X_+$

$$|x(t)| \leqslant M_+ e^{-\gamma_+(t-s)}\,|x(s)| \qquad (-\infty < s \leqslant t < \infty),$$

а при $x(t) \in X_-$

$$|x(t)| \geqslant M_- e^{\gamma_-(t-s)}\,|x(s)| \qquad (-\infty < s \leqslant t < \infty).$$

Если пп-оператор (3.2) *регулярен, то дихотомия* $X = X_+ \dotplus X_-$ *решений уравнения* (3.1) *экспоненциальна.*

3.3. Угол между подпространствами E_1, E_2 определяется равенством

$$\alpha(E_1, E_2) = \min_{x \in E_1,\ y \in E_2,\ |x| = |y| = 1} |x - y|.$$

Если пп-оператор (3.2) регулярен, то

$$\alpha[E_+(t), E_-(t)] \geqslant \alpha_0 > 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{3.3}$$

Свойство дихотомии, выраженное неравенством (3.3), называется ее *равномерностью.*

3.4. Расщепление пространства R^n в прямую сумму подпространств $E_+(t)$ и $E_-(t)$ означает, что каждый элемент $x \in R^n$ единственным образом представим в виде

$$x = u + v \qquad (u \in E_+(t),\ v \in E_-(t)).$$

Это представление определяет операторы

$$P_+(t)x = u, \quad P_-(t)x = v \qquad (x \in R^n, \ -\infty < t < \infty)$$

проектирования соответственно на подпространства $E_+(t)$ и $E_-(t)$.

Очевидно, $P_+(t) + P_-(t) = I$ и

$$P_+(t) = U(t)P_+(0)U^{-1}(t), \qquad P_-(t) = U(t)P_-(0)U^{-1}(t). \quad (3.4)$$

Операторы $P_+(t)$ и $P_-(t)$ почти периодичны по t. В частности, их нормы равномерно ограничены.

§ 4. Функция Грина.

4.1. Пусть пп-оператор

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x \qquad (4.1)$$

регулярен. Тогда, как нам уже известно, определен оператор L^{-1}, действующий из $C(R^n)$ в $C^m(R^n)$ и из $B(R^n)$ в $B^m(R^n)$. Оператор L^{-1} допускает интегральное представление

$$L^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(s)\,ds. \qquad (4.2)$$

Матрицу-ядро $G(t, s)$ называют *функцией Грина* пп-оператора L.

Функция Грина полностью определяется следующими своими свойствами.

1°. При $t \neq s$ справедливо тождество

$$\frac{\partial^m G(t, s)}{\partial t^m} + A_1(t)\frac{\partial^{m-1}G(t, s)}{\partial t^{m-1}} + \ldots + A_m(t)G(t, s) \equiv 0.$$

2°. Матрицы-функции

$$G(t, s), \ \frac{\partial G(t, s)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{m-2}G(t, s)}{\partial t^{m-2}}$$

непрерывны по совокупности переменных $t, s \in (-\infty, \infty)$, производная $\dfrac{\partial^{m-1}G(t, s)}{\partial t^{m-1}}$ непрерывна по совокупности переменных t, s при $t \neq s$ и

$$\frac{\partial^{m-1}G(t+0, t)}{\partial t^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1}G(t-0, t)}{\partial t^{m-1}} = I.$$

3°. Справедливы оценки

$$|G(t, s)|, \left|\frac{\partial G(t, s)}{\partial t}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^{m-1}G(t, s)}{\partial t^{m-1}}\right| \leqslant Me^{-\gamma|t-s|}$$

$$(-\infty < t, s < \infty; \ t \neq s),$$

где $M, \gamma > 0$.

4.2. Функция Грина $G(t, s)$ регулярного пп-оператора (4.1) в общих терминах конструируется просто.

Пусть $\tilde{L}$ — пп-оператор (2.3). Из регулярности пп-оператора L вытекает регулярность оператора $\tilde{L}$. Поэтому множество решений однородного уравнения

$$\tilde{L}u = 0 \tag{4.3}$$

допускает дихотомию. Пусть $U(t)$ — оператор сдвига по траекториям уравнения (4.3), а $P_+(t)$ и $P_-(t)$ — операторы (3.4). Тогда функция Грина оператора (2.3) определяется формулой

$$\tilde{G}(t, s) = \begin{cases} U(t) P_+(0) U^{-1}(s), & \text{если} \quad t \geqslant s, \\ -U(t) P_-(0) U^{-1}(s), & \text{если} \quad t < s. \end{cases} \tag{4.4}$$

Матрицу-функцию (4.4) можно записать в виде

$$\tilde{G}(t, s) = \begin{Vmatrix} g_{11}(t, s) & g_{12}(t, s) & \dots & g_{1m}(t, s) \\ g_{21}(t, s) & g_{22}(t, s) & \dots & g_{2m}(t, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1}(t, s) & g_{m2}(t, s) & \dots & g_{mm}(t, s) \end{Vmatrix}, \tag{4.5}$$

где $g_{ij}(t, s)$ — квадратные матрицы порядка n. *Матрица-функция* $g_{1m}(t, s)$ *является функцией Грина регулярного пп-оператора* (4.1).

4.3. Рассмотрим семейство пп-операторов

$$L_\mu x = \frac{dx}{dt} + A(t; \mu) x, \tag{4.6}$$

где μ принадлежит некоторому метрическому компакту.

Допустим, что пп-операторы (4.6) при всех μ регулярны и $A(t; \mu)$ непрерывны по μ равномерно относительно t. Тогда функция Грина $G(t, s; \mu)$ операторов (4.6) непрерывна по μ, и, более того, найдутся такие положительные M_0 и γ_0, что при любых μ_1, μ_2

$$|G(t, s; \mu_1) - G(t, s; \mu_2)| \leqslant \\ \leqslant M_0 e^{-\gamma_0 |t-s|} \sup_{-\infty < \tau < \infty} |A(\tau; \mu_1) - A(\tau; \mu_2)|.$$

4.4. Пп-оператор с постоянными коэффициентами регулярен в том и только том случае, если у его характеристического многочлена нет корней на мнимой оси. Пп-оператор

$$Lx = x' + a(t) x, \tag{4.7}$$

где $a(t)$ — скалярная пп-функция, регулярен в том и только том случае, если $M[a] \neq 0$ (если, например, $M[a] < 0$, то $G(t, s) = 0$ при $t \geqslant s$ и

$$G(t, s) = -\exp\left[-\int_s^t a(\tau)\, d\tau\right] \quad \text{при} \quad t < s).$$

§ 5. Положительность функции Грина.

5.1. Замкнутое выпуклое множество K в банаховом пространстве E называется *клином*, если из $x \in K$ и $\alpha \geqslant 0$ следует $\alpha x \in K$. Клин называется *конусом*, если из x, $-x \in K$ следует $x = 0$.

Каждый конус $K \subset E$ порождает в E полуупорядоченность: пишут $x \leqslant y$, если $y - x \in K$. Знак $\leqslant$ обладает свойствами обычного знака неравенства $\leqslant$.

Конус называется *телесным*, если он содержит внутренние точки. Если $y - x$ является внутренним элементом телесного конуса K, то пишут $x \ll y$. Конус K называется *нормальным*, если из $0 \leqslant x \leqslant y$ вытекает $\|x\| \leqslant N\|y\|$, где N не зависит от x и y. Всюду ниже используются только телесные и нормальные конусы.

Простейшим примером нормального телесного конуса K в $B(R^n)$ является множество неотрицательных пп-функций. Все конусы в конечномерных пространствах нормальны.

Конус K называется *миниедральным*, если для каждых двух элементов $x, y \in E$ найдется такой элемент u, что, с одной стороны, $x \leqslant u$ и $y \leqslant u$, а с другой стороны, из $x \leqslant v$ и $y \leqslant v$ следует неравенство $u \leqslant v$. Пишут $u = \sup\{x, y\}$. В конечномерном пространстве R^n миниедральные конусы — это конусы векторов с неотрицательными в некотором базисе компонентами.

Пусть в E выделен клин K. Линейный функционал l называется *положительным, если* $l(x) \geqslant 0$ при $x \in K$. Множество K^* положительных линейных функционалов также является клином.

5.2. Непрерывный функционал $q(x)$ $(x \in E)$ называется *сублинейным*, если

$$q(\alpha x) = \alpha q(x) \qquad (\alpha \geqslant 0,\ x \in E)$$

и

$$q(x + y) \leqslant q(x) + q(y) \qquad (x,\ y \in E).$$

Мы рассматриваем такие сублинейные функционалы $q(x)$, что множество $K = \{x\colon q(x) \leqslant 0\}$ является телесным конусом, а $K_{\text{вн}} = \{x\colon q(x) < 0\}$ — множеством его внутренних точек. О функционале $q(x)$ говорят при этом, что он *выделяет конус* K.

Каждый телесный конус K можно выделить различными сублинейными функционалами. Удобно применять функционалы

$$q_0(x) = \min_{x + ru_0 \in K} r \qquad (x \in E), \tag{5.1}$$

где u_0 — некоторый фиксированный внутренний элемент конуса K, и

$$q_1(x) = -\min_{l \in K^*,\ \|l\| = 1} l(x) \qquad (x \in E). \tag{5.2}$$

Для конкретных конусов выделяющие их сублинейные функционалы часто выписываются совсем просто. Например, конус K неотрицательных пп-функций в $B(R^1)$ выделяется функционалом

$$q(x) = -\inf_{-\infty < t < \infty} x(t) \qquad (x(t) \in B(R^1)).$$

5.3. Множество $\mathfrak{K}$ всех конусов и клиньев в пространстве R^n можно рассматривать как полное метрическое пространство, если положить

$$\rho(K_1, K_2) = \max\left\{\sup_{x \in \Omega_1} \rho(x, \Omega_2), \quad \sup_{y \in \Omega_2} \rho(y, \Omega_1)\right\},$$

где

$$\Omega_1 = \{x\colon\ x \in K_1,\ |x| \leqslant 1\}, \quad \Omega_2 = \{y\colon\ y \in K_2,\ |y| \leqslant 1\}.$$

Поэтому имеет смысл говорить о пп-функциях $K(t)$ со значениями из $\mathfrak{K}$; если значения такой функции являются конусами, то мы будем говорить о *конусных функциях*.

Пусть $K(t)$ — конусная пп-функция. Через $\widehat{K}(t)$ обозначим множество таких пп-функций $x(t)$ со значениями в R^n, что $x(t) \in K(t)$ $(-\infty < t < \infty)$. Конусную пп-функцию $K(t)$ назовем *телесной*, если замыкание в $\mathfrak{K}$ множества значений $K(t)$ состоит из телесных конусов. Если конусная пп-функция $K(t)$ телесная, то, как оказывается, конус $\widehat{K}(t)$ также телесен и кроме этого нормален в $B(R^n)$. Если при этом все конусы $K(t)$ миниедральны, то и конус $\widehat{K}(t)$ миниедрален.

Допустим, что задан почти периодический по t и сублинейный по x $(-\infty < t < \infty,\ x \in R^n)$ функционал $q(t, x)$, который удовлетворяет условию Липшица

$$|q(t, x) - q(t, y)| \leqslant a|x - y| \qquad (x, y \in R^n)$$

с не зависящей от t постоянной a. Пусть существует такая функция $x_0(t) \in B(R^n)$, что

$$q[t, x_0(t)] \leqslant -\varepsilon_0 < 0 \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Пусть, наконец, справедливо неравенство

$$\max\{q(t, x), q(t, -x)\} \geqslant \varepsilon_1 > 0 \qquad (-\infty < t < \infty,\ |x| = 1).$$

В этих условиях *конусы $K(t)$, выделяемые функционалом $q(t, x)$, образуют телесную конусную пп-функцию.*

5.4. Действующий в банаховом пространстве E оператор A называется *положительным* по отношению к конусу K, если $AK \subset K$. Если K телесен и если из $x \in K$ и $x \neq 0$ следует $Ax \gg 0$, то A называется *сильно положительным*. Оператор A *монотонен*, если из $x \leqslant y$ следует $Ax \leqslant Ay$.

Для линейных операторов понятия положительности и монотонности равносильны.

Пусть $K(t)$ — телесная конусная пп-функция. Будем говорить, что функция Грина $G(t, s)$ регулярного пп-оператора

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x \tag{5.3}$$

неотрицательна по отношению к $K(t)$, если

$$G(t, s)K(s) \subset K(t) \qquad (-\infty < t,\ s < \infty). \tag{5.4}$$

Из неотрицательности функции Грина следует, что оператор

$$L^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s)\, ds \tag{5.5}$$

положителен в $B(R^n)$ *относительно конуса* $\widehat{K}(t)$.

Пусть L — регулярный пп-оператор. Будем говорить, что его функция Грина $G(t, s)$ *сильно положительна* по отношению к телесной конусной пп-функции $K(t)$, если она неотрицательна и если для функции Грина $G_*(t, s)$ каждого пп-оператора из $H(L)$ (см. п. 2.4) и для каждого t можно указать такое плотное на некотором бесконечном промежутке множество $\mathfrak{M}$, что при ненулевых $x \in K_*(s)$ и при $s \in \mathfrak{M}$ элементы $G_*(t, s)x$ являются внутренними точками конуса $K_*(t)$. *Из сильной положительности* $G(t, s)$ *вытекает сильная положительность оператора* L^{-1} *относительно* $\widehat{K}(t)$.

Аналогичным образом определяются *неположительность* и *сильная отрицательность* функции Грина; они обеспечивают соответственно положительность и сильную положительность оператора — L^{-1}.

В заключение отметим, что при изучении пп-операторов L над скалярными функциями $x(t)$ нами рассматривается в $B(R^1)$ единственный конус — конус неотрицательных пп-функций. В этом важном случае речь идет об обычном знаке значений скалярной функции Грина $G(t, s)$. Поэтому общие понятия представляют интерес лишь в случае пп-операторов над вектор-функциями.

Глава 2. Анализ конкретных классов пп-операторов

§ 6. Системы уравнений первого порядка.

6.1. Изучается пп-оператор

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)\, x, \tag{6.1}$$

где $A(t)$ — квадратная матрица порядка n с элементами, являющимися пп-функциями. Отыскиваются условия регулярности пп-оператора (6.1) и условия знакопостоянства его функции Грина по отношению к некоторой конусной функции.

Как оказывается, оператор (6.1) может быть регулярен и иметь знакопостоянную функцию Грина лишь в случае, если нулевое решение однородного уравнения

$$Lx = 0 \tag{6.2}$$

экспоненциально устойчиво либо в сторону возрастания, либо в сторону убывания времени. При этом функция Грина может быть неотрицательной лишь в случае, когда нулевое решение устойчиво в сторону возрастания времени, и неположительной — когда устойчиво в сторону убывания (стремления к $-\infty$) времени.

Здесь мы рассмотрим условия существования неотрицательной функции Грина.

Через $U(t)$ будем обозначать фундаментальную систему решений уравнения (6.2), удовлетворяющую условию $U(0) = I$. Формула $U(t, s) = U(t)U^{-1}(s)$ определяет оператор сдвига за время от s до t

по траекториям уравнения (6.2). Оператор сдвига положителен относительно конусной функции $K(t)$, если $U(t, s)K(s) \subset K(t)$ при $t \geqslant s$, и сильно положителен, если $U(t, s)x \gg 0$, когда $t > s$, $x \in K(s)$ и $x \neq 0$.

Теорема 6.1. *Для того чтобы пп-оператор* (6.1) *был регулярным и чтобы его функция Грина была неотрицательна по отношению к некоторой телесной конусной функции $K(t)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия*:

1°. *Оператор сдвига $U(t, s)$ положителен по отношению к $K(t)$.*

2°. *Оператор сдвига $U(t, s)$ удовлетворяет неравенствам*

$$|U(t, s)| \leqslant Me^{-\gamma(t-s)} \qquad (-\infty < s \leqslant t < \infty),$$

где M, $\gamma > 0$.

Если существует неотрицательная функция Грина, то она имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} U(t, s) & \text{при} \quad t \geqslant s, \\ 0 & \text{при} \quad t < s. \end{cases}$$

Сформулированная теорема сводит вопрос о регулярности пп-оператора (6.1) и о неотрицательности его функции Грина к анализу оператора сдвига $U(t, s)$. Ограничимся случаем, когда $K(t) \equiv K$.

6.2. Пусть определенный на пространстве E *функционал* $q(x)$ сублинеен. Тогда существуют его левая и правая производные Гато; они определяются равенствами

$$q'_+(x, h) = \lim_{t \to +0} \frac{q(x+th) - q(x)}{t} \qquad (x, h \in E)$$

и

$$q'_-(x, h) = \lim_{t \to -0} \frac{q(x+th) - q(x)}{t} \qquad (x, h \in E).$$

Очевидно,

$$q'_-(x, h) = -q'_+(x, -h) \qquad (x, h \in E).$$

Поэтому достаточно уметь вычислять только правые производные сублинейных функционалов. Приведем несколько простых примеров.

а) Пусть

$$q(x) = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \qquad (x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in R^n).$$

Тогда

$$q'_+(x, h) = s(\xi_1, h_1) + \ldots + s(\xi_n, h_n) \qquad (h = \{h_1, \ldots, h_n\} \in R^n),$$

где

$$s(\xi_i, h_i) = \begin{cases} h_i \operatorname{sign} \xi_i & \text{при} \quad \xi_i \neq 0, \\ |h_i| & \text{при} \quad \xi_i = 0. \end{cases}$$

б) Пусть

$$q(x) = \max_{i=1, \ldots, n} |\xi_i| \qquad (x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in R^n).$$

Тогда

$$q'_+(x, h) = \max_{i \in i(x)} s(\xi_i, h_i) \qquad (h = \{h_1, \ldots, h_n\} \in R^n),$$

где $i(x)$ — множество таких индексов i, при которых $q(x) = |\xi_i|$.

в) Пусть

$$q(x) = -\min_{i=1, \ldots, n} \xi_i \qquad (x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in R^n).$$

Тогда

$$q'_+(x, h) = -\min_{i \in i(x)} h_i \qquad (h = \{h_1, \ldots, h_n\} \in R^n),$$

где $i(x)$ — множество таких индексов i, при которых $q(x) = -\xi_i$.

г) Пусть E — пространство C непрерывных на $[0, 1]$ скалярных функций и

$$q(x) = \|x\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \qquad (x \in C).$$

Тогда

$$q'_+(x, h) = \max \left\{ \max_{\tau \in \Omega_+} h(\tau), \ -\min_{\tau \in \Omega_-} h(\tau) \right\},$$

где

$$\Omega_+ = \{\tau\colon \ \tau \in [0, 1], \ x(\tau) = \|x\|\}$$

и

$$\Omega_- = \{\tau\colon \ \tau \in [0, 1], \ x(\tau) = -\|x\|\}.$$

6.3. Пусть сублинейный функционал $q(x)$ выделяет телесный конус K с границей Γ. При исследовании условий положительности и сильной положительности оператора $U(t, s)$ сдвига по траекториям уравнения (6.2) используются условия следующих трех видов:

$$q'_-[x, -A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma, \ -\infty < t < \infty), \tag{6.3}$$

$$q'_+[x, -A(t)x] \leqslant 0 \qquad (x \in \Gamma, \ -\infty < t < \infty) \tag{6.4}$$

и

$$q'_-[x, -A(t)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma, \ x \neq 0, \ t \in \mathfrak{M}), \tag{6.5}$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторое плотное на $(-\infty, \infty)$ множество.

Теорема 6.2. *Для положительности оператора $U(t, s)$ относительно конуса K необходимо, чтобы было выполнено условие* (6.4), *и достаточно, чтобы было выполнено условие* (6.3). *Для сильной положительности оператора $U(t, s)$ достаточно, чтобы было выполнено условие* (6.5).

В случае операторов (6.1) с постоянными коэффициентами и в случае граненого конуса $K \subset R^n$ (конус K *граненый*, если он является пересечением конечного числа полупространств) (6.5) является не только достаточным, но и необходимым условием сильной положительности оператора сдвига.

6.4. Пусть K — это конус векторов $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in R^n$ с неотрицательными компонентами. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица с элементами-константами. Тогда *оператор сдвига по траекториям уравнения* (6.2) *положителен в том и только том случае, если внедиагональные элементы матрицы A неположительны*:

$$a_{ij} \leqslant 0 \qquad (i \neq j;\ i,\ j = 1, \ldots, n). \tag{6.6}$$

Знак диагональных элементов a_{ii} не играет роли.

Условие сильной положительности оператора сдвига удобно формулировать при помощи дополнительного понятия.

Последовательность

$$a_{i_1 i_2},\ a_{i_2 i_3}, \ldots,\ a_{i_{m-1} i_m},\ a_{i_m i_1}$$

называется *дорожкой невырожденности матрицы A*, если все ее элементы отличны от нуля, если

$$i_1 \neq i_2,\ i_2 \neq i_3, \ldots,\ i_{m-1} \neq i_m,\ i_m \neq i_1$$

и если, наконец, среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_m$ есть все числа $1, 2, \ldots, n$ (некоторые из них могут встречаться несколько раз).

Оператор сдвига по траекториям уравнения (6.2) *с постоянной матрицей A сильно положителен по отношению к конусу K векторов с неотрицательными компонентами в том и только том случае, если выполнено условие* (6.6) *и если матрица A имеет хотя бы одну дорожку невырожденности.*

Последние условия в случае переменных матриц $A(t) = (a_{ij}(t))$ становятся лишь достаточным признаком сильной положительности оператора сдвига. Условие (6.6) должно при этом выполняться при всех t, дорожка невырожденности у матрицы $A(t)$ может быть различной при различных t.

6.5. Теорема 6.3. *Пусть оператор сдвига $U(t, s)$ положителен относительно некоторой телесной конусной пп-функции $K(t)$. Пусть существует такая функция $x_0(t) \in C^1(R^n)$, что*

$$x_0(t) \gg 0, \quad Lx_0(t) \gg 0. \tag{6.7}$$

Тогда выполнено условие 2° *теоремы* 6.1.

Таким образом, исследование оператора (6.1) можно проводить по следующей схеме. Вначале искать такой конус K, чтобы выполнялось условие (6.3). Затем подбирать функцию $x_0(t)$, удовлетворяющую неравенствам (6.7). *Если удалось найти K и $x_0(t)$, то оператор* (6.1) *регулярен и его функция Грина неотрицательна!*

Если вместо (6.3) выполнено более жесткое неравенство (6.5), то функция Грина сильно положительна. Отметим также, что в случае граненого конуса K оператор L^{-1} сильно положителен по отношению к конусу $\widehat{K}$, если при всех t выполнено неравенство (6.3), а при некотором t_0 — неравенство (6.5).

Теорема 6.3 является простым примером широко применяемого при исследовании различных дифференциальных операторов *метода пробной функции*. В этом методе общие свойства оператора выводятся из наличия одной функции, удовлетворяющей определенным неравенствам.

Отметим одно очевидное следствие из теоремы 6.3: *из существования функции, удовлетворяющей неравенствам* (6.7), *и из положительности оператора сдвига вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения уравнения* (6.2).

§ 7. Системы уравнений второго порядка.

7.1. Начнем с анализа пп-оператора

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + Ax \tag{7.1}$$

с постоянной матрицей A. Регулярность оператора (7.1) равносильна тому, что у матрицы A нет неотрицательных вещественных собственных значений. Если это условие выполнено, то матрицу A единственным образом можно записать в виде

$$A = -B^2,$$

где B — вещественная гурвицева (с собственными значениями в левой полуплоскости) матрица. Функция Грина определяется равенством

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{2} B^{-1} e^{B(t-s)} & \text{при} \quad t \geqslant s, \\ \frac{1}{2} B^{-1} e^{-B(t-s)} & \text{при} \quad t < s. \end{cases} \tag{7.2}$$

Построение матрицы B и анализ матрицы-функции $B^{-1}e^{B\tau}$ являются достаточно неприятными задачами. Поэтому желательно признаки неотрицательности или неположительности функции Грина формулировать в терминах, использующих непосредственно лишь матрицу A. Из (7.2) следует, что функция Грина оператора (7.1) не может быть неотрицательной относительно какого-либо телесного конуса $K \subset R^n$. Простые достаточные признаки неположительности получены для операторов (7.1) с гурвицевыми матрицами A.

Пусть K — телесный конус с границей Γ. *Пусть матрица A гурвицева. Тогда*

а) *Из $e^{At}K \subset K$ $(t > 0)$ следуют регулярность пп-оператора* (7.1) *и неположительность его функции Грина.*

б) *Из условия*

$$q'_-(x, Ax) < 0 \qquad (x \in \Gamma,\ x \neq 0),$$

где $q(x)$ — выделяющий K сублинейный функционал, следуют регулярность пп-оператора (7.1) и *сильная отрицательность его функции Грина.*

в) *Если K — граненый конус, то из $e^{At}x \gg 0$ $(x \in K,\ x \neq 0;\ t > 0)$ следуют регулярность пп-оператора* (7.1) *и сильная отрицательность его функции Грина.*

7.2. Перейдем к условиям регулярности пп-оператора

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + A(t)x \tag{7.3}$$

и к признакам неположительности его функции Грина $G(t, s)$. Основную роль будет играть *метод сравнения* оператора (7.3) с заведомо регулярным пп-оператором

$$L_0 x = \frac{d^2 x}{dt^2} + A_0(t)\, x, \tag{7.4}$$

функция Грина $G_0(t, s)$ которого неположительна. Роль операторов L_0 могут играть, например, пп-операторы (7.1) с постоянными матрицами.

Теорема 7.1. *Пусть функция Грина $G_0(t, s)$ пп-оператора (7.4) неположительна относительно конусной телесной пп-функции $K(t)$. Пусть*

$$A(t)\, x \geqslant A_0(t)\, x \qquad (x \in K(t),\ -\infty < t < \infty).$$

Пусть наконец, существует такая пп-функция $x_0(t) \in B^2(R^n)$, что

$$x_0(t) \gg 0, \qquad L x_0(t) \ll 0. \tag{7.5}$$

Тогда пп-оператор (7.3) регулярен, его функция Грина $G(t, s)$ неположительна относительно $K(t)$ и, более того,

$$G_0(t, s)\, x - G(t, s)\, x \in K(t) \qquad (x \in K(s)). \tag{7.6}$$

Из (7.6) вытекает

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1. Пусть, дополнительно, функция Грина $G_0(t, s)$ пп-оператора (7.4) сильно отрицательна.*

Тогда функция Грина $G(t, s)$ оператора (7.3) также сильно отрицательна.

7.3. Как оказывается, регулярность и свойства функции Грина пп-оператора (7.3) тесно связаны с оператором сдвига $U(t, s)$ по траекториям линейной системы

$$\frac{dx}{dt} - A(t)\, x = 0 \tag{7.7}$$

уравнений первого порядка.

Теорема 7.3. *Пусть K — телесный конус и $U(t, s) K \subset K$ при $t \geqslant s$. Пусть существует пп-функция $x_0(t) \in B^2(R^n)$, удовлетворяющая неравенствам (7.5).*

Тогда пп-оператор (7.3) регулярен и его функция Грина неположительна относительно конуса K.

Напомним, что условия положительности оператора сдвига $U(t, s)$ по траекториям уравнений первого порядка установлены в § 6 (см. теорему 6.2).

7.4. Неположительность функции Грина $G(t, s)$ пп-оператора (7.3) относительно конуса K влечет положительность относительно конуса $\hat{K} \subset B(R^n)$ интегрального оператора

$$Sf(t) = -L^{-1} f(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\, f(s)\, ds. \tag{7.8}$$

Перейдем к вопросу о сильной положительности оператора (7.8).

Теорема 7.4. *Пусть существует пп-функция* $x_0(t) \in B^2(R^n)$, *удовлетворяющая неравенствам* (7.5). *Пусть*

$$\sup_{-\infty < t < \infty} q'_-[x, A(t)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma, x \neq 0),$$

где $q(x)$ — *сублинейный функционал, выделяющий конус* K, Γ — *граница конуса* K.

Тогда интегральный оператор (7.8) *сильно положителен относительно* $\hat{K}$.

В случае граненого конуса K удалось доказать существенно более сильное утверждение: если выполнены условия теоремы 7.3 и если конус K граненый, то для сильной положительности оператора (7.8) достаточно, чтобы нашлось одно такое t_0, что

$$q'_-[x, A(t_0)x] < 0 \qquad (x \in \Gamma, x \neq 0).$$

§ 8. Скалярные уравнения высших порядков.

8.1. Изучается пп-оператор

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m(t)x \tag{8.1}$$

над скалярными функциями $x(t)$. В этом и следующем параграфах речь идет об обычном знаке значений скалярной функции Грина $G(t, s)$.

Теорема 8.1. *Если функция Грина* $G(t, s)$ *регулярного пп-оператора* (8.1) *неотрицательна, то она сильно положительна; если же она неположительна, то она сильно отрицательна.*

Поэтому ниже идет речь только об условиях регулярности пп-оператора (8.1) и о признаках неотрицательности или неположительности его функции Грина.

8.2. Начнем с анализа пп-оператора

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m x \tag{8.2}$$

с постоянными коэффициентами. *Оператор* (8.2) *регулярен в том и только том случае, если его характеристическое уравнение*

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m = 0 \tag{8.3}$$

не имеет нулевых и чисто мнимых корней.

Корни уравнения (8.3) естественно разбиваются на две группы — корни в левой полуплоскости и корни в правой полуплоскости. Пусть α_- — наибольшая вещественная часть корней первой группы, а α_+ — наименьшая вещественная часть корней второй группы. Если первая группа пуста, то будем считать, что $\alpha_- = -\infty$, если вторая — что $\alpha_+ = \infty$.

Пусть α_- является корнем многочлена $\chi(\lambda)$, если α_- конечно, и пусть α_+ является корнем многочлена, если α_+ конечно. Тогда будем говорить, что многочлен $\chi(\lambda)$ *правильный.*

Например, многочлен

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

третьего порядка правилен, если выполнено по крайней мере одно из условий

$$c \neq 0, \quad (2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(3b - a^2)^3 \leqslant 0$$

или

$$ac > 0, \qquad a(2a^3 - 9ab + 27c) \leqslant 0.$$

Теорема 8.2. *Необходимым условием знакопостоянства функции Грина регулярного пп-оператора* (8.2) *является правильность его характеристического многочлена* $\chi(\lambda)$.

8.3. Положим

$$Q = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_1 \end{Vmatrix}$$

и

$$e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}, \dots, e_m = \{0, 0, \dots, 1\}.$$

Функция Коши $k(t-s)$ оператора (8.2) с постоянными коэффициентами определяется равенством

$$k(t-s) = (e^{-Q(t-s)}e_m, e_1). \tag{8.4}$$

Очевидно,

$$k(0) = k'(0) = \dots = k^{(m-2)}(0) = 0, \qquad k^{(m-1)}(0) = 1.$$

Если все корни характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ лежат в одной полуплоскости, то функция $G(t, s)$ пп-оператора (8.2) с постоянными коэффициентами просто выражается через его функцию Коши (8.4). Если $\chi(\lambda)$ гурвицев, то

$$G(t, s) = \begin{cases} k(t-s) & \text{при} \quad t \geqslant s, \\ 0 & \text{при} \quad t < s. \end{cases}$$

если же многочлен $\chi(-\lambda)$ гурвицев, то

$$G(t, s) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \geqslant s, \\ -k(t-s) & \text{при} \quad t < s. \end{cases}$$

Поэтому верны следующие утверждения.

а) *Если* $\chi(\lambda)$ *гурвицев, то функция Грина* $G(t, s)$ *не может быть неположительной. Она неотрицательна в том и только том случае, если функция Коши* $k(t)$ *неотрицательна при всех* $t \geqslant 0$.

б) *Если* $\chi(-\lambda)$ *гурвицев и* m *четно, то функция Грина* $G(t, s)$ *не может быть неотрицательной. Она неположительна в том и только том случае, если функция Коши* $k(t)$ *неотрицательна при всех* $t \leqslant 0$.

в) *Если $\chi(-\lambda)$ гурвицев и m нечетно, то функция Грина $G(t, s)$ не может быть неположительной. Она неотрицательна в том и только том случае, если функция Коши $k(t)$ неположительна при всех $t \leqslant 0$.*

Каждый регулярный пп-оператор (8.2) с постоянными коэффициентами можно разложить в супергозицию $L = L_1L_2$ двух регулярных пп-операторов с постоянными коэффициентами, все корни характеристических многочленов которых лежат соответственно только в левой и только в правой полуплоскостях комплексной плоскости. Функция Грина $G(t, s)$ оператора (8.2) представима в виде суперпозиции

$$G(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(t, \sigma)\, G_1(\sigma, s)\, d\sigma$$

функций Грина $G_1(t, s)$ и $G_2(t, s)$ операторов L_1 и L_2. Поэтому для знакопостоянства $G(t, s)$ достаточно, чтобы были знакопостоянны $G_1(t, s)$ и $G_2(t, s)$ или, что то же, чтобы были знакопостоянны (при $t > 0$ или при $t < 0$) функции Коши операторов L_1 и L_2.

Если все корни характеристического многочлена лежат в правой полуплоскости, то для исследования знака функции Грина можно вначале изменить в дифференциальном операторе направление времени на противоположное. При этом знак функции Грина сохранится в случае операторов четного порядка и изменится на противоположный в случае операторов нечетного порядка, а характеристический многочлен перейдет в гурвицев. Мы ограничимся поэтому изложением анализа операторов (8.2) с гурвицевыми характеристическими многочленами.

8.4. Телесный конус $K \subset R^m$ назовем *допустимым*, если он расположен в полупространстве $(u, e_1) \geqslant 0$ и если $e_m \in K$.

Теорема 8.3. *Функция Коши $k(t)$ дифференциального оператора (8.2) с гурвицевым характеристическим многочленом неотрицательна при $t \geqslant 0$ в том и только том случае, если существует такой допустимый конус K, что $e^{-Qt}K \subset K$ $(0 < t < \infty)$.*

Эта теорема сводит доказательство неотрицательности функции Грина к построению допустимых конусов. Такое построение в ряде случаев можно осуществить. Приведем один полученный на этом пути результат.

Пусть гурвицев многочлен $\chi(\lambda)$ правильный, и пусть λ_0 — его наибольший вещественный корень. Будем говорить, что $\chi(\lambda)$ *вполне правильный*, если

1°. Корень λ_0 простой, а остальные корни λ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$.

2°. Существует такой многочлен $\varkappa(\lambda)$ порядка $m-2$ с отрицательными вещественными корнями, что

$$\operatorname{Re}\frac{\varkappa(i\omega)}{\chi(\lambda_0 + i\omega)} < 0 \qquad (-\infty < \omega < \infty).$$

Многочлен $\chi(\lambda)$ назовем *предельно вполне правильным*, если существует сходящаяся к нему последовательность вполне правильных многочленов.

Теорема 8.5. *Пусть характеристический многочлен* $\chi(\lambda)$ *пп-оператора* (8.2) *с постоянными коэффициентами представим в виде* $\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda)$, *где* $\chi_1(\lambda)$ *и* $\chi_2(-\lambda)$ — *вполне правильные или предельно вполне правильные гурвицевы многочлены.*

Тогда пп-оператор (8.2) *регулярен, его функция Грина* $G(t, s)$ *знакопостоянная и выполнено неравенство*

$$a_m G(t, s) \geqslant 0 \qquad (-\infty < t,\ s < \infty).$$

Из этой теоремы следует, что условие теоремы 8.2 не только необходимо для знакопостоянства функции Грина, но и достаточно, если порядки многочленов $\chi_1(\lambda)$ и $\chi_2(\lambda)$ не превышают четырех!

8.5. Перейдем к пп-операторам

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + a_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + a_m(t)\,x \tag{8.5}$$

с переменными коэффициентами. Сформулируем общий принцип сравнения.

Пусть известно, что пп-оператор

$$L_0 x = \frac{d^m x}{dt^m} + b_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m(t)\,x \tag{8.6}$$

регулярен и что его функция Грина $G_0(t, s)$ знакопостоянна.

Теорема 8.6. *Пусть существует такая пп-функция* $u_0(t) \in B^m(R^1)$, что

$$u_0(t) \gg 0, \qquad \varepsilon L_0 u_0(t) \gg 0, \qquad \varepsilon L u_0(t) \gg 0, \tag{8.7}$$

где $\varepsilon = 1$, *если* $G_0(t, s) \geqslant 0$, *и* $\varepsilon = -1$, *если* $G_0(t, s) \leqslant 0$. *Пусть при* $t \neq s$ *выполнено неравенство* $LG_0(t, s) \leqslant 0$.

Тогда пп-оператор (8.5) *регулярен, его функция Грина* $G(t, s)$ *знакопостоянная и удовлетворяет неравенству*

$$\varepsilon G(t, s) \geqslant \varepsilon G_0(t, s) \qquad (-\infty < t,\ s < \infty).$$

Отметим, что в условиях теоремы 8.6 нулевое решение уравнения $Lx = 0$ экспоненциально устойчиво, если экспоненционально устойчиво нулевое решение уравнения $L_0 x = 0$. Если же нулевое решение уравнения $L_0 x = 0$ неустойчиво, то неустойчиво и нулевое решение уравнения $Lx = 0$.

8.6. Выбирая в качестве оператора сравнения (8.6) различные частные классы пп-операторов (например, операторы с постоянными коэффициентами) и подбирая соответствующие пп-функции $u_0(t)$, удовлетворяющие неравенствам (8.7), можно получить разнообразные достаточные признаки регулярности пп-операторов (8.5) и условия знакопостоянства их функций Грина. Приведем основные примеры.

а) Введем обозначения

$$\chi(t; \lambda) = \lambda^m + a_1(t)\lambda^{m-1} + \ldots + a_m(t) \tag{8.8}$$

и

$$\chi_0(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_m),$$

где

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} > \ldots > \lambda_m.$$

Положим

$$H(t, s) = \begin{cases} -\sum\limits_{j=k+1}^{m} \dfrac{\chi(t; \lambda_j)}{\chi_0'(\lambda_j)} e^{\lambda_j(t-s)} & \text{при} \quad t \geqslant s, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\chi(t; \lambda_j)}{\chi_0'(\lambda_j)} e^{\lambda_j(t-s)} & \text{при} \quad t < s. \end{cases}$$

Теорема 8.7. *Пусть выполнены неравенства*

$$H(t, s) \geqslant 0 \qquad (-\infty < t, s < \infty)$$

и

$$(-1)^k a_m(t) \gg 0.$$

Тогда пп-оператор (8.5) *регулярен и его функция Грина* $G(t, s)$ *удовлетворяет неравенству*

$$a_m(t)\, G(t, s) \geqslant 0 \qquad (-\infty < t, s < \infty).$$

б) Пусть корни $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)$ «характеристического многочлена» (8.8) — простые, вещественные и удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_j \leqslant \lambda_j(t) \leqslant \beta_j \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

где

$$\beta_1 > \alpha_1 > \ldots > \beta_k > \alpha_k > 0 > \beta_{k+1} > \alpha_{k+1} > \ldots > \beta_m > \alpha_m.$$

Тогда пп-оператор (8.5) регулярен и его функция Грина удовлетворяет неравенству

$$(-1)^k G(t, s) \geqslant 0 \qquad (-\infty < t, s < \infty).$$

в) Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — произвольные числа. Положим

$$\Delta^0(t; \lambda_1) = \chi(t; \lambda_1),$$

$$\Delta^1(t; \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\Delta^0(t; \lambda_1) - \Delta^0(t; \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

. . . . . .

$$\Delta^{m-1}(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{\Delta^{m-2}(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) - \Delta^{m-2}(t; \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\lambda_1 - \lambda_m},$$

где $\chi(t, \lambda)$ — «многочлен» (8.8).

Теорема 8.9. *Пусть существуют такие отрицательные числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, *что*

$$\Delta^j(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_{j+1}) \leqslant 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-2;\ -\infty < t < \infty).$$

Пусть существует такая пп-функция $u_0(t) \in B^m(R^1)$, *что*

$$u_0(t) \gg 0, \quad Lu_0(t) \gg 0, \quad L_{m-1}u_0(t) \gg 0,$$

где

$$L_{m-1} = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_{m-1}\right).$$

Тогда пп-оператор (8.5) *регулярен и его функция Грина неотрицательна.*

В условиях теоремы 8.9 нулевое решение уравнения $Lx = 0$ экспоненциально устойчиво.

§ 9. Скалярные пп-операторы второго порядка.

9.1. Параграф посвящен исследованию функции Грина пп-оператора

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x. \tag{9.1}$$

Решения однородного уравнения

$$Lx = 0 \tag{9.2}$$

по определению *не осциллируют на* $(-\infty, \infty)$, если каждое из них не более одного раза обращается в нуль.

Теорема 9.1. *Пусть пп-оператор* (9.1) *регулярен.*

Тогда его функция Грина $G(t, s)$ *знакопостоянная в том и только том случае, если решения уравнения* (9.2) *не осциллируют на* $(-\infty, \infty)$.

В связи с этой теоремой представляют интерес признаки неосцилляции решений уравнения (9.2).

Во многих случаях неосцилляция решений устанавливается совсем просто при помощи метода пробных функций. Например, для неосцилляции решений уравнения (9.2) достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий.

а) Существует определенная на $(-\infty, \infty)$ непрерывная функция $z_0(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$D^* z_0(t) \geqslant z_0^2(t) - p(t)z_0(t) + q(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{9.3}$$

где $D^*z_0(t)$ — правое верхнее производное число функции $z_0(t)$.

б) Существует такая положительная на $(-\infty, \infty)$ функция $x_1(t)$, что

$$\int_t^\infty \frac{1}{x_1^2(s)} e^{-\int_0^s p(\tau)\,d\tau} ds < \infty$$

и при любых $t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} x_2(t)\, Lx_1(t)\, dt \leqslant 1,$$

где

$$x_2(t) = x_1(t) \int_t^{\infty} \frac{1}{x_1^2(s)} e^{\int_s^t p(\tau)\,d\tau} ds.$$

9.2. Перейдем к формулировке основных результатов.

Теорема 9.8. *Пп-оператор* (9.1) *регулярен и его функция Грина неотрицательна в том и только том случае, если*

1°. *Решения уравнения* (9.2) *не осциллируют на* $(-\infty, \infty)$.

2°. *Существует пп-функция* $x_0(t) \in B^2(R^1)$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$x_0(t) \gg 0, \quad Lx_0(t) \geqslant 0 \qquad (Lx_0(t) \not\equiv 0). \tag{9.4}$$

Теорема 9.9. *Пп-оператор* (9.1) *регулярен и его функция Грина неположительна в том и только том случае, если существует пп-функция* $x_0(t) \in B^2(R^1)$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$x_0(t) \gg 0, \quad Lx_0(t) \leqslant 0 \qquad (Lx_0(t) \not\equiv 0). \tag{9.5}$$

Подчеркнем, что из неравенств (9.5) следует неосцилляционность решений уравнения (9.2). Из неравенств (9.4) неосцилляция решений уравнения (9.2) не вытекает.

9.3. При исследовании операторов (9.1) применяется (как это часто бывает в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка) переход к уравнению Риккати. При этом выясняется, какими свойствами обладают решения уравнения Риккати с пп-коэффициентами, исследуются дифференциальные неравенства с оператором Риккати и т. д.

В заключение отметим, что в условиях 1° и 2° теоремы 9.8 всегда $M(p) \neq 0$. Если $M(p) > 0$, то из этих условий вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения уравнения $Lx = 0$; если же $M(p) < 0$, то нулевое решение уравнения $Lx = 0$ экспоненциально устойчиво в сторону убывания времени.

Необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости нулевого решения уравнения $Lx = 0$ *с неосциллирующими решениями заключается в существовании такой пп-функции* $\varphi(t) \in B^1(R^1)$ *с неотрицательным средним* $M(\varphi)$, что

$$M(\varphi) \leqslant \frac{1}{2} M(p)$$

и

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \leqslant \varphi^2(t) - p(t)\varphi(t) + q(t) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

причем в последнем соотношении при некоторых t *имеет место знак строгого неравенства.*

Глава 3. Нелокальные теоремы о пп-решениях дифференциальных уравнений.

§ 10. Общие теоремы существования.

10.1. Изучается вопрос о существовании пп-решений у нелинейных уравнений

$$Lx = f(t, x), \tag{10.1}$$

где L — пп-оператор

$$Lx = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)x, \tag{10.2}$$

а вектор-функция $f(t, x)$ равномерно почти периодическая по t. Если пп-оператор L регулярен и $G(t, s)$ — его функция Грина, то задача о пп-решениях эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$x(t) = \Pi x(t), \tag{10.3}$$

где

$$\Pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f[s, x(s)]\, ds. \tag{10.4}$$

Оператор Π действует и непрерывен в пространстве $B(R^n)$.

Естественно пытаться для исследования уравнения (10.3) применять различные принципы неподвижной точки. В частности, естественно пытаться применять топологические методы исследования (принцип Шаудера, вращение векторных полей и т. д.), разработанные для уравнений с вполне непрерывными операторами. Оказывается, что такой путь применить не удается, так как операторы (10.4), вообще говоря, не бывают вполне непрерывными в $B(R^n)$.

Поэтому для исследования уравнения (10.3) приходится применять лишь такие принципы, которые не используют полную непрерывность оператора Π.

В грубых случаях достаточно применять принцип сжатых отображений или его непосредственные обобщения.

В книге основным приемом получения нелокальных теорем существования пп-решений является построение в пространстве $B(R^n)$ инвариантных для оператора Π конусных отрезков, последующее выяснение условий монотонности и вогнутости оператора Π на этих конусных отрезках и, наконец, применение соответствующих общих теорем нелинейного анализа.

Наиболее сложным вопросом является выделение конуса $\hat{K} \subset B(R^n)$, по которому затем конструируется конусный отрезок, определяются монотонность и вогнутость операторов. Мы ограничиваемся такими конусами K, по отношению к которым функция Грина $G(t, s)$ знакопостоянна. В случае скалярных дифференциальных уравнений в качестве $\hat{K}$ рассматривается лишь конус неотрицательных пп-функций.

По описанной схеме удается получить ряд эффективных теорем существования в случаях, когда функции $\alpha f(t, x)$ (где $\alpha = 1$

или $\alpha = -1$ в зависимости от того, неотрицательна или неположительна функция Грина) обладают, как это часто бывает, свойствами монотонности, вогнутости или выпуклости по пространственным переменным. Приложения к конкретным уравнениям требуют, конечно, и преодоления некоторых специфичных трудностей.

В ряде случаев от уравнения (10.1) удобно переходить к отличному от (10.3) интегральному уравнению. Для этого вводится в рассмотрение вспомогательный пп-оператор

$$L_1 x = Lx + A(t)x$$

с функцией Грина $G_1(t, s)$. Пп-матрица $A(t)$ выбирается так, чтобы, во-первых, функция Грина $G_1(t, s)$ была знакопостоянная относительно некоторого конуса и чтобы, во-вторых, нелинейная функция $\alpha[A(t)x + f(t, x)]$ (где α — «знак» $G_1(t, s)$) обладала «хорошими» свойствами. Задача о пп-решениях уравнения (10.1) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = \Pi_1 x(t), \tag{10.5}$$

где

$$\Pi_1 x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t, s)\{A(s)x(s) + f[s, x(s)]\}\, ds. \tag{10.6}$$

Интегральное уравнение (10.5) применяется, как правило, в случае выпуклых функций $f(t, x)$.

10.2. Пусть в банаховом пространстве E введена полуупорядоченность $\leqslant$ при помощи некоторого телесного нормального конуса K. Нелинейный оператор Π, действующий в E, называется *положительным*, если $\Pi K \subset K$. Оператор Π называется *монотонным*, если из $x \leqslant y$ вытекает $\Pi x \leqslant \Pi y$. *Конусным отрезком* $\langle u, x\rangle$ $(u \leqslant v)$ называется множество таких $x \in E$, что $u \leqslant x \leqslant v$.

Теорема 10.2 *Пусть оператор* Π *монотонен на конусном отрезке* $\langle u, v\rangle$ *и оставляет этот отрезок инвариантным. Пусть*

$$\Pi y - \Pi x \leqslant S(y - x) \qquad (u \leqslant x \leqslant y \leqslant v), \tag{10.7}$$

где S — *линейный положительный оператор, спектральный радиус которого меньше* 1.

Тогда уравнение $x = \Pi x$ *имеет на* $\langle u, v\rangle$ *единственное решение* x^*, *причем к этому решению при любом начальном приближении* $x_0 \in \langle u, v\rangle$ *сходятся последовательные приближения*

$$x_{n+1} = \Pi x_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10.8}$$

Оператор Π называется *вогнутым* на конусном отрезке $\langle u, v\rangle$ $(u, v \in K_{\text{вн}})$, если он монотонен на $\langle 0, v\rangle$ и если

$$\Pi(\tau x) \geqslant \tau \Pi x \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant 1,\ x \in \langle u, v\rangle).$$

Вогнутый на $\langle u, v\rangle$ $(u, v \in K_{\text{вн}})$ оператор Π называется *равномерно вогнутым*, если каждому $\tau \in (0, 1)$ отвечает такое $\eta = \eta(\tau) > 0$, что

$$\Pi(\tau x) \geqslant \tau(1 + \eta)\Pi x \qquad (x \in \langle u, v\rangle).$$

Теорема 10.3. *Пусть* П *оставляет инвариантным конусный отрезок* $\langle u, v\rangle$ $(u, v \in K_{\text{вн}})$ *и равномерно вогнут на нем.*

Тогда уравнение $x = \Pi x$ *имеет на* $\langle u, v\rangle$ *единственное решение* x^*, *к которому сходятся последовательные приближения* (10.8) *при любом начальном приближении* $x_0 \in \langle u, v\rangle$.

Нелинейный оператор П называется *сильно положительным*, если $\Pi x \gg 0$ при $x \in K$ и $x \neq 0$. Оператор П называется *равномерно вогнутым на* K, *если он равномерно вогнут на каждом конусном отрезке* $\langle u, v\rangle$ $(u, v \in K_{\text{вн}})$. *Если* П *сильно положителен и равномерно вогнут на* K *и если найдутся такие ненулевые* $u, v \in K$, *что* $u \leqslant \Pi u$ *и* $v \geqslant \Pi v$, *то у уравнения* $x = \Pi x$ *существует единственное в конусе* K *ненулевое решение.*

При изучении равномерно вогнутых операторов удобно рассматривать конусный отрезок $\langle u, v\rangle$ $(u, v \in K_{\text{вн}})$ как пространство с метрикой

$$\rho(x, y) = \min\{\alpha\colon\ x \leqslant e^{\alpha} y,\ y \leqslant e^{\alpha} x\}.$$

Тогда теорема 10.3 становится следствием следующего утверждения.

Принцип обобщенного сжатия. *Пусть оператор* П *преобразует в себя полное метрическое пространство* $\mathfrak{R}$ *и*

$$\rho(\Pi x, \Pi y) \leqslant q(\alpha, \beta)\, \rho(x, y) \qquad (\alpha \leqslant \rho(x, y) \leqslant \beta),$$

где $q(\alpha, \beta) < 1$ *при* $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$.

Тогда уравнение $x = \Pi x$ *имеет в* $\mathfrak{R}$ *единственное решение* x^*, *к которому сходятся приближения* (10.8) *при любом начальном приближении* x_0 *из* $\mathfrak{R}$.

10.3. Приведем типичное приложение теоремы 10.2 в сочетании с методом пробных функций. Через α будем обозначать знак функции Грина $G(t, s)$ оператора (10.2).

Пусть пп-функции $u(t)$, $v(t) \in B^m(R^n)$ удовлетворяют неравенствам

$$\alpha L u(t) \leqslant \alpha f[t, u(t)], \qquad \alpha L v(t) \geqslant \alpha f[t, v(t)]. \tag{10.9}$$

Пусть

$$0 \leqslant \alpha f(t, y) - \alpha f(t, x) \leqslant A(t)(y - x) \qquad (u(t) \leqslant x \leqslant y \leqslant v(t)).$$

Тогда для существования у уравнения (10.1) единственного на $\langle u(t), v(t)\rangle$ пп-решения достаточно, чтобы нашлась такая пп-функция $x_0(t) \in B^m(R^n)$, что

$$x_0(t) \gg 0, \qquad \alpha L x_0(t) \gg A(t) x_0(t). \tag{10.10}$$

10.4. Приведем одно приложение теоремы 10.3.

Пусть $K(t)$ — телесная конусная пп-функция. Будем говорить, что функция $g(t, x)$ *равномерно вогнута на* $K(t)$, если при каждом t она монотонна по x относительно конуса $K(t)$ и если каждому набору чисел $\tau \in (0, 1)$; $r, r_1 > 0$ отвечает такое $\eta = \eta(\tau; r, r_1) > 0$, что

$$g(t, \tau x) - (1 + \eta)\tau g(t, x) \in K(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

при всех x $(\|x\| \leqslant r)$, входящих в $K(t)$ вместе с шаровой окрестностью радиуса r_1. Равномерно вогнутую функцию $g(t, x)$ назовем

правильно вогнутой на $K(t)$, если при значениях t из некоторого плотного на $(-\infty, \infty)$ множества выполнены неравенства $g(t, x) \neq 0$ $(x \in K(t),\ x \neq 0)$.

Допустим, что функция Грина оператора (10.2) сильно положительна или сильно отрицательна относительно $K(t)$ и что $\alpha f(t, x)$ правильно вогнута на $K(t)$. Пусть найдутся ненулевые пп-функции $u(t)$, $v(t) \in K(t)$ из $B^m(R^n)$, которые удовлетворяют неравенствам (10.9). Тогда уравнение (10.1) имеет в $\widehat{K}(t)$ единственное ненулевое пп-решение; это пп-решение $x^*(t)$ удовлетворяет неравенствам $u(t) \leqslant x^*(t) \leqslant v(t)$ $(-\infty < t < \infty)$.

В § 10 изложен метод минорант и мажорант, упрощающий выбор функций, удовлетворяющих неравенствам (10.9). Рассмотрен ряд примеров.

§ 11. Устойчивость пп-решений уравнений с монотонными и вогнутыми нелинейностями.

11.1. При изложении результатов § 11 будем предполагать, что $f(t, x)$ имеет производную $f'_x(t, x)$, причем матрица-функция $f'_x(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных равномерно относительно t и относительно значений x из каждого шара.

Пп-оператор L будем называть *устойчивым* или *неустойчивым* в зависимости от того, устойчиво ли нулевое решение уравнения $Lx = 0$.

Рассмотрим пп-оператор

$$L[x^*]x = Lx - f'_x[t, x^*(t)]x, \tag{11.1}$$

где $x^*(t)$ — пп-решение уравнения

$$Lx = f(t, x). \tag{11.2}$$

Уравнение (11.2) с пп-коэффициентами и с почти периодической по t правой частью обладает той приятной особенностью, что в условиях, когда пп-оператор $L[x^*]$ регулярен, применимы теоремы об устойчивости по первому приближению: *если* $L[x^*]$ *устойчив, то решение* $x^*(t)$ *уравнения* (11.2) *экспоненциально устойчиво, если же пп-оператор* $L[x^*]$ *неустойчив, то и решение* $x^*(t)$ *неустойчиво.*

Пп-решения $x^*(t)$ уравнения (11.2), существование которых устанавливалось в § 10, фактически неизвестны. Поэтому нельзя фактически построить и пп-операторы (11.1), а об их регулярности и устойчивости или неустойчивости приходится судить по косвенной информации об их структуре. При этом применяется следующее основное соображение.

Пусть дано семейство пп-операторов

$$L_\mu x = \frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t; \mu)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t; \mu)x \quad (0 \leqslant \mu \leqslant 1), \tag{11.3}$$

и пусть матрицы-коэффициенты $A_i(t; \mu)$ равномерно непрерывны по μ. Из теорем о дихотомии решений следует, что *либо все пп-операторы* L_μ *устойчивы, либо все неустойчивы, если только они*

регулярны! Поэтому *для доказательства устойчивости или неустойчивости пп-оператора L_1 достаточно показать, что соответствующим свойством обладает оператор L_0 и что каждое уравнение*

$$L_\mu x = f(t) \tag{11.4}$$

при любой правой части $f(t) \in B(R^n)$ имеет по крайней мере одно ограниченное на $(-\infty, \infty)$ решение. Таким образом, вопрос об устойчивости сводится к доказательству теорем существования решений.

Вернемся к оператору (11.1). Из изложенного выше принципа продолжения устойчивости по параметру вытекает, что оператор $L[x^*]$ регулярен и что операторы L и $L[x^*]$ одновременно устойчивы или неустойчивы, если спектральный радиус линейного интегрального оператора

$$Sx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f'_x[s, x^*(s)]\, x(s)\, ds \tag{11.5}$$

меньше 1. *Если функция Грина $G(t, s)$ оператора L знакопостоянна относительно телесной конусной пп-функции $K(t)$ и если функция $\alpha f(t, x)$ (α — «знак» $G(t, s)$) монотонна относительно $K(t)$, то оператор $L[x^*]$ регулярен и устойчив или неустойчив, в соответствии с тем устойчив или неустойчив оператор L, когда существует такая пп-функция $x_0(t) \in B^m(R_n)$, что*

$$x_0(t) \gg 0, \quad \alpha L x_0(t) - \alpha f'_x[t, x^*(t)]\, x_0(t) \gg 0. \tag{11.6}$$

Тот факт, что исследование устойчивости сводится к достаточно грубым неравенствам типа (11.6) (или к оценке спектрального радиуса оператора (11.5)), существенно упрощает задачу и позволяет широко применять различные мажоранты и миноранты функции $f(t, x)$.

11.2. Изложенный в п 11.1 принцип позволил без дополнительных предположений ответить на вопрос об устойчивости тех пп-решений, существование которых установлено в различных теоремах из § 10.

Например, *в условиях утверждений, приведенных в пп.* 10.3 *и* 10.4 *краткого содержания, пп-решение $x^*(t) \in \langle u(t), v(t)\rangle$ экспоненциально устойчиво, если устойчив оператор L, и неустойчиво, если L неустойчив.*

11.3. В теории устойчивости важную роль играет оценка тех областей фазового пространства, при начальных значениях из которых решения дифференциального уравнения асимптотически приближаются к изучаемому решению $x^*(t)$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} + A(t)\, x = f(t, x). \tag{11.7}$$

Устойчивое решение $x^*(t)$ этой системы назовем *устойчивым в конусе K*, если все решения $x(t)$ с начальными значениями из $K_{\text{вн}}$ асимптотически приближаются к $x^*(t)$ при $t \to \infty$.

В параграфе излагается специальный *метод вилки* для исследования устойчивости в конусе решений уравнения (11.7) с вогнутыми нелинейностями. Этот метод основан на изучении свойств оператора $V(t, s)x$ сдвига по траекториям системы (11.7). Выясняется, при каких условиях оператор сдвига положителен, монотонен и вогнут (по пространственным переменным x). Затем изучаются такие решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, которые удовлетворяют начальным условиям $x_1(0) = \alpha x^*(0)$ и $x_2(0) = \beta x^*(0)$, где $0 < \alpha < 1 < \beta$, а $x^*(t)$ — пп-решение с начальным условием из $K_{\text{вн}}$. Простой подсчет показывает, что

$$\lim_{t\to\infty} |x_1(t) - x^*(t)| = \lim_{t\to\infty} |x_2(t) - x^*(t)| = 0.$$

После этого устойчивость $x^*(t)$ в конусе тривиально вытекает из монотонности оператора сдвига.

Реализация метода вилки проста, хотя и громоздка. В частности, применение метода вилки приводит к тому, что *в условиях утверждения из* п. 10.4, *примененного к системе* (11.7), *пп-решение* $x^*(t)$ *устойчиво в конусе* $K(0)$.

Существенно более сложен вопрос об устойчивости в некотором конусе решения $x^*(t)$ системы

$$\frac{d^m x}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)\,x = f(t, x) \tag{11.8}$$

высокого порядка. Для его решения вначале, как обычно, осуществляется переход к системе

$$\frac{du}{dt} + Q(t)\,u = g(t, u) \tag{11.9}$$

уравнений первого порядка. Оказывается, что в условиях утверждения из п. 10.4 соответствующее пп-решению $x^*(t)$ системы (11.8) решение $u^*(t)$ системы (11.9) устойчиво в специальном конусе $\tilde{K}_{\max}(0)$.

Конус $\tilde{K}_{\max}(0)$ в пространстве R^{mn} определяется по телесной конусной пп-функции $K(t) \subset R^n$ (относительно которой соответствующая функция Грина знакопостоянная, а соответствующая нелинейность монотонная и вогнутая) равенством

$$\tilde{K}_{\max}(0) = \{u\colon\ u \in R^{mn},\ [U(\sigma, 0)\,u]_1 \in K(\sigma) \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant 0\}.$$

Здесь через $[v]_1$ обозначается вектор из R^n, образующий первую группу компонент вектора $v = \{v_1, \ldots, v_m\} \in R^{mn}$, а $U(t, s)$ — оператор сдвига по траекториям линейного однородного уравнения

$$\frac{du}{dt} + Q(t)\,u = 0.$$

11.4. *Функция Грина регулярного пп-оператора L может быть неотрицательной по отношению к некоторой телесной конусной пп-функции $K(t)$ как в случае устойчивого L, так и в случае неустойчивого L. Неположительной функция Грина может быть лишь в случае неустойчивого L.*

§ 12. Почти периодические колебания в системах автоматического регулирования.

12.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_0\xi + d_1\varphi(\sigma), \\ \frac{dx}{dt} &= Bx + d\varphi(\sigma), \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

где

$$\sigma = c_1\xi + (c, x). \tag{12.2}$$

Здесь ξ — скалярная переменная, $x \in R^m$; λ_0, c_1, d_1 — скаляры, $\lambda_0 < 0$, c_1 и d_1 положительны; B — гурвицева матрица порядка m, собственные значения λ которой удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$; d и c — векторы, для которых

$$(d, c) < 0, \qquad (d, c) + d_1c_1 \geqslant 0, \qquad (Bd, c) > \lambda_0 (d, c)$$

и

$$\operatorname{Re}\left([(\lambda_0 + i\omega) I - B]^{-1} d, c\right) < 0 \qquad (-\infty < \omega < \infty).$$

Скалярная функция $\varphi(\sigma)$ называется *характеристикой системы регулирования*; предполагается, что она непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$\sigma\varphi(\sigma) \geqslant 0 \qquad (-\infty < \sigma < \infty). \tag{12.3}$$

Будем считать, что $\varphi(\sigma)$ монотонная и достаточно гладкая.

Положим

$$\alpha_0 = -(B^{-1}d, c) - \frac{d_1c_1}{\lambda_0}.$$

Можно показать, что в рассматриваемых условиях $\alpha_0 > 0$.

Нуль является состоянием равновесия системы (12.1). Если $\alpha_0\varphi'(0) < 1$ (или $\alpha_0\varphi'(0) = 1$, $\varphi''(0) = 0$ и $\varphi'''(0) < 0$ и т. д.), то нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво; если же $\alpha_0\varphi'(0) > 1$ или $\alpha_0\varphi'(0) = 1$ и $\varphi''(0) \neq 0$ (или $\alpha_0\varphi'(0) = 1$, $\varphi''(0) = 0$ и $\varphi'''(0) > 0$ и т. д.), то нулевое состояние равновесия неустойчиво.

Ненулевые состояния равновесия системы (12.1) определяются равенствами

$$\xi_0 = -\frac{d_1}{\lambda_0}\varphi(\sigma_0), \qquad x_0 = -\varphi(\sigma_0) B^{-1}d, \tag{12.4}$$

где σ_0 — ненулевые корни скалярного уравнения

$$\sigma = \alpha_0\varphi(\sigma). \tag{12.5}$$

Если, например, $\varphi(\sigma)$ выпуклая ($\varphi'(\sigma) > 0$ и $\varphi''(\sigma) > 0$) и

$$\lim_{\sigma\to-\infty} \sigma^{-1}\varphi(\sigma) = 0, \qquad \lim_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1}\varphi(\sigma) = \infty, \tag{12.6}$$

то уравнение (12.5) имеет один ненулевой корень σ_0. Соответствующее этому корню состояние равновесия (12.4) устойчиво, если неустойчиво нулевое состояние равновесия, и неустойчиво, если нулевое состояние равновесия устойчиво.

12.2. Перейдем к анализу возмущенной системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_0\xi + d_1\varphi(\sigma) + f_1(t), \\ \frac{dx}{dt} &= Bx + d\varphi(\sigma) + f(t). \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

Здесь $f_1(t)$ и $f(t)$ — пп-функции (первая — скалярная, а вторая — со значениями в пространстве R^m). Будем считать, что функция $\varphi(\sigma)$ монотонная и выпуклая, причем $\alpha_0\varphi'(0) < 1$. Тогда у невозмущенной системы (12.1) есть два состояния равновесия, причем нулевое состояние равновесия устойчиво, а ненулевое — неустойчиво.

Обозначим через σ^* точку максимума функции

$$\psi(\sigma) = \sigma - \alpha_0\varphi(\sigma) \qquad (-\infty < \sigma < \infty),$$

и пусть $\beta^* = \psi(\sigma^*)$.

Введем обозначение

$$N\{f_1, f\} = \sup_{-\infty < t < \infty} \int_{-\infty}^{t} \{c_1 e^{\lambda_0(t-s)} f_1(s) + (e^{B(t-s)} f(s), c)\}\, ds.$$

Теорема. *Если возмущения $f_1(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют односторонней оценке*

$$N\{f_1, f\} < \beta^*,$$

то возмущенная система (12.7) *имеет ровно два пп-решения, одно из которых экспоненциально устойчиво, а второе неустойчиво.*

В условиях этой теоремы устойчивое пп-решение — это единственное пп-решение $\{\xi^*(t), x^*(t)\}$, удовлетворяющее неравенству

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \{c_1\xi^*(t) + (x^*(t), c)\} < \sigma^*.$$

12.3. Система (12.1) автоматического регулирования называется *полностью управляемой*, если векторы $\{d_1, d\}$, $\{\lambda_0 d_1, Bd\}$, ..., $\{\lambda_0^m d_1, B^m d\}$ образуют базис в пространстве R^{m+1}. Каждая полностью управляемая система может быть описана скалярным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}} + a_1\frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + a_{m+1}x = \varphi(\sigma), \tag{12.8}$$

где

$$\sigma = b_{m+1}x + b_m x' + \ldots + b_1 x^{(m)}.$$

Характеристический многочлен

$$\chi(\lambda) = \lambda^{m+1} + a_1\lambda^m + \ldots + a_{m+1}$$

левой части уравнения (12.8) будет гурвицев и будет иметь ведущий отрицательный корень λ_0 (остальные корни λ будут удовлетворять неравенству $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0$). При изучении уравнения (12.8) важную роль играет также многочлен

$$\varkappa(\lambda) = b_1\lambda^m + b_2\lambda^{m-1} + \ldots + b_{m+1}.$$

В п 12.1 был сделан ряд предположений о коэффициентах системы (12.1). При переходе к уравнению (12.8) эти предположения принимают вид неравенств

$$b_1 \geqslant 0, \qquad b_2 > (a_1 + \lambda_0)\, b_1, \tag{12.9}$$

$$\varkappa(\lambda_0) > 0, \qquad 2\varkappa'(\lambda_0)\,\chi'(\lambda_0) < \varkappa(\lambda_0)\,\chi''(\lambda_0) \tag{12.10}$$

и при всех ненулевых ω

$$\operatorname{Re}\frac{\varkappa(\lambda_0 + i\omega)}{\chi(\lambda_0 + i\omega)} < 0. \tag{12.11}$$

Из перечисленных выше условий вытекает, что a_{m+1}, $b_{m+1} > 0$.

Пусть $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условиям п. 12 2 ($\varphi(\sigma)$ — монотонная, выпуклая и выполнены предельные равенства (12.6)) и пусть $b_{m+1}\varphi'(0) < a_{m+1}$. Обозначим через σ^* ненулевой корень уравнения

$$b_{m+1}\varphi'(\sigma) = a_{m+1}.$$

Теорема 12.4. *Пусть возмущение $h(t)$ почти периодично и удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{-\infty < t < \infty} h(t) < \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\sigma^* - \varphi(\sigma^*).$$

Тогда возмущенное уравнение

$$\frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}} + a_1\frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + a_{m+1}x = \varphi(\sigma) + h(t)$$

имеет ровно два пп-решения, одно из которых экспоненциально устойчиво, а второе неустойчиво.

12.4. Развитый в § 12 метод исследования пп-решений систем автоматического регулирования носит общий характер. Он применим и в случае невыпуклых характеристик. В качестве примера приведем одно утверждение о пп-решениях уравнения Дуффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + x = \beta x^3 + h(t), \tag{12.12}$$

где $\beta > 0$, $h(t)$ — пп-функция. *Если $c \geqslant 2$ и*

$$|h(t)| < \frac{2}{3\sqrt{3\beta}} \qquad (-\infty < t < \infty),$$

то уравнение Дуффинга (12.12) *имеет ровно три пп-решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$, удовлетворяющие неравенствам*

$$x_1(t) < -\frac{1}{\sqrt{3\beta}} < x_2(t) < \frac{1}{\sqrt{3\beta}} < x_3(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

При этом решения $x_1(t)$ и $x_3(t)$ неустойчивы, а решение $x_2(t)$ экспоненциально устойчиво. Отличных от $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ пп-решений у уравнения (12.12) нет.

§ 13. Положительные пп-решения уравнений второго порядка.

13.1. В параграфе изучаются скалярные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t,x) \tag{13.1}$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t,\sigma), \tag{13.2}$$

где

$$\sigma=\alpha(t)x+\frac{dx}{dt}, \tag{13.3}$$

а $\alpha(t)$ — пп-функция из $B^1(R^1)$. В уравнениях (13.1) и (13.2) коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ почти периодичны; функция $f(t, u)$ непрерывна по совокупности переменных $u\geqslant 0$, $-\infty<t<\infty$ и равномерно почти периодична по t; при положительных u существует неотрицательная непрерывная производная $f'_u(t, u)$, которая почти периодична по t равномерно относительно значений u из каждого промежутка $[a, b]\subset(0, \infty)$. Предполагается, что среднее $M(p)$ функции $p(t)$ неотрицательно.

Предполагается, что рассматриваемые уравнения имеют нулевое решение ($f(t,0)\equiv 0$). Развитыми в предыдущих параграфах методами изучается вопрос о существовании и устойчивости ненулевых пп-решений.

13.2. Для формулировки основных результатов удобно выделить два специальных класса функций $f(t, u)$.

Будем говорить, что $f(t, u)\in\mathfrak{F}_1$, если она вогнута по u равномерно относительно t в том смысле, что для каждого $\tau\in(0, 1)$ и каждого $u>0$

$$f(t,\tau u)\geqslant(1+\eta)\tau f(t,u)\qquad(-\infty<t<\infty),$$

где $\eta=\eta(\tau, u)>0$; если существует такое $t_0\in(-\infty,\infty)$, что при всех положительных u выполнено неравенство

$$uf'_u(t_0,u)-f(t_0,u)<0,$$

и если, наконец,

$$\lim_{u\to+0}\inf_{-\infty<t<\infty}u^{-1}f(t,u)=\infty$$

и

$$\lim_{u\to\infty}\sup_{-\infty<t<\infty}u^{-1}f(t,u)=0.$$

Типичным примером функций из класса $\mathfrak{F}_1$ могут служить функции u^ν при $0<\nu<1$.

Будем говорить, что $f(t, u) \in \mathfrak{F}_2$, если она выпукла по u равномерно относительно t в том смысле, что для каждого $\tau \in (0, 1)$ и каждого $u > 0$

$$f(t, \tau u) \leqslant (1 - \eta)\tau f(t, u) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

где $\eta = \eta(\tau, u) > 0$; если существует такое $t_0 \in (-\infty, \infty)$, что при положительных u выполнено неравенство

$$uf'_u(t_0, u) - f(t_0, u) > 0;$$

если при каждом положительном u

$$\inf_{-\infty < t < \infty} f(t, u) > 0$$

и если, наконец,

$$\lim_{u \to +0} \sup_{-\infty < t < \infty} u^{-1} f(t, u) = 0$$

и

$$\lim_{u \to \infty} \inf_{-\infty < t < \infty} u^{-1} f(t, u) = \infty.$$

Типичными примерами функций из класса $\mathfrak{F}_2$ могут служить функции u^ν при $\nu > 1$, $e^u - u - 1$, $u \ln(1 + u)$ и т. д.

13.3. Рассмотрим вначале уравнения с вогнутыми нелинейностями: $f(t, u) \in \mathfrak{F}_1$. Будем предполагать, что пп-оператор

$$Lx = \frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt} + q(t)x$$

регулярен и его функция Грина неотрицательна.

В этом случае *уравнение* (13.1) *имеет без всяких дополнительных предположений единственное ненулевое неотрицательное пп-решение. Это пп-решение строго положительно и экспоненциально устойчиво по Ляпунову.*

Перейдем к уравнению (13.2). Предположим дополнительно, что коэффициент $\alpha(t)$ из (13.3) удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} \leqslant \alpha^2(t) - p(t)\alpha(t) + q(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{13.4}$$

которое не является тождественным равенством, и что среднее $M(\alpha)$ удовлетворяет неравенству

$$M(\alpha) \geqslant \frac{1}{2} M(p). \tag{13.5}$$

Тогда *уравнение* (13.2) *имеет единственное пп-решение в классе ненулевых функций из* $B^1(R^1)$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$x(t) \geqslant 0, \ \alpha(t)x(t) + \frac{dx(t)}{dt} \geqslant 0 \qquad (-\infty < t < \infty). \tag{13.6}$$

Это пп-решение строго положительно и экспоненциально устойчиво.

13.4. Рассмотрим уравнения с выпуклыми нелинейностями: $f(t, u) \in \mathfrak{F}_2$. Будем считать, что коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют неравенству

$$M^2(p) - M(p^2) + 4M(q) > 0.$$

В этом случае *уравнение* (13.1) *имеет без всяких дополнительных предположений единственное ненулевое неотрицательное пп-решение. Это пп-решение строго положительно и неустойчиво в обе стороны изменения времени.*

Перейдем к уравнению (13.2). Предположим дополнительно, что коэффициент $\alpha(t)$ из (13.3) удовлетворяет неравенству (13.4) и что $M(\alpha) > 0$. Тогда *уравнение* (13.2) *имеет единственное пп-решение в классе ненулевых функций из* $B^1(R^1)$, *удовлетворяющих неравенствам* (13.6). *Это ненулевое пп-решение строго положительно и неустойчиво в обе стороны изменения времени.*

Глава 4. Уравнения с малым параметром.

§ 14. Линейные уравнения.

14.1. Вначале изучается линейное уравнение

$$Lx = f(t; \varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0) \tag{14.1}$$

с регулярным пп-оператором

$$Lx = \frac{dx}{dt} + A(t)x \tag{14.2}$$

и почти периодической правой частью, зависящей от положительного параметра ε. Выясняется, при каких условиях справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s; \varepsilon)\, ds \right\|_{B(R^n)} = 0, \tag{14.3}$$

где $G(t, s)$ — функция Грина пп-оператора (14.2).

Равенство (14.3), конечно, выполняется, если пп-функции $f(t, \varepsilon)$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ к нулю по норме пространства $B(R^n)$. Однако такое предположение не позволяет изучать предельные переходы даже в простых ситуациях (например, в условиях, когда применяется принцип усреднения Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова). Поэтому важны менее ограничительные условия, при которых справедливо равенство (14.3).

Будем говорить, что $f(t; \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ *интегрально сходится к нулю*, если при каждом положительном T

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|t-s| \leqslant T} \left| \int_s^t f(\tau; \varepsilon)\, d\tau \right| = 0. \tag{14.4}$$

Если дополнительно к (14.4) выполнено условие

$$\| f(t; \varepsilon \|_{B(R^n)} \leqslant m < \infty \qquad (0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0),$$

то будем говорить, что $f(t; \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ *сходится к нулю правильно*,

Для выполнения равенства (14.3) *достаточно, чтобы* $f(t;\ \varepsilon)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *сходилась к нулю правильно, и необходимо, чтобы она сходилась к нулю интегрально.*

Отсюда вытекает, в частности, справедливость (14.3), если $f(t;\ \varepsilon) = f_0(t/\varepsilon)$, где $f_0(t)$ — пп-функция с нулевым средним

14.2. Рассмотрим семейство пп-операторов

$$L(\varepsilon)\,x = \frac{dx}{dt} + A(t;\ \varepsilon)\,x \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0). \tag{14.5}$$

Будем говорить, что пп-матрицы $A(t;\ \varepsilon)$ *правильно сходятся к пп-матрице* $A(t)$ при $\varepsilon \to 0$, если при каждом положительном T выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|t-s| \leqslant T} \left| \int_s^t [A(\tau;\ \varepsilon) - A(\tau)]\, d\tau \right| = 0$$

и если

$$|A(t;\ \varepsilon)| \leqslant m < \infty \qquad (-\infty < t < \infty,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0).$$

Теорема 14.1. *Пусть оператор* (14.2) *регулярен. Пусть пп-матрицы* $A(t;\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ *правильно сходятся к пп-матрице* $A(t)$.

Тогда при достаточно малых положительных ε *пп-операторы* (14.5) *регулярны и*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{-\infty < s,\, t < \infty} e^{\gamma_0 |t-s|}\, |G(t, s;\ \varepsilon) - G(t, s)| = 0,$$

где $G(t, s;\varepsilon)$, $G(t, s)$ — *функции Грина соответственно операторов* (14.5) *и* (14.2), *а* γ_0 — *некоторое положительное число.*

В условиях этой теоремы операторы (14.5) при малых ε устойчивы, если устойчив пп-оператор (14.2), и неустойчивы, если неустойчив пп-оператор (14.2).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1(t)\,x + \varepsilon B(t;\ \varepsilon)\,x \qquad (0 < \varepsilon < \varepsilon_0). \tag{14.6}$$

Здесь $A_1(t)$ и $B(t;\ \varepsilon)$ — пп-матрицы и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{-\infty < t < \infty} |B(t;\ \varepsilon)| = 0. \tag{14.7}$$

Через A_0 обозначим среднее матрицы $A_1(t)$:

$$A_0 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} A_1(t)\, dt.$$

Теорема 14.3. *Если матрица* A_0 *гурвицева, то при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *нулевое решение уравнения* (14.6) *экспоненциально устойчиво. Если же у матрицы* A_0 *есть по крайней мере одно собственное значение в правой полуплоскости, то при достаточно малых* ε *нулевое решение уравнения* (14.6) *неустойчиво.*

Исследование устойчивости нулевого решения уравнений (14.6) существенно усложняется, если у матрицы нет собственных значений в правой полуплоскости, но есть собственные значения на мнимой оси.

14.3. Пусть уравнение (14.6) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1(t)\,x + \varepsilon^2 A_2(t)\,x + \ldots + \varepsilon^k A_k(t)\,x + \varepsilon^{k+1} C(t;\ \varepsilon)\,x, \qquad (14.8)$$

где $A_1(t), \ldots, A_k(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, а $C(t;\ \varepsilon)$ — пп-матрицы, равномерно относительно t непрерывные по $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Излагается *метод Н. Н. Боголюбова — И. З. Штокало* построения такой замены переменных:

$$x = [I + \varepsilon Y_1(t) + \ldots + \varepsilon^k Y_k(t)]\,y \qquad (14.9)$$

(здесь $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ — пп-матрицы), после которой система (14.8) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = = \varepsilon B_1 y + \varepsilon^2 B_2 y + \ldots + \varepsilon^k B_k y + \varepsilon^{k+1} D(t;\ \varepsilon)\,y \qquad (14.10)$$

уравнения с постоянными матрицами $B_1, \ldots, B_k$ и пп-матрицей $D(t;\ \varepsilon)$, обладающей теми же свойствами, что и матрица $C(t;\ \varepsilon)$.

Предположим, что у матрицы B_1 есть простое нулевое собственное значение, а остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости. Тогда у матрицы

$$B(\varepsilon) = B_1 + \varepsilon B_2 + \ldots + \varepsilon^{k-1} B_k \qquad (14.11)$$

при малых ε есть аналитически зависящее от ε простое собственное значение $\lambda(\varepsilon)$, которое при $\varepsilon = 0$ обращается в нуль. Остальные собственные значения при малых ε лежат в левой полуплоскости. Собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ можно представить рядом

$$\lambda(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_1\varepsilon^2 + \ldots + a_j\varepsilon^j + \ldots, \qquad (14.12)$$

коэффициенты которого легко определить методами теории возмущений.

Пусть a_{j_0} — первый отличный от нуля коэффициент ряда (14.12), причем $j_0 \leqslant k - 1$.

Теорема 14.4. *Если $a_{j_0} < 0$, то пп-операторы*

$$L(\varepsilon)\,x = \frac{dx}{dt} - [\varepsilon A_1(t) + \ldots + \varepsilon^k A_k(t) + \varepsilon^{k+1} C(t;\ \varepsilon)]\,x \qquad (14.13)$$

при малых положительных ε регулярны и устойчивы. Если же $a_{j_0} > 0$, то пп-операторы (14.13) *при малых положительных ε регулярны и неустойчивы.*

§ 15. Бифуркация пп-решений.

15.1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x;\ \mu) \qquad (15.1)$$

с зависящей от скалярного параметра μ правой частью, почти периодической по t. Будем считать, что правая часть гладкая по всем переменным. Пусть при $\mu = \mu_0$ у системы (15.1) есть пп-решение $x^*(t)$, причем пп-оператор

$$L_0 x = \frac{dx}{dt} - f'_x [t, x^*(t); \mu_0] x \tag{15.2}$$

регулярен. Тогда у системы (15.1) есть единственное непрерывно зависящее от μ семейство $x(t; \mu)$ пп-решений, определенное при близких к μ_0 значениях μ и обращающееся в $x^*(t)$ при $\mu = \mu_0$. Для построения решения $x(t; \mu)$ можно, например, перейти от системы (15.1) к нелинейному интегральному уравнению

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, s) \{f[s, x(s); \mu] - f'_x [s, x^*(s); \mu_0] x(s)\} ds,$$

где $G_0(t, s)$ — функция Грина пп-оператора (15.2), и заметить, что решение этого интегрального уравнения является равномерным пределом последовательных приближений

$$x_{n+1}(t; \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(t, s) \{f[s, x_n(s; \mu); \mu] - f'_x [s, x^*(s); \mu_0] x_n(s; \mu)\} ds,$$

если начальное приближение $x_0(t; \mu)$ определить равенством $x_0(t; \mu) = x^*(t)$.

Существенно сложнее задача о продолжении пп-решений в случае, когда пп-оператор (15.2) нерегулярен. В этом случае задача о продолжении пп-решений превращается в задачу о ветвлении пп-решений. Эта задача исследована недостаточно.

Рассматривается частный случай задачи о ветвлении — задача о рождении пп-решений из состояния равновесия.

Предположим, что у системы (15.1) при всех μ есть нулевое решение. Число μ_0 называется *точкой бифуркации*, если каждому $\eta > 0$ соответствует такое $\mu \in (\mu_0 - \eta, \mu_0 + \eta)$, при котором система (15.1) имеет ненулевое решение $x(t; \mu)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t; \mu)\|_{B(R^n)} < \eta.$$

Точками бифуркации могут быть только такие μ, *при которых пп-оператор*

$$L(\mu) x = \frac{dx}{dt} - f'_x (t, 0; \mu) x \tag{15.3}$$

не обладает свойством регулярности. Пусть μ_0 — одно из таких значений. Положим тогда $\mu = \mu_0 + \varepsilon$ и запишем систему (15.1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x; \varepsilon). \tag{15.4}$$

Задача заключается в выяснении условий, при которых система (15.4) при малых ε имеет малые почти периодические ненулевые решения.

15.2. Пусть уравнение (15.4) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1(t)x + \ldots + \varepsilon^k A_k(t)x + \varepsilon^{k+1}C(t;\ \varepsilon)x + \\ + \varepsilon F(t, x;\ \varepsilon) + \varepsilon\omega(t, x;\ \varepsilon). \qquad (15.5)$$

Здесь матрицы $A_1(t), \ldots, A_k(t)$ и $C(t;\varepsilon)$ обладают теми же свойствами, что и соответствующие коэффициенты уравнения (14.8); $F(t, x;\varepsilon)$ — форма порядка $m \geqslant 2$ по пространственным переменным, коэффициенты которой являются тригонометрическими многочленами, равномерно относительно t непрерывными по ε; остаток $\omega(t, x;\varepsilon)$ содержит члены высшего чем m порядка малости по пространственным переменным.

Допустим, что при помощи замены (14.9) найдена матрица (14.11). Пусть у матрицы B_1 нуль является простым собственным значением, а остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости. Обозначим через e_0 и g_0 собственные векторы матриц B_1 и B_1^*, отвечающие нулевому собственному значению и нормированные равенством $(e_0, g_0) = 1$.

Пусть a_{j_0} — первый ненулевой коэффициент разложения (14.12) наибольшего собственного значения $\lambda(\varepsilon)$ матрицы (14.11), причем $j_0 \leqslant k-1$. Положим

$$\overline{F}(x;\ \varepsilon) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t, x;\ \varepsilon)\,dt \qquad (x \in R^n)$$

и

$$\overline{\omega}(x;\ \varepsilon) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \omega(t, x;\ \varepsilon)\,dt \qquad (x \in R^n).$$

Если в уравнении (15.5) перейти к «медленному» времени $\tau = \varepsilon t$, то новое уравнение будет иметь смысл, конечно, лишь при $\varepsilon \neq 0$. Естественно считать, что при $\varepsilon = 0$ это последнее уравнение переходит в «усредненное» уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = B_1 x + \overline{F}(x;\ 0) + \overline{\omega}(x;\ 0). \qquad (15.6)$$

Теорема 15.1. *Пусть*

$$\alpha_0 = (\overline{F}(e_0;\ 0),\ g_0) \neq 0.$$

Тогда существует такой шар $V(r_0) = \{x(t):\ x(t) \in B(R^n),\ \|x\| < r_0\}$ *и такое* $\varepsilon_0 > 0$, что

1°. *Уравнение* (15.6) *не имеет в шаре* $V(r_0)$ *ненулевых решений.*

2°. *Если* m *четно, то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (15.5) *имеет в шаре* $V(r_0)$ *единственное ненулевое пп-решение; это решение экспоненциально устойчиво при* $a_{j_0} > 0$ *и неустойчиво при* $a_{j_0} < 0$.

3°. *Если m нечетно и $\alpha_0 a_{j_0} < 0$, то при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ уравнение* (15.5) *имеет в шаре $V(r_0)$ ровно два ненулевых решения, которые экспоненциально устойчивы при $a_{j_0} > 0$ и неустойчивы при $a_{j_0} < 0$.*

4°. *Если m нечетно и $\alpha_0 a_{j_0} > 0$, то при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ уравнение* (15.5) *не имеет в шаре $V(r_0)$ ненулевых решений.*

Доказательство этой просто формулируемой теоремы использует ряд специальных приемов, кроме применения интегральных уравнений и построения различных инвариантных конусов.

15.3. В качестве примера рассматривается уравнение

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\varepsilon\dot{\theta} + [\varepsilon^2 k^2 - \varepsilon p''(t)] \sin\theta = 0 \tag{15.7}$$

колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса. Изучается вопрос о рождении пп-решений уравнения (15.7) из верхнего состояния равновесия ($\theta = \pi$).

Верхнее состояние равновесия экспоненциально устойчиво, если $M[(p')^2] > k^2$. Если же $M[(p')^2] < k^2$, то оно неустойчиво.

Поэтому появление при малых ε близких к верхнему состоянию равновесия и отличных от этого состояния равновесия пп-колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса происходит лишь в случае, если $M[(p')^2] = k^2$. Общая картина здесь следующая: *если верхнее состояние равновесия маятника неустойчиво, то при малых $\varepsilon > 0$ в его окрестности нет пп-колебаний; если верхнее состояние равновесия устойчиво, то в каждой его окрестности при малых $\varepsilon > 0$ есть ровно два пп-колебания, которые неустойчивы.*

Для исследования устойчивости верхнего состояния равновесия маятника в случае равенства

$$M[(p')^2] = k^2 \tag{15.8}$$

удобно применять процедуру, основанную на заменах (14.9). Например, из (15.8) и из $M[p(p')^2] < 0$ вытекает, что при малых положительных ε верхнее состояние равновесия устойчиво, а из (15.8) и из $M[p(p')^2] > 0$ вытекает, что оно неустойчиво.

§ 16. Бифуркация пп-решений сингулярно возмущенных уравнений второго порядка.

16.1. Рассматривается вопрос о малых ненулевых пп-решениях скалярного уравнения

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + q(t)x = a(t)x^n + \omega(t, x) \tag{16.1}$$

колебаний груза малой массы на упругом элементе с нелинейной восстанавливающей силой. Здесь ε — малый положительный параметр, $q(t) \in B^2(R^1)$, $a(t) \in B^1(R^1)$, $n \geqslant 2$, $\omega(t, x)$ почти периодична по t и содержит лишь члены высшего чем n порядка малости по переменной x. Предполагается, что $M(q) = 0$ (*это равенство необходимо для существования ненулевых малых пп-решений у уравнения* (16.1) *при малых $\varepsilon > 0$*), что неопределенные интегралы от некоторых конструируемых по $a(t)$ и $q(t)$ пп-функций с нулевым средним являются пп-функциями.

Пп-функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ называются *сравнимыми, если либо* $x_1(t) \geqslant x_2(t)$, *либо* $x_1(t) \leqslant x_2(t)$ при всех t.

Теорема 16.1. *Пусть* $q(t) \not\equiv 0$ *и*

$$M(b) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(t) e^{-(n-1)\int_0^t q(s)\,ds} dt \neq 0.$$

Тогда существуют такой шар $V(r_0)$ *и такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что*

1°. *При* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *нулевое решение уравнения* (16.1) *экспоненциально устойчиво.*

2°. *Если* n *четно, то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.1) *имеет по крайней мере одно ненулевое неустойчивое пп-решение в шаре* $V(r_0)$. *Все пп-решения* $x(t;\ \varepsilon)$ *из шара* $V(r_0)$ *сравнимы друг с другом; при этом* $M(b)x(t;\ \varepsilon) > 0$ $(-\infty < t < \infty)$.

3°. *Если* n *нечетно и* $M(b) > 0$, *то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.1) *имеет в шаре* $V(r_0)$ *по крайней мере одно положительное и по крайней мере одно отрицательное неустойчивые пп-решения. Все пп-решения из шара* $V(r_0)$ *знакопостоянные и сравнимы друг с другом.*

4°. *Если* n *нечетно и* $M(b) < 0$, *то при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение* (16.1) *не имеет в шаре* $V(r_0)$ *ненулевых пп-решений.*

16.2. Естественно ожидать, что в условиях утверждения 2° теоремы 16.1 у уравнения (16.1) есть лишь одно ненулевое пп-решение в шаре $V(r_0)$, а в условиях утверждения 3° — ровно два таких решения. Этот факт удалось установить лишь при дополнительном предположении о том, что либо $a(t) \gg 0$, либо $a(t) \ll 0$.

16.3. Теорема 16.1 переносится на более общие уравнения

$$\varepsilon\,[m_0(t) + m(t;\ \varepsilon)]\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + [q_0(t) + \varepsilon q_1(t) + \varepsilon q(t;\ \varepsilon)]\,x = \\ = [a_0(t) + a(t;\ \varepsilon)]\,x^n + \omega(t,\ x;\ \varepsilon).$$

При этом во всех условиях и предположениях нужно заменить функции $q(t)$ и $a(t)$ функциями $q_0(t)$ и $a_0(t)$; нужно функцию $m_0(t)$ считать строго положительной; условие $q(t) \not\equiv 0$ нужно заменить предположением, что отлично от нуля среднее функции

$$\lambda_0(t) = q_1(t) - m_0(t)\,\frac{dq_0(t)}{dt} + m_0(t)\,q_0^2(t).$$

В качестве примера рассмотрены малые пп-колебания в горизонтальной плоскости маятника с медленно меняющейся длиной $l(\varepsilon t)$ нити и с вибрирующей по закону $\varepsilon^{-1}p(\varepsilon t)$ точкой подвеса.

ЛИТЕРАТУРА

Не ходи по косогору, сапоги стопчешь.

Козьма Прутков.

Айзерман М. А. и Гантмахер Ф. Р.

1. Абсолютная устойчивость регулируемых систем, Изд-во АН СССР, 1963.

Америо Л. (Amerio L.)

1. Soluzioni quasiperiodiche, o limitati, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati, Ann. mat. pura ed appl. **39** (1955), 97—119.

Арнольд В. И.

1. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН **XVIII**, вып. 6 (114) (1963).

Барбашин Е. А.

1. Введение в теорию устойчивости, «Наука», 1967.

Бахтин И. А.

1. Об одном классе уравнений с положительными операторами, ДАН СССР **117**, № 1 (1957), 13—16.

Бахтин И. А., Красносельский М. А. и Стеценко В. Я.

1. О непрерывности линейных положительных операторов, Сиб. матем. ж. **3**, № 1 (1962), 156—160.

Бережной В. Н. и Колесов Ю. С.

1. Об одном признаке устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений n-го порядка, ПММ **33**, № 3 (1969).

Боголюбов Н. Н.

1. Sur l'approximation des fonctions par les sommes trigonométriques, ДАН СССР (А) (1930), 147—152.
2. О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1945.
3. Теория возмущений в нелинейной механике, Сб. Тр. Ин-та строит. механ. АН УССР, № 14 (1950), 9—34.

Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А.

1. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.

Боль П. (Bohl P.)

1. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie, Grelles Journ. **131** (1906), 268—321.

Бор Г. (Bohr H)

1. Zur Theorie des fastperiodischen Funktionen I, Acta math. **45** (1925), 29—127.
2. Zur Theorie des fastperiodischen Funktionen. II, Acta math. **46** (1925), 101—214.
3. Почти периодические функции, ГТТИ, 1934.

Бохнер С. (Bocher S.)
1. Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I. Funktionen einer Variabeln, Math. Ann. **96** (1927), 119—147.
Брэйтон Р. К. и Мозер Ю. (Brayton R. K., Moser J.).
1. A theory of nonlinear networks, I, Quart. Appl. Math. **22** (1964).
Бурд В. Ш.
1. К задаче о разветвлении почти периодических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН СССР **159**, № 2 (1964), 239—242.
Бурд В. Ш., Забрейко П. П., Колесов Ю. С. и Красносельский М. А.
1. Принцип усреднения и бифуркация почти периодических решений, ДАН СССР **187**, № 6 (1969), 1219—1221.
2. Малые комбинационные колебания и принцип усреднения, Пятая международная конференция по нелинейным колебаниям, Киев, 1969, 40.
Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. и Красносельский М. А.
1. Нелокальные проблемы теории почти периодических решений дифференциальных уравнений, Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Аннотации докладов, Москва, 1968, 53.
2. Исследование функции Грина дифференциальных операторов с почти периодическими коэффициентами, Изв. АН СССР, сер. матем. **33**, № 5 (1969).
3. О существовании и знакопостоянстве функций Грина скалярных уравнений высших порядков с почти периодическими коэффициентами, Изв. АН СССР, сер. матем. **33**, № 6 (1969).
4. Бифуркация почти периодических решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, УМН **XXV**, вып. 1 (151) (1970).
Бурд В. Ш. и Сабиров Т.
1. Об устойчивости разветвляющихся почти периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР **176**, № 5 (1967), 991—993.
Валле-Пуссен Ш. Ж. (De la Vallee-Poussin C. J.)
1. Sur les fonctions presque-periodiques de H. Bohr, Ann. Soc. Scient Bruxelles, Sér. I **47** (1927), 141—158.
Вейль Г. (Weyl H.)
1. Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, Math. Ann. **97** (1927), 338—356.
Винер Н. (Wiener N.)
1. Generalised harmonic analysis, Acta math. **55** (1930), 117—258.
Гантмахер Ф. Р.
1. Теория матриц, «Наука», 1967.
Гантмахер Ф. Р. и Якубович В. А.
1. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем, Тр. 2-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике **1** (1963), 30—63.
Гельфанд И. М.
1. Лекции по линейной алгебре, «Наука», 1966.

Данфорд Н. и Шварц Дж.
1. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1962.
Демидович Б. П.
1. Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. сб. **40** (82), № 1 (1956), 73—94.
2. Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», 1967.
Зубов В. И.
1. Колебания в нелинейных и управляемых системах, Судпромгиз, 1962.
Еругин Н. П.
1. Приводимые системы, Тр. Матем. ин-та АН СССР **13** (1946).
2. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во АН БССР, 1963.
Калман Р. Э (Kalman R. E.)
1. Liapunov Functions for the Problem of Lurie in Automatic Controls, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **49** (1963), 201—205.
Капица П. Л.
1. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса, ЖЭТФ **21**, № 5 (1951), 588—597.
Коддингтон Е Л. и Левинсон Н.
1. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.
Колесов Ю. С.
1. Положительные периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Диссертация, Воронеж, 1966.
2. Об условиях существования инвариантного конуса у одного класса дифференциальных уравнений n-го порядка, Тр. Семинара по функциональному анализу, вып. 9. Воронеж, 1967.
Колесов Ю. С. и Левин А. Ю.
1. О знаке функции Грина некоторых периодических краевых задач, Сб. «Пробл. матем. анализа сложных систем», вып. 1, Воронеж, 1967, 40—43.
Коллатц Л.
1. Функциональный анализ и вычислительная математика, «Наука», 1968.
Колмогоров А. Н.
1. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, ДАН СССР **98**, № 4 (1954).
Коппель В. А. (Coppel W. A.)
1. Dichotomies and reducibility, J. Diff. Equac, **3**, № 3 (1967), 500—521.
Кордуняну К. (Corduneanu C.)
1. Functii aproape-periodice, Editur Acad. RPR, 1961.
Красносельский М. А.
1. Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз.
2. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, «Наука», 1966
Красносельский М. А., Вайникко Г. И., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.
1. Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969.

Красносельский М. А. и Ладыженский Л. А.
1. Структура спектра положительных неоднородных операторов. Тр. Моск. матем. о-ва **3** (1954), 321—346.
Красносельский М. А. и Стеценко В Я.
1. К теории уравнений с вогнутыми операторами, Сиб. матем. ж. **X**, № **3** (1969), 565—572.
Красовский Н. Н.
1. Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, 1959.
Крейн М. Г.
1. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Изд-во АН УССР, Ин-т матем., 1964.
Крейн М. Г. и Рутман М. А.
1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН **III**, вып. 1 (23) (1948), 3—95.
Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.
1. Механика, Физматгиз, 1958.
Ландау Э. (Landau E.)
1. Über einen Satz von Herrn Esclangon, Math. Ann. **102** (1930).
Левин А. Ю.
1. Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$, УМН XX, вып. 2 (122) (1965), 244—266.
2. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$, УМН **XXIV**, вып. 2 (146) (1969), 43—96.
Левитан Б. М.
1. Почти-периодические функции, Гостехиздат, 1953.
Лефшец С.
1. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления, «Мир», 1967.
Лурье А. И.
1. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
Ляпунов А. М.
1. Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
Малкин И. Г.
1. Теория устойчивости движения, Физматгиз, 1966.
2. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.
Маркус Л. и Мур Р. А. (Markus L., Moore R. A.)
1. Oscillation and disconjugacy for linear differential equations with almost periodic coefficients, Acta Math. **96** (1956), 99—123.
Массера Д. Л. (Massera J. L.)
1. Un criterio di existencia de soluciones casi-periodicas de ciertos sistemas de ecuaciones differenciales casi-periodicas, Bol. Fac. ingr. y agrimensura Montevideo **6**, № 11 (1958), 345—349.
Массера Д. Л. и Шеффер И. И. (Massera J. L. and Schäffer J. J.)
1. Linear Differential equations and functional Analysis. I. Ann. Math. **67**, № 3 (1958), 517—573.

2. Linear Differential equations and function Spaces, N. Y., Acad, Press, 1966.

Мейерс Ф. Р. (Meyers Ph. R.)

1. A converse to Banach's contraction theorem, J. Res. Nat. Bureau Standards, B 71, № 2—3 (1967), 73.

Митропольский Ю. А.

1. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд-во АН УССР, 1955.

Мозер Ю. (Moser J.)

1. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения, УМН **XXIII**, вып. 4 (142), 1968, 179—238.
2. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды, УМН **XXIV**, вып. 2 (146), 1969, 165—211.
3. О неколебательных цепях, Сб. «Механика» **111**, № 5 (1968).
4. Combination tones for Duffing's equation, Communs. Pure and Appl. Math. **18**, № 1—2 (1965), 167—181.

Наумов Б. Н. и Цыпкин Я. З.

1. Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика **XXV**, № 6 (1964), 852—867.

Перов А. И.

1. Периодические, почти периодические и ограниченные решения дифференциальных уравнений, ДАН СССР **132**, № 3 (1960).

Перрон О. (Perron O.)

1. Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssysteme, Math. Z. **29**, № 1 (1928).

Петровский И. Г.

1. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1964.

Плисс В. А.

1. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Изд-во ЛГУ, 1958.

Покровский А. В.

1. Почти-периодические функции со значениями в переменном конусе в банаховом пространстве, Тр. Семинара по функциональному анализу, вып. 11 (Сб. «Пробл. матем. анализа сложных систем», вып. 3), Воронеж, 1968, 199—204.

Пятницкий Е. С.

1. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика **XXIX**, № 6 (1968), 5—36.

Соболь И. М.

1. Граничное решение уравнения Риккати и его применения к исследованию решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка, Уч. зап. МГУ, матем. **5**, вып. 155 (1952).

Стокер Дж.

1. Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, 1952.

Фавар Ж. (Favard J.)

1. Sur les equations différentielles à coefficients presque-périodiques. Acta math. **51** (1927), 31—81.

Флатто Л. и Левинсон Н. (Flatto L. and Levinson N.)
1. Periodic Solutions of singularly Perturbed Equations, J. Math. Mech. 4 (1955) 943—950.
Фридрихс К. О., Корбелье Ф., Левинсон Н и Стокер Дж. (Friedrichs K. O., le Corbeiller Ph., Levinson N. and Stoker J. J.)
1. Non-linear mechanics. Brown. Univ., Lecture notes, 1942—1943.
Халанай А. (Halanay A.)
1. Soluţii aproape-periodice ale ecuatiei Riccati. Studii şi cercetări mat. Acad. RPR **IV**, № 3—4 (1953), 345—354.
2. Почти-периодические решения нелинейных систем с малым параметром. Ж. чистой и прикладной матем. Acad. RPR **1**, № 2 (1956).
3. Teoria calitativă a ecuaţiilor differenţiale, Acad. RPR, 1963.
Харди Г. Х., Литтльвуд Дж. и Полиа Г.
1. Неравенства, ИЛ, 1948.
Хаусдорф Ф.
1. Теория множеств, ОНТИ, 1937.
Хейл Дж.
1. Колебания в нелинейных системах, «Мир», 1966.
Хейл Дж. и Зейферт Г. (Hale J. K. and Seifert G.)
1. Bounded and Almost Periodic Solutions of Singularly Perturbed Equations, J. Math. Anal. and Appl. 3 (1961), 18—24.
Штокало И. З.
1. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, Изд-во АН УССР, 1960
Эсклангон Е. (Esclangon E.)
1. Sur les intégrales bornées d'une equation différentielle linéaire, C. R. Ac. de Sc. **160** (1915), 475—478.
Якубович В. А.
1. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования, ДАН СССР **143**, № 6 (1962), 1304—1307.
2. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний, Автоматика и телемеханика **XXV**, № 7 (1964), 1017—1029.
3. Частотные условия абсолютной устойчивости стационарных режимов и вынужденных колебаний, Тр. Международной конференции по многомерным и дискретным системам автоматического регулирования, Прага, 1965.
4. Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими, вообще говоря, разрывными нелинейностями, ДАН СССР **171**, № 3 (1967), 533—536.

Марк Александрович Красносельский
Владимир Шепселевич Бурд,
Юрий Серафимович Колесов

Нелинейные почти периодические колебания

(Серия: «Нелинейный анализ и его приложения»)

М., 1970 г., 352 стр. с илл.

Редактор *И. М. Овчинникова*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректор *И. Я. Кришталь*

Сдано в набор 5/I 1970 г. Подп. к печати 10/VI 1970 г.
Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 11. Условн. печ.
л. 18,48. Уч.-изд. л. 18,28. Тираж 7400 экз.
Т-09739. Цена книги 1 р. 33 к. Заказ № 454.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ
В. Ш. БУРД
Ю. С. КОЛЕСОВ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ